

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS NA ANÁLISE DINÂMICA DE  
PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS DE PLACAS DELGADAS E ESPESSAS

Fernanda Rodrigues Mittelbach

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
CIVIL.

Aprovada por:

---

Prof. Luiz Fernando Taborda Garcia, D. Sc.

---

Prof. Webe João Mansur, Ph. D.

---

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D. Sc.

---

Prof. Luis Volnei Sudati Sagrilo, D. Sc.

---

Prof. Paulo Batista Gonçalves, D. Sc.

---

Prof. José Antonio Marques Carrer, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MITTELBACH, FERNANDA RODRIGUES

Método das Diferenças Finitas Energéticas na  
Análise Dinâmica de Problemas Axissimétricos  
de Placas Delgadas e Espessas [ Rio de Janeiro]  
2007

XIII, 109 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ), D.Sc.,  
Engenharia Civil, 2007)

Tese – Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Placas Axissimétricas
  2. Método das Diferenças Finitas Energéticas
  3. Análise Dinâmica
- I. COPPE/UFRJ II. Título ( série )

Com amor e admiração à  
minha mãe. Que eu tenha, um  
dia, tanta força e determinação  
quanto ela.

## AGRADECIMENTOS

Ao amigo e orientador Luiz Fernando Taborda Garcia, simplesmente por TUDO.

Ao amigo e mais novo orientador Webe João Mansur pela orientação, pelo incentivo e pela atenção e preocupação dispensadas.

Ao professor Roberto Fernandes de Oliveira pelo auxílio teórico em nossas “dúvidas matemáticas”.

Aos familiares e amigos pela paciência, compreensão e amizade.

Aos amigos e companheiros de todos os dias Fê, Ivone, João, Thilene, Aninha, Flávio e Vasconcellos, por toda ajuda e amizade .

À minha querida avó Ilda por todo o amor e dedicação.

Ao Pedro por alegrar minha vida mesmo nos momentos mais críticos.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS ENERGÉTICAS NA ANÁLISE DINÂMICA DE PROBLEMAS AXISSIMÉTRICOS DE PLACAS DELGADAS E ESPESSAS

Fernanda Rodrigues Mittelbach

Dezembro/2007

Orientadores: Luiz Fernando Taborda Garcia

Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho trata da utilização do método das diferenças finitas energéticas na análise dinâmica linear e não linear geométrica de placas circulares delgadas e espessas submetidas a carregamentos axissimétricos, incluindo o caso de solicitações térmicas.

Além do método de Newmark, utiliza-se também um processo de marcha no tempo baseado em funções de Green, cujo desempenho é comparado ao daquele método.

São apresentados alguns exemplos de aplicação, visando, através de comparação com resultados oriundos do método dos elementos finitos e de soluções analíticas disponíveis, comprovar a eficácia do tratamento numérico proposto para o problema.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

THE ENERGETIC FINITE DIFFERENCE METHOD IN THE ANALYSIS OF  
AXISYMMETRIC PROBLEMS OF THIN AND THICK PLATES

Fernanda Rodrigues Mittelbach

December/2007

Advisors: Luiz Fernando Taborda Garcia  
Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

This work presents a numerical treatment by means of the energetic finite difference method applied to the dynamic linear and non linear analysis of thin and thick plates. Only axisymmetric loading, including thermal effects, are considered.

Besides the Newmark's method, a time stepping method based on Green functions is used and results obtained by both methods are compared.

Finally, some examples are considered in order to verify the efficiency of the numerical approach proposed for this kind of structure, by comparing the present approach results with those obtained by the finite element method and analytical solutions.

## ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2 - ANÁLISE LINEAR DINÂMICA DE PLACAS DELGADAS .....	8
2.1 – INTRODUÇÃO .....	8
2.2 – TRATAMENTO ANALÍTICO DO PROBLEMA .....	8
2.2.1 – Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.) .....	8
2.2.2 – Hipóteses Básicas.....	9
2.2.3 – Placa Circular .....	9
2.2.4 – Trabalho Virtual Interno.....	10
2.2.5 – Trabalho Virtual Externo .....	12
2.3 – TRATAMENTO NUMÉRICO DO PROBLEMA.....	14
2.3.1 – Discretização e Sistemas de Numeração da Placa .....	14
2.3.2 – Representações em Diferenças Finitas para as Derivadas Espaciais dos Deslocamentos .....	16
2.3.2.1 – Derivadas do Deslocamento $u$ .....	16
2.3.2.2 – Derivadas do Deslocamento $w$ .....	17
2.3.2.2.1 – Derivada Primeira para o Trecho de Integração Intermediário:.....	17
2.3.2.2.2 – Derivada Primeira para os Trechos de Integração Inicial e Final ..	17
2.3.2.2.3 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Intermediário.....	18
2.3.2.2.4 – Derivada Segunda para os Trechos de Integração Inicial e Final .	18
2.3.3 – Representação pelo Método da Aceleração Constante para as Derivadas Temporais dos Deslocamentos.....	19
2.3.4 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno .....	20
2.3.5 – Avaliação do Trabalho Virtual Externo.....	22
2.3.6 – Montagem da Matriz dos Coeficientes.....	23
2.3.7 – Montagem do Vetor de Cargas .....	24
2.3.8 – Sistema de Equações e Condições de Contorno .....	24
2.4 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	25
2.4.1 – Exemplo 1: Placa Circular com a Imposição de Deslocamentos Iniciais...	26
2.4.2 – Exemplo 2: Placa Circular com Carregamento Uniforme Constante no Tempo .....	28
2.5 – COMENTÁRIOS .....	30
CAPÍTULO 3 - ANÁLISE LINEAR DINÂMICA DE PLACAS ESPESAS .....	31
3.1 – INTRODUÇÃO .....	31
3.2 – TRATAMENTO ANALÍTICO DO PROBLEMA .....	31

3.2.1 – Hipóteses Básicas.....	31
3.2.2 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno .....	31
3.2.3 – Trabalho Virtual Externo .....	34
3.2.4 – Determinação do Coeficiente de Cisalhamento K .....	35
3.3 – TRATAMENTO NUMÉRICO DO PROBLEMA.....	38
3.3.1 – Discretização e Sistemas de Numeração da Placa .....	38
3.3.2 – Representações em Diferenças Finitas para as Derivadas Espaciais dos Deslocamentos .....	39
3.3.2.1 – Derivadas dos Deslocamentos $u$ e $w$ e da Rotação $\psi$ .....	40
3.3.3 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno .....	40
3.3.4 – Avaliação do Trabalho Virtual Externo.....	41
3.3.5 – Montagem da Matriz dos Coeficientes.....	42
3.3.6 – Montagem do Vetor de Cargas .....	42
3.3.7 – Sistema de Equações e Condições de Contorno .....	43
3.4 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	43
3.4.1 – Exemplo 1: Análise Estática de uma Placa Circular Engastada com Carregamento Uniformemente Distribuído .....	43
3.4.2 – Exemplo 2: Análise Estática de uma Placa Circular Apoiada com Carregamento Uniforme: Simulação Numérica da Teoria de Kirchhoff .....	46
3.4.3 – Exemplo 3: Análise Estática de uma Placa Circular Submetida a um Gradiente de Temperatura.....	48
3.4.4 – Exemplo 4: Análise Dinâmica de uma Placa Circular Apoiada com a Imposição de Deslocamentos Iniciais .....	50
3.4.5 – Exemplo 5: Análise Dinâmica de uma Placa Circular Apoiada com Carregamento Uniforme Constante no Tempo .....	53
3.5 – COMENTÁRIOS .....	54
<b>CAPÍTULO 4 - MÉTODO BASEADO EM FUNÇÕES DE GREEN NUMÉRICAS PARA A MARCHA NO TEMPO NA ANÁLISE LINEAR DINÂMICA DE PLACAS.....</b>	<b>56</b>
4.1 – INTRODUÇÃO .....	56
4.2 – PROCESSO DE MARCHA NO TEMPO POR FUNÇÕES DE GREEN .....	56
4.2.1 – Utilização da Transformada de Laplace na Solução da Equação de Equilíbrio Dinâmico .....	56
4.2.2 – Matriz de Funções de Green Associada à Equação de Equilíbrio Dinâmico .....	58
4.2.3 – Equivalência entre Carregamento Impulsivo e Imposição de Condições Iniciais .....	59

4.2.4 – Marcha no Tempo .....	60
4.2.5 – Mudança de Variável no Processo de Marcha no Tempo .....	61
4.3 – TRATAMENTO NUMÉRICO DO PROBLEMA.....	63
4.3.1 – Determinação da Matriz de Massa M e do Vetor de Cargas Q .....	63
4.3.2 – Representação Numérica para a Convolução .....	64
4.4 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	64
4.4.1 – Exemplo 1: Análise Dinâmica de uma Placa Submetida a carregamento Radial .....	64
4.4.2 – Exemplo 2: Placa Circular Espessa com Carregamento Uniforme Aplicado Subitamente e Mantido Constante no Tempo.....	69
4.4.3 – Exemplo 3: Placa Circular Delgada com Carregamento Uniforme Aplicado Subitamente e Mantido Constante no Tempo.....	71
4.5 – COMENTÁRIOS .....	73
CAPÍTULO 5 - ANÁLISE NÃO LINEAR DINÂMICA DE PLACAS DELGADAS .....	75
5.1 – INTRODUÇÃO .....	75
5.2 – TRATAMENTO ANALÍTICO DO PROBLEMA .....	75
5.2.1 – Modelo de Rotações Moderadas .....	75
5.2.2 – Hipóteses Básicas.....	75
5.2.3 – Relações Deformação-Deslocamento .....	76
5.2.3.1 – Componente de Deformação $\varepsilon_r$ .....	76
5.2.3.2 – Componente de Deformação $\varepsilon_\theta$ .....	77
5.2.4 – Trabalho Virtual Interno.....	78
5.2.5 – Trabalho Virtual Externo .....	79
5.3 – TRATAMENTO NUMÉRICO DO PROBLEMA.....	79
5.3.1 – Representação pelo Método da Aceleração Constante para as Derivadas Temporais dos Deslocamentos.....	79
5.3.2 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno .....	79
5.3.2.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura .....	83
5.3.3 – Avaliação do Trabalho Virtual Externo.....	84
5.3.4 – Montagem da Matriz dos Coeficientes.....	84
5.3.5 – Montagem do Vetor de Cargas .....	85
5.3.6 – Sistema de Equações e Condições de Contorno .....	85
5.4 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	87
5.4.1 – Exemplo 1: Análise Estática de uma Placa Circular com Carregamento Uniformemente Distribuído .....	87

5.4.2 – Exemplo 2: Análise Estática de uma Placa Circular Submetida a um Gradiente Térmico .....	90
5.4.3 – Exemplo 3: Placa Circular com a Imposição de Deslocamentos Iniciais...	93
5.4.4 – Exemplo 4: Placa Circular com Carregamento Uniforme Constante no Tempo .....	97
5.5 – COMENTÁRIOS .....	99
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA .....	101
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	104

## NOMENCLATURA

a	- Raio da placa
C	- Rigidez extensional da placa
D	- Rigidez flexional da placa
E	- Módulo de elasticidade longitudinal
[F]	- Vetor de equilíbrio do sistema
$f_r, f_z, f_{rz}$	- Forças de inércia por unidade de área
G	- Módulo de elasticidade transversal
<b>G</b>	- Matriz que contém as funções de Green
$\bar{\mathbf{G}}$	- Matriz resultante do produto de <b>G</b> por <b>M</b>
<b>H</b>	- Derivada temporal de <b>G</b>
$\bar{\mathbf{H}}$	- Matriz resultante do produto de <b>H</b> por <b>M</b>
h	- Espessura da placa
K	- Coeficiente de cisalhamento
<b>K</b>	- Matriz de rigidez do sistema
[K]	- Matriz de rigidez efetiva do sistema
[K <sub>t</sub> ]	- Matriz de rigidez tangente do sistema
<b>M</b>	- Matriz de massa do sistema

$M_r, M_\theta$	- Momentos fletores por unidade de comprimento
$\bar{M}_r$	- Momento por unidade de comprimento prescrito no contorno
$N_r, N_\theta$	- Esforços normais por unidade de comprimento
$\bar{N}_r, \bar{Q}_r, \bar{Q}_z$	- Forças por unidade de comprimento prescritas no contorno
$p_z$	- Carregamento prescritos de domínio
$\mathbf{Q}$	- Vetor de forças externas do sistema
$[\mathbf{Q}]$	- Vetor de forças efetivas do sistema
$Q_r$	- Esforço cortante por unidade de comprimento em coordenadas polares
$r, \theta, z$	- Direções coordenadas na placa
$\mathbf{U}, [\mathbf{U}]$	- Vetor de deslocamentos modais do sistema
$u_r, w$	- Componentes de deslocamento segundo $r$ e $z$
$\alpha$	- Coeficiente de dilatação térmica do material
$[\Delta\mathbf{R}]$	- Vetor de forças nodais desequilibradas
$\Delta t$	- Intervalo de tempo; - Função variação de temperatura
$[\Delta\mathbf{U}]$	- Vetor de acréscimos de deslocamento
$\Delta t_e, \Delta t_i$	- Variações de temperatura nas superfícies externa e interna do reservatório
$\delta W_e, \delta W_i$	- Trabalhos virtuais das forças externas e internas

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	- Deformações específicas em coordenadas retangulares
$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$	- Deformações específicas em coordenadas polares
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	- Distorções em coordenadas retangulares
$\gamma_{rz}$	- Distorção em coordenadas polares
$\gamma_{rz}^f$	- Distorção fictícia em coordenadas polares
$\lambda$	- Espaçamento nodal
$\mu$	- Massa específica
$\nu$	- Coeficiente de Poisson do material
$\rho_x, \rho_y, \rho_z$	- Componentes das forças de superfície
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	- Tensões normais em coordenadas retangulares
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	- Tensões normais em coordenadas polares
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	- Tensões cisalhantes em coordenadas retangulares
$\tau_{rz}$	- Tensão cisalhante em coordenadas polares
$\tau_{rz}^f$	- Tensão cisalhante fictícia em coordenadas polares
$\varphi$	- Rotação da superfície média
$\psi$	- Rotação da normal no plano rz
$(\dot{\dots}), (\ddot{\dots})$	- Designação para as derivadas temporais de primeira e segunda ordem

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

A análise e o projeto de placas constitui uma área de interesse permanente no âmbito da engenharia estrutural.

As placas são elementos estruturais em que uma das dimensões (a espessura) é bem pequena em relação às demais. Em função disso, as equações gerais da elasticidade tridimensional podem ser simplificadas e tais elementos estruturais são então estudados por meio de uma teoria bidimensional.

De acordo com a relação entre a menor dimensão lateral ( $b$ ) da placa e a sua espessura ( $h$ ), esta pode ser classificada como delgada (podendo - se tomar  $\frac{h}{b} < \frac{1}{20}$  como uma indicação de ordem de grandeza para fins práticos) ou espessa (em caso contrário, quando então deixa de ser válida a hipótese básica de Kirchhoff de que linhas retas, normais à superfície média da placa antes da flexão, permanecem retas, normais à superfície média e indeformadas após a flexão [1]). Por sua vez, o comportamento estrutural de uma placa delgada de material linearmente elástico pode ser classificado como linear ou não linear geométrico, de acordo com a relação entre a flecha máxima e a espessura da placa. Também como uma indicação prática de ordem de grandeza, verifica-se comportamento linear geométrico desde que a flecha máxima não ultrapasse  $\frac{h}{5}$ .

O estudo de placas, com comportamento linear ou não linear geométrico, estático ou dinâmico, vem merecendo, por parte dos pesquisadores, especial atenção nas últimas décadas, o que fica evidenciado pelo considerável número de publicações existentes nessa área específica de pesquisa no âmbito da engenharia estrutural. No decorrer da revisão bibliográfica para a presente tese foram selecionados diversos trabalhos abordando aspectos distintos do comportamento linear e não linear geométrico, estático e dinâmico, de placas circulares delgadas e espessas, os quais podem ser considerados afins com o estudo aqui realizado (o qual será delineado mais adiante).

Na análise linear de placas delgadas, podem-se citar: ZHOU et al. [2], que realizam uma análise tridimensional de vibrações em placas circulares e anulares pelo método de Chebyshev – Ritz; JEONG [3], que investiga vibrações livres nas placas de fundo e de topo de um reservatório cilíndrico (de paredes supostamente rígidas) contendo um fluido, utilizando uma expansão em séries finitas de Fourier – Bessel e o

método de Rayleigh – Ritz, sendo os resultados comparados com os do método dos elementos finitos (MEF); GORMAN et al. [4], que analisam, utilizando funções de Bessel, a vibração de uma placa delgada influenciada por um fluido numa cavidade cilíndrica, com os resultados sendo confrontados com valores obtidos experimentalmente e pelo MEF; WU et al. [5], que analisam vibrações livres em placas pela regra de quadratura diferencial generalizada (GDQR), utilizando séries de Fourier e funções de Bessel, e discutem brevemente as diferenças entre o método utilizado e o MEF; PENG et al. [6], que utilizam a técnica da propagação de ondas acústicas, implementada através de um método que combina a expansão polinomial de Chebyshev e a transformada rápida de Fourier, para descrever a dependência temporal da propagação da onda, da tensão dinâmica e da potência em uma placa circular axissimétrica; DEY et al. [7], que aplicam a transformada numérica de Laplace e, em seguida, o método das diferenças finitas (MDF) na resolução dinâmica de placas e membranas axissimétricas, sob condições iniciais nulas e com a consideração do amortecimento; WANG [8], que estuda a otimização da posição de apoios anulares em uma placa circular com bordo livre, uniformemente carregada.

Em se tratando da análise linear de placas espessas, citam-se os seguintes trabalhos: WANG et al. [9], que obtêm, com base na teoria de Mindlin, a solução exata para os modos de vibração de placas circulares, decompondo o deslocamento transversal em modos de vibração e utilizando um método numérico semelhante ao de Galerkin para a determinação das amplitudes modais; LEE et al. [10], que estudam a vibração livre de placas de Mindlin através do método pseudo-espectral de Chebyshev e analisam as frequências modais para diversas condições de contorno e razões  $\frac{h}{a}$ , comparando os resultados com os da teoria clássica de Kirchhoff; WANG et al. [11,12], que desenvolvem relações exatas entre deslocamento transversal e esforço em placas de Mindlin circulares ou anulares axissimétricas de espessura variável (ou constante, como um caso particular) e também as relações correspondentes para placas de Kirchhoff idênticas; XIANG [13], que apresenta um método analítico aproximado para descrever o comportamento das vibrações em placas circulares de Mindlin com apoios anulares múltiplos, subdividindo a placa e resolvendo cada uma das placas anulares e a circular separadamente e, em seguida, realizando a compatibilidade entre elas; MA et al. [14], que, aplicando o MEF, utilizam o conceito de deslocamentos relativos no lugar de definir as rotações como deslocabilidades independentes para estudar as vibrações livres em placas de Mindlin, comparando os resultados obtidos com os do programa ABACUS®; HANG et al. [15], que fornecem, através da teoria de Mindlin, resultados exatos para vibrações livres em placas circulares com variação descontínua

de espessura e bordos livres, comprovando a pouca acurácia da formulação pelo MEF utilizada no cálculo do esforço cortante neste tipo de estrutura; LIU et al. [16], que analisam estaticamente placas de Reissner- Mindlin pelo método diferencial de quadratura e comparam os resultados com os fornecidos pelo programa Ansys®; KULKARNI et al. [17], que determinam as tensões térmicas na análise quasi - estática de placas espessas circulares, obtendo resultados em termos das funções de Bessel, avaliando a variação temporal da temperatura, do deslocamento e das tensões, ao longo do raio.

Na pesquisa de métodos para a análise do comportamento não linear de placas delgadas, encontram-se estudos tais como: LI et al. [18], que descrevem uma técnica numérica para resolução de placas circulares submetidas à vibração e à flambagem por solicitação térmica, utilizando o método de Ritz para validar o emprego de tal técnica; e HATERBOUCH et al. [19,20], que estudam o efeito de grandes amplitudes nos dois primeiros modos de vibração de placas circulares delgadas, utilizando um modelo teórico baseado no princípio de Hamilton e numa análise espectral por funções de Bessel. Com base na teoria de von Kármán são analisados os resultados com e sem a consideração do deslocamento radial da placa; MA et al. [21], que estudam a temperatura crítica de flambagem de uma placa constituída de um material com gradiente funcional (“functionally graded plate”) através do método do tiro (“shooting method”), com base na teoria de von Kármán; TZOU et al. [22], que analisam o acoplamento dinâmico e eletromecânico e o controle de deslocamentos transversais e de frequências naturais de uma placa circular piezoelétrica, submetida a uma deformada inicial não linear. Através da teoria de von Kármán, desenvolvem-se as equações dinâmicas que regem o problema e aplicam-se as condições de contorno, incluindo o acoplamento piezoelétrico, encontrando-se então a solução e tornando possível obter os deslocamentos e frequências de vibração na placa utilizando controle de voltagem; KAPURIA et al. [23], que desenvolvem uma formulação analítica aproximada de Galerkin para o problema de flexão não linear, instabilidade térmica e frequências naturais de uma placa delgada circular no âmbito das rotações moderadas (teoria de von Kármán); LI et al.[24], que analisam a flexão de placas delgadas circulares axissimétricas simplesmente apoiadas com grandes deslocamentos através de uma técnica de incremento de carga, baseada na teoria linear de placas delgadas; ARAFAT et al. [25], que utilizam uma versão linearizada da teoria de von Kármán para estudar os modos de vibração e as frequências naturais de placas anulares e circulares submetidas a cargas térmicas estacionárias e axissimétricas; e NAJAFIZADEH et al. [26], que estudam a flambagem térmica em

placas de material com gradiente funcional, com base na teoria de placas que inclui deformabilidade por cortante (teoria de placas de terceira ordem).

Nessas e em outras publicações não citadas nos parágrafos precedentes, nota-se uma clara preferência pela utilização do MEF como técnica de abordagem numérica, no que se refere à discretização no espaço. Entretanto, técnicas alternativas mais recentes, como é o caso do método das diferenças finitas energéticas (MDFE), utilizado no presente trabalho, vêm se tornando cada vez mais atrativas e ganhando espaço, em função da sua potencialidade. Tal método difere do método convencional de diferenças finitas por substituir as derivadas espaciais dos deslocamentos por formas de diferenças finitas diretamente na expressão do princípio dos trabalhos virtuais (PTV), ou então na da energia potencial total do sistema. No método convencional as representações em diferenças finitas são aplicadas diretamente sobre as equações diferenciais que governam o problema. A formulação energética, em relação à convencional, apresenta algumas vantagens, tais como o uso de derivadas de ordem mais baixa, a necessidade de prescrição somente das condições de contorno geométricas e a possibilidade de geração de matrizes de coeficientes simétricas.

As etapas de cálculo do MDFE são bastante semelhantes às do MEF, sendo oportuno destacar que no MDFE utilizam-se aproximações para as derivadas dos deslocamentos, enquanto no MEF são usualmente aproximados os próprios deslocamentos, característica esta que, em certas situações, talvez justifique um melhor desempenho do MDFE na avaliação de esforços, conforme observado, por exemplo, em GRAÇA [27] na análise de placas retangulares espessas. Acrescente-se ainda o aspecto de que, em alguns problemas, lida-se no MDFE com um menor número de graus de liberdade por nó, o que, para discretizações idênticas no MDFE e no MEF, pode conduzir a um sistema de equações significativamente menor nas análises pelo MDFE. Por outro lado, é de se observar que, em se tratando de contornos irregulares, a aplicação do MDFE requer a utilização de estratégias adicionais, como é o caso do processo de mapeamento proposto por FREY [28].

Conforme se pode constatar na literatura, o MDFE é um método não tão difundido se comparado ao MEF, MDF ou mesmo ao método dos elementos de contorno (MEC). Tal método foi proposto por COURANT et al. [29] e utilizado primeiramente por HOUBOLT [30] no estudo de problemas termo-elásticos em aeronaves. Na engenharia civil, podem-se citar os trabalhos de KOCATÜRK [31], que utiliza o MDFE no estudo da resposta estacionária em placas retangulares delgadas ortotrópicas com apoios pontuais viscoelásticos, no âmbito da elasticidade linear, e de AKSU et al. [32], que examinam as características de vibrações livres de placas de

Mindlin apoiadas pontualmente nos cantos. Neste último estudo foram considerados casos de dupla simetria que permitem a análise de um quarto da placa e fornecidos os resultados para os seis primeiros modos de vibração, comparando-os com soluções existentes baseadas na teoria clássica de placas delgadas. Além desses trabalhos, citam-se ainda: BUSHNELL et al. [33], que desenvolvem códigos computacionais baseados no MDFE destinados à análise não linear de cascas e comparam os resultados obtidos com os provenientes do MEF; SINGH et al. [34], que discretizam a energia potencial total na flambagem de placas retangulares e circulares vazadas (com os furos, em cada um desses casos, podendo ser também retangulares ou circulares) de espessura variável através de representações em diferenças finitas para as derivadas, considerando exemplos para os casos de espessura uniforme, variação gradual e variação abrupta na espessura, com os resultados obtidos mostrando boa concordância com os fornecidos pelo MEF e os autores salientando ainda que o MDFE tem a vantagem de apresentar um número total de equações bem menor, além de referirem-se à simplicidade na aplicação das condições de contorno do problema; VERMA et al. [35], que utilizam o MDFE, aplicado à energia potencial total do sistema, na análise da superestrutura de pontes, comparando resultados obtidos com soluções existentes, a fim de comprovar sua eficácia. Além desses trabalhos citam-se artigos, publicações e teses oriundos de uma linha de pesquisa em estruturas laminares e de barras já em andamento há algum tempo no Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, tais como: SILVA [36] e FIELDING et al. [37], que estudam placas delgadas, isotrópicas e de comportamento linear, para o caso de contornos irregulares, seguindo o já mencionado processo de mapeamento proposto por FREY [28]; LIMA et al. [38,39], que utilizam o MDFE no estudo do comportamento não linear geométrico de hastes de paredes delgadas de seção aberta sob flexo-torção; COSTA [40], que analisa vigas com a consideração da deformabilidade por cortante e da inércia de rotação (teoria de viga de Timoshenko); GRAÇA et al. [27,41], que realizam um estudo, estático e dinâmico, de placas retangulares delgadas e espessas pelo MDFE; DIAS [42], que analisa, com base na teoria de Vlasov, vigas e pórticos de paredes delgadas com seção aberta; e MITTELBACH [43], que aplica o MDFE na análise linear estática de problemas axissimétricos de placas circulares delgadas e de cascas cilíndricas delgadas, tanto sob forma isolada como associada (reservatórios).

Em se tratando dos procedimentos de integração no tempo em problemas dinâmicos, técnicas como as de Newmark (implícita) e de diferenças centrais (explícita) são largamente preferidas na literatura existente. Como uma técnica alternativa mais recente, vem ganhando o seu espaço um método de marcha no

tempo baseado em funções de Green, o qual, apesar de apresentar caráter explícito (após a determinação das funções de Green para o problema), fornece valores com precisão e estabilidade comparáveis às dos métodos implícitos. A idéia de utilizar funções de Green para integrar as equações do movimento em processos passo a passo é antiga (Wrobel [44]) e do conhecimento de pesquisadores envolvidos com o desenvolvimento de metodologias baseadas no MEC. Diversos trabalhos mais recentes exploram esta idéia da utilização de funções de Green calculadas para integrar as equações do movimento, cabendo citar aqui o trabalho inicial de ZHONG et al. [45], e o trabalho posterior de FUNG [46], que utiliza uma técnica que consiste em representar a solução dinâmica através das respostas impulsivas e de degrau unitário do sistema. O desenvolvimento de processos de integração no tempo através de funções de Green tem recebido especial atenção por parte de um grupo de pesquisa da COPPE/UFRJ. Podem ser citados, nessa linha, os seguintes trabalhos: MANSUR et al. [47], que fazem uso de coordenadas nodais no domínio da frequência e de um algoritmo de transformada de Fourier (DFT/FFT) para a determinação numérica das funções de Green no domínio do tempo; SOARES JR. et al. [48], que utilizam procedimentos implícitos no domínio da frequência para o cálculo das funções de Green e o MEF na discretização espacial na resolução de equações de equilíbrio dinâmico de estruturas com comportamento linear e não linear físico; SOARES JR. et al. [49], que acoplam o MEF com o MEC para a resolução de problemas dinâmicos estruturais, onde o domínio é subdividido e cada subdomínio avaliado por um dos métodos de discretização espacial supracitados, promovendo-se a compatibilidade após a resolução de cada subdomínio de forma independente. Para a marcha no tempo do MEF foi utilizado um método implícito de funções de Green Numéricas, no qual as funções de Green são obtidas através do método da aceleração constante e para o MEC a marcha no tempo foi realizada utilizando-se uma interpolação no tempo das matrizes geradas pelo método; LOUREIRO [50], faz uso do método explícito de integração por funções de Green, também adotando o MEF para a discretização espacial; MANSUR et al. [51], que apresentam um estudo similar utilizando o MDF na discretização espacial e diferenças centrais e Runge - Kutta na integração temporal; e DORS [52], que estuda a propagação de ondas elásticas utilizando uma técnica de partição de domínio, na qual as funções de Green não necessitam ser calculadas para todos os graus de liberdade, reduzindo-se assim consideravelmente o esforço computacional.

No presente trabalho, as placas delgadas são estudadas com seu comportamento linear (teoria de Kirchhoff [1]) e não linear, no âmbito das rotações moderadas (teoria de von Kármán [53]). As placas espessas, que por sua robustez

difícilmente vão apresentar um comportamento não linear geométrico dentro dos limites de linearidade física dos materiais usuais na engenharia estrutural, são analisadas pela teoria linear de Mindlin [54]. O método numérico aqui utilizado para a discretização no espaço é o MDFE e, dando continuidade à já citada linha de pesquisa na COPPE/UFRJ envolvendo esse método, objetiva-se com o presente trabalho estender a sua aplicação à análise dinâmica linear e não linear geométrica de problemas axissimétricos de placas circulares com solicitações de natureza mecânica e/ou térmica, enfatizando-se não só o cálculo de deslocamentos, como também o de esforços. Além disso, foram implementados dois processos de marcha no tempo: o método da aceleração constante (caso particular do método de Newmark) e, como alternativa, o já citado método baseado em funções de Green numéricas. A aplicabilidade dessa técnica é verificada mediante comparação com os resultados provenientes do método de Newmark. Pelo conhecimento da autora, tais desenvolvimentos não foram ainda realizados, dando assim um caráter original à pesquisa.

Segue-se uma descrição sucinta dos tópicos abordados nos demais capítulos do texto. Inicia-se, no capítulo 2, pela formulação analítica e numérica, bem como pela apresentação de resultados obtidos para a placa delgada com comportamento linear dinâmico. No capítulo 3 apresenta-se um estudo semelhante para placas espessas. O método de marcha no tempo baseado em funções de Green é descrito no capítulo 4, onde também apresentam-se resultados obtidos por esta técnica, comparando-os com os provenientes do método de Newmark. O capítulo 5 é destinado ao comportamento dinâmico geometricamente não linear de placas delgadas, apresentando-se ao final, tal como nos capítulos anteriores, alguns exemplos de aplicação. Finalmente, no capítulo 6, apresentam-se as conclusões gerais e algumas sugestões para a continuidade da pesquisa.

## CAPÍTULO 2

### ANÁLISE LINEAR DINÂMICA DE PLACAS DELGADAS

#### 2.1 – Introdução

O presente capítulo trata da análise linear dinâmica de placas delgadas. Primeiramente apresenta-se a formulação analítica da placa circular, em seguida descreve-se a abordagem numérica do problema e por fim são apresentados dois exemplos de modo a comprovar a eficiência do método numérico de análise utilizado.

#### 2.2 – Tratamento Analítico do Problema

Neste item tem-se como objetivo apresentar o tratamento analítico da placa circular, através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. As expressões aqui obtidas para o trabalho virtual interno e para o trabalho virtual externo servirão de base, no item subsequente, à abordagem numérica do problema.

A placa é axissimétrica devido às características geométricas da mesma e à natureza das solicitações atuantes.

##### 2.2.1 – Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.)

O P.T.V. para corpos deformáveis enuncia que se um sistema estrutural em equilíbrio for submetido a um campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissível (ou seja, compatível com as vinculações do sistema e mantendo a continuidade interna) o trabalho virtual das forças que sobre ele atuam (forças externas) é igual ao trabalho virtual das forças internas.

Assim tem-se:

$$\delta W_i = \delta W_e$$

onde  $\delta W_i$  designa o trabalho virtual das forças internas (ou trabalho virtual interno) e  $\delta W_e$  o trabalho virtual das forças externas (ou trabalho virtual externo).

Considerando-se, por exemplo, o caso de um sólido no espaço definido por coordenadas cartesianas  $x,y,z$  tem-se as seguintes expressões gerais para  $\delta W_i$  e  $\delta W_e$ :

$$\delta W_i = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \quad (2.1)$$

$$\delta W_e = \int_{S_f} (\rho_x \delta u + \rho_y \delta v + \rho_z \delta w) ds + \int_V (B_x \delta u + B_y \delta v + B_z \delta w) dV \quad (2.2)$$

sendo:

$\rho_x, \rho_y, \rho_z$  – componentes das forças de superfície que atuam na região  $S_f$  do contorno do sólido onde são prescritas forças;

$B_x, B_y, B_z$  - componentes das forças de volume;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  - componentes de tensão;

$\delta u, \delta v, \delta w$  – variações das componentes de deslocamento ( $u, v, w$ ) segundo  $x, y, z$ ;

$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$  - variações das componentes de deformação, as quais, mediante as relações deformação-deslocamento, são assim ligadas às variações nos deslocamentos:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \delta \gamma_{xy} &= \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \delta \varepsilon_y &= \delta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \delta \gamma_{xz} &= \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \delta \varepsilon_z &= \delta \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) & \delta \gamma_{yz} &= \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

### 2.2.2 – Hipóteses Básicas

1 – Admite-se que a placa em estudo é delgada e com comportamento linear físico e geométrico;

2 – Linhas retas, normais à superfície média antes da deformação, permanecem retas, normais à superfície média e inalteradas em seu comprimento após a deformação (hipótese de Kirchhoff).

3 – A tensão normal  $\sigma_z$  (na direção normal à superfície média) é pequena em relação às demais tensões normais e pode ser desprezada.

### 2.2.3 – Placa Circular

A placa circular a ser estudada e o sistema de coordenadas cilíndricas  $r, \theta, z$  utilizado se acham representados na figura 2.1.

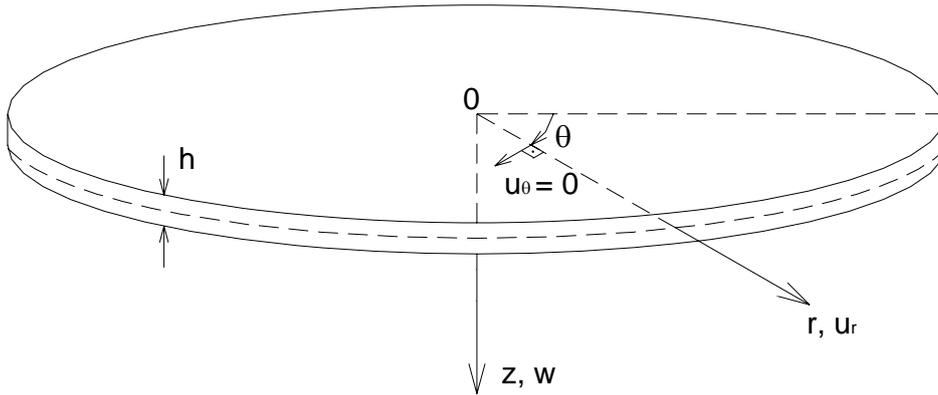


Figura 2.1 – Sistema de coordenadas para a placa circular

Será considerado apenas o caso de carregamentos com simetria de revolução, de modo que todas as derivadas em relação à variável  $\theta$ , assim como os esforços solicitantes  $N_{r\theta} = N_{\theta r}$ ,  $M_{r\theta} = M_{\theta r}$ ,  $Q_\theta$  e a componente de deslocamento  $u_\theta$ , são nulos. Os sentidos positivos para os esforços não nulos se encontram indicados na figura 2.2, notando-se que, além dos esforços de placa propriamente ditos,  $M_r$ ,  $M_\theta$  e  $Q_r$ , participam também da análise os esforços de chapa  $N_r$  e  $N_\theta$ .

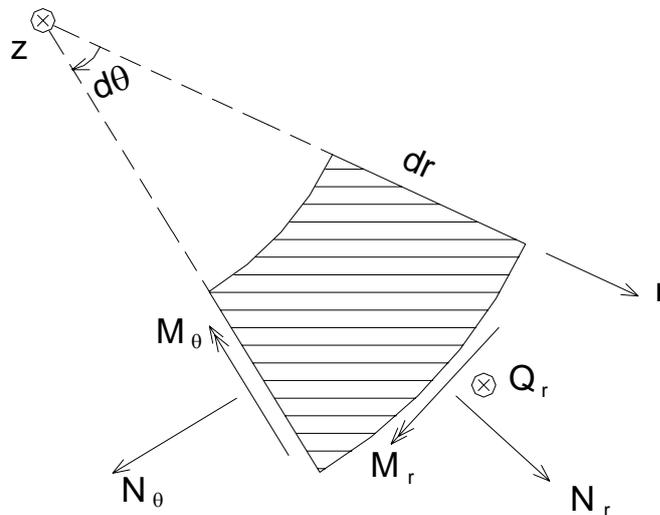


Figura 2.2 – Esforços solicitantes não nulos no elemento de placa, com os seus sentidos positivos

#### 2.2.4 – Trabalho Virtual Interno

O trabalho virtual interno, levando em conta o sistema de coordenadas da figura 2.1, as simplificações da teoria adotada e a axissimetria do problema, escreve-se:

$$\delta W_i = \int_V (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta) dV \quad (2.4)$$

estando  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  ligadas às componentes de deformação  $\varepsilon_r$  e  $\varepsilon_\theta$  por:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta)] \quad (2.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r)]$$

Sendo a placa de raio  $a$  e espessura  $h$ , tem-se:

$$\delta W_i = 2\pi \int_0^a \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta) dz \right] r dr \quad (2.6)$$

Utilizando as relações deformação-deslocamento para o problema axissimétrico [55,56]:

$$\varepsilon_r = \frac{du_{r0}}{dr} - z \frac{d^2 w}{dr^2} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_{r0}}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr}$$

onde  $u_{r0}$  denota o deslocamento  $u_r$  dos pontos da superfície média, e considerando a definição dos esforços solicitantes, por unidade de comprimento,

$$N_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r dz \quad N_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz \quad (2.8)$$

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz \quad M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz$$

o trabalho virtual interno (2.6) pode ser apresentado sob a forma:

$$\delta W_i = 2\pi \int_0^a \left( N_r r \delta \frac{du_{r0}}{dr} - M_r r \delta \frac{d^2 w}{dr^2} + N_\theta \delta u_{r0} - M_\theta \delta \frac{dw}{dr} \right) dr \quad (2.9)$$

Substituindo (2.7) em (2.5), e levando em conta (2.8), resultam as seguintes expressões para os esforços solicitantes em função dos deslocamentos  $u_{r0}$  e  $w$ :

$$N_r = C \left( \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{v}{r} u_{r0} \right) \quad N_\theta = C \left( v \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{u_{r0}}{r} \right) \quad (2.10)$$

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{v}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad M_\theta = -D \left( v \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

sendo  $C$  e  $D$  as rigidezes extensional e flexional da placa, definidas por:

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad ; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.11)$$

Introduzindo-se (2.10) em (2.9) escreve-se a seguinte expressão para o trabalho virtual interno:

$$\delta W_i = 2\pi \int_0^a \left[ C \left( r \frac{du_{r0}}{dr} + \nu u_{r0} \right) \delta \frac{du_{r0}}{dr} + D \left( r \frac{d^2 w}{dr^2} + v \frac{dw}{dr} \right) \delta \frac{d^2 w}{dr^2} + C \left( v \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{u_{r0}}{r} \right) \delta u_{r0} + \right. \\ \left. + D \left( v \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \delta \frac{dw}{dr} \right] dr \quad (2.12)$$

### 2.2.5 – Trabalho Virtual Externo

Encontram-se representadas na figura 2.3 as possíveis forças de domínio (não se consideram cargas radiais  $p_r$ ) e de contorno atuantes na placa (todas representadas com seus sentidos positivos), incluindo as forças de inércia de translação  $f_r$  e  $f_z$  e de rotação  $f_{rz}$ , correspondentes aos deslocamentos lineares  $u_r$ ,  $w$  e à rotação  $\frac{dw}{dr}$ , respectivamente.

A parcela do trabalho virtual externo relativa às forças de domínio (por unidade de área) é dada por:

$$\delta w_e = 2\pi \int_0^a \left[ -f_r \delta u_{r0} + (p_z - f_z) \delta w - f_{rz} \delta \frac{dw}{dr} \right] r dr \quad (2.13)$$

onde

$$f_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \ddot{u}_r dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \left( \ddot{u}_{r0} - z \frac{d(\ddot{w})}{dr} \right) dz = \mu h \ddot{u}_{r0}$$

$$f_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \ddot{w} dz = \mu h \ddot{w} \quad (2.14)$$

$$f_{rz} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \ddot{u}_r z dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \left( \ddot{u}_{r0} - z \frac{d(\ddot{w})}{dr} \right) z dz = \frac{\mu h^3}{12} \frac{d(\ddot{w})}{dr}$$

e sendo  $\ddot{u}_{r0}$  e  $\ddot{w}$  as derivadas segundas temporais dos deslocamentos  $u_{r0}$  e  $w$ , respectivamente, e  $\mu$  a massa específica do material.

Substituindo-se (2.14) em (2.13) tem-se, para a expressão do trabalho virtual externo das forças de domínio:

$$\delta w_e = 2\pi \int_0^a \left[ -\mu h \ddot{u}_{r0} \delta u_{r0} + (p_z - \mu h \ddot{w}) \delta w - \frac{\mu h^3}{12} \frac{d(\ddot{w})}{dr} \delta \frac{dw}{dr} \right] r dr. \quad (2.15)$$

A contribuição dos possíveis carregamentos de contorno (por unidade de comprimento) para  $\delta W_e$  se escreve:

$$\delta W_e = 2\pi a \left( \bar{N}_r \delta u_{r0} + \bar{Q}_r \delta w - \bar{M}_r \delta \frac{dw}{dr} \right) \Big|_a \quad (2.16)$$

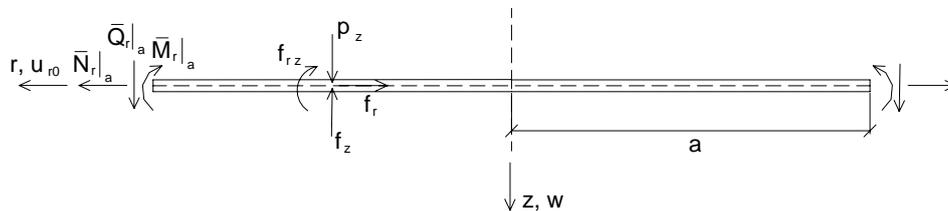


Figura 2.3 – Forças atuantes no domínio, incluindo as forças de inércia, e no contorno da placa

O trabalho virtual externo total, dado pela soma das parcelas referentes aos carregamentos de domínio e de contorno, assume então o seguinte aspecto:

$$\delta w_e = 2\pi \int_0^a \left[ -\mu h \ddot{u}_{r0} \delta u_{r0} + (p_z - \mu h \ddot{w}) \delta w - \frac{\mu h^3}{12} \frac{d(\ddot{w})}{dr} \delta \frac{dw}{dr} \right] r dr +$$

$$+ 2\pi a \left( \bar{N}_r \delta u_{r0} + \bar{Q}_r \delta w - \bar{M}_r \delta \frac{dw}{dr} \right) \Big|_a \quad (2.17)$$

### 2.3 – Tratamento Numérico do Problema

A aplicação do método numérico proposto baseia-se na avaliação das integrais relativas aos trabalhos virtuais interno e externo mediante um somatório de contribuições colhidas dos diversos trechos de integração oriundos da subdivisão do domínio da placa, em cada um dos quais todas as grandezas envolvidas são supostas constantes. Substituem-se as derivadas espaciais dos deslocamentos por formas de diferenças finitas e igualam-se, em seguida, as expressões dos trabalhos virtuais interno e externo, ou seja, aplica-se o P.T.V.. Com isso, e a imposição das condições de contorno cinemáticas, monta-se um sistema de equações lineares, cujas incógnitas são os deslocamentos em pontos nodais da estrutura.

#### 2.3.1 – Discretização e Sistemas de Numeração da Placa

A discretização e sistemas de numeração da placa tiram partido da axissimetria. Numeram-se os nós da placa do centro para o bordo (figura 2.4). Eliminam-se os nós virtuais, introduzindo como graus de liberdade as rotações  $\varphi = \frac{dw}{dr}$  no bordo e no centro da placa. Com tal eliminação, tem-se para N divisões da placa um total de  $NN=N+1$  nós, igualmente espaçados de uma distância  $\lambda$ . A relação de correspondência entre o índice i dos deslocamentos  $u_i$  (doravante passa a ser adotada a notação u em lugar de  $u_{r0}$  no tratamento numérico da placa) e  $w_i$  de um nó i qualquer e os índices de numeração global desses mesmos deslocamentos se dá genericamente por  $u_i \rightarrow U_{2i+1}$  e  $w_i \rightarrow U_{2i+2}$ ,  $i = 1$  a  $NN$ , acrescentando-se ainda nos nós extremos os deslocamentos  $U_2 = \varphi_1$ ,  $U_{2NN+4} = \varphi_{NN}$ ,  $U_1$  e  $U_{2NN+3}$ , os dois últimos criados somente para facilitar a representação matricial do problema, sem significado físico e não influenciando a resolução do sistema de equações resultante da utilização do método.

Faz-se, para fins de avaliação dos trabalhos virtuais interno e externo, a consideração de dois tipos distintos de trechos de integração, designados como tipos I e II, conforme mostrado na figura 2.5. Aos termos contendo a derivada  $u'$  (utilizando-se

a notação  $(\dots)' = \frac{d(\dots)}{dr}$  associam-se NN-1 trechos de integração, enquanto aos que envolvem as derivadas  $w'$ ,  $w''$ ,  $\ddot{w}$ ,  $\ddot{u}$ , e também as funções de carga, correspondem NN trechos de integração, notando-se, neste último caso, que os trechos inicial e final têm, respectivamente, metade do comprimento  $\lambda$  indicado na figura 2.4.

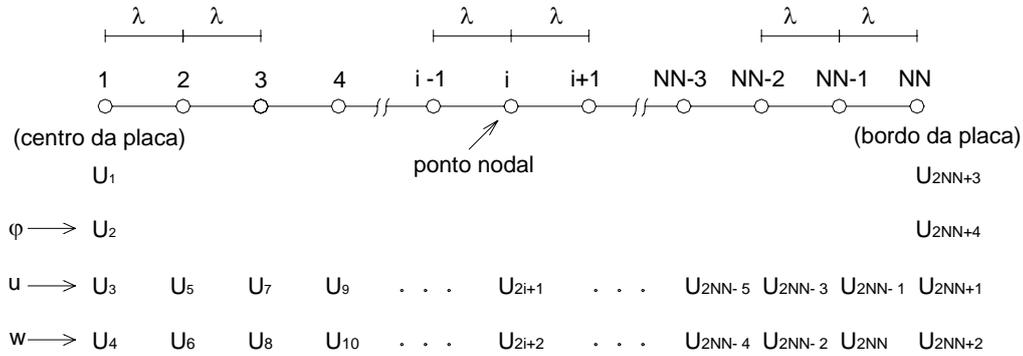


Figura 2.4 – Discretização e sistema de numeração global dos deslocamentos nodais

Utiliza-se ainda um sistema de numeração local para os deslocamentos, também mostrado na figura 2.5, o qual é útil para se proceder à acumulação das contribuições dos diversos trechos de integração. Como mostra a figura, a cada conjunto de três nós consecutivos,  $i-1$ ,  $i$  e  $i+1$  ( $i = 2$  a  $NN-1$ ), no caso de trechos intermediários, e de dois nós consecutivos,  $1$  e  $2$  ou  $NN-1$  e  $NN$ , em se tratando dos trechos de extremidade, estão associados seis deslocamentos nodais,  $a_1, a_2, \dots, a_6$ . A regra de correspondência entre os índices de numeração local e global dos deslocamentos é então dada por:

$$a_k \rightarrow U_{2(j-1)+k} \quad (k=1 \text{ a } 6, j = 1 \text{ a } NN) \quad (2.18)$$

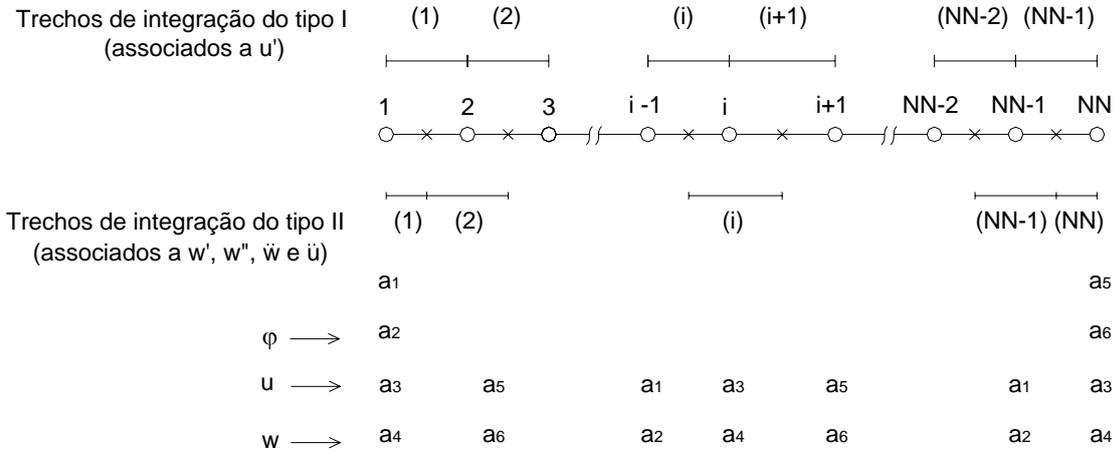


Figura 2.5 – Trechos de integração e numeração local dos deslocamentos nodais

### 2.3.2 – Representações em Diferenças Finitas para as Derivadas Espaciais dos Deslocamentos

No tratamento numérico da expressão (2.12), referente ao trabalho virtual interno da placa, as derivadas espaciais dos deslocamentos  $u$  e  $w$  são substituídas por representações em diferenças finitas, levando-se em conta que tais derivadas associam-se a trechos de integração distintos, conforme mostrado na figura 2.5.

Com o auxílio das figuras 2.6 a 2.11, apresentam-se em seguida as diversas representações em diferenças finitas utilizadas para as derivadas espaciais dos deslocamentos  $u$  e  $w$  na expressão (2.12).

#### 2.3.2.1 – Derivadas do Deslocamento $u$

Para o deslocamento  $u$ , como evidencia a expressão (2.12), é requerida somente a derivada primeira, a qual, de acordo com a representação reduzida [57], fica assim aproximada num trecho de integração genérico (i) (figura 2.6):

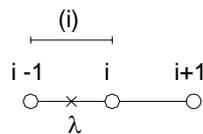


Figura 2.6 – Esquema para a obtenção da expressão (2.19)

$$u'(i) \cong \frac{u_i - u_{i-1}}{\lambda} \quad (2.19)$$

Note-se que tal representação, que corresponde a uma diferença finita central tomada no ponto médio do trecho de integração (indicado por um x nas figuras 2.5 e 2.6), dispensa automaticamente a presença de nós virtuais no cálculo da derivada primeira para os trechos extremos de integração.

### 2.3.2.2 – Derivadas do Deslocamento w

Para o deslocamento w são necessárias representações para as derivadas primeiras e segundas. Os graus de liberdade referentes às rotações no centro e no bordo da placa foram utilizados explicitamente na representação da derivada segunda no primeiro e último trecho de integração. Para as derivadas primeiras, nestes mesmos trechos, em lugar de se utilizar diretamente as rotações, faz-se uso da representação reduzida, em sintonia com o aspecto de que as funções g e h nas expressões (2.30) mais adiante, referentes ao processo de marcha no tempo, só são avaliadas para os graus de liberdade de translação.

#### 2.3.2.2.1 – Derivada Primeira para o Trecho de Integração Intermediário:

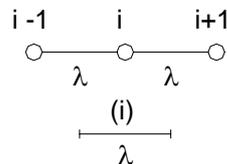


Figura 2.7 – Esquema para a obtenção da expressão (2.20)

Com o auxílio da figura 2.7, e utilizando-se a representação convencional para esta derivada, escreve-se:

$$w'(i) \cong \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2\lambda} \quad (2.20)$$

#### 2.3.2.2.2 – Derivada Primeira para os Trechos de Integração Inicial e Final

Para as derivadas primeiras de w, relativas aos trechos de integração extremos, utiliza-se, como já frisado, a representação reduzida desta derivada. Assim,

para o trecho inicial, toma-se (ver figura 2.6):

$$w'(1) \cong \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \quad (2.21)$$

e, para o trecho de integração final, escreve-se, de forma análoga a (2.21):

$$w'(NN) \cong \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \quad (2.22)$$

### 2.3.2.2.3 – Derivada Segunda para o Trecho de Integração Intermediário

Adota-se a representação convencional, tendo-se então, de acordo com a figura 2.7,

$$w''(i) \cong \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{\lambda^2} \quad (2.23)$$

### 2.3.2.2.4 – Derivada Segunda para os Trechos de Integração Inicial e Final

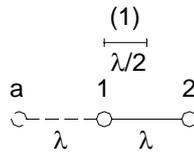


Figura 2.8 – Esquema para a obtenção da expressão (2.25)

Para a eliminação do nó virtual a (figura 2.8), define-se inicialmente a rotação  $\varphi_1$  no nó 1:

$$\varphi_1 = w'(1) \cong \frac{w_2 - w_a}{2\lambda} \quad (2.24)$$

Escrevendo  $w_a$  em função de  $w_2$  e  $\varphi_1$ , e substituindo em seguida na expressão (2.23) para a derivada segunda, obtém-se para o trecho de integração inicial:

$$w''(1) \cong \frac{2}{\lambda^2} (w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda) \quad (2.25)$$

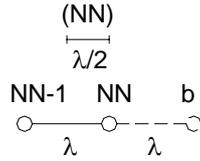


Figura 2.9 – Esquema para a obtenção da expressão (2.27)

Para o trecho de integração final, analogamente a (2.24) e (2.25), escreve-se com base na figura 2.9:

$$\varphi_{NN} = w'(NN) \cong \frac{w_b - w_{NN-1}}{2\lambda} \quad (2.26)$$

$$w''(NN) \cong \frac{2 (\varphi_{NN}\lambda - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} \quad (2.27)$$

### 2.3.3 – Representação pelo Método da Aceleração Constante para as Derivadas Temporais dos Deslocamentos

Utiliza-se, na análise dinâmica, um esquema implícito de integração no tempo, com o uso do método da aceleração constante [58].

Tal método consiste em tomar a derivada segunda temporal dos deslocamentos como sendo constante em cada intervalo de tempo  $\Delta t$ , conforme ilustrado na figura 2.10, onde  $\ddot{f} = \ddot{u}$  ou  $\ddot{w}$  e com  $t_1$  e  $t_2$  representando os instantes inicial e final do intervalo  $\Delta t$  considerado. A aceleração no referido intervalo é então dada pela média:

$$\ddot{f}_{\Delta t} = \frac{\ddot{f}_1 + \ddot{f}_2}{2} \quad (2.28)$$

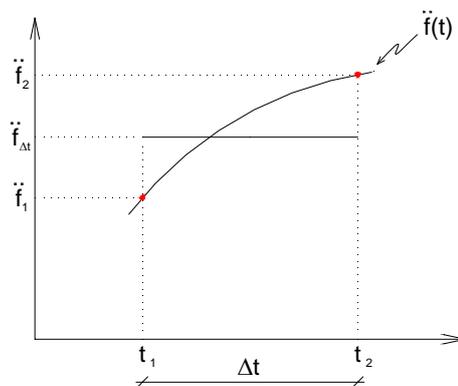


Figura 2.10 – Método da Aceleração Constante

As derivadas  $\ddot{f}_2$  e  $\dot{f}_2$ , para  $t = t_2$ , com base nas relações

$$\dot{f}_{\Delta t} = \ddot{f}_{\Delta t} t + \dot{f}_1 \rightarrow \dot{f}_2 = \frac{\ddot{f}_1 + \ddot{f}_2}{2} \Delta t + \dot{f}_1$$

$$f_{\Delta t} = \ddot{f}_{\Delta t} \frac{t^2}{2} + \dot{f}_1 t + f_1 \rightarrow f_2 = \frac{\ddot{f}_1 + \ddot{f}_2}{2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dot{f}_1 \Delta t + f_1$$

podem ser assim relacionadas aos deslocamentos nodais  $f_2$  (incógnitos):

$$\ddot{f}_2 = \frac{4}{\Delta t^2} f_2 + g \quad (2.29)$$

$$\dot{f}_2 = \frac{2}{\Delta t} f_2 + h$$

As funções  $g$  e  $h$  nestas expressões descrevem a marcha no tempo, estando assim relacionadas com os deslocamentos e suas derivadas temporais no instante inicial  $t = t_1$  do intervalo:

$$g = \frac{-4}{\Delta t^2} (f_1 + \dot{f}_1 \Delta t) - \ddot{f}_1 \quad (2.30)$$

$$h = \frac{-2}{\Delta t} \dot{f}_1 - \dot{f}_1$$

### 2.3.4 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno

Na avaliação da integral do trabalho virtual interno aplicam-se, para as derivadas dos deslocamentos  $u$  e  $w$ , as representações em diferenças finitas apresentadas no sub-item anterior. Em cada um dos trechos de integração tais derivadas, bem como todas as demais grandezas existentes na expressão, são consideradas constantes. Como os trechos de integração associados às derivadas de  $u$  (NN-1 trechos) são em menor número e de características distintas dos relativos às derivadas de  $w$  (NN trechos), conforme evidenciado na figura 2.5, a expressão do trabalho virtual interno será sempre formada computando-se separadamente a contribuição de cada uma dessas derivadas.

Da expressão (2.12), obtém-se:

$$\delta W_i = 2\pi \left\{ \sum_{(j)=1}^{NN-1} \mathbf{C} \left[ (r_u(j)u'(j) + vu(j))\delta u'(j) + \left( vu'(j) + \frac{1}{r_u(j)}u(j) \right) \delta u(j) \right] d(j) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{D} \left[ (r_w(1)w''(1) + vw'(1))\delta w''(1) + \left( vw''(1) + \frac{1}{r_w(1)}w'(1) \right) \delta w'(1) \right] d(1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{(j)=2}^{NN-1} \mathbf{D} \left[ (r_w(j)w''(j) + vw'(j))\delta w''(j) + \left( vw''(j) + \frac{1}{r_w(j)}w'(j) \right) \delta w'(j) \right] d(j) + \mathbf{D} \left[ (r_w(NN)w''(NN) + \right.$$

$$+v w'(NN) \delta w''(NN) + \left( v w''(NN) + \frac{1}{r_w(NN)} w'(NN) \right) \delta w'(NN) \Big] d(NN) \Big\} \quad (2.31)$$

onde (j) representa um trecho genérico de integração, d(j) seu comprimento  $\left( \lambda \text{ ou } \frac{\lambda}{2} \right)$ , e  $r_u(j)$  e  $r_w(j)$ , tal como definidos adiante, caracterizam sua distância ao centro da placa.

Aplicando em (2.31) as representações em diferenças finitas do item 2.3.2, escreve-se:

$$\begin{aligned} \delta W_i = & 2\pi \left\{ \sum_{k=2}^{NN} C \left[ \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + v \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \left( v \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right] \lambda + D \left[ \left( r_1 \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + v \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + \left( v \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + \frac{1}{r_1} \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right) \delta \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=2}^{NN-1} D \left[ \left( r_k \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\lambda^2} + v \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right) \delta \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{2\lambda} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( v \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\lambda^2} + \frac{1}{r_k} \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right) \delta \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right] \lambda + \right. \\ & \left. + D \left[ \left( r_{NN} \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + v \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( v \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + \frac{1}{r_{NN}} \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} \right\} \quad (2.32) \end{aligned}$$

Note-se que os termos em u que aparecem sob forma explícita em (2.31) são representados em (2.32) pela média  $u(j) = \frac{u_k + u_{k-1}}{2}$ ,  $k=(j)+1$ . Além disso, tem-se que a variável  $r_u$ , associada aos termos em u e  $u'$ , é tomada no ponto  $\times$  pela média  $r_u(j) = \frac{r_k + r_{k-1}}{2}$ , ao passo que para a variável  $r_w$ , referente aos termos em  $w'$  e  $w''$ , utiliza-se o próprio valor no ponto nodal, ou seja,  $r_w(j) = r_k$ . Cabe ressaltar que, neste caso, para o nó 1, onde  $r_k$  seria nulo, usou-se  $r_1 = \frac{\lambda}{4}$ , de modo a evitar divisão por zero; e que para o

nó NN, onde  $r_k$  valeria  $a$ , usou-se, por analogia,  $r_{NN}=a - \frac{\lambda}{4}$ .

### 2.3.5 – Avaliação do Trabalho Virtual Externo

Na avaliação numérica do trabalho virtual externo, utilizam-se apenas os trechos de integração do tipo II na figura 2.5.

A correspondente expressão (2.17) assume então, para fins numéricos, a forma:

$$\begin{aligned} \delta W_e = & 2\pi \left\{ r_1 \left[ -\mu h \ddot{u}_1 \delta u_1 + (p_{z1} - \mu h \ddot{w}_1) \delta w_1 - \frac{\mu h^3}{12} \frac{(\ddot{w}_2 - \ddot{w}_1)}{\lambda} \delta \frac{(w_2 - w_1)}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} + \right. \\ & + \sum_{k=2}^{NN-1} r_k \left[ -\mu h \ddot{u}_k \delta u_k + (p_{zk} - \mu h \ddot{w}_k) \delta w_k - \frac{\mu h^3}{12} \frac{(\ddot{w}_{k+1} - \ddot{w}_{k-1})}{2\lambda} \delta \frac{(w_{k+1} - w_{k-1})}{2\lambda} \right] \lambda + \\ & + r_{NN} \left[ -\mu h \ddot{u}_{NN} \delta u_{NN} + (p_{zNN} - \mu h \ddot{w}_{NN}) \delta w_{NN} - \frac{\mu h^3}{12} \frac{(\ddot{w}_{NN} - \ddot{w}_{NN-1})}{\lambda} \delta \frac{(w_{NN} - w_{NN-1})}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} + \\ & \left. + a \bar{N}_{ra} \delta u_{NN} + a \bar{Q}_{ra} \delta w_{NN} - a \bar{M}_{ra} \delta \varphi_{NN} \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Introduzindo a expressão (2.29) em (2.33), tem-se finalmente para  $\delta W_e$ :

$$\begin{aligned} \delta W_e = & 2\pi \left\{ r_1 \left[ -\mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} u_1 + g_{u1} \right) + \left( p_{z1} - \mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_1 + g_{w1} \right) \right) \delta w_1 - \frac{\mu h^3}{12} \frac{\left( \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_2 + g_{w2} \right) - \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_1 + g_{w1} \right) \right)}{\lambda} \right. \right. \\ & \cdot \delta \frac{(w_2 - w_1)}{\lambda} \left. \right] \frac{\lambda}{2} + \sum_{k=2}^{NN-1} r_k \left[ -\mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} u_k + g_{uk} \right) \delta u_k + \left( p_{zk} - \mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_k + g_{wk} \right) \right) \delta w_k + \right. \\ & \left. - \frac{\mu h^3}{12} \frac{\left( \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_{k+1} + g_{wk+1} \right) - \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_{k-1} + g_{wk-1} \right) \right)}{2\lambda} \delta \frac{(w_{k+1} - w_{k-1})}{2\lambda} \right] \lambda + \\ & + r_{NN} \left[ -\mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} u_{NN} + g_{uNN} \right) \delta u_{NN} + \left( p_{zNN} - \mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_{NN} + g_{wNN} \right) \right) \delta w_{NN} + \right. \\ & \left. - \frac{\mu h^3}{12} \frac{\left( \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_{NN} + g_{wNN} \right) - \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_{NN-1} + g_{wNN-1} \right) \right)}{\lambda} \delta \frac{(w_{NN} - w_{NN-1})}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} + \end{aligned}$$

$$\left. + a\bar{N}_{ra} \delta u_{r0NN} + a\bar{Q}_{ra} \delta w_{NN} - a\bar{M}_{ra} \delta \varphi_{NN} \right\} \quad (2.34)$$

### 2.3.6 – Montagem da Matriz dos Coeficientes

Mediante o cômputo da contribuição, em cada trecho de integração na figura 2.5, dos termos que, na igualdade entre os trabalhos virtuais externo e interno da placa, encontram-se multiplicados pelos deslocamentos e também por suas variações, monta-se a matriz dos coeficientes  $[K]$  ilustrada na figura 2.11. Assim, além da contribuição do trabalho virtual interno, dado pela expressão (2.32), os termos do trabalho virtual externo em (2.34) oriundos da derivada segunda temporal dos deslocamentos igualmente contribuem para  $[K]$ .

A montagem da matriz se faz a partir da geração, para cada par de trechos de integração, constituído por um trecho do tipo I e por outro do tipo II (ver figura 2.5), de uma matriz de coeficientes obedecendo inicialmente ao sistema de numeração local dos deslocamentos (designada por matriz local), e em seguida, mediante a utilização da relação de correspondência (2.18), referida ao sistema de numeração global dos deslocamentos.

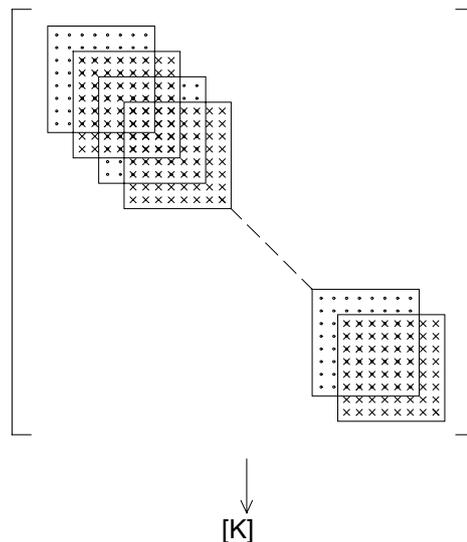


Figura 2.11 – Montagem da matriz de rigidez

### 2.3.7 – Montagem do Vetor de Cargas

Contribuem na montagem do vetor de cargas  $[Q]$  os termos do trabalho virtual externo em (2.34) que se encontram multiplicados somente pelas variações dos deslocamentos. A montagem desses vetores de carga, inicialmente no sistema de numeração local (vetores locais), é análoga à das matrizes dos coeficientes e se encontra ilustrada na figura 2.12.

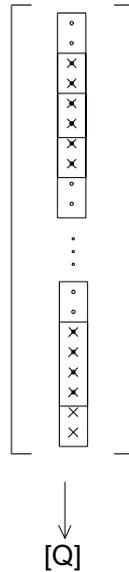


Figura 2.12 – Montagem do vetor de carga da placa

### 2.3.8 – Sistema de Equações e Condições de Contorno

Uma vez efetuada a montagem da matriz de rigidez  $[K]$  e do vetor de cargas  $[Q]$  para a placa, chega-se ao sistema de equações lineares  $[K][U]=[Q]$  esquematizado na figura 2.13. Aplicam-se em seguida as condições de contorno cinemáticas do problema. Tais condições consistem na restrição de determinados graus de liberdade da estrutura, em função do tipo de vinculação externa existente. Na placa em questão, as condições de contorno referem-se ao bordo  $r = a$  da placa. Além destas, existem ainda condições a serem impostas em razão da axissimetria (o deslocamento  $u$  e a rotação  $\theta$  no centro da placa ( $r = 0$ ) são nulos) e as condições iniciais do problema. Estas últimas envolvem, na análise do primeiro intervalo de tempo, o conhecimento, em todos os nós da placa, dos deslocamentos, velocidades e, conforme requer o método numérico, também das acelerações em  $t = 0$ . As condições de bordo e de axissimetria acima referidas são introduzidas no sistema de equações através da técnica dos “zeros e uns”. Utiliza-se então o método de Gauss para a resolução do sistema, obtendo-se como resposta os deslocamentos nodais incógnitos da estrutura

no instante final  $t = t_2$  de um certo intervalo de tempo  $\Delta t$  ao longo do processo de marcha no tempo.

A montagem e resolução do sistema de equações é repetida para cada passo de tempo, com atualização dos parâmetros  $g$  e  $h$  da equação (2.30).

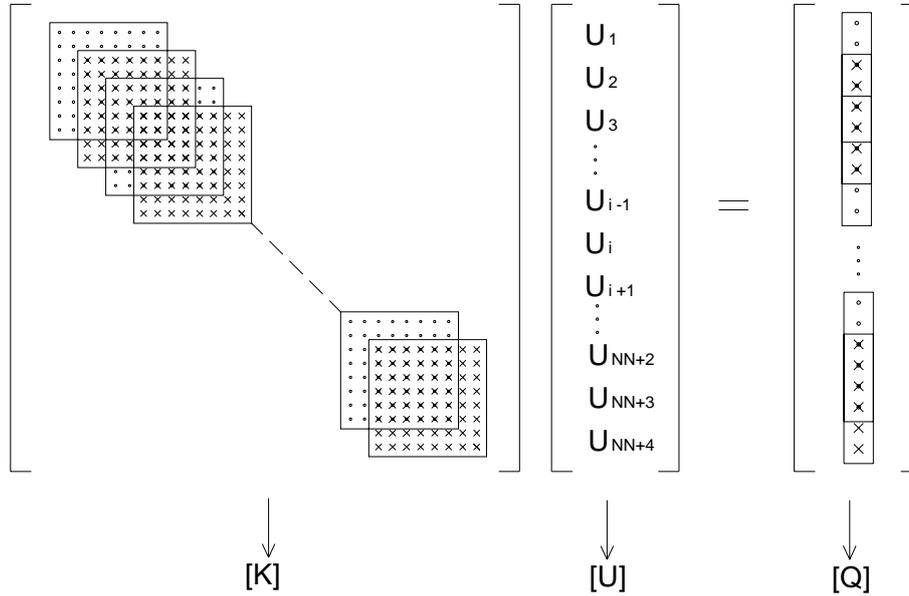


Figura 2.13 – Representação esquemática do sistema de equações lineares montado para um certo intervalo de tempo  $\Delta t$

#### 2.4 – Apresentação e Análise dos Resultados

O presente item visa demonstrar a aplicabilidade do algoritmo desenvolvido, procurando-se testar o seu funcionamento através da comparação dos resultados numéricos obtidos pelo MDFE, aqui proposto, com oriundos do MEF, fornecidos pelo programa FEAP<sup>®</sup> [59]. Este último comporta opções para análise dinâmica de um problema elástico 3D axissimétrico, tendo sido utilizado, nas aplicações, um elemento quadrangular linear. A obtenção dos resultados se faz mediante a consideração de dois exemplos. No primeiro, são introduzidos deslocamentos iniciais, ao passo que, no segundo, aplica-se subitamente à placa um carregamento uniformemente distribuído e que se mantém constante no tempo. Nos exemplos deste e dos capítulos a seguir, as discretizações espacial e temporal foram estabelecidas a partir da realização de uma série de testes até que se obtivessem resultados considerados confiáveis (dentro de uma margem de erro na faixa de 2%).

### 2.4.1 – Exemplo 1: Placa Circular com a Imposição de Deslocamentos Iniciais

Analisa-se neste exemplo uma placa apoiada submetida a uma deformada inicial  $w_0(r)$ , correspondente a um carregamento estático uniformemente distribuído de  $2 \times 10^4 \text{ N/m}^2$  atuando na placa [1], deixando-a oscilar livremente após a imposição desta condição inicial (figura 2.14).

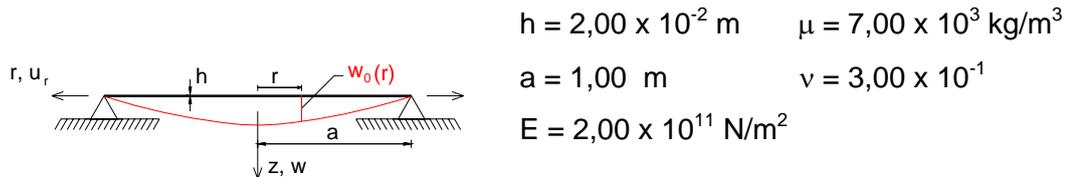


Figura 2.14 – Placa circular apoiada com a imposição de deslocamentos iniciais

Para a análise em diferenças finitas energéticas utilizaram-se 100 divisões no raio, enquanto na análise 3D por elementos finitos foram adotados 1600 elementos (16 divisões ao longo da espessura e 100 divisões ao longo do raio). Foram prescritas condições de contorno de deslocamento radial  $u = 0$  nos nós correspondentes à coordenada  $r = 0,00 \text{ m}$  e de deslocamento transversal  $w = 0$  nos nós de coordenada  $r = 1,00 \text{ m}$ . No programa de elementos finitos 3D, as condições de contorno, bem como as condições iniciais, foram dadas, em sintonia com a teoria de placas delgadas, atribuindo aos deslocamentos transversais dos nós, ao longo da espessura, o mesmo valor da flexa  $w(r)$  da superfície média. Já para os deslocamentos radiais, também obedecendo a essa teoria, são prescritos, na espessura, os valores  $u(r, z) = -z \frac{dw(r)}{dr}$ . O tempo total de análise foi de 0,5s, subdividido em 500 intervalos de valor  $\Delta t = 0,001\text{s}$ .

Nas tabelas 2.1 e 2.2 podem-se observar as diferenças percentuais, em relação aos resultados do MEF, para os primeiros máximos negativos do deslocamento  $w$  e do momento  $M_r$ .

As figuras de 2.15 e 2.16 mostram a comparação entre os resultados do MDFE, com a consideração da inércia de rotação, e do MEF (onde este efeito está implicitamente incorporado na formulação, por ser o modelo 3D) para o deslocamento e o momento no centro da placa.

Tabela 2.1 – Deslocamento  $w_{\text{máx}}$  negativo ( $r=0$ ), correspondente ao primeiro máximo, para o Exemplo 1

Deslocamento $w_{\text{máx}}$			
Método	Tempo	$w_{\text{máx}}$	Diferença Percentual
MDFE	$2,10 \times 10^{-2}$ s	$-8,310 \times 10^{-3}$ m	-0,51%
MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-8,353 \times 10^{-3}$ m	-

Tabela 2.2 – Momento  $M_{\text{r máx}}$  negativo ( $r=0$ ), correspondente ao primeiro máximo, para o Exemplo 1

Momento $M_{\text{r máx}}$ negativo			
Método	Tempo	$M_{\text{r máx}}$	Diferença Percentual
MDFE	$2,10 \times 10^{-2}$ s	$-4,915 \times 10^3$ Nm/m	1,40%
MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-4,983 \times 10^3$ Nm/m	-

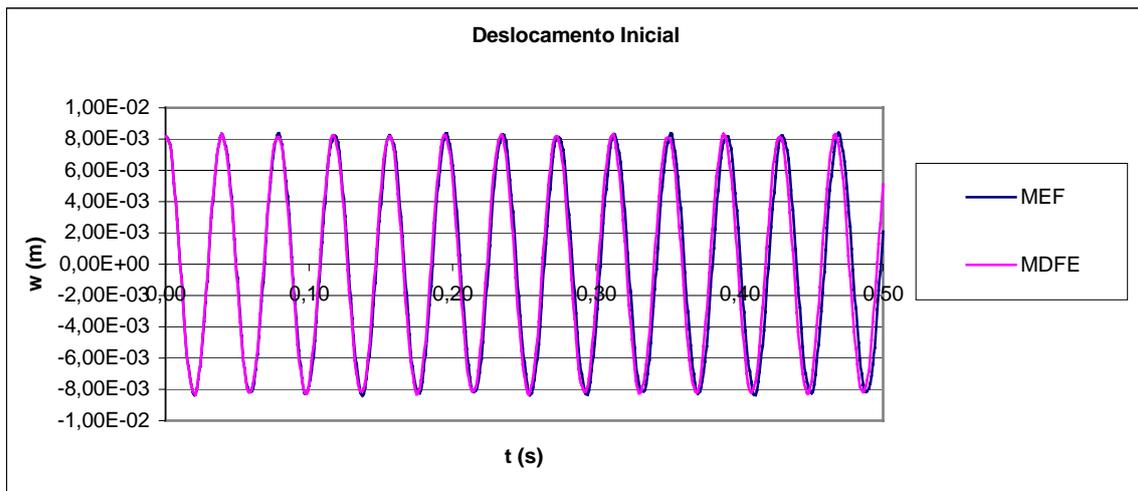


Figura 2.15– Deslocamento  $w(t)$  do centro da placa para o Exemplo 1 (MDFE X MEF)

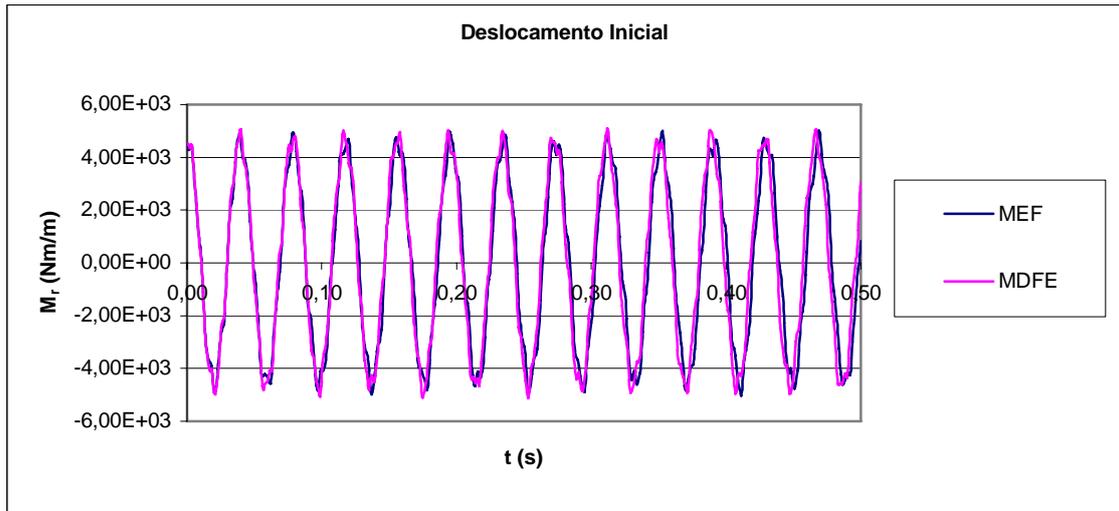


Figura 2.16 – Momento  $M_r(t)$  do centro da placa para o Exemplo 1 (MDFE X MEF)

A comparação entre o MDFE e o MEF mostrou que, no exemplo em questão, os dois métodos apresentam boa concordância tanto para os deslocamentos transversais como para os momentos, não se verificando, conforme ilustram os gráficos, defasagens de período significativas com a evolução do tempo (para o tempo total de análise considerado). Tais defasagens resultam do próprio processo de marcha no tempo, no qual os resultados num tempo  $t_1$  são tomados como condições iniciais para o tempo  $t_2$ , gerando assim um acúmulo de erros à medida que o tempo evolui.

#### 2.4.2 – Exemplo 2: Placa Circular com Carregamento Uniforme Constante no Tempo

O segundo exemplo a ser apresentado é o de uma placa circular com carregamento uniformemente distribuído  $p_z = 2 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup>, aplicado subitamente e mantido constante no tempo (figura 2.17), sendo os demais dados numéricos idênticos aos do exemplo anterior.

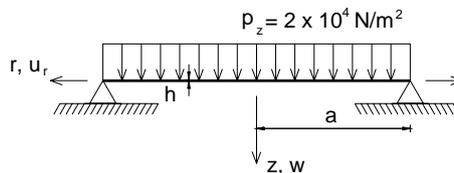


Figura 2.17 – Placa circular apoiada submetida a carregamento uniforme mantido constante no tempo

As discretizações temporal e espacial são também as mesmas já utilizadas. Novamente as condições de contorno são aplicadas da mesma forma que no exemplo

anterior. No programa de elementos finitos 3D o carregamento nodal, equivalente à atuação da força  $p_z$  (por unidade de área) na superfície média, foi estabelecido considerando-se, ao longo da espessura e do raio, a zona de influência de cada nó.

A comparação entre os resultados do MEF e do MDFE é dada pelas tabelas 2.3 e 2.4 e pelas figuras 2.18 e 2.19.

Tabela 2.3 – Deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  positivo ( $r=0$ ), correspondente ao primeiro máximo, para o Exemplo 2

Deslocamento $w_{m\acute{a}x}$			
Método	Tempo	$w_{m\acute{a}x}$	Diferença Percentual
MDFE	$2,10 \times 10^{-2}$ s	$1,711 \times 10^{-2}$ m	-1,33%
MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$1,734 \times 10^{-2}$ m	-

Tabela 2.4 – Momento  $M_{r\acute{m}\acute{a}x}$  positivo ( $r=0$ ), correspondente ao primeiro máximo, para o Exemplo 2

Momento $M_{r\acute{m}\acute{a}x}$ positivo			
Método	Tempo	$M_{r\acute{m}\acute{a}x}$	Diferença Percentual
MDFE	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$9,816 \times 10^3$ Nm/m	0,49%
MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$9,649 \times 10^3$ Nm/m	-

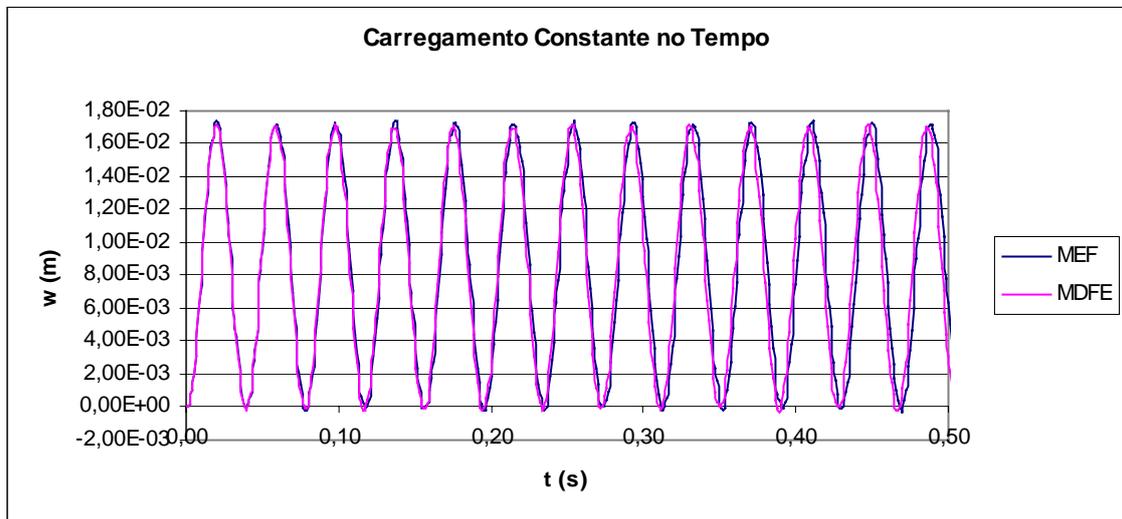


Figura 2.18– Deslocamento  $w(t)$  do centro da placa para o Exemplo 2 (MDFE X MEF)

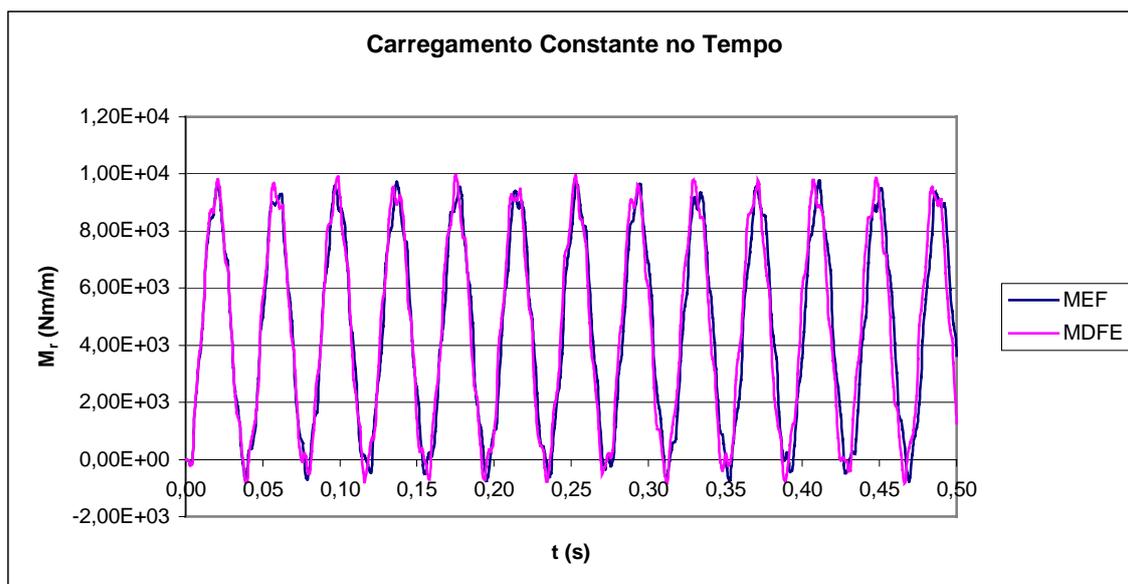


Figura 2.19 – Momento  $M_r(t)$  do centro da placa para o Exemplo 2 (MDFE X MEF)

Novamente os resultados foram bastante satisfatórios, com amplitudes semelhantes e sem a ocorrência de defasagens de período, tal como observado no exemplo anterior.

## 2.5 – Comentários

Nos exemplos abordaram-se tanto o caso de condições iniciais, como o de carregamento aplicado. Nota-se, através dos resultados apresentados, que o MDFE se mostra eficaz na análise de problemas lineares dinâmicos de placas delgadas.

Vale salientar que a implementação numérica desenvolvida como um problema 2D conseguiu representar satisfatoriamente o problema, quando comparado ao modelo 3D de elementos finitos.

Pode-se dizer que o MDFE é uma alternativa competitiva nos casos analisados, pois fornece resultados satisfatórios e, mesmo comparado com uma modelagem 2D do MEF, apresenta, para discretizações equivalentes, um sistema de equações de menor grau (já que no MDFE as rotações somente são incógnitas nos nós do contorno).

## CAPÍTULO 3

### ANÁLISE LINEAR DINÂMICA DE PLACAS ESPESSAS

#### 3.1 – Introdução

Aborda-se neste capítulo a análise linear de placas espessas. Além da consideração do comportamento dinâmico, é também previsto o efeito de solicitações térmicas. De forma análoga ao capítulo anterior, primeiramente apresenta-se a formulação analítica do problema, seguindo-se o tratamento numérico e, posteriormente, os exemplos de aplicação.

#### 3.2 – Tratamento Analítico do Problema

O desenvolvimento analítico via P.T.V. é análogo ao da placa delgada. As considerações decorrentes da axissimetria, o sistema de coordenadas e os esforços solicitantes atuantes na placa também são os mesmos descritos no capítulo anterior.

##### 3.2.1 – Hipóteses Básicas

1 – Admite-se que a placa em estudo é espessa e com comportamento linear físico e geométrico;

2 – Linhas retas, normais à superfície média antes da deformação, permanecem retas, inalteradas em seu comprimento, porém não mais normais à superfície média após a deformação.

3 – A tensão normal  $\sigma_z$  (na direção normal à superfície média) é pequena em relação às demais tensões normais e pode ser desprezada.

##### 3.2.2 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno

O trabalho virtual interno, levando em conta o sistema de coordenadas da figura 2.1, as simplificações da teoria adotada e a axissimetria do problema, escreve-se:

$$\delta W_i = \int_V (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \tau_{rz}^f \delta \gamma_{rz}^f) dV \quad (3.1)$$

onde  $\tau_{rz}^f$  e  $\gamma_{rz}^f$  representam, respectivamente, tensão e deformação cisalhante fictícias, uma vez que as mesmas são admitidas constantes ao longo da espessura da placa.

As componentes de tensão  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  e  $\tau_{rz}^f$  estão ligadas às componentes de deformação  $\varepsilon_r$  e  $\varepsilon_\theta$  e  $\gamma_{rz}^f$  e à variação de temperatura  $\Delta t = \Delta t(r, z)$  pela lei constitutiva [55]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) - \alpha\Delta t(1+\nu)] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) - \alpha\Delta t(1+\nu)] \\ \tau_{rz}^f &= KG\gamma_{rz}^f\end{aligned}\quad (3.2)$$

onde  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  é o módulo de elasticidade transversal, K um fator corretivo (denominado coeficiente de cisalhamento), a ser determinado no sub item 3.2.4, e  $\alpha$  o coeficiente de dilatação térmica.

Sendo a placa de raio a e espessura h, tem-se:

$$\delta W_i = 2\pi \int_0^a \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r \delta\varepsilon_r + \sigma_\theta \delta\varepsilon_\theta + \tau_{rz}^f \gamma_{rz}^f) dz \right] r dr \quad (3.3)$$

As relações deformação-deslocamento para o problema se escrevem, com o auxílio da figura 3.1:

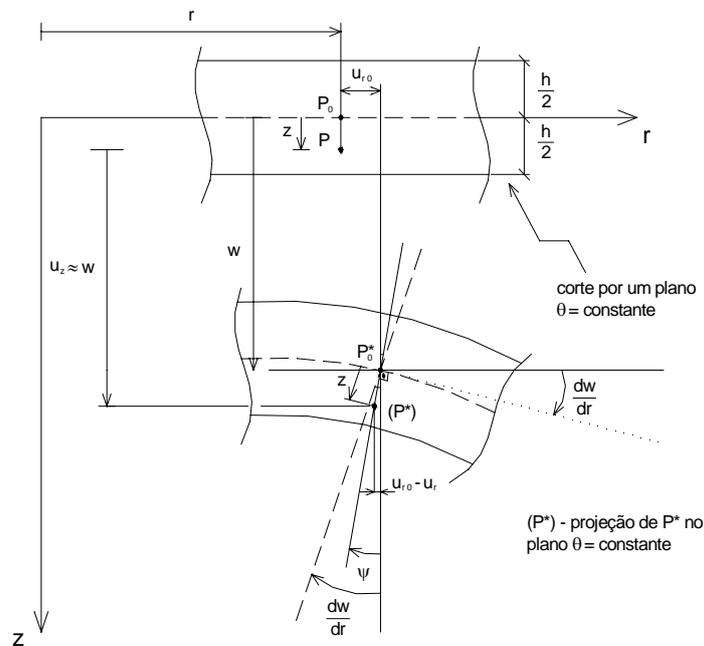


Figura 3.1 – Componentes  $u_r$  e  $u_z$  do deslocamento de um ponto P genérico da placa

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{du_{r0}}{dr} - z \frac{d\psi}{dr} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} = \frac{u_{r0}}{r} - \frac{z}{r} \psi \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \gamma_{rz}^f = -\psi + \frac{dw}{dr}\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde  $u_{r0}$  denota o deslocamento  $u_r$  dos pontos da superfície média e  $\psi$  representa a rotação da normal no plano  $rz$ , a qual difere da rotação da superfície média  $\left(\frac{dw}{dr}\right)$ .

Levando-se em conta a definição dos esforços solicitantes, por unidade de comprimento,

$$\begin{aligned}N_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r dz & N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz \\ M_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz & M_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz \\ Q_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz}^f dz\end{aligned}\tag{3.5}$$

o trabalho virtual interno (3.3) pode ser apresentado sob a forma:

$$\delta W_i = 2\pi \int_0^a \left( N_r \delta \frac{du_{r0}}{dr} - M_r \delta \frac{d\psi}{dr} + \frac{N_\theta}{r} \delta u_{r0} - \frac{M_\theta}{r} \delta \psi - Q_r \delta \psi + Q_r \delta \frac{dw}{dr} \right) r dr\tag{3.6}$$

Tendo-se (3.4) e (3.2), podem ser obtidos, através de (3.5), os esforços solicitantes em termos dos deslocamentos  $u_{r0}$  e  $w$ , das rotações  $\psi$  da normal e  $\frac{dw}{dr}$  da superfície média e da variação de temperatura  $\Delta t$ . Admitindo para  $\Delta t$  variação linear na espessura, ou seja,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} + \frac{z}{h} (\Delta t_i - \Delta t_e)\tag{3.7}$$

onde  $\Delta t_i = \Delta t|_{z=-\frac{h}{2}}$  e  $\Delta t_e = \Delta t|_{z=\frac{h}{2}}$ , chega-se então às seguintes expressões para os esforços solicitantes:

$$\begin{aligned}
N_r &= C \left( \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{v}{r} u_{r0} \right) - \frac{\alpha E h}{2(1-\nu)} (\Delta t_i + \Delta t_e) \\
N_\theta &= C \left( \nu \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{u_{r0}}{r} \right) - \frac{\alpha E h}{2(1-\nu)} (\Delta t_i + \Delta t_e) \\
M_r &= -D \left( \frac{d\psi}{dr} + \frac{v}{r} \psi \right) + \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} (\Delta t_i - \Delta t_e) \\
M_\theta &= -D \left( \nu \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r} \psi \right) + \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} (\Delta t_i - \Delta t_e) \\
Q_r &= K G h \left( \frac{dw}{dr} - \psi \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

sendo C e D as rigidezes extensional e flexional da casca, definidas em (2.11).

Finalmente, substituindo (3.8) em (3.6), o trabalho virtual interno se escreve sob a forma:

$$\begin{aligned}
\delta W_i &= 2\pi \int_0^a \left\{ C \left( r \frac{du_{r0}}{dr} + \nu u_{r0} \right) \delta \frac{du_{r0}}{dr} + D \left( r \frac{d\psi}{dr} + \nu \psi \right) \delta \frac{d\psi}{dr} + C \left( \nu \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{u_{r0}}{r} \right) \delta u_{r0} + \right. \\
&+ D \left( \nu \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r} \psi \right) \delta \psi + K G h r \left( \psi - \frac{dw}{dr} \right) \delta \psi + K G h r \left( -\psi + \frac{dw}{dr} \right) \delta \frac{dw}{dr} + \\
&- \frac{\alpha \pi E h}{1-\nu} \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) r \delta \frac{du_{r0}}{dr} + (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta u_{r0} + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) r \delta \frac{d\psi}{dr} + \right. \\
&\left. \left. + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \psi \right] \right\} dr
\end{aligned} \tag{3.9}$$

### 3.2.3 – Trabalho Virtual Externo

As possíveis forças de domínio e de contorno são as mesmas consideradas na placa delgada e representadas na figura 2.3.

A parcela do trabalho virtual externo relativa às forças de domínio (por unidade de área) é dada por:

$$\delta W_e = 2\pi \int_0^a \left[ -f_r \delta u_{r0} + (p_z - f_z) \delta w - f_{rz} \delta \psi \right] r dr \tag{3.10}$$

onde

$$\begin{aligned}
f_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \ddot{u}_r dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu (\ddot{u}_{r0} - z \ddot{\psi}) dz = \mu h \ddot{u}_{r0} \\
f_z &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \ddot{w} dz = \mu h \ddot{w} \\
f_{rz} &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu \ddot{u}_r z dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu (\ddot{u}_{r0} - z \ddot{\psi}) z dz = \frac{\mu h^3}{12} \ddot{\psi}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

e sendo  $\ddot{u}_{r0}$ ,  $\ddot{w}$  e  $\ddot{\psi}$  as derivadas segundas temporais dos deslocamentos  $u_{r0}$  e  $w$  e da rotação  $\psi$ , respectivamente, e  $\mu$  a massa específica do material.

Substituindo-se (3.11) em (3.10), tem-se a expressão do trabalho virtual das forças de domínio:

$$\delta W_e = 2\pi \int_0^a \left[ -\mu h \ddot{u}_{r0} \delta u_{r0} + (p_z - \mu h \ddot{w}) \delta w - \frac{\mu h^3}{12} \ddot{\psi} \delta \psi \right] r dr \tag{3.12}$$

A contribuição dos possíveis carregamentos de contorno (por unidade de comprimento) para  $\delta W_e$  se escreve:

$$\delta W_e = 2\pi a \left( \bar{N}_r \delta u_{r0} + \bar{Q}_r \delta w - \bar{M}_r \delta \psi \right) \Big|_a \tag{3.13}$$

O trabalho virtual externo total, dado pela soma das parcelas referentes aos carregamentos de domínio e de contorno, assume então o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned}
\delta W_e &= 2\pi \int_0^a \left[ -\mu h \ddot{u}_{r0} \delta u_{r0} + (p_z - \mu h \ddot{w}) \delta w - \frac{\mu h^3}{12} \ddot{\psi} \delta \psi \right] r dr + \\
&+ 2\pi a \left( \bar{N}_r \delta u_{r0} + \bar{Q}_r \delta w - \bar{M}_r \delta \psi \right) \Big|_a
\end{aligned} \tag{3.14}$$

### 3.2.4 – Determinação do Coeficiente de Cisalhamento K

Para a determinação do coeficiente de cisalhamento K são igualadas as parcelas de energia de deformação, por unidade de área de superfície média,  $U$  e  $\bar{U}$ , referentes às tensões cisalhantes real e fictícia, respectivamente.

Primeiramente determina-se a tensão real  $\tau_{rz}$  através do equilíbrio, na direção radial, da porção do elemento de placa situada entre um  $z$  genérico e  $\frac{h}{2}$  (figura 3.2).

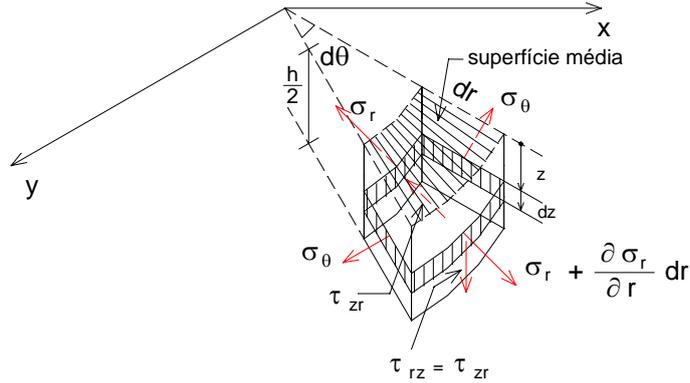


Figura 3.2 – Esquema para a determinação da tensão cisalhante  $\tau_{rz}$

A equação de equilíbrio de forças na direção  $r$  é dada por:

$$\int_{z}^{\frac{h}{2}} \left[ -\sigma_r r d\theta + \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_\theta r dr d\theta \right] dz - \tau_{rz} r dr d\theta = 0 \quad (3.15)$$

Segue-se então que:

$$\int_{z}^{\frac{h}{2}} \left[ -\sigma_r r d\theta + \sigma_r r d\theta + \sigma_r dr d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r dr d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} (dr)^2 d\theta - \sigma_\theta r dr d\theta \right] dz - \tau_{rz} r dr d\theta = 0$$

$$\int_{z}^{\frac{h}{2}} \left( \sigma_r dr d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r dr d\theta - \sigma_\theta r dr d\theta \right) dz - \tau_{rz} r dr d\theta = 0$$

tendo-se, por fim,

$$\int_{z}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r - \sigma_\theta) dz + \int_{z}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r dz - \tau_{rz} r = 0 \quad (3.16)$$

Com base em (3.2) e (3.4), as tensões  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  podem ser assim escritas em função dos deslocamentos e das variações de temperatura  $\Delta t_e$  e  $\Delta t_i$ :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left( \frac{du_{r0}}{dr} - z \frac{d\psi}{dr} + \nu \frac{u_{r0}}{r} - \nu \frac{z}{r} \psi \right) - \alpha(1+\nu) \left[ \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} + \frac{z}{h} (\Delta t_i - \Delta t_e) \right] \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left( \frac{u_{r0}}{r} - \frac{z}{r} \psi + \nu \frac{du_{r0}}{dr} - \nu z \frac{d\psi}{dr} \right) - \alpha(1+\nu) \left[ \frac{\Delta t_i + \Delta t_e}{2} + \frac{z}{h} (\Delta t_i - \Delta t_e) \right] \right\} \quad (3.17)$$

Comparando (3.8) e (3.17),  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  podem ser também escritas em função dos esforços solicitantes  $N_r$ ,  $M_r$ ,  $N_\theta$  e  $M_\theta$ :

$$\sigma_r = \frac{N_r}{h} + 12 \frac{M_r}{h^3} z \quad (3.18)$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} + 12 \frac{M_\theta}{h^3} z$$

Levando-se (3.18) em (3.16), e integrando em  $z$ , chega-se à relação:

$$\frac{6}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left( \frac{M_r}{r} - \frac{M_\theta}{r} + \frac{dM_r}{dr} \right) + \frac{1}{h} \left( \frac{h}{2} - z \right) \left( \frac{N_r}{r} - \frac{N_\theta}{r} + \frac{dN_r}{dr} \right) - \tau_{rz} = 0 \quad (3.19)$$

Por outro lado, do equilíbrio de momentos e de forças na direção  $r$  no elemento de placa, tem-se:

$$\left( \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) + \frac{dM_r}{dr} \right) = Q_r \quad (3.20)$$

$$\left( \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) + \frac{dN_r}{dr} \right) = 0$$

Substituindo-se então (3.20) em (3.19), obtém-se a expressão da tensão real  $\tau_{rz}$ :

$$\tau_{rz} = \frac{6Q_r}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (3.21)$$

Para a energia de deformação, por unidade de área, associada a  $\tau_{rz}$ , resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz} \gamma_{rz} dz = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\tau_{rz}^2}{G} dz \quad (3.22)$$

onde se considerou que  $\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G}$ .

Introduzindo-se (3.21) em (3.22), e resolvendo a integral, obtém-se então:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Q_r^2}{G} \left[ \frac{6}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]^2 dz = \frac{1}{2} \frac{Q_r^2}{G h^5} \quad (3.23)$$

Determina-se agora a parcela da energia de deformação, por unidade de área, referente à tensão de cisalhamento fictícia  $\tau_{rz}^f$ , a qual se escreve:

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz}^f \gamma_{rz}^f dz \quad (3.24)$$

Exprimindo a deformação  $\gamma_{rz}^f$  em função da tensão  $\tau_{rz}^f$  (equação 3.2) e utilizando para esta a expressão  $\tau_{rz}^f = \frac{Q_r}{h}$ , tem-se para  $\bar{U}$ :

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz}^f \gamma_{rz}^f dz = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Q_r}{h} \frac{Q_r}{KGh} dz = \frac{1}{2} \frac{Q_r^2}{KGh} \quad (3.25)$$

Da igualdade entre as duas parcelas de energia de deformação,  $U$  e  $\bar{U}$ , resulta então para o coeficiente de cisalhamento:

$$K = \frac{5}{6} \quad (3.26)$$

### 3.3 – Tratamento Numérico do Problema

A aplicação do método numérico ao presente problema é inteiramente análoga à descrita no item 2.3.

#### 3.3.1 – Discretização e Sistemas de Numeração da Placa

Novamente a discretização e sistemas de numeração da placa tiram partido da axissimetria. Os nós da placa são também numerados do centro para o bordo (figura 3.3). No presente caso não há a necessidade de criação de graus de liberdade referentes a nós virtuais, pois nota-se nas expressões (3.9) e (3.14) a existência de derivadas de primeira ordem somente. Tem-se para  $N$  divisões da placa um total de  $NN=N+1$  nós, igualmente espaçados de uma distância  $\lambda$ . A relação de correspondência entre o índice  $i$  dos deslocamentos  $u_i$ ,  $w_i$  e  $\psi_i$  de um nó  $i$  qualquer e os índices de numeração global desses mesmos deslocamentos se dá genericamente por  $u_i \rightarrow U_{3i-2}$ ,  $w_i \rightarrow U_{3i-1}$  e  $\psi_i \rightarrow U_{3i}$ ,  $i = 1$  a  $NN$ .

Na placa espessa, para fins de avaliação dos trabalhos virtuais interno e externo, consideram-se dois tipos distintos de trechos de integração, designados como tipos I e II, conforme mostrado na figura 3.4. Aos termos contendo as derivadas  $u'$ ,  $w'$  e  $\psi'$  (utilizando-se a notação  $(\dots)' = \frac{d(\dots)}{dr}$ ) associam-se  $NN-1$  trechos de integração, enquanto aos que envolvem as derivadas  $\ddot{w}$ ,  $\ddot{u}$ ,  $\ddot{\psi}$  e também as funções de carga, correspondem  $NN$  trechos de integração, notando-se, neste último caso, que os trechos inicial e final têm, respectivamente, metade do comprimento  $\lambda$  indicado na figura 3.4.

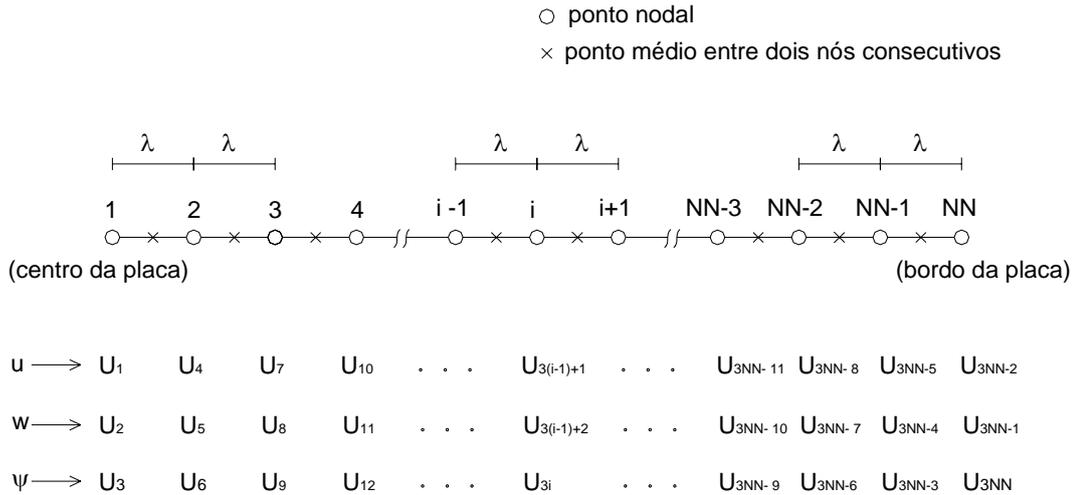


Figura 3.3 – Discretização e sistema de numeração global dos deslocamentos nodais

Utiliza-se ainda o sistema de numeração local para os deslocamentos, também mostrado na figura 3.4 e, como mostra a figura, a cada dois nós consecutivos  $i - 1, i$  ( $i = 2$  a  $NN$ ) estão associados seis deslocamentos nodais. A regra de correspondência entre os índices de numeração local e global dos deslocamentos é dada por:

$$a_k \rightarrow U_{3(j-2) + k} \quad (k=1 \text{ a } 6, j = 2 \text{ a } NN) \tag{3.27}$$

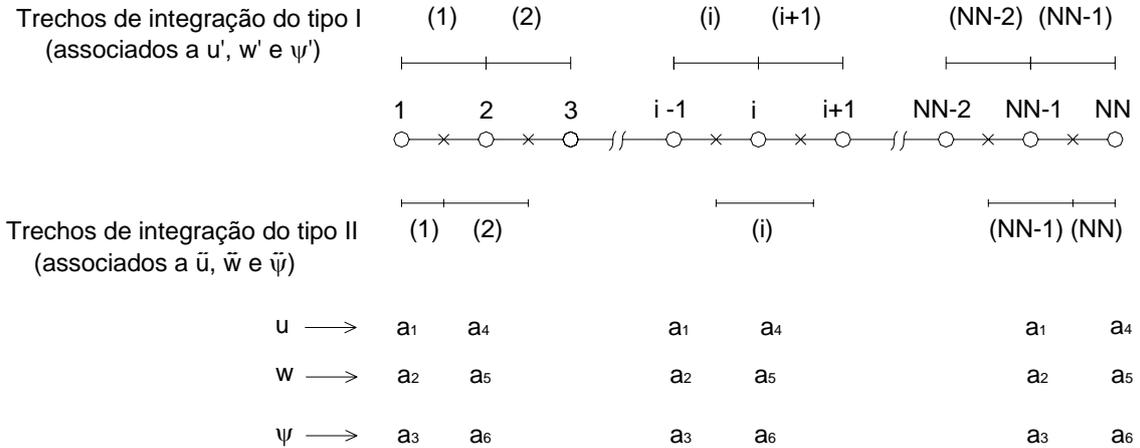


Figura 3.4 – Trechos de integração e numeração local dos deslocamentos nodais

### 3.3.2 – Representações em Diferenças Finitas para as Derivadas Espaciais dos Deslocamentos

Tal como no capítulo 2, as derivadas espaciais são substituídas por representações em diferenças finitas e introduzidas nas expressões de  $\delta W_i$  e  $\delta W_e$ .

### 3.3.2.1 – Derivadas dos Deslocamentos $u$ e $w$ e da Rotação $\psi$

Como se observa na expressão (3.9), é requerida somente a derivada primeira, a qual, de acordo com a representação reduzida [57], fica assim aproximada num trecho de integração genérico (i) (vide figura 2.6):

$$f'(i) \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda} \quad (3.28)$$

O esquema de integração no tempo é idêntico ao apresentado no capítulo 2, tendo-se porém, no presente caso, um grau de liberdade adicional por nó. Conseqüentemente, na figura 2.10,  $\ddot{f}$  representa  $\ddot{u}$ ,  $\ddot{w}$  ou  $\ddot{\psi}$ .

### 3.3.3 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno

Novamente, a avaliação da integral do trabalho virtual interno é desenvolvida aplicando-se, para as derivadas dos deslocamentos  $u$ ,  $w$  e  $\psi$ , as representações em diferenças finitas apresentadas no sub item anterior. Em cada um dos trechos de integração (do tipo 1 neste caso), tais derivadas, bem como todas as demais grandezas existentes na expressão, são consideradas constantes.

Da expressão (3.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta W_i = & 2\pi \sum_{(j)=1}^{NN-1} \left\{ C \left[ (r(j)u'(j) + vu(j))\delta u'(j) + \left( vu'(j) + \frac{u(j)}{r(j)} \right) \delta u(j) \right] + \right. \\ & + D \left[ (r(j)\psi'(j) + v\psi(j))\delta \psi'(j) + \left( \frac{\psi(j)}{r(j)} + v\psi'(j) \right) \delta \psi(j) \right] + \\ & \left. + KGhr(j) \left[ (\psi(j) - w'(j))\delta \psi(j) + (-\psi(j) + w'(j))\delta w'(j) \right] \right\} d(j) + \\ & - \frac{\alpha\pi Eh}{1-\nu} \left\{ \sum_{(j)=1}^{NN-1} \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) (r(j)\delta u'(j) + \delta u(j)) + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) (r(j)\delta \psi'(j) + \delta \psi(j)) \right] d(j) \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde (j) representa um trecho genérico de integração,  $d(j)$  seu comprimento, e  $r(j)$ , tal como definido adiante, caracteriza sua distância ao centro da placa.

Aplicando em (3.29) a representação em diferenças finitas para a derivada primeira vista no sub item 3.3.2, escreve-se:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & 2\pi \sum_{k=2}^{NN} \left\{ C \left[ \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + v \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \left( v \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right] + D \left[ \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{\lambda} + v \frac{\psi_k + \psi_{k-1}}{2} \right) \right. \\
& \cdot \delta \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{\lambda} + \left( \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{\psi_k + \psi_{k-1}}{2} + v \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{\psi_k + \psi_{k-1}}{2} + \\
& + KGh \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \left[ \left( \frac{\psi_k + \psi_{k-1}}{2} - \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{\psi_k + \psi_{k-1}}{2} + \right. \\
& \left. \left. + \left( -\frac{\psi_k + \psi_{k-1}}{2} + \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} \right] \right\} \lambda + \\
& - \frac{\alpha \pi E h}{1 - \nu} \left\{ \sum_{k=2}^{NN} \left( \Delta t_i + \Delta t_e \right) \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \delta \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{\lambda} + \delta \frac{\psi_k + \psi_{k-1}}{2} \right) \right\} \lambda \} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Note-se que os termos em  $u$ ,  $w$  e  $\psi$  que aparecem sob forma explicita em (3.29) são representados em (3.30) pela média  $f(j) = \frac{f_k + f_{k-1}}{2}$ ,  $k=(j)+1$ . Além disso, tem-se que a variável  $r$  é tomada no ponto  $\times$  da figura 3.4 pela média  $r(j) = \frac{r_k + r_{k-1}}{2}$ .

### 3.3.4 – Avaliação do Trabalho Virtual Externo

Na avaliação numérica do trabalho virtual externo, utilizam-se os trechos de integração do tipo II na figura 3.3.

A expressão (3.14) assume então, para fins numéricos, a forma:

$$\begin{aligned}
\delta W_e = & 2\pi \left\{ r_1 \left[ -\mu h \ddot{u}_1 \delta u_1 + (p_{z1} - \mu h \ddot{w}_1) \delta w_1 - \frac{\mu h^3}{12} \ddot{\psi}_1 \delta \psi_1 \right] \frac{\lambda}{2} + \right. \\
& + \sum_{k=2}^{NN-1} r_k \left[ -\mu h \ddot{u}_k \delta u_k + (p_{zk} - \mu h \ddot{w}_k) \delta w_k - \frac{\mu h^3}{12} \ddot{\psi}_k \delta \psi_k \right] \lambda + \\
& + r_{NN} \left[ -\mu h \ddot{u}_{NN} \delta u_{NN} + (p_{zNN} - \mu h \ddot{w}_{NN}) \delta w_{NN} - \frac{\mu h^3}{12} \ddot{\psi}_{NN} \delta \psi_{NN} \right] \lambda + \\
& \left. + a \bar{N}_{ra} \delta u_{NN} + a \bar{Q}_{ra} \delta w_{NN} - a \bar{M}_{ra} \delta \psi_{NN} \right\}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde toma-se  $r_1 = \frac{\lambda}{4}$  e, por analogia,  $r_{NN} = a - \frac{\lambda}{4}$ .

Introduzindo a expressão (2.29) em (3.31), tem-se finalmente para  $\delta W_e$ :

$$\begin{aligned}
\delta W_e = & 2\pi \left\{ r_1 \left[ -\mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} u_1 + g_{u1} \right) + \left( p_{z1} - \mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_1 + g_{w1} \right) \right) \right] \delta w_1 + \right. \\
& - \frac{\mu h^3}{12} \left( \frac{4}{\Delta t^2} \psi_1 + g_{\psi 1} \right) \delta \psi_1 \left. \right] \frac{\lambda}{2} + \sum_{k=2}^{NN-1} r_k \left[ -\mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} u_k + g_{uk} \right) \delta u_k + \right. \\
& + \left( p_{zk} - \mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_k + g_{wk} \right) \right) \delta w_k - \frac{\mu h^3}{12} \left( \frac{4}{\Delta t^2} \psi_k + g_{\psi k} \right) \delta \psi_k \left. \right] \lambda + \\
& + r_{NN} \left[ -\mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} u_{NN} + g_{uNN} \right) \delta u_{NN} + \left( p_{zNN} - \mu h \left( \frac{4}{\Delta t^2} w_{NN} + g_{wNN} \right) \right) \delta w_{NN} + \right. \\
& \left. - \frac{\mu h^3}{12} \left( \frac{4}{\Delta t^2} \psi_{NN} + g_{\psi NN} \right) \delta \psi_{NN} \right] \lambda + a \bar{N}_{ra} \delta u_{r0NN} + a \bar{Q}_{ra} \delta w_{NN} - a \bar{M}_{ra} \delta \psi_{NN} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

### 3.3.5 – Montagem da Matriz dos Coeficientes

A montagem da matriz de rigidez global segue a mesma idéia descrita no capítulo 2.

### 3.3.6 – Montagem do Vetor de Cargas

A montagem do vetor de cargas é análoga à do capítulo anterior, observando-se que a contribuição dos termos envolvendo os efeitos térmicos é computada neste vetor, pois tais termos se encontram multiplicados somente pelas variações dos deslocamentos (e não pelos deslocamentos).

### 3.3.7 – Sistema de Equações e Condições de Contorno

A montagem do sistema de equações e a imposição de condições de contorno são idênticas às da placa delgada.

### 3.4 – Apresentação e Análise dos Resultados

Tal como no capítulo anterior, pretende-se neste item demonstrar a eficiência do MDFE quando comparado a resultados analíticos ou do MEF. São analisados cinco exemplos de aplicação, os três primeiros de carácter estático e os dois últimos dinâmicos. O primeiro exemplo consiste em uma placa engastada com carregamento uniformemente distribuído; no segundo ilustra-se como a análise pela teoria adotada (Mindlin) recai na teoria de placa delgada (Kirchhoff) quando se utiliza um valor de  $G$  muito grande; o terceiro exemplo consiste numa análise de efeitos térmicos na placa; o quarto e quinto exemplos são semelhantes aos já descritos no item 2.4 (análise dinâmica da placa com deslocamentos iniciais e carregamento uniformemente distribuído subitamente aplicado e mantido constante no tempo, respectivamente).

#### 3.4.1 – Exemplo 1: Análise Estática de uma Placa Circular Engastada com Carregamento Uniformemente Distribuído

Analisa-se neste exemplo, pela teoria de Mindlin, uma placa engastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $p_z = 2 \times 10^4 \text{ N/m}^2$  (figura 3.5).

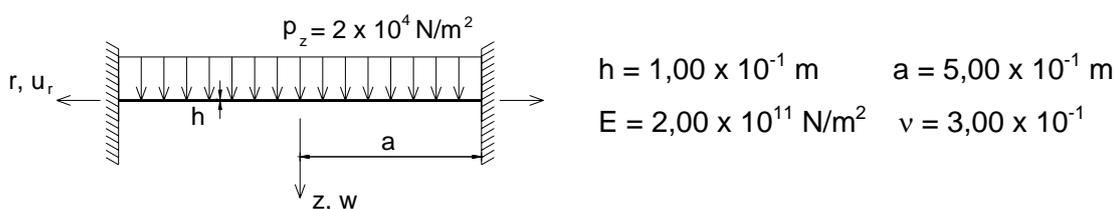


Figura 3.5 – Placa circular engastada submetida a carregamento uniforme

Para a análise em diferenças finitas energéticas utilizaram-se 30 divisões no raio. Foram prescritas condições de contorno de deslocamento radial  $u = 0$  no nó correspondente à coordenada  $r = 0$  e de deslocamento transversal  $w = 0$  e de rotação  $\psi = 0$  no nó de coordenada  $r = 0,50 \text{ m}$ . Para fins de comparação, consideram-se as soluções analíticas do problema pelas teorias de Mindlin [12] e Kirchhoff [1], além da solução numérica pelo MEF (mediante uma análise bidimensional pelo programa

FEAP<sup>®</sup>), sendo utilizada uma malha não estruturada de 721 elementos (envolvendo, tal como no MDFE, 30 divisões no raio) a fim de discretizar um setor da placa, conforme ilustrado na figura 3.6. Prescrevem-se condições de contorno de deslocamento radial  $u = 0$  no nó correspondente à coordenada  $r = 0$ , de deslocamento transversal  $w = 0$ , de rotações  $\psi_x = 0$  (em torno do eixo  $x$ ) e  $\psi_y = 0$  (em torno do eixo  $y$ ) nos nós de coordenada  $r = 0,50$  m e de rotações  $\psi_x = 0$  e  $\psi_y = 0$  ao longo dos bordos horizontal e vertical, respectivamente, do setor de placa.

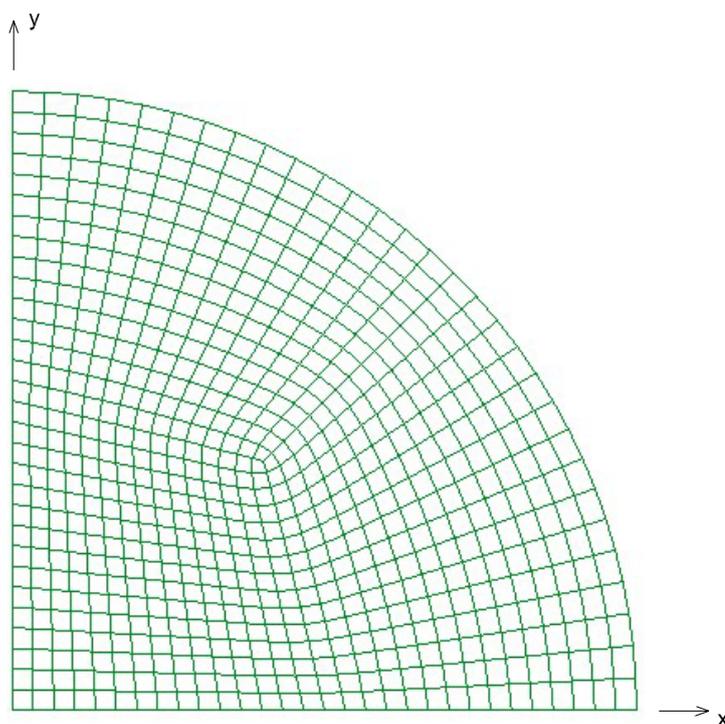


Figura 3.6 – Malha não estruturada para o setor circular da placa do Exemplo 1

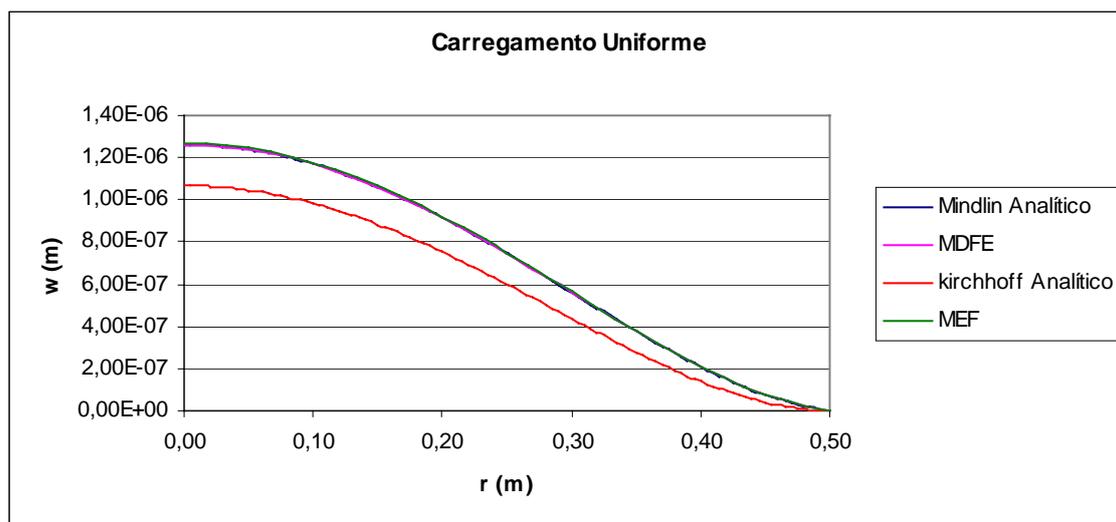
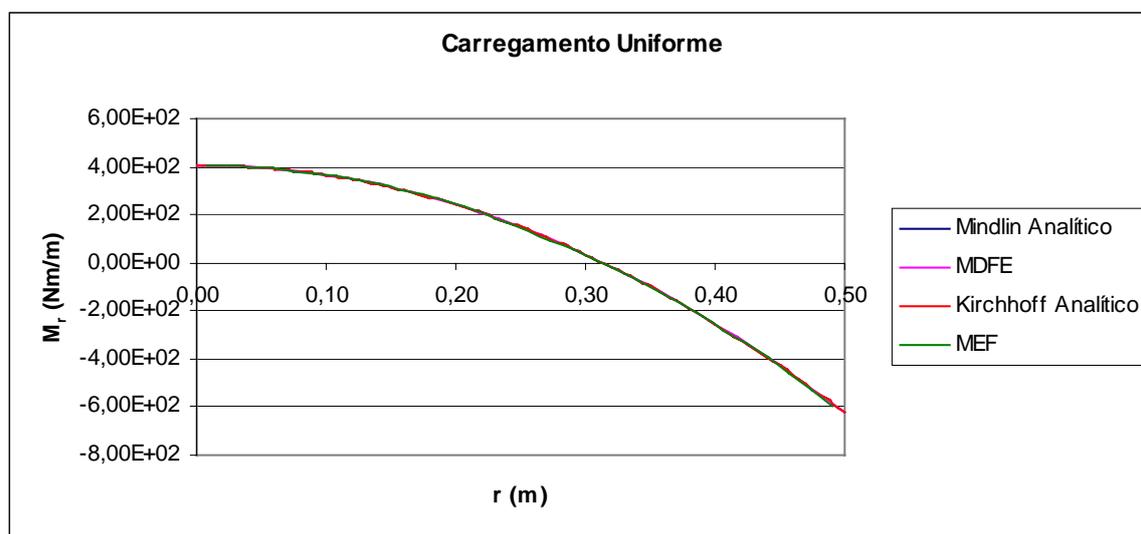
Os resultados numéricos para os deslocamentos transversais e momentos fletores, bem como os respectivos valores analíticos fornecidos pela teoria de Mindlin [12], acham-se apresentados nas tabelas 3.1 e 3.2 no que se refere aos seus máximos (centro da placa), e ainda nas figuras 3.7 e 3.8, em termos de como variam com  $r$ . Nestas figuras, são também disponibilizados, para fins ilustrativos, os resultados analíticos correspondentes à teoria de Kirchhoff [1].

Tabela 3.1 – Deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  ( $r = 0$ ), pela teoria de Mindlin, para o Exemplo 1

Deslocamento $w_{m\acute{a}x}$		
Método	$w_{m\acute{a}x}$	Diferença Percentual
Analítico [12]	$1,261 \times 10^{-6}$ m	-
MDFE	$1,261 \times 10^{-6}$ m	0,00%
MEF	$1,268 \times 10^{-6}$ m	0,50%

Tabela 3.2 – Momento  $M_{r\text{máx}}$  positivo ( $r = 0$ ), pela teoria de Mindlin, para o Exemplo 1

Momento $M_{r\text{máx}}$ positivo		
Método	$M_{r\text{máx}}$	Diferença Percentual
Analítico [12]	$4,063 \times 10^2 \text{ Nm/m}$	-
MDFE	$4,079 \times 10^2 \text{ Nm/m}$	0,40%
MEF	$4,056 \times 10^2 \text{ Nm/m}$	-0,16%

Figura 3.7 – Deslocamento  $w(r)$  da placa para o Exemplo 1Figura 3.8 – Momento  $M_r(r)$  da placa para o Exemplo 1

O conjunto dos resultados numéricos obtidos demonstra a eficácia do MDFE na abordagem do presente problema. Nota-se pela figura 3.7 que, para os valores de  $a$  e  $h$  utilizados  $\left(\frac{a}{h} = 5\right)$ , a teoria de Kirchhoff já apresenta uma discrepância considerável

(por volta de 18%) no valor de  $w_{m\acute{a}x}$ , quando comparada à de Mindlin. Por outro lado, os momentos fletores, figura 3.8, não são, neste exemplo, afetados pelo termo de cisalhamento, ou seja, os resultados analíticos decorrentes das teorias de Kirchhoff e de Mindlin são idênticos.

Quando comparados com os resultados do MEF, os resultados de deslocamentos do MDFE mostram-se ligeiramente melhores, ocorrendo o contrário com os resultados de momentos. Em linhas gerais, pode-se dizer que os dois métodos numéricos apresentam desempenho equivalente.

### 3.4.2 – Exemplo 2: Análise Estática de uma Placa Circular Apoiada com Carregamento Uniforme: Simulação Numérica da Teoria de Kirchhoff

O segundo exemplo a ser apresentado é o de uma placa circular apoiada com carregamento uniformemente distribuído  $p_z = 2 \times 10^4 \text{ N/m}^2$  (figura 3.9). Os demais dados numéricos são idênticos aos do exemplo anterior.

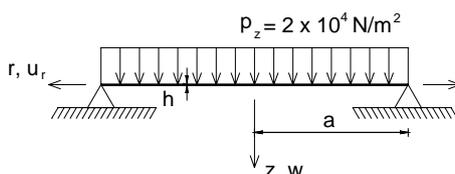


Figura 3.9 – Placa circular apoiada submetida a carregamento uniforme

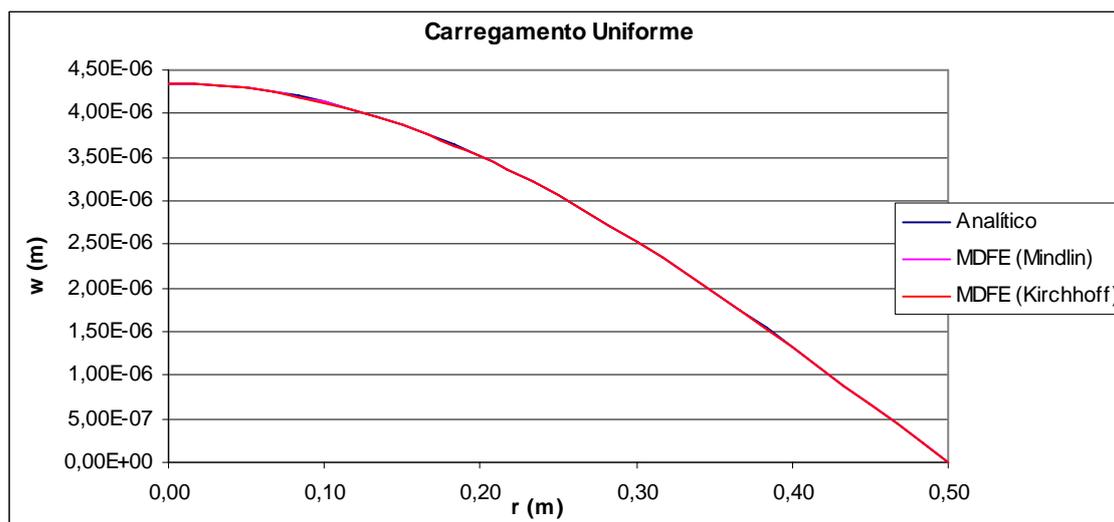
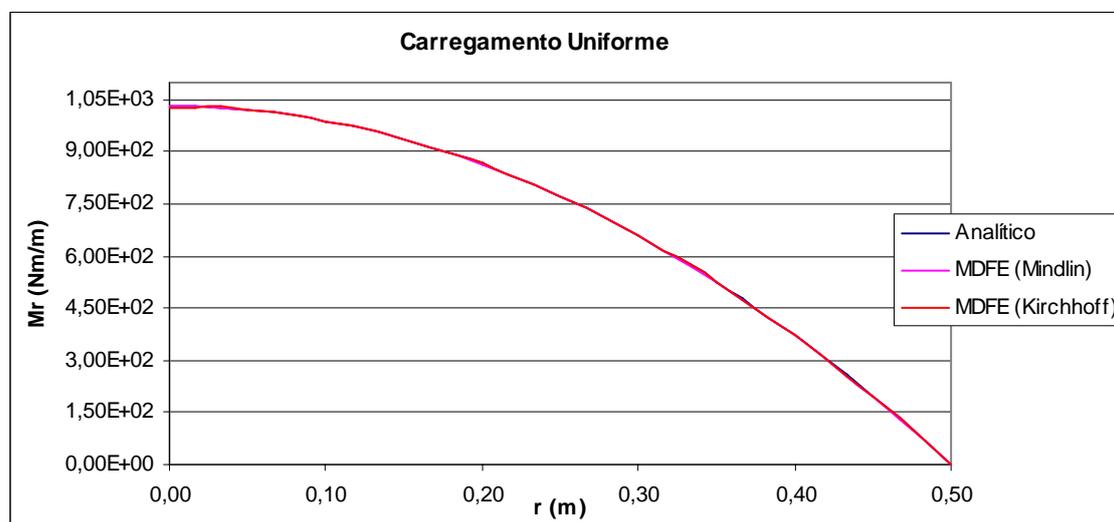
Foram tomadas, como no exemplo anterior, 30 divisões no raio da placa e comparados os resultados analíticos pela teoria de Kirchhoff [1] com os fornecidos pelo MDFE, tanto para a teoria de Kirchhoff, como para a teoria de Mindlin obtidos com um módulo de elasticidade transversal fictício  $\bar{G} = G \times 10^6 = \frac{E}{2(1+\nu)} \times 10^6$ , de modo a simular uma rigidez “infinita” ao cisalhamento transversal e assim recair na teoria de Kirchhoff. Tais resultados são apresentados nas tabelas 3.3 e 3.4 e nas figuras 3.10 e 3.11.

Tabela 3.3 – Deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 2

Deslocamento $w_{m\acute{a}x}$		
Método	$w_{m\acute{a}x}$	Diferença Percentual
MDFE (Mindlin)	$4,346 \times 10^{-6} \text{ m}$	-0,04%
MDFE (Kirchhoff)	$4,342 \times 10^{-6} \text{ m}$	-0,13%
Analítico	$4,348 \times 10^{-6} \text{ m}$	-

Tabela 3.4 – Momento  $M_{r\text{máx}}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 2

Momento $M_{r\text{máx}}$		
Método	$M_{r\text{máx}}$	Diferença Percentual
MDFE (Mindlin)	$1,032 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	0,12%
MDFE (Kirchhoff)	$1,024 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-0,66%
Analítico	$1,031 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-

Figura 3.10 – Deslocamento  $w(r)$  da placa para o Exemplo 2Figura 3.11 – Momento  $M_r(r)$  da placa para o Exemplo 2

Novamente os resultados do MDFE foram plenamente satisfatórios, mostrando, como seria de esperar, que a teoria de Mindlin recai na de Kirchhoff ao se considerar naquela um módulo de elasticidade transversal fictício representado por um “número muito grande”.

### 3.4.3 – Exemplo 3: Análise Estática de uma Placa Circular Submetida a um Gradiente de Temperatura

O presente exemplo visa testar a formulação numérica desenvolvida no caso de ser a placa submetida apenas a solicitações térmicas, mediante a imposição de um gradiente de temperatura. Consideram-se, na análise, duas condições de contorno distintas: placa apoiada (item a) e placa engastada (item b).

Para uma análise comparativa por elementos finitos utilizou-se o programa FEAP<sup>®</sup> (análise 3D), adotando-se uma malha constituída de 4000 elementos (40 divisões na espessura e 100 divisões no raio) quadriláteros lineares. No caso da análise 2D do MDFE o raio da placa foi dividido em 100 partes.

#### a) Placa Apoiada

As características do problema se encontram detalhadas na figura 3.12. Como, neste caso, em termos de solução analítica, os esforços devem ser nulos para qualquer valor de  $r$ , e isto realmente se confirmou nas análises numéricas realizadas, apresentam-se somente os resultados para os deslocamentos transversais. Tais resultados acham-se dispostos na tabela 3.5 e na figura 3.13.

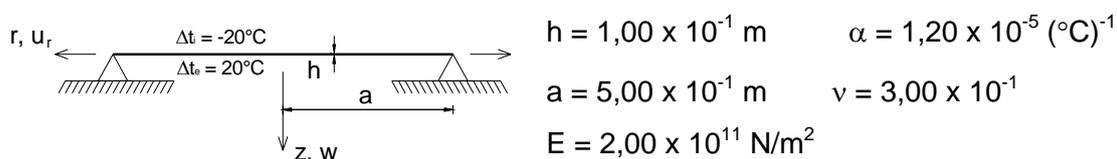


Figura 3.12 – Placa circular apoiada submetida a um gradiente de temperatura

Tabela 3.5 – Deslocamento  $w_{\text{máx}}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 3 - a

Deslocamento $w_{\text{máx}}$			
Analítico	MDFE	MEF	Diferença Percentual
$6,000 \times 10^{-4} \text{ m}$	$6,000 \times 10^{-4} \text{ m}$	$6,000 \times 10^{-4} \text{ m}$	0,00%

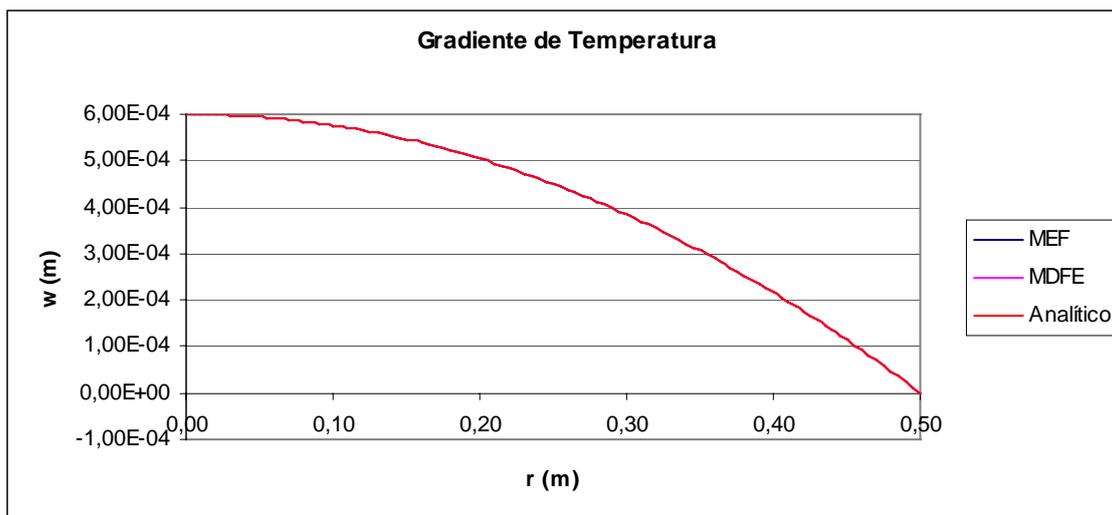


Figura 3.13 – Deslocamento  $w(r)$  da placa para o Exemplo 3 - a (MDFExMEF)

Os resultados da análise 3D do MEF e do modelo 2D do MDFE foram rigorosamente os mesmos, coincidindo também com a solução analítica, no caso a própria solução de Kirchhoff [1], pois a hipótese das normais permanecerem normais à superfície média após a flexão é exata para o presente problema.

b) Placa Engastada

A placa em questão é a mesma da figura 3.12, exceto pela condição de engaste em  $r = a$ . Nesta situação, diferentemente do que ocorre no item (a), os deslocamentos transversais são nulos, porém existe um momento fletor  $M_r$ , constante em toda a placa. Os resultados numéricos obtidos para este momento se encontram dispostos na tabela 3.6 e na figura 3.14. Novamente os valores obtidos pelos dois métodos numéricos coincidiram entre si e com a solução analítica [1], que, uma vez mais, não se mostra afetada pelos efeitos do cisalhamento transversal.

Tabela 3.6 – Momento  $M_{r\text{máx}}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 3 - b

Momento $M_{r\text{máx}}$			
Analítico	MDFE	MEF	Diferença Percentual
$-1,143 \times 10^5 \text{ Nm/m}$	$-1,143 \times 10^5 \text{ Nm/m}$	$-1,143 \times 10^5 \text{ Nm/m}$	0,00%

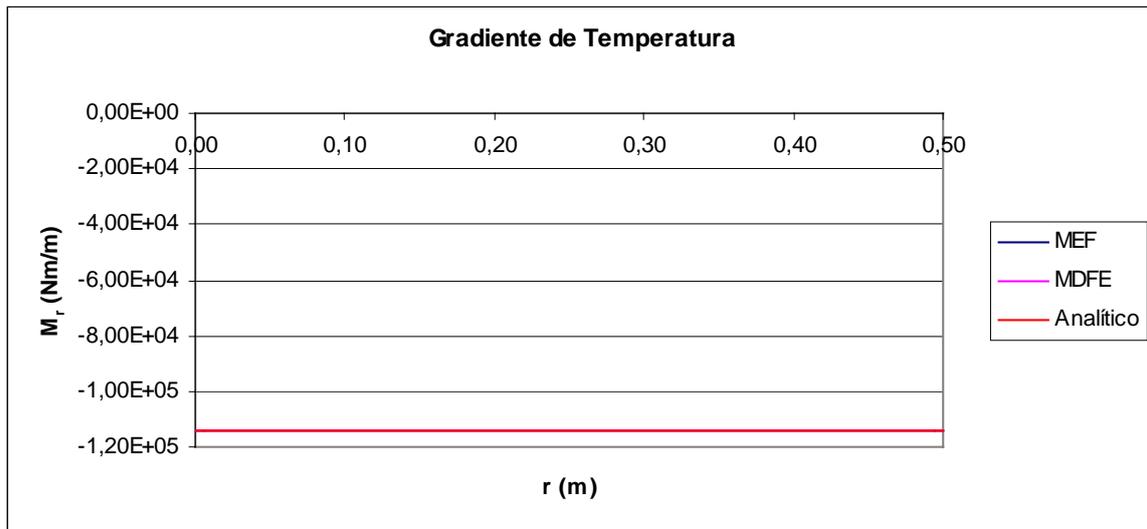


Figura 3.14 – Momento  $M_r(r)$  da placa para o Exemplo 3 - b (MDFExMEF)

### 3.4.4 – Exemplo 4: Análise Dinâmica de uma Placa Circular Apoiada com a Imposição de Deslocamentos Iniciais

Analogamente ao que foi feito no item 2.4.1, analisa-se uma placa apoiada submetida a uma deformada inicial  $w_0(r)$ , correspondente à deformada estática para um carregamento uniformemente distribuído de  $1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  atuando na placa, deixando-a então oscilar livremente após a imposição desta condição inicial (figura 3.15).

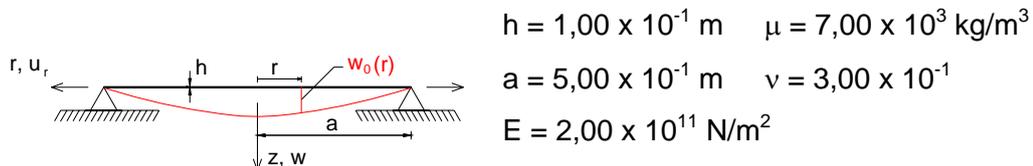


Figura 3.15 – Placa circular apoiada com a imposição de deslocamentos iniciais

Para a análise em diferenças finitas energéticas foram consideradas 70 divisões no raio da placa. Desta vez utilizou-se, para fins comparativos, uma análise 2D pelo MEF com elementos de placa quadriláteros lineares do programa FEAP. Uma malha não estruturada de 3675 elementos foi gerada utilizando um setor da placa (figura 3.16), sendo prescritas condições de contorno de deslocamento radial  $u = 0$  no nó correspondente à coordenada  $r = 0$ , de deslocamento transversal  $w = 0$  nos nós de coordenada  $r = 0,50 \text{ m}$  e de rotações  $\psi_x = 0$  (em torno do eixo  $x$ ) e  $\psi_y = 0$  (em torno do eixo  $y$ ) ao longo dos bordos horizontal e vertical, respectivamente, do setor de placa. O tempo total de análise foi de  $0,03\text{s}$ , subdividido em 300 intervalos de valor  $\Delta t = 0,0001\text{s}$ .

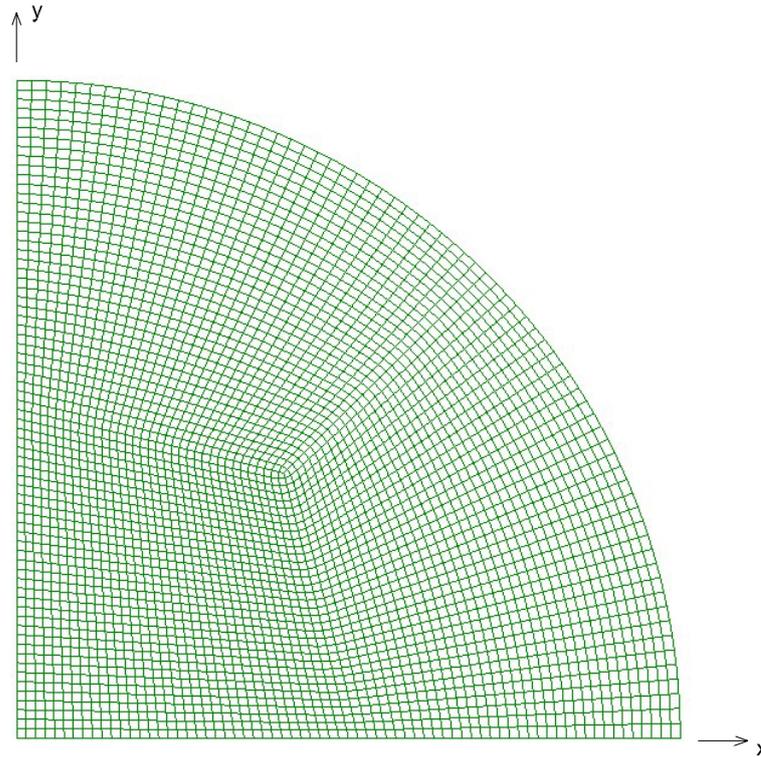


Figura 3.16 – Malha não estruturada para o setor circular da placa dos Exemplos 4 e 5

Nas tabelas 3.7 e 3.8 faz-se a comparação, no centro da placa ( $r = 0$ ), entre os resultados correspondentes aos primeiros máximos negativos do deslocamento  $w$  e do momento  $M_r$ , respectivamente, enquanto nas figuras 3.17 e 3.18 mostram-se os resultados, também no centro da placa, para o deslocamento transversal  $w$  e o momento fletor  $M_r$  ao longo do tempo.

Tabela 3.7 – Deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  negativo ( $r = 0$ ), correspondente ao primeiro máximo, para o Exemplo 4

Deslocamento $w_{m\acute{a}x}$			
Método	Tempo	$w_{m\acute{a}x}$	Diferença Percentual
MDFE	$1,10 \times 10^{-3}$ s	$-2,287 \times 10^{-5}$ m	0,30%
MEF	$1,00 \times 10^{-3}$ s	$-2,280 \times 10^{-5}$ m	-

Tabela 3.8 – Momento  $M_{r_{\text{máx}}}$  negativo ( $r = 0$ ), correspondente ao primeiro máximo, para o Exemplo 4

Momento $M_{r_{\text{máx}}}$			
Método	Tempo	$M_{r_{\text{máx}}}$	Diferença Percentual
MDFE	$1,00 \times 10^{-3}$ s	$-5,663 \times 10^3$ Nm/m	-0,86%
MEF	$9,00 \times 10^{-4}$ s	$-5,712 \times 10^3$ Nm/m	-

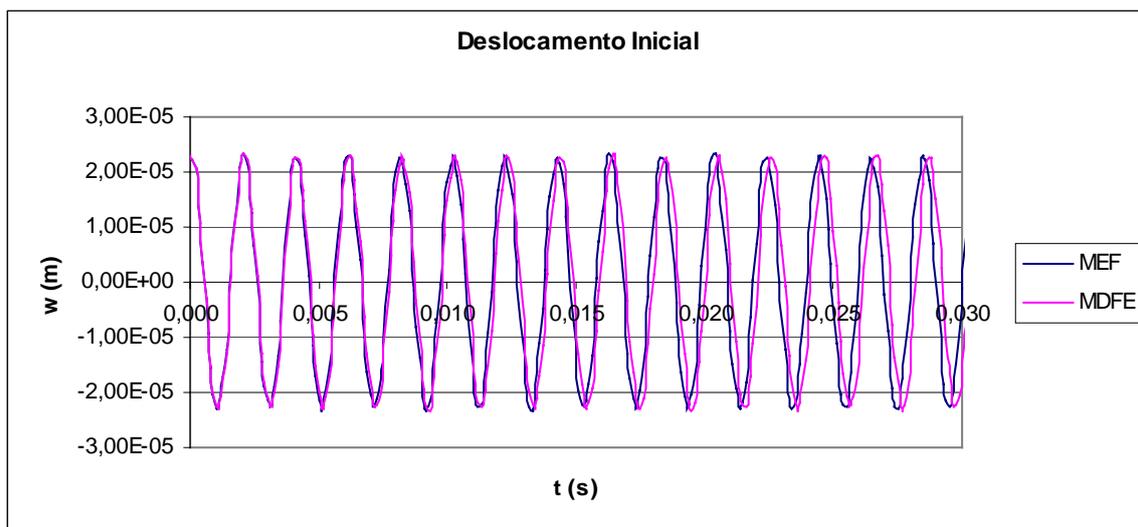


Figura 3.17 – Deslocamento  $w(t)$  no centro da placa para o Exemplo 4 (MDFE X MEF)

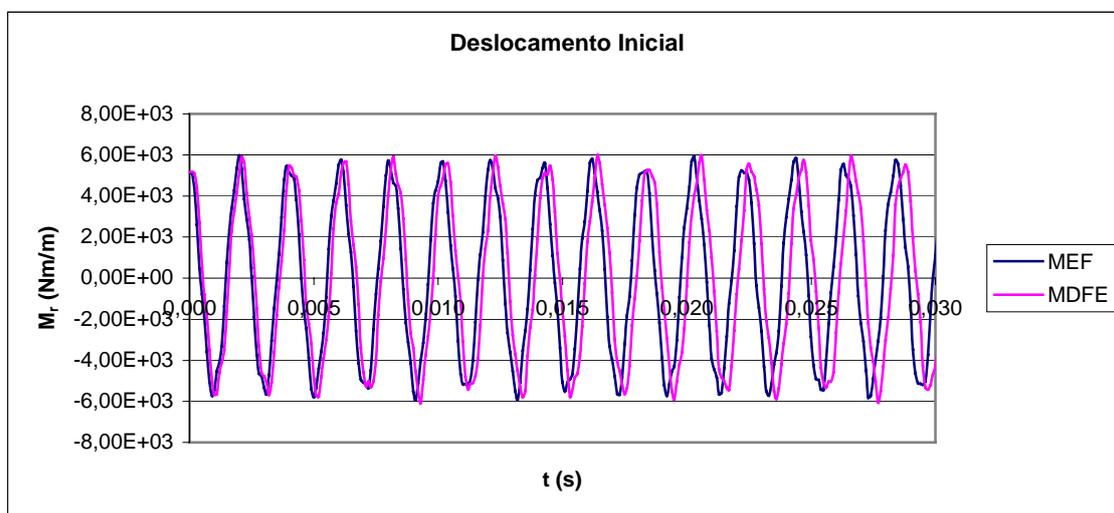


Figura 3.18 – Momento  $M_r(t)$  no centro da placa para o Exemplo 1 (MDFE X MEF)

Os valores obtidos foram, uma vez mais, bastante satisfatórios, com as amplitudes dos deslocamentos e dos momentos se apresentando próximas nos dois métodos numéricos, e com as defasagens de período, para o tempo total de análise considerado, não se revelando ainda muito acentuadas.

### 3.4.5 – Exemplo 5: Análise Dinâmica de uma Placa Circular Apoiada com Carregamento Uniforme Constante no Tempo

Este exemplo é análogo ao do item 2.4.2, com  $p_z = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  (figura 3.19). Os dados numéricos da placa são idênticos aos do exemplo anterior, adotando-se as mesmas discretizações temporal e espacial do item 2.4.4.

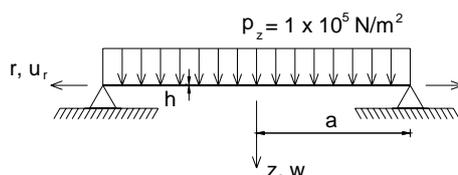


Figura 3.19 – Placa circular apoiada submetida a carregamento uniforme constante no tempo

Os resultados no centro da placa obtidos pelo MEF e pelo MDFE podem ser vistos nas tabelas 3.9 e 3.10 para os primeiros máximos positivos do deslocamento  $w$  e do momento  $M_r$ , e nas figuras 3.20 e 3.21 para  $w(t)$  e  $M_r(t)$ . Mais uma vez, quer para os deslocamentos, quer para os momentos, houve boa concordância dos resultados tanto em termos qualitativos quanto quantitativos.

Tabela 3.9 – Deslocamento  $w_{\text{máx}}$  positivo ( $r = 0$ ), correspondente ao primeiro máximo, para o Exemplo 5

Deslocamento $w_{\text{máx}}$			
Método	Tempo	$w_{\text{máx}}$	Diferença Percentual
MDFE	$1,00 \times 10^{-3} \text{ s}$	$4,552 \times 10^{-5} \text{ m}$	-0,09%
MEF	$1,00 \times 10^{-3} \text{ s}$	$4,556 \times 10^{-5} \text{ m}$	-

Tabela 3.10 – Momento  $M_{r\text{máx}}$  positivo ( $r = 0$ ), correspondente ao primeiro máximo, para o Exemplo 5

Momento $M_{r\text{máx}}$			
Método	Tempo	$M_{r\text{máx}}$	Diferença Percentual
MDFE	$1,00 \times 10^{-3} \text{ s}$	$1,091 \times 10^4 \text{ Nm/m}$	0,25%
MEF	$1,00 \times 10^{-3} \text{ s}$	$1,088 \times 10^4 \text{ Nm/m}$	-

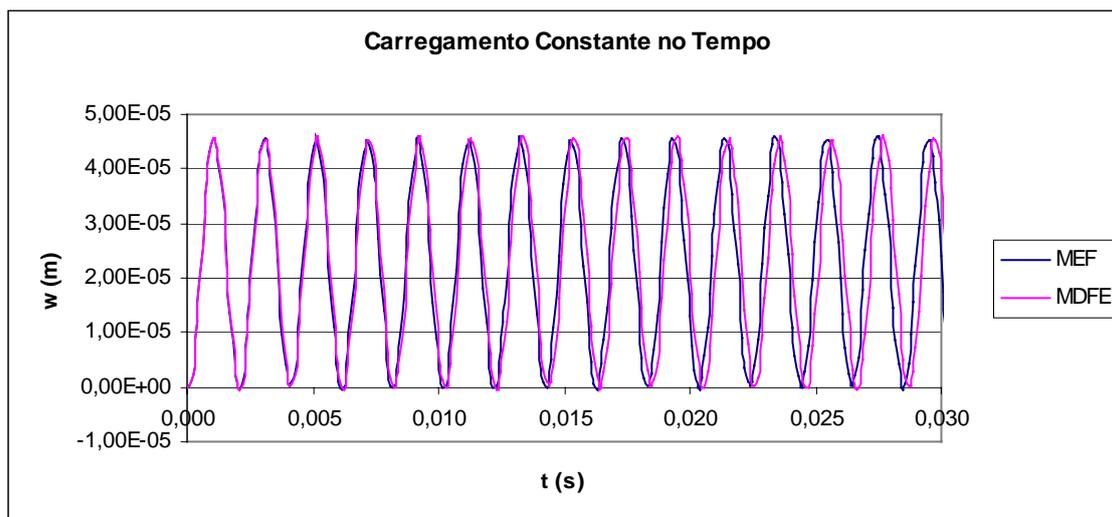


Figura 3.20 – Deslocamento  $w(t)$  no centro da placa para o Exemplo 5 (MDFE X MEF)

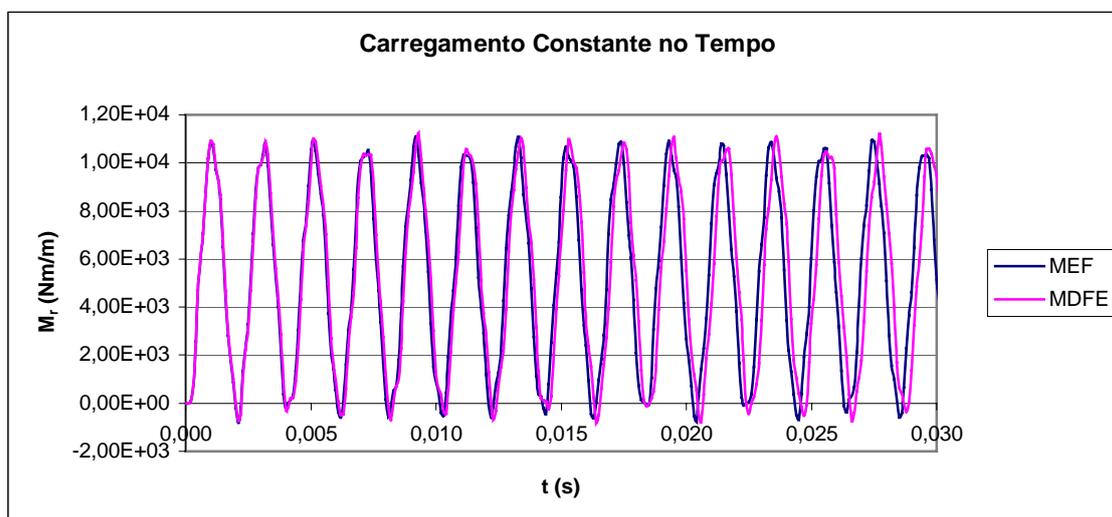


Figura 3.21 – Momento  $M_r(t)$  no centro da placa para o Exemplo 5 (MDFE X MEF)

### 3.5 – Comentários

Nota-se que, para todos os exemplos de placa espessa analisados pela teoria de Mindlin, o tratamento numérico pelo MDFE se mostrou bastante eficaz, lembrando que o mesmo envolve agora um número de graus de liberdade maior do que para a teoria de Kirchhoff, pois nesta última as rotações somente são introduzidas como graus de liberdade nos nós do contorno.

No primeiro exemplo, para o qual se dispunha dos resultados exatos pela teoria de Mindlin, pôde-se constatar um desempenho equivalente do MDFE e do MEF tanto no cálculo dos deslocamentos como dos esforços.

Como seria de esperar, a teoria de Mindlin recai na de Kirchhoff para a

consideração de um módulo de elasticidade transversal “muito grande”, o que se pôde verificar através do Exemplo 2. Tal fato será indispensável para a análise de placas delgadas utilizando o processo de marcha no tempo por funções de Green (capítulo 4).

## CAPÍTULO 4

### MÉTODO BASEADO EM FUNÇÕES DE GREEN NUMÉRICAS PARA A MARCHA NO TEMPO NA ANÁLISE LINEAR DINÂMICA DE PLACAS

#### 4.1 – Introdução

No presente capítulo descrevem-se os fundamentos necessários à implementação numérica na análise dinâmica linear de placas de um método de marcha no tempo baseado em funções de Green.

Como já mencionado no final do capítulo anterior, a teoria de placas utilizada é a de Mindlin, desenvolvida no referido capítulo. A escolha de tal teoria se deve ao fato de o tratamento numérico pelo MDFE conduzir, neste caso, a uma matriz de massa global diagonal, especialmente adequada ao procedimento aqui descrito. Quando utilizada a formulação referente à teoria de Kirchhoff, a matriz de massa não somente deixa de ser diagonal como também fica mal condicionada, o que gera não só um grande esforço computacional, como, por vezes, impossibilidade de sua inversão.

O método, cuja aplicação é ilustrada através de três exemplos, mostra-se, por vezes, mais oneroso computacionalmente do que o da aceleração constante (item 2.3.3), porém, à medida que cresce o número de intervalos de tempo, torna-se cada vez mais competitivo.

#### 4.2 – Processo de Marcha no Tempo por Funções de Green

Para a utilização do método, parte-se da equação geral de equilíbrio dinâmico do sistema, dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (4.1)$$

onde, ao contrário do que foi realizado nos capítulos anteriores, trabalha-se agora explicitamente com uma matriz de massa contendo as contribuições das forças de inércia.

##### 4.2.1 – Utilização da Transformada de Laplace na Solução da Equação de Equilíbrio Dinâmico

Define-se a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  como [60]:

$$\mathcal{L}[\mathbf{f}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{f}(t) dt = \boldsymbol{\varphi}(s) \quad (4.2)$$

Ao aplicar a transformada na equação de equilíbrio dinâmico, são úteis as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{f}_1(t) + \mathbf{f}_2(t) + \dots] &= \mathcal{L}[\mathbf{f}_1(t)] + \mathcal{L}[\mathbf{f}_2(t)] + \dots \\ \mathcal{L}[\mathbf{y} \cdot \mathbf{f}_1(t)] &= \mathbf{y} \cdot \mathcal{L}[\mathbf{f}_1(t)] \\ \mathcal{L}[\dot{\mathbf{f}}(t)] &= s\mathcal{L}[\mathbf{f}(t)] - \mathbf{f}(0^+) \\ \mathcal{L}[\ddot{\mathbf{f}}(t)] &= s^2\mathcal{L}[\mathbf{f}(t)] - s\dot{\mathbf{f}}(0^+) - \ddot{\mathbf{f}}(0^+) \\ \mathcal{L}[\mathbf{f}_1(t) * \mathbf{f}_2(t)] &= \mathcal{L}[\mathbf{f}_1(t)] \cdot \mathcal{L}[\mathbf{f}_2(t)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{y}$  é uma função independente do tempo e o símbolo  $*$  representa a convolução entre duas funções, definida como:

$$(\mathbf{f}_1 * \mathbf{f}_2)(t) = \int_0^t \mathbf{f}_1(t - \xi) \cdot \mathbf{f}_2(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em (4.1), e levando em conta (4.3), obtém-se:

$$\mathbf{M}\{s^2\mathcal{L}[\mathbf{U}(t)] - s\mathbf{U}(0) - \dot{\mathbf{U}}(0)\} + \mathbf{K}\mathcal{L}[\mathbf{U}(t)] = \mathcal{L}[\mathbf{Q}(t)] \quad (4.5)$$

sendo, no presente caso,  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}(0^+)$  e  $\dot{\mathbf{U}}(0) = \dot{\mathbf{U}}(0^+)$ . Isolando-se a transformada do campo de deslocamentos, vem:

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}(t)] = [\mathbf{s}^2\mathbf{M} + \mathbf{K}]^{-1} \cdot \{\mathbf{sM}\mathbf{U}(0) + \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(0) + \mathcal{L}[\mathbf{Q}(t)]\}$$

Definindo-se, em seguida, a função  $\boldsymbol{\varphi}(s) = [\mathbf{s}^2\mathbf{M} + \mathbf{K}]^{-1}$ , chega-se à equação:

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}(t)] = \boldsymbol{\varphi}(s) \cdot \{\mathbf{sM}\mathbf{U}(0) + \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(0) + \mathcal{L}[\mathbf{Q}(t)]\}$$

Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton [61], prova-se que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varphi}(s) = \mathbf{0}$  e, assim, pode-se dizer que  $\boldsymbol{\varphi}(s)$  representa a transformada de Laplace de uma certa função  $\mathbf{f}(t)$ , ou seja,  $\boldsymbol{\varphi}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{f}(t)]$ . Fazendo uso também de (4.2) e (4.3), reescreve-se a expressão acima sob a forma:

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}(t)] = \mathcal{L}[\dot{\mathbf{f}}(t)] \cdot \mathbf{M}\mathbf{U}(0) + \mathbf{f}(0) \cdot \mathbf{M}\mathbf{U}(0) + \mathcal{L}[\mathbf{f}(t)] \cdot \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(0) + \mathcal{L}[\mathbf{f}(t)] \cdot \mathcal{L}[\mathbf{Q}(t)] \quad (4.6)$$

Por outro lado, pelo teorema do valor inicial [60], se  $\lim_{s \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varphi}(s) = \mathbf{0}$  então

$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$ . Introduzindo ainda a notação  $\mathbf{G}(t) = \mathbf{f}(t)$  (nomenclatura conveniente

pois, como se verá no tópico seguinte,  $\mathbf{G}(t)$  representa uma matriz de funções de

Green), utilizando-se também a propriedade da transformada da convolução em (4.3) e, além disso, aplicando-se a transformada inversa de Laplace ao campo de deslocamentos (4.6), escreve-se finalmente:

$$\mathbf{U}(t) = \dot{\mathbf{G}}(t)\mathbf{MU}(0) + \mathbf{G}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(0) + \mathbf{G}(t) * \mathbf{Q}(t) \quad (4.7)$$

#### 4.2.2 – Matriz de Funções de Green Associada à Equação de Equilíbrio Dinâmico

A função de Green é definida como a solução de uma equação diferencial não homogênea, na qual a não homogeneidade é representada pela “função” delta de Dirac. No caso em questão, seria a solução  $\mathbf{U}(t)$  (para  $t > \xi$ ) em (4.1) para um impulso unitário de uma força associada a uma certa deslocabilidade (i) do sistema, aplicada em um intervalo curto de tempo no entorno de  $t = \xi$ , com condições iniciais de deslocamentos e velocidades nulas. A força nodal  $Q_i(t)$  representativa de tal impulso é definida, com o auxílio da “função” delta de Dirac, por:

$$Q_i(t) = \delta(t - \xi) \begin{cases} = 0, & \text{se } t \neq \xi \\ \rightarrow \infty, & \text{se } t = \xi \end{cases} \quad (4.8)$$

tendo-se  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \xi) dt = 1$ . A “função” delta de Dirac apresenta também uma propriedade

denominada de “filtragem”, que pode ser traduzida como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \xi) f(t) dt = f(\xi) \quad (4.9)$$

Define-se, em seguida, uma matriz de carga  $\mathbf{Q}^*(t)$ , na qual todos os elementos da coluna (i) são nulos, com exceção do elemento contido na diagonal principal da matriz, o qual representa uma força aplicada em  $\xi = 0$  ao grau de liberdade (i) do sistema, associada a um impulso unitário. Assim,

$$\mathbf{Q}^*(t) = \delta(t - \xi) \mathbf{I} = \delta(t) \mathbf{I} \quad (4.10)$$

sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade.

Denotando por  $\mathbf{U}^*(t)$  a matriz em que, correspondentemente à matriz de carga, cada coluna (i) representa a resposta dinâmica para a atuação de uma força  $Q_i$  associada à deslocabilidade (i), a equação de equilíbrio dinâmico (4.1) assume a forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^*(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}^*(t) = \delta(t) \mathbf{I} \quad (4.11)$$

Com a definição (4.2) e a propriedade (4.9), com  $\xi = 0$ , tem-se a transformada da “função” delta de Dirac:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^0 = 1 \quad (4.12)$$

De forma análoga ao sub-item 4.2.1, aplica-se a transformada de Laplace à equação (4.11), obtendo-se:

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}^*(t)] = \boldsymbol{\varphi}(s) \cdot \{\mathbf{M}[s\mathbf{U}^*(0) + \dot{\mathbf{U}}^*(0)] + \mathbf{I}\} \quad (4.13)$$

onde, tal como já visto,  $\boldsymbol{\varphi}(s) = [s^2\mathbf{M} + \mathbf{K}]^{-1}$ .

Tomando as condições iniciais de deslocamentos e velocidades nulas, tem-se:

$$\mathcal{L}[\mathbf{U}^*(t)] = \boldsymbol{\varphi}(s) \rightarrow \mathbf{U}^*(t) = \mathcal{L}^{-1}[\boldsymbol{\varphi}(s)] = \mathbf{G}(t) \quad (4.14)$$

concluindo-se então que a matriz  $\mathbf{G}(t)$  em (4.7) representa a matriz de funções de Green relativa à equação (4.11).

#### 4.2.3 – Equivalência entre Carregamento Impulsivo e Imposição de Condições Iniciais

Da mecânica clássica [62] tem-se que o impulso  $\mathcal{J}$  de uma dada força  $\mathbf{F}$  (o qual é igual à variação da quantidade de movimento  $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$  do sistema) é dado pela expressão:

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \quad (4.15)$$

No caso da matriz de carga definida em (4.10), o impulso resulta em :

$$\mathcal{J} = \int_{0^-}^{0^+} \mathbf{Q}^*(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \mathbf{I} dt = \mathbf{I} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \mathbf{I} \quad (4.16)$$

Utilizando (4.16) e levando em conta as equações (4.14) e (4.11), esta última integrada no tempo de  $0^-$  a  $0^+$ , pode-se escrever:

$$\mathcal{J} = \int_{0^-}^{0^+} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}(t) dt + \int_{0^-}^{0^+} \mathbf{K}\mathbf{G}(t) dt \quad (4.17)$$

Sendo  $\mathbf{G}(t)$  um campo de deslocamentos e, portanto, contínuo em  $t$ , tem-se que:

$$\int_{0^-}^{0^+} \mathbf{K}\mathbf{G}(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{K}\mathbf{G}(t) dt = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

resultando finalmente para o impulso:

$$\mathcal{J} = \int_{0^-}^{0^+} \mathbf{M} \frac{d^2\mathbf{G}(t)}{dt^2} dt = \mathbf{M}[\dot{\mathbf{G}}(0^+) - \dot{\mathbf{G}}(0^-)] = \mathbf{M}\dot{\mathbf{G}}(0^+) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{G}}(0) \quad (4.19)$$

Dessa igualdade, conclui-se que existe equivalência entre o sistema (4.11),

com condições iniciais de deslocamentos e velocidades nulas, e o mesmo sistema livre da ação de forças externas, porém com deslocamentos iniciais nulos e velocidades iniciais não nulas. Assim, escreve-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{G}(t) = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

com as condições iniciais

$$\mathbf{G}(0) = \mathbf{0} \text{ e } \dot{\mathbf{G}}(0) = \mathbf{M}^{-1}$$

Cabe observar que a substituição do carregamento impulsivo pelas condições iniciais acima é mais adequada à implementação numérica, pois a aplicação da “função”  $\delta(t)$  é feita de maneira aproximada através de um carregamento de intensidade “muito grande” atuando num certo intervalo pequeno e finito de tempo, o que leva a uma resposta com precisão menor.

#### 4.2.4 – Marcha no Tempo

O processo de marcha no tempo é realizado tomando-se por base a equação (4.7). Da mesma forma que no capítulo 2, o tempo total de análise é subdividido em diversos intervalos de tempo  $\Delta t$ , sendo  $t$  e  $t + \Delta t$ , respectivamente, os instantes inicial e final de um intervalo genérico (figura 4.1).

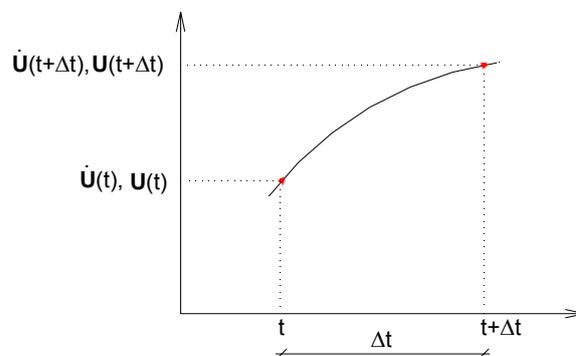


Figura 4.1 – Intervalo de tempo genérico no processo de marcha no tempo

No método da aceleração constante, utilizado nos capítulos anteriores, resolve-se o sistema de equações a cada intervalo de tempo  $\Delta t$ . Já no método aqui descrito, o sistema de equações (4.20) deve ser resolvido apenas para o primeiro intervalo de tempo, através de um método convencional de marcha no tempo, com a finalidade de determinar, em  $t = \Delta t$ , as matrizes de funções de Green  $\mathbf{G}(\Delta t)$  e suas derivadas  $\dot{\mathbf{G}}(\Delta t)$  e  $\ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)$ . De posse destas, e com base na equação (4.7), os deslocamentos e

velocidades nodais em  $t = \Delta t$  podem então ser calculados como segue:

$$\mathbf{U}(\Delta t) = \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}(0) + \mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(0) + \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \xi)\mathbf{Q}(\xi)d\xi \quad (4.21)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(\Delta t) = \ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}(0) + \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(0) + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{G}}(\Delta t - \xi)\mathbf{Q}(\xi)d\xi$$

A partir daí a solução encontrada servirá sempre como condição inicial para o próximo intervalo de tempo, podendo-se assim reescrever (4.21) na sua forma geral:

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}(t) + \mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t) + \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \xi)\mathbf{Q}(t + \xi)d\xi \quad (4.22)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = \ddot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}(t) + \dot{\mathbf{G}}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t) + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{G}}(\Delta t - \xi)\mathbf{Q}(t + \xi)d\xi$$

em que foi usada a propriedade de translação temporal da função de Green [63], a

$$\text{qual permite escrever } \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{G}(t + \Delta t - \xi)\mathbf{Q}(\xi)d\xi = \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \xi)\mathbf{Q}(t + \xi)d\xi.$$

Note-se que, estando determinadas as funções de Green e suas derivadas temporais em  $t = \Delta t$ , o processo de marcha no tempo é explícito, o que pode tornar o custo computacional muito inferior ao de se resolver um sistema de equações a cada intervalo de tempo.

#### 4.2.5 – Mudança de Variável no Processo de Marcha no Tempo

Com o intuito de diminuir a ordem das derivadas da matriz de funções de Green  $\mathbf{G}(\Delta t)$  nas equações (4.22) acima, e com isso tentar melhorar a precisão dos resultados, realiza-se a seguinte mudança de variáveis:

$$\mathbf{H}(t) = \dot{\mathbf{G}}(t) \quad (4.23)$$

Derivando-se em relação ao tempo a equação (4.20) e introduzindo (4.23), obtém-se:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{H}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{H}(t) = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

com as condições iniciais

$$\mathbf{H}(0) = \dot{\mathbf{G}}(0) = \mathbf{M}^{-1} \text{ e } \dot{\mathbf{H}}(0) = \ddot{\mathbf{G}}(0) = \mathbf{0}$$

esta última obtida de (4.20) para  $t = 0$ .

Substituindo (4.23) em (4.22), reescreve-se a equação da marcha temporal como:

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}(t) + \mathbf{G}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t) + \int_0^{\Delta t} \mathbf{G}(\Delta t - \xi)\mathbf{Q}(t + \xi)d\xi \quad (4.25)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{H}}(\Delta t)\mathbf{M}\mathbf{U}(t) + \mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t) + \int_0^{\Delta t} \mathbf{H}(\Delta t - \xi)\mathbf{Q}(t + \xi)d\xi$$

sendo as funções  $\mathbf{H}(\Delta t)$  e  $\dot{\mathbf{H}}(\Delta t)$ , tal como  $\mathbf{G}(\Delta t)$ , calculadas aplicando-se em (4.24) um método convencional de marcha no tempo.

A fim de diminuir o número de operações matriciais envolvidas nas equações (4.25), nelas realiza-se uma nova transformação:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}(t) &= \mathbf{G}(t)\mathbf{M} \\ \bar{\mathbf{H}}(t) &= \mathbf{H}(t)\mathbf{M} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Tal transformação, uma vez inserida nas equações (4.25), resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t + \Delta t) &= \bar{\mathbf{H}}(\Delta t)\mathbf{U}(t) + \bar{\mathbf{G}}(\Delta t)\dot{\mathbf{U}}(t) + \int_0^{\Delta t} \bar{\mathbf{G}}(\Delta t - \xi)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}(t + \xi)d\xi \\ \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) &= \dot{\bar{\mathbf{H}}}(\Delta t)\mathbf{U}(t) + \bar{\mathbf{H}}(\Delta t)\dot{\mathbf{U}}(t) + \int_0^{\Delta t} \bar{\mathbf{H}}\mathbf{M}^{-1}(\Delta t - \xi)\mathbf{Q}(t + \xi)d\xi \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo  $\bar{\mathbf{G}}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{H}}(t)$  e  $\dot{\bar{\mathbf{H}}}(t)$ , em vista de (4.20) e (4.24), determinados pela resolução dos sistemas:

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{G}}}(t) + \mathbf{K}\bar{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

com as condições iniciais

$$\bar{\mathbf{G}}(0) = \mathbf{0} \text{ e } \dot{\bar{\mathbf{G}}}(0) = \mathbf{I}$$

e

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{H}}}(t) + \mathbf{K}\bar{\mathbf{H}}(t) = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

com

$$\bar{\mathbf{H}}(0) = \mathbf{I} \text{ e } \dot{\bar{\mathbf{H}}}(0) = \mathbf{0}$$

É de se notar que, apesar do ganho que se obtém pela melhora de precisão com a diminuição da ordem das derivadas de  $\mathbf{G}(t)$  na equação (4.22), tem-se agora um esforço computacional maior, já que utilizando-se (4.27) para a marcha no tempo é necessário resolver dois problemas distintos no primeiro intervalo de tempo.

No presente trabalho utiliza-se o método da aceleração constante na resolução das equações diferenciais (4.28) e (4.29) para o primeiro intervalo de tempo  $\Delta t$ , tendo-se como condições iniciais adicionais, requeridas pelo próprio procedimento numérico, as acelerações  $\ddot{\bar{\mathbf{G}}}(0) = \mathbf{0}$  e  $\ddot{\bar{\mathbf{H}}}(0) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ , extraídas de (4.28) e (4.29) para  $t = 0$ .

### 4.3 – Tratamento Numérico do Problema

A formulação numérica é semelhante à do capítulo 3, com a diferença de que agora se determina explicitamente uma matriz de massa do sistema, com base na expressão (3.37) de  $\delta W_e$ .

#### 4.3.1 – Determinação da Matriz de Massa **M** e do Vetor de Cargas **Q**

A igualdade entre o  $\delta W_e$  e  $\delta W_i$  (equações (3.34), (3.36) e (3.37)) fornece:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{q=2}^{NN} \left\{ C \left[ \left( \frac{r_q + r_{q-1}}{2} \frac{u_q - u_{q-1}}{\lambda} + v \frac{u_q + u_{q-1}}{2} \right) \delta \frac{u_q - u_{q-1}}{\lambda} + \left( v \frac{u_q - u_{q-1}}{\lambda} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{2}{r_q + r_{q-1}} \frac{u_q + u_{q-1}}{2} \right) \delta \frac{u_q + u_{q-1}}{2} \right] + D \left[ \left( \frac{r_q + r_{q-1}}{2} \frac{\psi_q - \psi_{q-1}}{\lambda} + v \frac{\psi_q + \psi_{q-1}}{2} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. \delta \frac{\psi_q - \psi_{q-1}}{\lambda} + \left( \frac{2}{r_q + r_{q-1}} \frac{\psi_q + \psi_{q-1}}{2} + v \frac{\psi_q - \psi_{q-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{\psi_q + \psi_{q-1}}{2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + KGh \frac{r_q + r_{q-1}}{2} \left[ \left( \frac{\psi_q + \psi_{q-1}}{2} - \frac{w_q - w_{q-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{\psi_q + \psi_{q-1}}{2} + \left( -\frac{\psi_q + \psi_{q-1}}{2} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{w_q - w_{q-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{w_q - w_{q-1}}{\lambda} \right] \right\} \lambda + r_1 \left[ \mu h \ddot{u}_1 \delta u_1 + \mu h \ddot{w}_1 \delta w_1 + \frac{\mu h^3}{12} \ddot{\psi}_1 \delta \psi_1 \right] \frac{\lambda}{2} + \tag{4.30} \\
 & + \sum_{q=2}^{NN-1} r_q \left[ \mu h \ddot{u}_q \delta u_q + \mu h \ddot{w}_q \delta w_q + \frac{\mu h^3}{12} \ddot{\psi}_q \delta \psi_q \right] \lambda + r_{NN} \left[ \mu h \ddot{u}_{NN} \delta u_{NN} + \mu h \ddot{w}_{NN} \delta w_{NN} + \right. \\
 & \left. + \frac{\mu h^3}{12} \ddot{\psi}_{NN} \delta \psi_{NN} \right] \frac{\lambda}{2} = \frac{\alpha E h}{2(1-\nu)} \left\{ \sum_{q=2}^{NN} (\Delta t_i + \Delta t_e) \left( \frac{r_q + r_{q-1}}{2} \delta \frac{u_q - u_{q-1}}{\lambda} + \delta \frac{u_q + u_{q-1}}{2} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \left( \frac{r_q + r_{q-1}}{2} \delta \frac{\psi_q - \psi_{q-1}}{\lambda} + \delta \frac{\psi_q + \psi_{q-1}}{2} \right) \right\} \lambda + r_1 p_{z1} \delta w_1 \frac{\lambda}{2} + \\
 & + \sum_{q=2}^{NN-1} r_q p_{zq} \delta w_q \lambda + r_{NN} p_{zNN} \delta w_{NN} \frac{\lambda}{2} + a \bar{N}_{ra} \delta u_{NN} + a \bar{Q}_{ra} \delta w_{NN} - a \bar{M}_{ra} \delta \psi_{NN}
 \end{aligned}$$

Os termos do primeiro membro da igualdade (4.30) que se encontram multiplicados pelos deslocamentos ou rotações e suas variações compõem a matriz de rigidez **K**; já os termos neste primeiro membro que se encontram multiplicados pelas derivadas temporais dos deslocamentos ou rotações e suas variações formam a matriz de massa **M**. Por sua vez, os termos do segundo membro da igualdade dão origem ao vetor de carga **Q**. O vetor **Q** e a matriz **M**, assim obtidos, serão utilizados no

processo de marcha no tempo definido por (4.27).

Vale salientar que para a determinação das matrizes de funções de Green utiliza-se o mesmo procedimento numérico já descrito nos capítulos anteriores aplicado ao caso de carregamento nulo e condições iniciais de deslocamento nulo e velocidade não nula.

#### 4.3.2 – Representação Numérica para a Convolução

Os termos referentes às integrais de convolução na equação (4.27) podem ser representados, para um  $\Delta t$  suficientemente pequeno, por [48]:

$$\int_0^{\Delta t} \bar{\mathbf{G}}(\Delta t - \xi) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}(t + \xi) d\xi \cong \bar{\mathbf{G}}(0) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}(t + \Delta t) \Delta t \quad (4.31)$$

$$\int_0^{\Delta t} \bar{\mathbf{H}}(\Delta t - \xi) \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{Q}}(t + \xi) d\xi \cong \bar{\mathbf{H}}(0) \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{Q}}(t + \Delta t) \Delta t$$

Substituindo (4.31) em (4.27) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t + \Delta t) &= \bar{\mathbf{H}}(\Delta t) \mathbf{U}(t) + \bar{\mathbf{G}}(\Delta t) \dot{\mathbf{U}}(t) + \bar{\mathbf{G}}(0) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}(t + \Delta t) \Delta t \\ \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) &= \dot{\bar{\mathbf{H}}}(\Delta t) \mathbf{U}(t) + \bar{\mathbf{H}}(\Delta t) \dot{\mathbf{U}}(t) + \bar{\mathbf{H}}(0) \mathbf{M}^{-1} \dot{\mathbf{Q}}(t + \Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (4.32)$$

#### 4.4 – Apresentação e Análise dos Resultados

Com o intuito de verificar a eficiência do processo de marcha no tempo por funções de Green foram elaborados três exemplos de aplicação. No primeiro foi analisada uma placa com comportamento puramente membranal. O segundo exemplo trata de uma placa espessa com carregamento uniformemente distribuído aplicado subitamente e mantido constante no tempo, enquanto o terceiro exemplo é análogo ao segundo, porém para o caso de uma placa delgada (simulada utilizando-se um módulo de elasticidade transversal  $G$  “muito grande”, como no item 3.4.2).

##### 4.4.1 – Exemplo 1: Análise Dinâmica de uma Placa Submetida a Carregamento Radial

O primeiro exemplo trata da análise dinâmica de uma placa submetida a um carregamento radial, por unidade de comprimento,  $N_r = 1,0 \times 10^4$  N/m, subitamente aplicado no bordo e mantido constante no tempo (figura 4.2).

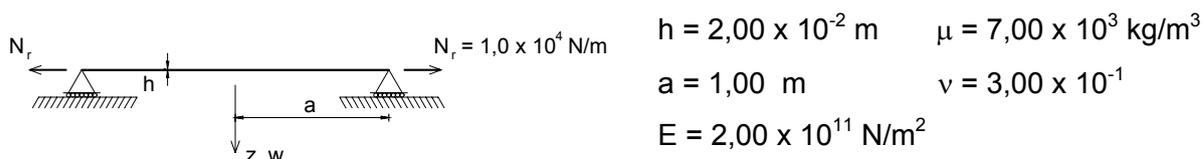


Figura 4.2 – Placa circular submetida a carregamento radial constante no tempo

O comportamento é, neste caso, de membrana, sendo analisados os resultados para os deslocamentos radiais  $u_{r0}$  no bordo ( $r = 1,0\text{m}$ ) e para os esforços radiais  $N_r$  em  $r = 0,5\text{m}$ . Foram utilizadas 50 divisões no raio da placa e adotado um tempo total de análise de  $5 \times 10^{-3}\text{s}$ .

Inicialmente, nas tabelas 4.1 e 4.2 e nas figuras 4.3 e 4.4, validam-se os resultados fornecidos pelo MDFE comparando-os aos oriundos do MEF (via programa FEAP<sup>®</sup>, adotando-se uma discretização com 50 divisões no raio e 8 na espessura), sendo ambos obtidos com a utilização do método da aceleração constante (método de Newmark com os parâmetros  $\delta = 0,5$  e  $\alpha = 0,25$  [58]) tomando-se 500 divisões no tempo.

Tabela 4.1 – Deslocamento  $u_{r0\text{máx}}$  ( $r = 1,0\text{m}$ ) para o Exemplo 1 (500 divisões no tempo)

Deslocamento $u_{r0\text{máx}}$			
Método	Tempo	$u_{r0\text{máx}}$	Diferença Percentual
MDFE	$3,00 \times 10^{-4} \text{ s}$	$3,174 \times 10^{-6} \text{ m}$	-0,24%
MEF	$3,00 \times 10^{-4} \text{ s}$	$3,181 \times 10^{-6} \text{ m}$	-

Tabela 4.2 – Esforço Normal  $N_{r\text{máx}}$  ( $r = 0,5\text{m}$ ) para o Exemplo 1 (500 divisões no tempo)

Esforço Normal $N_{r\text{máx}}$			
Método	Tempo	$N_{r\text{máx}}$	Diferença Percentual
MDFE	$2,90 \times 10^{-4} \text{ s}$	$2,605 \times 10^4 \text{ Nm/m}$	1,92%
MEF	$2,80 \times 10^{-4} \text{ s}$	$2,556 \times 10^4 \text{ Nm/m}$	-

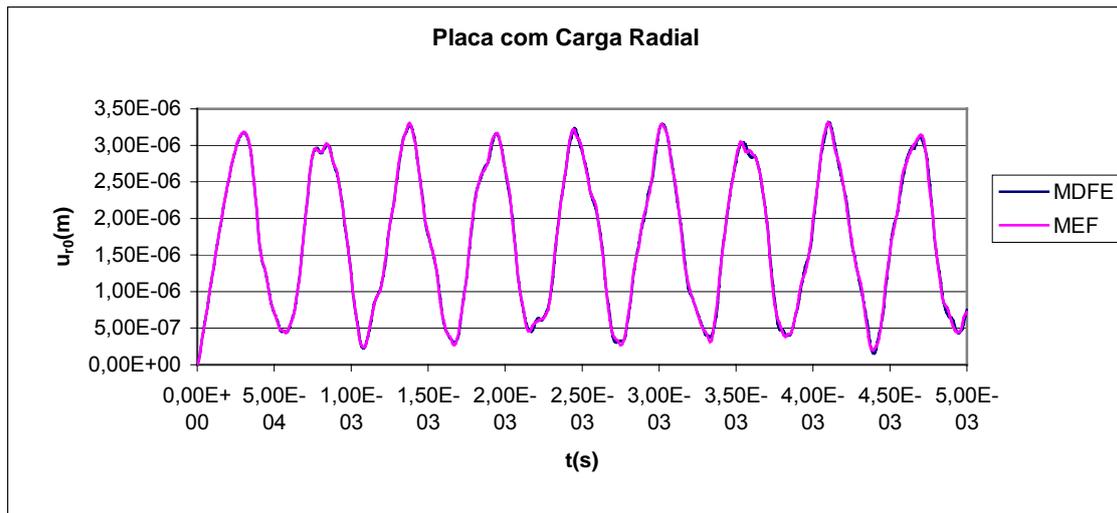


Figura 4.3 – Deslocamento  $u_{r0}(t)$ ,  $r = 1,0m$ , para o Exemplo 1 (500 divisões no tempo)

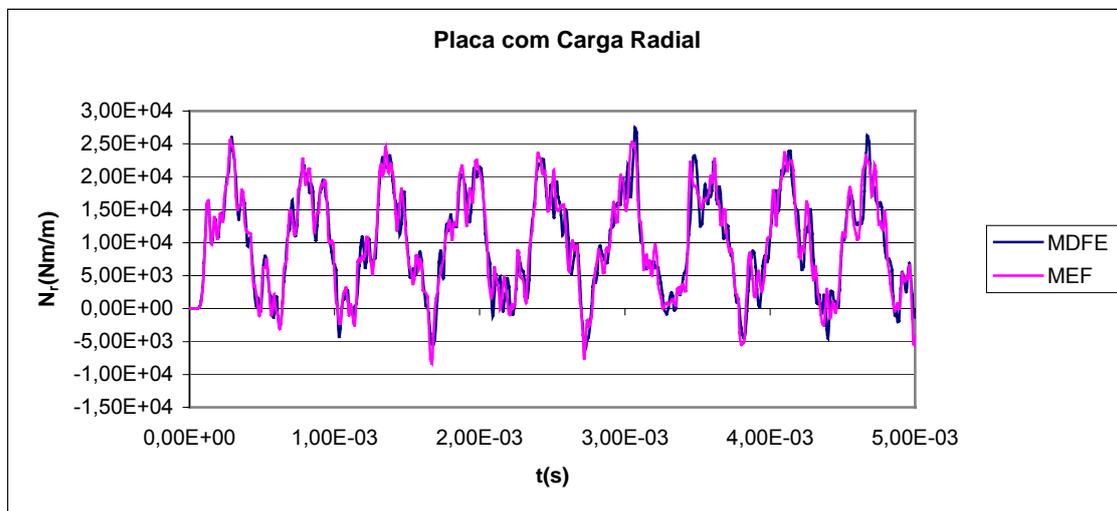


Figura 4.4 – Esforço Normal  $N_r(t)$ ,  $r = 0,5m$ , para o Exemplo 1 (500 divisões no tempo)

Em seguida, são comparados os resultados do MDFE com a marcha no tempo realizada pelo método de Newmark e com a marcha de tempo pelo método de Green (cabendo lembrar que, neste último, calculam-se as funções de Green pelo próprio método de Newmark), considerando-se 500 e 1000 divisões no tempo. Nas tabelas 4.3 a 4.6 disponibilizam-se os valores obtidos para os primeiros máximos do deslocamento  $u_{r0}$  no bordo da placa e do esforço  $N_r$  em  $r = 0,5m$ , enquanto nas figuras 4.5 a 4.8 pode ser vista a evolução temporal dessas grandezas. A discretização mais refinada no tempo (1000 divisões) se fez necessária em função dos resultados ainda não muito satisfatórios para o esforço  $N_r$  com 500 divisões no tempo, conforme se depreende da tabela 4.4. Da observação das tabelas 4.3 a 4.6, conclui-se também que a convergência nos resultados dos esforços e dos deslocamentos se deu sempre por valores superiores para o método de Green e por valores inferiores para o de

Newmark.

Tabela 4.3 – Deslocamento  $u_{r0m\acute{a}x}$  ( $r = 1,0m$ ) para o Exemplo 1 (500 divisões no tempo)

Deslocamento $u_{r0m\acute{a}x}$			
Método	Tempo	$u_{r0m\acute{a}x}$	Diferença Percentual
Green	$3,00 \times 10^{-4}$ s	$3,188 \times 10^{-6}$ m	0,45%
Newmark	$3,00 \times 10^{-4}$ s	$3,174 \times 10^{-6}$ m	-

Tabela 4.4 – Esforço Normal  $N_{rm\acute{a}x}$  ( $r = 0,5m$ ) para o Exemplo 1 (500 divisões no tempo)

Esforço Normal $N_{rm\acute{a}x}$			
Método	Tempo	$N_{rm\acute{a}x}$	Diferença Percentual
Green	$2,90 \times 10^{-4}$ s	$2,801 \times 10^4$ Nm/m	7,55%
Newmark	$2,80 \times 10^{-4}$ s	$2,605 \times 10^4$ Nm/m	-

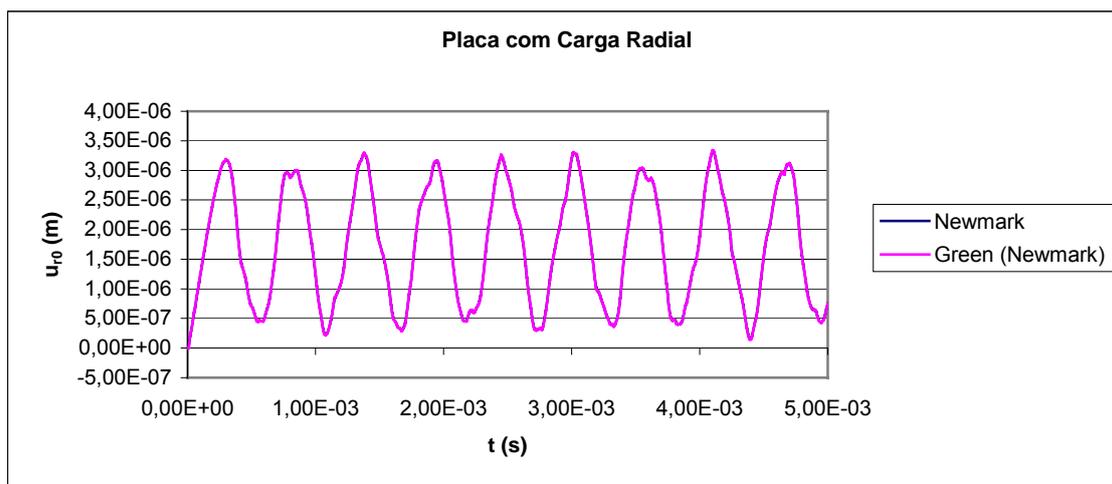


Figura 4.5 – Deslocamento  $u_{r0}(t)$ ,  $r = 1,0m$ , para o Exemplo 1 (500 divisões no tempo)

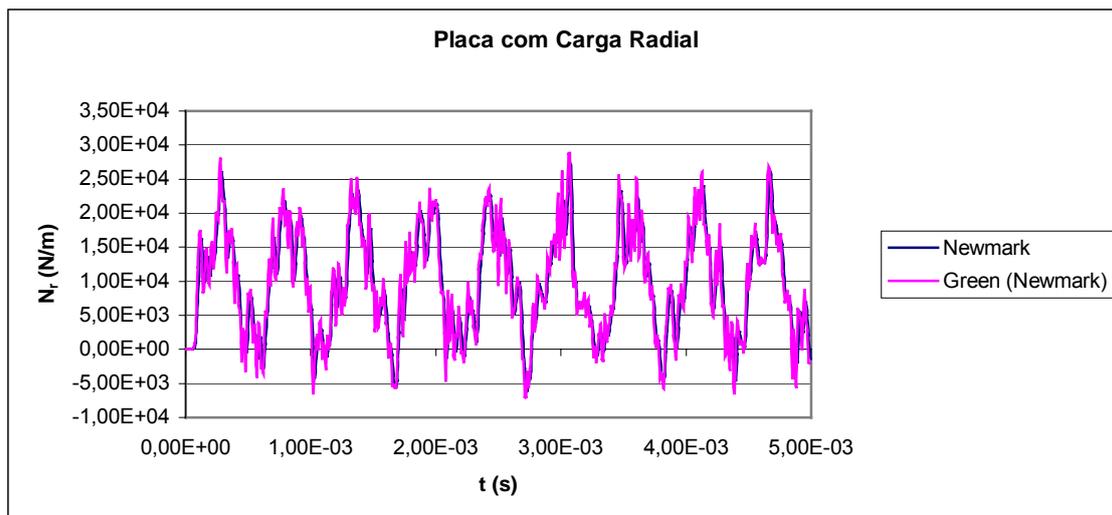


Figura 4.6 – Esforço Normal  $N_r(t)$ ,  $r = 0,5m$ , para o Exemplo 1 (500 divisões no tempo)

Tabela 4.5 – Deslocamento  $u_{r0m\acute{a}x}$  ( $r = 1,0m$ ) para o Exemplo 1 (1000 divisões no tempo)

Deslocamento $u_{r0m\acute{a}x}$			
Método	Tempo	$u_{r0m\acute{a}x}$	Diferença Percentual
Green	$2,95 \times 10^{-4}$ s	$3,183 \times 10^{-6}$ m	0,05%
Newmark	$3,00 \times 10^{-4}$ s	$3,181 \times 10^{-6}$ m	-

Tabela 4.6 – Esforço Normal  $N_{rm\acute{a}x}$  ( $r = 0,5m$ ) para o Exemplo 1 (1000 divisões no tempo)

Esforço Normal $N_{rm\acute{a}x}$			
Método	Tempo	$N_{rm\acute{a}x}$	Diferença Percentual
Green	$2,75 \times 10^{-4}$ s	$2,745 \times 10^4$ Nm/m	1,83%
Newmark	$2,80 \times 10^{-4}$ s	$2,696 \times 10^4$ Nm/m	-

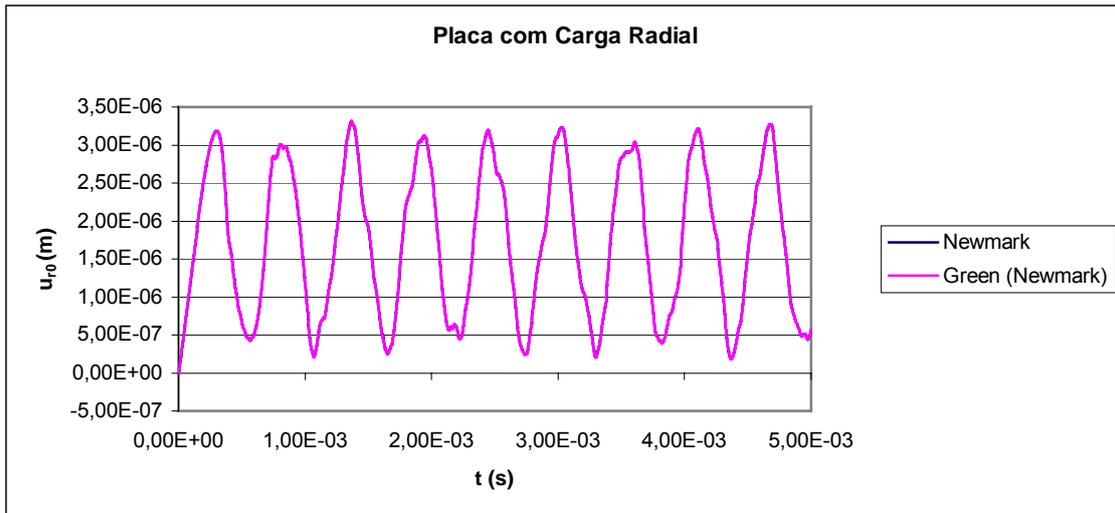


Figura 4.7 – Deslocamento  $u_{r0}(t)$ ,  $r = 1,0\text{m}$ , para o Exemplo 1 (1000 divisões no tempo)

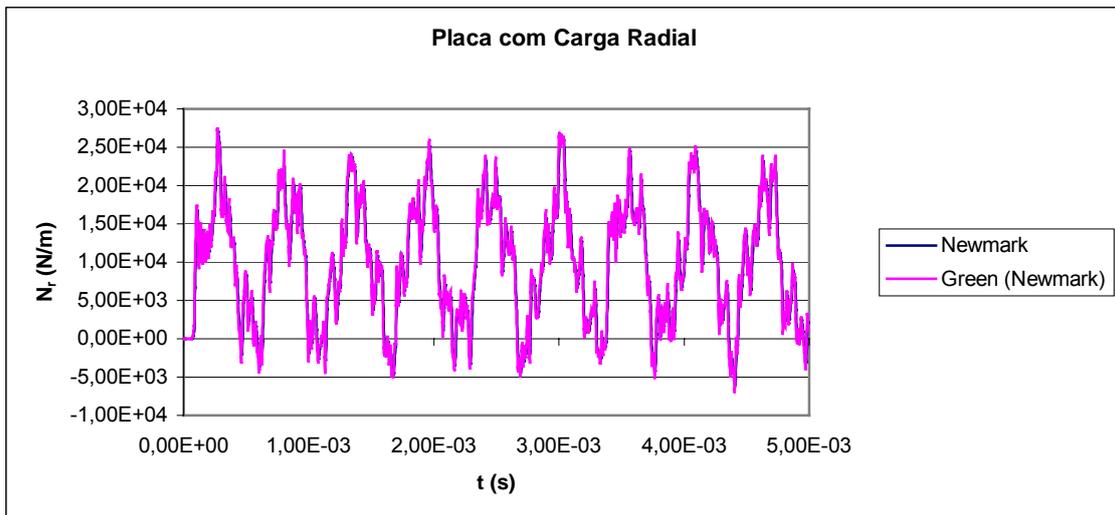


Figura 4.8 – Esforço Normal  $N_r(t)$ ,  $r = 0,5\text{m}$ , para o Exemplo 1 (1000 divisões no tempo)

Conclui-se assim que, no caso em estudo, os resultados encontrados através do método de marcha no tempo baseado em funções de Green se mostraram bastante precisos e estáveis, quando comparados aos do método da aceleração constante.

#### 4.4.2 – Exemplo 2: Placa Circular Espessa com Carregamento Uniforme Aplicado Subitamente e Mantido Constante no Tempo

O segundo exemplo é exatamente o mesmo do item 3.4.5, nele se analisando

uma placa circular espessa submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $p_z = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  aplicado subitamente e mantido constante no tempo (figura 4.9).

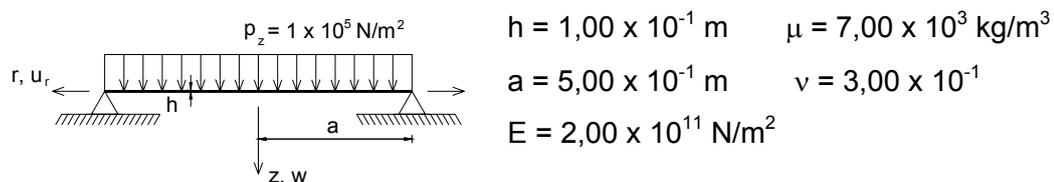


Figura 4.9 – Placa circular espessa apoiada submetida a carregamento uniforme constante no tempo

O raio da placa foi dividido em 50 partes e considerou-se o tempo total de análise de  $5 \times 10^{-1} \text{ s}$ , dividido em 500 intervalos.

Nas tabelas 4.7 e 4.8 encontram-se dispostos os resultados do MDFE com Newmark e Green para os primeiros máximos positivos do deslocamento transversal  $w$  e do momento  $M_r$  no centro da placa. As evoluções temporais dessas duas grandezas estão representadas nas figuras 4.10 e 4.11.

Tabela 4.7 – Deslocamento  $w_{\text{máx}}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 2

Deslocamento $w_{\text{máx}}$			
Método	Tempo	$w_{\text{máx}}$	Diferença Percentual
Green	$1,10 \times 10^{-2} \text{ s}$	$9,250 \times 10^{-6} \text{ m}$	1,08%
Newmark	$1,10 \times 10^{-2} \text{ s}$	$9,151 \times 10^{-6} \text{ m}$	-

Tabela 4.8 – Momento  $M_{r\text{máx}}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 2

Momento $M_{r\text{máx}}$			
Método	Tempo	$M_{r\text{máx}}$	Diferença Percentual
Green	$1,00 \times 10^{-2} \text{ s}$	$2,180 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-0,25%
Newmark	$1,00 \times 10^{-2} \text{ s}$	$2,185 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-

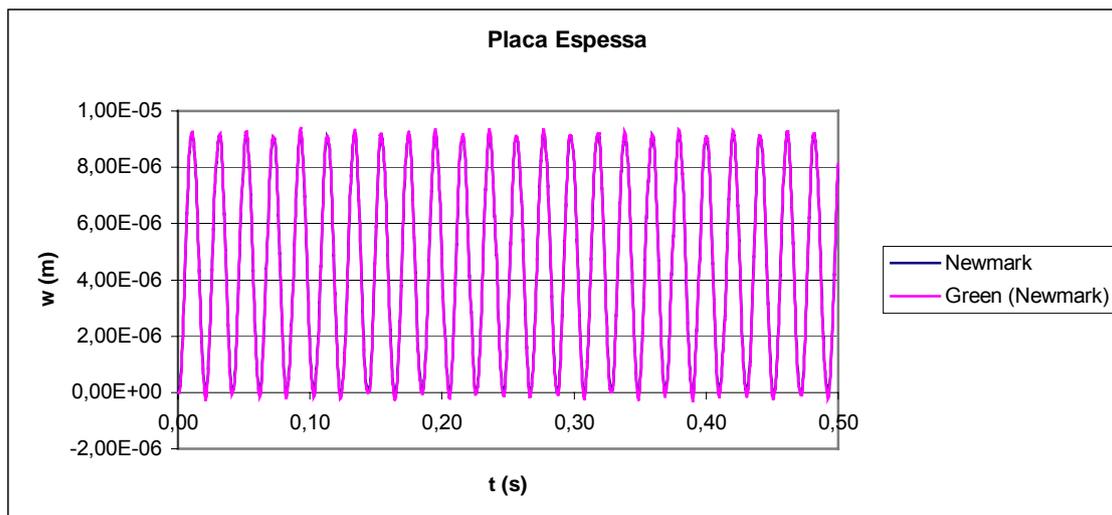


Figura 4.10 – Deslocamento  $w(t)$  do centro da placa para o Exemplo 2

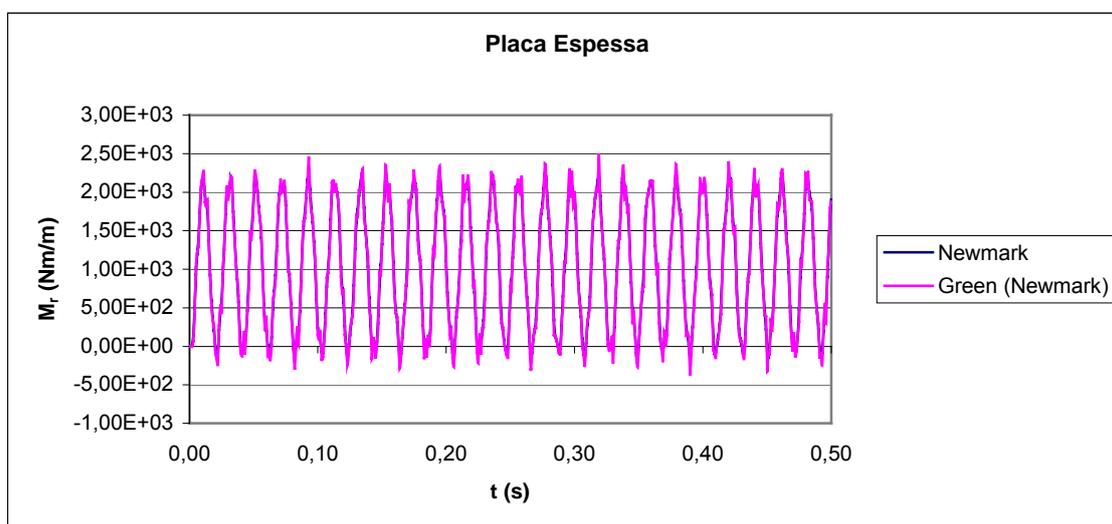


Figura 4.11 – Momento  $M_r(t)$  do centro da placa para o Exemplo 2

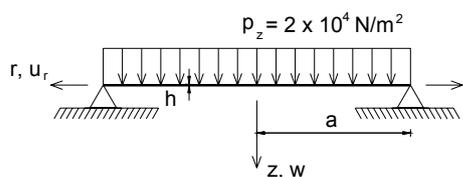
Como já observado nos exemplos dinâmicos dos capítulos anteriores, a frequência de vibração do deslocamento transversal é semelhante à do esforço  $M_r$ .

Os resultados demonstraram que o processo de marcha no tempo por Green apresentou-se também bastante satisfatório para o comportamento flexional da placa espessa, notando-se, pelas tabelas 4.7 e 4.8, uma proximidade um pouco maior, quanto aos valores máximos, nos resultados dos esforços.

#### 4.4.3 – Exemplo 3: Placa Circular Delgada com Carregamento Uniforme Aplicado Subitamente e Mantido Constante no Tempo

O presente exemplo trata de uma placa delgada submetida a um carregamento

uniformemente distribuído,  $p_z = 2 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ , aplicado subitamente e mantido constante no tempo, conforme ilustrado no figura 4.12.



$$h = 2,00 \times 10^{-2} \text{ m} \quad \mu = 7,00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$a = 1,00 \text{ m} \quad \nu = 3,00 \times 10^{-1}$$

$$E = 2,00 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Figura 4.12 – Placa circular delgada apoiada submetida a carregamento uniforme constante no tempo

Foram novamente tomadas 50 divisões no raio da placa e comparados os resultados do MDFE obtidos com o método da aceleração constante e com o baseado nas funções de Green, simulando-se o comportamento de placa delgada através de um módulo de elasticidade transversal  $\bar{G} = G \times 10^6 = \frac{E}{2(1+\nu)} \times 10^6$ .

A comparação entre os resultados para os dois procedimentos de marcha no tempo pode ser vista nas tabelas 4.9 e 4.10 e nas figuras 4.13 e 4.14.

Tabela 4.9 – Deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 3

Deslocamento $w_{m\acute{a}x}$			
Método	Tempo	$w_{m\acute{a}x}$	Diferença Percentual
Green	$2,10 \times 10^{-2} \text{ s}$	$1,765 \times 10^{-2} \text{ m}$	-0,49%
Newmark	$2,10 \times 10^{-2} \text{ s}$	$1,774 \times 10^{-2} \text{ m}$	-

Tabela 4.10 – Momento  $M_{r\acute{m}\acute{a}x}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 3

Momento $M_{r\acute{m}\acute{a}x}$			
Método	Tempo	$M_{r\acute{m}\acute{a}x}$	Diferença Percentual
Green	$2,10 \times 10^{-2} \text{ s}$	$9,178 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	1,87%
Newmark	$2,10 \times 10^{-2} \text{ s}$	$9,010 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-

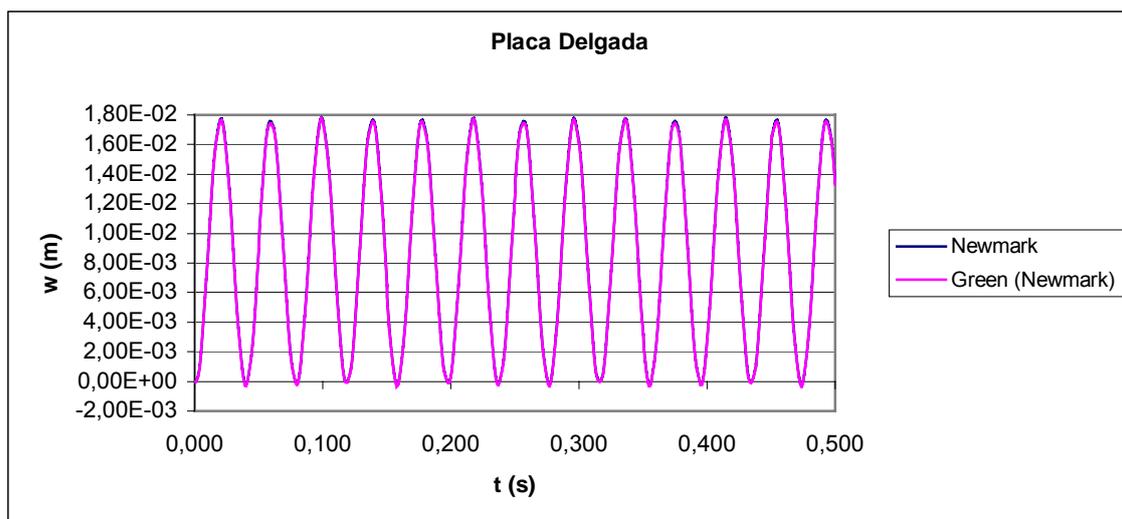


Figura 4.13 – Deslocamento  $w(t)$  do centro da placa para o Exemplo 3

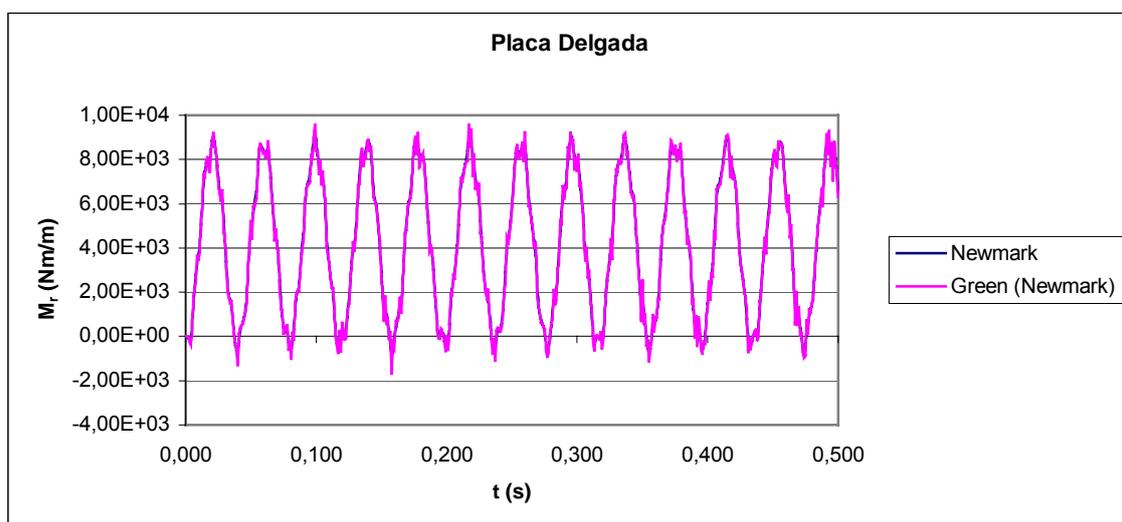


Figura 4.14 – Momento  $M_r(t)$  do centro da placa para o Exemplo 3

A precisão e estabilidade do método de avanço no tempo baseado em funções de Green foi novamente comprovada, desta vez para o caso de uma placa delgada.

#### 4.5 – Comentários

Para os três exemplos aqui abordados o método de marcha no tempo baseado nas funções de Green se mostrou eficiente.

Como já comentado anteriormente, a desvantagem do método é o esforço computacional para a resolução de dois sistemas de equações para cada um dos graus de liberdade da estrutura. A partir do momento que o número de incrementos de tempo vai aumentando, o método vai se tornando cada vez mais vantajoso, por ser

explícito.

Existem alguns meios de se tentar reduzir o custo computacional tomando somente a contribuição de algumas regiões espaciais do modelo [52], mas não é este o objetivo do presente estudo.

Como comentado no capítulo anterior, o fato da teoria de Mindlin recair na de Kirchhoff para a consideração de um módulo de elasticidade transversal grande é de suma importância para o desenvolvimento do método em estudo, já que possibilitou o estudo de placas delgadas com uma matriz de massa (para a qual se calcula a inversa no processo) diagonal.

Observa-se, nos exemplos apresentados, que as frequências dos deslocamentos são, em geral, bastante semelhantes às dos esforços solicitantes, como também verificado em [6].

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISE NÃO LINEAR DINÂMICA DE PLACAS DELGADAS

#### 5.1 – Introdução

Analisa-se neste capítulo o comportamento não linear de placas delgadas, no âmbito de rotações moderadas. Primeiramente são descritos os aspectos teóricos da análise em questão, passando-se, em seguida, ao tratamento numérico pelo MDFE e, como nos capítulos anteriores, são por fim apresentadas aplicações com o intuito de comprovar a eficácia do MDFE.

#### 5.2 – Tratamento Analítico do Problema

A abordagem analítica do problema pelo P.T.V., bem como todas as considerações sobre a axissimetria, o sistema de coordenadas e a definição dos esforços solicitantes, são idênticas às já descritas no capítulo 2.

##### 5.2.1 – Modelo de Rotações Moderadas

O estudo do comportamento não linear geométrico envolve diversos níveis de simplificação, estabelecidos de acordo com o tipo de modelo estrutural adotado.

No caso das placas delgadas, o modelo não linear em geral adotado é o de rotações moderadas [64,65], dando origem à teoria de von Kármán, compatível com a presença na placa de deslocamentos transversais da ordem da espessura. Tal modelo corresponde ao caso de pequenas componentes de deformação e pequenos ângulos de rotação (em radianos) em relação à unidade, sendo estes ângulos, no entanto, consideravelmente maiores do que as componentes de deformação.

##### 5.2.2 – Hipóteses Básicas

1 – Admite-se que a placa em estudo é delgada, com comportamento linear físico e não linear geométrico (rotações moderadas);

2 – Linhas retas, normais à superfície média antes da deformação, permanecem

retas, normais à superfície média e inalteradas em seu comprimento após a deformação (hipótese de Kirchhoff).

3 – A tensão normal  $\sigma_z$  (na direção normal à superfície média) é pequena em relação às demais tensões normais e pode ser desprezada nas relações tensão - deformação.

### 5.2.3 – Relações Deformação-Deslocamento

#### 5.2.3.1 – Componente de Deformação $\varepsilon_r$

Partindo-se de um segmento elementar  $dr$ , na direção  $r$ , a uma distância  $z$  da superfície média (figura 5.1), e considerando o seu comprimento após a deformação como sendo  $ds^*$ , pode-se escrever:

$$(ds^*)^2 = \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 dr^2 + \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 dr^2 \therefore ds^* = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dr}\right)^2} dr$$

Para a componente de deformação  $\varepsilon_r$  resulta então:

$$\varepsilon_r = \frac{ds^* - dr}{dr} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dr}\right)^2} dr - dr}{dr} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dr}\right)^2} - 1$$

ou, lembrando que  $\sqrt{1 + \alpha} \cong 1 + \frac{\alpha}{2}$  para  $|\alpha| \ll 1$ ,

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2$$

Desprezando  $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2$  diante de  $\frac{\partial u_r}{\partial r}$  e levando em conta que  $u_r = u_{r0} - z \frac{dw}{dr}$ , onde

$u_{r0} = u_r|_{z=0}$ , escreve-se finalmente:

$$\varepsilon_r = \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 - z \frac{d^2w}{dr^2}$$

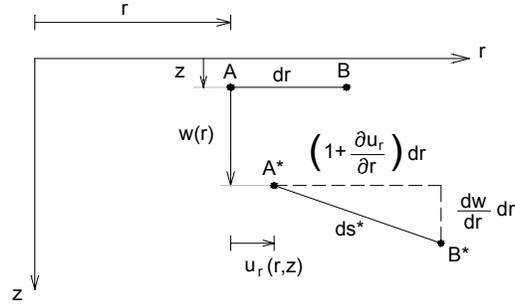


Figura 5.1 – Esquema para a determinação de  $\varepsilon_r$

### 5.2.3.2 – Componente de Deformação $\varepsilon_\theta$

Analogamente ao desenvolvimento anterior, parte-se de um segmento elementar AC, desta vez na direção circunferencial. Com o auxílio da figura 5.2, escreve-se então:

$$\varepsilon_\theta = \frac{(A^*)(C^*) - (A)(C)}{(A)(C)} = \frac{(r + u_r)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u_r}{r} \quad \therefore \varepsilon_\theta = \frac{u_{r0}}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr}$$

Observa-se assim que a componente de deformação  $\varepsilon_\theta$  resulta idêntica à da teoria linear.

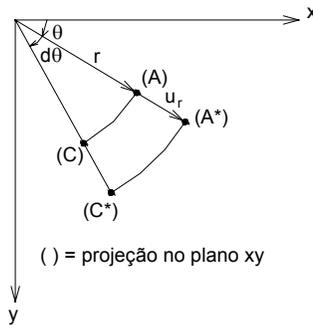


Figura 5.2 – Esquema para a determinação de  $\varepsilon_\theta$

Em resumo, as relações deformação-deslocamento para o problema em estudo são dadas por:

$$\varepsilon_r = \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - z \frac{d^2w}{dr^2} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_{r0}}{r} - \frac{z}{r} \frac{dw}{dr}$$

### 5.2.4 – Trabalho Virtual Interno

A expressão geral do T.V.I da placa é exatamente a mesma do capítulo 2, dada pelas equações (2.4) e (2.6). No presente caso, entretanto, são ainda previstas solicitações térmicas e, com isso, as componentes de tensão  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$  se ligam às componentes de deformação  $\varepsilon_r$  e  $\varepsilon_\theta$  por:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) - \alpha\Delta t(1+\nu)] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) - \alpha\Delta t(1+\nu)]\end{aligned}\quad (5.2)$$

Utilizando as relações deformação-deslocamento (5.1), e usando as definições (2.8) dos esforços solicitantes, o trabalho virtual interno pode ser escrito como:

$$\delta W_i = 2\pi \int_0^a \left( N_r r \delta \frac{du_{r0}}{dr} + N_r r \frac{dw}{dr} \delta \frac{dw}{dr} - M_r r \delta \frac{d^2w}{dr^2} + N_\theta \delta u_{r0} - M_\theta \delta \frac{dw}{dr} \right) dr \quad (5.3)$$

Substituindo (3.7) e (5.1) em (5.2), e levando o resultado em (2.8), os esforços solicitantes ficam assim representados em função dos deslocamentos  $u_{r0}$ ,  $w$  e das variações de temperatura  $\Delta t_i$  e  $\Delta t_e$ :

$$\begin{aligned}N_r &= C \left[ \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{\nu}{r} u_{r0} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right] - \frac{\alpha E h}{2(1-\nu)} (\Delta t_i + \Delta t_e) \\ N_\theta &= C \left[ \nu \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{u_{r0}}{r} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right] - \frac{\alpha E h}{2(1-\nu)} (\Delta t_i + \Delta t_e) \\ M_r &= -D \left( \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} (\Delta t_i - \Delta t_e) \\ M_\theta &= -D \left( \nu \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{\alpha E h^2}{12(1-\nu)} (\Delta t_i - \Delta t_e)\end{aligned}\quad (5.4)$$

Finalmente, introduzindo (5.4) em (5.3), a expressão do trabalho virtual interno se escreve sob a forma:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = \int_0^a \left\{ 2\pi \left[ C \left( r \frac{du_{r0}}{dr} + \nu u_{r0} + \frac{r}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right) \left( \delta \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{dw}{dr} \delta \frac{dw}{dr} \right) + D \left( r \frac{d^2w}{dr^2} + \nu \frac{dw}{dr} \right) \cdot \right. \right. \\
\left. \left. \cdot \delta \frac{d^2w}{dr^2} + C \left[ \nu \frac{du_{r0}}{dr} + \frac{u_{r0}}{r} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right] \delta u_{r0} + D \left( \nu \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \delta \frac{dw}{dr} \right] + \right. \\
\left. - \frac{\alpha \pi E h}{1 - \nu} \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) r \delta \frac{du_{r0}}{dr} + (\Delta t_i + \Delta t_e) r \frac{dw}{dr} \delta \frac{dw}{dr} + (\Delta t_i + \Delta t_e) \delta u_{r0} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) r \delta \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{h}{6} (\Delta t_i - \Delta t_e) \delta \frac{dw}{dr} \right] \right\} dr \quad (5.5)
\end{aligned}$$

### 5.2.5 – Trabalho Virtual Externo

O trabalho virtual externo fica traduzido pela mesma equação (2.17) do caso linear.

### 5.3 – Tratamento Numérico do Problema

A discretização e sistemas de numeração, bem como a regra de correspondência (2.18) entre os índices de numeração local e global dos deslocamentos, para um trecho genérico (i) de integração, descritas no capítulo 2, são igualmente válidas para o caso não linear. Vale no entanto salientar que, no presente estudo, existem no T.V.I. termos adicionais provenientes da parte não linear de  $N_r$  e  $N_\theta$ . Para tais termos foram considerados os trechos de integração do tipo 1 na figura 2.5 e, além disso, utilizada a representação reduzida para a derivada espacial de  $w$  (análoga à fórmula (2.19) para  $u$ ).

#### 5.3.1 – Representação pelo Método da Aceleração Constante para as Derivadas Temporais dos Deslocamentos

Tal representação é idêntica à descrita no capítulo 2.

#### 5.3.2 – Avaliação do Trabalho Virtual Interno

Na avaliação numérica do trabalho virtual interno, da mesma forma do que nos capítulos anteriores, substitui-se, na equação (5.5), a integral por um somatório traduzindo

a contribuição dos trechos de integração considerados ao longo do raio da placa, sendo utilizadas para as derivadas dos deslocamentos  $u$  e  $w$  as suas representações em diferenças finitas. Lembra-se novamente que, para cada trecho de integração, todas as grandezas existentes na referida expressão são supostas constantes.

A presença de termos não lineares na expressão do T.V.I. acarreta uma matriz de rigidez global da placa função dos deslocamentos, o que torna necessário um esquema iterativo (descrito posteriormente) para a resolução do sistema (não linear) de equações algébricas decorrente do procedimento numérico. Neste caso, mostra-se conveniente a decomposição do T.V.I. em duas parcelas: uma relativa às deformações totais, que envolve três possíveis esquemas de representação numérica, conforme apresentado no tópico a seguir, e uma relativa aos efeitos térmicos, que envolve um único esquema de representação numérica.

### 5.3.2.1 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada às Deformações Totais

Da expressão (5.5) obtém-se, excluindo as parcelas de temperatura:

$$\begin{aligned} \delta W_i = 2\pi \left\{ \sum_{(j)=1}^{NN-1} C \left[ \left( r_u(j)u'(j) + vu(j) + \frac{r_u(j)}{2} w'(j)^2 \right) \delta u'(j) + \left( r_u(j)u'(j) + vu(j) + \frac{r_u(j)}{2} w'(j)^2 \right) \right. \right. \\ \cdot w'(j) \delta w'(j) + \left. \left. \left( vu'(j) + \frac{1}{r_u(j)} u(j) \frac{v}{2} w'(j)^2 \right) \delta u(j) \right] d(j) + D \left[ \left( r_w(1)w''(1) + vw'(1) \right) \delta w''(1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( vw''(1) + \frac{1}{r_w(1)} w'(1) \right) \delta w'(1) \right] d(1) + \sum_{(j)=2}^{NN-1} D \left[ \left( r_w(j)w''(j) + vw'(j) \right) \delta w''(j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( vw''(j) + \frac{1}{r_w(j)} w'(j) \right) \delta w'(j) \right] d(j) + vw'(NN) \delta w''(NN) + \right. \\ \left. + \left( vw''(NN) + \frac{1}{r_w(NN)} w'(NN) \right) \delta w'(NN) \right] d(NN) \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Entre os termos não lineares na expressão acima distinguem-se inicialmente aqueles que (excluindo-se as variações) dependem somente de  $w'$ . Nestes termos, um quadrático e outro cúbico, apenas uma das derivadas  $w'$  será expressa em diferenças finitas, enquanto as outras ( $w'$  e  $w'^2$ ) serão mantidas fechadas (não representadas em diferenças finitas). Já os termos não lineares na expressão (5.6) que dependem ao mesmo tempo de  $w'$  e de  $u'$  ou  $u$  permitem mais de um tipo de representação, pois fica

aberta a possibilidade de se manterem fechados  $w'$  ou então  $u$  ou  $u'$ . Em função do exposto, e introduzindo as representações em diferenças finitas, montam-se os seguintes esquemas para a avaliação numérica de (5.6):

a - Esquema 1:

Neste esquema, são mantidas fechadas as derivadas  $w'$  nos termos não lineares de (5.6) que permitem mais de um tipo de representação. Segue-se então:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & 2\pi \left\{ \sum_{k=2}^{NN} C \left[ \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + v \frac{u_k + u_{k-1}}{2} + \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} w'_{X_k} \right) \right. \right. \\
& \cdot \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + v \frac{u_k + u_{k-1}}{2} + \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} w'_{X_k} \right) w'_{X_k} \cdot \\
& \left. \cdot \delta \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} + \left( v \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{u_k + u_{k-1}}{2} + \frac{v}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} w'_{X_k} \right) \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right] \lambda + \\
& + D \left[ \left( r_1 \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + v \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right) \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + \right. \\
& \left. + \left( v \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + \frac{1}{r_1} \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right) \delta \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} + \\
& + \sum_{k=2}^{NN-1} D \left[ \left( r_k \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\lambda^2} + v \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right) \delta \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{2\lambda} + \right. \\
& \left. + \left( v \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\lambda^2} + \frac{1}{r_k} \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right) \delta \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right] \lambda + \\
& + D \left[ \left( r_{NN} \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + v \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right) \right. \\
& \cdot \delta \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + \left( v \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{r_{NN}} \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} \left. \right\} \tag{5.7}
\end{aligned}$$

b - Esquema 2

Neste caso, nos termos de (5.6) que permitem mais de um tipo de representação, são mantidos fechados os deslocamentos  $u$  ou as derivadas  $u'$  e escreve-se  $w'$  em sua representação numérica por diferenças finitas. Assim,

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & 2\pi \left\{ \sum_{k=2}^{NN} C \left[ \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + v \frac{u_k + u_{k-1}}{2} + \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} w'_{X_k} \right) \right. \right. \\
& \cdot \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \left. \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} u'_{X_k} + v u_{X_k} + \frac{r_k + r_{k-1}}{2} w'^2_{X_k} \right) \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} \delta \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} + \right. \\
& \left. + \left( v \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{u_k + u_{k-1}}{2} + \frac{v}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} w'_{X_k} \right) \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right] \lambda + \\
& + D \left[ \left( r_1 \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + v \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right) \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + \right. \\
& \left. + \left( v \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + \frac{1}{r_1} \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right) \delta \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} + \\
& + \sum_{k=2}^{NN-1} D \left[ \left( r_k \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\lambda^2} + v \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right) \right. \\
& \cdot \delta \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{2\lambda} + \left. \left( v \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\lambda^2} + \frac{1}{r_k} \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right) \delta \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right] \lambda + \\
& + D \left[ \left( r_{NN} \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + v \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2_{NN-1}} + \right. \\
& \left. + \left( v \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + \frac{1}{r_{NN}} \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

### c - Esquema 3

Nesta alternativa, os termos não lineares de (5.6) que permitem mais de um tipo de representação são decompostos em duas parcelas, numa delas mantendo-se fechados os deslocamentos  $u$  ou as derivadas  $u'$  e escrevendo-se  $w'$  em sua representação numérica, e na outra adotando-se o procedimento inverso. Desta forma, vem:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & 2\pi \left\{ \sum_{k=2}^{NN} C \left[ \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + v \frac{u_k + u_{k-1}}{2} + \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} w'_{X_k} \right) \cdot \right. \right. \\
& \cdot \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} w'_{X_k} + \frac{1}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} u'_{X_k} \right) + v \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} w'_{X_k} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{w_k + w_{k-1}}{2} u'_{X_k} + \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} w'^2_{X_k} \right) \delta \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} + \left( v \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{u_k + u_{k-1}}{2} + \frac{v}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} w'_{X_k} \right) \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right] \lambda + D \left[ \left( r_1 \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + v \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right) \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2} + \left( v \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda)}{\lambda^2_1} + \frac{1}{r_1} \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right) \cdot \right. \quad (5.9) \\
& \left. \delta \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} + \sum_{k=2}^{NN-1} D \left[ \left( r_k \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\lambda^2} + v \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right) \delta \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{2\lambda} + \right. \\
& \left. + \left( v \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\lambda^2} + \frac{1}{r_k} \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right) \delta \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right] \lambda + \\
& + D \left[ \left( r_{NN} \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + v \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + \right. \\
& \left. + \left( v \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + \frac{1}{r_{NN}} \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right) \delta \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right] \frac{\lambda}{2} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Obviamente uma vez obtida a convergência para a solução, os três esquemas apresentados levam ao mesmo resultado. Cabe salientar que somente no Esquema 3 a matriz de rigidez global da placa (denominada adiante de matriz secante) resulta simétrica.

### 5.3.2.2 – Parcela do Trabalho Virtual Interno Associada à Variação de Temperatura

Essa parcela do trabalho virtual interno, em (5.5), escreve-se numericamente sob a forma:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & -\frac{\alpha\pi E h}{1-\nu} \left\{ \sum_{(j)=1}^{NN-1} [(\Delta t_i + \Delta t_e)(r_u(j)\delta u'(j) + \delta u(j) + r_u(j)w'(j)\delta w'(j))d(j)] + \right. \\
& + \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e)(r_w(1)\delta w''(1) + \delta w'(1))d(1) + \sum_{(j)=2}^{NN-1} \left[ \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e)(r_w(j)\delta w''(j) + \delta w'(j))d(j) \right] + \quad (5.10) \\
& \left. + \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e)(r_w(NN)\delta w''(NN) + \delta w'(NN))d(NN) \right\}
\end{aligned}$$

Substituindo em (5.10) as representações em diferenças finitas para as derivadas espaciais dos deslocamentos, tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta W_i = & -\frac{\alpha\pi E h}{1-\nu} \left\{ \sum_{k=2}^{NN} \left[ (\Delta t_i + \Delta t_e) \left( \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \delta \frac{u_k - u_{k-1}}{\lambda_{k-1}} + \delta \frac{u_k + u_{k-1}}{2} + \frac{r_k + r_{k-1}}{2} \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} \right. \right. \\
& \cdot \delta \frac{w_k - w_{k-1}}{\lambda} \left. \right) \lambda \left. \right] + \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e) \left( r_1 \delta \frac{2(w_2 - w_1 - \varphi_1 \lambda_1)}{\lambda^2} + \delta \left( \frac{w_2 - w_1}{\lambda} \right) \right) \frac{\lambda}{2} + \quad (5.11) \\
& + \sum_{k=2}^{NN-1} \left[ \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e) \left( r_k \delta \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\lambda^2} + \delta \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\lambda} \right) \lambda \right] + \frac{h}{6}(\Delta t_i - \Delta t_e) \cdot \\
& \cdot \left( r_{NN} \delta \frac{2(\varphi_{NN} \lambda_{NN-1} - w_{NN} + w_{NN-1})}{\lambda^2} + \delta \left( \frac{w_{NN} - w_{NN-1}}{\lambda} \right) \right) \frac{\lambda}{2} \left. \right\}
\end{aligned}$$

No capítulo 3, a parcela referente à solicitação térmica contribuía somente na formação do vetor de carga. No caso não linear existem termos que são multiplicados por deslocamentos nodais e por variações destes, o que gera contribuições também na matriz de rigidez da estrutura.

### 5.3.3 – Avaliação do Trabalho Virtual Externo

Sendo  $\delta W_e$  dado por (2.17), a sua representação numérica fica estabelecida pelas equações (2.33) e (2.34).

### 5.3.4 – Montagem da Matriz dos Coeficientes

Da mesma forma que nos capítulos anteriores, computa-se a contribuição de cada trecho de integração na figura 2.5 dos termos que, na igualdade entre os trabalhos virtuais externo e interno da placa, encontram-se multiplicados pelos deslocamentos nodais e também por suas variações, montando-se assim a matriz dos coeficientes [K] (matriz de

rigidez global da placa) ilustrada na figura 2.11. Além da contribuição do trabalho virtual interno, os termos do trabalho virtual externo em (2.34), oriundos da derivada segunda temporal dos deslocamentos, igualmente contribuem para  $[K]$ .

### 5.3.5 – Montagem do Vetor de Cargas

Contribuem na montagem do vetor de cargas  $[Q]$  os termos do trabalho virtual interno em (5.11) referentes às solicitações térmicas e os termos do trabalho virtual externo em (2.34) que se encontram multiplicados somente pelas variações dos deslocamentos.

### 5.3.6 – Sistema de Equações e Condições de Contorno

Uma vez efetuada a montagem da matriz de rigidez  $[K] = [K]([U])$  e do vetor de cargas  $[Q]$  para a placa, chega-se ao sistema de equações não lineares  $[K][U]=[Q]$ . A aplicação das condições de contorno cinemáticas é realizada da mesma forma descrita anteriormente. Como o sistema é não linear faz-se necessário o uso de um método iterativo para a sua resolução. Define-se então, para fins de utilização do método de Newton - Raphson, um vetor “desequilíbrio” do sistema como sendo

$$[F] = [Q] - [K][U] \quad (5.12)$$

o qual tende a se anular uma vez atendidos, no decorrer do processo iterativo, os critérios de convergência estabelecidos mais adiante.

Considere-se, num dado instante de tempo  $t = t_2$ , uma aproximação  $[U]_0$  para o vetor de deslocamentos nodais da placa. Expandindo-se  $[F]$  em série de Taylor em torno de  $[U]_0$  e desprezando-se os termos de ordem superior à primeira, tem-se:

$$[F] = [F]_0 + \left[ \frac{\partial [F]}{\partial [U]} \right]_0 ([U] - [U]_0) \quad (5.13)$$

Como  $[F]$  deve se anular, vem:

$$[F]_0 = - \left[ \frac{\partial [F]}{\partial [U]} \right]_0 [\Delta U] \quad (5.14)$$

sendo  $[\Delta U] = [U] - [U]_0$ .

Com base na equação (5.12) e considerando o vetor de carga  $[Q]$  independente dos deslocamentos, escreve-se:

$$\left[ \frac{\partial [F]}{\partial [U]} \right]_0 = - \left[ \frac{\partial ([K][U])}{\partial [U]} \right]_0 \quad (5.15)$$

ou

$$\left[ \frac{\partial [F]}{\partial [U]} \right]_0 = -[K_t] \quad (5.16)$$

onde  $[K_t]$  é a denominada matriz de rigidez tangente da estrutura. Introduzindo também o vetor de forças nodais desequilibradas

$$[\Delta R] = [F]_0 = [Q] - [K]_0[U]_0 \quad (5.17)$$

a equação (5.14), que comanda o processo iterativo, fica assim apresentada:

$$[K_t][\Delta U] = [\Delta R] \quad (5.18)$$

Uma vez obtido o vetor  $[\Delta U]$ , relativo a uma iteração genérica  $i$ , tem-se uma nova aproximação  $[U]_0$  para dar início à iteração  $i + 1$ :

$$[U]_0^{i+1} = [U]_0^i + [\Delta U] \quad (5.19)$$

Foram utilizados três critérios de convergência distintos para o encerramento do processo iterativo, sendo em todos eles adotada a mesma tolerância de  $10^{-6}$ . Assim, para uma iteração genérica  $i$ , são realizadas as seguintes verificações:

$$T_1 = \frac{\| [U]^i \| - \| [U]^{i-1} \|}{\| [U]^{i-1} \|} \leq 10^{-6}$$

$$T_2 = \frac{\| [U]^i - [U]^{i-1} \|}{\| [U]^{i-1} \|} \leq 10^{-6} \quad (5.20)$$

$$T_3 = \frac{\| [\Delta R]^i \|}{\| [\Delta Q]_j \|} \leq 10^{-6}$$

admitindo-se que ocorre convergência somente quando os três critérios acima forem atendidos simultaneamente.

Como já mencionado anteriormente, três tipos de matrizes de rigidez secantes  $[K]$  foram desenvolvidos. Entretanto, a matriz de rigidez tangente resulta sempre a mesma,

inclusive simétrica, para qualquer dos três esquemas de representação numérica adotados para  $\delta W_i$ .

Na implementação computacional foi escolhido um método iterativo - incremental, no qual o vetor total de cargas é subdividido em incrementos. Como primeira aproximação para os deslocamentos, na primeira etapa de carga, toma-se a solução linear do problema. Para as iterações seguintes, são atualizadas as matrizes de rigidez secante e tangente e calculada a parcela de carga desequilibrada, este processo se repetindo até ser obtida a convergência. Para cada novo passo de carga, aproveita-se a solução da etapa anterior para iniciá-lo, procedendo-se, a partir daí, de forma análoga à já descrita para o primeiro passo.

#### 5.4 – Apresentação e Análise dos Resultados

São apresentados neste item quatro exemplos de aplicação a fim de demonstrar a aplicabilidade do algoritmo desenvolvido. O primeiro exemplo trata da análise estática de uma placa submetida a carregamento uniformemente distribuído. No segundo examina-se o caso de solicitações térmicas na placa. O terceiro e quarto exemplos são os mesmos problemas dinâmicos já analisados no capítulo 2, desta vez no âmbito de uma análise não linear geométrica.

##### 5.4.1 – Exemplo 1: Análise Estática de uma Placa Circular com Carregamento Uniformemente Distribuído

Analisa-se neste exemplo uma placa apoiada (com deslocamento radial  $u$  liberado no apoio) submetida à atuação de um carregamento uniformemente distribuído de  $2 \times 10^4$  N/m<sup>2</sup> (figura 5.3)

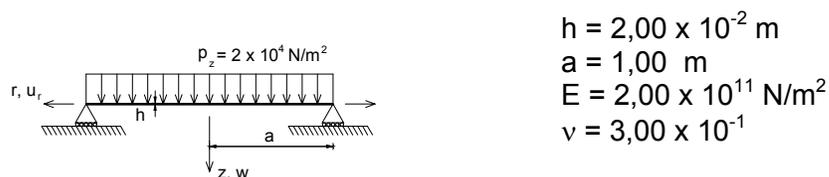


Figura 5.3 – Placa circular apoiada com carregamento uniformemente distribuído

Para o tratamento por diferenças finitas energéticas utilizaram-se 50 divisões no raio da placa. Os resultados obtidos são comparados com uma solução analítico-numérica desenvolvida em forma de série [53] e com a solução linear de Kirchhoff [1]. O carregamento total foi aplicado em dez passos iguais.

Nas tabelas 5.1 e 5.2, além dos resultados, encontram-se as diferenças percentuais para o deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  e o momento  $M_{r_{m\acute{a}x}}$ , ambos ocorrendo no centro da placa ( $r = 0$ ), referentes ao valor total do carregamento.

As figuras de 5.4 e 5.5 mostram as curvas carga x flecha e carga x momento fletor no centro da placa para o MDFE e o modelo analítico-numérico citado acima.

Tabela 5.1 – Deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 1

Deslocamento $w_{m\acute{a}x}$		
MDFE	Referência [53]	Diferença Percentual
$8,282 \times 10^{-3}$ m	$8,287 \times 10^{-3}$ m	-0,06%

Tabela 5.2 – Momento  $M_{r_{m\acute{a}x}}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 1

Momento $M_{r_{m\acute{a}x}}$		
MDFE	Referência [53]	Diferença Percentual
$3,737 \times 10^3$ Nm/m	$3,607 \times 10^3$ Nm/m	3,62%

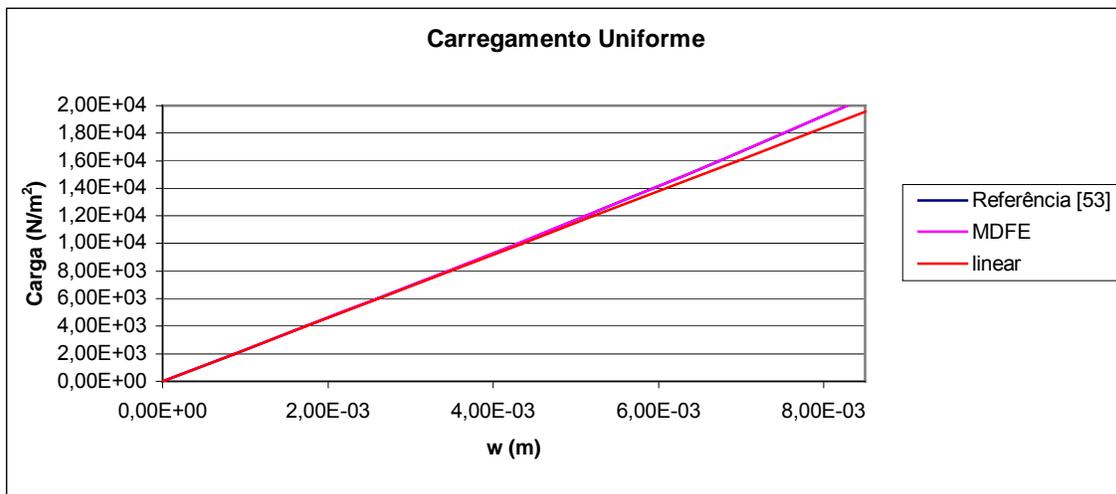


Figura 5.4 – Diagrama carga x flecha para o Exemplo 1

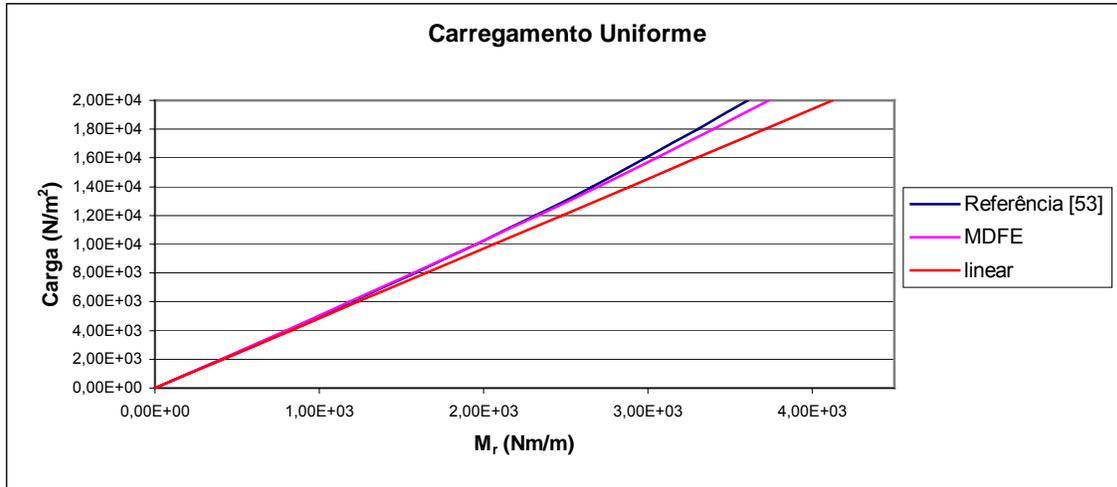


Figura 5.5 – Diagrama carga x momento para o Exemplo 1

A comparação entre os resultados do MDFE e os fornecidos na referência [53] se mostrou satisfatória, principalmente em relação ao deslocamento  $w_{máx}$ . Quando este é comparado ao dado pela solução linear, nota-se um efeito de enrijecimento na placa, gerado pelo acoplamento dos deslocamentos  $u$  e  $w$  existente no modelo não linear. A fim de ilustrar a relação entre tal acoplamento e o efeito de enrijecimento da placa, plotam-se também a seguir os resultados para o caso de o deslocamento  $u$  ser impedido no bordo da placa (figuras 5.6 e 5.7). Como se observa nos gráficos, a rigidez estrutural aumenta significativamente nesta circunstância.

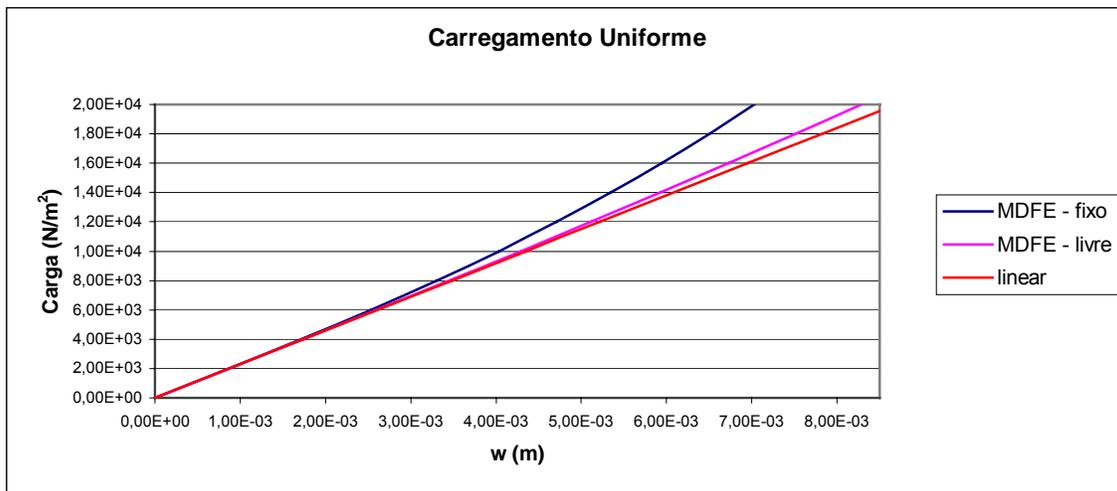


Figura 5.6 – Diagrama carga x flecha para o deslocamento livre e fixo em  $r = 1,00m$

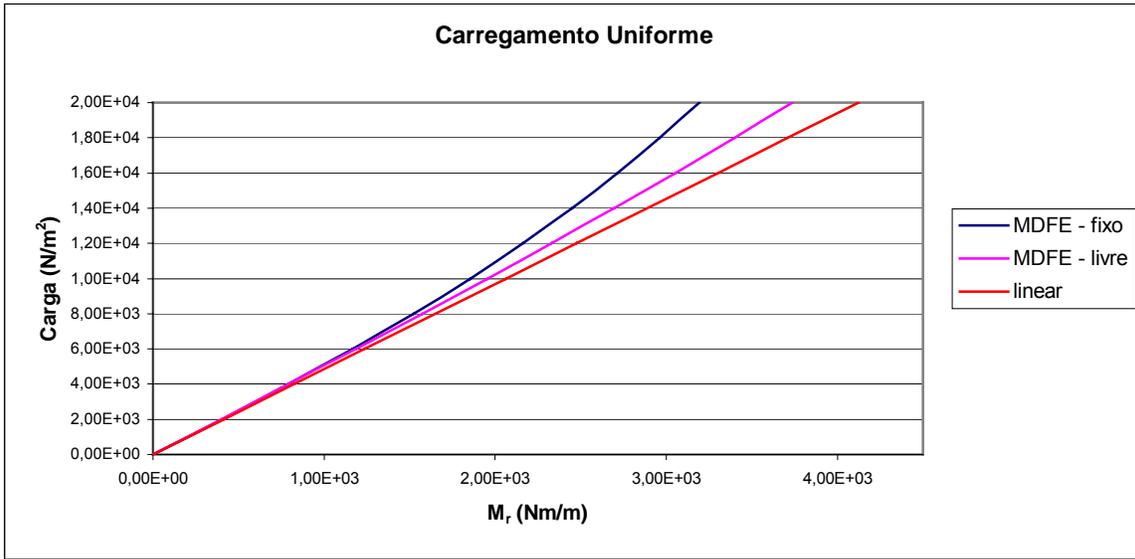


Figura 5.7 – Diagrama carga x momento para o deslocamento livre e fixo em  $r = 1,00\text{m}$

#### 5.4.2 – Exemplo 2: Análise Estática de uma Placa Circular Submetida a um Gradiente Térmico

O segundo exemplo a ser apresentado é o de uma placa apoiada (novamente com o deslocamento  $u$  liberado no apoio) submetida a um gradiente de temperatura (figura 5.8).

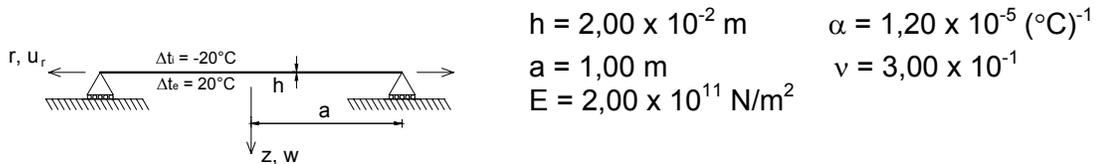


Figura 5.8 – Placa circular apoiada submetida a um gradiente de temperatura

Analogamente aos exemplos do capítulo 2, para a análise em diferenças finitas energéticas consideraram-se 100 divisões no raio, enquanto na análise 3D por elementos finitos foram adotados 1600 elementos (16 divisões ao longo da espessura e 100 divisões ao longo do raio), com condições de contorno de deslocamento radial  $u = 0$  nos nós correspondentes à coordenada  $r = 0$  e de deslocamento transversal  $w = 0$  nos nós de coordenada  $r = 1,00 \text{ m}$ . O programa utilizado para obter as soluções pelo MEF foi desta vez o FEAP<sup>®</sup>, pois o mesmo possibilita a aplicação do gradiente de temperatura por

elementos (não somente como solicitações nodais), o que forneceu resultados bem mais acurados quando comparados com a resposta analítica, em testes lineares realizados, e também com o MDFE, no presente exemplo. O gradiente total de temperatura foi aplicado em dez passos iguais.

Nas tabelas 5.3 e 5.4, além dos resultados, apresentam-se as diferenças percentuais para o deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  e o momento  $M_{r,m\acute{a}x}$ , ambos ocorrendo no centro da placa, correspondentes ao gradiente total de temperatura.

As figuras 5.9 e 5.10 permitem uma comparação dos resultados entre o MDFE e o MEF ao longo do raio para o gradiente de temperatura total, enquanto as figuras 5.11 e 5.12 apresentam os diagramas gradiente de temperatura x flecha e gradiente de temperatura x momento para o presente exemplo. Nessas figuras mostra-se também, para fins ilustrativos, a resposta linear do problema [1].

Tabela 5.3 – Deslocamento  $w$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 2

Deslocamento $w$		
MDFE	MEF	Diferença Percentual
$1,1082 \times 10^{-2}$ m	$1,1083 \times 10^{-2}$ m	-0,02%

Tabela 5.4 – Momento  $M_r$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 2

Momento $M_r$		
MDFE	MEF	Diferença Percentual
$-5,070 \times 10^2$ Nm/m	$-5,152 \times 10^2$ Nm/m	-1,60%

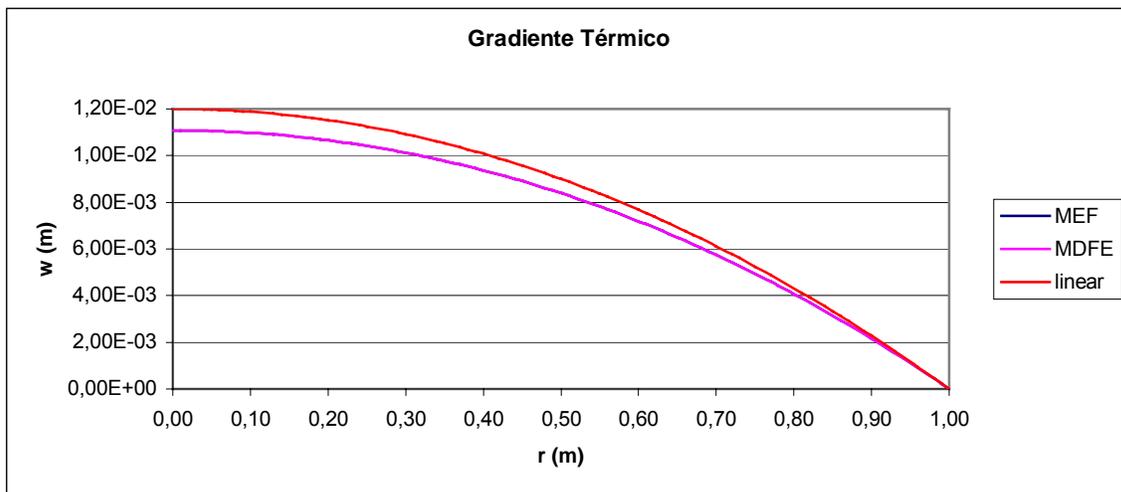


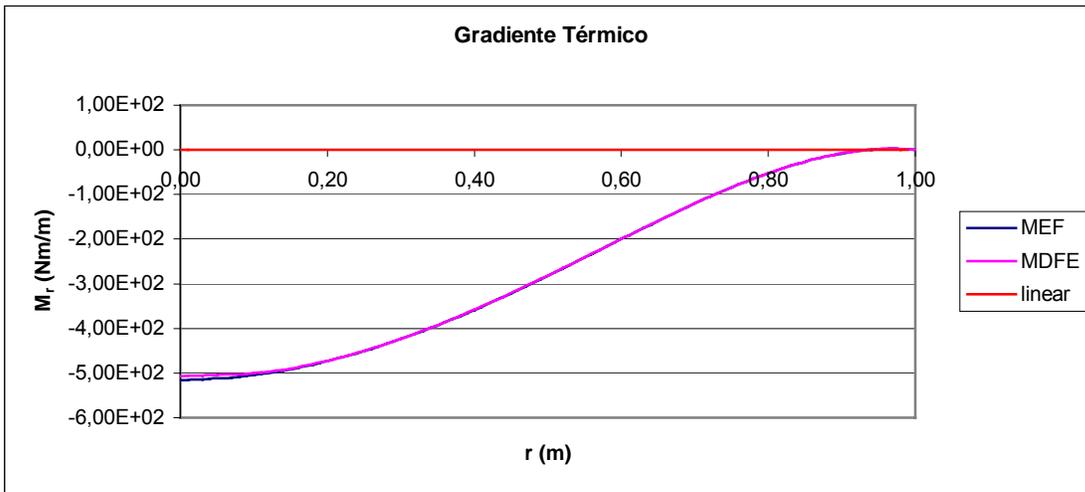
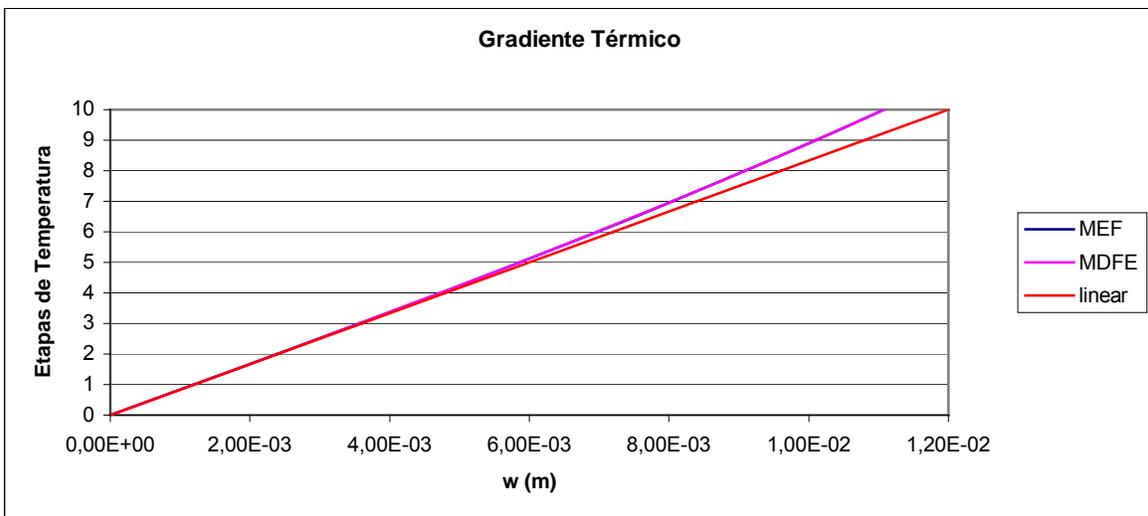
Figura 5.9 – Deslocamento  $w(r)$  da placa para o Exemplo 2 (MDFE X MEF)Figura 5.10 – Momento  $M_r(r)$  da placa para o Exemplo 2 (MDFE X MEF)

Figura 5.11 – Diagrama de etapas de temperatura x flecha no centro da placa para o Exemplo 2

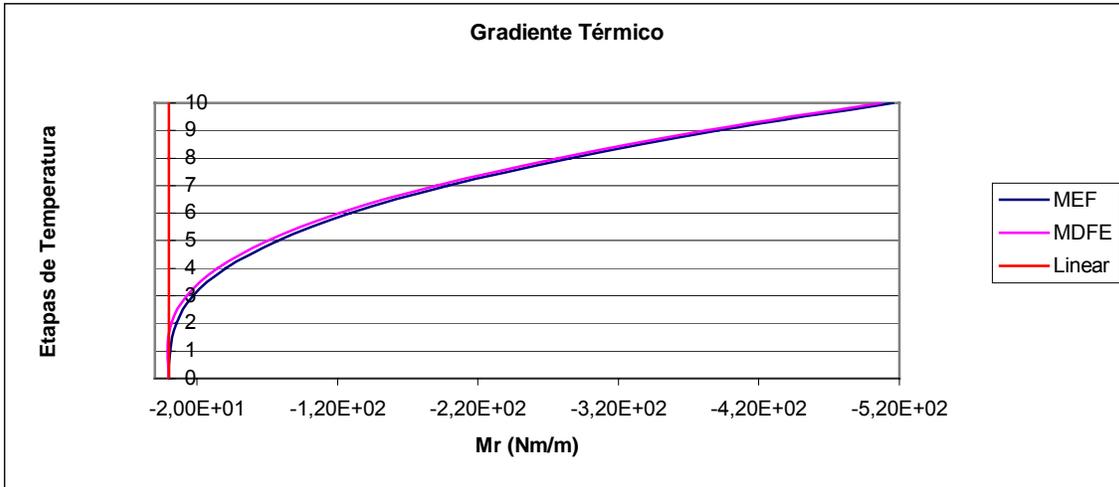


Figura 5.12 – Diagrama de etapas de temperatura x momento no centro da placa para o Exemplo 2

Pode-se uma vez mais afirmar que os resultados obtidos foram satisfatórios, havendo boa concordância tanto qualitativa quanto quantitativa entre os dois métodos numéricos, tal como ocorrido no exemplo anterior. Novamente observa-se que os resultados não lineares para os deslocamentos ficaram um pouco mais próximos do que os relativos ao momento fletor. Este último, no MEF, é calculado com base nas tensões fornecidas pelo programa nos nós associados a  $z = \pm \frac{h}{2}$ , admitindo-as com variação linear na espessura. Note-se por fim que, no presente caso, diferentemente da resposta linear, onde são nulos, há esforços solicitantes gerados pelo acoplamento dos deslocamentos radial e transversal.

#### 5.4.3 – Exemplo 3: Placa Circular com a Imposição de Deslocamentos Iniciais

Seguindo a mesma linha do primeiro exemplo do capítulo 2, examina-se uma placa apoiada, com o deslocamento  $u$  liberado no apoio, submetida a uma deformada inicial definida por  $w_0(r)$  e  $u_0(r)$ , correspondente à análise não linear estática da placa para um carregamento uniformemente distribuído de  $2 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ , deixando-a oscilar livremente após a imposição dessa condição inicial (figura 5.13).

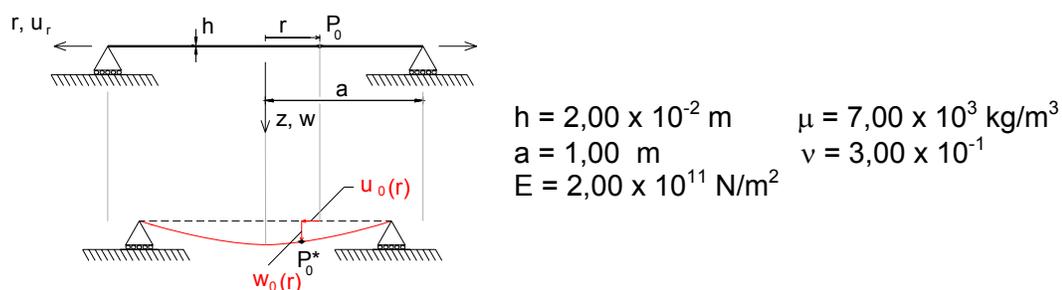


Figura 5.13 – Placa circular apoiada com a imposição de deslocamentos iniciais

A análise dinâmica geometricamente não linear de placas delgadas se mostrou bem mais desfavorável no sentido de se obter uma boa aproximação entre os resultados do MEF (obtidos através de uma análise 3D pelo programa FEAP<sup>®</sup>) e do MDFE. Para uma melhoria nesse sentido, tornou-se necessário adotar, em ambos os métodos, uma discretização mais refinada (no caso do MEF incluindo também a espessura) do que as anteriormente utilizadas. Nota-se em geral que, para exemplos de maior complexidade, como é o caso de uma análise não linear dinâmica, faz-se necessário o uso de uma discretização mais refinada mesmo para o cálculo dos deslocamentos, tornando-se, ao mesmo tempo, muito onerosa computacionalmente a convergência dos momentos, conforme evidenciam os resultados apresentados em seguida. Para ilustrar então este aspecto foram utilizadas três discretizações. A primeira envolvendo 100 divisões no raio para a análise em diferenças finitas energéticas e 1600 elementos para o MEF, conforme já adotado nos exemplos anteriores; a segunda com 200 divisões no raio para o MDFE e 6400 elementos (32 divisões ao longo da espessura e 200 divisões ao longo do raio) para o MEF e, por fim, a terceira com 400 divisões no raio para o MDFE e 25600 elementos (64 divisões ao longo da espessura e 400 divisões ao longo do raio) para o MEF. As condições de contorno e as condições iniciais (de deslocamentos  $u_0$ ,  $w_0$  prescritos não nulos e de velocidades  $\dot{u}_0$ ,  $\dot{w}_0$  nulas) foram impostas de forma análoga ao item 2.4.1, e o tempo total de análise foi de 0,5s, subdividido em 500 intervalos de valor  $\Delta t = 0,001s$ .

Nas tabelas 5.5 e 5.6 pode-se acompanhar a convergência nos valores dos primeiros máximos negativos de  $w$  e  $M_r$ , no centro da placa, e se constatar a já citada dificuldade de convergência para os momentos (mais pronunciada em elementos finitos, talvez pela própria forma como são gerados), enquanto as figuras 5.14 e 5.15 ilustram a evolução temporal de  $w_{m\acute{a}x}$  e  $M_{r m\acute{a}x}$  especificamente para a discretização mais refinada (a

terceira). Como já mencionado no exemplo anterior, para o cálculo do momento fletor pelo MEF utilizam-se as tensões em  $z = \pm \frac{h}{2}$  e uma variação linear destas na espessura.

Tabela 5.5 – Deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 3

Deslocamento $w_{m\acute{a}x}$				
Discretização	Método	Tempo	$w_{m\acute{a}x}$	Diferença Percentual
Discretização 1	MDFE	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-8,215 \times 10^{-3}$ m	-3,08%
	MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-8,315 \times 10^{-3}$ m	-
Discretização 2	MDFE	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-8,348 \times 10^{-3}$ m	-2,06%
	MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-8,374 \times 10^{-3}$ m	-
Discretização 3	MDFE	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-8,383 \times 10^{-3}$ m	-0,16%
	MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-8,397 \times 10^{-3}$ m	-

Tabela 5.6 – Momento  $M_{r\acute{m}\acute{a}x}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 3

Momento $M_{r\acute{m}\acute{a}x}$				
Discretização	Método	Tempo	$M_{r\acute{m}\acute{a}x}$	Diferença Percentual
Discretização 1	MDFE	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-4,277 \times 10^3$ Nm/m	-11,81%
	MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-4,826 \times 10^3$ Nm/m	-
Discretização 2	MDFE	$2,10 \times 10^{-2}$ s	$-4,353 \times 10^3$ Nm/m	-8,67%
	MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-4,766 \times 10^3$ Nm/m	-
Discretização 3	MDFE	$2,10 \times 10^{-2}$ s	$-4,378 \times 10^3$ Nm/m	-5,82%
	MEF	$2,00 \times 10^{-2}$ s	$-4,649 \times 10^3$ Nm/m	-

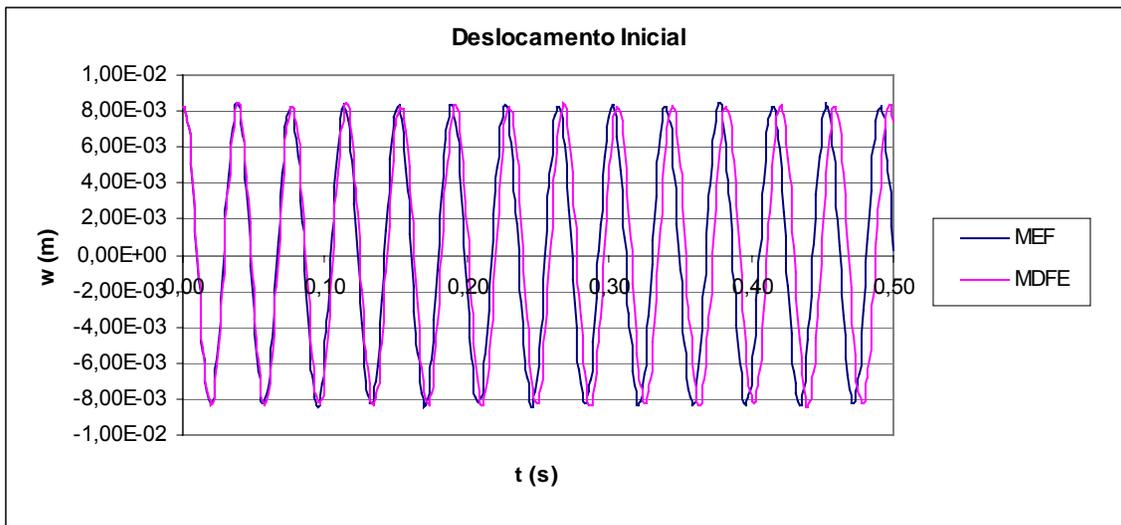


Figura 5.14 – Deslocamento  $w(t)$  do centro da placa para o Exemplo 3 (MDFE X MEF)

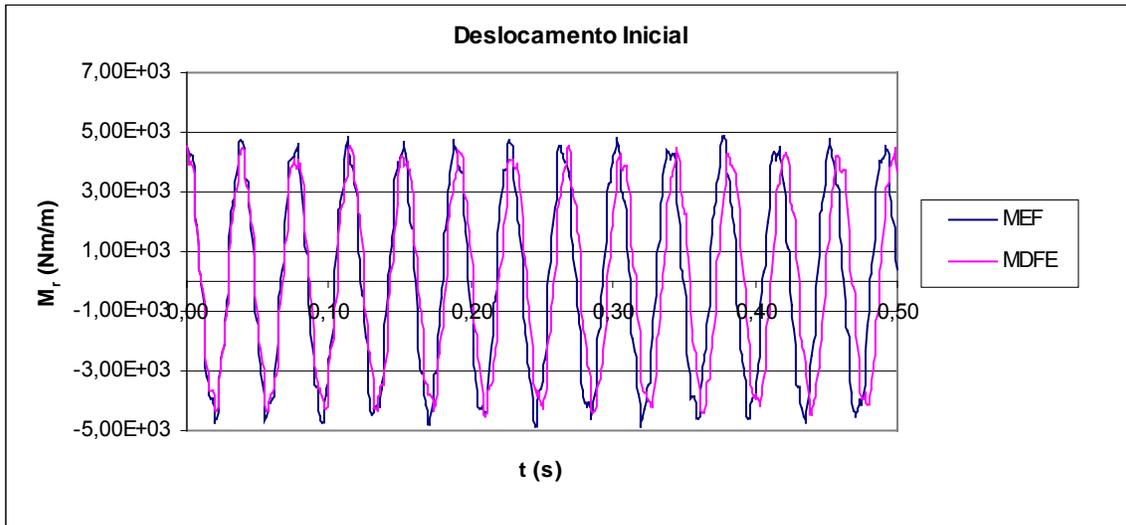


Figura 5.15 – Momento  $M_r(t)$  do centro da placa para o Exemplo 3 (MDFE X MEF)

Nota-se mais uma vez a equivalência das frequências de oscilação entre o deslocamento  $w$  e o momento  $M_r$  no centro da placa. Para uma verificação dessa equivalência no caso do deslocamento e da força radial plotam-se também, em seguida, os gráficos de evolução temporal para  $u$  e  $N_r$  em  $r = 0,50$  m, correspondentes à terceira discretização pelo MDFE. Nota-se, pelas figuras 5.16 e 5.17, que as frequências de oscilação para  $u$  e  $N_r$  também se mostram equivalentes, porém com um valor de aproximadamente o dobro da frequência de  $w$  e  $M_r$ .

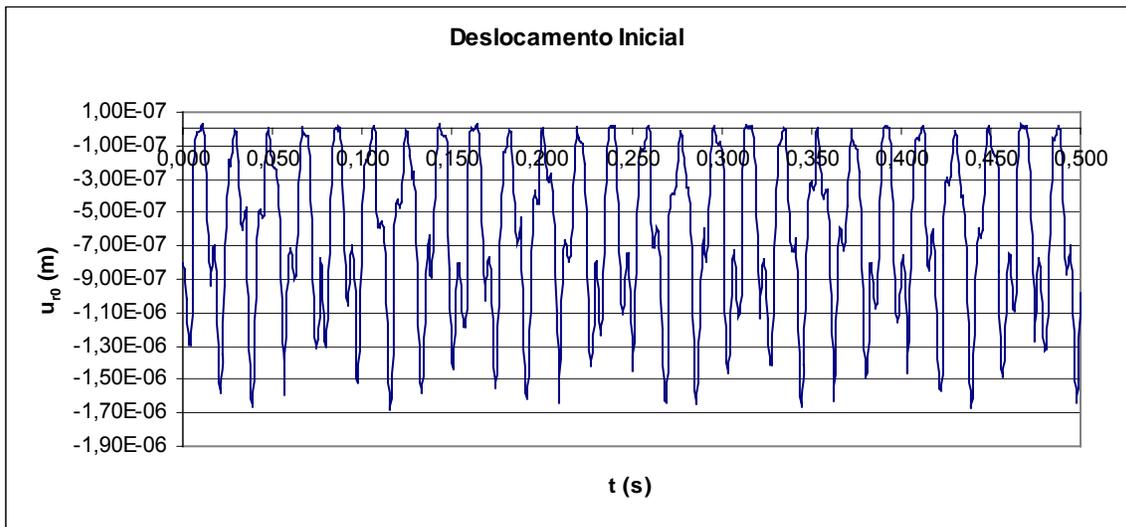


Figura 5.16 – Deslocamento  $u_{r0}(t)$  em  $r = 0,50$  m para o Exemplo 3

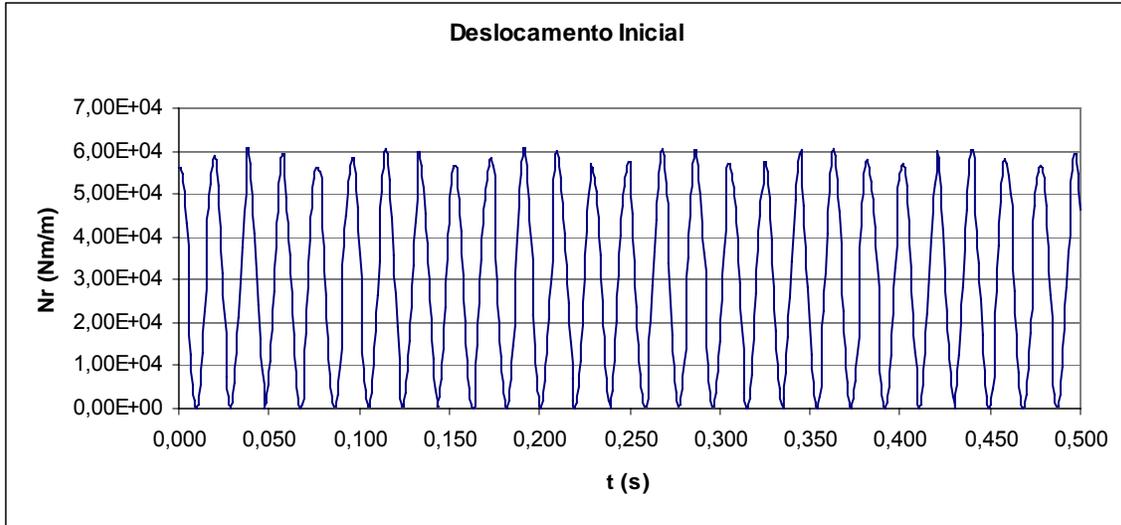


Figura 5.17 – Normal  $N_r(t)$  em  $r = 0,50m$  para o Exemplo 3

#### 5.4.4 – Exemplo 4: Placa Circular com Carregamento Uniforme Constante no Tempo

De forma semelhante ao item 2.4.2, o quarto exemplo é o de uma placa circular apoiada, com o deslocamento  $u$  liberado no apoio, submetida a um carregamento uniformemente distribuído  $p_z = 2 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ , subitamente aplicado e mantido constante no tempo (figura 5.18), sendo os demais dados numéricos idênticos aos do exemplo anterior.

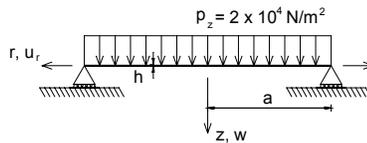


Figura 5.18 – Placa circular apoiada submetida a carregamento uniforme constante no tempo

As discretizações temporal e espacial utilizadas no MDFE e no MEF (programa FEAP<sup>®</sup>) são as mesmas do item 5.4.3 e as condições de contorno são aplicadas da mesma forma que no exemplo anterior. No caso de elementos finitos o carregamento nodal, equivalente à atuação da força  $p_z$  (por unidade de área) na superfície média, foi estabelecido dividindo-se  $p_z$  pela espessura e observando-se, ao longo da espessura e do raio, o volume de influência de cada nó.

As tabelas 5.7 e 5.8 ilustram a convergência dos primeiros máximos positivos de deslocamento  $w$  e momento  $M_r$ , respectivamente, ocorrendo no centro da placa. As

figuras 5.19 e 5.20 descrevem a evolução temporal do deslocamento e do momento no centro da placa circular.

Tabela 5.7 – Deslocamento  $w_{m\acute{a}x}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 4

Deslocamento $w_{m\acute{a}x}$				
Discretização	Método	Tempo	$w_{m\acute{a}x}$	Diferena Percentual
Discretização 1	MDFE	$1,90 \times 10^{-2} \text{s}$	$1,556 \times 10^{-2} \text{ m}$	-0,76%
	MEF	$1,90 \times 10^{-2} \text{s}$	$1,568 \times 10^{-2} \text{ m}$	-
Discretização 2	MDFE	$1,90 \times 10^{-2} \text{s}$	$1,553 \times 10^{-2} \text{ m}$	-0,19%
	MEF	$1,90 \times 10^{-2} \text{s}$	$1,556 \times 10^{-2} \text{ m}$	-
Discretização 3	MDFE	$1,90 \times 10^{-2} \text{s}$	$1,551 \times 10^{-2} \text{ m}$	-0,06%
	MEF	$1,90 \times 10^{-2} \text{s}$	$1,552 \times 10^{-2} \text{ m}$	-

Tabela 5.8 – Momento  $M_{r\acute{m}\acute{a}x}$  ( $r = 0$ ) para o Exemplo 4

Momento $M_{r\acute{m}\acute{a}x}$				
Discretização	Método	Tempo	$M_{r\acute{m}\acute{a}x}$	Diferena Percentual
Discretização 1	MDFE	$2,00 \times 10^{-2} \text{s}$	$7,527 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-10,75%
	MEF	$2,00 \times 10^{-2} \text{s}$	$8,434 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-
Discretização 2	MDFE	$2,00 \times 10^{-2} \text{s}$	$7,512 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-2,43%
	MEF	$2,00 \times 10^{-2} \text{s}$	$7,698 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-
Discretização 3	MDFE	$2,00 \times 10^{-2} \text{s}$	$7,503 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-0,94%
	MEF	$2,00 \times 10^{-2} \text{s}$	$7,574 \times 10^3 \text{ Nm/m}$	-

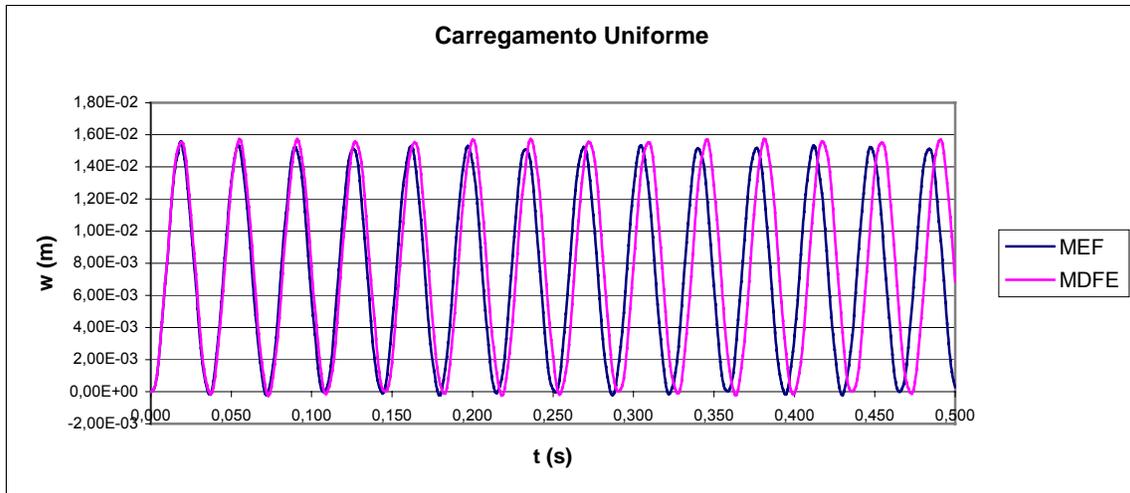


Figura 5.19 – Deslocamento  $w(t)$  do centro da placa para o Exemplo 4 (MDFE X MEF)

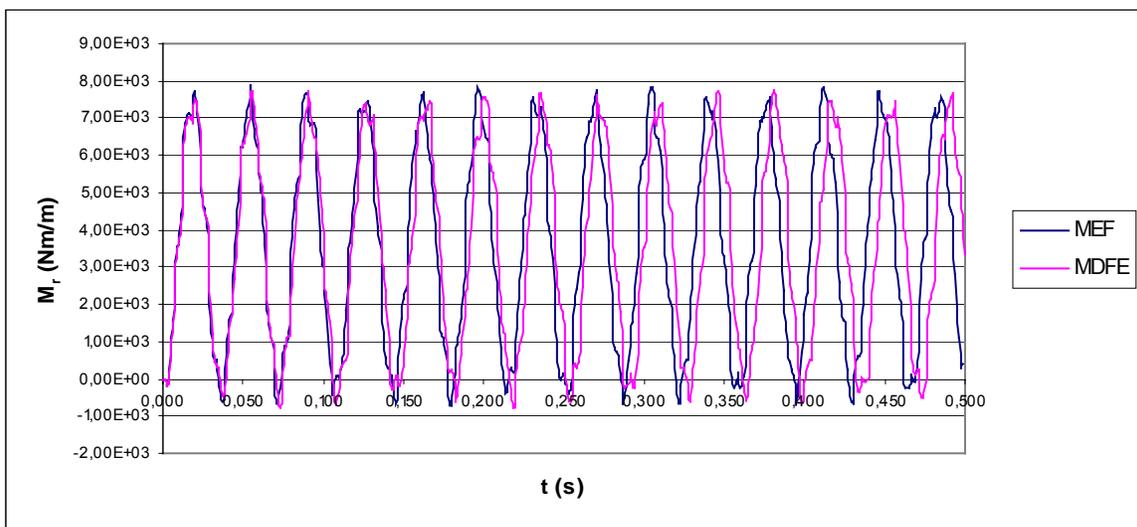


Figura 5.20 – Momento  $M_r(t)$  do centro da placa para o Exemplo 4 (MDFE X MEF)

Observa-se pelas tabelas 5.7 e 5.8 que o MDFE converge de forma mais suave do que o MEF no exemplo em questão.

Os resultados por ambos os métodos apresentam boa concordância tanto qualitativa quanto quantitativamente.

## 5.5 – Comentários

Foi uma vez mais comprovada a eficácia do MDFE na análise não linear geométrica de placas delgadas para os casos estudados.

Pôde-se constatar que, em alguns casos, como no Exemplo 4 especialmente, o MDFE mostrou uma convergência bem menos abrupta do que o MEF em relação aos momentos, notando-se inclusive que, mesmo com a discretização mais pobre, o valor obtido para o momento no MDFE já se mostrou bastante representativo.

Mais do que no caso linear, no presente caso se torna importante o fato de no MDFE estar envolvido um número de graus de liberdade menor do que no MEF. Como na resolução de um sistema não linear há a necessidade de um método iterativo, um maior número de incógnitas, para um mesmo número de nós, torna o processo obviamente mais oneroso.

Vale salientar que, embora a não linearidade nas análises pelo MEF não contenha a restrição de rotações moderadas da teoria de von Kármán, os resultados do MEF e do MDFE tenderam a se aproximar, o que atesta a validade do modelo não linear simplificado utilizado nas análises pelo MDFE.

Os tempos de análise pelo MEF para os problemas não lineares dinâmicos, devido ao maior número de deslocabilidades envolvido, se mostraram bem maiores do que os referentes à análise pelo MDFE.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA

Neste capítulo são descritas as conclusões de caráter geral da pesquisa e deixadas algumas sugestões para o prosseguimento da mesma.

Objetivou-se, no presente trabalho, apresentar um tratamento numérico para os problemas dinâmicos axissimétricos de placas delgadas e espessas utilizando o MDFE, como método de discretização no espaço, efetuando-se a integração temporal adotando, além do método da aceleração constante, um método baseado nas funções de Green do sistema. Foram desenvolvidas formulações lineares pela teoria de Kirchhoff e Mindlin e não linear pela teoria de von Kármán, com a consideração de solicitações de caráter mecânico e/ou térmico. Procurou-se, além dos deslocamentos, enfatizar também o cálculo de esforços na placa.

Pôde-se comprovar a eficácia do MDFE quando aplicado aos problemas de placas circulares axissimétricas tanto delgadas como espessas, a partir do confronto entre os resultados obtidos nas análises estáticas, dinâmicas, lineares e não lineares realizadas com o uso desse método e os oriundos do MEF e de soluções analíticas disponíveis.

Procurou-se, na apresentação dos exemplos de cada capítulo, sempre que possível, comparar o MDFE inicialmente com alguma solução analítica existente, com a intenção de validar de forma mais direta o tratamento numérico proposto (para a placa delgada, com comportamento linear, tais exemplos de aferição se encontram na dissertação de mestrado da autora [43]).

Foi verificado que a implementação de teorias bidimensionais pelo MDFE levou a uma boa concordância com os resultados oriundos do modelo tridimensional do MEF, observando-se que, em alguns problemas não lineares, o MDFE mostrou uma convergência mais suave que a do MEF. Nas comparações do MDFE com o MEF tridimensional, no que se refere aos esforços, vale salientar que no MEF os mesmos são avaliados a partir de valores médios de tensões fornecidos pelo correspondente programa utilizado, o que pode também se constituir numa fonte de imprecisão para fins de comparação de tais grandezas. Tirante este aspecto, de maneira geral o MDFE se mostrou equivalente ao MEF quanto ao cálculo de esforços.

No caso de placas delgadas, as teorias de Kirchhoff e de von Kármán desenvolvidas numericamente pelo MDFE podem se tornar mais econômicas computacionalmente do que as correspondentes formulações bidimensionais pelo MEF, nas quais a rotação é sempre considerada como um grau de liberdade da estrutura. Tal fato se torna especialmente

importante na análise não linear, onde o sistema de equações é resolvido por processos iterativos (Newton – Raphson), que demandam maior esforço computacional.

Pôde-se observar, através da comparação dos exemplos 2.4.1 com 5.4.3 e 2.4.2, com 5.4.4 (cada um desses pares correspondendo à mesma placa analisada pelas teorias linear e não linear), que a convergência torna-se bem mais problemática no caso não linear, principalmente em se tratando dos esforços. Isto pode ser explicado pelo fato de os problemas não lineares serem, em geral, mais desfavoráveis para fins de modelagem e necessitarem assim de uma discretização espacial mais refinada para a obtenção de resultados satisfatórios.

Deve-se ter em mente que a não linearidade geométrica na análise pelo MEF, por se constituir numa análise geral de elasticidade não linear 3D, não envolve explicitamente a simplificação de rotações moderadas da teoria de von Kármán, o que serviu inclusive para testar a validade dessa simplificação no caso das placas delgadas não lineares estudadas pelo MDFE.

A implementação numérica da teoria de Mindlin, com a utilização de um módulo de elasticidade transversal muito grande, reproduziu perfeitamente a teoria clássica de Kirchhoff. Tal fato não invalida a implementação numérica desta última, já que, em tal situação, passa-se a lidar com um número menor de graus de liberdade para o problema, pois, a exceção dos nós extremos (pela eliminação de nós virtuais), a rotação não se constitui num grau de liberdade nodal. Acrescenta-se ainda a importância do desenvolvimento da teoria de Mindlin recair na de Kirchhoff, uma vez que no processo de marcha no tempo por funções de Green numéricas a implementação da teoria de Mindlin gera uma matriz de massa diagonal, resultando num processo de inversão imediato, enquanto a implementação da teoria de Kirchhoff leva à matrizes de massa mal condicionadas.

Os resultados obtidos utilizando o processo de marcha no tempo por funções de Green concordaram com os do método de Newmark nos exemplos estudados, tanto para deslocamentos, quanto para esforços solicitantes. A desvantagem do método baseado em funções de Green é o grande esforço computacional para a resolução de dois sistemas de equações para cada um dos graus de liberdade da estrutura (para efetuar o cálculo das funções de Green). A partir do momento que o número de incrementos de tempo vai aumentando, o método se torna mais vantajoso, por ser explícito. Um meio de reduzir o custo computacional seria o de utilizar uma técnica de partição de domínio no cálculo das funções de Green do modelo [52].

Por fim, nas análises realizadas, pôde-se verificar, conforme também já constatado em [6], que a frequência obtida para os deslocamentos resultou bastante semelhante à obtida para os correspondentes esforços.

A seguir apresentam-se algumas sugestões para o prosseguimento da pesquisa:

- Considerar o efeito de amortecimento na análise dinâmica da placa;
- Estudar os efeitos de instabilidade, através da implementação de técnicas iterativas para a resolução do sistema não linear que prevejam o incremento automático de carga (tais como GDCM [66] e Arc length [67]);
- Implementar o método de marcha no tempo por funções de Green numéricas também para o caso não linear (valendo-se de artifícios para evitar de ter que atualizar sempre a matriz de rigidez do sistema) e melhorar a eficiência do método através da técnica de calcular as funções de Green por sub regiões [52] ;
- Realizar o mesmo tratamento numérico no caso de placas circulares não axissimétricas, as quais necessitam de malhas bidimensionais;
- Estender a aplicação do MDFE à análise dinâmica, linear e não linear geométrica de cascas cilíndricas, utilizando o método de marcha no tempo por Newmark e por funções de Green, realizando, para este elemento estrutural, as mesmas etapas seguidas no presente trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] UGURAL, A. C., **Stresses in Plates and Shells**. New York, McGraw-Hill, 1981.
- [2] ZHOU, D., AU, F. T. K., CHEUNG, Y. K., LO, S. H. "Three – Dimensional Vibration Analysis of Circular and Annular Plates Via the Chebyshev - Ritz Method", **International Journal of Solids and Structures** v. 40, pp. 3089-3105, Feb.2003
- [3] JEONG, K-H. "Free Vibration of Two Identical Circular Plates Coupled with Bounded Fluid", **Journal of Sound and Vibration** v. 206, pp. 653-670, May 2002
- [4] GORMAN, D. G., LEE, C. K., REESE, J. M., HORÁČEK, J. "Vibration Analysis of a Thin Circular Plate Influenced by Liquid/gas Interaction in a Cylindrical Cavity", **Journal of Sound and Vibration** v. 279, pp. 601-618, Jan. 2004
- [5] WU, T. Y., WANG, Y. Y., LIU, G. R. "Free Vibration Analysis of Circular Plates Using Generalized Differential Quadrature Rule" **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** v. 191, pp. 5365-5380, Aug. 2002
- [6] PENG, S., Z., PAN, J. "Flexural Wave Propagation and Power Flow in an Axisymmetrical Circular Plate by the Acoustical Wave Propagator Technique", **Journal of Sound and Vibration** v. 296, pp. 1013-1027, 2006.
- [7] DEY, S., S., RAO, T. "Transient Response of Circular Plates and Membranes: a Numerical Approach", **International Journal of Mechanic Science** v.39, n.12, pp. 1405-1413, 1997.
- [8] WANG, C., Y. "Axisymmetrically Supported Heavy Circular Plate", **Thin-Walled Structures** v.42, pp. 1709-1718, 2004.
- [9] WANG, C., M., XIANG, Y., WATANABE, E., UTSUNOMIYA, T. "Mode Shapes and Stress-Resultants of Circular Mindlin Plates With Free Edges", **Journal of Sound and Vibration** v. 276, pp. 511-525, 1995.
- [10] LEE, J., SCHULTZ, W., W. "Eigenvalue Analysis of Timoshenko Beams and Axisymmetrical Mindlin Plates by the Pseudospectral Method", **Journal of Sound and Vibration** v. 269, pp. 609-621, 2004.
- [11] WANG, C., M. "Relationships Between Mindlin and Kirchhoff Bending Solutions for Tapered Circular and Annular Plates", **Engineering Structures** v.19, n.3, pp. 255-258, 1997.
- [12] WANG, C., M., LEE, K., H. "Deflection and Stress-Resultants of Axisymmetric Mindlin Plates in Terms of Corresponding Kirchhoff Solutions", **International Journal of Mechanic Science** v.38, n.11, pp. 1179-1185, 1996.

- [13] XIANG, Y. "Exact Vibration Solutions for Circular Mindlin Plates with Multiple Concentric Ring Supports", **International Journal of Solids and Structures** v. 39, pp. 6081-6102, 2002.
- [14] MA, Y., K., ANG, K., K. "Free Vibration of Mindlin Plates Based on the Relative Displacement Plate Element", **Finite Elements in Analysis and Design** v.42, pp. 1021-1028, 2006.
- [15] HANG, L. T. T., WANG, C. M., WU, T. Y. "Exact Vibration Results for Stepped Circular Plates with Free Edges", **International Journal of Mechanical Sciences** v. 47, pp. 1224-1248, May 2005
- [16] LIU, F.-L., LIEW K., M. "Differential Quadrature Element Method for Static Analysis of Reissner-Mindlin Polar Plates", **International Journal of Solids and Structures** v. 36, pp. 5101-5123, 1999.
- [17] KULKARNI, V., S., DESHMUKH, K., C. "Quasi-Static Thermal Stresses in a Thick Circular Plate", **Applied Mathematical Modeling** In Press.
- [18] LI, S.-R., ZHOU, Y.-H. "Shooting Method for Non-linear Vibrations and Thermal Buckling of Heated Orthotropic Circular Plates", **Journal of Sound and Vibration** v. 248, n. 2, pp. 379-386, Nov. 2001
- [19] HATERBOUCH, M., BENAMAR, R. "The Effects of Large Amplitudes on the axisymmetric mode shapes and natural frequencies of clamped thin isotropic circular plates. Part I: Iterative and Explicit Analytical Solution for Non-Linear Transverse Vibrations", **Journal of Sound and Vibration** v. 265, pp. 123-154, 2002.
- [20] HATERBOUCH, M., BENAMAR, R. "The Effects of Large Amplitudes on the axisymmetric mode shapes and natural frequencies of clamped thin isotropic circular plates. Part II: Iterative and Explicit Analytical Solution for Non-Linear Coupled Transverse and In-Plane Vibrations", **Journal of Sound and Vibration** v. 277, pp. 1-30, 2003.
- [21] MA, L., S., WANG, T., J. "Nonlinear Bending and Post-Buckling of a Functionally Graded Circular Plate under Mechanical and Thermal Loadings", **International Journal of Solids and Structures** v. 40, pp. 3311-3330, 2003.
- [22] TZOU, H., S., ZHOU, Y., H. "Dynamics and Control of Non-Linear Circular Plates With Piezoelectric Actuators", **Journal of Sound and Vibration** v. 188, n. 2, pp. 189-207, 1995.
- [23] KAPURIA, S., DUMIR, P., C. "Geometrically nonlinear axisymmetric Response of Thin Circular Plate under Piezoelectric Actuation", **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** v.10, pp. 411-423, 2005.

- [24] LI, Q., S., LIU, J., XIAO, H., B. "A New Approach for Bending Analysis of Thin Circular Plates with Large Deflections", **International Journal of Mechanical Sciences** v.46, pp. 173-180, 2004.
- [25] ARAFAT, H., N., NAYFEH, A., H., FARIS, W. "Natural Frequencies of Heated Annular and Circular Plates", **International Journal of Solids and Structures** v. 41, pp. 3031-3051, 2004.
- [26] NAJAFIZADEH, M., M., HEYDARI, H., R. "Thermal Buckling of Functionally Graded Circular Plates Based on Higher Order Shear Deformation Plate Theory", **European Journal of Mechanics** v. 23, pp. 1085-1100, 2004.
- [27] GRAÇA, M., S., B., A., GARCIA, L., F., T. "Aplicação do Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Placas Retangulares Espessas." In: **XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural**, Brasília, Maio 2002
- [28] FREY, W., H. "Flexible Finite-Difference Stencils from Isoparametric Finite Elements", **International Journal for Numerical Methods in Engineering** v. 11, pp. 1653-1665, 1977.
- [29] COURANT, R., FRIEDRICHS, K., KEWY, H. "Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik", **Math. Ann. in** v. 100, pp. 32-74, 1928.
- [30] HOUBOLT, J., C., **Study of Several Aerothermoelastic Problems of Aircraft Structures in High Speed Flight**. Zurich, Switzerland, Leeman, 1958.
- [31] KOCATÜRK, T., ALTITAS, G. "Determination of the Steady State Response of Viscoelastically Point-Supported Rectangular Specially Orthotropic Plate by an Energy-Based Finite Difference Method ", **Journal of Sound and Vibration** v. 267, pp. 1143-1156, 2003.
- [32] AKSU, G., FELEMBAN, M., B. "Frequency Analysis of Corner Point Supported Mindlin Plates by a Finite Difference Energy Method", **Journal of Sound and Vibration** v. 158, n. 3, pp. 531-544, 1992.
- [33] BUSHNELL, D., ALMROTH, Bo., O., BROGAN, F. "Finite-Difference Energy Method for Nonlinear Shell Analysis", **Computers & Structures** v. 20, n. 4, pp. 683-697, 1985.
- [34] SINGH, J., P., DEY, S., S. "Variational Finite Difference Approach to Buckling of Plates of Variable Stiffness", **Computers & Structures** v. 36, n.1, pp. 39-45, 1990.
- [35] VERMA, A., K., DEY, S., S. "Integrated Analysis of Curved Bridge Superstructures by Variational Finite Difference Method", **Computers & Structures** v. 38, n.5-6, pp. 597-603, 1991.

- [36] SILVA, L., M., G., **Aplicação de Diferenças Finitas Energéticas em Placas com o Uso de Malhas Arbitrárias**. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1988
- [37] FIELDING, L., M., VILLAÇA, S., F., GARCIA, L., F., T. “Energetic Finite Difference with Arbitrary Meshes to Plate-Bending Problems”, **Applied Mathematical Modeling** v.21, pp. 691-698, Nov. 1997.
- [38] LIMA, J. M. F., GARCIA, L.F.T., VILLAÇA, S. F. “Análise Numérica da Flambagem por Flexo-Torção em Hastes de Paredes Delgadas com Seção Aberta.” In: **XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural**, Brasília, Maio 2002
- [39] LIMA, J. M. F., **Estudo Comparativo entre Formulações Geometricamente Não Lineares para Flexo-Torção de Hastes de Paredes Delgadas de Seção Aberta**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004
- [40] COSTA, F. P., **Análise Numérica da Flexão Dinâmica de Vigas com a Consideração de Deformabilidade por Cortante e da Inércia de Rotação**. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1998
- [41] GRAÇA, M. S. B. A., **Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise Estática e Dinâmica de Placas Delgadas e Espessas**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000
- [42] DIAS, C. A. C., **Comparação Numérica da Teoria de Vlasov em Vigas e Pórticos de Paredes Delgadas com Seção Aberta**. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001
- [43] MITTELBAACH, F. R., **Método das Diferenças Finitas Energéticas na Análise de Reservatórios Cilíndricos**. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2002
- [44] WROBEL, L. C., **Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method**. Ph. D. Thesis, University of Southampton, England, 1981
- [45] ZHONG, W., JIANING Z., ZHONG, X. “On a New Time Integration Method for Solving Time Dependent Partial Differential Equations”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** v. 130, pp. 163-168, 1996.
- [46] FUNG, T., C. “A precise Time-Step Integration Method by Step-Response and Impulsive-Response Matrices for Dynamic Problems”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering** v. 40, pp. 4501-4527, 1997.
- [47] MANSUR, W., J., FERREIRA, W., G., VENANCIO, F., CLARET, A., M., CARRER, J., A., M. “Time-Segmented Frequency Domain Analysis for Non-Linear Multi-Degree-of-Freedom Structural Systems”, **Journal of Sound and Vibration** v.237, n.3, pp. 457-475, 2000.

- [48] SOARES JR., D., MANSUR, W., J. "A Frequency-Domain FEM Approach Based on Implicit Green's Functions for Non-Linear Dynamic Analysis", **International Journal of Solids and Structures** v.42, pp. 6003-6014, 2005.
- [49] SOARES JR., D., MANSUR, W., J., ESTORFF, O., V. "An Efficient Time-Domain FEM/BEM Coupling Approach Based on FEM Implicit Green's Functions and Truncation of BEM Time Convolution Process", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** v.196, pp. 1816-1826, 2007.
- [50] LOUREIRO, F. S., **Método de Integração Temporal Baseado no Cálculo Numérico de Funções de Green Através do Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007
- [51] MANSUR, W., J., LOUREIRO, F., S., SOARES JR., D., DORS, C. "Explicit time-domain approaches based on numerical Green's functions computed by finite differences - The ExGA family Source", **Journal of Computational Physics** v.227, n.1, pp. 851-870, 2000.
- [52] DORS, C., **Propagação de Ondas Elásticas Utilizando Funções de Green Numéricas Locais em Modelos Discretizados por Elementos Finitos**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007
- [53] CHIA, C.-Y., **Nonlinear Analysis of Plates**. New York, McGraw-Hill, 1980.
- [54] MINDLIN, R., D. "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates", **Journal of Applied Mechanics** v.18, pp. 31-38, 1951.
- [55] TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J.N., **Theory of Elasticity**. 3 ed. New York, McGraw-Hill, 1970.
- [56] TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S., **Theory of Plates and Shells**. 2 ed. New York, McGraw-Hill, 1959.
- [57] GARCIA, L. F. T., **Uma Contribuição ao Estudo da Flexão de Barras com Forte não Linearidade Geométrica**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1987.
- [58] BATHE, K.-J., **Finite Element Procedures**. New Jersey, Prentice Hall, 1996.
- [59] TAYLOR, R. L., **A Finite Element Analysis Program - Version 7.5 - User Manual**. Berkeley, University of California at Berkeley, 2005.
- [60] KREIDER, D., L., KULLER R. G., OSTBERG, D.R., **Elementary Differential Equations**. EUA, Addison-Wesley, 1968.
- [61] CHADWICK, P., **Continuum Mechanics: Concise Theory and Problems**. New York, Dover Publications, 1999.
- [62] SYMON, K., R., **Mechanics**. EUA, Addison-Wesley, 1982.

- [63] MANSUR, W. J., **A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method**. Ph. D. Thesis, University of Southampton, England, 1983
- [64] WEMPNER, G., **Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies**. Rockville, Maryland, Sijthoff & Noordhoff, 1981.
- [65] GARCIA, L. F., T., **Elasticidade Não Linear Teoria Geral e Aplicações**. Rio de Janeiro, Letra Capital, 2007.
- [66] YANG, Y., SHIEH, M. "Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points", **American Institute of Aeronautics and Astronautics** v.28, n.12, pp. 2110-2116, 1990.
- [67] RIKS E. "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", **International Journal of Solids and Structures** v.15, pp. 529-551, 1979.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)