



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS  
UTILIZANDO O ELEMENTO FINITO DE  
TIMOSHENKO COM REFINAMENTO  
*P*-ADAPTATIVO**

***RANGEL FERREIRA DO NASCIMENTO***

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**

**Orientador: PROF. DR. AMARILDO TABONE PASCHOALINI**

março de 2005.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

À Deus, aos meus pais Ari Pereira do Nascimento  
e Otilia Ferreira do Nascimento.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Amarildo Tabone Paschoalini, pelo apoio, incentivo, amizade e experiência que contribuíram para que este trabalho fosse realizado com êxito.

Aos colegas de pós-graduação em Engenharia Mecânica PPGEM pelo convívio profissional.

Aos docentes e funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica pela contribuição na realização deste trabalho e pelo incentivo.



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>26</b>
<b>2 ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS DE CLASSE <math>C_0</math>. ELEMENTOS LAGRANGEANOS.....</b>	<b>31</b>
2.1 Introdução.....	31
2.2 Formulação isoparamétrica .....	34
2.2.1 Conceito de interpolação paramétrica .....	34
2.2.2 Formulações superparamétrica, isoparamétrica e subparamétrica.....	36
2.3 Formulações subparamétrica hierárquica .....	36
2.4 Integração Numérica .....	43
<b>3 VIGAS ESTRUTURAIS .....</b>	<b>45</b>
3.1 Hipóteses da teoria de viga de Euler Bernoulli .....	45
3.2 Hipóteses da teoria de viga de Timoshenko.....	46
3.2.1 Principio de trabalhos virtuais.....	49
3.2.2 Elementos finitos para flexão de vigas de Timoshenko.....	50
3.2.3 Campo de deslocamento do elemento paramétrico.....	52
3.3 Deslocamento axial de vigas.....	54
3.3.1 Principio de trabalhos virtuais.....	55
3.3.2 Campo de deslocamento axial do elemento paramétrico .....	56
3.4 Estado de deformação.....	58
<b>4 DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES .....</b>	<b>63</b>
4.1 Determinação da matriz de rigidez do elemento .....	63
4.1.1 Determinação da matriz $[K_{ij}]$ .....	64

4.1.2	Determinação da matriz $[K_{iso,hm}]$ .....	69
4.1.3	Determinação da matriz $[K_{hm,iso}]$ .....	74
4.1.4	Determinação da matriz $[K_{hm,hq}]$ .....	74
4.2	Determinação da matriz de massa do elemento .....	77
4.2.1	Determinação da matriz $[M_{ij}]$ .....	78
4.2.2	Determinação da matriz $[M_{iso,hm}]$ .....	80
4.2.3	Determinação da matriz $[M_{hm,iso}]$ .....	82
4.2.4	Determinação da matriz $[M_{hm,hq}]$ .....	83
<b>5</b>	<b>TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS</b> .....	<b>85</b>
5.1	Introdução .....	85
5.2	Matriz de transformação isoparamétrica .....	85
5.3	Matriz de transformação hierárquica de segundo grau ( $m = 2$ ) .....	88
5.4	Matriz de transformação hierárquica de terceiro grau ( $m = 3$ ) .....	92
5.5	Matriz de transformação hierárquica de quarto grau ( $m = 4$ ) .....	96
<b>6</b>	<b>FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA</b> .....	<b>102</b>
6.1	Introdução .....	102
6.2	Determinação das matrizes de rigidez e de massa globais .....	102
6.3	Análise dinâmica .....	104
<b>7</b>	<b>ESTIMADORES DE ERRO</b> .....	<b>109</b>
7.1	Introdução .....	109
7.2	Estimadores de erro a-posteriori .....	109
7.3	Processos $p$ -adaptativos hierárquicos .....	115
7.4	Erro calculado .....	116
7.5	Análise hierárquica .....	117
7.5.1	Análise de erro .....	120

7.6 O problema de autovalor generalizado .....	124
--	-----

## 8 RESULTADOS NUMÉRICOS..... 128

8.1 Introdução.....	125
8.2 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	125
8.2.1 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $\gamma = 0.5$ .....	137
8.2.2 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $\gamma = 0.6$ .....	139
8.2.3 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $\gamma = 0.7$ .....	142
8.2.4 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $\gamma = 0.8$ .....	145
8.2.5 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $\gamma = 0.9$ .....	148
8.3 Viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro .....	151
8.4 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) .....	156
8.4.1 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.5$ .....	160
8.4.2 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.6$ .....	162
8.4.3 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta=0.005$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	164
8.4.4 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta=0.005$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	167
8.4.5 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	169
8.5 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) .....	172
8.5.1 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.5$ .....	176
8.5.2 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0$ .....	178
8.5.3 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	180
8.5.4 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	183
8.5.5 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	185
8.6 Pórtico plano com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) .....	187
8.6.1 Pórtico plano com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	192
8.7 Pórtico plano com estimador de erro ( $\beta = 0.05$ ) .....	195
8.7.1 Pórtico plano com estimador de erro ( $\beta = 0.05$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	198
8.8 Pórtico plano com estimador de erro ( $\beta = 0.1$ ) .....	201

8.8.1 Pórtico plano com estimador de erro ( $\beta = 0.1$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	204
--	-----

<b>9 CONCLUSÃO .....</b>	<b>207</b>
--------------------------	------------

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>209</b>
---	------------

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b> Elemento finito isoparamétrico de dois nós.....	29
<b>Figura 1.2</b> Elemento finito isoparamétrico de dois nós com funções hierárquicas.....	29
<b>Figura 2.1</b> Definição do sistema de coordenadas naturais $\mathbf{x}$ . Geometria real (a) enormalizada do elemento (b).....	32
<b>Figura 2.2</b> Elementos unidimensionais e funções de interpolação do tipo padrão: linear (a), quadrática (b) e cúbica (c).....	38
<b>Figura 2.3</b> Funções de interpolação e variáveis para as aproximações linear (a), hierárquica quadrática (b) e hierárquica cúbica (c).....	42
<b>Figura 3.1</b> Viga convencional de Euler Bernoulli. ....	45
<b>Figura 3.2</b> Teoria de flexão de vigas de Timoshenko. Deformação de uma reta normal à linha neutra.....	46
<b>Figura 3.3</b> Teoria de vigas de Timoshenko. Distribuição de tensões normais e tangenciais. Acordo de sinais para o momento fletor e o esforço cortante. ....	48
<b>Figura 3.4</b> Valor do coeficiente de distorção $\alpha$ para tipos diferentes de seções de viga.....	49
<b>Figura 3.5</b> Elemento de viga de Timoshenko de dois nós. ....	50
<b>Figura 3.6</b> Elemento de viga de dois nós com deslocamento axial. ....	55
<b>Figura 5.1</b> Deslocamentos e rotações do elemento de viga de Timoshenko no sistema de coordenadas local (a) e no sistema de coordenadas global (b).....	85
<b>Figura 6.1</b> Elementos com funções hierárquicas de 2°, 3° e 4° graus.....	108
<b>Figura 7.1</b> Elementos $e_1$ e $e_2$ com função hierárquica de 2° grau. ....	117
<b>Figura 7.2</b> Elemento $e_1$ com um grau de liberdade hierárquico de 2° grau.....	118
<b>Figura 7.3</b> Elemento $e_1$ com dois graus de liberdades hierárquicos de 2° grau. ....	119

<b>Figura 7.4</b>	Elemento $e_1$ com três graus de liberdades hierárquicos de 2° grau. ....	119
<b>Figura 7.5</b>	Elemento $e_2$ com três graus de liberdades hierárquicos de 2° grau. ....	120
<b>Figura 7.6</b>	Elemento $e_2$ com função hierárquica de 2° grau.....	122
<b>Figura 7.7</b>	Elementos com graus de liberdades hierárquicos de 2° grau após a primeira reanálise..	123
<b>Figura 7.8</b>	Elementos com graus de liberdades hierárquicos de 3° grau.....	124
<b>Figura 8.1</b>	Viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	126
<b>Figura 8.2</b>	Primeira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	127
<b>Figura 8.3</b>	Segunda frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	128
<b>Figura 8.4</b>	Terceira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	129
<b>Figura 8.5</b>	Quarta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	130
<b>Figura 8.6</b>	Quinta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	131
<b>Figura 8.7</b>	Sexta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	132
<b>Figura 8.8</b>	Sétima frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	133
<b>Figura 8.9</b>	Oitava frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	134
<b>Figura 8.10</b>	Nona frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	135
<b>Figura 8.11</b>	Décima frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	136
<b>Figura 8.12</b>	Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e $\gamma = 0.5$ . ....	137
<b>Figura 8.13</b>	Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 6 elementos e $\gamma = 0.5$ . ....	138

<b>Figura 8.14</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 8 elementos e $\gamma = 0.5$ .	138
<b>Figura 8.15</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 10 elementos e $\gamma = 0.5$ .	139
<b>Figura 8.16</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e $\gamma = 0.6$ .	140
<b>Figura 8.17</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 6 elementos e $\gamma = 0.6$ .	140
<b>Figura 8.18</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 8 elementos e $\gamma = 0.6$ .	141
<b>Figura 8.19</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 10 elementos e $\gamma = 0.6$ .	142
<b>Figura 8.20</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e $\gamma = 0.7$ .	143
<b>Figura 8.21</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 6 elementos e $\gamma = 0.7$ .	143
<b>Figura 8.22</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 8 elementos e $\gamma = 0.7$ .	144
<b>Figura 8.23</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 10 elementos e $\gamma = 0.7$ .	145
<b>Figura 8.24</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e $\gamma = 0.8$ .	146
<b>Figura 8.25</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 6 elementos e $\gamma = 0.8$ .	146
<b>Figura 8.26</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 8 elementos e $\gamma = 0.8$ .	147
<b>Figura 8.27</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 10 elementos e $\gamma = 0.8$ .	148
<b>Figura 8.28</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e $\gamma = 0.9$ .	148

<b>Figura 8.29</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 6 elementos e $\gamma = 0.9$ .	149
<b>Figura 8.30</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 8 elementos e $\gamma = 0.9$ .	150
<b>Figura 8.31</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 10 elementos e $\gamma = 0.9$ .	150
<b>Figura 8.32</b> Viga de seção retangular biapoiada.	151
<b>Figura 8.33</b> Primeira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.	152
<b>Figura 8.34</b> Segunda frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.	153
<b>Figura 8.35</b> Terceira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.	154
<b>Figura 8.36</b> Quarta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.	155
<b>Figura 8.37</b> Primeira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.005$ .	156
<b>Figura 8.38</b> Segunda frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.005$ .	157
<b>Figura 8.39</b> Terceira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.005$ .	158
<b>Figura 8.40</b> Quarta frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro. e $b = 0.005$ .	159
<b>Figura 8.41</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.5$ .	160
<b>Figura 8.42</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.5$ .	161
<b>Figura 8.43</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.5$ .	161
<b>Figura 8.44</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.5$ .	162



<b>Figura 8.45</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.6$ .....	162
<b>Figura 8.46</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.6$ .....	163
<b>Figura 8.47</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.6$ .....	163
<b>Figura 8.48</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.6$ .....	164
<b>Figura 8.49</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	165
<b>Figura 8.50</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	165
<b>Figura 8.51</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	166
<b>Figura 8.52</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	166
<b>Figura 8.53</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	167
<b>Figura 8.54</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	168
<b>Figura 8.55</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	168
<b>Figura 8.56</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	169
<b>Figura 8.57</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	169
<b>Figura 8.58</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	170
<b>Figura 8.59</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	171

<b>Figura 8.60</b> Primeira primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	171
<b>Figura 8.61</b> Primeira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	172
<b>Figura 8.62</b> Segunda frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	173
<b>Figura 8.63</b> Terceira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	174
<b>Figura 8.64</b> Quarta frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	175
<b>Figura 8.65</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.5$ .....	176
<b>Figura 8.66</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.5$ .....	177
<b>Figura 8.67</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.5$ .....	177
<b>Figura 8.68</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.5$ .....	178
<b>Figura 8.69</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.6$ .....	178
<b>Figura 8.70</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.6$ .....	179
<b>Figura 8.71</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.6$ .....	179
<b>Figura 8.72</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.6$ .....	180
<b>Figura 8.73</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	181
<b>Figura 8.74</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	181

<b>Figura 8.75</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	182
<b>Figura 8.76</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.7$ .....	182
<b>Figura 8.77</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	183
<b>Figura 8.78</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	184
<b>Figura 8.79</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	184
<b>Figura 8.80</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	185
<b>Figura 8.81</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	185
<b>Figura 8.82</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	186
<b>Figura 8.83</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	186
<b>Figura 8.84</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.9$ .....	187
<b>Figura 8.85</b> Pórtico plano composto por seis vigas iguais.....	188
<b>Figura 8.86</b> Primeira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	189
<b>Figura 8.87</b> Segunda frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	190
<b>Figura 8.88</b> Terceira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	191
<b>Figura 8.89</b> Quarta frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	192
<b>Figura 8.90</b> Primeira reanálise para as quatro frequências do pórtico com 6 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	193

<b>Figura 8.91</b> Primeira reanálise para as quatro frequências do pórtico com 12 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	193
<b>Figura 8.92</b> Primeira reanálise para as quatro frequências do pórtico com 24 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	194
<b>Figura 8.93</b> Primeira reanálise para as quatro frequências do pórtico com 48 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	194
<b>Figura 8.94</b> Primeira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.05$ .....	195
<b>Figura 8.95</b> Segunda frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.05$ .....	196
<b>Figura 8.96</b> Terceira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.05$ .....	197
<b>Figura 8.97</b> Quarta frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.05$ .....	198
<b>Figura 8.98</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 6 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.05$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	199
<b>Figura 8.99</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 12 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.05$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	199
<b>Figura 8.100</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 24 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.05$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	200
<b>Figura 8.101</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 48 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.05$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	200
<b>Figura 8.102</b> Primeira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.1$ .....	201
<b>Figura 8.103</b> Segunda frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.1$ .....	202
<b>Figura 8.104</b> Terceira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.1$ .....	203
<b>Figura 8.105</b> Quarta frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.1$ .....	204

<b>Figura 8.106</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 6 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.1$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	205
<b>Figura 8.107</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 12 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.1$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	205
<b>Figura 8.108</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 24 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.1$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	206
<b>Figura 8.109</b> Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 48 elementos e com estimador de erro ( $b = 0.1$ ) e $\gamma = 0.8$ .....	206

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 2.1</b> Pontos de integração e coeficientes de ponderação para a quadratura de Gauss - Legendre supondo um intervalo $[-1,1]$ .....	44
<b>Tabela 8.1</b> Propriedades da viga .....	126
<b>Tabela 8.2</b> Primeira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	127
<b>Tabela 8.3</b> Segunda frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade. ....	128
<b>Tabela 8.4</b> Terceira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade. ....	129
<b>Tabela 8.5</b> Quarta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	130

<b>Tabela 8.6</b> Quinta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	131
<b>Tabela 8.7</b> Sexta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	132
<b>Tabela 8.8</b> Sétima frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	133
<b>Tabela 8.9</b> Oitava frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	134
<b>Tabela 8.10</b> Nona frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.....	135
<b>Tabela 8.11</b> Décima frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade. ....	136
<b>Tabela 8.12</b> Variação de $b$ .....	151
<b>Tabela 8.13</b> Primeira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro. ....	152
<b>Tabela 8.14</b> Segunda frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro. ....	153
<b>Tabela 8.15</b> Terceira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro. ....	154
<b>Tabela 8.16</b> Quarta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro. ....	155
<b>Tabela 8.17</b> Primeira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.005$ .....	156
<b>Tabela 8.18</b> Segunda frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.005$ .....	157
<b>Tabela 8.19</b> Terceira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.005$ .....	158
<b>Tabela 8.20</b> Quarta frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.005$ .....	159

<b>Tabela 8.21</b> Primeira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	172
<b>Tabela 8.22</b> Segunda frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	173
<b>Tabela 8.23</b> Terceira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	174
<b>Tabela 8.24</b> Quarta frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	175
<b>Tabela 8.25</b> Propriedades da viga.....	188
<b>Tabela 8.26</b> Primeira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	189
<b>Tabela 8.27</b> Segunda frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	190
<b>Tabela 8.28</b> Terceira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	191
<b>Tabela 8.29</b> Quarta frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.01$ .....	192
<b>Tabela 8.30</b> Primeira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.05$ .....	195
<b>Tabela 8.31</b> Segunda frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.05$ .....	196
<b>Tabela 8.32</b> Terceira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.05$ .....	197
<b>Tabela 8.33</b> Quarta frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.05$ .....	198
<b>Tabela 8.34</b> Primeira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.1$ .....	201
<b>Tabela 8.35</b> Segunda frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.1$ .....	202

<b>Tabela 8.36</b> Terceira frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.1$ .....	202
<b>Tabela 8.37</b> Quarta frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e $b = 0.1$ .....	204

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área da seção transversal.
$I$	Momento de inércia.
$q$	Rotação da seção normal.
$f$	Giro adicional devido a deformação por cortante.
$e_x$	Extensão.



$\mathbf{g}_{xz}$	Distorção.
$\mathbf{s}_x$	Tensão normal.
G	Modulo de elasticidade transversal.
$\mathbf{c}$	Curvatura do eixo da viga.
M	Momento fletor.
Q	Esforço cortante.
$\mathbf{a}$	Coeficiente de forma.
$A^*$	Área reduzida.
$dW_i^f$	Trabalho interno associado a flexão.
$dW_i^c$	Trabalho interno associado a cortante.
$dW_i^e$	Trabalho externo.
$[M]$	Matriz de massa.
$[K]$	Matriz de rigidez.
$ J $	Determinante da matriz Jacobiano.
$w, u$	Deslocamentos dos nós do elemento.
$[\tilde{N}_{hm}(\mathbf{x})]$	Matriz constituída das funções de forma hierárquicas.
$\{a_i\}$	Matriz dos deslocamentos e das rotações de cada nó do elemento.
$\{\tilde{a}_{hm}\}$	Matriz dos parâmetros hierárquicos.
$[B^a]$	Matriz relacionada a deformação axial.
$[B^f]$	Matriz relacionada a flexão.
$[B^c]$	Matriz relacionada a cortante.
$[B_{hm}^a], [B_{hm}^c], [B_{hm}^f]$	Matrizes das derivadas das funções de forma hierárquicas.
$[BA], [BC], [BF]$	Matrizes constituídas das derivadas das funções de isoparamétricas e hierárquicas de 2°, 3° e 4° graus.
$W_p$	Fator de ponderação da integração numérica.
$[K_{iso,hm}], [M_{iso,hm}]$	Matrizes que caracterizam o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e o hierárquico.
$[K_{hm,iso}], [M_{hm,iso}]$	Matrizes que caracterizam o acoplamento entre o elemento o hierárquico e o isoparamétrico.

$[K_{hm,hq}], [M_{hm,hq}]$	Matrizes que caracterizam o acoplamento o elemento o hierárquico .
$\{a\}$	Vetor relacionado com os deslocamentos nodais e parâmetros hierárquicos.
$\{\ddot{a}\}$	Vetor relacionado com as acelerações nodais e parâmetros hierárquicos.
$\{f\}$	Vetor de carga.
$\omega$	Frequência angular.
$\lambda_i$	Autovalores.
$\{\phi_i\}$	Autovetores.
$[\Lambda]$	Matriz diagonal que contém os autovalores.
$[\Phi]$	Matriz que contém os autovetores.
$\{\bar{a}_{iso}\}$	Coordenadas no sistema local.
$\{a_{iso}\}$	Coordenadas no sistema global.
$[T_{iso}]$	Matriz de transformação isoparamétrica.
$[K_{iso}], [M_{iso}]$	Matrizes de rigidez e massa, respectivamente no sistema de coordenada global..
$\{\bar{a}_{h2}\}, \{a_{h2}\}$	Coordenadas hierárquicas de segundo grau no sistema local e global respectivamente.
$[T_{h2}]$	Matriz de transformação hierárquica de segundo grau.
$[K_2], [M_2]$	Matrizes de rigidez e massa hierárquicas de segundo grau, respectivamente no sistema de coordenada global.
$\{\bar{a}_{h3}\}, \{a_{h3}\}$	Coordenadas hierárquicas de terceiro grau no sistema local e global respectivamente.
$[T_{h3}]$	Matriz de transformação hierárquica de terceiro grau.
$[K_3], [M_3]$	Matrizes de rigidez e massa hierárquicas de terceiro grau, respectivamente no sistema de coordenada global.
$\{\bar{a}_{h4}\}, \{a_{h4}\}$	Coordenadas hierárquicas de quarto grau no sistema local e global respectivamente.
$[T_{h4}]$	Matriz de transformação hierárquica de quarto grau.
$[K_4], [M_4]$	Matrizes de rigidez e massa hierárquicas de quarto grau, respectivamente no sistema de coordenada global.
$[K]$	Matriz de rigidez.
$W_p$	Fator de ponderação da integração numérica.

$m$	Número total de pontos de integração.
$\mathbf{h}_i^{n+1}$	Indicador de erro associado a um grau de liberdade hierárquico.
$\mathbf{h}_i^{n+1} \max$	Maior indicador positivo de erro relacionado à solução atual.
$\mathbf{g}$	Constante fornecida pelo usuário.
$\mathbf{e}_g$	Estimativa de erro global.
$\mathbf{e}_{tol}$	Tolerância fornecida como dado de entrada.

## RESUMO

# **ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS UTILIZANDO O ELEMENTO FINITO DE TIMOSHENKO COM REFINAMENTO $P$ - ADAPTATIVO**

Este trabalho apresenta um processo  $p$ -adaptativo, baseado na versão paramétrica do método dos Elementos Finitos, aplicado na resolução do problema dinâmico de autovalor generalizado em vigas. O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento finito isoparamétrico de viga de Timoshenko de dois nós, utilizando funções de interpolação lineares. Para outros níveis de aproximação são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos acrescentando funções de segundo, terceiro e quarto grau, conforme as informações adquiridas na análise de erros  $a$ -posteriori. A distribuição seletiva de novos graus de liberdade hierárquicos nos elementos mais carentes de refinamento se processa em função da utilização de um indicador de erro. Para avaliar o erro global de uma solução considera-se um estimador de erro. Exemplos numéricos são usados para demonstrar a eficiência e alta taxa de convergência do processo  $p$ -adaptativo

***Palavras chave:*** Método dos Elementos Finitos, Refinamento  $p$ -adaptativo, Viga.

**ABSTRACT**

# **DYNAMIC ANALYSIS OF BEAMS USING THE TIMOSHENKO FINITE ELEMENT WITH $P$ -ADAPTIVE REFINEMENT**

This work presents a  $p$ -adaptive process, based on the parametric version of the Finite Element Method, applied in the resolution of the generalized eigenvalue problem of beams. The first level of approximation for the solution is obtained through the isoparametric linear two-node beam finite element, based on the Timoshenko theory. For other approximation levels, successive refinements are used, increasing hierarchical shape functions of second, third and fourth degrees, according to the information acquired in the analysis of  $a$ -posteriori error. The selective distribution of new hierarchical degrees of freedom is processed in function of the use of an error indicator. To evaluate the global error of a solution is considered an error estimator. Numeric examples are used to demonstrate the effectiveness and convergence of the  $p$ -adaptive process.

***Keywords:*** *Finite Element Method,  $p$ -adaptive refinement, Beam.*

# 1 INTRODUÇÃO

Pode-se dizer que as vigas foram um elemento de sustentação criado pelo homem, ainda que inconscientemente. Viga é uma estrutura linear que trabalha em posição horizontal ou inclinada, assentada em um ou mais apoios e que tem a função de suportar os carregamentos normais à sua direção.

Pode-se dizer que o astrônomo italiano Galileo Galilei (1564-1642), iniciou a idade da razão em análise estrutural Kinney(1982). Aparentemente foi o primeiro a estudar a resistência dos sólidos dando origem a Mecânica dos Materiais. Em sua última publicação, *Duas Novas Ciências* (1638), discutia o problema da viga engastada carregada com seu peso próprio com peso adicional, este problema se conhece como o “Problema de Galileu”, no qual sua análise obteve resultados incorretos e não foi resolvido de maneira apropriada até 1855. Robert Hooke (1635-1703) estudou a elasticidade dos materiais e formulou em 1660 a lei que todos conhecem e leva seu nome, a “Lei de Hooke”, publicada em 1676. Como resultado de seus estudos, inventou a mola espiral que substituiu o pêndulo dos mecanismos dos relógios. Em 1680, Edme Mariotte (1654-1684) desenvolveu, independentemente, essa mesma lei e a aplicou às fibras de uma viga; observando que umas fibras se encurtavam e outras se esticavam, desenvolvendo o conceito de “linha neutra”. O Problema de Galileo voltou a ser estudado por James Bernoulli (1654-1705), que supôs que uma secção plana de uma viga, permanece plana durante a flexão, mas não chegou a uma solução satisfatória porque não deu importância ao que hoje conhecemos como “linha neutra”. Em 1717, Johann Bernoulli (1667-1748), irmão de James, enunciou o “Princípio dos Deslocamentos Virtuais”, que é o método que ainda hoje aplicamos na determinação das deflexões elásticas em estruturas; posteriormente, seu filho Daniel Bernoulli (1700-1782), estudou o problema da determinação da curva elástica de barras flexionadas, e inspirou seu amigo Leonhard Euler (1707-1783), na determinação das curvas elásticas em vigas e colunas, contribuições que utilizamos até hoje. Após estes primeiros estudiosos vários pesquisadores, Charles Coulomb (1736-1806), Lamè (1795-1870), B.P.E. Clapeyron (1799-1864), Barrè de Saint-Venant (1797-1886), Agustín Louis Cauchy (1789-1857), William John Macquorn Rankine (1820-1872), Otto Christian Mohr (1835-1918), entre outros, desenvolveram ou aperfeiçoaram formulações aplicadas na análise estrutural, sobretudo no estudo de vigas.

A viga é tratada como um modelo unidimensional, fazendo-se a hipótese que o comprimento é bem maior que as dimensões da seção transversal. Observa-se que a análise de

vigas é bastante comum em problemas de engenharia, tornando-se fundamental o estudo de sua formulação. Para esta finalidade, geralmente, consideram-se os modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. A diferença básica entre estes modelos está relacionada ao fato que a formulação de Euler-Bernoulli não considera a deformação de cisalhamento presente nas seções transversais. Para incluir este efeito, deve-se considerar o modelo de Timoshenko.

O incentivo em estudar os problemas de vigas de Timoshenko está na contribuição em melhorar a eficiência do Método dos Elementos Finitos na análise de vibrações livres. Nos últimos anos a modelagem e o controle de vibrações de estruturas flexíveis têm sido alvo de estudos por vários pesquisadores: Yang (1994), Aldraihem (1996) e Lima Jr. (1997).

Para vigas esbeltas o elemento de viga de Timoshenko é incapaz de produzir resultados da teoria de vigas de Bernoulli Oñate (1992). Assim à medida que o comprimento aumenta se produz o fenômeno de “sobre rigidez” numérica que curiosamente, vai cada vez tomando maior importância na solução. O elemento de viga de Timoshenko funciona bem, para viga onde a relação comprimento e altura são elevadas.

Muitas vezes o método de elementos finitos demonstra ser uma técnica numérica muito utilizada para a solução de problemas em engenharia, no entanto um modelo impróprio de elementos finitos pode produzir erros significativos na solução.

É muito difícil definir a data em que determinado avanço do conhecimento foi efetuado. No caso particular do Método dos Elementos Finitos, é referido por vários autores que a publicação mais antiga em que é utilizada a designação “elemento finito” é o artigo de Clough (1960). Anteriormente eram já conhecidas algumas técnicas que vieram a ser incorporadas no Método dos Elementos Finitos, sem ainda possuir as principais características de hoje. Os grandes passos do desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos, que o conduziram ao formato que atualmente apresenta maior aceitação, foram dados na década de 60 e início da de 70. Inicialmente os elementos finitos mais comuns eram os triangulares e os tetraédricos, passando-se mais tarde a dar preferência aos quadriláteros e aos hexaédricos.

Ao contrário de outros métodos que eram utilizados no passado, o Método dos Elementos Finitos só tem utilidade prática se dispuser de um computador digital. Este requisito é devido à grande quantidade de cálculos que é necessário realizar, especificamente na resolução de grandes sistemas de equações lineares. Assim se compreende que o rápido desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos tenha praticamente coincidido com a utilização de computadores nos centros de pesquisa. Com a “proliferação” de

micro-computadores ocorrida no final da década de 80 e na década de 90, o Método dos Elementos Finitos chega finalmente às mãos dos projetistas de estruturas Azevedo (2003).

Nota-se na breve história que sempre houve uma procura em melhorar o método para obter melhores resultados com um mínimo custo computacional. Atualmente estudam a convergência da solução em muitos problemas em engenharia utilizando processos de refinamento na análise por elementos finitos.

No processo de refinamento convencional do Método dos Elementos Finitos, o qual é chamado de refinamento  $h$ , a malha de elementos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho  $h$  dos elementos. Neste processo, o número e o tipo de funções de interpolação sobre cada elemento mantêm-se fixos. Esta é a prática comum na análise por elementos finitos, que consiste em resolver um problema várias vezes. Normalmente, a utilização deste tipo de refinamento aumenta o custo da análise, bem como produz erros relacionados a arredondamentos associados às subdivisões demasiadamente refinadas dos elementos da malha.

No segundo processo de refinamento, conhecido como refinamento  $p$ , o número e a distribuição de elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos. No entanto, o número e o grau das funções de interpolação, as quais devem ser polinômios completos de ordem  $p$ , são aumentados progressivamente.

O refinamento do tipo  $h$  tem sido extensivamente examinado na literatura matemática e utilizado, por muitos anos, nas aplicações em engenharia. Recentemente, muitas pesquisas têm sido realizadas para o desenvolvimento de processos de refinamento  $p$  Babuska (1989), Leino (1994), Campion (1996), Liu (1998), Paschoalini (1999). Tem-se observado que a qualidade de aproximação da solução e o custo computacional são vantagens que a versão  $p$  de refinamento oferece em relação à versão  $h$ .

O processo convencional de refinamento tipo  $p$  do Método dos Elementos Finitos se baseia na discretização do sistema em elementos, cuja ordem é dependente das funções de interpolação. Neste caso, se novas variáveis físicas devem ser introduzidas nos elementos, novas funções de interpolação devem ser obtidas no lugar das anteriores. Desta forma, embora o número de elementos da discretização original permaneça fixo, o número total de nós deve ser aumentado progressivamente. Geralmente, esta técnica produz dificuldades em razão da necessidade da geração de novas malhas de elementos.

Para superar as dificuldades mencionadas anteriormente, nos últimos anos, têm-se estudado alguns procedimentos adaptativos de refinamento  $p$ , baseados na formulação



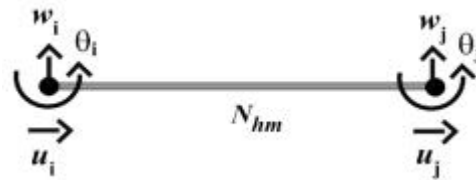
paramétrica hierárquica do Método dos Elementos Finitos, proposta por Zienkiewicz (1971) e examinada por Peano (1976). Nestes procedimentos, a introdução de novas funções de interpolação de grau variável nos elementos se faz conservando inalteradas as funções de interpolação anteriores. Esta é a característica de importância fundamental em processos de refinamento hierárquico versão  $p$  do Método dos Elementos Finitos. As funções de interpolação que apresentam esta característica são chamadas de funções de interpolação hierárquicas e os elementos cujas variáveis físicas são interpoladas por estas funções são chamados de elementos hierárquicos.

O objetivo deste trabalho é utilizar, no primeiro nível de aproximação da solução, o elemento finito isoparamétrico de viga com dois nós formulado a partir da Teoria de Vigas de Timoshenko, apresentado na Figura 1.1. Sendo que em cada nó consideram-se três graus de liberdade, dois deslocamentos e uma rotação  $(u_i, w_i)$ ,  $(u_j, w_j)$ ,  $q_i$  e  $q_j$ .



**Figura 1.1** Elemento finito isoparamétrico de dois nós

Para outros níveis de aproximação serão realizados sucessivos refinamentos hierárquicos introduzindo nos elementos funções de formas hierárquicas de segundo ( $m = 2$ ), terceiro ( $m = 3$ ) e quarto ( $m = 4$ ) graus, Figura 1.2, obtidas através do polinômio de Legendre, Zienkiewicz (1983).



**Figura 1.2** Elemento finito isoparamétrico de dois nós com funções hierárquicas

Com a utilização dessas funções de forma hierárquicas será possível estimar e controlar os erros provenientes da discretização da malha.

O procedimento proposto neste trabalho e implementado no Método dos Elementos Finitos, tem capacidade de fazer uma estimativa de erro  $a$ -posteriori, com base em informações obtidas em soluções anteriores. Trabalhando com elementos hierárquicos, é

possível definir estimadores de erro *a-posteriori*, que consistem de um estimador de erro global, que serve para avaliar a precisão global da solução e de um indicador de erro que tem a finalidade de indicar as regiões da malha para as quais é necessário fazer refinamentos, podendo assim estimar e controlar os erros provenientes da discretização da malha.

## 2 ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS DE CLASSE $C_0$ . ELEMENTOS LAGRANGEANOS

### 2.1 Introdução

Serão introduzidos os conceitos básicos do método de elementos finitos utilizando elementos unidimensionais de dois nós. As funções de forma desses elementos são vistas como polinômios de primeiro grau. Evidentemente, a interpolação polinomial garante que o deslocamento axial é contínuo dentro do elemento e entre os elementos. Os elementos que satisfazem esses requisitos de continuidade se denominam de classe  $C_0$ . Pode-se exigir que o elemento tenha derivada primeira contínua no deslocamento axial, neste caso denomina-se classe  $C_1$ . Em geral um elemento é de classe  $C_m$  se o campo de deslocamento tem as  $m$  primeiras derivadas contínuas. Evidentemente podem existir elementos unidimensionais de classe  $C_0$  baseados em polinômios de diferentes graus. Serão estudadas as técnicas gerais de obtenções das funções de forma desses elementos.

Em um elemento unidimensional, a aproximação polinomial de uma variável  $u(x)$  pode ser escrita na forma geral:

$$u(x) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x + \mathbf{a}_2 x^2 + \dots \quad (2.1)$$

na qual  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots$ , são constantes.

Tomando um polinômio de primeiro grau, tem-se:

$$u(x) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x \quad (2.2)$$

para calcular as duas constantes  $\mathbf{a}_0$  e  $\mathbf{a}_1$  precisa-se de duas condições, o que necessariamente implica que o elemento associado ao desenvolvimento da Equação (2.2) deve ter dois nós (uma condição para cada nó). Deste modo para um elemento linear de comprimento  $l^{(e)}$ , com o nó 1 em  $x = x_1$  e o nó 2 em  $x = x_2$ , Figura 2.1, tem-se:

$$u(x_1) = u_1 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x_1 \quad (2.3a)$$

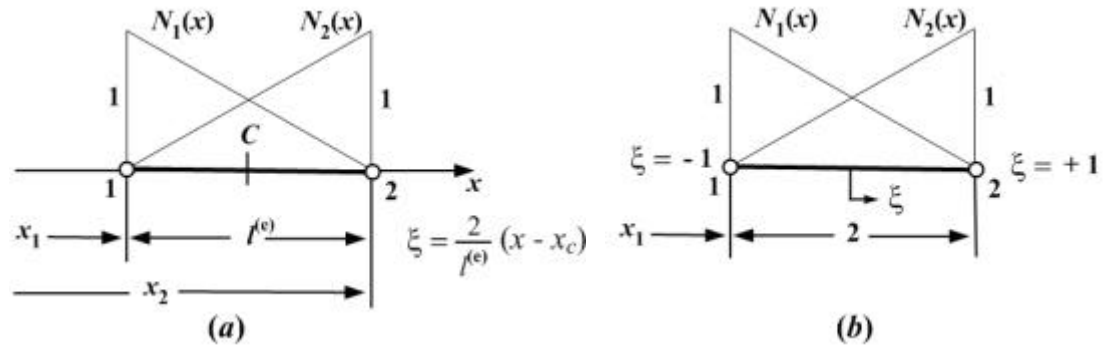
$$u(x_2) = u_2 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x_2 \quad (2.3b)$$

na qual  $u_1$  e  $u_2$ , são os valores dos deslocamentos axiais dos nós 1 e 2 respectivamente. Ajustando  $\mathbf{a}_0$  e  $\mathbf{a}_1$  e substituindo na Equação (2.1), obtém-se:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 \quad (2.4)$$

na qual

$$N_1(x) = \frac{(x_2 - x)}{l^{(e)}} ; \quad N_2(x) = \frac{(x - x_1)}{l^{(e)}} \quad (2.5)$$



**Figura 2.1** Definição do sistema de coordenadas naturais  $x$ . Geometria real (a) e normalizada do elemento (b).

Evita-se ter que resolver um sistema de equações para obter as funções de forma do elemento unidimensional de classe  $C_0$  fazendo uso das propriedades dos polinômios de Lagrange. Esses polinômios tomam um determinado valor em um ponto e zero em um conjunto de pontos prefixados Oñate (1992). Normalizando este valor para a unidade e fazendo coincidir os pontos com a posição dos nós, as funções de forma coincidem precisamente com os polinômios de Lagrange, estes elementos se denominam Lagrangeanos. A função de forma do nó  $i$  do elemento Lagrangeano unidimensional de  $n$  nós é obtido diretamente pela Equação (2.6a).

$$N_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad (2.6a)$$

ou simplesmente por,

$$N_i(x) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left( \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) \quad (2.6b)$$

Por exemplo, para um elemento de dois nós encontra-se as seguintes funções de forma,

$$N_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{(x_2-x)}{l^{(e)}} \quad (2.7)$$

$$N_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{(x-x_1)}{l^{(e)}} \quad (2.8)$$

Introduzindo um sistema de coordenadas naturais ou normalizado, baseado na variável  $\mathbf{x}$  como mostra a Figura 2.1.

$$\mathbf{x} = 2 \frac{x-x_C}{l^{(e)}} \quad (2.9)$$

sendo  $x_C$  a coordenada do centro do elemento, de maneira que:

$\mathbf{x} = -1$  é o extremo esquerdo do elemento

$\mathbf{x} = 0$  é o ponto central do elemento

$\mathbf{x} = 1$  é o extremo direito do elemento

A Equação (2.9) transforma a geometria real do elemento em uma geometria normalizada em que o comprimento do elemento é igual a 2. Agora se pode expressar as funções de forma nesta nova geometria e livrar-se da obtenção das mesmas na geometria real do elemento, que é de grande interesse prático. Por analogia com a Equação (2.6) a expressão geral de  $N_i(\mathbf{x})$  pode ser escrita como:

$$N_i(x) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad (2.10)$$

Portanto, para um elemento Lagrangeano de dois nós com  $x_1 = -1$  e  $x_2 = +1$ , tem-se,

$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}(1 - x) \quad (2.11)$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + x) \quad (2.12)$$

Substituindo nas Equações (2.11) e (2.12) o valor de  $x$  obtido da Equação (2.9) recupera-se a expressão cartesiana das funções de forma das Equações (2.7) e (2.8).

## 2.2 Formulação isoparamétrica

Uma vez estudada a obtenção geral das funções de forma dos elementos unidimensionais de classe  $C_0$  mais habitual, é um momento oportuno de introduzir dois importantes conceitos.

O primeiro conceito é de formulação paramétrica. A idéia é interpolar a geometria do elemento a partir das coordenadas de uma série de pontos conhecidos. Esta interpolação é essencial para obter uma relação geral entre as coordenadas naturais e as cartesianas.

O segundo conceito é a integração numérica. Na maioria dos casos práticos os cálculos analíticos das integrais dos elementos não são triviais e a integração numérica é a única opção para avaliar de modo preciso e simples estas integrais.

### 2.2.1 Conceitos de interpolação paramétrica

Por simplicidade, tomando como exemplo um elemento de barra linear de dois nós, o deslocamento axial em um ponto do elemento se expressa por:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 \quad (2.13)$$

Observa-se que foi adotada a expressão normalizada das funções de forma. Por outro lado, a deformação  $\epsilon$  é obtida da seguinte forma.

$$\mathbf{e} = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1(\mathbf{x})}{dx} u_1 + \frac{dN_2(\mathbf{x})}{dx} u_2 \quad (2.14)$$

Para o cálculo da deformação é necessário conhecer a derivada de  $N_i$  com relação a coordenada cartesiana  $x$ . Este cálculo é imediato se as funções de forma são expressas em função de  $x$ . Em geral não é necessária a utilização do sistema de coordenadas naturais.

Deste modo a avaliação dessas derivadas implica nas seguintes operações:

$$\frac{dN_1(\mathbf{x})}{dx} = \frac{dN_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dx} = \frac{d}{d\mathbf{x}} \left( \frac{1-\mathbf{x}}{2} \right) \frac{d\mathbf{x}}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d\mathbf{x}}{dx} \quad (2.15)$$

$$\frac{dN_2(\mathbf{x})}{dx} = \frac{dN_2(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dx} = \frac{d}{d\mathbf{x}} \left( \frac{1+\mathbf{x}}{2} \right) \frac{d\mathbf{x}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{x}}{dx} \quad (2.16)$$

Com isso a expressão de deformação da Equação (2.14) é da forma,

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dx} \right) u_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dx} \right) u_2 \quad (2.17)$$

Para completar o cálculo de  $\mathbf{e}$  é necessário avaliar  $d\mathbf{x}/dx$ , que exige conhecer a relação explícita entre  $x$  e  $\mathbf{x}$ . Esta relação pode ser obtida através de uma interpolação paramétrica da geometria do elemento. Se as coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de  $m$  pontos quaisquer do elemento são conhecidas, pode-se calcular a coordenada de qualquer ponto do elemento interpolando os valores das coordenadas conhecidas. Esta interpolação pode ser escrita na forma

$$x = \hat{N}_1(\mathbf{x}) x_1 + \hat{N}_2(\mathbf{x}) x_2 + \dots + \hat{N}_m(\mathbf{x}) x_m \quad (2.18)$$

Se deduz da equação anterior que  $\hat{N}_i(\mathbf{x})$  são funções de interpolação geométrica que satisfazem os mesmos requisitos que as funções de forma utilizadas para interpolar o campo de deslocamento, ou seja,  $\hat{N}_i(\mathbf{x})$  deve tomar o valor unitário em um ponto  $i$  e zero nos

demais  $m-1$  pontos. Então, as funções  $\hat{N}_i(\mathbf{x})$  são obtidas através da Equação (2.10) baseado no número de pontos escolhidos para interpolar a geometria.

Observa-se que a Equação (2.18) proporciona diretamente a relação entre as coordenadas  $x$  e  $\mathbf{x}$  procuradas, também pode ser interpretada como a transformação de coordenadas  $\mathbf{x} \rightarrow x$  de maneira que cada ponto do espaço normalizado  $[-1,1]$  corresponde a outro no espaço cartesiano  $[x_1, x_2]$ . É fundamental que essa transformação seja biunívoca, e que em geral depende da geometria do elemento.

### 2.2.2 Formulações superparamétrica, isoparamétrica e subparamétrica

Como foi visto, um elemento possui duas classes de pontos: os utilizados para interpolar o campo de deslocamento (nós), que definem as funções de forma  $N_i$  e os utilizados para interpolar a geometria do elemento, que definem as funções de interpolação da geometria  $\hat{N}_i$ .

Estes pontos podem não ser coincidentes dependendo da característica do problema:

se  $m$  é maior que o número de nós do elemento, as funções geométricas  $\hat{N}_i$  serão polinômios de maior grau que as funções de forma  $N_i$  utilizadas para interpolar os deslocamentos, e a formulação então recebe o nome de superparamétrica;

se  $m$  coincide com o número de nós do elemento,  $N_i \equiv \hat{N}_i$ , a formulação se denomina isoparamétrica.

e  $m$  é menor que o número de nós do elemento, as funções de interpolação da geometria  $\hat{N}_i$  serão polinômios de menor grau que as funções de forma  $N_i$  utilizadas para interpolar os deslocamento, e a formulação recebe o nome de subparamétrica.

### 2.3 Formulação subparamétrica hierárquica

O procedimento mais usual do método dos elementos finitos está em definir as funções de interpolação do campo de deslocamento de maneira que as incógnitas  $u_i$  representem os valores nodais do deslocamento. Este tipo de procedimento traz desvantagens quando se deseja aumentar a ordem da aproximação do elemento, pois neste caso, as funções de interpolação deveriam ser modificadas completamente. Para evitar este tipo de problema é



possível definir funções de interpolação de ordem variável que, quando introduzidas na aproximação  $u$  da Equação (2.13), não alterem as funções  $N_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) anteriormente definidas da formulação convencional. Por adquirir esta importante característica, essas funções de interpolação  $N_{hm}(\mathbf{x})$  ( $hm > n$ ) de ordem variável, que são introduzidas na aproximação de  $u$ , são chamadas de funções de interpolação hierárquicas.

A formulação subparamétrica hierárquica do método dos elementos finitos difere da formulação convencional devido ao emprego de funções de interpolação hierárquicas de grau variável Peano (1979), Zienkiewicz (1983). Essas funções são introduzidas nos elementos, principalmente, com o objetivo de se fazer o refinamento na solução obtida pelo método convencional dos elementos finitos. Na literatura Babuska (1979), Peano (1976), Babuska (1981) este procedimento é denominado de versão  $p$  do método dos elementos finitos, devido ao emprego de funções de interpolação hierárquicas de grau variável  $hm$ .

Uma das grandes vantagens do refinamento hierárquico está no fato de que o esforço computacional torna-se menor na obtenção de novas soluções Rossow (1978). As funções de interpolação utilizadas em um nível de aproximação de ordem  $hm$  permanecem inalteradas, quando se tenta obter uma aproximação de ordem mais alta, com a introdução de novas funções de ordem  $hm + k$ , ou seja:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n+nhm} N_i(\mathbf{x}) u_i \quad (2.19)$$

na qual  $nhm$  é o número de parâmetros hierárquicos inseridos. Por exemplo, em problemas de vibrações livres se obtém o seguinte sistema de equações:

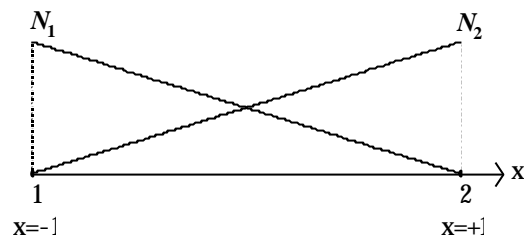
$$([K]_{n+nhm, n+nhm} - I[M]_{n+nhm, n+nhm}) \{u\}_{n+nhm} = \{0\} \quad (2.20)$$

ou na forma matricial,

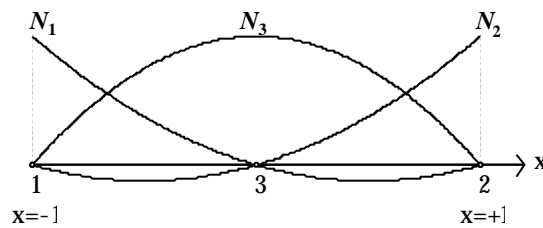
$$\left( \begin{bmatrix} [K]_{n,n} & [K]_{n,nhm} \\ [K]_{nhm,n} & [K]_{nhm,nhm} \end{bmatrix} - I \begin{bmatrix} [M]_{n,n} & [M]_{n,nhm} \\ [M]_{nhm,n} & [M]_{nhm,nhm} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u\}_n \\ \{u\}_{nhm} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2.21)$$

na qual as matrizes  $[K]_{n,n}$  e  $[M]_{n,n}$  e o vetor deslocamento  $\{u\}_n$  correspondem à solução em um nível de aproximação anterior, não precisando, portanto, serem recalculados.

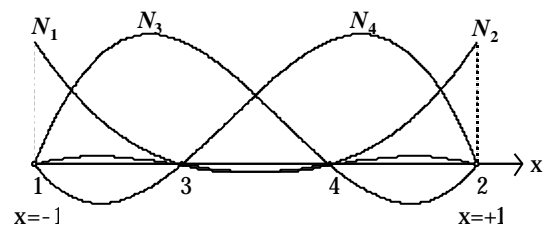
A Figura (2.2) mostra um conjunto de elementos unidimensionais e a forma das funções de interpolação para aproximação linear, quadrática e cúbica. Funções deste tipo são conhecidas como funções padrão pelo fato de dependerem do número de nós utilizados em um certo nível de aproximação, ou seja, elas tomam formas totalmente diferentes quando se deseja passar de um grau para outro.



(a)



(b)



(c)

**Figura 2.2** Elementos unidimensionais e funções de interpolação do tipo padrão: linear (a), quadrática (b) e cúbica (c).

A aproximação linear mostrada na Figura (2.2a) é dada por

$$u(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})u_1 + N_2(\mathbf{x})u_2 \quad (2.22)$$

na qual

$$N_1(\mathbf{x}) = \frac{1-\mathbf{x}}{2} \quad (2.23)$$

$$N_2(\mathbf{x}) = \frac{1+\mathbf{x}}{2} \quad (2.24)$$

A aproximação quadrática mostrada na Figura (2.2b) é dada por

$$u(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})u_1 + N_2(\mathbf{x})u_2 + N_3(\mathbf{x})u_3 \quad (2.25)$$

na qual

$$N_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}}{2} \quad (2.26)$$

$$N_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}}{2} \quad (2.27)$$

$$N_3(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{x}^2 \quad (2.28)$$

A aproximação cúbica mostrada na Figura (2.2c) é dada por

$$u(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})u_1 + N_2(\mathbf{x})u_2 + N_3(\mathbf{x})u_3 + N_4(\mathbf{x})u_4 \quad (2.29)$$

na qual

$$N_1(\mathbf{x}) = \frac{9}{16}(\mathbf{x}^2 - \frac{1}{9})(1 - \mathbf{x}) \quad (2.30)$$

$$N_2(\mathbf{x}) = \frac{9}{16}(\mathbf{x}^2 - \frac{1}{9})(1 + \mathbf{x}) \quad (2.31)$$

$$N_3(\mathbf{x}) = \frac{27}{16}(\mathbf{x}^2 - 1)(\mathbf{x} - \frac{1}{3}) \quad (2.32)$$

$$N_4(\mathbf{x}) = \frac{27}{16}(1 - \mathbf{x}^2)(\mathbf{x} + \frac{1}{3}) \quad (2.33)$$

Nota-se, portanto que a dificuldade é evidente quando se deseja construir funções de interpolação do tipo padrão de alta ordem. Para evitar este tipo de problema, pode-se usar funções de interpolação hierárquicas  $N_{hm}(\mathbf{x})$  ( $hm > n$ ) que são independentes do número de pontos usados na definição da geometria do elemento.

Na formulação subparamétrica hierárquica do método dos elementos finitos, funções de interpolação do tipo padrão são utilizadas apenas em um primeiro nível de aproximação da solução. Para outros níveis de aproximação as demais funções do tipo padrão,  $N_i(\mathbf{x})$ , podem ser substituídas por funções de interpolação hierárquicas,  $N_{hm}(\mathbf{x})$ .

Para o caso considerado do elemento unidimensional, uma aproximação quadrática hierárquica do elemento será dada;

$$u(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})u_1 + N_2(\mathbf{x})u_2 + N_{h2}(\mathbf{x})u_{h2} \quad (2.34)$$

na qual  $N_1(\mathbf{x})$  e  $N_2(\mathbf{x})$  são as funções de interpolação lineares, dadas pelas Equações (2.23) e (2.24), respectivamente, e  $N_{h2}(\mathbf{x})$  é uma função de interpolação hierárquica de segundo grau que satisfaça as condições  $N_{h2}(-1) = 0$  e  $N_{h2}(+1) = 0$ . Desta forma, é mantida a continuidade  $C_0$  entre elementos. Assim, uma função de interpolação hierárquica quadrática, como mostrado na Figura (2.3b), pode ser escrita como;

$$N_{h2}(\mathbf{x}) = (1 - \mathbf{x}^2) \quad (2.35)$$

Esta função quando inserida na Equação (2.34) não modifica o nível de aproximação do elemento. Mas, no entanto, a incógnita  $u_{h2}$  deixa de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade  $u_{h2}$  é um parâmetro dependente das incógnitas nodais  $u_1$  e  $u_2$ . Por exemplo, em  $\mathbf{x} = 0$ , tem-se:

$$u(\mathbf{x} = 0) = N_1(\mathbf{x} = 0)u_1 + N_2(\mathbf{x} = 0)u_2 + N_{h2}(\mathbf{x} = 0)u_{h2} = \left(\frac{1}{2}\right)u_1 + \left(\frac{1}{2}\right)u_2 + (1)u_{h2} \quad (2.36)$$

logo, o parâmetro hierárquico  $u_{h2}$  em  $\mathbf{x} = 0$  será:

$$u_{h2} = u(\mathbf{x} = 0) - \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (2.37)$$

De maneira similar, para se obter uma aproximação hierárquica cúbica deve-se usar a Equação (2.34) acrescida do termo  $N_{h3}(\mathbf{x})u_{h3}$ , ou seja :

$$u(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})u_1 + N_2(\mathbf{x})u_2 + N_{h2}(\mathbf{x})u_{h2} + N_{h3}(\mathbf{x})u_{h3} \quad (2.38)$$

na qual  $N_{h3}(\mathbf{x})$  deve ser uma função de interpolação hierárquica cúbica que satisfaça as condições  $N_{h3}(-1) = 0$  e  $N_{h3}(+1) = 0$ . Assim, uma função de interpolação hierárquica cúbica, como mostrado na Figura (2.3c), pode ser escrita como:

$$N_{h3}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^3) \quad (2.39)$$

A identificação física do parâmetro  $u_{h3}$  torna-se difícil, mas esta identificação não é necessária. Uma forma alternativa para definir funções de interpolação hierárquicas é usar os polinômios de Legendre  $P(\mathbf{x})$ , Zienkiewicz (1983). As funções de interpolação hierárquicas podem ser encontradas em termos das integrais desses polinômios. Os polinômios de grau  $j$  são definidos por:

$$P_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{2^{j-1}} \frac{d^j}{d\mathbf{x}^j} [(\mathbf{x}^2 - 1)^j] \quad (2.40)$$

e as funções de interpolação hierárquicas  $N_{h(j+1)}$  de ordem  $m = j + 1$ , definidas por:

$$N_{h(j+1)}(\mathbf{x}) = \int_{-1}^{\mathbf{x}} P_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} ; j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.41)$$

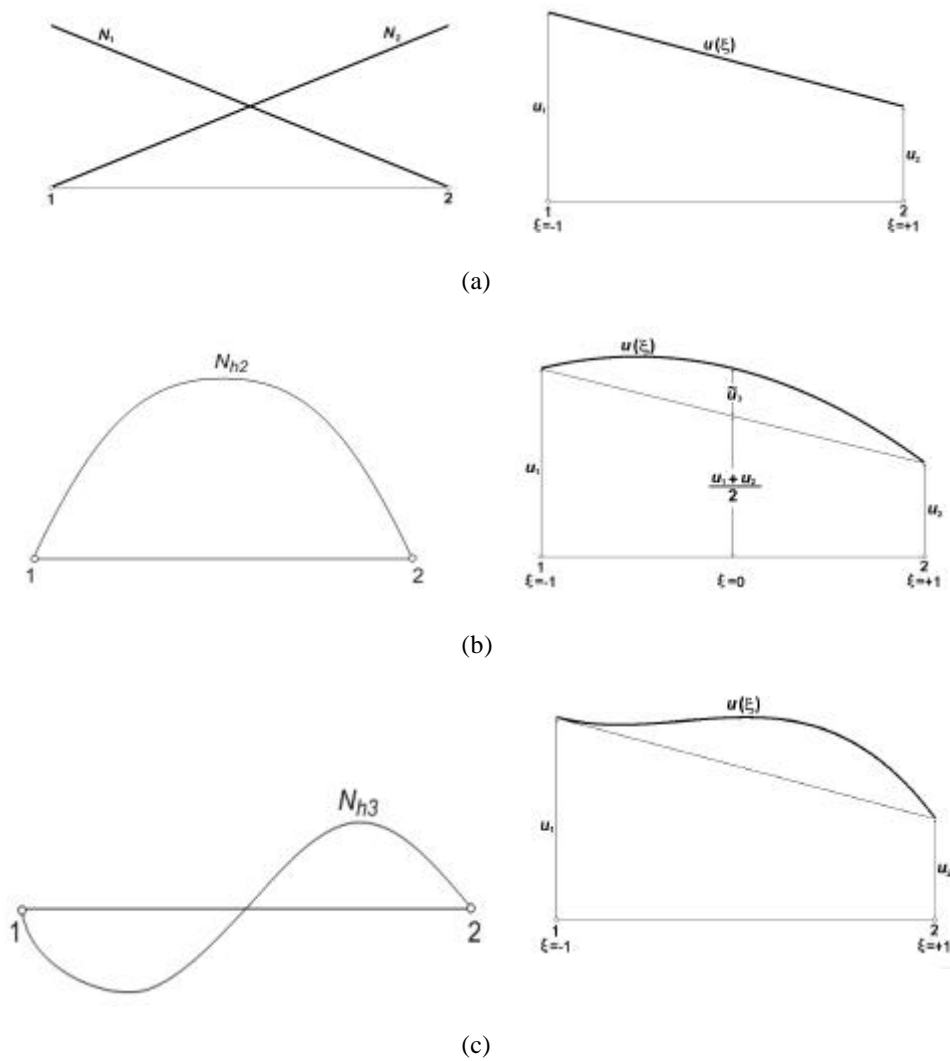
Integrando os polinômios para  $j = 1, 2, 3$ , tem-se:

$$N_{h2}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 1 \quad (2.42)$$

$$N_{h3}(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}) \quad (2.43)$$

$$N_{h4}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}(15\mathbf{x}^4 - 18\mathbf{x}^2 + 3) \quad (2.44)$$

Partindo-se de uma aproximação linear, as funções de interpolação hierárquicas dadas pelas Equações (2.42), (2.43) e (2.44), provenientes da integração dos polinômios de Legendre, apresentam a importante propriedade de ortogonalidade que conduz a sistemas de equações melhores condicionados. De maneira similar ao caso do elemento unidimensional, pode-se definir funções de interpolação hierárquicas para o elemento bidimensional.



**Figura 2.3** Funções de interpolação e variáveis para as aproximações lineares (a), hierárquica quadrática (b) e hierárquica cúbica (c).

## 2.4 Integração Numérica

A utilização de coordenadas locais permite simplificar os limites de integração no cálculo das matrizes e vetores de carregamento dos elementos finitos. No entanto, nos casos gerais, não é possível obter uma expressão analítica para estas expressões. Desta forma, torna-se necessário aplicar técnicas de integração numérica. Considerando o caso unidimensional, a integração numérica;

$$\int_a^b f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.45)$$

é efetuada tomando-se um polinômio  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  através de alguns valores de  $f(\mathbf{x})$  e usando,

$$\int_a^b \mathbf{j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.46)$$

como uma aproximação para Equação (2.45). A posição dos pontos de amostragem e o número de valores para  $f(\mathbf{x})$ , determina a qualidade da aproximação de  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  para  $f(\mathbf{x})$ , e portanto, o erro da integração numérica. Observa-se que para os elementos isoparamétricos adota-se  $a = -1$  e  $b = 1$ .

Uma das técnicas para integrar numericamente uma função é posicionar os pontos de amostragem  $\mathbf{x}_p$ , de tal forma a obter uma melhor precisão. Assim, tomando-se  $n$  pontos, tem-se  $2n$  incógnitas, ou seja,  $\mathbf{x}_p$  e  $f(\mathbf{x}_p)$ , podendo-se ajustar um polinômio de grau  $2n - 1$  para que a função seja integrada exatamente. Aplica-se, então, a Equação (2.47) com os pontos de integração e os respectivos coeficientes de ponderação apresentados na Tabela 2.1.

$$\int_{-1}^1 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{l=1}^n W_p f(\mathbf{x}_p) \quad (2.47)$$

$n$	$\pm \mathbf{x}_p$	$W_p$
1	0.0	2.0
2	0.57735 2691	1.0
3	0.77459 6692 0.0	0.5555555556 0.8888888889
4	0.8611363116 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	0.9061798459 0.5384693101 0.0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889
6	0.9324695142 0.6612093865 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346
7	0.9491079123 0.7415311856 0.4058451514 0.0	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837

**Tabela 2.1** Pontos de integração e coeficientes de ponderação para a quadratura de Gauss- Legendre supondo um intervalo [-1,1].

Esta técnica é conhecida por quadratura de Gauss-Legendre, Oñate (1992).



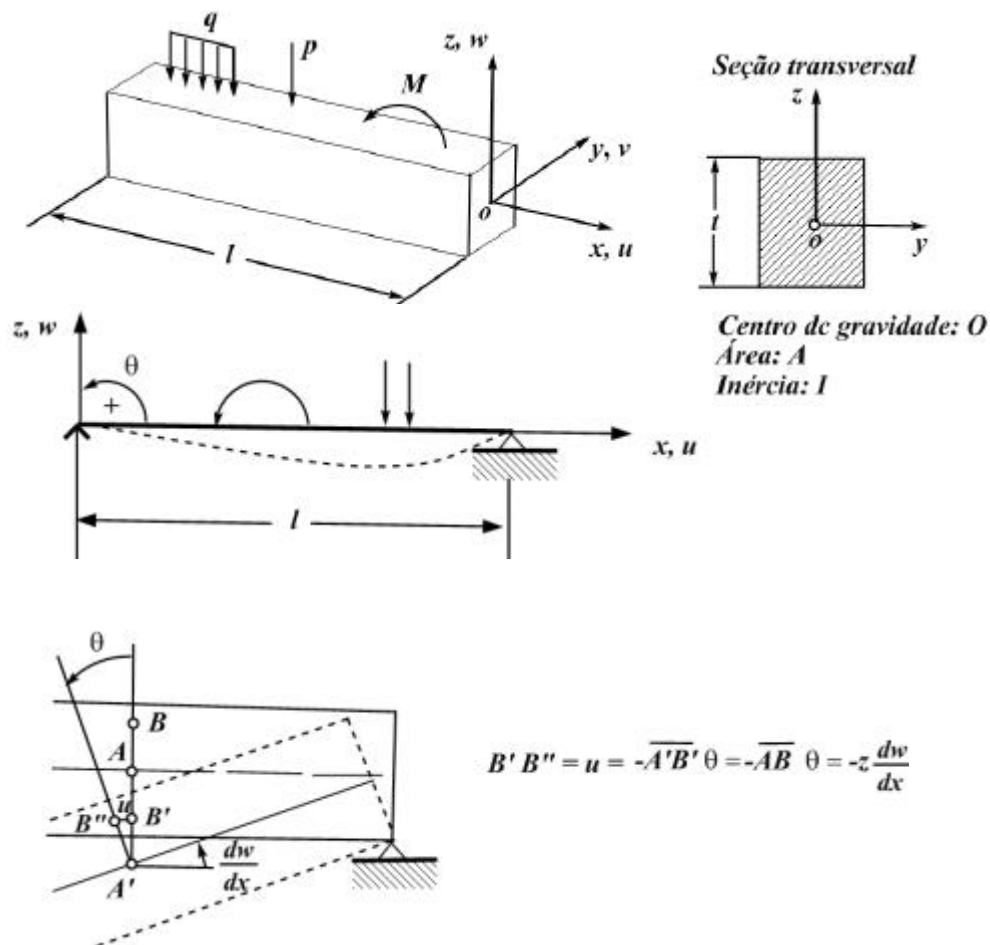
### 3 VIGAS ESTRUTURAIS

#### 3.1 Hipóteses da teoria de viga de Euler Bernoulli

Considera-se uma viga de comprimento  $L$ , de largura  $B$ , de altura  $H$ , área da seção transversal  $A$  e momento de inércia  $I$ , sobre a qual atua uma série de cargas verticais e momentos contidos no plano  $xz$ , Figura 3.1 Oñate (1992).

A teoria de vigas de Euler Bernoulli compartilha das seguintes hipóteses.

1. Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma mesma seção transversal são pequenos e iguais ao eixo da viga.
2. O deslocamento lateral (segundo o eixo  $y$  é nulo).
3. As seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação, permanecem planas e ortogonais ao eixo após a deformação.



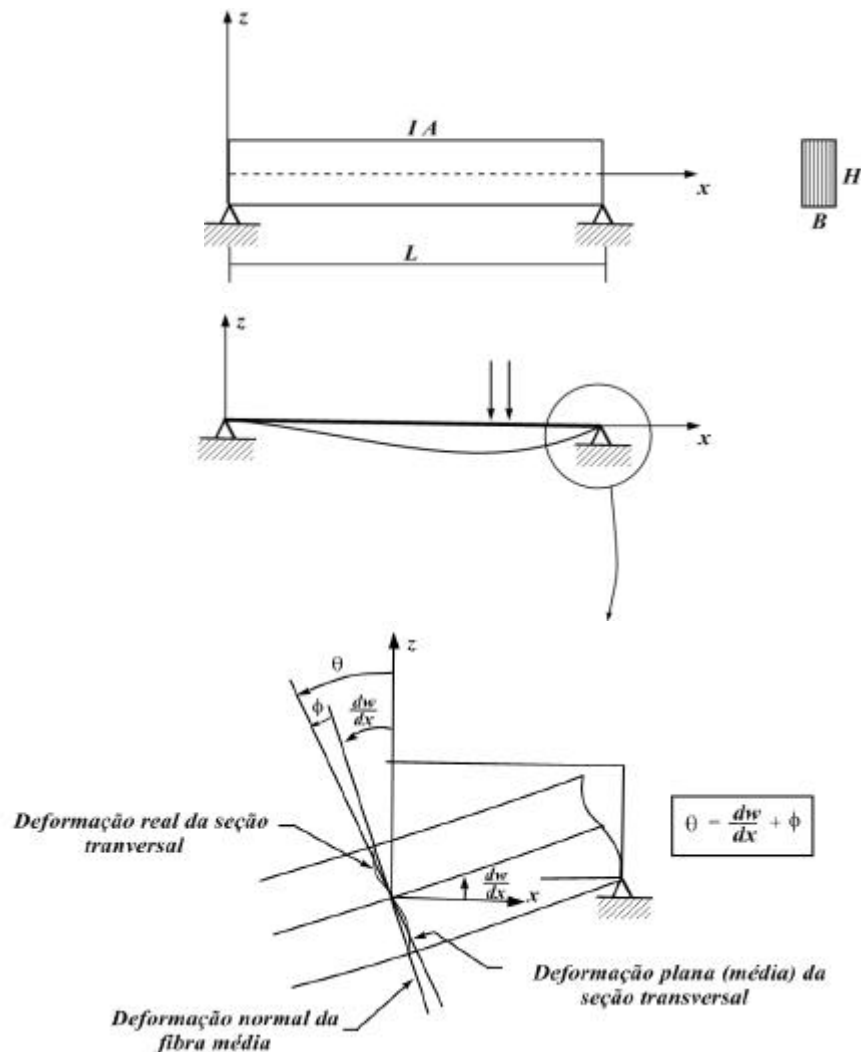
**Figura 3.1** Viga convencional de Euler Bernoulli

### 3.2 Hipóteses da teoria de viga de Timoshenko

Considera-se uma viga de comprimento  $L$ , de largura  $B$ , de altura  $H$ , área da seção transversal  $A$  e momento de inércia  $I$ , sobre a qual atua uma série de cargas verticais e momentos contidos no plano  $xz$ , Figura 3.2 Oñate (1992).

A teoria de vigas de Timoshenko compartilha das seguintes hipóteses.

1. Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma mesma seção transversal são pequenos e iguais ao o eixo da viga.
2. O deslocamento lateral (segundo o eixo  $y$  é nulo).
3. As seções planas normais para o eixo da viga antes da deformação mantêm-se planas, porém não necessariamente normais ao eixo depois da deformação, Figura 3.2.



**Figura 3.2** Teoria de flexão de vigas de Timoshenko. Deformação de uma reta normal à linha neutra.

Esta hipótese representa uma maior aproximação da deformação real da seção transversal em vigas. Na medida que a relação entre o comprimento  $L$  e altura  $H$  aumenta, as tensões de cisalhamento na direção da altura tornam-se importantes e não podem mais ser desprezadas. Na Figura 3.2 a hipótese de Timoshenko supõe tomar uma rotação média na direção da seção plana normal ao eixo da viga, de maneira que os efeitos práticos possam continuar sendo considerados planos.

Da Figura 3.2 tem-se que a rotação da seção normal pode ser expressa por,

$$\mathbf{q} = \frac{dw}{dx} + \mathbf{f} \quad (3.1)$$

na qual  $dw/dx$  é o declive da deformação do eixo da viga e  $\mathbf{f}$  um giro adicional devido à deformação por cortante, como podemos ver a seguir.

O campo de deslocamento da viga se expressa da seguinte forma.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\mathbf{q}(x) \\ v(x, y, z) &= 0 \\ w(x, y, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por outro lado, as Equações (3.1) e (3.2) mostram que as deformações não nulas são as seguintes:

$$\mathbf{e}_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d\mathbf{q}}{dx} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{g}_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx} - \mathbf{q} = -\mathbf{f}$$

na qual  $\mathbf{e}_x$  é a deformação normal  $\mathbf{g}_{xz}$  é a distorção

Conseqüentemente, a teoria de Timoshenko considera o efeito da deformação por cortante transversal, coincidindo a magnitude dessa deformação com a rotação adicional da normal  $\mathbf{f}$ .

As duas tensões não nulas  $\mathbf{s}_x$  e  $\mathbf{t}_{xz}$  se relacionam com as correspondentes deformações,

$$\mathbf{s}_x = E\mathbf{e}_x = -zE\frac{d\mathbf{q}}{dx} = -zE\mathbf{c}$$

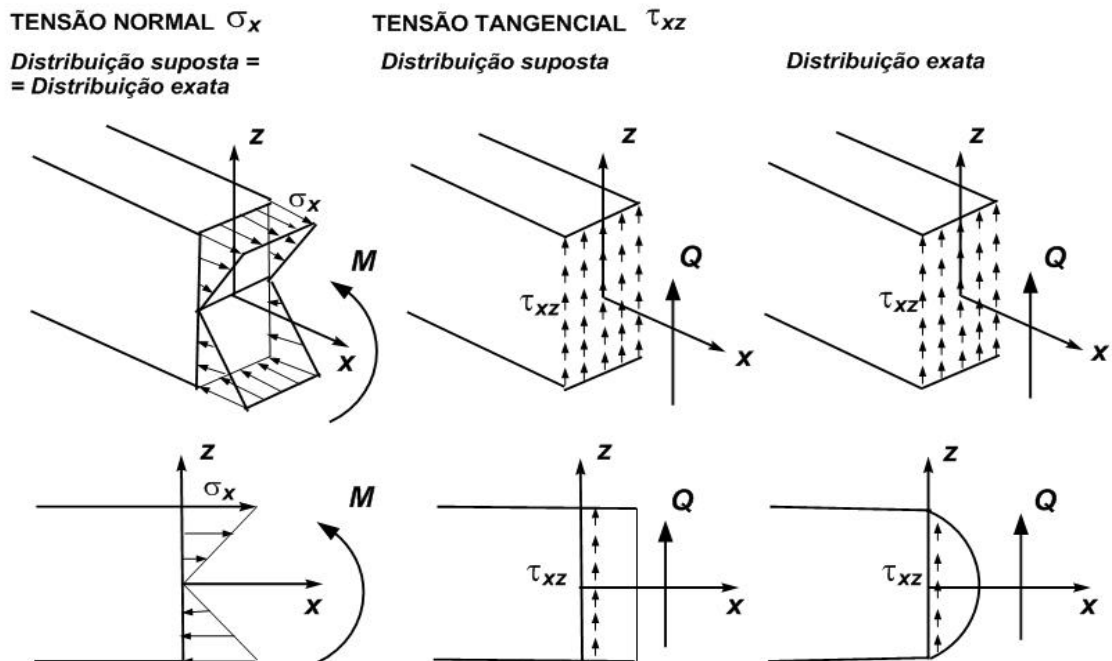
$$\mathbf{t}_{xz} = G\mathbf{g}_{xz} = G\left(\frac{dw}{dx} - \mathbf{q}\right)$$
(3.4)

na qual  $\mathbf{s}_x$  é a tensão normal,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $\mathbf{c} = d\mathbf{q}/dx$  a curvatura do eixo da viga.

O momento fletor e o esforço cortante, de acordo com os sinais da Figura 3.3, são definidos como,

$$M = -\int_A z\mathbf{s}_x dA = EI\frac{d\mathbf{q}}{dx} = EI\mathbf{c}$$

$$Q = \int_A \mathbf{t}_{xz} dA = GA \cdot \left(\frac{dw}{dx} - \mathbf{q}\right) = GA\mathbf{g}_{xz}$$
(3.5)



**Figura 3.3** Teoria de vigas de Timoshenko. Distribuição de tensões normais e tangenciais. Convenção de sinais para o momento fletor e o esforço cortante.

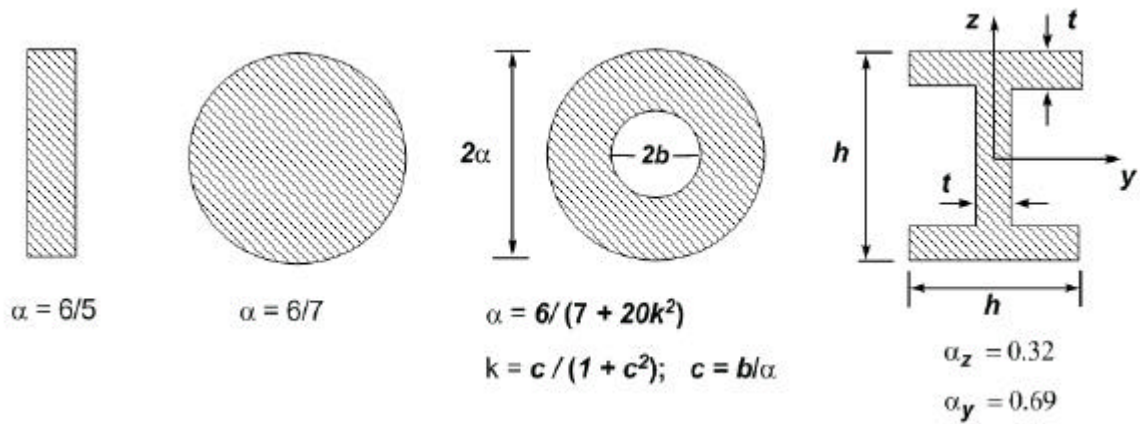
Analisando a distribuição suposta da teoria de vigas de Timoshenko e a distribuição exata das tensões normais e tangenciais Figura 3.3, observa-se que a variação linear das tensões normais  $s_x$  com altura  $H$  na teoria de vigas de Timoshenko coincide com a distribuição exata. Pelo contrario, a variação uniforme da tensão tangencial  $t_{xz}$  com a altura  $H$  da teoria de vigas de Timoshenko está em contradição com a distribuição exata. Assim, considerando que a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da altura não é uniforme, porém aproximadamente parabólica introduz-se um fator  $\alpha$ ,

$$t_{xz} = \alpha G g_{xz} \quad (3.6)$$

$$Q = \alpha A G g_{xz} = A^* G g_{xz} \quad (3.7)$$

na qual  $\alpha$  é o coeficiente de forma ou de distorção da seção, e  $A^* = \alpha A$  se denomina área reduzida.

Na Figura 3.4 são apresentados os valores dos coeficientes de distorção que dependem da geometria da seção transversal.



**Figura 3.4** Valor do coeficiente de distorção  $\alpha$  para tipos diferentes de seções de viga.

### 3.2.1 Princípio de trabalhos virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais ou princípio dos deslocamentos virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças exteriores nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação Zienkiewicz (1988), Cook (2002). De um modo mais simples é comum afirmar que o trabalho interno de deformação é igual ao trabalho externo das forças aplicadas.

$$\text{Trabalho Interno} = \text{Trabalho Externo} \quad (3.8)$$

Considerando,

$dW_i^f$  = Trabalho interno associado à flexão

$dW_i^c$  = Trabalho interno associado à cortante

$dW^e$  = Trabalho externo

De acordo com a Equação (3.8) tem-se:

$$dW_i^f + dW_i^c = dW^e \quad (3.9)$$

Com base no princípio de trabalhos virtuais Azevedo (2003), Craig (1981), tem-se:

$$[K^{(e)}] = \int_{-1}^1 [B^f]^T (EI) [B^f] |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 [B^c]^T (GA^*) [B^c] |J| d\mathbf{x} \quad (3.10)$$

$$[M^{(e)}] = \int_{-1}^1 (\mathbf{r}I) [N]^T [N] |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 (\mathbf{r}A) [N]^T [N] |J| d\mathbf{x} \quad (3.11)$$

Na qual  $[K^{(e)}]$  e  $[M^{(e)}]$  são matrizes quadradas, simétricas, denominadas matriz de rigidez e matriz de massa do elemento, respectivamente.

### 3.2.2 Elementos finitos para flexão de vigas de Timoshenko

Na figura abaixo se encontra representado um elemento de viga com dois nós.



**Figura 3.5** Elemento de viga de Timoshenko de dois nós.

Os deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito representado na Figura (3.5) são os seguintes:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

A interpolação do deslocamento  $w$  e da rotação  $\mathbf{q}$  é efetuado separadamente para cada uma destas variáveis. Uma vez que  $w$  e  $\mathbf{q}$  apresentam dois valores nodais cada, é utilizada a seguinte interpolação unidimensional com dois nós.

$$w(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})w_1 + N_2(\mathbf{x})w_2 \quad (3.13)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})\mathbf{q}_1 + N_2(\mathbf{x})\mathbf{q}_2 \quad (3.14)$$

As Equações (3.13) e (3.14) podem ser escritas na forma que se apresenta a seguir:

$$\begin{Bmatrix} w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 [N_i(\mathbf{x})] \cdot \{a_i\} \quad (3.15)$$

Na qual  $[N_i(\mathbf{x})]$  é uma matriz  $(2 \times 4)$  constituída das funções de forma  $N_i(\mathbf{x})$  apresentadas nas Equações (2.20) e (2.21),

$$[N_i(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & 0 & N_2(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_1(\mathbf{x}) & 0 & N_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

e  $\{a_i\}$  é uma matriz coluna  $(4 \times 1)$  constituída dos deslocamentos e das rotações de cada nó do elemento.

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Verifica que para cada nó do elemento estão associadas dois graus de liberdade: dois deslocamentos ( $w_1$  e  $w_2$ ) e duas rotações ( $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$ ).

### 3.2.3 Campo de deslocamento do elemento paramétrico

De uma forma geral, o refinamento da solução de um problema qualquer pode se dar através da utilização de elementos de ordem fixa, para os quais o tamanho  $h$  é sucessivamente reduzido (refinamento tipo  $h$ ), bem como, através da utilização de elementos de forma fixa, para os quais a ordem  $p$  aumenta sucessivamente (refinamento tipo  $p$ ).

No desenvolvimento deste trabalho, considera-se o refinamento tipo  $p$ , uma vez que se pretende o aprimoramento da solução sem que haja a alteração da malha de discretização. Entretanto, quando se empregam funções de forma padrão como aquelas da família Lagrangeana, a cada mudança de ordem, corresponde um aumento do numero de nós do elemento gerando conseqüentemente funções de forma totalmente diferentes para cada nível de aproximação. Se este fosse o procedimento adotado, todos os cálculos já efetuados quando da análise anterior deveriam ser repetidos ocasionando um aumento do custo computacional. Portanto, é vantajoso evitar esta dificuldade e considerar a aproximação como uma série na qual as funções de forma não mais dependem dos nós do elemento. O aumento da ordem do elemento sem o conseqüente aumento do seu número de nós pode ser obtido a partir das funções de forma hierárquicas que representam simplesmente um refinamento de ordem superior.

Assim, o refinamento da expansão quadrática especificada pela Equação (3.15) pode ser obtido adicionando funções de forma hierárquicas  $N_{hm}(\mathbf{x})$  de ordem superior a um.

Neste trabalho o refinamento da expansão quadrática será feito adicionando funções de forma hierárquicas de segundo, terceiro e quarto graus. Portanto, as funções  $N_{hm}(\mathbf{x})$  são polinômios de grau  $m$  ( $m = 2, 3, 4$ ) associados a cada elemento.

As funções de forma hierárquicas utilizadas foram definidas em termos das integrais dos polinômios de Legendre Szabo (1991), definido na Equação (2.41).

$$N_{h2}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 1 \quad (3.18)$$

$$N_{h3}(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x}^3 - \mathbf{x}) \quad (3.19)$$

$$N_{h4}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}(15\mathbf{x}^4 - 18\mathbf{x}^2 + 3) \quad (3.20)$$

Desta forma, o deslocamento dado pela Equação (3.15) para o caso do elemento isoparamétrico, torna-se:



$$\begin{Bmatrix} w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 [N_i(\mathbf{x})] \cdot \{a_i\} + \sum_{m=2}^4 [\tilde{N}_{hm}(\mathbf{x})] \cdot \{\tilde{a}_{hm}\} \quad (3.21)$$

para o caso de elemento paramétrico do tipo hierárquico. Nesta expressão,  $\{\tilde{a}_{hm}\}$  é o vetor constituído dos parâmetros hierárquicos. As funções de forma  $N_{hm}(\mathbf{x})$  quando inseridas na Equação (3.15) não modificam o nível de aproximação do elemento, mas, a incógnita  $\{\tilde{a}_{hm}\}$  deixa de ter o significado físico de variável nodal.

Se respectivamente,  $w_{hm}$  e  $\mathbf{q}_{hm}$  são as componentes do vetor  $\{\tilde{a}_{hm}\}$  a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 [N_i(\mathbf{x})] \cdot \begin{Bmatrix} w_i \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} + \sum_{h=2}^4 [\tilde{N}_{hm}(\mathbf{x})] \cdot \begin{Bmatrix} w_{hm} \\ \mathbf{q}_{hm} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Na qual  $[\tilde{N}_{hm}(\mathbf{x})]$  é uma matriz  $(2 \times 2)$  constituída das funções de forma hierárquicas  $N_{hm}(\mathbf{x})$ :

$$[\tilde{N}_{hm}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} N_{hm}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_{hm}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

a matriz  $[N_i(\mathbf{x})]$  já foi definida anteriormente através da Equação (3.16). Sendo  $\{a_i\}$  a matriz coluna  $(4 \times 1)$  definida a partir da equação (3.17),  $\{\tilde{a}_{hm}\}$  uma matriz coluna  $(2 \times 1)$  constituída dos parâmetros hierárquicos:

$$\{\tilde{a}_{hm}\} = \begin{Bmatrix} w_{hm} \\ \mathbf{q}_{hm} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

A Equação (3.22) pode ser representada da seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_i(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h2}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h3}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h4}(\mathbf{x})] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_i\} \\ \{\tilde{a}_{h2}\} \\ \{\tilde{a}_{h3}\} \\ \{\tilde{a}_{h4}\} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

De uma maneira compacta, a equação anterior pode, ainda ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (3.26)$$

na qual  $\{u\}$  é uma matriz coluna  $(2 \times 1)$ , constituída dos deslocamentos e rotações  $w_i$  e  $\mathbf{q}_i$ ,  $\{a\}$  é uma matriz coluna  $(10 \times 1)$ , constituída dos deslocamentos nodais  $w_i$  e  $\mathbf{q}_i$  e dos parâmetros hierárquicos  $w_{hm}$  e  $\mathbf{q}_{hm}$ . E  $[N]$  é uma matriz  $(2 \times 10)$ , constituída das funções de forma  $N_i(\mathbf{x})$  e  $N_{hm}(\mathbf{x})$ :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_i(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h2}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h3}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h4}(\mathbf{x})] \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

### 3.3 Deslocamento axial de vigas

O campo de deslocamento da viga se expressa da seguinte forma.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x) \\ v(x, y, z) &= 0 \\ w(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por outro lado, a Equação (3.28) mostra que a deformação não nula é a seguinte:

$$\mathbf{e}_x = \frac{du}{dx} \quad (3.29)$$

A tensão não nula  $\mathbf{s}_x$  relaciona com a correspondente deformação,

$$\mathbf{s}_x = E \mathbf{e}_x \quad (3.30)$$

### 3.3.1 Princípios de trabalhos virtuais

Com base no princípio de trabalhos virtuais Azevedo (2003), Craig (1981), tem-se, de acordo com as Equações (3.8) e (3.9),

$$[K^{(e)}] = \int_{-1}^1 [B^a]^T (EA) [B^a] |J| d\mathbf{x} \quad (3.31)$$

$$[M^{(e)}] = \int_{-1}^1 (\rho A) [N]^T [N] |J| d\mathbf{x} \quad (3.32)$$

Na qual  $[K^{(e)}]$  e  $[M^{(e)}]$  são matrizes quadradas, simétricas, denominadas matriz de rigidez e matriz de massa do elemento, respectivamente.

O elemento finito de viga com dois nós considerando o deslocamento axial representado pela Figura 3.6.



**Figura 3.6** Elemento de viga de dois nós com deslocamento axial.

O deslocamento axial dos nós do elemento finito representado pela Figura 3.6 são os seguintes:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

A interpolação do deslocamento axial é efetuada utilizando a seguinte interpolação unidimensional com dois nós.

$$u(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})u_1 + N_2(\mathbf{x})u_2 \quad (3.34)$$

A Equação (3.34) pode ser escrita na forma que se apresenta a seguir:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & N_2(\mathbf{x}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

De uma maneira compacta, a Equação (3.35) pode ser dada por:

$$\{u\} = \sum_{i=1}^2 [N_i] \cdot \{u_i\} \quad (3.36)$$

### 3.3.2 Campo de deslocamento axial do elemento paramétrico

De maneira análoga ao que foi apresentado na seção (3.2.4) e utilizando as mesmas funções de forma hierárquicas dadas pelas Equações (3.18) à (3.20)

O deslocamento  $\{u(\mathbf{x})\}$  dado pela Equação (3.36) para o caso do elemento isoparamétrico, torna-se:

$$\{u\} = \sum_{i=1}^2 [N_i] \cdot \{u_i\} + \sum_{m=2}^4 [N_{hm}] \cdot \{u_{hm}\} \quad (3.37)$$

para o caso de elemento paramétrico do tipo hierárquico. Nesta expressão,  $\{u_{hm}\}$  é o vetor constituído do parâmetro hierárquico. As funções de forma  $N_{hm}(\mathbf{x})$  quando inseridas na Equação (3.37) não modificam o nível de aproximação do elemento, mas, a incógnita  $\{u_{hm}\}$  deixa de ter o significado físico de variável nodal.

Devido a introdução do grau de liberdade axial representado pela Equação (3.33), os deslocamentos dos nós dado pela Equação (3.12) passarão a ter a seguinte forma,

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

As Equações (3.13) e (3.14) serão agrupadas com a Equação (3.34) resultando,

$$u(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})u_1 + N_2(\mathbf{x})u_2 \quad (3.39)$$

$$w(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})w_1 + N_2(\mathbf{x})w_2 \quad (3.40)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = N_1(\mathbf{x})\mathbf{q}_1 + N_2(\mathbf{x})\mathbf{q}_2 \quad (3.41)$$

Reescrevendo as Equação (3.39), (3.40) e (3.41), tem-se

$$\begin{Bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 [N_i] \cdot \{a_i\} \quad (3.42)$$

na qual

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Adicionando a Equação (3.37) na Equação (3.22) obtém,

$$\begin{Bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 [N_i(\mathbf{x})] \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} + \sum_{m=2}^4 [\tilde{N}_{hm}] \cdot \begin{Bmatrix} u_{hm} \\ w_{hm} \\ \mathbf{q}_{hm} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

as matrizes  $[N_i(\mathbf{x})]$  e  $\{a_i\}$  já foram definidas anteriormente e  $[\tilde{N}_{hm}(\mathbf{x})]$  é uma matriz  $(3 \times 3)$  constituída das funções de forma hierárquicas  $N_{hm}(\mathbf{x})$ :

$$[\tilde{N}_{hm}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} N_{hm}(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_{hm}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N_{hm}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

e  $\{\tilde{a}_{hm}\}$  uma matriz coluna  $(3 \times 1)$  constituída dos parâmetros hierárquicos:

$$\{\tilde{a}_{hm}\} = \begin{Bmatrix} u_{hm} \\ w_{hm} \\ \mathbf{q}_{hm} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

A equação (3.44) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_i(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h2}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h3}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h4}(\mathbf{x})] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_i\} \\ \{\tilde{a}_{h2}\} \\ \{\tilde{a}_{h3}\} \\ \{\tilde{a}_{h4}\} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

De uma maneira compacta, a equação anterior pode, ainda ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (3.48)$$

na qual  $\{u\}$  é uma matriz coluna  $(3 \times 1)$ , constituída dos deslocamentos e rotações  $w_i$ ,  $u_i$  e  $\mathbf{q}_i$ ,  $\{a\}$  é uma matriz coluna  $(15 \times 1)$ , constituída dos deslocamentos nodais  $w_i$ ,  $u_i$  e  $\mathbf{q}_i$  e dos parâmetros hierárquicos  $w_{hm}$ ,  $u_{hm}$  e  $\mathbf{q}_{hm}$  e  $[N]$  é uma matriz  $(3 \times 15)$ , constituída das funções de forma  $N_i(\mathbf{x})$  e  $N_{hm}(\mathbf{x})$ :

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_i(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h2}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h3}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h4}(\mathbf{x})] \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

### 3.4 Estado de Deformação

Para a determinação do estado de deformação basta obter as derivadas dos deslocamentos  $u$  e  $w$  e da rotação  $\mathbf{q}$ . Fazendo uso da Equação (3.39) o campo de deformações correspondente a uma viga sujeita a um esforço axial será definido do seguinte modo

$$\mathbf{e} = \frac{du}{dx} = \frac{d\mathbf{x}}{dx} \frac{du}{d\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^2 \frac{d\mathbf{x}}{dx} \left[ \frac{dN_i}{d\mathbf{x}} u_i \right] + \sum_{i=1}^2 \frac{d\mathbf{x}}{dx} \left[ \frac{dN_{hm}}{d\mathbf{x}} u_{hm} \right] \quad (3.50)$$

utilizando as Equações (3.40) e (3.41) a curvatura será dada por,

$$\mathbf{c} = \frac{d\mathbf{q}}{dx} = \frac{d\mathbf{x}}{dx} \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^2 \frac{d\mathbf{x}}{dx} \left[ \frac{dN_i}{d\mathbf{x}} \mathbf{q}_i \right] + \sum_{m=2}^4 \frac{d\mathbf{x}}{dx} \left[ \frac{dN_{hm}}{d\mathbf{x}} \mathbf{q}_{hm} \right] \quad (3.51)$$

e a deformação da cortante

$$\mathbf{g}_{xz} = \frac{dw}{dx} - \mathbf{q} = \sum_{i=1}^2 \frac{d\mathbf{x}}{dx} \left[ \frac{dN_i}{d\mathbf{x}} w_i \right] - (N_i \mathbf{q}_i) + \sum_{m=2}^4 \frac{d\mathbf{x}}{dx} \left[ \frac{dN_{hm}}{d\mathbf{x}} w_{hm} \right] \quad (3.52)$$

Utilizando uma formulação isoparamétrica idêntica a empregada para o elemento de barra de dois nós do Capítulo 2 obtém-se  $d\mathbf{x}/dx = 2/l^{(e)}$  e as Equações (3.50), (3.51) e (3.52) podem ser escritas na seguinte forma matricial.

$$\mathbf{e} = [\mathbf{B}^a] \cdot \{\mathbf{a}_i\} + \sum_{m=2}^4 [\mathbf{B}_{hm}^a] \cdot \{\mathbf{a}_{hm}\} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{c} = [\mathbf{B}^f] \cdot \{\mathbf{a}_i\} + \sum_{m=2}^4 [\mathbf{B}_{hm}^f] \cdot \{\tilde{\mathbf{a}}_{hm}\} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{g}_{xz} = [\mathbf{B}^c] \cdot \{\mathbf{a}_i\} + \sum_{m=2}^4 [\mathbf{B}_{hm}^c] \cdot \{\tilde{\mathbf{a}}_{hm}\} \quad (3.55)$$

Na qual  $[\mathbf{B}^a]$  é uma matriz  $(1 \times 6)$  relacionada a deformação axial,  $[\mathbf{B}^f]$  é uma matriz  $(1 \times 6)$  relacionada a flexão,  $[\mathbf{B}^c]$  é uma matriz  $(1 \times 6)$  relacionada ao cisalhamento e  $[\mathbf{B}_{hm}^a]$ ,  $[\mathbf{B}_{hm}^f]$  e  $[\mathbf{B}_{hm}^c]$  são matrizes  $(1 \times 3)$ ,

$$[\mathbf{B}^a] = [\mathbf{B}_1^a \quad \mathbf{B}_2^a \quad \mathbf{B}_3^a \quad \mathbf{B}_4^a \quad \mathbf{B}_5^a \quad \mathbf{B}_6^a] \quad (3.56)$$

$$[\mathbf{B}^f] = [\mathbf{B}_1^f \quad \mathbf{B}_2^f \quad \mathbf{B}_3^f \quad \mathbf{B}_4^f \quad \mathbf{B}_5^f \quad \mathbf{B}_6^f] \quad (3.57)$$

$$[\mathbf{B}^c] = [\mathbf{B}_1^c \quad \mathbf{B}_2^c \quad \mathbf{B}_3^c \quad \mathbf{B}_4^c \quad \mathbf{B}_5^c \quad \mathbf{B}_6^c] \quad (3.58)$$

$$[\mathbf{B}_{hm}^a] = [\mathbf{B}_{1,hm}^a \quad \mathbf{B}_{2,hm}^a \quad \mathbf{B}_{3,hm}^a] \quad (3.59)$$

$$[\mathbf{B}_{hm}^f] = [\mathbf{B}_{1,hm}^f \quad \mathbf{B}_{2,hm}^f \quad \mathbf{B}_{3,hm}^f] \quad (3.60)$$

$$[\mathbf{B}_{hm}^c] = [\mathbf{B}_{1,hm}^c \quad \mathbf{B}_{2,hm}^c \quad \mathbf{B}_{3,hm}^c] \quad (3.61)$$

Os elementos das matrizes  $[B^a]$ ,  $[B^f]$ ,  $[B^c]$ ,  $[B_{hm}^f]$ ,  $[B_{hm}^c]$  e  $[B_{hm}^a]$  são determinados pelas equações abaixo

Elementos da matriz  $[B^a(\mathbf{x})]$ :

$$B_1^a(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dN_1}{d\mathbf{x}} \right) \quad (3.62)$$

$$B_2^a(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.63)$$

$$B_3^a(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.64)$$

$$B_4^a(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dN_2}{d\mathbf{x}} \right) \quad (3.65)$$

$$B_5^a(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.66)$$

$$B_6^a(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.67)$$

Elementos da matriz  $[B^c(\mathbf{x})]$ :

$$B_1^c(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.68)$$

$$B_2^c(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dN_1}{d\mathbf{x}} \right) \quad (3.69)$$

$$B_3^c(\mathbf{x}) = (-N_1) \quad (3.70)$$

$$B_4^c(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.71)$$

$$B_5^c(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dN_2}{d\mathbf{x}} \right) \quad (3.72)$$

$$B_6^c(\mathbf{x}) = (-N_2) \quad (3.73)$$

Elementos da matriz  $[B^f(\mathbf{x})]$ :

$$B_1^f(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.74)$$

$$B_2^f(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.75)$$



$$B_3^f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dN_1}{d\mathbf{x}} \right) \quad (3.76)$$

$$B_4^f(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.77)$$

$$B_5^f(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.78)$$

$$B_6^f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dN_2}{d\mathbf{x}} \right) \quad (3.79)$$

Elementos da matriz  $[B_{hm}^a(\mathbf{x})]$

$$B_{1,hm}^a(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dN_{hm}}{d\mathbf{x}} \right) \quad (3.80)$$

$$B_{2,hm}^a(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.81)$$

$$B_{3,hm}^a(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.82)$$

Elementos da matriz  $[B_{hm}^c(\mathbf{x})]$

$$B_{1,hm}^c(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.83)$$

$$B_{2,hm}^c(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dN_{hm}}{d\mathbf{x}} \right) \quad (3.84)$$

$$B_{3,hm}^c(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.85)$$

Elementos da matriz  $[B_{hm}^f(\mathbf{x})]$ :

$$B_{1,hm}^f(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.86)$$

$$B_{2,hm}^f(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.87)$$

$$B_{3,hm}^f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|J|} \left( \frac{dN_{hm}}{d\mathbf{x}} \right) \quad (3.88)$$

As Equações (3.53), (3.54) e (3.55) podem, ainda, serem dadas na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} [B^a] & [B_{h2}^a] & [B_{h3}^a] & [B_{h4}^a] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_i\} \\ \{\tilde{a}_{h2}\} \\ \{\tilde{a}_{h3}\} \\ \{\tilde{a}_{h4}\} \end{Bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} [B^f] & [B_{h2}^f] & [B_{h3}^f] & [B_{h4}^f] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_i\} \\ \{\tilde{a}_{h2}\} \\ \{\tilde{a}_{h3}\} \\ \{\tilde{a}_{h4}\} \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\mathbf{g}_{xz} = \begin{bmatrix} [B^c] & [B_{h2}^c] & [B_{h3}^c] & [B_{h4}^c] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_i\} \\ \{\tilde{a}_{h2}\} \\ \{\tilde{a}_{h3}\} \\ \{\tilde{a}_{h4}\} \end{Bmatrix} \quad (3.91)$$

pode-se escrever as Equações (3.89), (3.90) e (3.91) de uma forma compacta

$$\mathbf{e} = [BA] \cdot \{a\} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{c} = [BF] \cdot \{a\} \quad (3.93)$$

$$\mathbf{g}_{xz} = [BC] \cdot \{a\} \quad (3.94)$$

na qual as matrizes  $[BA]$ ,  $[BF]$  e  $[BC]$  são matrizes  $(1 \times 15)$  constituídas das derivadas das funções de forma e  $\{a\}$  é uma matriz  $(15 \times 1)$  constituídas dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos. As matrizes  $[BA]$ ,  $[BF]$  e  $[BC]$  são dadas por:

$$[BA] = \begin{bmatrix} [B^a] & [B_{h2}^a] & [B_{h3}^a] & [B_{h4}^a] \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$$[BF] = \begin{bmatrix} [B^f] & [B_{h2}^f] & [B_{h3}^f] & [B_{h4}^f] \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$[BC] = \begin{bmatrix} [B^c] & [B_{h2}^c] & [B_{h3}^c] & [B_{h4}^c] \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

## 4 DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES

### 4.1 Determinação da matriz de rigidez do elemento

O cálculo da matriz de rigidez do elemento, apresentado nas Equações (3.10) e (3.31), envolve as matrizes isoparamétricas de deformação axial, flexão e cortante.

As Equações (3.10) e (3.31) podem ser reescritas como se segue:

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] = & \int_{-1}^1 [BA]^T (EA) [BA] |J(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 [BF]^T (EI) [BF] |J(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \\ & \int_{-1}^1 [BC]^T (GA^*) [BC] |J(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.1)$$

na qual  $[BA]$ ,  $[BF]$  e  $[BC]$  estão apresentadas nas Equações (3.95), (3.96) e (3.97), são as matrizes de rigidez do elemento composta pelas submatrizes isoparamétrica e hierárquica de 2º grau ( $m = 2$ ), 3º grau ( $m = 3$ ) e 4º grau ( $m = 4$ ) do elemento.

Substituindo na Equação (4.1) as matrizes  $[BA]$ ,  $[BF]$  e  $[BC]$ , dadas a partir das Equações (3.95), (3.96) e (3.97), tem-se:

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] = & \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B^a(\mathbf{x})]^T \\ [B_{h2}^a(\mathbf{x})]^T \\ [B_{h3}^a(\mathbf{x})]^T \\ [B_{h4}^a(\mathbf{x})]^T \end{bmatrix} (EA) \begin{bmatrix} [B^a(\mathbf{x})] & [B_{h2}^a(\mathbf{x})] & [B_{h3}^a(\mathbf{x})] & [B_{h4}^a(\mathbf{x})] \end{bmatrix} |J(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \\ & \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B^f(\mathbf{x})]^T \\ [B_{h2}^f(\mathbf{x})]^T \\ [B_{h3}^f(\mathbf{x})]^T \\ [B_{h4}^f(\mathbf{x})]^T \end{bmatrix} (EI) \begin{bmatrix} [B^f(\mathbf{x})] & [B_{h2}^f(\mathbf{x})] & [B_{h3}^f(\mathbf{x})] & [B_{h4}^f(\mathbf{x})] \end{bmatrix} |J(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \\ & \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [B^c(\mathbf{x})]^T \\ [B_{h2}^c(\mathbf{x})]^T \\ [B_{h3}^c(\mathbf{x})]^T \\ [B_{h4}^c(\mathbf{x})]^T \end{bmatrix} (GA^*) \begin{bmatrix} [B^c(\mathbf{x})] & [B_{h2}^c(\mathbf{x})] & [B_{h3}^c(\mathbf{x})] & [B_{h4}^c(\mathbf{x})] \end{bmatrix} |J(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.2)$$

A Equação (4.2) uma vez resolvida, levará à matriz de rigidez do elemento, que será dada por:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h2}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] \\ [K_{h2,iso}] & [K_{h2,h2}] & [K_{h2,h3}] & [K_{h2,h4}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3,h2}] & [K_{h3,h3}] & [K_{h3,h4}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h2}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4,h4}] \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

A matriz ampliada dada pela Equação (4.3) pode ser reescrita como

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{ij}] & [K_{iso,hm}] \\ [K_{hm,iso}] & [K_{hm,hq}] \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

#### 4.1.1 Determinação da matriz $[K_{ij}]$

A matriz  $[K_{ij}]$  está relacionada com os nós  $i$  e  $j$ , sendo que tanto  $i$  quanto  $j$  variam de 1 a 6. Esta matriz caracteriza o elemento isoparamétrico. De acordo com a Equação (4.2), a matriz  $[K_{ij}]$  será dada pela seguinte expressão:

$$[K_{ij}] = \int_{-1}^1 [B^a]^T (EA) [B^a] |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 [B^f]^T (EI) [B^f] |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 [B^c]^T (GA^*) [B^c] |J| d\mathbf{x} \quad (4.5)$$

ou ainda, considerando as Equações (3.56) à (3.58):

$$\begin{aligned}
[K_{iso}] = & \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_1^a \\ B_2^a \\ B_3^a \\ B_4^a \\ B_5^a \\ B_6^a \end{bmatrix} (EA) \begin{bmatrix} B_1^a & B_2^a & B_3^a & B_4^a & B_5^a & B_6^a \end{bmatrix} J |d\mathbf{x} + \\
& \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_1^f \\ B_2^f \\ B_3^f \\ B_4^f \\ B_5^f \\ B_6^f \end{bmatrix} (EI) \begin{bmatrix} B_1^f & B_2^f & B_3^f & B_4^f & B_5^f & B_6^f \end{bmatrix} J |d\mathbf{x} + \\
& \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_1^c \\ B_2^c \\ B_3^c \\ B_4^c \\ B_5^c \\ B_6^c \end{bmatrix} (GA^*) \begin{bmatrix} B_1^c & B_2^c & B_3^c & B_4^c & B_5^c & B_6^c \end{bmatrix} J |d\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Resolvendo a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

na qual

$$k_{11} = \int_{-1}^1 B_1^a (EA) B_1^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_1^f (EI) B_1^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_1^c (GA^*) B_1^c |J| d\mathbf{x} \tag{4.8}$$

$$k_{21} = \int_{-1}^1 B_2^a (EA) B_1^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^f (EI) B_1^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^c (GA^*) B_1^c |J| d\mathbf{x} \tag{4.9}$$

$$k_{31} = \int_{-1}^1 B_3^a (EA) B_1^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^f (EI) B_1^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^c (GA^*) B_1^c |J| d\mathbf{x} \tag{4.10}$$

$$k_{41} = \int_{-1}^1 B_4^a(EA) B_1^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^f(EI) B_1^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^c(GA^*) B_1^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.11)$$

$$k_{51} = \int_{-1}^1 B_5^a(EA) B_1^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^f(EI) B_1^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^c(GA^*) B_1^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.12)$$

$$k_{61} = \int_{-1}^1 B_6^a(EA) B_1^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^f(EI) B_1^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^c(GA^*) B_1^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.13)$$

$$k_{22} = \int_{-1}^1 B_2^a(EA) B_2^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^f(EI) B_2^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^c(GA^*) B_2^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.14)$$

$$k_{32} = \int_{-1}^1 B_3^a(EA) B_2^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^f(EI) B_2^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^c(GA^*) B_2^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.15)$$

$$k_{42} = \int_{-1}^1 B_4^a(EA) B_2^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^f(EI) B_2^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^c(GA^*) B_2^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.16)$$

$$k_{52} = \int_{-1}^1 B_5^a(EA) B_2^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^f(EI) B_2^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^c(GA^*) B_2^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.17)$$

$$k_{62} = \int_{-1}^1 B_6^a(EA) B_2^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^f(EI) B_2^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^c(GA^*) B_2^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.18)$$

$$k_{33} = \int_{-1}^1 B_3^a(EA) B_3^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^f(EI) B_3^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^c(GA^*) B_3^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.19)$$

$$k_{43} = \int_{-1}^1 B_4^a(EA) B_3^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^f(EI) B_3^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^c(GA^*) B_3^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.20)$$

$$k_{53} = \int_{-1}^1 B_5^a(EA) B_3^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^f(EI) B_3^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^c(GA^*) B_3^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.21)$$

$$k_{63} = \int_{-1}^1 B_6^a(EA) B_3^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^f(EI) B_3^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^c(GA^*) B_3^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.22)$$

$$k_{44} = \int_{-1}^1 B_4^a(EA) B_4^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^f(EI) B_4^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^c(GA^*) B_4^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.23)$$

$$k_{54} = \int_{-1}^1 B_5^a(EA) B_4^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^f(EI) B_4^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^c(GA^*) B_4^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.24)$$

$$k_{64} = \int_{-1}^1 B_6^a(EA) B_4^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^f(EI) B_4^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^c(GA^*) B_4^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.25)$$

$$k_{55} = \int_{-1}^1 B_5^a(EA) B_5^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^f(EI) B_5^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^c(GA^*) B_5^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.26)$$

$$k_{65} = \int_{-1}^1 B_6^a(EA) B_5^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^f(EI) B_5^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^c(GA^*) B_5^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.27)$$

$$k_{66} = \int_{-1}^1 B_6^a(EA) B_6^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^f(EI) B_6^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^c(GA^*) B_6^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.28)$$

Na obtenção da matriz de rigidez, a integração será numérica, utilizando o processo da quadratura de Gauss-Legendre Zienkiewicz (1989), na qual  $p$  é o ponto de integração,  $W_p$ , o fator de ponderação, associado a este ponto e  $m, n$  são os números totais de pontos de integração. As equações anteriores tornam-se.

$$\begin{aligned}
k_{11} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_1^a(\mathbf{x}_p) B_1^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_1^f(\mathbf{x}_p) B_1^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_1^c(\mathbf{x}_p) B_1^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_2^a(\mathbf{x}_p) B_1^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_2^f(\mathbf{x}_p) B_1^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_2^c(\mathbf{x}_p) B_1^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_3^a(\mathbf{x}_p) B_1^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_3^f(\mathbf{x}_p) B_1^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_3^c(\mathbf{x}_p) B_1^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_4^a(\mathbf{x}_p) B_1^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_4^f(\mathbf{x}_p) B_1^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_4^c(\mathbf{x}_p) B_1^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
k_{51} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_5^a(\mathbf{x}_p) B_1^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_5^f(\mathbf{x}_p) B_1^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_5^c(\mathbf{x}_p) B_1^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
k_{61} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_6^a(\mathbf{x}_p) B_1^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_6^f(\mathbf{x}_p) B_1^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_6^c(\mathbf{x}_p) B_1^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_2^a(\mathbf{x}_p) B_2^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_2^f(\mathbf{x}_p) B_2^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_2^c(\mathbf{x}_p) B_2^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_3^a(\mathbf{x}_p) B_2^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_3^f(\mathbf{x}_p) B_2^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_3^c(\mathbf{x}_p) B_2^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
k_{42} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_4^a(\mathbf{x}_p) B_2^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_4^f(\mathbf{x}_p) B_2^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_4^c(\mathbf{x}_p) B_2^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
k_{52} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_5^a(\mathbf{x}_p) B_2^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_5^f(\mathbf{x}_p) B_2^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_5^c(\mathbf{x}_p) B_2^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
k_{62} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_6^a(\mathbf{x}_p) B_2^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_6^f(\mathbf{x}_p) B_2^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_6^c(\mathbf{x}_p) B_2^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_3^a(\mathbf{x}_p) B_3^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_3^f(\mathbf{x}_p) B_3^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_3^c(\mathbf{x}_p) B_3^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_4^a(\mathbf{x}_p) B_3^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_4^f(\mathbf{x}_p) B_3^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_4^c(\mathbf{x}_p) B_3^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_5^a(\mathbf{x}_p) B_3^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_5^f(\mathbf{x}_p) B_3^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_5^c(\mathbf{x}_p) B_3^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
k_{63} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_6^a(\mathbf{x}_p) B_3^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_6^f(\mathbf{x}_p) B_3^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_6^c(\mathbf{x}_p) B_3^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
k_{44} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_4^a(\mathbf{x}_p) B_4^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_4^f(\mathbf{x}_p) B_4^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_4^c(\mathbf{x}_p) B_4^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \tag{4.44}$$



$$\begin{aligned}
k_{54} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_5^a(\mathbf{x}_p) B_4^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_5^f(\mathbf{x}_p) B_4^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_5^c(\mathbf{x}_p) B_4^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
k_{64} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_6^a(\mathbf{x}_p) B_4^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_6^f(\mathbf{x}_p) B_4^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_6^c(\mathbf{x}_p) B_4^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
k_{55} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_5^a(\mathbf{x}_p) B_5^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_5^f(\mathbf{x}_p) B_5^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_5^c(\mathbf{x}_p) B_5^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
k_{65} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_6^a(\mathbf{x}_p) B_5^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_6^f(\mathbf{x}_p) B_5^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_6^c(\mathbf{x}_p) B_5^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
k_{66} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_6^a(\mathbf{x}_p) B_6^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_6^f(\mathbf{x}_p) B_6^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_6^c(\mathbf{x}_p) B_6^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x})| W_p
\end{aligned} \quad (4.49)$$

#### 4.1.2 Determinação da matriz $[K_{iso,hm}]$

A matriz  $[K_{iso,hm}]$  é formada por submatrizes da forma  $[K_{i,hm}]$  que caracterizam o acoplamento entre elemento isoparamétrico e o hierárquico e está relacionada com o nó  $i$ , o grau  $m$ , sendo que  $i$  varia de 1 a 6 e,  $m$  varia de 2 a 4. De acordo com a Equação (4.2) a submatriz  $[K_{i,hm}]$  será dada pela seguinte expressão:

$$[K_{i,hm}] = \int_{-1}^1 [B^a(\mathbf{x})]^T (EA) [B_{hm}^a(\mathbf{x})] |J| d\mathbf{x} \int_{-1}^1 [B^f(\mathbf{x})]^T (EI) [B_{hm}^f(\mathbf{x})] |J| d\mathbf{x} + \quad (4.50)$$

$$\int_{-1}^1 [B^c(\mathbf{x})]^T (GA^*) [B_{hm}^c(\mathbf{x})] |J| d\mathbf{x} +$$

ou ainda, tendo-se em conta as Equações (3.56) à (3.61):

$$\begin{aligned}
 [K_{i,hm}] = & \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_1^a \\ B_2^a \\ B_3^a \\ B_4^a \\ B_5^a \\ B_6^a \end{bmatrix} (EA) \begin{bmatrix} B_{1,hm}^a & B_{2,hm}^a & B_{3,hm}^a \end{bmatrix} |J| d\mathbf{x} + \\
 & \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_1^f \\ B_2^f \\ B_3^f \\ B_4^f \\ B_5^f \\ B_6^f \end{bmatrix} (EI) \begin{bmatrix} B_{1,hm}^f & B_{2,hm}^f & B_{3,hm}^f \end{bmatrix} |J| d\mathbf{x} + \\
 & \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_1^c \\ B_2^c \\ B_3^c \\ B_4^c \\ B_5^c \\ B_6^c \end{bmatrix} (GA^*) \begin{bmatrix} B_{1,hm}^c & B_{2,hm}^c & B_{3,hm}^c \end{bmatrix} |J| d\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Resolvendo a Equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{i,hm}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

na qual

$$k_{11} = \int_{-1}^1 B_1^a (EA) B_{1,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_1^f (EI) B_{1,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_1^c (GA^*) B_{1,hm}^c |J| d\mathbf{x} \tag{4.53}$$

$$k_{21} = \int_{-1}^1 B_2^a(EA) B_{1,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^f(EI) B_{1,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^c(GA^*) B_{1,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.54)$$

$$k_{31} = \int_{-1}^1 B_3^a(EA) B_{1,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^f(EI) B_{1,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^c(GA^*) B_{1,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.55)$$

$$k_{41} = \int_{-1}^1 B_4^a(EA) B_{1,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^f(EI) B_{1,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^c(GA^*) B_{1,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.56)$$

$$k_{51} = \int_{-1}^1 B_5^a(EA) B_{1,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^f(EI) B_{1,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^c(GA^*) B_{1,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.57)$$

$$k_{61} = \int_{-1}^1 B_6^a(EA) B_{1,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^f(EI) B_{1,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^c(GA^*) B_{1,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.58)$$

$$k_{12} = \int_{-1}^1 B_1^a(EA) B_{2,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_1^f(EI) B_{2,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_1^c(GA^*) B_{2,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.59)$$

$$k_{22} = \int_{-1}^1 B_2^a(EA) B_{2,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^f(EI) B_{2,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^c(GA^*) B_{2,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.60)$$

$$k_{32} = \int_{-1}^1 B_3^a(EA) B_{2,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^f(EI) B_{2,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^c(GA^*) B_{2,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.61)$$

$$k_{42} = \int_{-1}^1 B_4^a(EA) B_{2,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^f(EI) B_{2,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^c(GA^*) B_{2,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.62)$$

$$k_{13} = \int_{-1}^1 B_1^a(EA) B_{3,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_1^f(EI) B_{3,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_1^c(GA^*) B_{3,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.63)$$

$$k_{23} = \int_{-1}^1 B_2^a(EA) B_{3,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^f(EI) B_{3,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_2^c(GA^*) B_{3,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.64)$$

$$k_{33} = \int_{-1}^1 B_3^a(EA) B_{3,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^f(EI) B_{3,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_3^c(GA^*) B_{3,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.65)$$

$$k_{43} = \int_{-1}^1 B_4^a(EA) B_{3,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^f(EI) B_{3,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_4^c(GA^*) B_{3,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.66)$$

$$k_{53} = \int_{-1}^1 B_5^a(EA) B_{3,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^f(EI) B_{3,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_5^c(GA^*) B_{3,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.67)$$

$$k_{63} = \int_{-1}^1 B_6^a(EA) B_{3,hm}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^f(EI) B_{3,hm}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_6^c(GA^*) B_{3,hm}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.68)$$

Na obtenção da matriz de rigidez, a integração será numérica, utilizando o processo da quadratura de Gauss-Legendre, Zienkiewicz (1989), na qual  $p$  é o ponto de integração,  $W_p$ , o fator de ponderação, associado a este ponto e  $m, n$  são os números totais de pontos de integração. As equações anteriores tornam-se então:

$$k_{11} = (EA) \sum_{p=1}^m B_1^a(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_1^f(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (GA^*) \sum_{p=1}^n B_1^c(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}
k_{21} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_2^a(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_2^f(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_2^c(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
k_{31} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_3^a(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_3^f(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_3^c(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$\begin{aligned}
k_{41} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_4^a(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_4^f(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_4^c(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
k_{51} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_5^a(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_5^f(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_5^c(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
k_{61} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_6^a(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_6^f(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_6^c(\mathbf{x}_p) B_{1,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
k_{12} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_1^a(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_1^f(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_1^c(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned}
k_{22} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_2^a(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_2^f(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_2^c(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}
k_{32} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_3^a(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_3^f(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_3^c(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}
k_{42} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_4^a(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_4^f(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_4^c(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
k_{52} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_5^a(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_5^f(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_5^c(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
k_{62} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_6^a(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_6^f(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_6^c(\mathbf{x}_p) B_{2,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
k_{13} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_1^a(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_1^f(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_1^c(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}
k_{23} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_2^a(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_2^f(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_2^c(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
k_{33} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_3^a(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_3^f(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_3^c(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
k_{43} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_4^a(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_4^f(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_4^c(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}
k_{53} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_5^a(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_5^f(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_5^c(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}
k_{63} = & (EA) \sum_{p=1}^m B_6^a(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_6^f(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + \\
& (GA^*) \sum_{p=1}^n B_6^c(\mathbf{x}_p) B_{3,hm}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p
\end{aligned} \quad (4.86)$$

#### 4.1.3 Determinação da matriz $[K_{hm,iso}]$

A matriz  $[K_{hm,iso}]$  é formada por submatrizes da forma  $[K_{hm,j}]$  que caracterizam o acoplamento entre o elemento hierárquico e o isoparamétrico e está relacionada com o nó  $j$ , o grau  $m$ , sendo que  $j$  varia de 1 a 6,  $m$  de 2 a 4. De acordo com a Equação (4.2) a submatriz  $[K_{hm,j}]$  será dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
[K_{hm,j}] = & \int_{-1}^1 [B_{hm}^a]^T (EA) [B^a] |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 [B_{hm}^f]^T (EI) [B^f] |J| d\mathbf{x} + \\
& \int_{-1}^1 [B_{hm}^c]^T (GA^*) [B^c] |J| d\mathbf{x}
\end{aligned} \quad (4.87)$$

portanto

$$[K_{hm,j}] = [K_{i,hm}]^T \quad (4.88)$$

#### 4.1.4 Determinação da matriz $[K_{hm,hq}]$

A matriz da forma  $[K_{hm,hq}]$ , caracteriza o elemento hierárquico e está relacionada com os graus  $m$  e  $q$ , sendo que  $m$  e  $q$  variam de 2 a 4. De acordo com a Equação (4.2) a submatriz  $[K_{hm,hq}]$  será dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
[K_{hm,hq}] = & \int_{-1}^1 [B_{hm}^a]^T (EA) [B_{hq}^a] |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 [B_{hm}^f]^T (EI) [B_{hq}^f] |J| d\mathbf{x} + \\
& \int_{-1}^1 [B_{hm}^c]^T (GA^*) [B_{hq}^c] |J| d\mathbf{x}
\end{aligned} \quad (4.89)$$

ou ainda, tendo-se em conta as Equações (3.59) e (3.61):

$$\begin{aligned}
[K_{hm,hq}] = & \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{1,hm}^a \\ B_{3,hm}^a \\ B_{3,hm}^a \end{bmatrix} (EA) \begin{bmatrix} B_{1,hq}^a & B_{2,hq}^a & B_{3,hq}^a \end{bmatrix} J |d\mathbf{x}| + \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{1,hm}^f \\ B_{3,hm}^f \\ B_{3,hm}^f \end{bmatrix} (EI) \begin{bmatrix} B_{1,hq}^f & B_{2,hq}^f & B_{3,hq}^f \end{bmatrix} J |d\mathbf{x}| + \\
& \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} B_{1,hm}^c \\ B_{2,hm}^c \\ B_{3,hm}^c \end{bmatrix} (GA^*) \begin{bmatrix} B_{1,hq}^c & B_{2,hq}^c & B_{3,hq}^c \end{bmatrix} J |d\mathbf{x}| \quad (4.90)
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação anterior, obtém-se que:

$$[K_{hm,hq}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

na qual

$$k_{11} = \int_{-1}^1 B_{1,hm}^a (EA) B_{1,hq}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{1,hm}^f (EI) B_{1,hq}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{1,hm}^c (GA^*) B_{1,hq}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.92)$$

$$k_{21} = \int_{-1}^1 B_{2,hm}^a (EA) B_{1,hq}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{2,hm}^f (EI) B_{1,hq}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{2,hm}^c (GA^*) B_{1,hq}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.93)$$

$$k_{31} = \int_{-1}^1 B_{3,hm}^a (EA) B_{1,hq}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{3,hm}^f (EI) B_{1,hq}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{3,hm}^c (GA^*) B_{1,hq}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.94)$$

$$k_{12} = \int_{-1}^1 B_{1,hm}^a (EA) B_{2,hq}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{1,hm}^f (EI) B_{2,hq}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{1,hm}^c (GA^*) B_{2,hq}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.95)$$

$$k_{22} = \int_{-1}^1 B_{2,hm}^a (EA) B_{2,hq}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{2,hm}^f (EI) B_{2,hq}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{2,hm}^c (GA^*) B_{2,hq}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.96)$$

$$k_{32} = \int_{-1}^1 B_{3,hm}^a (EA) B_{2,hq}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{3,hm}^f (EI) B_{2,hq}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{3,hm}^c (GA^*) B_{2,hq}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.97)$$

$$k_{13} = \int_{-1}^1 B_{1,hm}^a (EA) B_{3,hq}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{1,hm}^f (EI) B_{3,hq}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{1,hm}^c (GA^*) B_{3,hq}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.98)$$

$$k_{23} = \int_{-1}^1 B_{2,hm}^a (EA) B_{3,hq}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{2,hm}^f (EI) B_{3,hq}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{2,hm}^c (GA^*) B_{3,hq}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.99)$$

$$k_{33} = \int_{-1}^1 B_{3,hm}^a (EA) B_{3,hq}^a |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{3,hm}^f (EI) B_{3,hq}^f |J| d\mathbf{x} + \int_{-1}^1 B_{3,hm}^c (GA^*) B_{3,hq}^c |J| d\mathbf{x} \quad (4.100)$$

Na obtenção da matriz de rigidez, a integração será numérica, utilizando o processo da quadratura de Gauss-Legendre Zienkiewicz (1989), na qual  $p$  é o ponto de integração,  $W_p$ , o

fator de ponderação, associado a este ponto e  $m, n$  são os números totais de pontos de integração. As equações anteriores tornam-se.

$$k_{11} = (EA) \sum_{p=1}^m B_{1,hm}^a(\mathbf{x}_p) B_{1,hq}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_{1,hm}^f(\mathbf{x}_p) B_{1,hq}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (GA^*) \sum_{p=1}^n B_{1,hm}^c(\mathbf{x}_p) B_{1,hq}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.101)$$

$$k_{21} = (EA) \sum_{p=1}^m B_{2,hm}^a(\mathbf{x}_p) B_{1,hq}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_{2,hm}^f(\mathbf{x}_p) B_{1,hq}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (GA^*) \sum_{p=1}^n B_{2,hm}^c(\mathbf{x}_p) B_{1,hq}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.102)$$

$$k_{31} = (EA) \sum_{p=1}^m B_{3,hm}^a(\mathbf{x}_p) B_{1,hq}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_{3,hm}^f(\mathbf{x}_p) B_{1,hq}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (GA^*) \sum_{p=1}^n B_{3,hm}^c(\mathbf{x}_p) B_{1,hq}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.103)$$

$$k_{12} = (EA) \sum_{p=1}^m B_{1,hm}^a(\mathbf{x}_p) B_{2,hq}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_{1,hm}^f(\mathbf{x}_p) B_{2,hq}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (GA^*) \sum_{p=1}^n B_{1,hm}^c(\mathbf{x}_p) B_{2,hq}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.104)$$

$$k_{22} = (EA) \sum_{p=1}^m B_{2,hm}^a(\mathbf{x}_p) B_{2,hq}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_{2,hm}^f(\mathbf{x}_p) B_{2,hq}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (GA^*) \sum_{p=1}^n B_{2,hm}^c(\mathbf{x}_p) B_{2,hq}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.105)$$

$$k_{32} = (EA) \sum_{p=1}^m B_{3,hm}^a(\mathbf{x}_p) B_{2,hq}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_{3,hm}^f(\mathbf{x}_p) B_{2,hq}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (GA^*) \sum_{p=1}^n B_{3,hm}^c(\mathbf{x}_p) B_{2,hq}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.106)$$

$$k_{13} = (EA) \sum_{p=1}^m B_{1,hm}^a(\mathbf{x}_p) B_{3,hq}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_{1,hm}^f(\mathbf{x}_p) B_{3,hq}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (GA^*) \sum_{p=1}^n B_{1,hm}^c(\mathbf{x}_p) B_{3,hq}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.107)$$



$$k_{23} = (EA) \sum_{p=1}^m B_{2,hm}^a(\mathbf{x}_p) B_{3,hq}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_{2,hm}^f(\mathbf{x}_p) B_{3,hq}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p +$$

$$(GA^*) \sum_{p=1}^n B_{2,hm}^c(\mathbf{x}_p) B_{3,hq}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.108)$$

$$k_{33} = (EA) \sum_{p=1}^m B_{3,hm}^a(\mathbf{x}_p) B_{3,hq}^a(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p + (EI) \sum_{p=1}^m B_{3,hm}^f(\mathbf{x}_p) B_{3,hq}^f(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p +$$

$$(GA^*) \sum_{p=1}^n B_{3,hm}^c(\mathbf{x}_p) B_{3,hq}^c(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p \quad (4.109)$$

## 4.2 Determinação da matriz de massa do elemento

O cálculo da matriz de massa do elemento apresentado, nas Equações (3.11) e (3.32), envolve as matrizes isoparamétrica e hierárquica do elemento.

As Equações (3.11) e (3.32) pode ser reescrita como se segue:

$$[M^{(e)}] = \int_{-1}^1 [N]^T [\mathbf{r}] [N] |J(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \quad (4.110)$$

ou pela substituição da matriz  $[N]$ , dada a partir da Equação (3.49), tem-se que:

$$[M^{(e)}] = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} [N(\mathbf{x})]^T \\ [\tilde{N}_{h2}(\mathbf{x})]^T \\ [\tilde{N}_{h3}(\mathbf{x})]^T \\ [\tilde{N}_{h4}(\mathbf{x})]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{rA} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{rI} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{rA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h2}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h3}(\mathbf{x})] & [\tilde{N}_{h4}(\mathbf{x})] \end{bmatrix} |J(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \quad (4.111)$$

A Equação (4.111) uma vez resolvida, levará à matriz de massa do elemento, que será dada por:

$$[M^e] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{iso} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{iso,h2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{iso,h3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{iso,h4} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{h2,iso} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{h2,h2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{h2,h3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{h2,h4} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{h3,iso} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{h3,h2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{h3,h3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{h3,h4} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{h4,iso} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{h4,h2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{h4,h3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{h4,h4} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

A matriz ampliada dada pela Equação (4.112) pode ser reescrita como

$$[M^e] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{ij} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{iso,hm} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{hm,iso} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{hm,hq} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

#### 4.2.1 Determinação da matriz $[M_{ij}]$

A matriz  $[M_{ij}]$  está relacionada com os nós  $i$  e  $j$ , sendo que tanto  $i$  quanto  $j$  variam de 1 a 6. Esta matriz caracteriza o elemento isoparamétrico. De acordo com a Equação (4.111), a matriz  $[M_{ij}]$  será dada pela seguinte expressão:

$$[M_{ij}] = \int_{-1}^1 [N_i(\mathbf{x})]^T [\mathbf{r}] [N_j(\mathbf{x})] J d\mathbf{x} \quad (4.114)$$

ou ainda, tendo-se em conta a Equação (3.43):

$$[M_{ij}] = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \\ N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{rA} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{rI} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{rA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_j & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 & 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} |J| d\mathbf{x} \quad (4.115)$$

Resolvendo a equação anterior, obtém-se que:

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

na qual

$$m_{11} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} N_1(\mathbf{x}) N_1(\mathbf{x}) |J| d\mathbf{x} \quad (4.117)$$

$$m_{41} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} N_4(\mathbf{x}) N_1(\mathbf{x}) |J| d\mathbf{x} \quad (4.118)$$

$$m_{22} = \int_{-1}^1 \mathbf{rI} N_2(\mathbf{x}) N_2(\mathbf{x}) |J| d\mathbf{x} \quad (4.119)$$

$$m_{52} = \int_{-1}^1 \mathbf{rI} N_5(\mathbf{x}) N_2(\mathbf{x}) |J| d\mathbf{x} \quad (4.120)$$

$$m_{33} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} N_3(\mathbf{x}) N_3(\mathbf{x}) |J| d\mathbf{x} \quad (4.121)$$

$$m_{63} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} N_6(\mathbf{x}) N_3(\mathbf{x}) |J| d\mathbf{x} \quad (4.122)$$

$$m_{44} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} N_4(\mathbf{x}) N_4(\mathbf{x}) |J| d\mathbf{x} \quad (4.123)$$

$$m_{55} = \int_{-1}^1 \mathbf{rI} N_5(\mathbf{x}) N_5(\mathbf{x}) |J| d\mathbf{x} \quad (4.124)$$

$$m_{66} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} N_6(\mathbf{x}) N_6(\mathbf{x}) |J| d\mathbf{x} \quad (4.125)$$

$$m_{21} = m_{31} = m_{41} = m_{61} = m_{32} = m_{42} = m_{43} = m_{53} = m_{54} = m_{64} = m_{65} = 0 \quad (4.126)$$

Na obtenção da matriz de massa, a integração será numérica, utilizando o processo da quadratura de Gauss-Legendre Zienkiewicz (1989), na qual  $p$  é o ponto de integração,  $W_p$ , o fator de ponderação, associado a este ponto e  $m$  é o número total de pontos de integração, logo as equações anteriores tornam-se:

$$m_{11} = \mathbf{rA} \sum_{p=1}^m (N_1(\mathbf{x}_p) N_1(\mathbf{x}_p) | J(\mathbf{x}_p) | W_p) \quad (4.127)$$

$$m_{41} = \mathbf{rA} \sum_{p=1}^m (N_4(\mathbf{x}_p) N_1(\mathbf{x}_p) | J(\mathbf{x}_p) | W_p) \quad (4.128)$$

$$m_{22} = \mathbf{rI} \sum_{p=1}^m (N_2(\mathbf{x}_p) N_2(\mathbf{x}_p) | J(\mathbf{x}_p) | W_p) \quad (4.129)$$

$$m_{52} = \mathbf{rI} \sum_{p=1}^m (N_5(\mathbf{x}_p) N_2(\mathbf{x}_p) | J(\mathbf{x}_p) | W_p) \quad (4.130)$$

$$m_{33} = \mathbf{rA} \sum_{p=1}^m (N_3(\mathbf{x}_p) N_3(\mathbf{x}_p) | J(\mathbf{x}_p) | W_p) \quad (4.131)$$

$$m_{63} = \mathbf{rA} \sum_{p=1}^m (N_6(\mathbf{x}_p) N_3(\mathbf{x}_p) | J(\mathbf{x}_p) | W_p) \quad (4.132)$$

$$m_{44} = \mathbf{rA} \sum_{p=1}^m (N_4(\mathbf{x}_p) N_4(\mathbf{x}_p) | J(\mathbf{x}_p) | W_p) \quad (4.133)$$

$$m_{55} = \mathbf{rI} \sum_{p=1}^m (N_5(\mathbf{x}_p) N_5(\mathbf{x}_p) | J(\mathbf{x}_p) | W_p) \quad (4.134)$$

$$m_{66} = \mathbf{rA} \sum_{p=1}^m (N_6(\mathbf{x}_p) N_6(\mathbf{x}_p) | J(\mathbf{x}_p) | W_p) \quad (4.135)$$

$$m_{21} = m_{31} = m_{41} = m_{61} = m_{32} = m_{42} = m_{43} = m_{53} = m_{54} = m_{64} = m_{65} = 0 \quad (4.136)$$

#### 4.2.2 Determinação da matriz de massa $[M_{iso,hm}]$

A matriz  $[M_{iso,hm}]$  é formada por submatrizes da forma  $[M_{i,hm}]$  que caracterizam o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e o elemento hierárquico e está relacionada com o nó  $i$ , o grau  $m$  sendo que  $i$  varia de 1 a 6,  $m$  varia de 2 a 4. De acordo com a Equação (4.111) a submatriz  $[M_{i,hm}]$  será dada pela seguinte expressão:

$$[M_{i,hm}] = \int_{-1}^1 [N]^T [\mathbf{r}] [\tilde{N}_{hm}] |J| d\mathbf{x} \quad (4.137)$$

ou, ainda, tendo-se em conta as Equações (3.43) e (3.45):

$$[M_{i,hm}] = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \\ N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{rA} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{rI} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{rA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{hm} & 0 & 0 \\ 0 & N_{hm} & 0 \\ 0 & 0 & N_{hm} \end{bmatrix} |J| d\mathbf{x} \quad (4.138)$$

Resolvendo a Equação anterior, obtém-se que:

$$[M_{i,hm}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

na qual

$$m_{11} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} [N_1]^T [N_{hm}] |J| d\mathbf{x} \quad (4.140)$$

$$m_{41} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} [N_4]^T [N_{hm}] |J| d\mathbf{x} \quad (4.141)$$

$$m_{22} = \int_{-1}^1 \mathbf{rI} [N_2]^T [N_{hm}] |J| d\mathbf{x} \quad (4.142)$$

$$m_{52} = \int_{-1}^1 \mathbf{rI} [N_5]^T [N_{hm}] |J| d\mathbf{x} \quad (4.143)$$

$$m_{33} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} [N_3]^T [N_{hm}] |J| d\mathbf{x} \quad (4.144)$$

$$m_{63} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} [N_6]^T [N_{hm}] |J| d\mathbf{x} \quad (4.145)$$

$$m_{21} = m_{31} = m_{51} = m_{61} = m_{12} = m_{32} = m_{42} = m_{62} = m_{13} = m_{23} = m_{43} = m_{53} = 0 \quad (4.146)$$

Na obtenção da matriz de massa, a integração será numérica, utilizando o processo da quadratura de Gauss-Legendre Zienkiewicz (1989), na qual  $p$  é o ponto de integração,  $W_p$ , o fator de ponderação, associado a este ponto e  $m$  é o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se.

$$m_{11} = \mathbf{r}A \sum_{p=1}^m (N_1(\mathbf{x}_p) N_{hm}(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p) \quad (4.147)$$

$$m_{41} = \mathbf{r}A \sum_{p=1}^m (N_4(\mathbf{x}_p) N_{hm}(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p) \quad (4.148)$$

$$m_{22} = \mathbf{r}I \sum_{p=1}^m (N_2(\mathbf{x}_p) N_{hm}(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p) \quad (4.149)$$

$$m_{52} = \mathbf{r}I \sum_{p=1}^m (N_5(\mathbf{x}_p) N_{hm}(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p) \quad (4.150)$$

$$m_{33} = \mathbf{r}A \sum_{p=1}^m (N_3(\mathbf{x}_p) N_{hm}(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p) \quad (4.151)$$

$$m_{63} = \mathbf{r}A \sum_{p=1}^m (N_6(\mathbf{x}_p) N_{hm}(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p) \quad (4.152)$$

$$m_{21} = m_{31} = m_{51} = m_{61} = m_{12} = m_{32} = m_{42} = m_{62} = m_{13} = m_{23} = m_{43} = m_{53} = 0 \quad (4.153)$$

### 4.2.3 Determinação da matriz de massa $[M_{hm,iso}]$

A submatriz  $[M_{hm,iso}]$  é formada por submatrizes da forma  $[M_{hm,j}]$  que caracterizam o acoplamento entre o elemento hierárquico e o elemento isoparamétrico e está relacionada com o nó  $j$ , o grau  $m$ , sendo que  $j$  varia de 1 a 6,  $m$  varia de 2 a 4. De acordo com a Equação (4.111) a submatriz  $[M_{hm,j}]$  será dada pela seguinte expressão:

$$[M_{hm,j}] = \int_{-1}^1 [N_{hm}]^T [\mathbf{r}] [N_j] |J| d\mathbf{x} \quad (4.154)$$

Portanto,

$$[M_{hm,j}] = [M_{i,hm}]^T \quad (4.155)$$

#### 4.2.4 Determinação da matriz de massa $[M_{hm,hq}]$

A matriz  $[M_{hm,hq}]$ , caracteriza o elemento hierárquico e está relacionada com os graus  $m$  e  $q$ , sendo que  $m$  e  $q$  variam de 2 a 4. De acordo com a Equação (4.111) a matriz  $[M_{hm,hq}]$  será dada pela seguinte expressão:

$$[M_{hm,hq}] = \int_{-1}^1 [\tilde{N}_{hm}]^T [\mathbf{r}] [\tilde{N}_{hq}] |J| d\mathbf{x} \quad (4.156)$$

ou, ainda, tendo-se em conta a Equação (3.45):

$$[M_{hm,hq}] = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_{hm} & 0 & 0 \\ 0 & N_{hm} & 0 \\ 0 & 0 & N_{hm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{rA} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{rI} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{rA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{hq} & 0 & 0 \\ 0 & N_{hq} & 0 \\ 0 & 0 & N_{hq} \end{bmatrix} |J| d\mathbf{x} \quad (4.157)$$

Resolvendo a equação anterior, obtém-se que:

$$[M_{hm,hq}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

na qual

$$m_{11} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} N_{hm} N_{hq} |J| d\mathbf{x} \quad (4.159)$$

$$m_{22} = \int_{-1}^1 \mathbf{rI} N_{hm} N_{hq} |J| d\mathbf{x} \quad (4.160)$$

$$m_{33} = \int_{-1}^1 \mathbf{rA} N_{hm} N_{hq} |J| d\mathbf{x} \quad (4.161)$$

$$m_{21} = m_{31} = m_{12} = m_{32} = m_{13} = m_{23} = 0 \quad (4.162)$$

Na obtenção da matriz de massa, a integração será numérica, utilizando o processo da quadratura de Gauss-Legendre Zienkiewicz (1989), na qual  $p$  é o ponto de integração,  $W_p$ , o

fator de ponderação, associado a este ponto e  $m$  é o número total de pontos de integração, as equações anteriores tornam-se:

$$m_{11} = \mathbf{r}A \sum_{p=1}^m (N_{hm}(\mathbf{x}_p) N_{hq}(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p) \quad (4.163)$$

$$m_{22} = \mathbf{r}I \sum_{p=1}^m (N_{hm}(\mathbf{x}_p) N_{hq}(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p) \quad (4.164)$$

$$m_{33} = \mathbf{r}A \sum_{p=1}^m (N_{hm}(\mathbf{x}_p) N_{hq}(\mathbf{x}_p) |J(\mathbf{x}_p)| W_p) \quad (4.165)$$

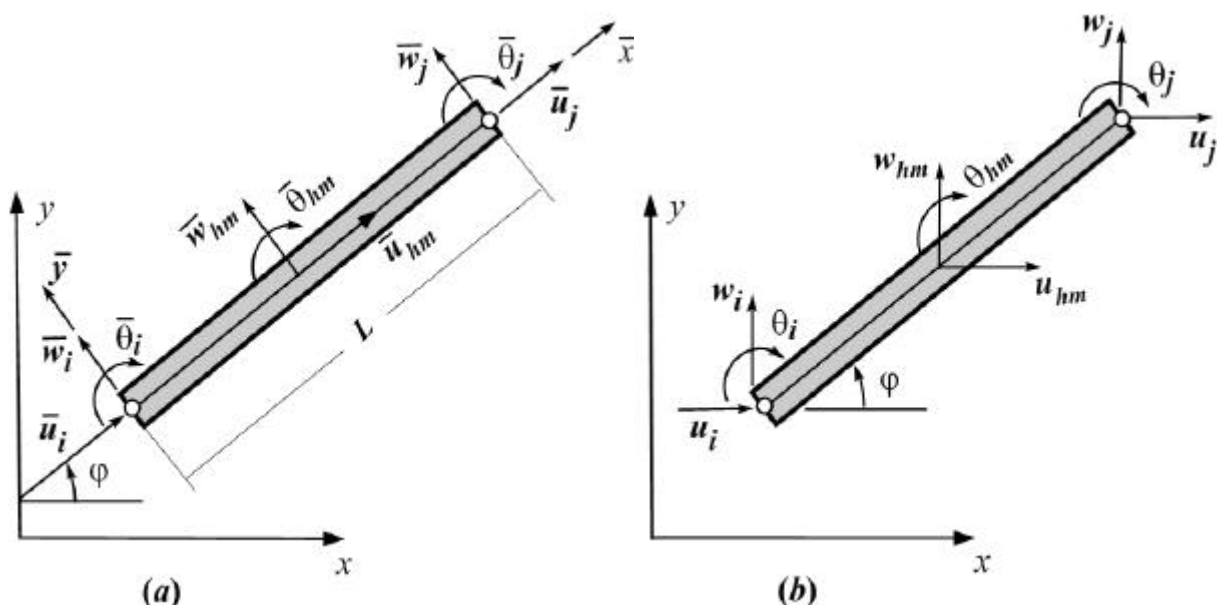
$$m_{21} = m_{31} = m_{12} = m_{32} = m_{13} = m_{23} = 0 \quad (4.166)$$



## 5 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

### 5.1 Introdução

As matrizes de rigidez e massa desenvolvidas para o elemento de viga de Timoshenko são obtidas considerando-se o sistema de coordenadas local do elemento, conforme Figura 5.1. Para que estas matrizes possam ser aplicadas a estruturas formadas por diversos elementos é necessário a transformação destas do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global, antes da solução do problema.



**Figura 5.1** Deslocamentos e rotações do elemento de viga de Timoshenko no sistema de coordenadas local (a) e no sistema de coordenadas global (b).

### 5.2 Matriz de transformação isoparamétrica

Para que haja a transformação entre os dois referenciais local e global para o elemento isoparamétrico de Timoshenko é necessário estabelecer uma matriz de transformação entre os referenciais. A matriz neste caso é obtida através da inspeção da Figura 5.1, cujos componentes são calculados com base nos cossenos e senos dos ângulos formados pelos eixos do sistema de referencial local com relação ao sistema de referencial global.

Observando a Figura 5.1, verifica-se que a relação entre os graus de liberdade do sistema local e os graus de liberdade do sistema global são:

$$\bar{u}_i = u_i \cos(\mathbf{j}) + w_i \sin(\mathbf{j}) \quad (5.1)$$

$$\bar{w}_i = -u_i \sin(\mathbf{j}) + w_i \cos(\mathbf{j}) \quad (5.2)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i \quad (5.3)$$

$$\bar{u}_j = u_j \cos(\mathbf{j}) + w_j \sin(\mathbf{j}) \quad (5.4)$$

$$\bar{w}_j = -u_j \sin(\mathbf{j}) + w_j \cos(\mathbf{j}) \quad (5.5)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_j = \mathbf{q}_j \quad (5.6)$$

As Equações (5.1) à (5.6) podem ser apresentadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\mathbf{q}}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\mathbf{q}}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{j}) & \sin(\mathbf{j}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\mathbf{j}) & \cos(\mathbf{j}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\mathbf{j}) & \sin(\mathbf{j}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\mathbf{j}) & \cos(\mathbf{j}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \mathbf{q}_i \\ u_j \\ w_j \\ \mathbf{q}_j \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

na qual

$$\cos(\mathbf{j}) = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad \sin(\mathbf{j}) = \frac{y_j - y_i}{L} \quad (5.8)$$

sendo  $(x_i, y_i)$  as coordenadas do nó  $i$  e  $(x_j, y_j)$  as coordenadas do nó  $j$  do elemento no sistema de coordenadas global,  $L$  é o comprimento da viga, calculado com a seguinte expressão,

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (5.9)$$

e  $\mathbf{j}$  o angulo formado pelos eixos do sistema de referencia local com relação ao sistema de referencia global.

De uma maneira compacta, a Equação (5.7) pode, ainda, ser dada por:

$$\{\bar{a}_{iso}\} = [T_{iso}]\{a_{iso}\} \quad (5.10)$$

sendo  $\{\bar{a}_{iso}\}$  as coordenadas no sistema local,  $\{a_{iso}\}$  as coordenadas no sistema global e  $[T_{iso}]$  é a matriz de transformação isoparamétrica.

As respectivas matrizes isoparamétricas de rigidez e massa no referencial local, bem como o vetor de forças nodais equivalente a diversos tipos de ações podem ser diretamente transformadas para o sistema de referencia global. Assim parte-se de princípio que se dispõe das matrizes de rigidez  $[\bar{K}_{iso}]$  e massa  $[\bar{M}_{iso}]$  e do vetor de forças nodais  $\{\bar{f}_{iso}\}$ , que se relacionam com a habitual equação,

$$[\bar{M}_{iso}] \cdot \{\ddot{\bar{a}}_{iso}\} + [\bar{K}_{iso}] \cdot \{\bar{a}_{iso}\} = \{\bar{f}_{iso}\} \quad (5.11)$$

sendo  $[\bar{M}_{iso}]$  e  $[\bar{K}_{iso}]$  as matrizes de massa e rigidez respectivamente,  $\{\bar{a}_{iso}\}$  e  $\{\ddot{\bar{a}}_{iso}\}$  são os deslocamentos e as acelerações nodais e  $\{\bar{f}_{iso}\}$  o vetor de forças nodais, essas matrizes estão todas no sistema de referencia local .

A Equação (5.10) é válida para os deslocamentos nodais como também para as forças nodais, então;

$$\{\bar{f}_{iso}\} = [T_{iso}]\{f_{iso}\} \quad (5.12)$$

uma vez que a matriz de transformação é ortogonal, isto é

$$[T_{iso}]^T = [T_{iso}]^{-1} \quad (5.13)$$

multiplicam-se os membros da Equação (5.12) por  $[T_{iso}]^T$  e obtém,

$$\{f_{iso}\} = [T_{iso}]^T \{\bar{f}_{iso}\} \quad (5.14)$$

Substituindo a Equação (5.11) na Equação (5.14), tem-se

$$\{f_{iso}\} = [T_{iso}]^T ([\bar{M}_{iso}] \cdot \{\ddot{\bar{a}}_{iso}\} + [\bar{K}_{iso}] \cdot \{\bar{a}_{iso}\}) \quad (5.15)$$

a equação acima pode ser reescrita

$$\{f_{iso}\} = [T_{iso}]^T [\bar{M}_{iso}] \cdot \{\ddot{a}_{iso}\} + [T_{iso}]^T [\bar{K}_{iso}] \cdot \{\bar{a}_{iso}\} \quad (5.16)$$

substituindo a Equação (5.10) na Equação (5.16), tem-se

$$\{f_{iso}\} = [T_{iso}]^T [\bar{M}_{iso}] \cdot [T_{iso}] \{\ddot{a}_{iso}\} + [T_{iso}]^T [\bar{K}_{iso}] \cdot [T_{iso}] \{a_{iso}\} \quad (5.17)$$

uma vez que a relação de rigidez e massa da viga no referencial global é dada pela equação,

$$[M_{iso}] \cdot \{\ddot{a}_{iso}\} + [K_{iso}] \cdot \{a_{iso}\} = \{f_{iso}\} \quad (5.18)$$

tem-se a comparação da Equação (5.17) com a Equação (5.18), conclui-se que as matrizes de rigidez e massa elementares para o elemento de viga de Timoshenko são transformados no referencial global utilizando as seguintes equações abaixo:

$$[M_{iso}] = [T_{iso}]^T [\bar{M}_{iso}] [T_{iso}] \quad (5.19)$$

$$[K_{iso}] = [T_{iso}]^T [\bar{K}_{iso}] [T_{iso}] \quad (5.20)$$

na qual  $[K_{iso}]$  e  $[M_{iso}]$  são as matrizes de rigidez e massa, respectivamente no sistema de coordenada global.

## 5.5 Matriz de transformação hierárquica de segundo grau ( $m = 2$ )

As matrizes de rigidez e massa desenvolvidas para o elemento hierárquico de segundo grau de viga de Timoshenko são obtidas considerando-se o sistema de coordenadas local do elemento. Para que estas matrizes possam ser aplicadas a estruturas formadas por diversos elementos é necessária a transformação destas do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global antes da solução do problema. Neste caso adiciona-se na Equação (5.7), referente a matriz de transformação isoparamétrica, os componentes das Equações (5.21) à (5.23) obtidas através da Figura (5.1).

$$\bar{u}_{h2} = u_{h2} \cos(\mathbf{j}) + w_{h2} \sin(\mathbf{j}) \quad (5.21)$$

$$\bar{w}_{h2} = -u_{h2} \sin(\mathbf{j}) + w_{h2} \cos(\mathbf{j}) \quad (5.22)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{h2} = \mathbf{q}_{h2} \quad (5.23)$$

As Equações (5.21) à (5.23) podem ser apresentadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{h2} \\ \bar{w}_{h2} \\ \bar{\mathbf{q}}_{h2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{j}) & \sin(\mathbf{j}) & 0 \\ -\sin(\mathbf{j}) & \cos(\mathbf{j}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{h2} \\ w_{h2} \\ \mathbf{q}_{h2} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

na qual  $\cos(\mathbf{j})$ ,  $\sin(\mathbf{j})$  foram definidos pela Equação (5.8).

De uma maneira compacta, a equação (5.24) pode, ainda, ser dada por:

$$\{\bar{a}_{h2}\} = [T_{h2}] \{a_{h2}\} \quad (5.25)$$

Agrupando a equação (5.25) na equação (5.10) obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{a}_{iso}\} \\ \{\bar{a}_{h2}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 \\ 0 & [T_{h2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h2}\} \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

na Equação (5.26),  $\{a_{iso}\}$ ,  $\{\bar{a}_{iso}\}$  e  $[T_{iso}]$  já foram definidos anteriormente,  $\{\bar{a}_{h2}\}$  e  $\{a_{h2}\}$  são as coordenadas hierárquicas de segundo grau no sistema local e global respectivamente e  $[T_{h2}]$  é a matriz de transformação hierárquica de segundo grau.

A Equação (5.26) pode ser representada na forma que se segue:

$$\{\bar{a}_2\} = [T_2] \cdot \{a_2\} \quad (5.27)$$

na qual

$$[T_2] = \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 \\ 0 & [T_{h2}] \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

As matrizes hierárquicas de segundo grau de rigidez e massa no referencial local, bem como o vetor de forças nodais equivalente a diversos tipos de ações podem ser diretamente transformadas para o sistema de referencia global. Assim parte-se de princípio que se dispõe das submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico definidos anteriormente, das submatrizes  $[\bar{K}_{i,h2}]$ ,  $[\bar{M}_{i,h2}]$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e hierárquico de segundo grau e das submatrizes das  $[\bar{K}_{h2,h2}]$ ,  $[\bar{M}_{h2,h2}]$  e  $\{\bar{f}_{h2}\}$  correspondentes ao sistema hierárquico de segundo grau, que se relacionam com a habitual equação

$$[\bar{M}_2] \cdot \{\ddot{\bar{a}}_2\} + [\bar{K}_2] \cdot \{\bar{a}_2\} = \{\bar{f}_2\} \quad (5.29)$$

sendo

$$[\bar{M}_2] = \begin{bmatrix} [\bar{M}_{iso}] & [\bar{M}_{i,h2}] \\ [\bar{M}_{h2,i}] & [\bar{M}_{h2,h2}] \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_2] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{iso}] & [\bar{K}_{i,h2}] \\ [\bar{K}_{h2,i}] & [\bar{K}_{h2,h2}] \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

matrizes de massa e rigidez respectivamente no referencial local após a introdução de funções de forma hierárquicas de segundo grau.

$$\{\ddot{\bar{a}}_2\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{\bar{a}}_{iso}\} \\ \{\ddot{\bar{a}}_{h2}\} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{a}_2\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{a}_{iso}\} \\ \{\bar{a}_{h2}\} \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

são respectivamente os deslocamentos e as acelerações nodais no sistema de referencia local após a introdução de funções de forma hierárquicas de segundo grau.

.

$$\{\bar{f}_2\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{f}_{iso}\} \\ \{\bar{f}_{h2}\} \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

é o vetor de forças nodais correspondente ao sistema de coordenadas local após a introdução de funções de forma hierárquicas de segundo grau.

De maneira análoga a Equação (5.12), tem-se

$$\{\bar{f}_2\} = [T_2] \{f_2\} \quad (5.33)$$

uma vez que a matriz de transformação é ortogonal, então

$$[T_2]^T = [T_2]^{-1} \quad (5.34)$$

multiplicam-se os membros da Equação (5.32) por  $[T_2]^T$ , obtém

$$\{f_2\} = [T_2]^T \{\bar{f}_2\} \quad (5.35)$$

substituindo a Equação (5.29) na Equação (5.35), tem-se

$$\{f_2\} = [T_2]^T \left( [\bar{M}_2] \cdot \{\ddot{\bar{a}}_2\} + [\bar{K}_2] \cdot \{\bar{a}_2\} \right) \quad (5.36)$$

a equação acima pode ser reescrita

$$\{f_2\} = [T_2]^T [\bar{M}_2] \cdot \{\ddot{\bar{a}}_2\} + [T_2]^T [\bar{K}_2] \cdot \{\bar{a}_2\} \quad (5.37)$$

substituindo a Equação (5.27) na Equação (5.37), tem-se

$$\{f_2\} = [T_2]^T [\bar{M}_2] \cdot [T_2] \{\ddot{a}_2\} + [T_2]^T [\bar{K}_2] \cdot [T_2] \{a_2\} \quad (5.38)$$

uma vez que a relação de rigidez e massa da viga no referencial global é dada pela equação,

$$[M_2] \cdot \{\ddot{a}_2\} + [K_2] \cdot \{a_2\} = \{f_2\} \quad (5.40)$$

tem-se a comparação da Equação (5.38) com a Equação (5.40), conclui-se que as matrizes de rigidez e massa após a introdução de funções de forma hierárquicas de segundo grau são transformados no referencial global utilizando-se as seguintes equações abaixo:

$$[M_2] = [T_2]^T [\bar{M}_2] [T_2] \quad (5.41)$$

$$[K_2] = [T_2]^T [\bar{K}_2] [T_2] \quad (5.42)$$

na qual

$$[M_2] = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{i,h2}] \\ [M_{h2,i}] & [M_{h2,h2}] \end{bmatrix}, \quad [K_2] = \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{i,h2}] \\ [K_{h2,i}] & [K_{h2,h2}] \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

A Equação (5.41) que se referente a matriz de rigidez no referencial global, pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{i,h2}] \\ [K_{h2,i}] & [K_{h2,h2}] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\bar{K}_{iso}] & [\bar{K}_{i,h2}] \\ [\bar{K}_{h2,i}] & [\bar{K}_{h2,h2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 \\ 0 & [T_{h2}] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T [\bar{K}_{iso}] & [T_{iso}]^T [\bar{K}_{i,h2}] \\ [T_{h2}]^T [\bar{K}_{h2,i}] & [T_{h2}]^T [\bar{K}_{h2,h2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 \\ 0 & [T_{h2}] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T [\bar{K}_{iso}] [T_{iso}] & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T [\bar{K}_{h2,h2}] [T_{h2}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.44)$$

A Equação (5.42) que se referente a matriz de massa no referencial global, pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{i,h2}] \\ [M_{h2,i}] & [M_{h2,h2}] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\bar{M}_{iso}] & [\bar{M}_{i,h2}] \\ [\bar{M}_{h2,i}] & [\bar{M}_{h2,h2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 \\ 0 & [T_{h2}] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T [\bar{M}_{iso}] & [T_{iso}]^T [\bar{M}_{i,h2}] \\ [T_{h2}]^T [\bar{M}_{h2,i}] & [T_{h2}]^T [\bar{M}_{h2,h2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 \\ 0 & [T_{h2}] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T [\bar{M}_{iso}] [T_{iso}] & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T [\bar{M}_{h2,h2}] [T_{h2}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Após as manipulações das Equações (5.44) e (5.45) tem-se as matrizes de rigidez e massa, respectivamente no sistema de referencia global após a introdução de funções de forma hierárquicas de segundo grau.

#### 5.4 Matriz de transformação hierárquica de terceiro grau ( $m = 3$ )

As matrizes de rigidez e massa desenvolvidas para o elemento hierárquico de terceiro grau de viga de Timoshenko são obtidas considerando-se o sistema de coordenadas local do



elemento. Para que estas matrizes possam ser aplicadas a estruturas formadas por diversos elementos é necessária a transformação destas do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global antes da solução do problema. Neste caso adiciona-se na Equação (5.26), que se refere as matrizes de transformação isoparamétrica e hierárquica de segundo grau, os componentes das Equações (5.46) à (5.48) obtidas através da figura (5.1).

$$\bar{u}_{h3} = u_{h3} \cos(\mathbf{j}) + w_{h3} \sin(\mathbf{j}) \quad (5.46)$$

$$\bar{w}_{h3} = -u_{h3} \sin(\mathbf{j}) + w_{h3} \cos(\mathbf{j}) \quad (5.47)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{h3} = \mathbf{q}_{h3} \quad (5.48)$$

As Equações (5.46) à (5.48) podem ser apresentadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{h3} \\ \bar{w}_{h3} \\ \bar{\mathbf{q}}_{h3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{j}) & \sin(\mathbf{j}) & 0 \\ -\sin(\mathbf{j}) & \cos(\mathbf{j}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{h3} \\ w_{h3} \\ \mathbf{q}_{h3} \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

na qual  $\cos(\mathbf{j})$ ,  $\sin(\mathbf{j})$  foram definidos pela Equação (5.8).

De uma maneira compacta, a equação (5.49) pode, ainda, ser dada por:

$$\{\bar{a}_{h3}\} = [T_{h3}] \{a_{h3}\} \quad (5.50)$$

Adicionando a equação (5.50) na equação (5.26) obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{a}_{iso}\} \\ \{\bar{a}_{h2}\} \\ \{\bar{a}_{h3}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}] & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h2}\} \\ \{a_{h3}\} \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

na Equação (5.51), as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico e hierárquico de segundo grau já foram definidas anteriormente,  $\{\bar{a}_{h3}\}$  e  $\{a_{h3}\}$  são as coordenadas hierárquicas de terceiro grau no sistema local e global respectivamente e  $[T_{h3}]$  é a matriz de transformação hierárquica de terceiro grau.

A Equação (5.51) pode ser representada na forma que se segue:

$$\{\bar{a}_3\} = [T_3] \cdot \{a_3\} \quad (5.52)$$

na qual

$$[T_3] = \left[ \begin{array}{cc|c} [T_{iso}] & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}] & 0 \\ \hline 0 & 0 & [T_{h3}] \end{array} \right] \quad (5.53)$$

As matrizes hierárquicas de terceiro grau de rigidez e massa no referencial local, bem como o vetor de forças nodais equivalente a diversos tipos de ações podem ser diretamente transformadas para o sistema de referencia global. Assim parte-se de princípio que se dispõe das submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétricas e hierárquico de segundo grau definidas anteriormente, das submatrizes  $[\bar{K}_{i,h3}]$ ,  $[\bar{M}_{i,h3}]$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e hierárquico de terceiro grau, das submatrizes  $[\bar{K}_{h2,h3}]$ ,  $[\bar{M}_{h2,h3}]$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema hierárquico de segundo e terceiro graus e das submatrizes das  $[\bar{K}_{h3,h3}]$ ,  $[\bar{M}_{h3,h3}]$  e  $\{\bar{f}_{h3}\}$  correspondentes ao sistema hierárquico de terceiro, que se relacionam com a habitual equação

$$[\bar{M}_3] \cdot \{\ddot{\bar{a}}_3\} + [\bar{K}_3] \cdot \{\bar{a}_3\} = \{\bar{f}_3\} \quad (5.54)$$

sendo

$$[\bar{M}_3] = \left[ \begin{array}{cc|c} [\bar{M}_{iso}] & [\bar{M}_{i,h2}] & [\bar{M}_{i,h3}] \\ [\bar{M}_{h2,i}] & [\bar{M}_{h2,h2}] & [\bar{M}_{h2,h3}] \\ \hline [\bar{M}_{h3,i}] & [\bar{M}_{h3,h2}] & [\bar{M}_{h3,h3}] \end{array} \right], \quad [\bar{K}_3] = \left[ \begin{array}{cc|c} [\bar{K}_{iso}] & [\bar{K}_{i,h2}] & [\bar{K}_{i,h3}] \\ [\bar{K}_{h2,i}] & [\bar{K}_{h2,h2}] & [\bar{K}_{h2,h3}] \\ \hline [\bar{K}_{h3,i}] & [\bar{K}_{h3,h2}] & [\bar{K}_{h3,h3}] \end{array} \right] \quad (5.55)$$

as matrizes de massa e rigidez respectivamente no referencial local após a introdução de funções de forma hierárquicas de terceiro grau.

$$\{\bar{a}_3\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{a}_{iso}\} \\ \{\bar{a}_{h2}\} \\ \{\bar{a}_{h3}\} \end{array} \right\}, \quad \{\ddot{\bar{a}}_3\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\ddot{\bar{a}}_{iso}\} \\ \{\ddot{\bar{a}}_{h2}\} \\ \{\ddot{\bar{a}}_{h3}\} \end{array} \right\} \quad (5.56)$$

são respectivamente os deslocamento e as acelerações nodais no sistema de referencia local após a introdução de funções de forma hierárquicas de terceiro grau.

$$\{\bar{f}_3\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{f}_{iso}\} \\ \{\bar{f}_{h2}\} \\ \{\bar{f}_{h3}\} \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

o vetor de forças nodais correspondente ao sistema de coordenadas local após a introdução de funções de forma hierárquicas de terceiro grau.

Manipulando as Equações (5.33) à (5.40) com a introdução de funções de forma de terceiro grau, tem-se,

$$[M_3] = [T_3]^T [\bar{M}_3] [T_3] \quad (5.58)$$

$$[K_3] = [T_3]^T [\bar{K}_3] [T_3] \quad (5.59)$$

na qual

$$[M_3] = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{i,h2}] & [M_{i,h3}] \\ [M_{h2,i}] & [M_{h2,h2}] & [M_{h2,h3}] \\ [M_{h3,i}] & [M_{h3,h2}] & [M_{h3,h3}] \end{bmatrix}, [K_3] = \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{i,h2}] & [K_{i,h3}] \\ [K_{h2,i}] & [K_{h2,h2}] & [K_{h2,h3}] \\ [K_{h3,i}] & [K_{h3,h2}] & [K_{h3,h3}] \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

A Equação (5.58) que se referente a matriz de rigidez no referencial global, pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{i,h2}] & [K_{i,h3}] \\ [K_{h2,i}] & [K_{h2,h2}] & [K_{h2,h3}] \\ [K_{h3,i}] & [K_{h3,h2}] & [K_{h3,h3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\bar{K}_{iso}] & [\bar{K}_{i,h2}] & [\bar{K}_{i,h3}] \\ [\bar{K}_{h2,i}] & [\bar{K}_{h2,h2}] & [\bar{K}_{h2,h3}] \\ [\bar{K}_{h3,i}] & [\bar{K}_{h3,h2}] & [\bar{K}_{h3,h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}] & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}] \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Após os calculos a Equação (5.61) torna-se

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{i,h2}] & [K_{i,h3}] \\ [K_{h2,i}] & [K_{h2,h2}] & [K_{h2,h3}] \\ [K_{h3,i}] & [K_{h3,h2}] & [K_{h3,h3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T [\bar{K}_{iso}] [T_{iso}] & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T [\bar{K}_{h2,h2}] [T_{h2}] & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}]^T [\bar{K}_{h3,h3}] [T_{h3}] \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

A Equação (5.59) que se referente a matriz de massa no referencial global, pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{i,h2}] & [M_{i,h3}] \\ [M_{h2,i}] & [M_{h2,h2}] & [M_{h2,h3}] \\ [M_{h3,i}] & [M_{h3,h2}] & [M_{h3,h3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\bar{M}_{iso}] & [\bar{M}_{i,h2}] & [\bar{M}_{i,h3}] \\ [\bar{M}_{h2,i}] & [\bar{M}_{h2,h2}] & [\bar{M}_{h2,h3}] \\ [\bar{M}_{h3,i}] & [\bar{M}_{h3,h2}] & [\bar{M}_{h3,h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}] & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}] \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Após os calculos a Equação (5.63) torna-se

$$\begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{i,h2}] & [M_{i,h3}] \\ [M_{h2,i}] & [M_{h2,h2}] & [M_{h2,h3}] \\ [M_{h3,i}] & [M_{h3,h2}] & [M_{h3,h3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T [\bar{M}_{iso}] [T_{iso}] & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T [\bar{M}_{h2,h2}] [T_{h2}] & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}]^T [\bar{M}_{h3,h3}] [T_{h3}] \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Após as manipulações das Equações (5.62) e (5.64) tem-se as matrizes de rigidez e massa, respectivamente no sistema de coordenada global após a introdução de funções de forma hierárquicas de terceiro grau.

## 5.5 Matriz de transformação hierárquica de quarto grau ( $m = 4$ )

As matrizes de rigidez e massa desenvolvidas para o elemento hierárquico de quarto grau de viga de Timoshenko são obtidas considerando-se o sistema de coordenadas local do elemento. Para que estas matrizes possam ser aplicadas a estruturas formadas por diversos elementos é necessária a transformação destas do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global antes da solução do problema. Neste caso adiciona-se na Equação (5.51), que se refere as matrizes de transformação isoparamétrica e hierárquica de segundo e terceiro graus, os componentes das Equações (5.65) à (5.67) obtidas através da figura (5.1).

$$\bar{u}_{h4} = u_{h4} \cos(\mathbf{j}) + w_{h4} \sin(\mathbf{j}) \quad (5.65)$$

$$\bar{w}_{h4} = -u_{h4} \sin(\mathbf{j}) + w_{h4} \cos(\mathbf{j}) \quad (5.66)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{h4} = \mathbf{q}_{h4} \quad (5.67)$$

As Equações (5.65) à (5.67) podem ser apresentadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{h4} \\ \bar{w}_{h4} \\ \bar{\mathbf{q}}_{h4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{j}) & \sin(\mathbf{j}) & 0 \\ -\sin(\mathbf{j}) & \cos(\mathbf{j}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{h4} \\ w_{h4} \\ \mathbf{q}_{h4} \end{Bmatrix} \quad (5.68)$$

na qual  $\cos(\mathbf{j})$ ,  $\sin(\mathbf{j})$  foram definidos pela Equação (5.8).

De uma maneira compacta, a Equação (5.68) pode, ainda, ser dada por:

$$\{\bar{a}_{h4}\} = [T_{h4}] \{a_{h4}\} \quad (5.69)$$

Adicionando a Equação (5.69) na Equação (5.51) obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{a}_{iso}\} \\ \{\bar{a}_{h2}\} \\ \{\bar{a}_{h3}\} \\ \{\bar{a}_{h4}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & [T_{h2}] & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}] & \vdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & [T_{h4}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a_{iso}\} \\ \{a_{h2}\} \\ \{a_{h3}\} \\ \{a_{h4}\} \end{Bmatrix} \quad (5.70)$$

na Equação (5.70), as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico e hierárquico de segundo e terceiro grau já foram definidas anteriormente,  $\{\bar{a}_{h4}\}$  e  $\{a_{h4}\}$  são as coordenadas hierárquicas de quarto grau no sistema local e global respectivamente e  $[T_{h4}]$  é a matriz de transformação hierárquica de quarto grau.

A Equação (5.70) pode ser representada na forma que se segue:

$$\{\bar{a}_4\} = [T_4] \cdot \{a_4\} \quad (5.71)$$

na qual

$$[T_2] = \left[ \begin{array}{ccc|c} [T_{iso}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}] & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & [T_{h4}] \end{array} \right] \quad (5.72)$$

As matrizes hierárquicas de quarto grau de rigidez e massa no referencial local, bem como o vetor de forças nodais equivalente a diversos tipos de ações podem ser diretamente transformadas para o sistema de referencia global. Assim parte-se de princípio que se dispõe das submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico e hierárquico de segundo e terceiro graus definidas anteriormente, das submatrizes  $[\bar{K}_{i,h4}]$ ,  $[\bar{M}_{i,h4}]$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e hierárquico de quarto grau, das submatrizes  $[\bar{K}_{h2,h4}]$ ,  $[\bar{M}_{h2,h4}]$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema hierárquico de segundo e quarto graus, das submatrizes  $[\bar{K}_{h3,h4}]$ ,  $[\bar{M}_{h3,h4}]$  correspondentes ao sistema hierárquico de terceiro e quarto graus e das submatrizes  $[\bar{K}_{h4,h4}]$ ,  $[\bar{M}_{h4,h4}]$  e  $\{\bar{f}_{h4}\}$  correspondentes ao sistema hierárquico de quarto, que se relacionam com a habitual equação

$$[\bar{M}_4] \cdot \{\ddot{\bar{a}}_4\} + [\bar{K}_4] \cdot \{\bar{a}_4\} = \{\bar{f}_4\} \quad (5.73)$$

sendo

$$[\bar{M}_4] = \left[ \begin{array}{ccc|c} [\bar{M}_{iso}] & [\bar{M}_{i,h2}] & [\bar{M}_{i,h3}] & [\bar{M}_{i,h4}] \\ [\bar{M}_{h2,i}] & [\bar{M}_{h2,h2}] & [\bar{M}_{h2,h3}] & [\bar{M}_{h2,h4}] \\ [\bar{M}_{h3,i}] & [\bar{M}_{h3,h2}] & [\bar{M}_{h3,h3}] & [\bar{M}_{h3,h4}] \\ \hline [\bar{M}_{h4,i}] & [\bar{M}_{h4,h2}] & [\bar{M}_{h4,h3}] & [\bar{M}_{h4,h4}] \end{array} \right], \quad [\bar{K}_4] = \left[ \begin{array}{ccc|c} [\bar{K}_{iso}] & [\bar{K}_{i,h2}] & [\bar{K}_{i,h3}] & [\bar{K}_{i,h4}] \\ [\bar{K}_{h2,i}] & [\bar{K}_{h2,h2}] & [\bar{K}_{h2,h3}] & [\bar{K}_{h2,h4}] \\ [\bar{K}_{h3,i}] & [\bar{K}_{h3,h2}] & [\bar{K}_{h3,h3}] & [\bar{K}_{h3,h4}] \\ \hline [\bar{K}_{h4,i}] & [\bar{K}_{h4,h2}] & [\bar{K}_{h4,h3}] & [\bar{K}_{h4,h4}] \end{array} \right] \quad (5.74)$$

matrizes de massa e rigidez respectivamente no referencial local após a introdução de funções de forma hierárquicas de quarto grau.

$$\{\bar{a}_4\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\bar{a}_{iso}\} \\ \{\bar{a}_{h2}\} \\ \{\bar{a}_{h3}\} \\ \{\bar{a}_{h4}\} \end{array} \right\}, \quad \{\ddot{\bar{a}}_4\} = \left\{ \begin{array}{l} \{\ddot{\bar{a}}_{iso}\} \\ \{\ddot{\bar{a}}_{h2}\} \\ \{\ddot{\bar{a}}_{h3}\} \\ \{\ddot{\bar{a}}_{h4}\} \end{array} \right\} \quad (5.75)$$

são respectivamente os deslocamento e as acelerações nodais no sistema de referencia local após a introdução de funções de forma hierárquicas de quarto grau.

$$\{\bar{f}_4\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{f}_{iso}\} \\ \{\bar{f}_{h2}\} \\ \{\bar{f}_{h3}\} \\ \{\bar{f}_{h4}\} \end{Bmatrix} \quad (5.76)$$

o vetor de forças nodais correspondente ao sistema de coordenadas local após a introdução de funções de forma hierárquicas de quarto grau.

Manipulando as Equações (5.33) à (5.40) com a introdução de funções de forma de quarto grau, tem-se,

$$[M_4] = [T_4]^T [\bar{M}_4] [T_4] \quad (5.77)$$

$$[K_4] = [T_4]^T [\bar{K}_4] [T_4] \quad (5.78)$$

na qual

$$[M_4] = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{i,h2}] & [M_{i,h3}] & [M_{i,h4}] \\ [M_{h2,i}] & [M_{h2,h2}] & [M_{h2,h3}] & [M_{h2,h4}] \\ [M_{h3,i}] & [M_{h3,h2}] & [M_{h3,h3}] & [M_{h3,h4}] \\ [M_{h4,i}] & [M_{h4,h2}] & [M_{h4,h3}] & [M_{h4,h4}] \end{bmatrix}, [K_4] = \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{i,h2}] & [K_{i,h3}] & [K_{i,h4}] \\ [K_{h2,i}] & [K_{h2,h2}] & [K_{h2,h3}] & [K_{h2,h4}] \\ [K_{h3,i}] & [K_{h3,h2}] & [K_{h3,h3}] & [K_{h3,h4}] \\ [K_{h4,i}] & [K_{h4,h2}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4,h4}] \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

A Equação (5.77) que se referente a matriz de rigidez no referencial global, pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{i,h2}] & [K_{i,h3}] & [K_{i,h4}] \\ [K_{h2,i}] & [K_{h2,h2}] & [K_{h2,h3}] & [K_{h2,h4}] \\ [K_{h3,i}] & [K_{h3,h2}] & [K_{h3,h3}] & [K_{h3,h4}] \\ [K_{h4,i}] & [K_{h4,h2}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4,h4}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}]^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T_{h4}]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\bar{K}_{iso}] & [\bar{K}_{i,h2}] & [\bar{K}_{i,h3}] & [\bar{K}_{i,h4}] \\ [\bar{K}_{h2,i}] & [\bar{K}_{h2,h2}] & [\bar{K}_{h2,h3}] & [\bar{K}_{h2,h4}] \\ [\bar{K}_{h3,i}] & [\bar{K}_{h3,h2}] & [\bar{K}_{h3,h3}] & [\bar{K}_{h3,h4}] \\ [\bar{K}_{h4,i}] & [\bar{K}_{h4,h2}] & [\bar{K}_{h4,h3}] & [\bar{K}_{h4,h4}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [T_{iso}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T_{h4}] \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Após os calculos a equação (5.80) torna-se

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{i,h2}] & [K_{i,h3}] & [K_{i,h4}] \\ [K_{h2,i}] & [K_{h2,h2}] & [K_{h2,h3}] & [K_{h2,h4}] \\ [K_{h3,i}] & [K_{h3,h2}] & [K_{h3,h3}] & [K_{h3,h4}] \\ [K_{h4,i}] & [K_{h4,h2}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4,h4}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T [\bar{K}_{iso}] [T_{iso}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T [\bar{K}_{h2,h2}] [T_{h2}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}]^T [\bar{K}_{h3,h3}] [T_{h3}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T_{h4}]^T [\bar{K}_{h4,h4}] [T_{h4}] \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

A Equação (5.78) que se referente a matriz de massa no referencial global, pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{i,h2}] & [M_{i,h3}] & [M_{i,h4}] \\ [M_{h2,i}] & [M_{h2,h2}] & [M_{h2,h3}] & [M_{h2,h4}] \\ [M_{h3,i}] & [M_{h3,h2}] & [M_{h3,h3}] & [M_{h3,h4}] \\ [M_{h4,i}] & [M_{h4,h2}] & [M_{h4,h3}] & [M_{h4,h4}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}]^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T_{h4}]^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\bar{M}_{iso}] & [\bar{M}_{i,h2}] & [\bar{M}_{i,h3}] & [\bar{M}_{i,h4}] \\ [\bar{M}_{h2,i}] & [\bar{M}_{h2,h2}] & [\bar{M}_{h2,h3}] & [\bar{M}_{h2,h4}] \\ [\bar{M}_{h3,i}] & [\bar{M}_{h3,h2}] & [\bar{M}_{h3,h3}] & [\bar{M}_{h3,h4}] \\ [\bar{M}_{h4,i}] & [\bar{M}_{h4,h2}] & [\bar{M}_{h4,h3}] & [\bar{M}_{h4,h4}] \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Após os calculos a equação (5.82) torna-se

$$\begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{i,h2}] & [M_{i,h3}] & [M_{i,h4}] \\ [M_{h2,i}] & [M_{h2,h2}] & [M_{h2,h3}] & [M_{h2,h4}] \\ [M_{h3,i}] & [M_{h3,h2}] & [M_{h3,h3}] & [M_{h3,h4}] \\ [M_{h4,i}] & [M_{h4,h2}] & [M_{h4,h3}] & [M_{h4,h4}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{iso}]^T [\bar{M}_{iso}] [T_{iso}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_{h2}]^T [\bar{M}_{h2,h2}] [T_{h2}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T_{h3}]^T [\bar{M}_{h3,h3}] [T_{h3}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T_{h4}]^T [\bar{M}_{h4,h4}] [T_{h4}] \end{bmatrix} \quad (5.83)$$



Após as manipulações das Equações (5.81) e (5.83) tem-se as matrizes de rigidez e massa, respectivamente no sistema de coordenada global após a introdução de funções de forma hierárquicas de quarto grau.

## 6 FORMULAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

### 6.1 Introdução

Encontradas as equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações que governe a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem deste conjunto de equações está baseado na necessidade de que o equilíbrio se verifique por todo o sistema. Como as condições de equilíbrio já foram impostas dentro de cada elemento, necessita-se, agora, estabelecer as condições para que cada nó do sistema discretizado esteja em equilíbrio. Para tanto, é estabelecido um esquema de numeração global, que identifica cada nó do sistema discretizado. Em seguida é criada a topologia, que especifica quais nós do sistema pertencem a quais elementos, ou seja, especificam a correspondência entre os nós do sistema discretizado e os nós dos elementos. Esta topologia, dada como entrada do programa computacional, serve para definir a conectividade da malha de elementos.

### 6.2 Determinação das matrizes de rigidez e de massa globais

Para que um nó  $i$ , genérico, do sistema esteja em equilíbrio, as componentes do vetor de carga  $\{f_i\}$ , nele atuantes, devem ser iguais à soma das componentes das forças  $\{f_i^e\}$  de cada elemento, que concorre para o nó  $i$ . Portanto,

$$f_i = \sum_{e=1}^{ne} \{f_i^e\} \quad (6.1)$$

na qual  $ne$  é o número total de elementos, que compõem o sistema estrutural discretizado e  $\{f_i^e\}$  é o vetor de carga, correspondente ao sistema isoparamétrico, associado ao nó  $i$  do sistema. O mesmo procedimento é admitido para as componentes das forças  $\{f_{hm}\}$ , relacionada com o sistema hierárquico.

$$f_{hm} = \sum_{e=1}^{ne} \{f_{hm}^e\} \quad (6.2)$$

na qual  $\{f_{hm}^e\}$  é o vetor de carga correspondente ao elemento hierárquico.

Conhecendo a correspondência entre os nós dos elementos e os nós do sistema, pode-se escrever para cada elemento  $e$  do sistema, de forma compacta, que:

$$[M] \cdot \{\ddot{a}\} + [K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad (6.3)$$

na qual,  $[M]$  é a matriz de massa global do sistema:

$$[M] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{ne} [M_i^e] & \sum_{e=1}^{ne} [M_{i,hm}^e] \\ \sum_{e=1}^{ne} [M_{hm,i}^e] & \sum_{e=1}^{ne} [M_{hm}^e] \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$[K]$  é a matriz de rigidez global do sistema:

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^{ne} [K_i^e] & \sum_{e=1}^{ne} [K_{i,hm}^e] \\ \sum_{e=1}^{ne} [K_{hm,i}^e] & \sum_{e=1}^{ne} [K_{hm}^e] \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$\{\ddot{a}\}$  é o vetor relacionado com as acelerações nodais e parâmetros hierárquicos do sistema:

$$\{\ddot{a}\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{a}_i\} \\ \{\ddot{a}_{hm}\} \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

$\{a\}$ , o vetor relacionado com os deslocamentos nodais e parâmetros hierárquicos do sistema:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} \{a_i\} \\ \{a_{hm}\} \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

e  $\{f\}$  é o vetor de carga global:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \{f_i\} \\ \{f_{hm}\} \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Nas Equações (6.4), (6.5), (6.6) e (6.7),  $\{a_i\}$  e  $\{\ddot{a}_i\}$  são, respectivamente, os deslocamentos e acelerações nodais correspondentes aos nós do sistema,  $\{a_{hm}\}$  e  $\{\ddot{a}_{hm}\}$  são os parâmetros hierárquicos correspondentes ao refinamento hierárquico do sistema,  $[K_i^e]$  e  $[M_i^e]$  são respectivamente, as submatrizes de rigidez e massa correspondentes ao elemento isoparamétrico,  $[K_{i,hm}^e]$  e  $[M_{i,hm}^e]$  são, respectivamente, as submatrizes de rigidez e massa que caracterizam o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e o elemento hierárquico,  $[K_{hm,i}^e]$  e  $[M_{hm,i}^e]$  são, respectivamente, as submatrizes de rigidez e massa que caracterizam o acoplamento entre o elemento hierárquico e o elemento isoparamétrico,  $[K_{hm}^e]$  e  $[M_{hm}^e]$  são respectivamente, as submatrizes de rigidez e massa que caracterizam o elemento hierárquico.

### 6.3 Análise dinâmica

A Equação (6.3) representa o caso geral de vibração forçada para sistemas não amortecidos e, se não existem forças atuantes no sistema, tem-se o caso de vibração livre:

$$[M] \cdot \{\ddot{a}\} + [K] \cdot \{a\} = \{0\} \quad (6.9)$$

Admitindo-se movimento harmônico, uma solução para esta equação pode ser escrita como (Zienkiewicz, 1989):

$$\{a\} = \{f\} \cdot e^{i\omega t} \quad (6.10)$$

na qual  $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ ,  $\{f\}$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\omega$  a frequência angular.

A Equação (6.9) pode, então, ser reescrita na seguinte forma:

$$([K] - I \cdot [M]) \cdot \{f\} = \{0\} \quad (6.11)$$

na qual  $[K]$  e  $[M]$  são as matrizes de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente, e  $I$  o quadrado da frequência angular. Entretanto, este problema só pode ser resolvido após a imposição das condições de contorno do sistema estrutural em análise. Este procedimento é efetuado por ocasião da determinação das matrizes de rigidez e de massa globais, onde, para cada condição de contorno (vínculo), são eliminadas das matrizes de rigidez e massa globais a linha e a coluna correspondentes. Para um sistema estrutural com  $n$  graus de liberdade pode-se escrever que:

$$[K] \cdot [\Phi] = [M] \cdot [\Phi] \cdot [\Lambda] \quad (6.12)$$

na qual  $[K]$  e  $[M]$  são as matrizes  $(n \times n)$  de rigidez e de massa globais do sistema, respectivamente,  $[\Lambda]$  a matriz diagonal  $(n \times n)$  que contém os  $n$  autovalores  $I_i$  e  $[\Phi] = [\{f_1\}, \dots, \{f_i\}, \dots, \{f_n\}]$  a matriz  $(n \times n)$  que contém os  $n$  autovetores  $\{f_i\}$ .

O processo de resolução do problema de autovalor generalizado consiste na obtenção das matrizes  $[\Lambda]$  e  $[\Phi]$ . Para tanto se resolve, primeiramente, o sistema isoparamétrico:

$$[K_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] = [M_{iso}] \cdot [\Phi_{iso}] \cdot [\Lambda_{iso}] \quad (6.13)$$

Sendo  $n_{iso}$  o número de graus de liberdade da análise isoparamétrica,  $[K_{iso}]$ ,  $[M_{iso}]$ ,  $[\Phi_{iso}]$  e  $[\Lambda_{iso}]$  são submatrizes  $(n_{iso} \times n_{iso})$  correspondentes ao sistema isoparamétrico. Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da primeira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquica de segundo grau:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h2}] \\ [K_{h2,iso}] & [K_{h2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h2}] \\ [\Phi_{h2,iso}] & [\Phi_{h2}] \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{iso,h2}] \\ [M_{h2,iso}] & [M_{h2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h2}] \\ [\Phi_{h2,iso}] & [\Phi_{h2}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & [\Lambda_{iso,h2}] \\ [\Lambda_{h2,iso}] & [\Lambda_{h2}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.14)$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico já foram obtidas anteriormente na análise inicial. Sendo  $n_{h2}$  o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na primeira reanálise,  $[K_{iso,h2}]$ ,  $[M_{iso,h2}]$ ,  $[\Phi_{iso,h2}]$  e  $[\Lambda_{iso,h2}]$  são submatrizes  $(n_{iso} \times n_{h2})$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise,  $[K_{h2}]$ ,  $[M_{h2}]$ ,  $[\Phi_{h2}]$  e  $[\Lambda_{h2}]$  são submatrizes  $(n_{h2} \times n_{h2})$  correspondente ao sistema hierárquico para a primeira reanálise.

Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da segunda reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquica de terceiro grau:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h2}] & [K_{iso,h3}] \\ [K_{h2,iso}] & [K_{h2}] & [K_{h2,h3}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3,h2}] & [K_{h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h2}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h2,iso}] & [\Phi_{h2}] & [\Phi_{h2,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3,h2}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{iso,h2}] & [M_{iso,h3}] \\ [M_{h2,iso}] & [M_{h2}] & [M_{h2,h3}] \\ [M_{h3,iso}] & [M_{h3,h2}] & [M_{h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h2}] & [\Phi_{iso,h3}] \\ [\Phi_{h2,iso}] & [\Phi_{h2}] & [\Phi_{h2,h3}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3,h2}] & [\Phi_{h3}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & [\Lambda_{iso,h2}] & [\Lambda_{iso,h3}] \\ [\Lambda_{h2,iso}] & [\Lambda_{h2}] & [\Lambda_{h2,h3}] \\ [\Lambda_{h3,iso}] & [\Lambda_{h3,h2}] & [\Lambda_{h3}] \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico e hierárquico de segundo grau já foram obtidos anteriormente na análise inicial e na primeira reanálise. Sendo  $n_{h3}$  o número total de variáveis hierárquica introduzidas na segunda reanálise,  $[K_{iso,h3}]$ ,  $[M_{iso,h3}]$ ,  $[\Phi_{iso,h3}]$  e  $[\Lambda_{iso,h3}]$  são submatrizes  $(n_{iso} \times n_{h3})$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise,  $[K_{h2,h3}]$ ,  $[M_{h2,h3}]$ ,  $[\Phi_{h2,h3}]$  e  $[\Lambda_{h2,h3}]$  são submatrizes  $(n_{h2} \times n_{h3})$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise e o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise,  $[K_{h3}]$ ,  $[M_{h3}]$ ,  $[\Phi_{h3}]$  e  $[\Lambda_{h3}]$  são submatrizes  $(n_{h3} \times n_{h3})$  correspondentes ao sistema hierárquico para a segunda reanálise.

Pode-se fazer o refinamento da solução obtida através da terceira reanálise do sistema introduzindo funções de forma hierárquica de quarto grau:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [K_{iso}] & [K_{iso,h2}] & [K_{iso,h3}] & [K_{iso,h4}] \\ [K_{h2,iso}] & [K_{h2}] & [K_{h2,h3}] & [K_{h2,h4}] \\ [K_{h3,iso}] & [K_{h3,h2}] & [K_{h3}] & [K_{h3,h4}] \\ [K_{h4,iso}] & [K_{h4,h2}] & [K_{h4,h3}] & [K_{h4}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h2}] & [\Phi_{iso,h3}] & [\Phi_{iso,h4}] \\ [\Phi_{h2,iso}] & [\Phi_{h2}] & [\Phi_{h2,h3}] & [\Phi_{h2,h4}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3,h2}] & [\Phi_{h3}] & [\Phi_{h3,h4}] \\ [\Phi_{h4,iso}] & [\Phi_{h4,h2}] & [\Phi_{h4,h3}] & [\Phi_{h4}] \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} [M_{iso}] & [M_{iso,h2}] & [M_{iso,h3}] & [M_{iso,h4}] \\ [M_{h2,iso}] & [M_{h2}] & [M_{h2,h3}] & [M_{h2,h4}] \\ [M_{h3,iso}] & [M_{h3,h2}] & [M_{h3}] & [M_{h3,h4}] \\ [M_{h4,iso}] & [M_{h4,h2}] & [M_{h4,h3}] & [M_{h4}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & [\Phi_{iso,h2}] & [\Phi_{iso,h3}] & [\Phi_{iso,h4}] \\ [\Phi_{h2,iso}] & [\Phi_{h2}] & [\Phi_{h2,h3}] & [\Phi_{h2,h4}] \\ [\Phi_{h3,iso}] & [\Phi_{h3,h2}] & [\Phi_{h3}] & [\Phi_{h3,h4}] \\ [\Phi_{h4,iso}] & [\Phi_{h4,h2}] & [\Phi_{h4,h3}] & [\Phi_{h4}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & [\Lambda_{iso,h2}] & [\Lambda_{iso,h3}] & [\Lambda_{iso,h4}] \\ [\Lambda_{h2,iso}] & [\Lambda_{h2}] & [\Lambda_{h2,h3}] & [\Lambda_{h2,h4}] \\ [\Lambda_{h3,iso}] & [\Lambda_{h3,h2}] & [\Lambda_{h3}] & [\Lambda_{h3,h4}] \\ [\Lambda_{h4,iso}] & [\Lambda_{h4,h2}] & [\Lambda_{h4,h3}] & [\Lambda_{h4}] \end{bmatrix} \quad (6.16)
\end{aligned}$$

na qual as submatrizes correspondentes ao sistema isoparamétrico, hierárquico de segundo e terceiro graus já foram obtidos anteriormente na análise inicial e na primeira reanálise. Sendo  $n_{h4}$  o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na terceira reanálise,  $[K_{iso,h4}]$ ,  $[M_{iso,h4}]$ ,  $[\Phi_{iso,h4}]$  e  $[\Lambda_{iso,h4}]$  são submatrizes  $(n_{iso} \times n_{h4})$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a terceira reanálise,  $[K_{h2,h4}]$ ,  $[M_{h2,h4}]$ ,  $[\Phi_{h2,h4}]$  e  $[\Lambda_{h2,h4}]$  são submatrizes  $(n_{h2} \times n_{h4})$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema hierárquico relacionado com a primeira reanálise e o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise,  $[K_{h3,h4}]$ ,  $[M_{h3,h4}]$ ,  $[\Phi_{h3,h4}]$  e  $[\Lambda_{h3,h4}]$  são submatrizes  $(n_{h3} \times n_{h4})$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise e o sistema hierárquico relacionado com a segunda reanálise,  $[K_{h4}]$ ,  $[M_{h4}]$ ,  $[\Phi_{h4}]$  e  $[\Lambda_{h4}]$  são submatrizes  $(n_{h4} \times n_{h4})$  correspondentes ao sistema hierárquico para segunda reanálise.

Verifica-se que para cada reanálise é necessário apenas calcular as submatrizes relacionadas com as novas variáveis hierárquicas introduzidas. As submatrizes calculadas nas análises anteriores permanecem inalteradas o que diminui o esforço computacional de maneira apreciável.

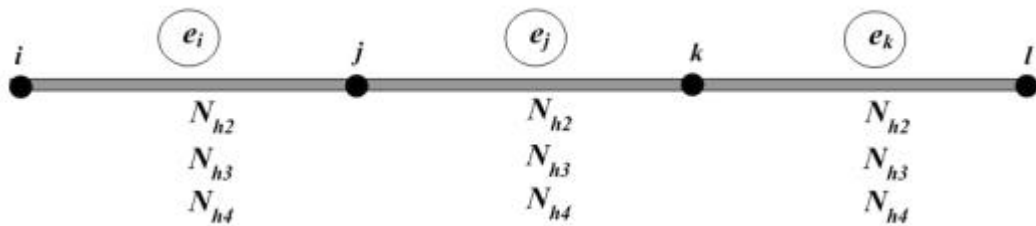
Como o algoritmo desenvolvido permite que se escolham, os graus das funções de forma hierárquicas a serem introduzidas, bem como as variáveis hierárquicas de interesse,

pode-se ter tantas reanálises quanto se queira. Assim, de uma forma geral, a  $i$ -ésima reanálise pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} [K_{iso}] & \dots & [K_{iso,hi}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [K_{hi,iso}] & \dots & [K_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \dots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \dots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M_{iso}] & \dots & [M_{iso,hi}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [M_{hi,iso}] & \dots & [M_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Phi_{iso}] & \dots & [\Phi_{iso,hi}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\Phi_{hi,iso}] & \dots & [\Phi_{hi}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\Lambda_{iso}] & \dots & [\Lambda_{iso,hi}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [\Lambda_{hi,iso}] & \dots & [\Lambda_{hi}] \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

na qual todas as submatrizes anteriores àquelas relacionadas com a reanálise  $i$  já foram obtidas. Sendo  $n_{hi}$  o número total de variáveis hierárquicas introduzidas na  $i$ -ésima reanálise,  $[K_{iso,hi}]$ ,  $[M_{iso,hi}]$ ,  $[\Phi_{iso,hi}]$  e  $[\Lambda_{iso,hi}]$  as submatrizes  $(n_{iso} \times n_{hi})$  correspondentes ao acoplamento entre o sistema isoparamétrico e o sistema hierárquico relacionado com a  $i$ -ésima reanálise,  $[K_{hi}]$ ,  $[M_{hi}]$ ,  $[\Phi_{hi}]$  e  $[\Lambda_{hi}]$  as submatrizes  $(n_{hi} \times n_{hi})$  correspondentes ao sistema hierárquico relacionado com a  $i$ -ésima reanálise.

Até este estágio, o refinamento hierárquico foi efetuado adicionando-se funções de forma hierárquicas de segundo, terceiro e quarto grau ao longo dos elementos como mostra a figura 6.1.



**Figura 6.1** Elementos com funções hierárquicas de 2º, 3º e 4º graus.

Então será apresentado no capítulo seguinte um processo adaptativo de elementos hierárquicos que é combinado com um conjunto de dois estimadores de erro  $a$ -posteriori. Esses estimadores possibilitam, empregar expansões polinomiais ao longo dos elementos, podendo assim identificar os elementos mais carentes de refinamento, gerando novos graus de liberdade hierárquicos, sempre que requeridos pela magnitude do erro envolvido na análise.



## 7 ESTIMADORES DE ERRO

### 7.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar um indicador local e um estimador global como estimadores de erro  $\alpha$ -posteriori, cuja técnica utilizada fornecerá malhas mais confiáveis.

Nos trabalhos de Babuska, Rheinboldt (1978), (1978), (1981), encontram-se sugestões para medidas e estimativas de erro  $\alpha$ -posteriori para elementos bilineares, as quais têm sido consideradas suficientemente capazes para indicar com certa segurança os resultados de uma solução. Com base neste trabalho, outros estimadores de erro, usados em esquemas adaptativos, têm sido testados em malhas de elementos finitos para gerar resultados mais confiáveis Kelly (1983), Gago (1983), Eriksson (1986), Zienkiewicz e Zhu (1987). Ao empregar um método numérico tal como o método dos elementos finitos na resolução de um problema físico, três tipos de erros podem ocorrer, Ribeiro (1986):

- 1º) O primeiro e o mais importante é o erro devido à discretização, que se traduz no não cumprimento das equações diferenciais que regem o problema;
- 2º) O segundo correspondente aos erros de truncamento, ocorridos durante o cálculo computacional, os quais podem ser minimizados, utilizando-se computadores de alta precisão;
- 3º) O terceiro tipo de erro é causado pelas simplificações envolvidas na construção do modelo matemático representativo do problema.

Trata-se, neste capítulo, do primeiro tipo de erro, ou seja, do erro proveniente da discretização do modelo matemático. Este é o erro que se tenta minimizar através de refinamentos adaptativos. Para um estudo mais detalhado da questão, recomenda-se a leitura dos trabalhos de Zienkiewicz (1983), Babuska (1981), Kelly (1984), Szabo e Sahrman (1988).

### 7.2 Estimadores de erro $\alpha$ -posteriori

Estimadores de erro  $\alpha$ -posteriori são aqueles obtidos com base em informações da própria solução cujo erro deseja-se estimar.

A obtenção de estimativas de erro *a-posteriori* tem-se mostrado um importante tópico na análise por elementos finitos e muitas pesquisas têm sido voltadas para esta área.

Utilizando a formulação paramétrica hierárquica do método dos elementos finitos é possível obter estimadores de erro *a-posteriori* Friberg (1987), os quais podem ser aplicados em processos de refinamento na solução de problemas de autovalor generalizado.

Então serão deduzido um indicador de erro como sendo um estimador de erro local *a-posteriori* na análise de vibrações livres, que pode ser usado em elementos de forma arbitrária e aplicado a qualquer espécie de problema linear Friberg (1986).

A seguir, serão utilizada uma expressão para um indicador de erro, o qual poderá ser usado como um estimador de erro *a-posteriori*, dentro do conceito hierárquico do método dos elementos finitos.

Um indicador de erro, sugerido por Friberg (1986), é obtido a partir da equação abaixo,

$$\mathbf{I}_i = \frac{k_i}{m_i} \quad (7.1)$$

na qual  $\mathbf{I}_i$  é *i*-ésimo autovalor,  $k_i$  é o coeficiente de rigidez modal e  $m_i$  é o coeficiente de massa modal.

Os coeficientes de rigidez modal e de massa modal são definidos, respectivamente, por

$$k_i = \{\mathbf{f}_i\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{f}_i\} \quad (7.2)$$

$$m_i = \{\mathbf{f}_i\}^T [\mathbf{M}] \{\mathbf{f}_i\} \quad (7.3)$$

na qual  $[\mathbf{K}]$  e  $[\mathbf{M}]$  são as matrizes de rigidez e de massa globais, respectivamente. O vetor coluna  $\{\mathbf{f}_i\}$  é o *i*-ésimo modo próprio de vibração do sistema a ser refinado. Nesse ponto, portanto, é assumido que os autovalores e os correspondentes autovetores ( $\mathbf{I}_{i(n)}, \{\mathbf{f}_i\}_{(n)}$ ) do intervalo de frequência de interesse, já tenham sido encontrados em uma primeira solução para uma certa discretização. A notação  $(n)$  indica o número de graus de liberdades para esta primeira aproximação. Assim,

$$\mathbf{I}_{i(n)} = \frac{k_{i(n)}}{m_{i(n)}} = \frac{\{\mathbf{f}_i\}_n^T [\mathbf{K}]_{n,n} \{\mathbf{f}_i\}_n}{\{\mathbf{f}_i\}_n^T [\mathbf{M}]_{n,n} \{\mathbf{f}_i\}_n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.4)$$

Procedendo-se um refinamento hierárquico com a introdução de  $p$  graus de liberdade, tem-se, analogamente,

$$\bar{\mathbf{I}}_{j(n+p)} = \frac{k_{j(n+p)}}{m_{j(n+p)}} = \frac{\{\mathbf{y}_j\}_{n+p}^T [\mathbf{K}]_{n+p,n+p} \{\mathbf{y}_j\}_{n+p}}{\{\mathbf{y}_j\}_{n+p}^T [\mathbf{M}]_{n+p,n+p} \{\mathbf{y}_j\}_{n+p}} \quad j = 1, 2, \dots, n+p \quad (7.5)$$

na qual  $\bar{\mathbf{I}}_{j(n+p)}$  corresponde ao  $j$ -ésimo autovalor, com modo próprio  $\{\mathbf{y}_j\}_{n+p}$ , obtidos com o refinamento hierárquico.

As matrizes globais de rigidez e massa apresentam as seguintes formas,

$$[\mathbf{K}]_{n+p,n+p} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}]_{n,n} & [\mathbf{K}]_{n,p} \\ [\mathbf{K}]_{p,n} & [\mathbf{K}]_{p,p} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$[\mathbf{M}]_{n+p,n+p} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}]_{n,n} & [\mathbf{M}]_{n,p} \\ [\mathbf{M}]_{p,n} & [\mathbf{M}]_{p,p} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

O vetores  $\{\mathbf{y}_j\}_{n+p}$  e  $\bar{\mathbf{I}}_{j(n+p)}$  podem ser separados,

$$\{\mathbf{y}_j\}_{n+p} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{y}_i\}_n \\ \{\mathbf{y}_j\}_p \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{I}}_{j(n+p)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{i(n)} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{I}}_{j(p)} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

A estimativa do erro relativo  $e_i$  para o  $i$ -ésimo autovalor para um possível refinamento é dado por,

$$e_i = \frac{\mathbf{I}_{i(n)} - \bar{\mathbf{I}}_{i(p)}}{\mathbf{I}_{i(n)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.9)$$

interpretando um autovalor  $\mathbf{I}_i$  como sendo uma função de duas variáveis independentes  $k_i$  e  $m_i$ , a expansão da série de Taylor da Equação (7.1) é dada por

$$I_i(k_i + \Delta k_i, m_i + \Delta m_i) = I_i(k_i, m_i) + \Delta k_i \frac{\partial}{\partial k_i} I_i(k_i, m_i) + \Delta m_i \frac{\partial}{\partial m_i} I_i(k_i, m_i) + \dots \quad (7.10)$$

Fazendo

$$\Delta I_i = I_i(k_i + \Delta k_i, m_i + \Delta m_i) - I_i(k_i, m_i) \quad (7.11)$$

e tendo-se que

$$I_i(k_i, m_i) = \frac{k_i}{m_i} \quad (7.12)$$

a Equação (7.12) torna-se,

$$\Delta I_i \cong \frac{\Delta k_i}{m_i} - \frac{k_i \Delta m_i}{m_i^2} \quad (7.13)$$

Pelo uso da Equação (7.1), uma aproximação para a relativa troca de um autovalor pode ser escrita como,

$$\frac{\Delta I_i}{I_i} \cong \frac{\Delta k_i - I_i \Delta m_i}{k_i} \quad (7.14)$$

Usando as Equações (7.9) e (7.14), uma aproximação para o erro relativo a um autovalor em um refinamento hierárquico é

$$e_i = \frac{\Delta k_i - I_{i(n)} \Delta m_i}{k_{i(n)}} \quad (7.15)$$

fazendo

$$\Delta k_i = k_{i(n)} - k_{i(n+p)} \quad (7.16)$$

e

$$\Delta m_i = m_{i(n)} - m_{i(n+p)} \quad (7.17)$$

Assumindo-se que as matrizes  $[K]_{n+p, n+p}$  e  $[M]_{n+p, n+p}$  são simétricas, e usando as Equações (7.4) à (7.8), tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta k_i &= \{\mathbf{f}_i\}_n^T [K]_{n, n} \{\mathbf{f}_i\}_n - \{\mathbf{y}_i\}_{n+p}^T [K]_{n+p, n+p} \{\mathbf{y}_i\}_{n+p} \\ &= \{\mathbf{f}_i\}_n^T [K]_{n, n} \{\mathbf{f}_i\}_n - \{\mathbf{y}_i\}_p^T [K]_{p, n} \{\mathbf{y}_i\}_n \\ &\quad - 2 \{\mathbf{f}_i\}_p^T [K]_{p, n} \{\mathbf{f}_i\}_n - \{\mathbf{y}_i\}_p^T [K]_{p, p} \{\mathbf{y}_i\}_p \end{aligned} \quad (7.18)$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} \Delta m_i &= \{\mathbf{f}_i\}_n^T [M]_{n, n} \{\mathbf{f}_i\}_n - \{\mathbf{y}_i\}_{n+p}^T [M]_{n+p, n+p} \{\mathbf{y}_i\}_{n+p} \\ &= \{\mathbf{f}_i\}_n^T [M]_{n, n} \{\mathbf{f}_i\}_n - \{\mathbf{y}_i\}_p^T [M]_{p, n} \{\mathbf{y}_i\}_n \\ &\quad - 2 \{\mathbf{f}_i\}_p^T [M]_{p, n} \{\mathbf{f}_i\}_n - \{\mathbf{y}_i\}_p^T [M]_{p, p} \{\mathbf{y}_i\}_p \end{aligned} \quad (7.19)$$

Para encontrar um indicador de erro que possa ser usado como estimador de erro *a-posteriori*, algumas hipóteses devem ser consideradas. Por exemplo, assume-se que

$$\{\mathbf{y}_i\}_n \cong \{\mathbf{f}_i\}_n \quad (7.20)$$

com esta aproximação, os dois primeiros termos do lado direito de ambas as Equações (7.18) e (7.19) se cancelam. Daí

$$\Delta k_i = -2 \{\mathbf{y}_i\}_p^T [K]_{p, n} \{\mathbf{f}_i\}_n - \{\mathbf{y}_i\}_p^T [K]_{p, p} \{\mathbf{y}_i\}_p \quad (7.21)$$

e

$$\Delta m_i = -2 \{\mathbf{y}_i\}_p^T [M]_{p, n} \{\mathbf{f}_i\}_n - \{\mathbf{y}_i\}_p^T [M]_{p, p} \{\mathbf{y}_i\}_p \quad (7.22)$$

Além disso, é preciso fazer uma estimativa do vetor  $\{\mathbf{y}_i\}_p$ . Em um refinamento hierárquico, o problema de autovalor generalizado torna-se

$$\left( \begin{bmatrix} [K]_{n,n} & [K]_{n,p} \\ [K]_{p,n} & [K]_{p,p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{i(n)} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{j(p)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [M]_{n,n} & [M]_{n,p} \\ [M]_{p,n} & [M]_{p,p} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{y_i\}_n \\ \{y_i\}_p \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (7.23)$$

usando a aproximação da Equação (7.20) e considerando-se a hipótese que

$$\bar{\mathbf{I}}_{i(p)} \cong \mathbf{I}_{i(n)} \quad (7.24)$$

a segunda Equação (7.23), resulta na seguinte aproximação de  $\{y_i\}_{i(p)}$ ,

$$\{y_i\}_p \cong -[K]_{p,p} - \mathbf{I}_{i(n)}[M]_{p,p}^{-1} \cdot (-[K]_{p,n} - \mathbf{I}_{i(n)}[M]_{p,n} \{f_i\}_n) \quad (7.25)$$

desde que  $[K]_{p,p} - \mathbf{I}_{i(n)}[M]_{p,p}$  não resulte em uma matriz singular.

Um indicador de erro que fornece uma estimativa de uma possível variação em um autovalor pode, agora, ser obtido usando as Equações (7.15), (7.20), (7.21) e (7.25), pela introdução de um simples grau de liberdade hierárquico ( $p = 1$ ). Após simplificações, tem-se;

$$h_i^{(n+1)} = \frac{1}{k_{i(n)}} \frac{([K]_{n+1,n} - \mathbf{I}_{i(n)}[M]_{n+1,n} \{f_i\}_n)^2}{K_{n+1,n+1} - \mathbf{I}_{i(n)}M_{n+1,n+1}} \quad (7.26)$$

Estimadores como este são chamados de indicadores de erro e podem ser avaliados para cada possível novo grau de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos. Em processos de refinamentos adaptativos, os indicadores de erro localizam os pontos da malha onde as correlações são mais desejáveis.

Na expressão do indicador de erro, Equação (7.26), tem-se que  $[K]_{n+1,n}$  e  $[M]_{n+1,n}$  devem conter os  $n$  primeiros elementos da linha  $(n + 1)$  das matrizes de rigidez e de massa globais e  $K_{n+1,n+1}$  e  $M_{n+1,n+1}$  deve ser os correspondentes elementos de índice  $(n + 1, n + 1)$  da diagonal dessas matrizes. O valor negativo do indicador de erro é de menor interesse, Friberg (1986) recomenda que não há necessidade de se fazer um refinamento hierárquico quando o indicador de erro torna-se negativo.

Como critério de parada do processo de refinamento hierárquico, é também interessante estimar a precisão global dos autovalores para uma certa solução. Essa estimativa global é definida por um estimador de erros, o qual é computado durante o cálculo dos

indicadores de erro sendo que geralmente essa estimativa é obtida em função dos valores positivos desses indicadores. Friberg (1987), propõem um estimador de erro o qual é econômico computacionalmente e fácil de ser implementado em um programa adaptativo, dado por

$$\mathbf{e}_g = \sum (\mathbf{h}_i^{(n+1)} \text{ positivos}) \quad (7.27)$$

na qual  $\mathbf{e}_g$  é uma estimativa de erro global e  $\sum (\mathbf{h}_i^{(n+1)} \text{ positivos})$  é o somatório dos indicadores positivos de erro, calculados para todos os elementos como sendo a estimativa de erro global.

### 7.3 Processos $p$ -adaptativos hierárquicos

O processo de refinamento adaptativo segundo a versão  $p$  do método de elementos finitos, consiste, basicamente, na introdução de novos graus de liberdade através da utilização de funções de interpolação hierárquicas. Este processo também é conhecido como processo de refinamento  $p$ -adaptativo hierárquico, e seu procedimento, conforme foi utilizado neste trabalho, é descrito a seguir.

- 1º) Uma vez obtida a primeira solução para o problema analisado, são introduzidos, nos elementos, novos graus de liberdade hierárquicos, através do aumento do número e conseqüentemente do grau das funções de interpolação hierárquicas das variáveis físicas.
- 2º) A partir daí, faz-se uma estimativa de erros através do cálculo dos indicadores  $\mathbf{h}_i^{(n+1)}$  do erro para cada grau de liberdade hierárquico possível de introdução.
- 3º) Determina-se então o estimador do erro  $\mathbf{e}_g$ , como uma estimativa global de erro para os  $p$  novos graus de liberdade hierárquicos.
- 4º) Se o erro total estimado for menor ou igual à tolerância  $\mathbf{e}_{tol}$  fornecida como dado de entrada, a solução é considerada satisfatória e conseqüentemente não se realiza novo refinamento.
- 5º) Se esta estimativa de erro se encontrar fora da tolerância  $\mathbf{e}_{tol}$  fornecida como dado de entrada, processa-se então o refinamento seletivo hierárquico da solução. Neste caso, deve-se

comparar todos os valores de  $h_i^{(n+1)}$  calculados anteriormente com o máximo valor positivo de  $h_i^{(n+1)}$  dos indicadores.

Considerou-se, como no trabalho de Friberg (1987), que os indicadores  $h_i^{(n+1)}$  devem ser comparados com uma fração  $g$ , também pré-especificada, do máximo valor dos indicadores, e são refinados todos os pontos da malha, isto é, são considerados todos os  $p$  possíveis graus de liberdade hierárquicos para os quais  $h_i^{(n+1)} > g \max(h_i^{(n+1)})$ .

A constante  $g$  controla, desta forma, o número de graus de liberdade hierárquicos introduzidos a cada solução. Para  $g = 0$  ocorre o refinamento completo, isto é, considera-se todos os graus de liberdade hierárquicos dos elementos para a malha completa. Com isto, consequentemente, o procedimento perderá a característica auto adaptativa da solução. A taxa de convergência para este caso é ótima, porém o esforço computacional para a solução usando um grande número de graus de liberdade pode tornar-se excessivo. Para  $g = 1$  é refinado apenas o elemento que possui o maior indicador de erro.

O valor ideal para  $g$  é dependente do problema estudado Willmersdorf (1988), no entanto, seu valor não é crítico no sentido de que poderia influenciar sensivelmente na precisão da solução do problema. Atualmente, mesmo adotando o valor de  $g$  situado dentro de uma larga faixa, tem-se obtido boas taxas de convergência Friberg (1987).

#### 7.4 Erro calculado

O indicador dado pela Equação (7.9), ou mais precisamente por

$$e_i = \frac{I_{i(n+p)} - I_{i(n+p+1)}}{I_{i(n+p)}} \quad (7.28)$$

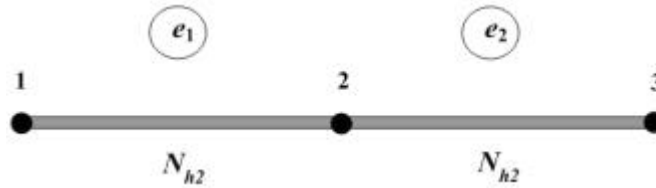
sendo  $n$  o número de graus de liberdade na análise isoparamétrica da malha original e  $p$  o número total de graus de liberdade hierárquicos introduzidos na malha até o refinamento seletivo da última reanálise. A estimativa de erro obtida pela Equação (7.28) será definida como erro calculado e aquela obtida pela Equação (7.26) como erro estimado. Para qualquer caso, a estimativa de erro é determinada em função da nova equação que se obtém pela introdução de apenas um grau de liberdade hierárquico. No entanto, na determinação da estimativa do erro nota-se, considerando um caso e outro, uma grande diferença em termos de



esforço computacional. A explicação disto está no fato que para obter o erro calculado é necessário resolver inteiramente o novo sistema de equações de ordem  $n + p + 1$ . Por outro lado, isto não ocorre quando se determina o erro estimado, pois neste caso, as operações são realizadas em função apenas dos coeficientes das variáveis da nova equação. Em decorrência desta vantagem, adotou-se neste trabalho o emprego do erro estimado como indicador de erro no processo de refinamento  $p$ -adaptativo hierárquico.

## 7.5 Análise hierárquica

A partir desse estágio inicia-se o processo de refinamento adaptativo hierárquico versão  $p$  do método de elementos finitos. Para determinar a posição dos possíveis novos graus de liberdade hierárquicos, a análise de erros deve ser feita pela introdução, em cada elemento, das funções de interpolação hierárquicas de segundo grau, como mostra a Figura 7.1.



**Figura 7.1** Elementos  $e_1$  e  $e_2$  com função hierárquica de 2º grau

Pela introdução das funções de interpolação polinomiais hierárquicas em cada elemento obtém-se uma aproximação das variáveis físicas do elemento, na seguinte forma;

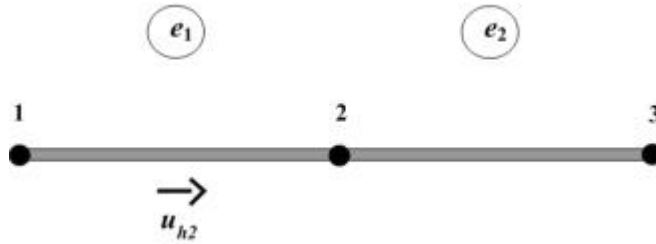
$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \end{Bmatrix} = [N_i] \{a_i\} + [\tilde{N}_{h2}] \{\tilde{a}_{h2}\} \quad (7.29)$$

na qual  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) são funções de interpolação para os  $n$  nós do elemento na formulação isoparamétrica e  $N_{h2}$  é a função de interpolação hierárquica para o elemento considerado. A Equação (7.29) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{h2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{h2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{h2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{h2} \\ w_{h2} \\ \mathbf{q}_{h2} \end{Bmatrix} \quad (7.30)$$

Nota-se, através da Equação (7.30), que devido a presença de uma função de interpolação hierárquica na aproximação da variável física, serão introduzidos nos elementos três graus de liberdade hierárquicos para cada função de interpolação hierárquica introduzida.

Considerando a aproximação dada pela Equação (7.30), ou seja, introduzindo apenas um grau de liberdade hierárquico  $u_{h2}$  no elemento  $e_1$ , tem-se o esquema da Figura 7.2.



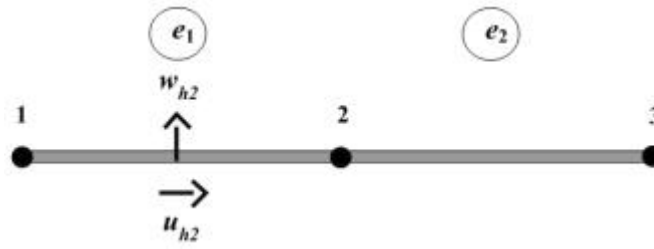
**Figura 7.2** Elemento  $e_1$  com um grau de liberdade hierárquico de 2° grau

Com a introdução desse novo grau de liberdade hierárquico as matrizes de rigidez e de massa globais passarão a ter ordem

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{c} u_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} k_{11} & \cdots & k_{19} & k_{1,10} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{91} & \cdots & k_{99} & k_{9,10} \end{array} \right] \\ \hline u_{h2} \left[ \begin{array}{ccc|c} k_{10,1} & \cdots & k_{10,9} & k_{10,10} \end{array} \right] \end{array} \end{array} \quad (7.31)$$

na qual a submatriz de dimensão  $9 \times 9$  é a matriz global correspondente à análise isoparamétrica. Seus elementos não são alterados com a introdução da nova função de interpolação hierárquica. Nota-se que a ordem da matriz foi aumentada de  $9 \times 9$  para  $10 \times 10$ , devido à presença de um grau de liberdade hierárquicos de segundo grau introduzido no elemento  $e_1$ .

Considerando a aproximação dada pela Equação (7.30), ou seja, introduzindo mais um grau de liberdade hierárquico  $w_{h2}$  no elemento  $e_1$  tem-se o esquema da Figura 7.3.



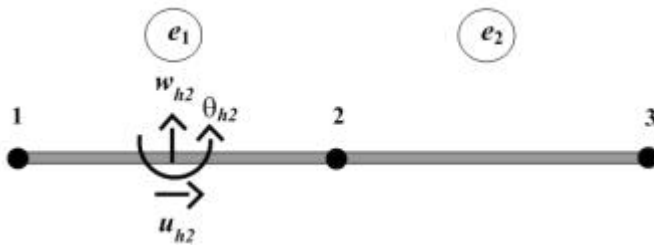
**Figura 7.3** Elemento  $e_1$  com dois graus de liberdades hierárquicos de 2º grau

Com a introdução desse novo grau de liberdade hierárquico as matrizes de rigidez e de massa globais passarão a ter ordem  $11 \times 11$ .

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{c} u_{h2} \\ w_{h2} \end{array} \left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{19} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{91} & \cdots & k_{99} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_{1,10} & k_{1,11} \\ \vdots & \vdots \\ k_{9,10} & k_{9,11} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} k_{10,1} & \cdots & k_{10,9} \\ k_{11,1} & \cdots & k_{11,9} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_{10,10} & k_{10,11} \\ k_{11,10} & k_{11,11} \end{bmatrix} \end{array} \right] \end{array} \quad (7.32)$$

Lembrando que a matriz de dimensão  $10 \times 10$  já foi definida anteriormente.

Considerando a aproximação dada pela Equação (7.30), ou seja, introduzindo apenas um grau de liberdade hierárquico  $q_{h2}$  no elemento  $e_1$ , tem-se a Figura 7.4.

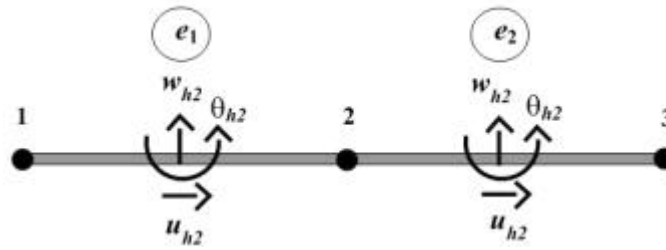


**Figura 7.4** Elemento  $e_1$  com três graus de liberdades hierárquicos de 2º grau

Então as matrizes de rigidez e massa globais passarão a ter a ordem  $12 \times 12$

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{c} u_{h2} \quad w_{h2} \quad q_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} k_{11} & \cdots & k_{19} & k_{1,10} & k_{1,11} & k_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{91} & \cdots & k_{99} & k_{9,10} & k_{9,11} & k_{9,12} \end{array} \right] \\ \hline u_{h2} \quad w_{h2} \quad q_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} k_{10,1} & \cdots & k_{10,9} & k_{10,10} & k_{10,11} & k_{10,12} \\ k_{11,1} & \cdots & k_{11,9} & k_{11,10} & k_{11,11} & k_{11,12} \\ k_{12,1} & \cdots & k_{12,9} & k_{12,10} & k_{12,11} & k_{12,12} \end{array} \right] \end{array} \end{array} \quad (7.33)$$

Lembrando que a matriz de dimensão  $11 \times 11$  já foi definida anteriormente. O processo se repete para o elemento  $e_2$ , conforme Figura 7.5.



**Figura 7.5** Elemento  $e_2$  com três graus de liberdade hierárquicos de 2º grau

Então devido a introdução desses três graus de liberdade hierárquico no elemento  $e_2$  as matrizes global passará a ter a dimensão  $15 \times 15$ , lembrando que a submatriz de dimensão  $9 \times 9$  é a matriz do elemento correspondente à análise isoparamétrica.

### 7.5.1 Análise de erro

Na análise de erros, o indicador de erro  $a$ -posteriori é determinado em função da introdução de apenas um grau de liberdade hierárquico Equação (7.26). Neste caso, as linhas acrescentadas às submatrizes isoparamétrica devem ser utilizadas separadamente, ou seja, consideram-se apenas os elementos da linha das matrizes ampliadas, correspondentes a cada grau de liberdade hierárquico introduzido.

Então na análise de erros, calcula-se o indicador de erro devido à introdução do primeiro grau de liberdade hierárquico  $u_{h2}$ , no elemento  $e_1$ . Para o caso considerado, o indicador é calculado em função dos nove primeiros elementos da linha  $u_{h2}$  das matrizes de rigidez e de massa globais e em função do elemento da diagonal de índice  $k_{10,10}$ .

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{matriz global} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{11} & \cdots & k_{19} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{91} & \cdots & k_{99} \end{array} \right] \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{10,1} & \cdots & k_{10,9} \end{array} \right] \end{array} \end{array} \left| \begin{array}{c} u_{h2} \\ \left[ \begin{array}{c} k_{1,10} \\ \vdots \\ k_{9,10} \end{array} \right] \\ \hline \left[ k_{10,10} \right] \end{array} \right. \end{array} \quad (7.34)$$

Em seguida, determina-se o indicador de erro, quando é introduzido um grau de liberdade hierárquico  $w_{h2}$ , no elemento  $e_1$ . Para isso, tomam-se os nove primeiros elementos da linha  $w_{h2}$  das matrizes globais e o elemento  $k_{11,11}$  da diagonal dessas matrizes.

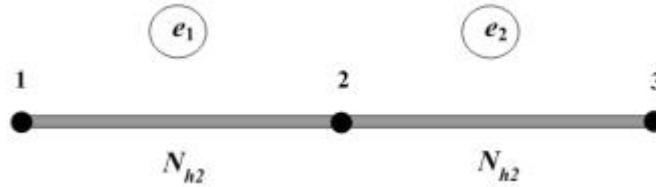
$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{matriz global} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{11} & \cdots & k_{19} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{91} & \cdots & k_{99} \end{array} \right] \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{10,1} & \cdots & k_{10,9} \end{array} \right] \\ w_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{11,1} & \cdots & k_{11,9} \end{array} \right] \end{array} \end{array} \left| \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_{h2} & w_{h2} \\ \left[ \begin{array}{cc} k_{1,10} & k_{1,11} \\ \vdots & \vdots \\ k_{9,10} & k_{9,11} \end{array} \right] \\ \hline \left[ k_{10,10} \right] \\ k_{11,11} \end{array} \end{array} \right. \end{array} \quad (7.35)$$

Analogamente, o outro indicador de erro, correspondente à introdução de um grau de liberdade hierárquico  $q_{h2}$  no elemento, é calculado em termos dos nove primeiros elementos da linha  $q_{h2}$  das matrizes de rigidez e de massa globais e do elemento de endereço  $k_{12,12}$  dessas matrizes.

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{matriz global} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{11} & \cdots & k_{19} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{91} & \cdots & k_{99} \end{array} \right] \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} u_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{10,1} & \cdots & k_{10,9} \end{array} \right] \\ w_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{11,1} & \cdots & k_{11,9} \end{array} \right] \\ q_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{12,1} & \cdots & k_{12,9} \end{array} \right] \end{array} \end{array} \left| \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_{h2} & w_{h2} & q_{h2} \\ \left[ \begin{array}{ccc} k_{1,10} & k_{1,11} & k_{1,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{9,10} & k_{9,11} & k_{9,12} \end{array} \right] \\ \hline \left[ k_{10,10} \right] \\ k_{11,11} \\ k_{12,12} \end{array} \end{array} \right. \end{array} \quad (7.36)$$

Vale lembrar que estes três indicadores de erro são calculados devido à introdução de apenas uma função de interpolação hierárquica em um elemento e seus valores dependem do grau  $m$  do polinômio dessa função.

Para dar continuidade à análise hierárquica, considera-se, dessa vez, uma função de interpolação hierárquica cujo polinômio é ainda de segundo grau mas agora, introduzida em um outro elemento como mostra a Figura 7.6.



**Figura 7.6** Elemento  $e_2$  com função hierárquica de 2º grau

Conforme explicação anterior, mais três indicadores de erro são determinados em função dos três novos graus de liberdade hierárquicos.

Este procedimento continua para outros elementos, até atingir o último elemento da malha original discretizada.

Uma vez calculados todos os indicadores de erro em função da introdução dos novos possíveis graus de liberdade hierárquicos, para a função de interpolação hierárquica de segundo grau, um erro global da solução atual deve neste momento, ser estimado.

No processo de refinamento adaptativo há a necessidade de se definir uma estimativa de erro global  $\mathbf{e}$ , que deverá ser usado como critério principal de parada. Neste trabalho, utilizou-se o somatório dos indicadores positivos de erro, calculados para todos os elementos como sendo a estimativa de erro global, isto é,

$$\mathbf{e}_g = \sum (\mathbf{h}_i^{(n+1)} \text{ positivos}) \quad (7.37)$$

se esta estimativa for menor ou igual à tolerância  $\mathbf{e}_{tol}$  pré estipulada pelo usuário, a solução atual é considerada satisfatória, caso contrário, realiza-se o refinamento seletivo hierárquico. Neste caso, para determinar quais elementos são carentes de refinamento, é necessário comparar todos os indicadores  $\mathbf{h}_i^{(n+1)}$  com uma fração  $\mathbf{g}$  do máximo valor positivo dos indicadores de erro. Portanto, serão considerados, no processo de refinamento, todos os graus de liberdade hierárquicos para os quais;

$$\mathbf{h}_i^{(n+1)} \geq \mathbf{g} \mathbf{h}_i^{(n+1)} \max \quad 0 \leq \mathbf{g} \leq 1 \quad (7.38)$$

na qual

$h_i^{(n+1)}$  é o indicador de erro associado a um grau de liberdade hierárquico.

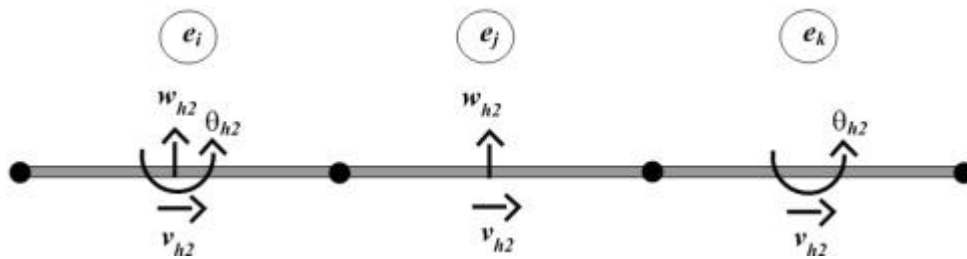
$h_i^{(n+1) \max}$  é o maior indicador positivo de erro relacionado à solução atual.

$g$  é uma constante fornecida pelo usuário

portanto, com este procedimento adotado, podem-se identificar os elementos, e os correspondente graus de liberdades hierárquicos de segundo grau que devam ser consideradas no processo de refinamento hierárquico.

Neste estágio termina a primeira reanálise do processo de refinamento hierárquico. Outras reanálises hierárquicas podem ser possíveis, quando se adota este tipo de refinamento. Neste caso, para cada nova reanálise repete-se o processo da análise de erros descrito anteriormente. Para isto determinam-se os novos indicadores de erro em função da introdução de outras funções de interpolação hierárquicas nos elementos da malha considerada. No entanto, o grau do polinômio destas funções deve ser aumentado agora, em alguns elementos, de segundo grau para terceiro grau.

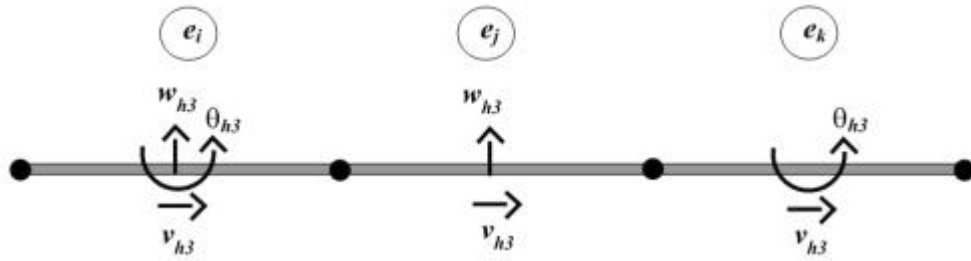
Ao final de cada reanálise, deve-se armazenar o grau da função de interpolação hierárquica que realmente foi introduzida em cada elementos da malha original. Como exemplo, a Figura 7.7 mostra os graus de liberdades hierárquicos introduzidos em cada elemento após a primeira reanálise.



**Figura 7.7** Elementos com graus de liberdades hierárquicos de 2º grau após a primeira reanálise

Nota-se que na primeira reanálise foram identificados no elemento  $e_i$  os graus de liberdades hierárquicos  $w_{h2}$ ,  $v_{h2}$  e  $q_{h2}$  e no  $e_j$  os graus de liberdades hierárquicos  $w_{h2}$  e  $v_{h2}$  e no  $e_k$  os graus de liberdades hierárquicos  $v_{h2}$  e  $q_{h2}$  como sendo os mais carentes de refinamentos, para os quais foram introduzidas funções de interpolação hierárquicas de segundo grau. Para o

cálculo dos indicadores de erro na segunda reanálise, deve-se introduzir uma nova função de interpolação hierárquica na aproximação das variáveis físicas do elemento, com isso aumentará a ordem do polinômio das funções hierárquicas de segundo para terceiro grau. Para o exemplo acima, de acordo com a Figura 7.7, deve-se inserir os graus de liberdades hierárquicos de terceiro grau nos elementos carentes de refinamento como mostra a Figura 7.8



**Figura 7.8** Elementos com graus de liberdades hierárquicos de 3º grau

Logo, o processo de refinamento hierárquico só se completa, para uma dada precisão global, quando for obedecido o critério principal de parada adotado, a menos que o grau das funções de interpolação hierárquicas, introduzidas nos elementos, tenha atingido o limite máximo estipulado. Como mencionado no capítulo 3, são consideradas, neste trabalho, funções de interpolação hierárquicas cujo o grau dos polinômios pode variar de  $m = 2$  a  $m = 4$ .

## 7.6 O problema de autovalor generalizado

Uma vez obtidas as matrizes globais de massa e rigidez após as reanálises, estuda-se em seguida, a solução do problema dinâmico de autovalor generalizado, que apresenta a seguinte forma,

$$([K] - I [M])\{f\} = \{0\} \quad (7.39)$$

sendo  $[K]$  e  $[M]$  as matrizes de rigidez e massa do sistema com os devidos graus de liberdades hierárquicos após as reanálises,  $\{f\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais e  $I$  é o quadrado da frequência angular. Através da Equação (7.39), obtém-se os autovalores e seus correspondentes autovetores do sistema.



## 8. RESULTADOS NUMÉRICOS

### 8.1 Introdução

A seguir são apresentados alguns resultados numéricos. Os problemas examinados têm por finalidade determinar as menores frequências naturais das vigas, considerando a análise dinâmica (problema de autovalor generalizado). A confiabilidade e a eficiência do elemento finito hierárquico considerando o processo adaptativo descrito no capítulo anterior, os resultados obtidos nas análises isoparamétrica e hierárquica de 2º grau ( $m = 2$ ), 3º grau ( $m = 3$ ) e 4º grau ( $m = 4$ ) sem a utilização do indicador e do estimador global de erros, serão apresentados em cada problema. Os resultados descritos nas tabelas a seguir foram normalizados dividindo-se as frequências naturais calculadas pelas frequências naturais “exatas” obtidas na literatura. Segue abaixo a equação representando a normalização das frequências,

$$F_n = \frac{F_c}{F_e} \quad (8.1)$$

sendo  $F_c$  as frequências naturais calculadas,  $F_e$  as frequências naturais exatas e  $F_n$  as frequências normalizadas.

### 8.2 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade

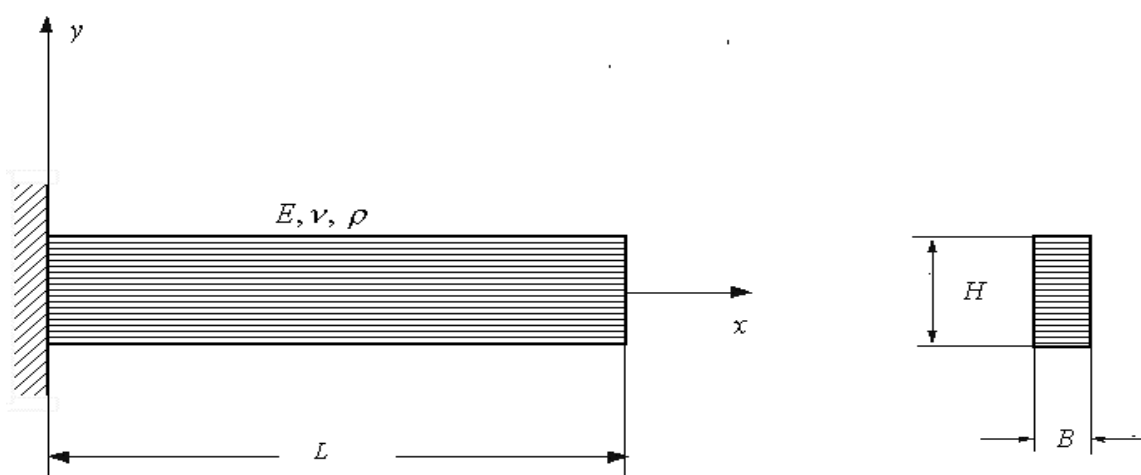
Será apresentado um exemplo clássico, na elasticidade plana, para estudar o problema dinâmico de autovalor generalizado, que consiste em uma viga engastada em uma extremidade, como mostra a Figura 8.1. A discretização básica para a primeira solução consiste de elementos cujas funções de interpolação são dadas pelas Equações (2.11) e (2.12). Para soluções subseqüentes, serão introduzidas funções hierárquicas de ordem crescente nos elementos definidos pelas Equações (2.42), (2.43) e (2.44).

A seguir estão apresentados os dados do problema, as menores frequências naturais “exatas” obtidas na literatura e a tolerância  $e_{tol}$ .

Propriedades da viga	Nomenclatura	Valores
<i>Comprimento</i>	$L$	$20\text{ m}$
<i>Largura</i>	$B$	$0.1\text{ m}$
<i>Altura</i>	$H$	$4\text{ m}$
<i>Modulo de elasticidade</i>	$E$	$0.000001\text{ N/m}^2$
<i>Poisson</i>	$\nu$	$0.3$
<i>Densidade em massa</i>	$\rho$	$1\text{ Kg/m}^3$
<i>Momento de inércia</i>	$I$	$BH^3/12$
<i>Módulo de elasticidade transversal</i>	$G$	$E/2(1+\nu)$
<i>Coefficiente de distorção</i>	$\alpha$	$5/6$

**Tabela 8.1** Propriedades da viga

As menores freqüências naturais obtidas na literatura Timoshenko (1974) são: 1.567, 8.437, 12.50, 20.08, 33.34, 37.50, 47.41, 61.53, 62.50 e 75.07  $\text{Hz}$ , e a tolerância fornecida como dado de entrada  $\epsilon_{tol} = 10^{-2}$ .

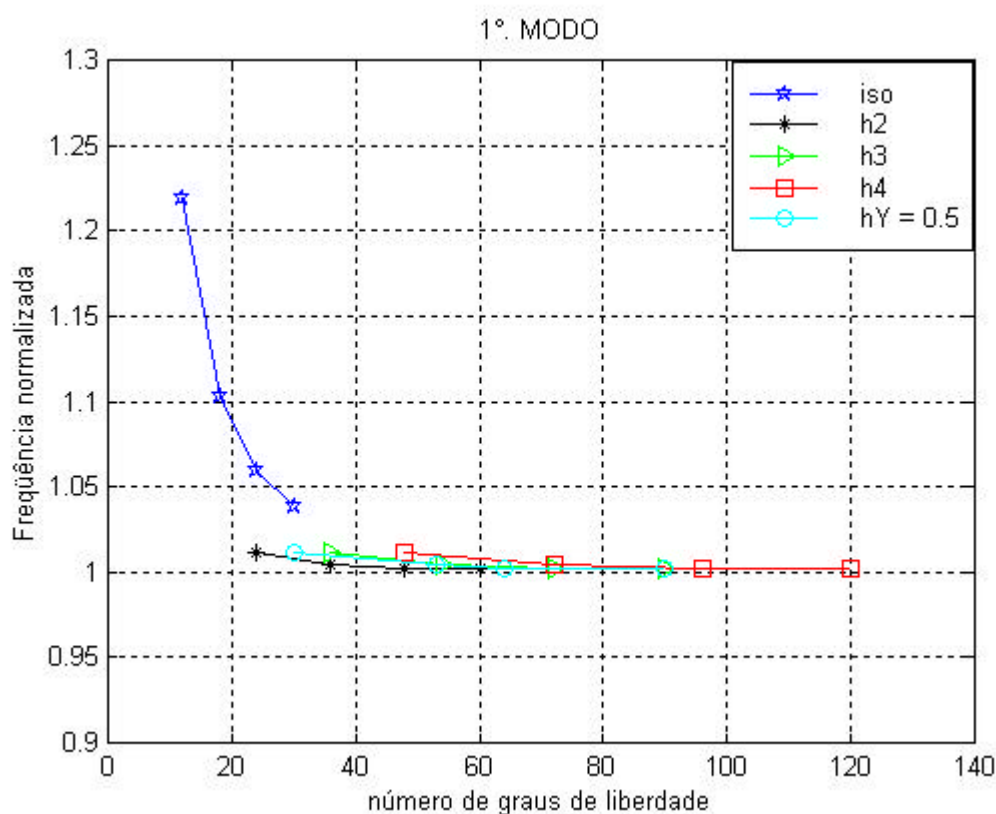


**Figura 8.1** Viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

As Tabelas 8.2 a 8.11 e as Figuras 8.2 a 8.11 apresentam a constante  $g$  que varia de 0.5 a 0.9, e tem por finalidade controlar o número de graus de liberdade hierárquicos introduzidos a cada solução. Têm-se também os números de elementos envolvidos na análise numérica, os graus de liberdades livres (NGL) e as freqüências normalizadas obtidas nas análises isoparamétricas (*iso*) e hierárquicas de 2º grau ( $n = 2$ ), 3º grau ( $n = 3$ ) e 4º grau ( $n = 4$ ) com a utilização do estimador de erro *a-posteriori*.

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.2194	0	12	1.1034	0	18	1.0594	0	24	1.0384	0	30
$h_2$	1.0113	17.07	24	1.0049	8.93	36	1.0026	5.36	48	1.0016	3.54	60
$h_3$	1.0113	17.07	36	1.0049	8.93	54	1.0026	5.36	72	1.0016	3.54	90
$h_4$	1.0113	17.07	48	1.0049	8.93	72	1.0026	5.36	96	1.0016	3.54	120
$h_{g=0.5}$	1.0113	17.07	30	1.0049	8.93	53	1.0026	5.36	64	1.0016	3.54	90
$h_{g=0.6}$	1.0113	17.07	30	1.0049	8.93	53	1.0026	5.36	72	1.0016	3.54	89
$h_{g=0.7}$	1.0113	17.07	30	1.0049	8.93	48	1.0026	5.36	71	1.0016	3.54	87
$h_{g=0.8}$	1.0113	17.07	25	1.0049	8.93	47	1.0026	5.36	65	1.0016	3.54	84
$h_{g=0.9}$	1.0529	13.65	23	1.0049	8.93	39	1.0026	5.36	65	1.0016	3.54	79

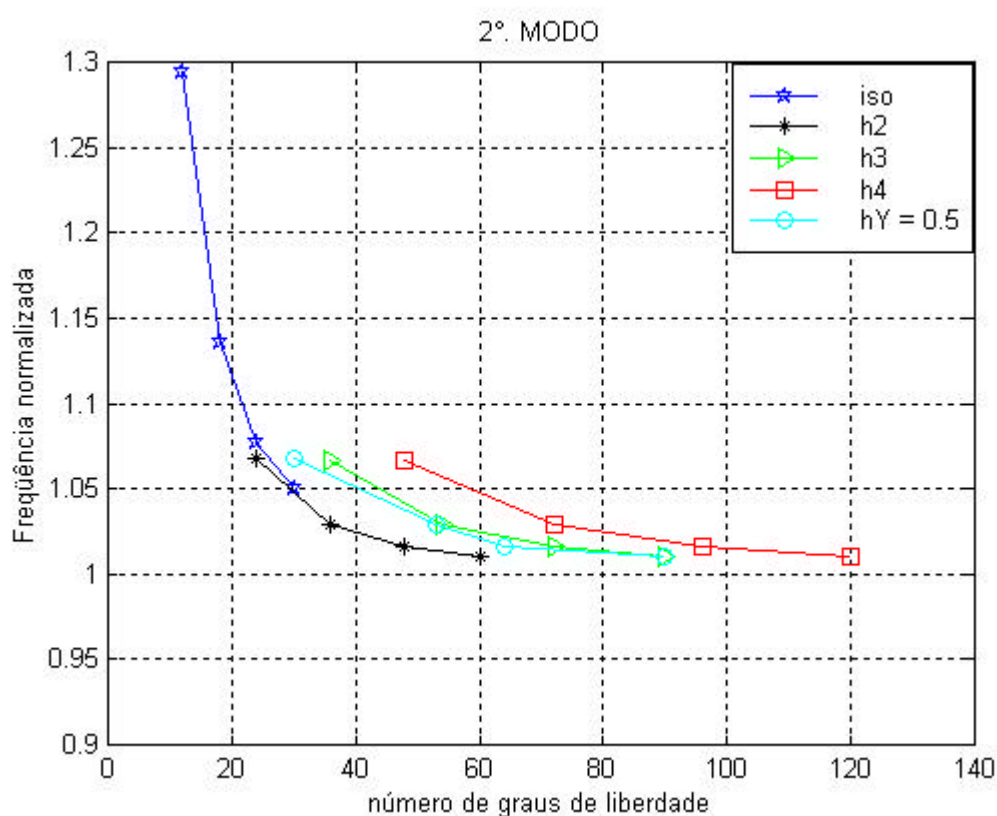
**Tabela 8.2** Primeira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



**Figura 8.2** Primeira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.2938	0	12	1.1352	0	18	1.0770	0	24	1.0496	0	30
$h_2$	1.0674	17.50	24	1.0286	9.39	36	1.0159	5.67	48	1.0101	3.76	60
$h_3$	1.0671	17.52	36	1.0286	9.39	54	1.0159	5.67	72	1.0101	3.76	90
$h_4$	1.0671	17.52	48	1.0286	9.39	72	1.0159	5.67	96	1.0101	3.76	120
$h_g = 0.5$	1.0674	17.50	30	1.0286	9.39	53	1.0159	5.67	64	1.0101	3.76	90
$h_g = 0.6$	1.0674	17.50	30	1.0286	9.39	53	1.0159	5.67	72	1.0101	3.76	89
$h_g = 0.7$	1.0674	17.50	30	1.0286	9.39	48	1.0159	5.67	71	1.0101	3.76	87
$h_g = 0.8$	1.0687	17.40	25	1.0286	9.39	47	1.0159	5.67	65	1.0101	3.76	84
$h_g = 0.9$	1.1441	11.57	23	1.0286	9.39	39	1.0159	5.67	65	1.0101	3.76	79

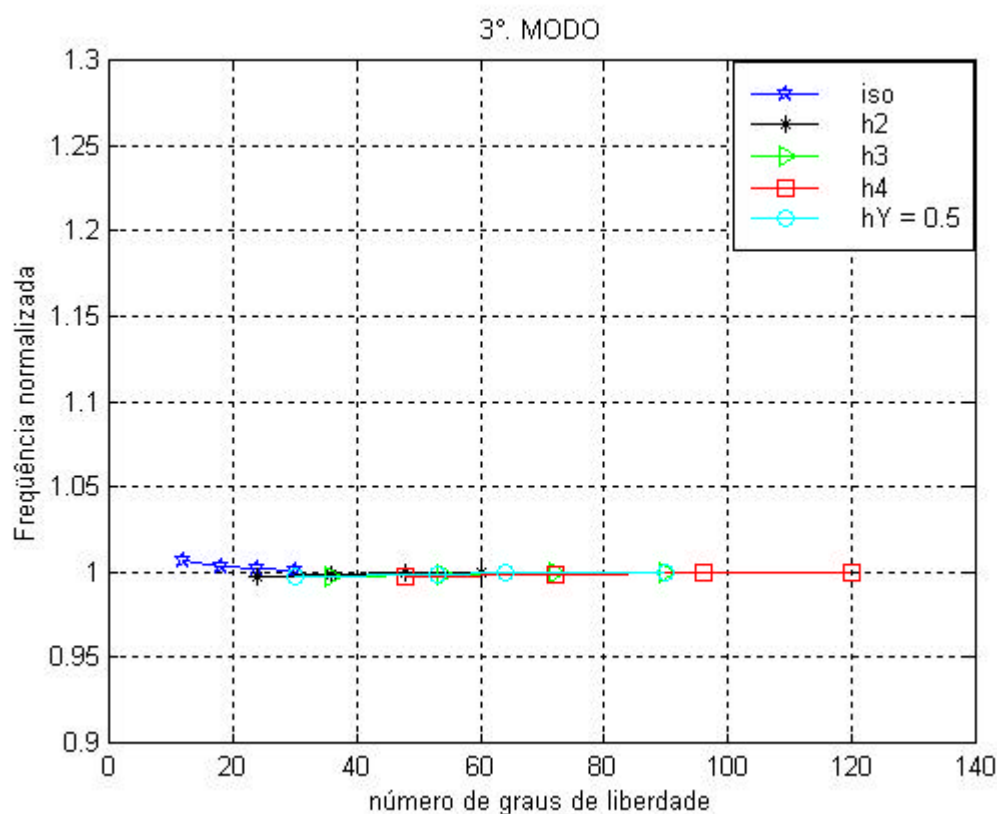
**Tabela 8.3** Segunda frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



**Figura 8.3** Segunda frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.0064	0	12	1.0029	0	18	1.0016	0	24	1.0010	0	30
$h_2$	0.9979	0.84	24	0.9991	0.38	36	0.9995	0.21	48	0.9997	0.13	60
$h_3$	0.9979	0.84	36	0.9991	0.38	54	0.9995	0.21	72	0.9997	0.13	90
$h_4$	0.9979	0.84	48	0.9991	0.38	72	0.9995	0.21	96	0.9997	0.13	120
$h_{g=0.5}$	0.9979	0.84	30	0.9991	0.38	53	0.9995	0.21	64	0.9997	0.13	90
$h_{g=0.6}$	0.9979	0.84	30	0.9991	0.38	53	0.9995	0.21	72	0.9997	0.13	89
$h_{g=0.7}$	0.9979	0.84	30	0.9991	0.38	48	0.9995	0.21	71	0.9997	0.13	87
$h_{g=0.8}$	0.9980	0.83	25	0.9991	0.38	47	0.9995	0.21	65	0.9997	0.13	84
$h_{g=0.9}$	0.9980	0.83	23	1.0001	0.28	39	0.9995	0.21	65	0.9999	0.11	79

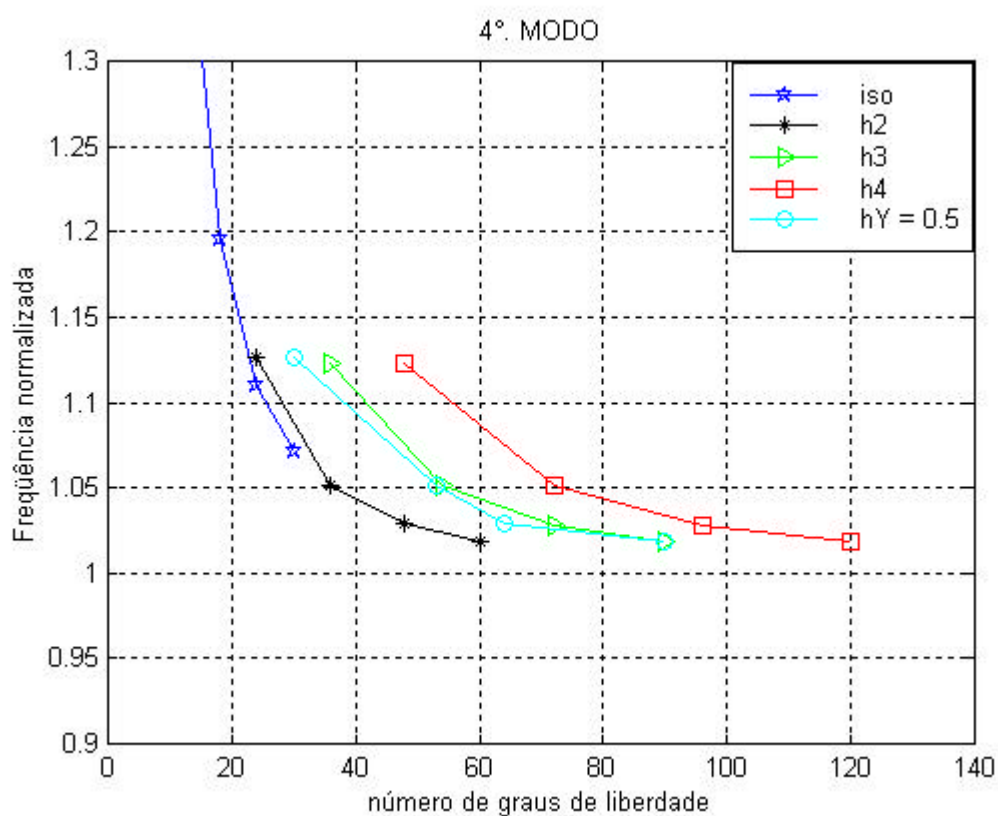
**Tabela 8.4** Terceira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



**Figura 8.4** Terceira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.4203	0	12	1.1952	0	18	1.1105	0	24	1.0708	0	30
$h_2$	1.1269	20.66	24	1.0519	11.99	36	1.0285	7.38	48	1.0181	4.92	60
$h_3$	1.1230	20.93	36	1.0512	12.05	54	1.0283	7.40	72	1.0180	4.93	90
$h_4$	1.1230	20.93	48	1.0512	12.05	72	1.0283	7.40	96	1.0180	4.93	120
$h_g=0.5$	1.1269	20.66	30	1.0519	11.99	53	1.0285	7.38	64	1.0181	4.92	90
$h_g=0.6$	1.1269	20.66	30	1.0519	11.99	53	1.0285	7.38	72	1.0181	4.92	89
$h_g=0.7$	1.1269	20.66	30	1.0519	11.99	48	1.0285	7.38	71	1.0181	4.92	87
$h_g=0.8$	1.1408	19.68	25	1.0519	11.99	47	1.0285	7.38	65	1.0181	4.92	84
$h_g=0.9$	1.2419	12.56	23	1.0520	11.98	39	1.0285	7.38	65	1.0181	4.92	79

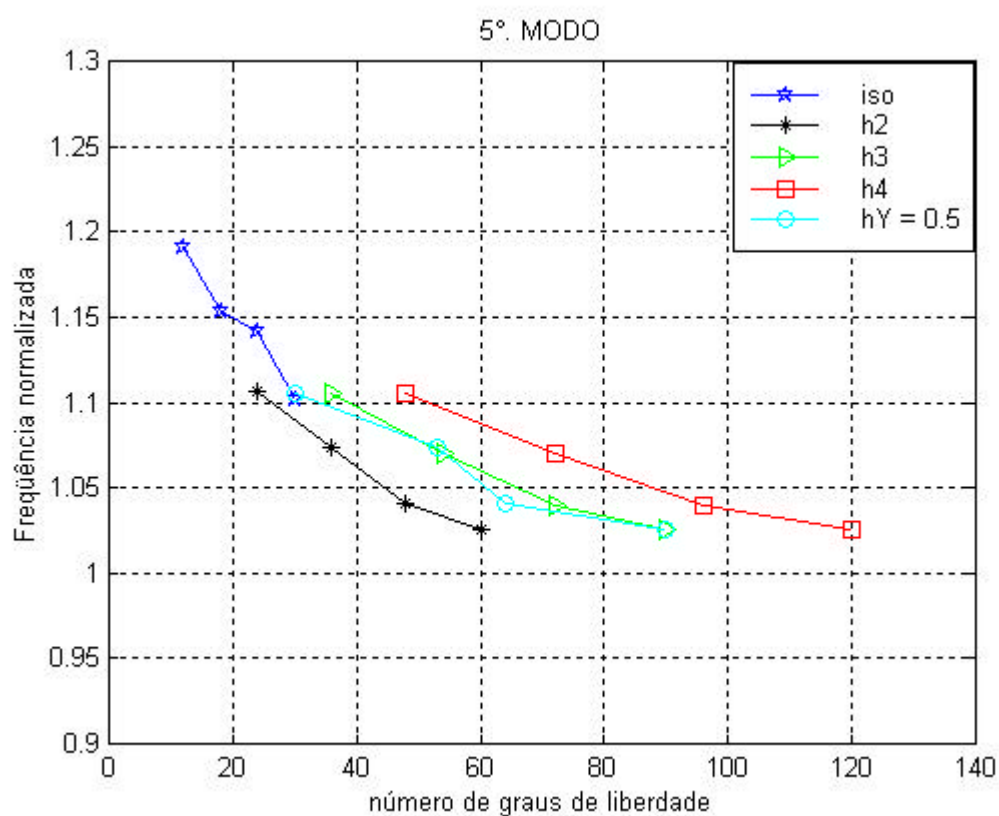
**Tabela 8.5** Quarta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



**Figura 8.5** Quarta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.1904	0	12	1.1539	0	18	1.1411	0	24	1.1013	0	30
$h_2$	1.1061	7.08	24	1.0737	6.95	36	1.0403	8.83	48	1.0255	6.88	60
$h_3$	1.1049	7.18	36	1.0704	7.24	54	1.0393	8.92	72	1.0251	6.92	90
$h_4$	1.1049	7.18	48	1.0703	7.24	72	1.0393	8.92	96	1.0251	6.92	120
$h_g=0.5$	1.1049	7.18	30	1.0736	6.96	53	1.0403	8.83	64	1.0255	6.88	90
$h_g=0.6$	1.1049	7.18	30	1.0737	6.95	53	1.0403	8.83	72	1.0255	6.88	89
$h_g=0.7$	1.1049	7.18	30	1.0736	6.96	48	1.0403	8.83	71	1.0255	6.88	87
$h_g=0.8$	1.1155	6.29	25	1.0736	6.96	47	1.0403	8.83	65	1.0255	6.88	84
$h_g=0.9$	1.1155	6.29	23	1.0739	6.93	39	1.0403	8.83	65	1.0255	6.88	79

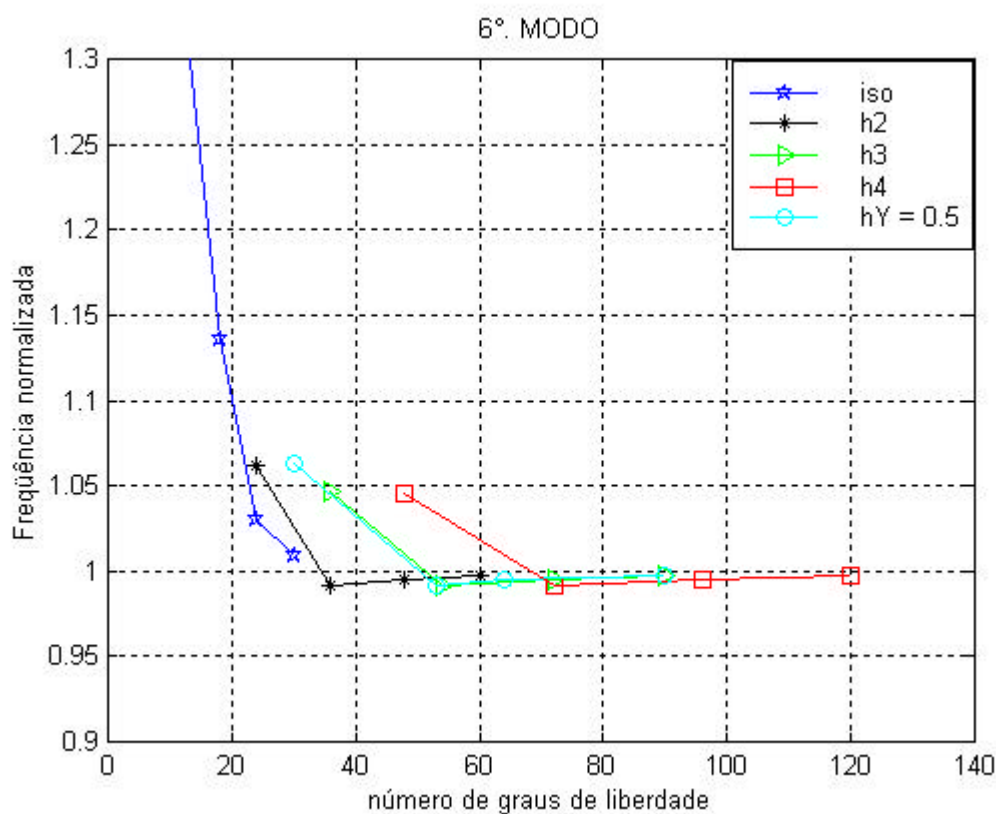
**Tabela 8.6** Quinta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



**Figura 8.6** Quinta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.3433	0	12	1.1355	0	18	1.0298	0	24	1.0093	0	30
$h_2$	1.0623	20.92	24	0.9920	12.64	36	0.9954	3.34	48	0.9970	1.22	60
$h_3$	1.0462	22.12	36	0.9918	12.66	54	0.9953	3.35	72	0.9970	1.22	90
$h_4$	1.0454	22.18	48	0.9918	12.66	72	0.9953	3.35	96	0.9970	1.22	120
$h_{g=0.5}$	1.0632	20.85	30	0.9918	12.66	53	0.9953	3.35	64	0.9970	1.22	90
$h_{g=0.6}$	1.0632	20.85	30	0.9918	12.66	53	0.9953	3.35	72	0.9970	1.22	89
$h_{g=0.7}$	1.0632	20.85	30	0.9933	12.52	48	0.9953	3.35	71	0.9970	1.22	87
$h_{g=0.8}$	1.1023	17.94	25	0.9933	12.52	47	0.9957	3.31	65	0.9971	1.21	84
$h_{g=0.9}$	1.1977	10.84	23	0.9949	12.38	39	0.9957	3.31	65	0.9974	1.18	79

**Tabela 8.7** Sexta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

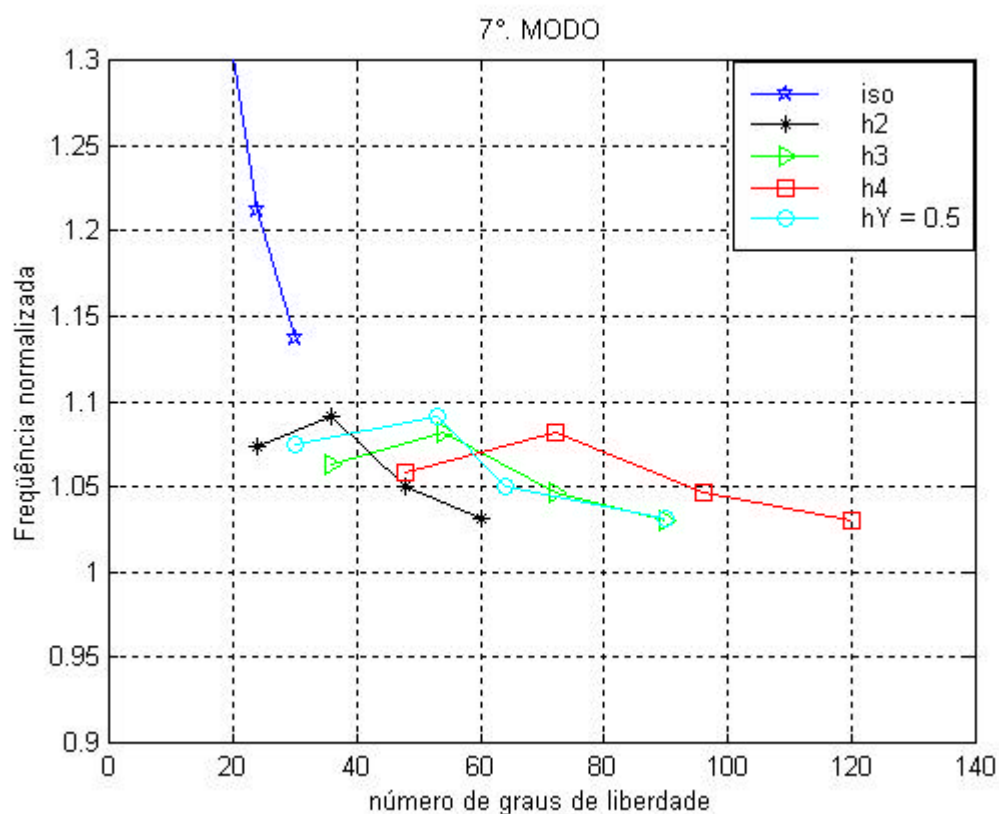


**Figura 8.7** Sexta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.5206	0	12	1.3478	0	18	1.2122	0	24	1.1375	0	30
$h_2$	1.0739	29.38	24	1.0911	19.05	36	1.0502	13.36	48	1.0318	9.29	60
$h_3$	1.0632	30.08	36	1.0817	19.74	54	1.0471	13.62	72	1.0305	9.41	90
$h_4$	1.0583	30.40	48	1.0813	19.77	72	1.0470	13.63	96	1.0305	9.41	120
$h_{g=0.5}$	1.0742	29.36	30	1.0908	19.07	53	1.0501	13.37	64	1.0318	9.29	90
$h_{g=0.6}$	1.0742	29.36	30	1.0909	19.06	53	1.0501	13.37	72	1.0318	9.29	89
$h_{g=0.7}$	1.0742	29.36	30	1.0912	19.04	48	1.0501	13.37	71	1.0319	9.28	87
$h_{g=0.8}$	1.2555	17.43	25	1.0913	19.03	47	1.0502	13.36	65	1.0319	9.28	84
$h_{g=0.9}$	1.3143	13.57	23	1.0915	19.02	39	1.0502	13.36	65	1.0319	9.28	79

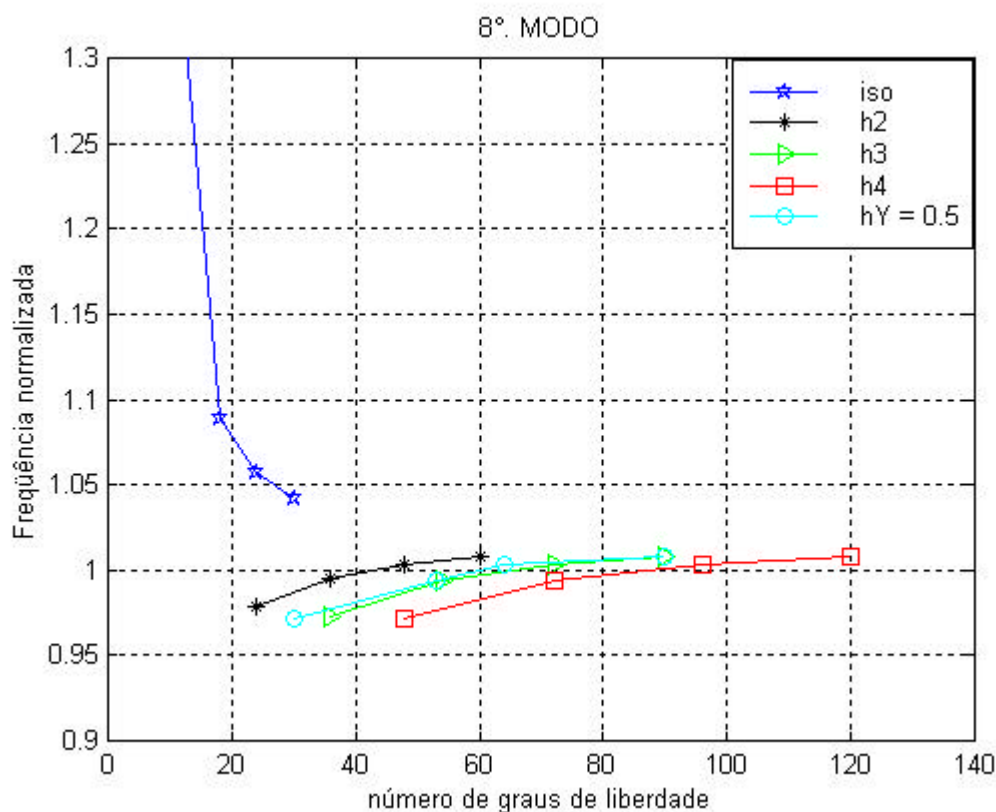
**Tabela 8.8** Sétima frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



**Figura 8.8** Sétima frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.3333	0	12	1.0888	0	18	1.0569	0	24	1.0420	0	30
$h_2$	0.9782	26.63	24	0.9956	8.56	36	1.0035	5.05	48	1.0076	3.30	60
$h_3$	0.9723	27.08	36	0.9940	8.71	54	1.0030	5.10	72	1.0074	3.32	90
$h_4$	0.9718	27.11	48	0.9940	8.71	72	1.0030	5.10	96	1.0074	3.32	120
$h_{g=0.5}$	0.9720	27.10	30	0.9940	8.71	53	1.0030	5.10	64	1.0074	3.32	90
$h_{g=0.6}$	0.9720	27.10	30	0.9940	8.71	53	1.0030	5.10	72	1.0074	3.32	89
$h_{g=0.7}$	0.9720	27.10	30	1.0027	7.91	48	1.0030	5.10	71	1.0074	3.32	87
$h_{g=0.8}$	1.0127	24.05	25	1.0027	7.91	47	1.0055	4.86	65	1.0083	3.23	84
$h_{g=0.9}$	1.0641	20.19	23	1.0071	7.50	39	1.0055	4.86	65	1.0093	3.14	79

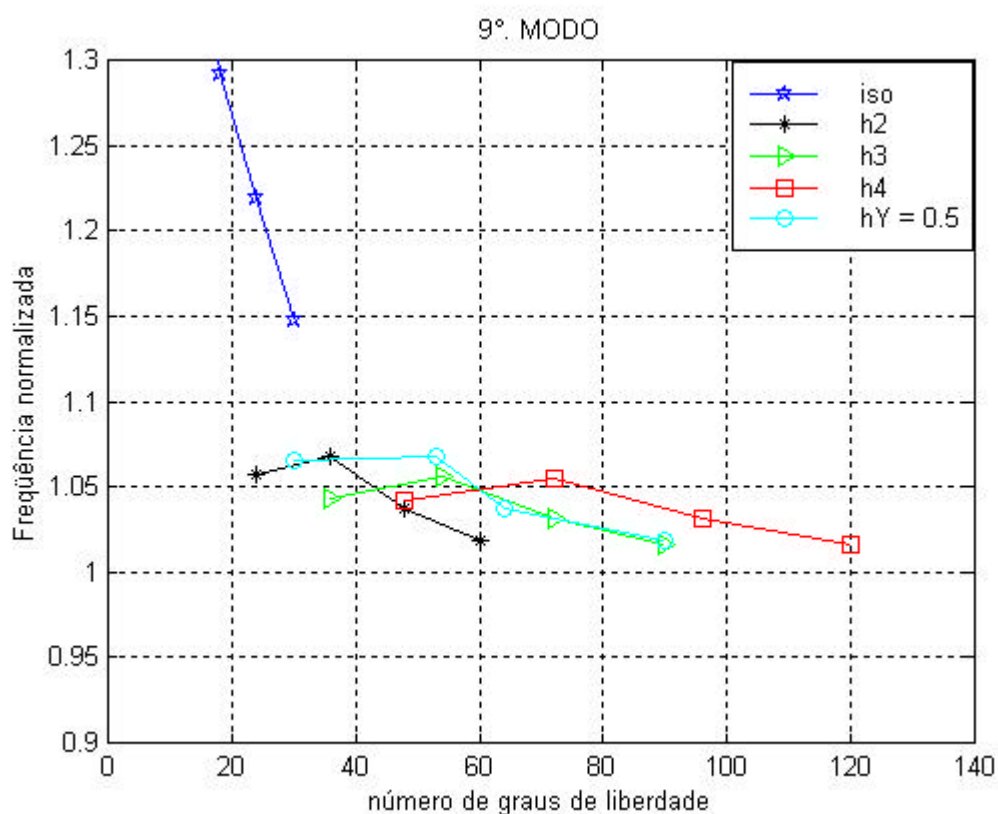
**Tabela 8.9** Oitava frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



**Figura 8.9** Oitava frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.4787	0	12	1.2921	0	18	1.2192	0	24	1.1480	0	30
$h_2$	1.0577	28.47	24	1.0681	17.34	36	1.0376	14.90	48	1.0189	11.25	60
$h_3$	1.0426	29.49	36	1.0556	18.30	54	1.0312	15.42	72	1.0161	11.49	90
$h_4$	1.0415	29.57	48	1.0544	18.40	72	1.0310	15.44	96	1.0160	11.50	120
$h_{g=0.5}$	1.0658	27.92	30	1.0676	17.37	53	1.0374	14.91	64	1.0188	11.25	90
$h_{g=0.6}$	1.0658	27.92	30	1.0677	17.37	53	1.0374	14.91	72	1.0188	11.25	89
$h_{g=0.7}$	1.0658	27.92	30	1.0700	17.19	48	1.0374	14.91	71	1.0193	11.21	87
$h_{g=0.8}$	1.0665	27.88	25	1.0700	17.19	47	1.0377	14.89	65	1.0193	11.21	84
$h_{g=0.9}$	1.1303	23.56	23	1.0735	16.92	39	1.0377	14.89	65	1.0194	11.20	79

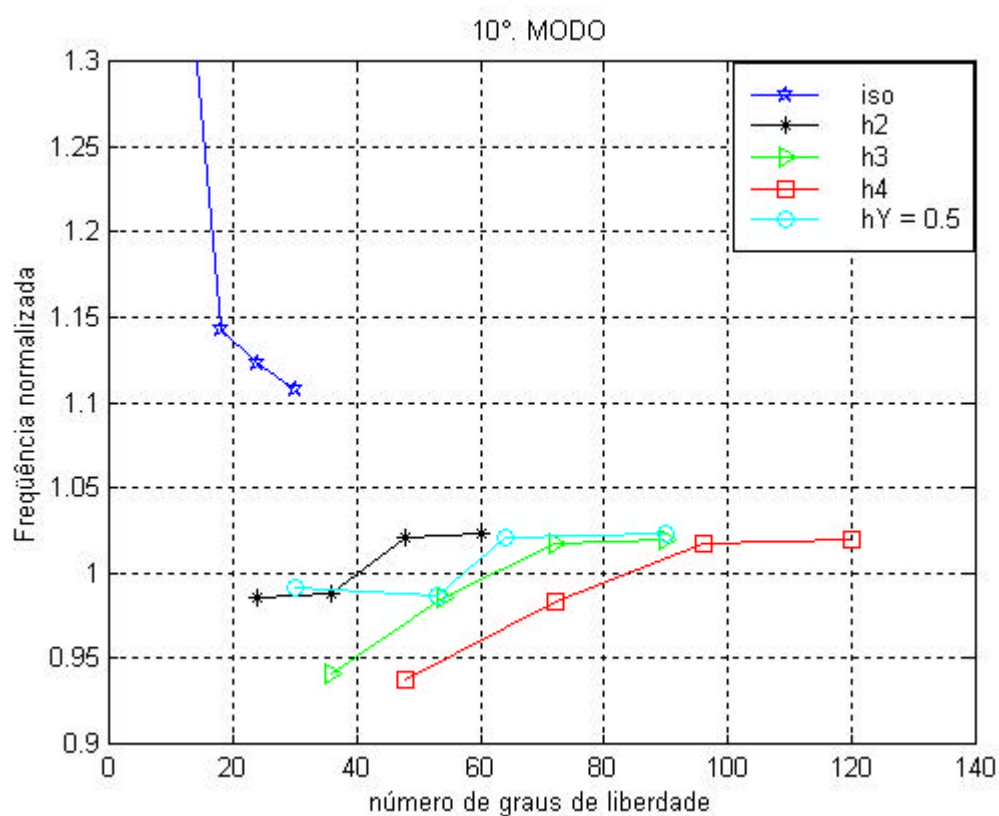
**Tabela 8.10** Nona frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



**Figura 8.10** Nona frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	1.3887	0	12	1.1425	0	18	1.1232	0	24	1.1071	0	30
$h_2$	0.9861	28.99	24	0.9878	13.54	36	1.0209	9.11	48	1.0231	7.59	60
$h_3$	0.9415	32.20	36	0.9851	13.78	54	1.0173	9.43	72	1.0199	7.88	90
$h_4$	0.9370	32.53	48	0.9833	13.93	72	1.0170	9.46	96	1.0198	7.89	120
$h_{g=0.5}$	0.9919	28.57	30	0.9872	13.59	53	1.0208	9.12	64	1.0230	7.60	90
$h_{g=0.6}$	0.9919	28.57	30	0.9873	13.58	53	1.0208	9.12	72	1.0230	7.60	89
$h_{g=0.7}$	0.9919	28.57	30	0.9881	13.51	48	1.0208	9.12	71	1.0232	7.58	87
$h_{g=0.8}$	1.0003	27.97	25	0.9882	13.51	47	1.0208	9.12	65	1.0232	7.58	84
$h_{g=0.9}$	1.0620	23.53	23	0.9973	12.71	39	1.0208	9.12	65	1.0232	7.58	79

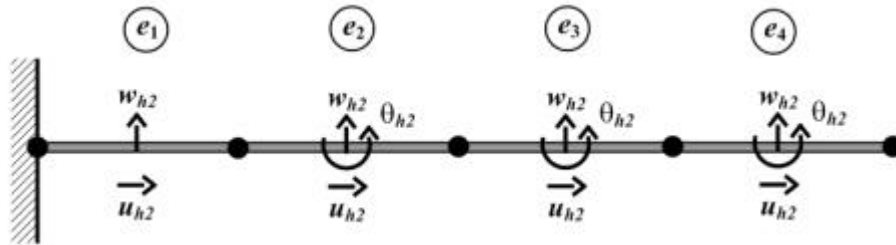
**Tabela 8.11** Décima frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.



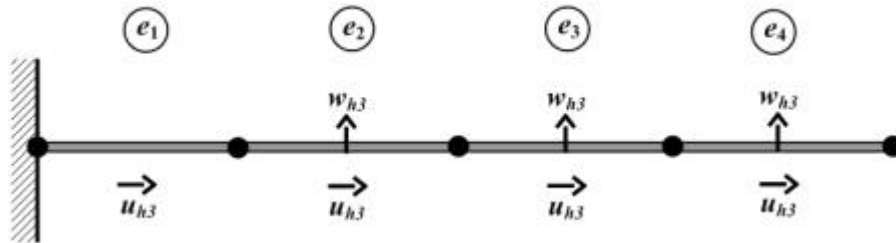
**Figura 8.11** Décima frequência natural normalizada para a viga de seção retangular engastada em uma extremidade.

### 8.2.1 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $g = 0.5$

As Figuras 8.12 a 8.15 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.5$

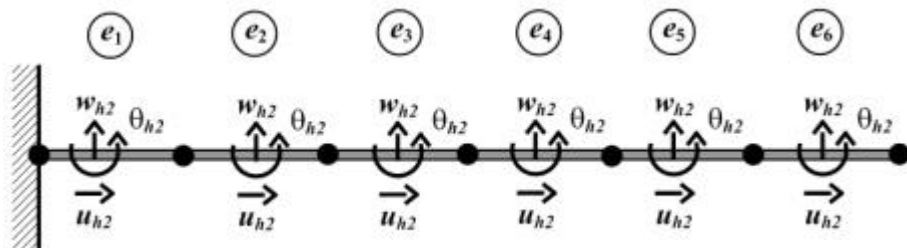


(a)

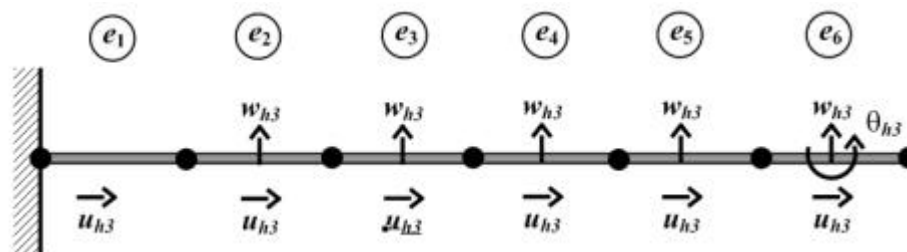


(b)

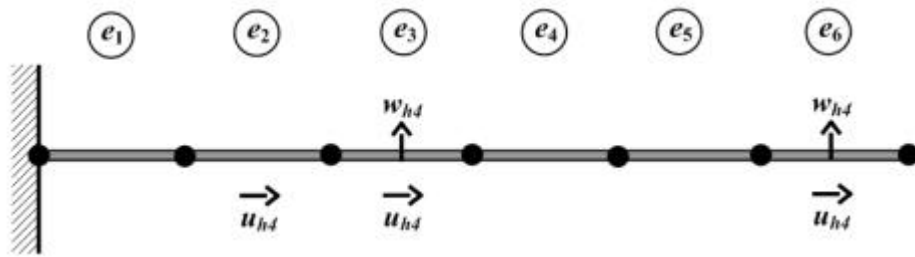
**Figura 8.12** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e  $\gamma = 0.5$



(a)

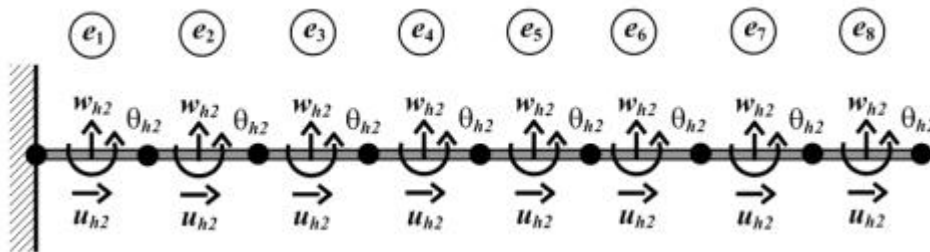


(b)

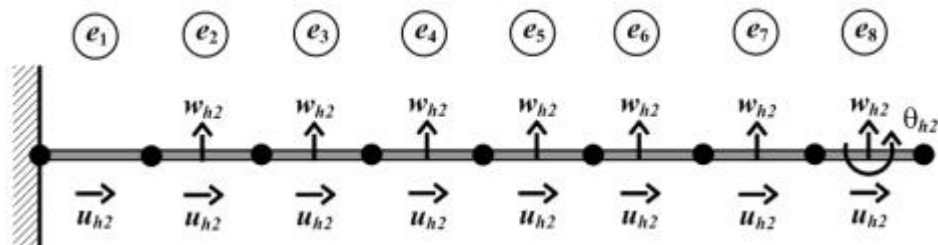


(c)

**Figura 8.13** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 6 elementos e  $\gamma = 0.5$

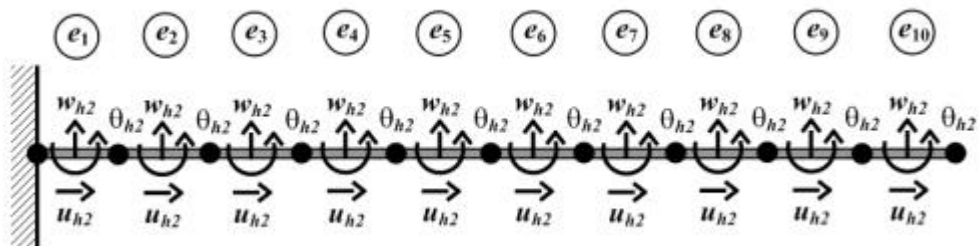


(a)

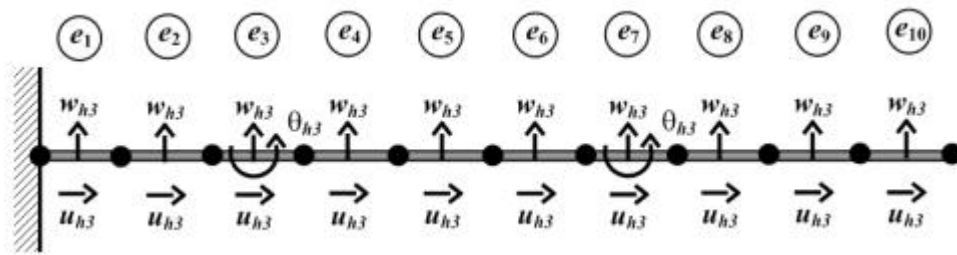


(b)

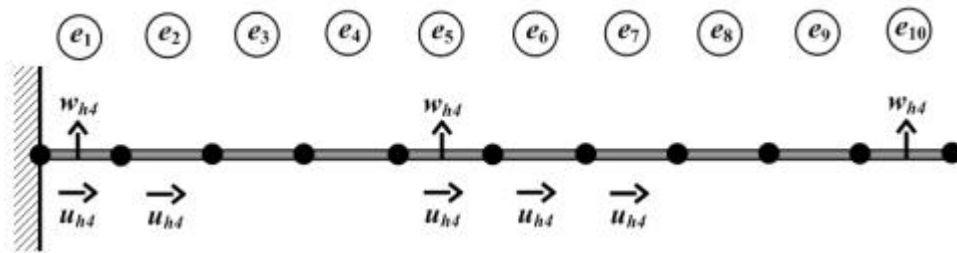
**Figura 8.14** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 8 elementos e  $\gamma = 0.5$



(a)



(b)

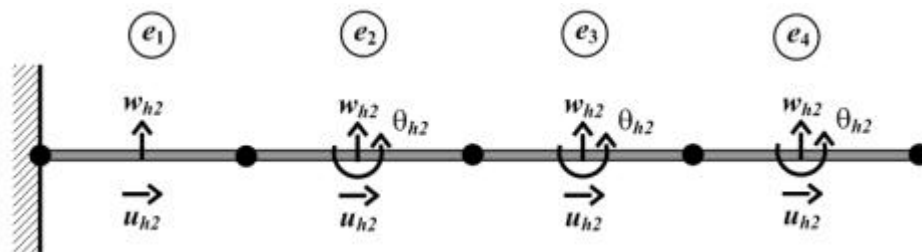


(c)

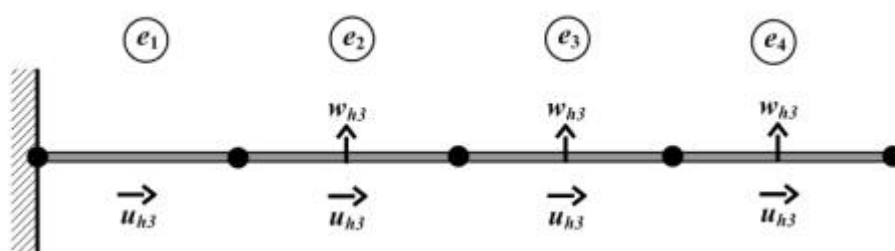
**Figura 8.15** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise para as dez frequências da viga com 10 elementos e  $\gamma = 0.5$

### 8.2.2 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $g = 0.6$

As Figuras 8.16 a 8.19 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.6$ .

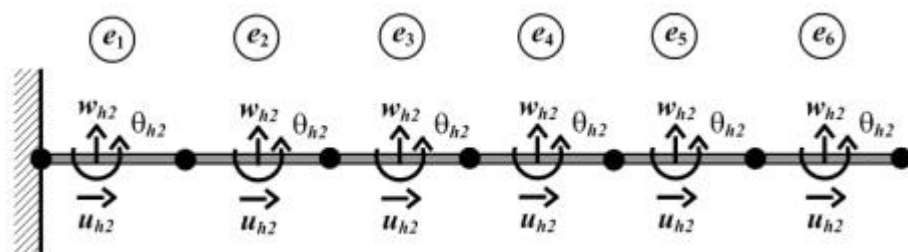


(a)

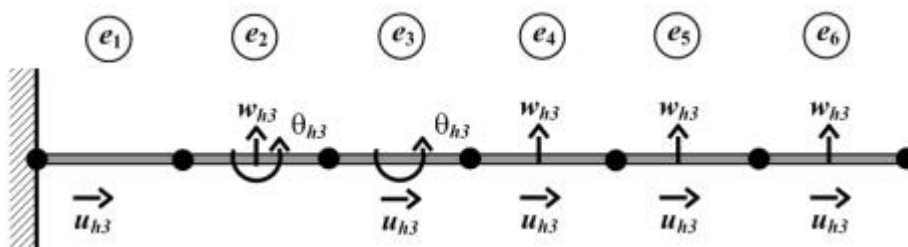


(b)

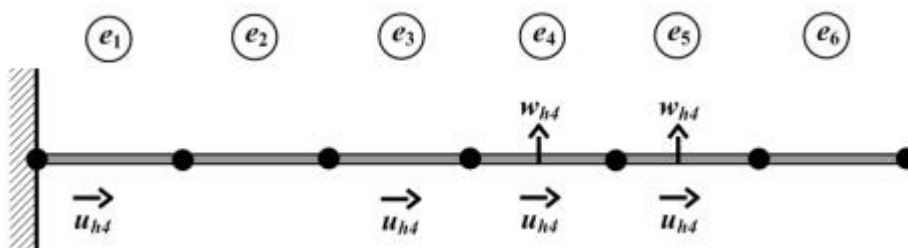
**Figura 8.16** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e  $\gamma = 0.6$



(a)



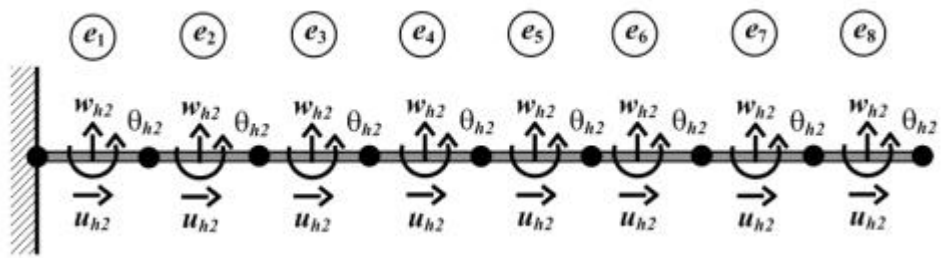
(b)



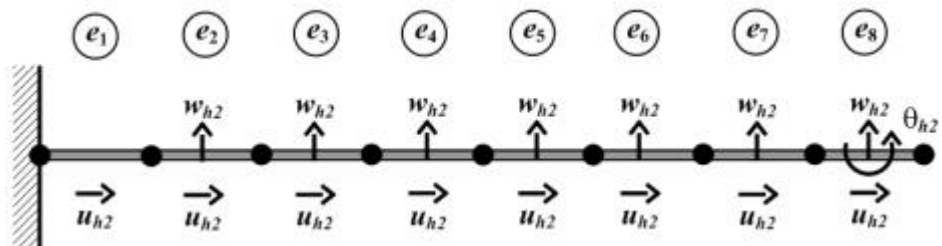
(c)

**Figura 8.17** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 6 elementos e  $\gamma = 0.6$

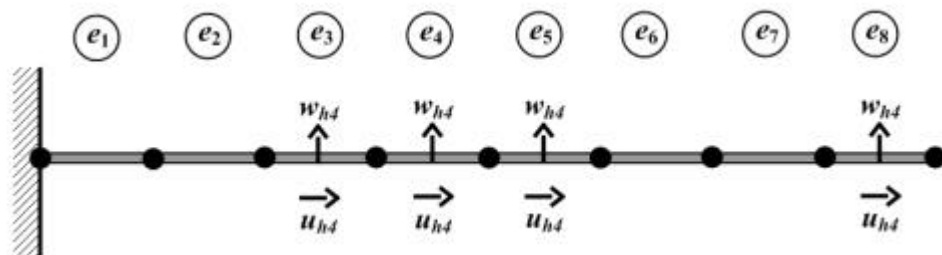




(a)

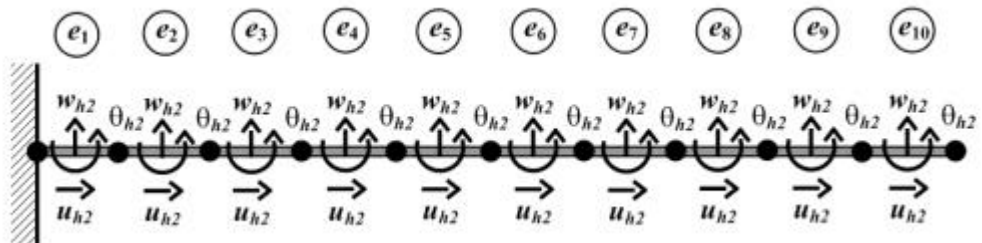


(b)

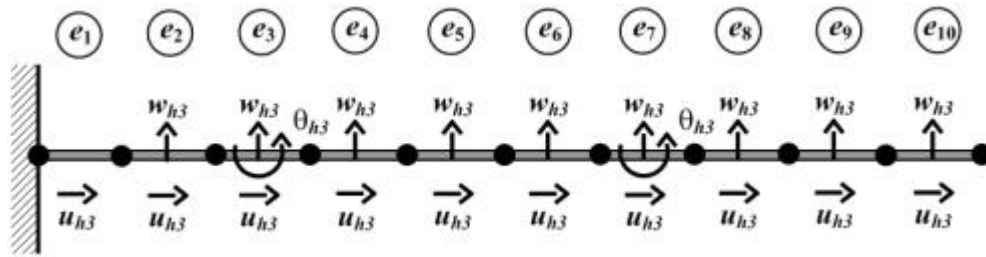


(c)

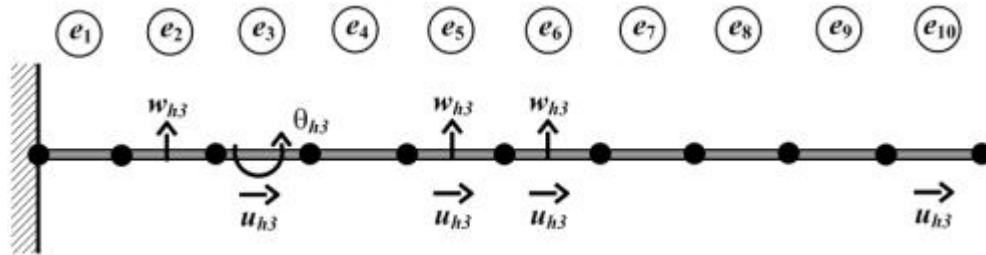
**Figura 8.18** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 8 elementos e  $\gamma = 0.6$



(a)



(b)

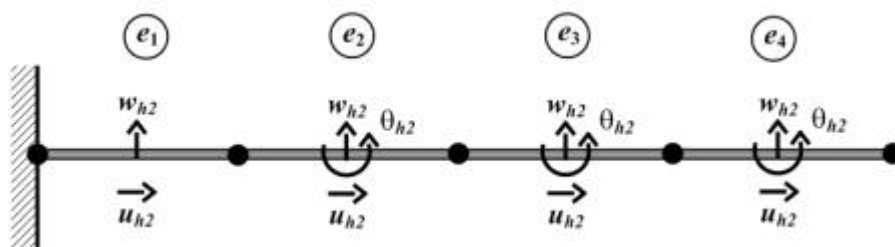


(c)

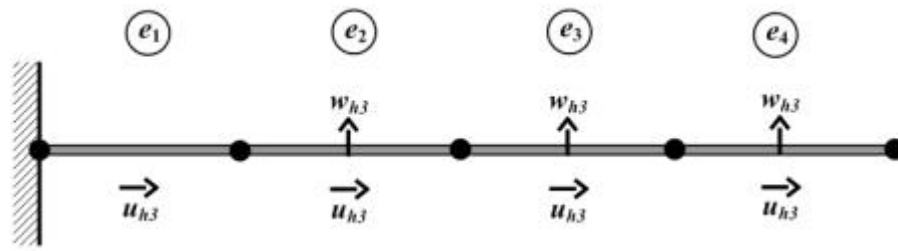
**Figura 8.19** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise para as dez frequências da viga com 10 elementos e  $\gamma = 0.6$

### 8.2.3 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $g = 0.7$

As Figuras 8.20 a 8.23 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.7$ .

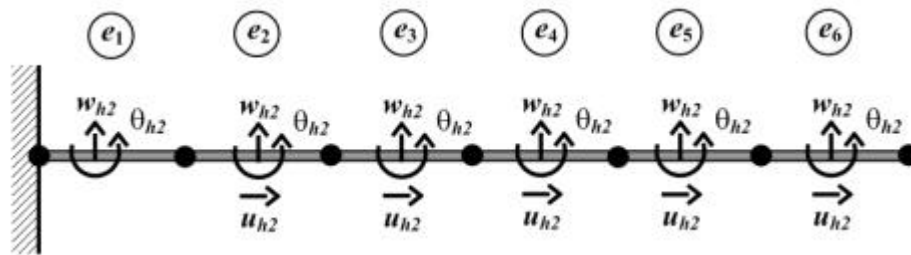


(a)

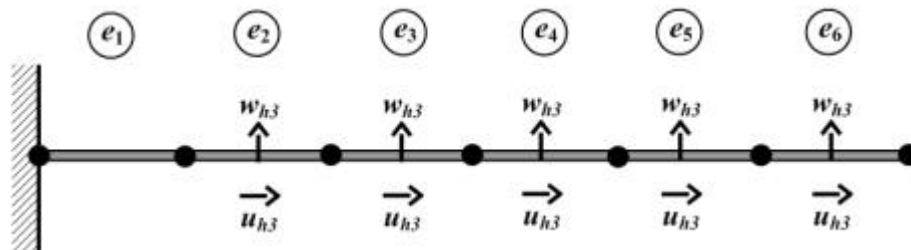


(b)

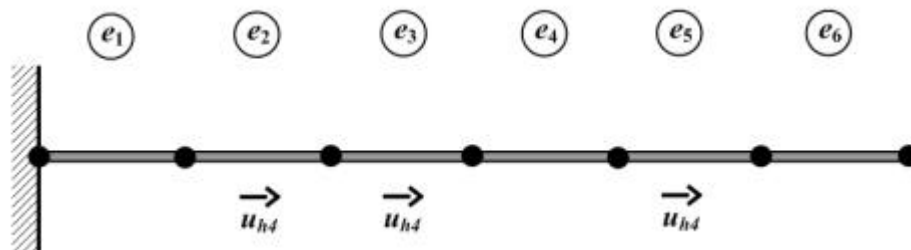
**Figura 8.20** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e  $\gamma = 0.7$



(a)

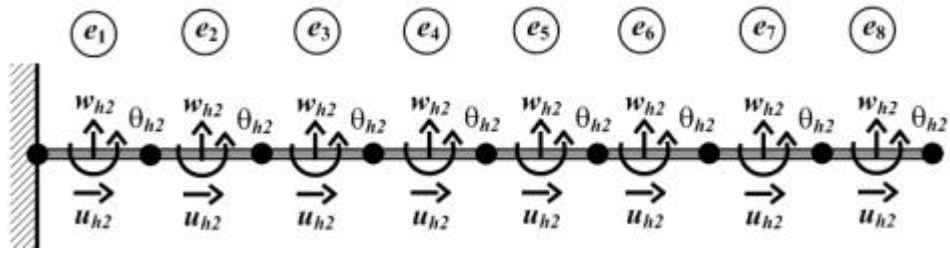


(b)

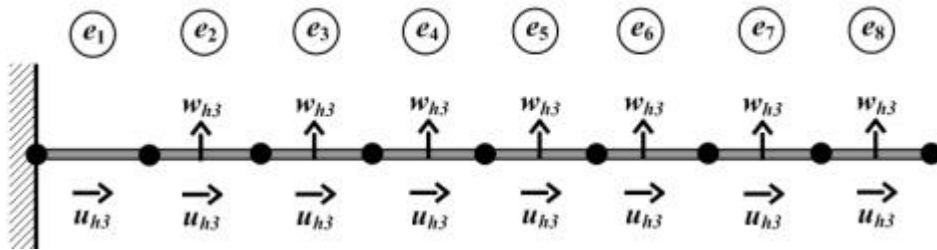


(c)

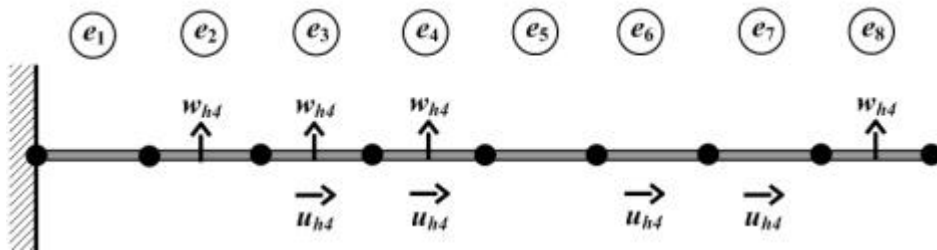
**Figura 8.21** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 6 elementos e  $\gamma = 0.7$



(a)

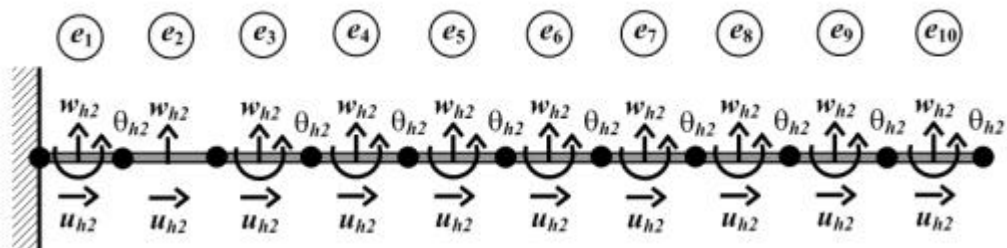


(b)

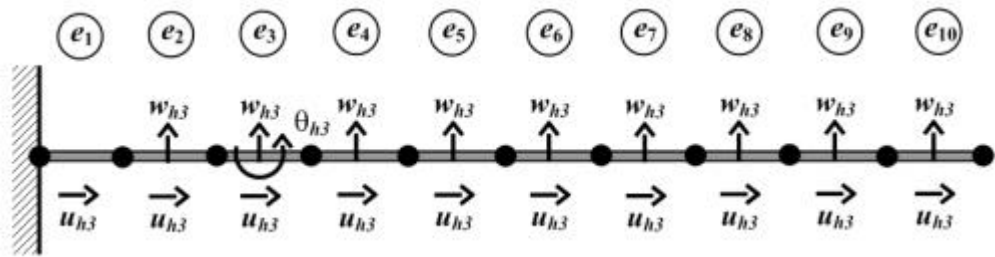


(c)

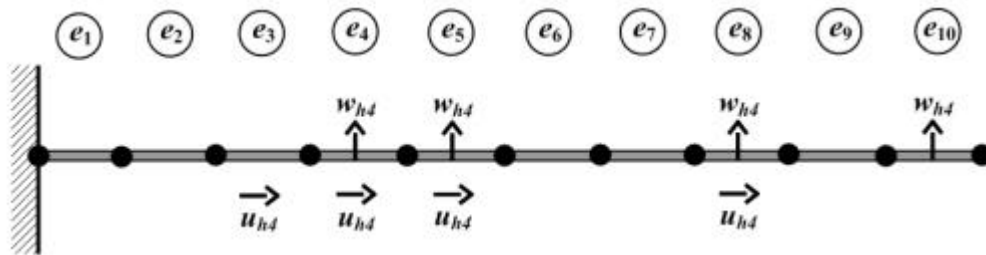
**Figura 8.22** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 8 elementos e  $\gamma = 0.7$



(a)



(b)

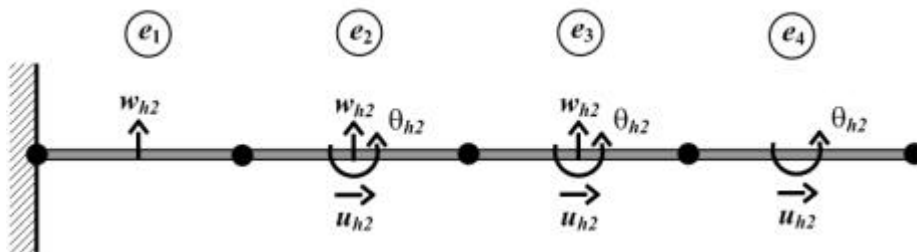


(c)

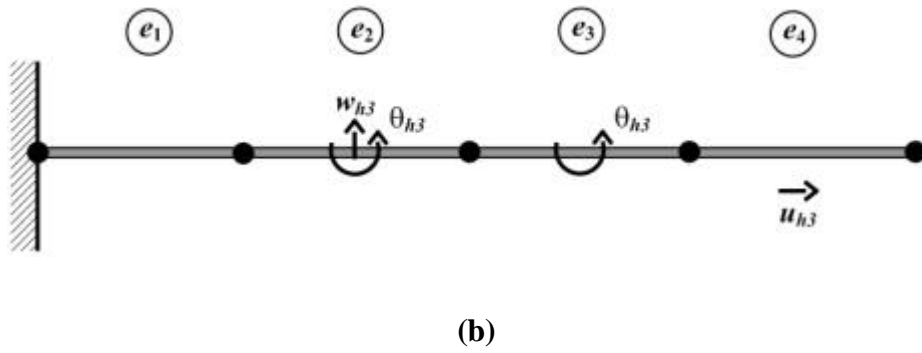
**Figura 8.23** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 10 elementos e  $\gamma = 0.7$

#### 8.2.4 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $g = 0.8$

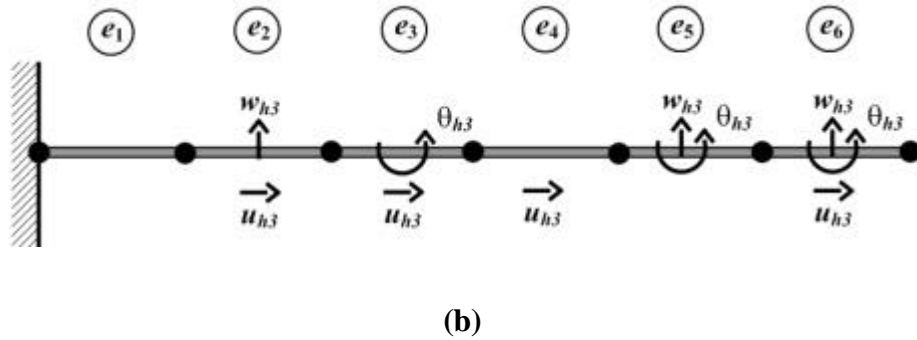
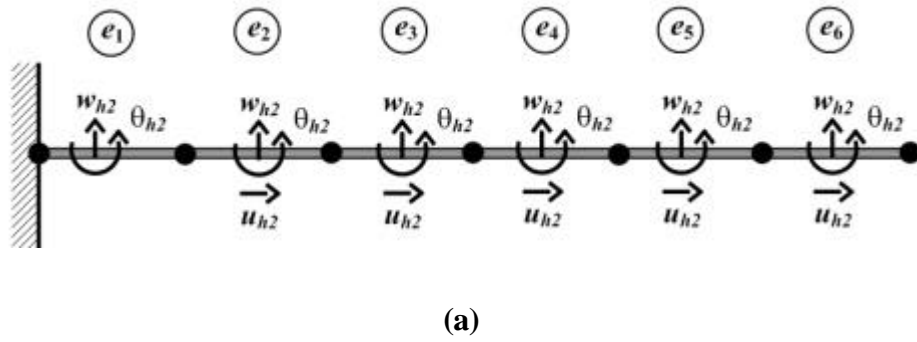
As Figuras 8.24 a 8.27 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.8$ .



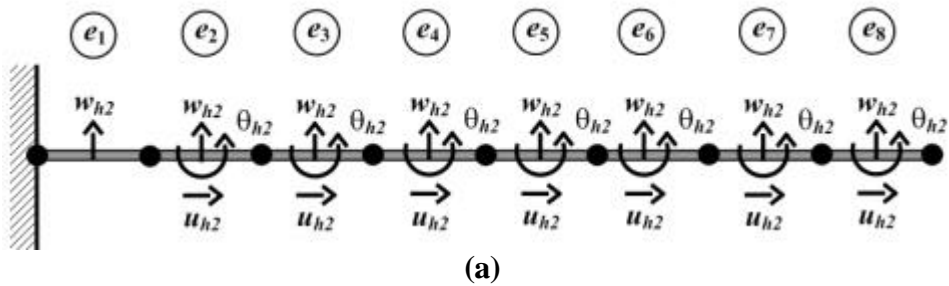
(a)

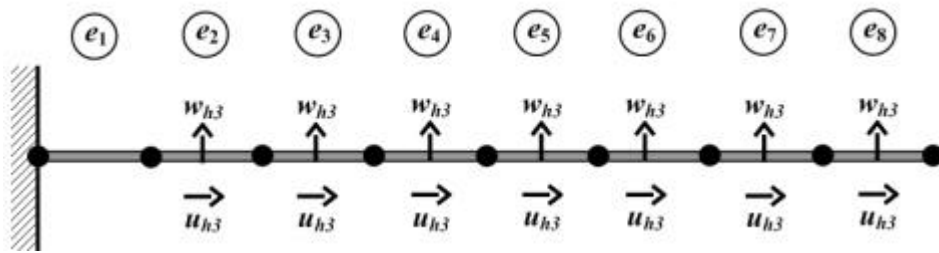


**Figura 8.24** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e  $\gamma = 0.8$

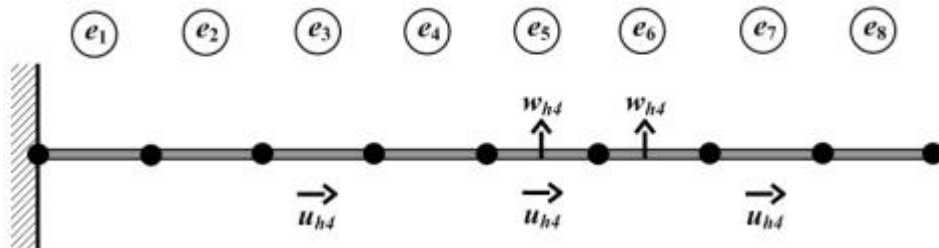


**Figura 8.25** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 6 elementos e  $\gamma = 0.8$



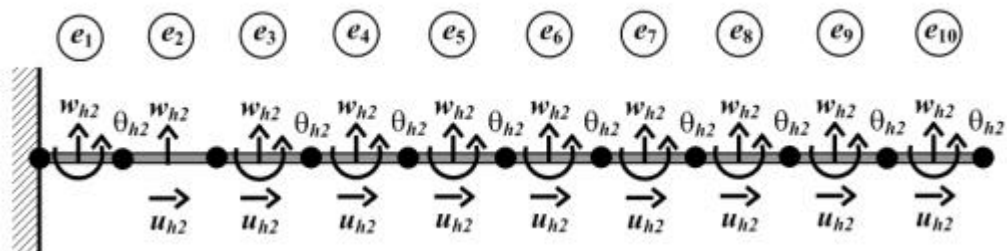


(b)

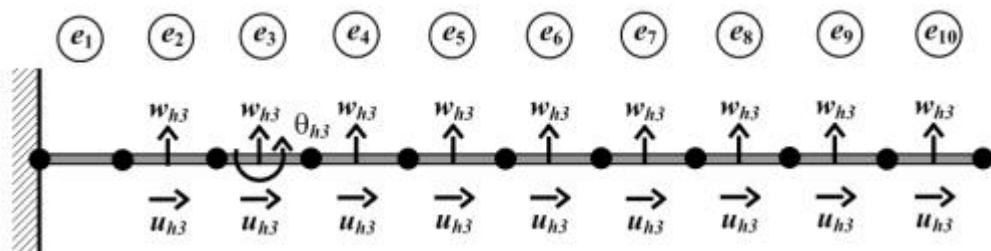


(c)

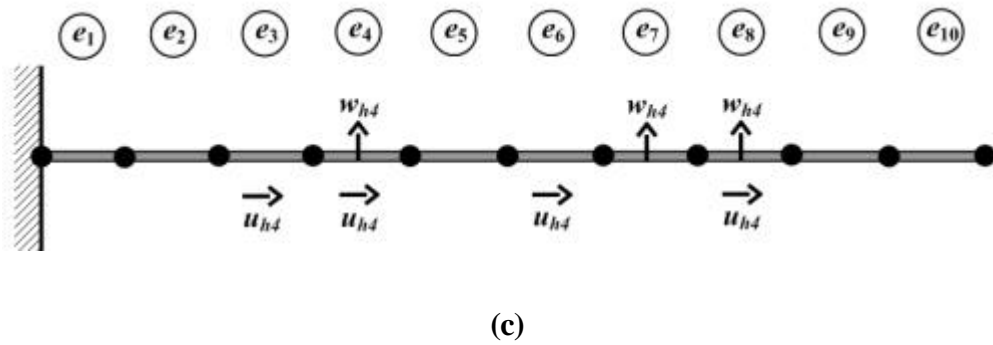
**Figura 8.26** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 8 elementos e  $\gamma = 0.8$



(a)



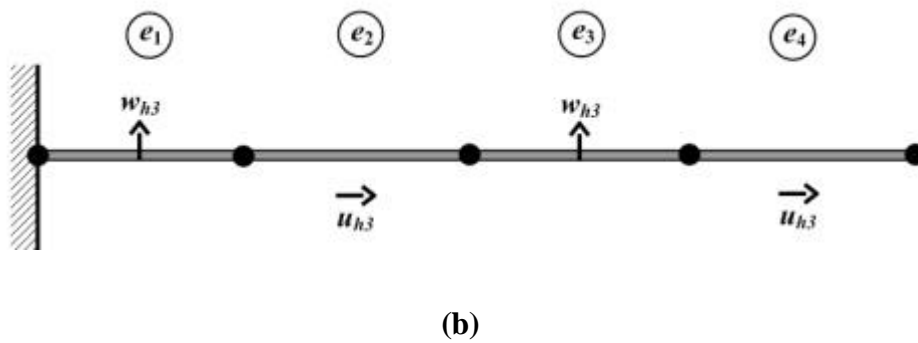
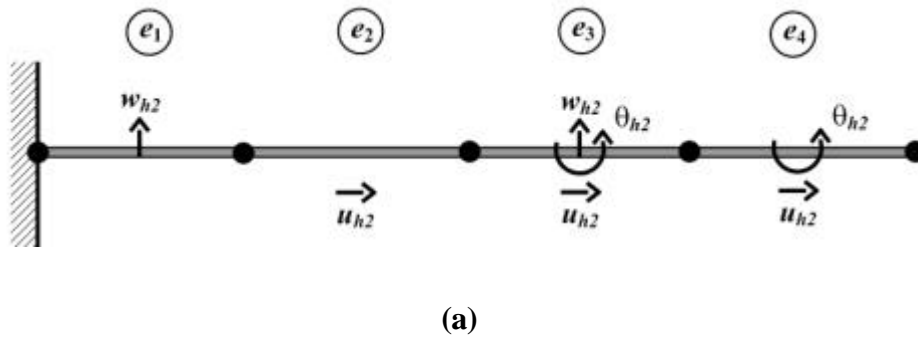
(b)



**Figura 8.27** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 10 elementos e  $\gamma = 0.8$

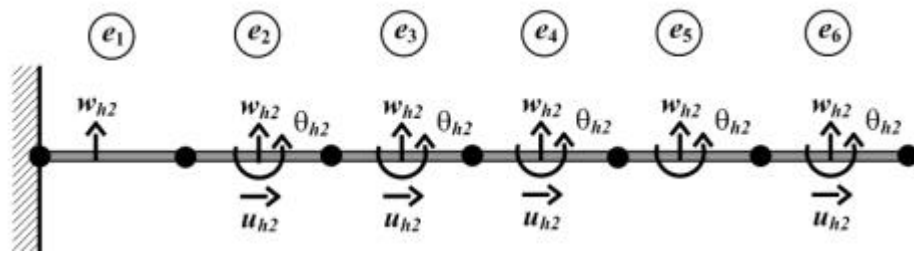
### 8.2.5 Viga de seção retangular engastada em uma extremidade com $g = 0.9$

As Figuras 8.28 a 8.31 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.9$ .

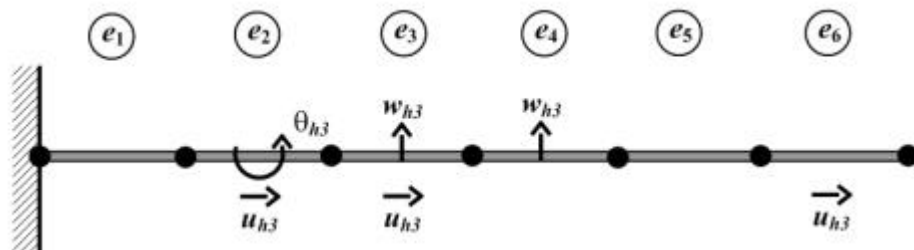


**Figura 8.28** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 4 elementos e  $\gamma = 0.9$



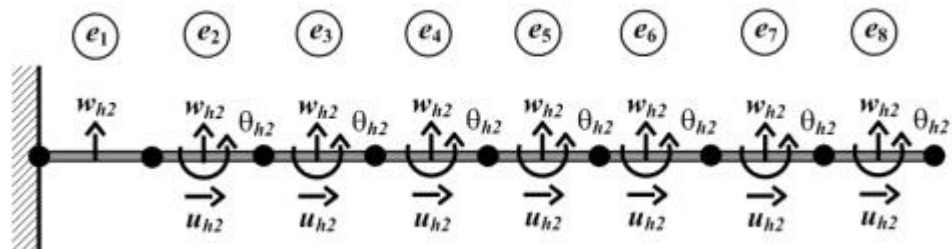


(a)

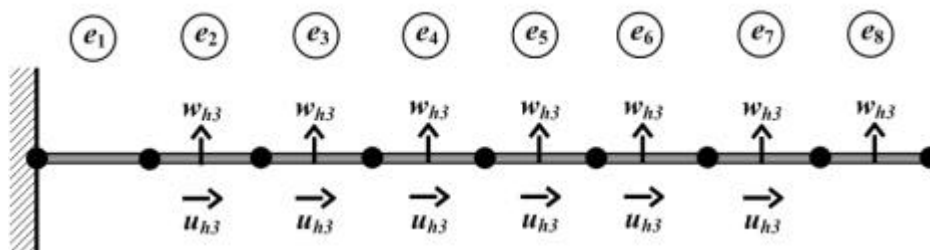


(b)

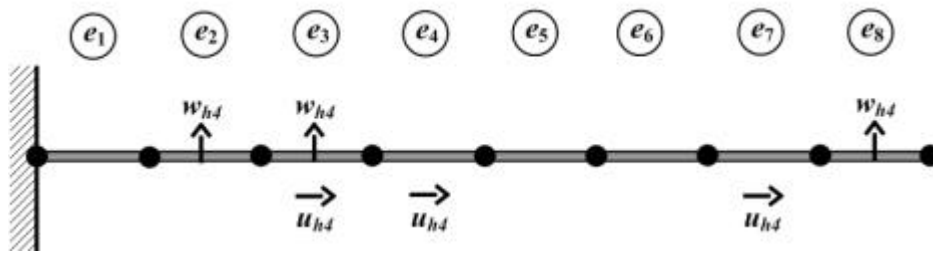
**Figura 8.29** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as dez frequências da viga com 6 elementos e  $\gamma = 0.9$



(a)

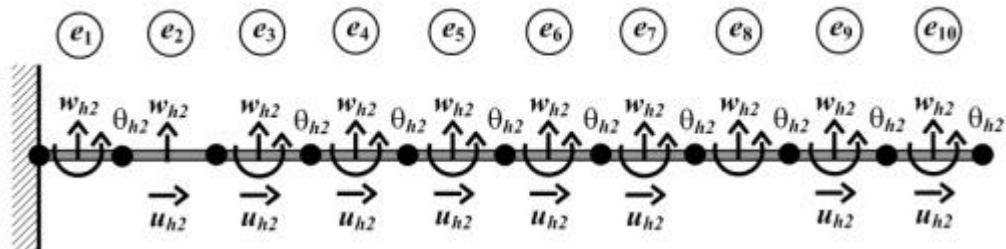


(b)

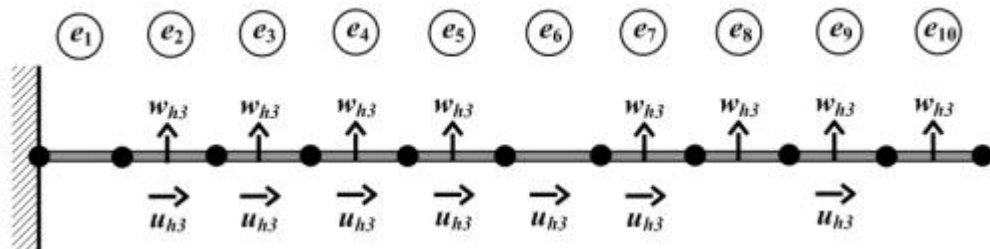


(c)

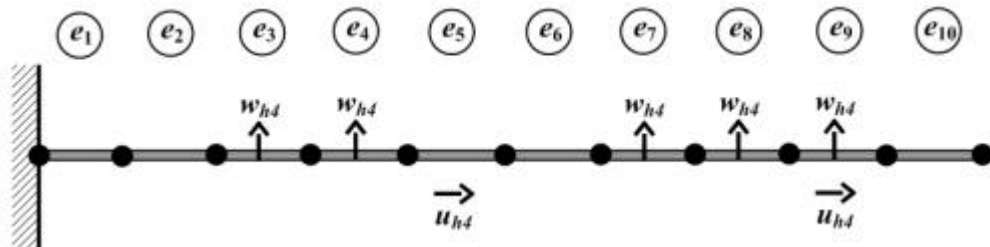
**Figura 8.30** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 8 elementos e  $\gamma = 0.9$



(a)



(b)

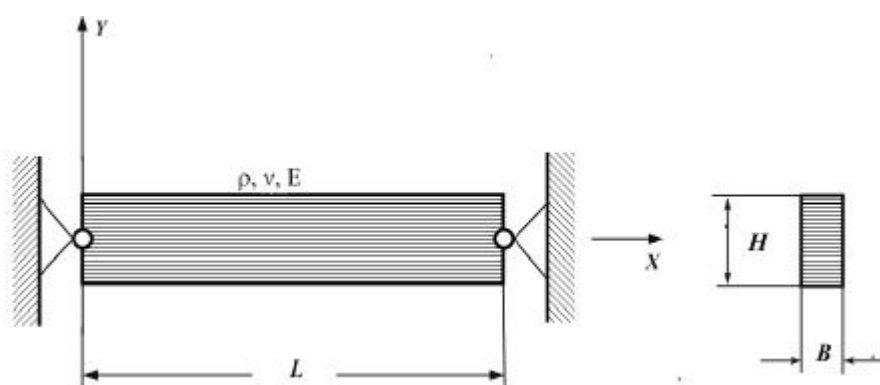


(c)

**Figura 8.31** Primeira reanálise (a), segunda reanálise (b) e terceira reanálise (c) para as dez frequências da viga com 10 elementos e  $\gamma = 0.9$

### 8.3 Viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos a partir do elemento finito hierárquico proposto na análise dinâmica de uma viga biapoiada como mostra a Figura (8.12), na qual foi feita uma comparação dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica (iso) e hierárquica de 2°, 3° e 4° graus sem a utilização do estimador de erro, foi feita ainda a comparação dos resultados obtidos do elemento BEAM3 do software comercial ANSYS 5.4 e do elemento de viga de Euler Bernoulli. Todos os resultados obtidos com os elementos descritos acima foram normalizados pelos resultados obtidos na literatura, Lima Jr. (2000).



**Figura 8.32** Viga de seção retangular biapoiada.

Será apresentado o comportamento dos resultados a medida que a viga se torna esbelta, isto é  $b = r/L$  tendendo a zero, na qual  $r = \sqrt{I/Area}$  e  $L$  é o comprimento da viga. A tabela abaixo mostra as variações dos valores de  $b = r/L$  que será aplicado neste exemplo a medida que a altura “ $H$ ” da viga aumenta.

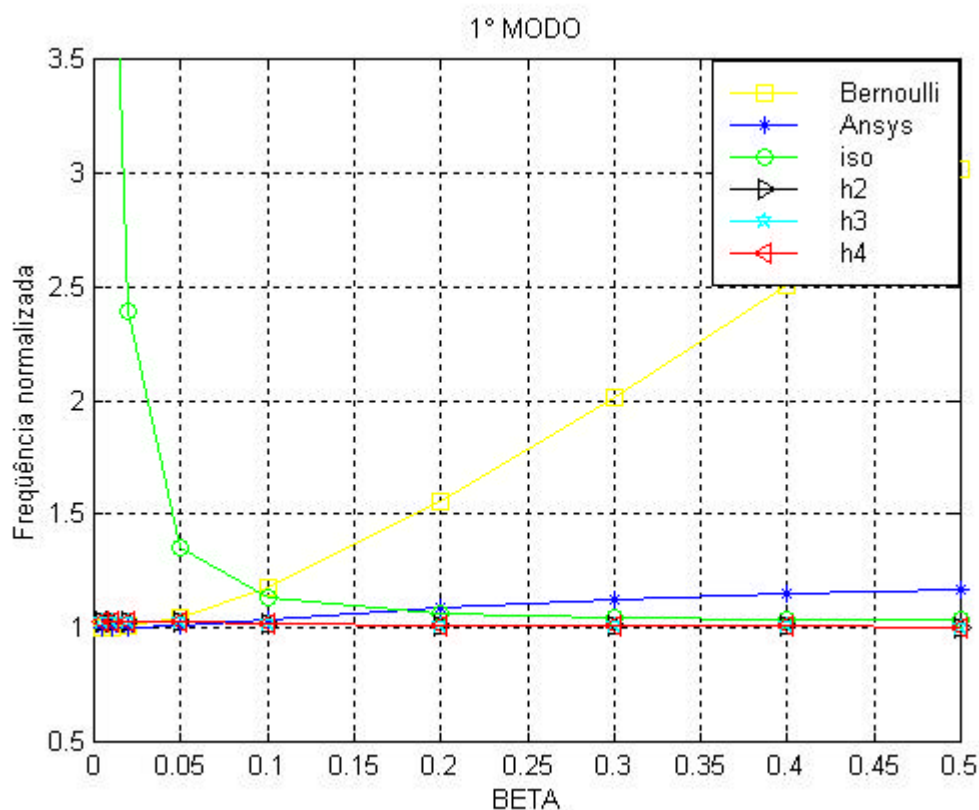
$b = r/L$	$H/B$	$H$	$B$	$L$
0.005	3.4640	0.3464	0.1	20
0.01	6.9280	0.6928	0.1	20
0.02	13.8560	1.3856	0.1	20
0.05	34.6410	3.4641	0.1	20
0.1	69.2820	6.9282	0.1	20
0.2	138.5640	13.8564	0.1	20
0.3	207.8460	20.7846	0.1	20
0.4	277.1280	27.7128	0.1	20
0.5	346.4100	34.6410	0.1	20

**Tabela 8.12** Variação de  $\beta$ .

As Tabelas 8.13 a 8.16 e as Figuras 8.13 a 8.16, apresentam os números de elementos e os graus de liberdades livres ( $NGL$ ) envolvidos na análise do elemento finito proposto com seus refinamentos ( $iso$ ,  $m = 2$ ,  $m = 3$  e  $m = 4$ ) sem indicador de erro e com a variação  $b = r/L$ .

$b$	<i>Bernoulli</i>	<i>Ansys</i>	<i>Isso</i>	$h2$	$h3$	$h4$
0.005	1.0010	1.0006	8.6658	1.0264	1.0264	1.0264
0.01	1.0023	1.0008	4.4264	1.0261	1.0261	1.0261
0.02	1.0083	1.0023	2.3929	1.0258	1.0258	1.0258
0.05	1.0490	1.0121	1.3567	1.0243	1.0243	1.0243
0.1	1.1770	1.0379	1.1307	1.0204	1.0204	1.0204
0.2	1.5581	1.0886	1.0612	1.0136	1.0135	1.0135
0.3	2.0137	1.1248	1.0448	1.0092	1.0091	1.0091
0.4	2.5035	1.1500	1.0378	1.0065	1.0063	1.0063
0.5	3.0127	1.1679	1.0340	1.0048	1.0046	1.0046

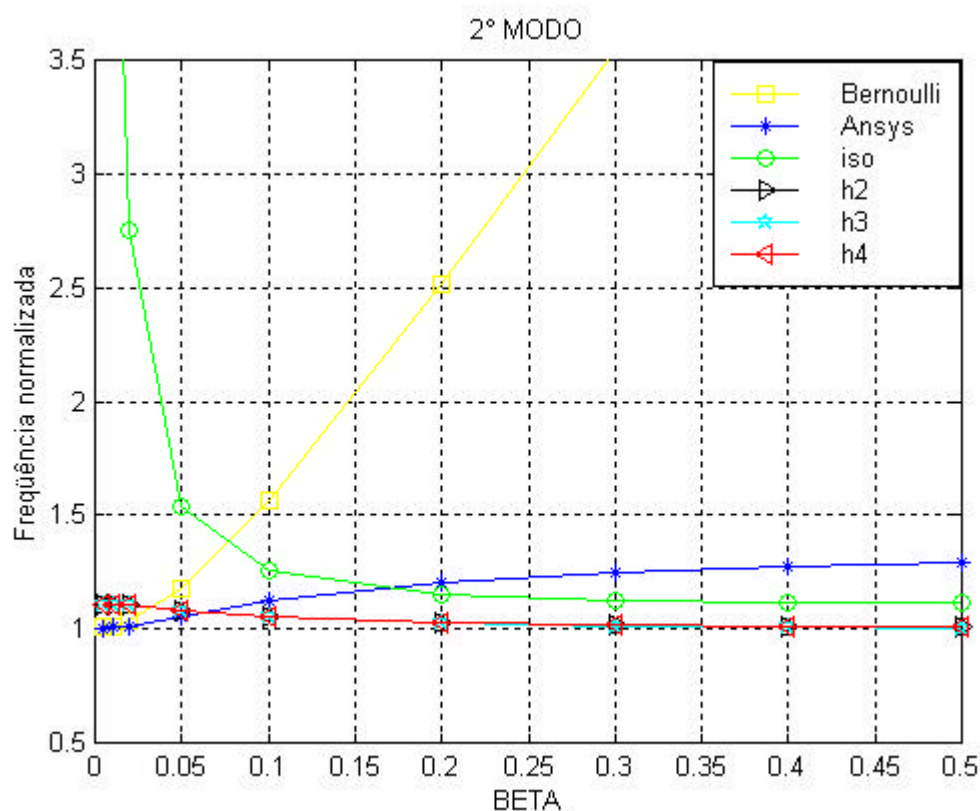
**Tabela 8.13** Primeira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.



**Figura 8.33** Primeira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.

$b$	<i>Bernoulli</i>	<i>Ansys</i>	<i>Iso</i>	$h2$	$h3$	$h4$
0.005	1.0060	1.0046	10.0067	1.1095	1.1095	1.1095
0.01	1.0121	1.0066	5.1085	1.1084	1.1084	1.1084
0.02	1.0357	1.0140	2.7536	1.1042	1.1040	1.1040
0.05	1.1814	1.0530	1.5385	1.0842	1.0833	1.0832
0.1	1.5638	1.1212	1.2538	1.0547	1.0528	1.0527
0.2	2.5127	1.2066	1.1527	1.0268	1.0239	1.0238
0.3	3.5471	1.2504	1.1274	1.0162	1.0129	1.0128
0.4	4.6153	1.2747	1.1173	1.0113	1.0079	1.0078
0.5	5.7001	1.2891	1.1123	1.0088	1.0053	1.0052

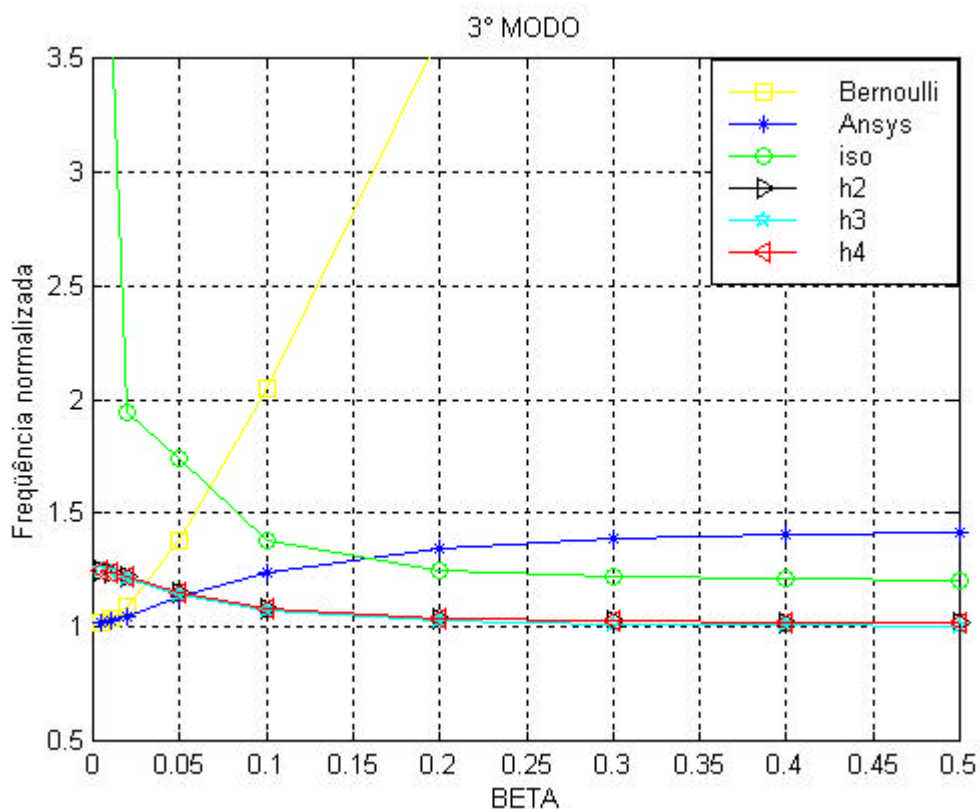
**Tabela 8.14** Segunda frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.



**Figura 8.34** Segunda frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.

$b$	<i>Bernoulli</i>	<i>Ansys</i>	<i>Iso</i>	$h2$	$h3$	$h4$
0.005	1.0229	1.0202	7.2897	1.2439	1.2438	1.2438
0.01	1.0366	1.0258	3.6936	1.2378	1.2373	1.2373
0.02	1.0887	1.0458	1.9395	1.2172	1.2157	1.2155
0.05	1.3778	1.1310	1.7412	1.1470	1.1410	1.1405
0.1	2.0498	1.2428	1.3784	1.0818	1.0709	1.0702
0.2	3.5978	1.3462	1.2494	1.0398	1.0257	1.0250
0.3	5.2298	1.3860	1.2202	1.0279	1.0129	1.0122
0.4	6.8908	1.4043	1.2093	1.0232	1.0078	1.0071
0.5	8.5647	1.4139	1.2041	1.0208	1.0053	1.0046

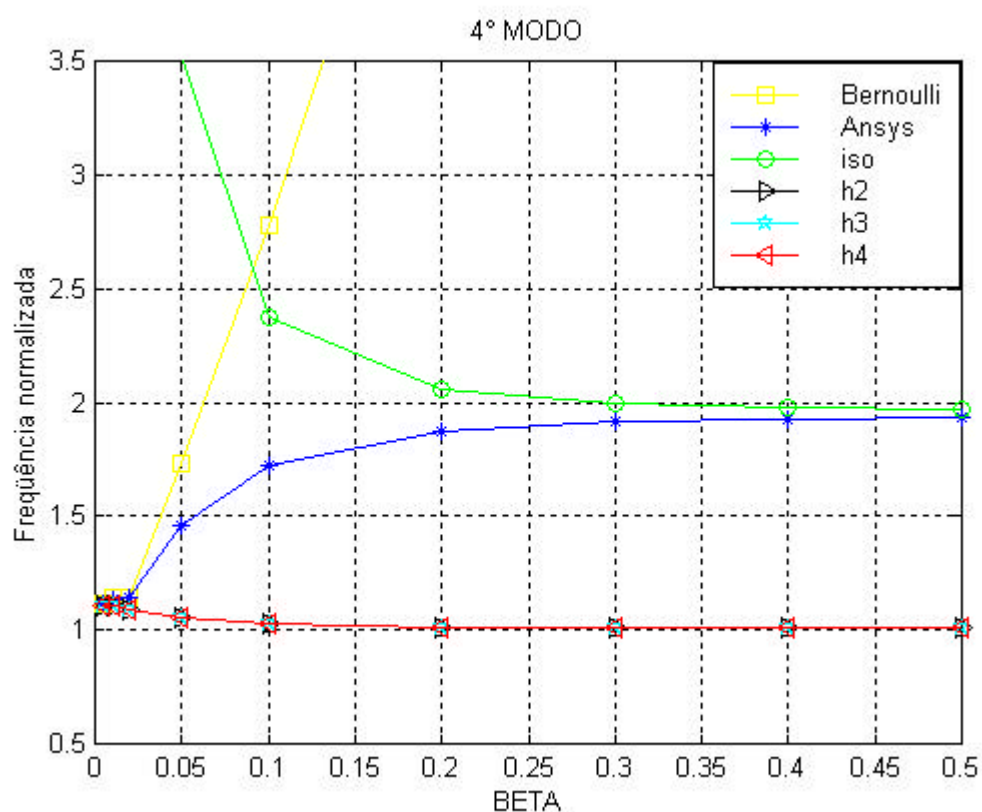
**Tabela 8.15** Terceira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.



**Figura 8.35** Terceira frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.

<b>b</b>	<i>Bernoulli</i>	<i>Ansys</i>	<i>Iso</i>	<i>h2</i>	<i>h3</i>	<i>h4</i>
0.005	1.1189	1.1167	145.64	1.1085	1.1085	1.1084
0.01	1.1451	1.1361	38.079	1.1045	1.1044	1.1041
0.02	1.1411	1.1411	11.158	1.0920	1.0918	1.0906
0.05	1.7288	1.4611	3.5298	1.0573	1.0561	1.0527
0.1	2.7779	1.7228	2.3723	1.0301	1.0289	1.0238
0.2	5.1025	1.8757	2.0586	1.0144	1.0139	1.0078
0.3	7.5108	1.9139	1.9976	1.0103	1.0101	1.0037
0.4	9.9454	1.9283	1.9759	1.0087	1.0086	1.0021
0.5	12.3913	1.9352	1.9658	1.0080	1.0079	1.0014

**Tabela 8.16** Quarta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.



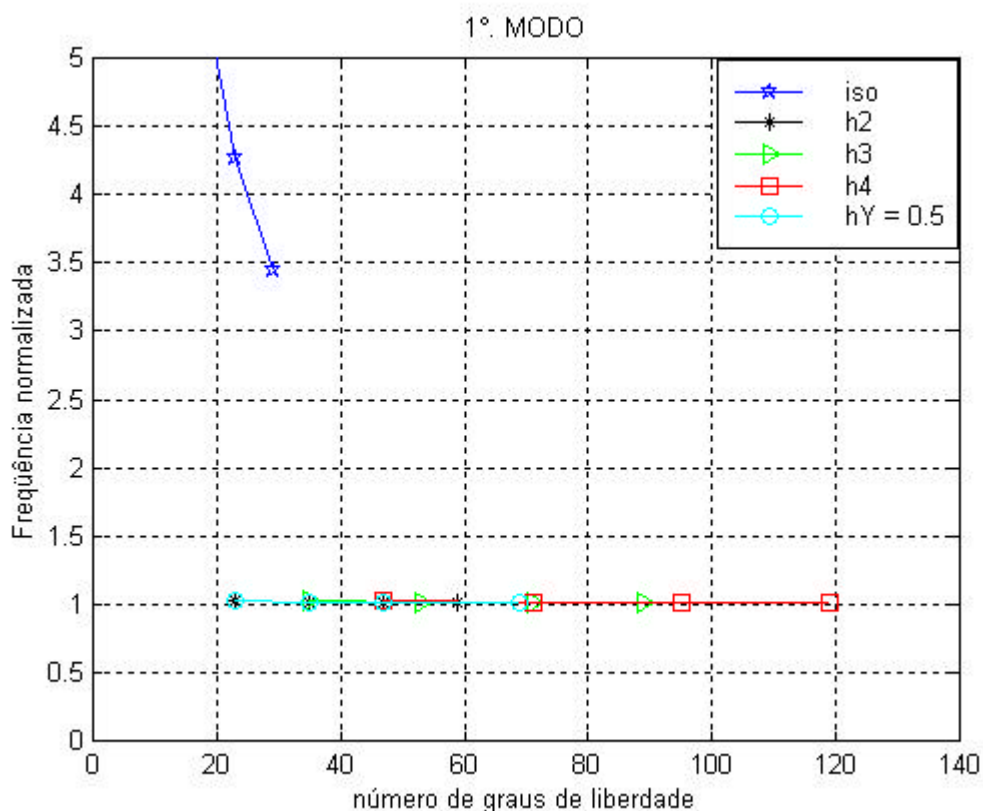
**Figura 8.36** Quarta frequência natural normalizada para a viga de seção retangular biapoiada sem o estimador de erro.

#### 8.4 Viga de seção retangular biapoiada com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ )

Utilizando o exemplo apresentado na seção 8.3, será comparado os resultados das quatro primeiras freqüência normalizadas com a utilização do estimador erro e  $\beta = 0.005$ .

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
<i>Isso</i>	8.6658	0	11	5.6677	0	17	4.2617	0	23	3.4472	0	29
$h_2$	1.0264	88.16	23	1.0118	82.15	35	1.0067	76.38	47	1.0044	70.86	59
$h_3$	1.0264	88.16	35	1.0118	82.15	53	1.0067	76.38	71	1.0044	70.86	89
$h_4$	1.0264	88.16	47	1.0118	82.15	71	1.0067	76.38	95	1.0044	70.86	119
$h_{g=0.5}$	1.0264	88.16	23	1.0118	82.15	35	1.0067	76.38	47	1.0044	70.86	69
$h_{g=0.6}$	1.0264	88.16	23	1.0118	82.15	35	1.0067	76.38	47	1.0044	70.86	67
$h_{g=0.7}$	1.0264	88.16	23	1.0118	82.15	35	1.0067	76.38	47	1.0044	70.86	67
$h_{g=0.8}$	1.0264	88.16	23	1.0118	82.15	35	1.0067	76.38	47	1.0044	70.86	67
$h_{g=0.9}$	1.0264	88.16	23	1.0118	82.15	35	1.0067	76.38	47	1.0044	70.86	63

**Tabela 8.17** Primeira freqüência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.005$

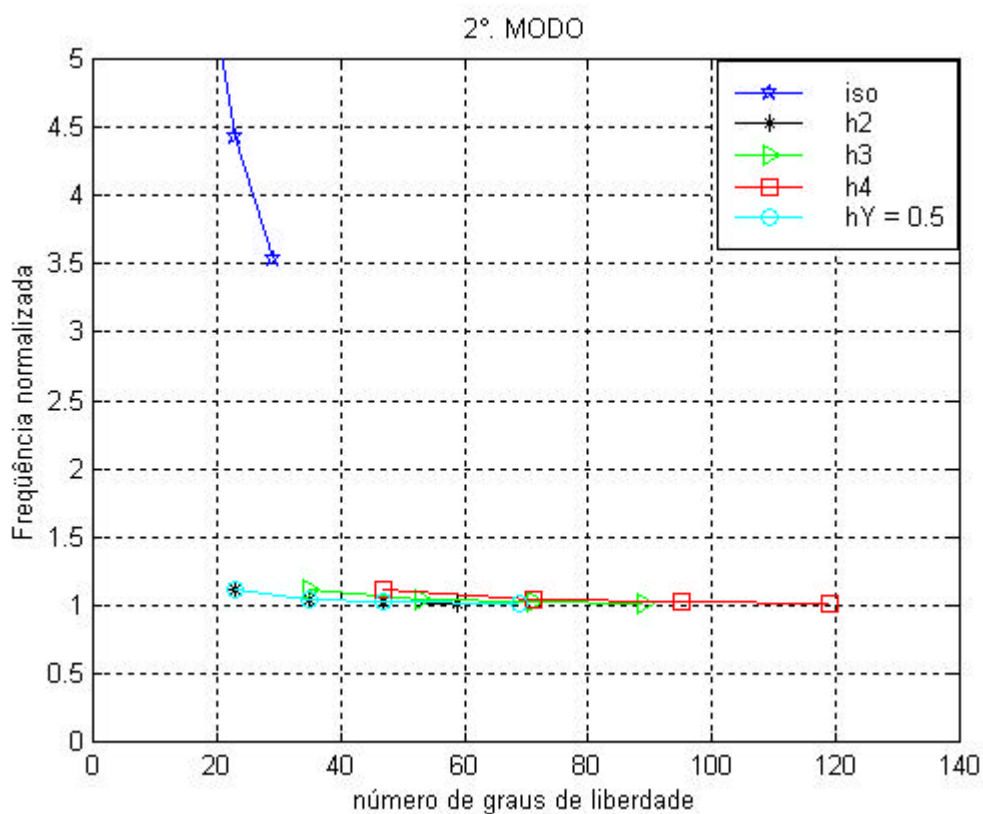


**Figura 8.37** Primeira freqüência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.005$



	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	10.006	0	11	6.0600	0	17	4.4264	0	23	3.5319	0	29
$h_2$	1.1095	88.91	23	1.0470	82.72	35	1.0261	76.82	47	1.0166	71.22	59
$h_3$	1.1095	88.91	35	1.0470	82.72	53	1.0261	76.82	71	1.0166	71.22	89
$h_4$	1.1095	88.91	47	1.0470	82.72	71	1.0261	76.82	95	1.0166	71.22	119
$h_{g=0.5}$	1.1095	88.91	23	1.0470	82.72	35	1.0261	76.82	47	1.0166	71.22	69
$h_{g=0.6}$	1.1095	88.91	23	1.0470	82.72	35	1.0261	76.82	47	1.0166	71.22	67
$h_{g=0.7}$	1.1095	88.91	23	1.0470	82.72	35	1.0261	76.82	47	1.0166	71.22	67
$h_{g=0.8}$	1.1095	88.91	23	1.0470	82.72	35	1.0261	76.82	47	1.0166	71.22	67
$h_{g=0.9}$	1.1095	88.91	23	1.0470	82.72	35	1.0261	76.82	47	1.0166	71.22	63

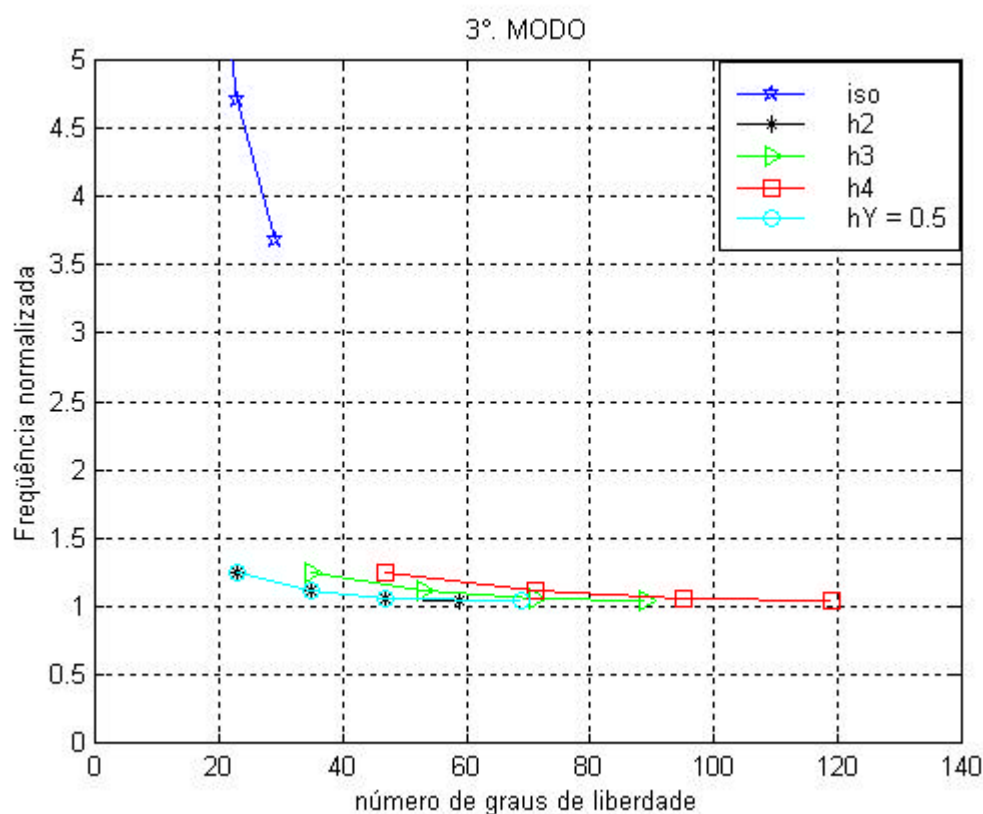
**Tabela 8.18** Segunda frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.005$



**Figura 8.38** Segunda frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.005$

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	7.2897	0	11	6.7300	0	17	4.7095	0	23	3.6770	0	29
$h_2$	1.2439	82.94	23	1.1091	83.52	35	1.0597	77.50	47	1.0377	71.78	59
$h_3$	1.2438	82.94	35	1.1090	83.52	53	1.0597	77.50	71	1.0377	71.78	89
$h_4$	1.2438	82.94	47	1.1090	83.52	71	1.0597	77.50	95	1.0377	71.78	119
$h_{g=0.5}$	1.2438	82.94	23	1.1090	83.52	35	1.0597	77.50	47	1.0377	71.78	69
$h_{g=0.6}$	1.2438	82.94	23	1.1090	83.52	35	1.0597	77.50	47	1.0377	71.78	67
$h_{g=0.7}$	1.2438	82.94	23	1.1090	83.52	35	1.0597	77.50	47	1.0377	71.78	67
$h_{g=0.8}$	1.2438	82.94	23	1.1090	83.52	35	1.0597	77.50	47	1.0377	71.78	67
$h_{g=0.9}$	1.2438	82.94	23	1.1090	83.52	35	1.0597	77.50	47	1.0377	71.78	63

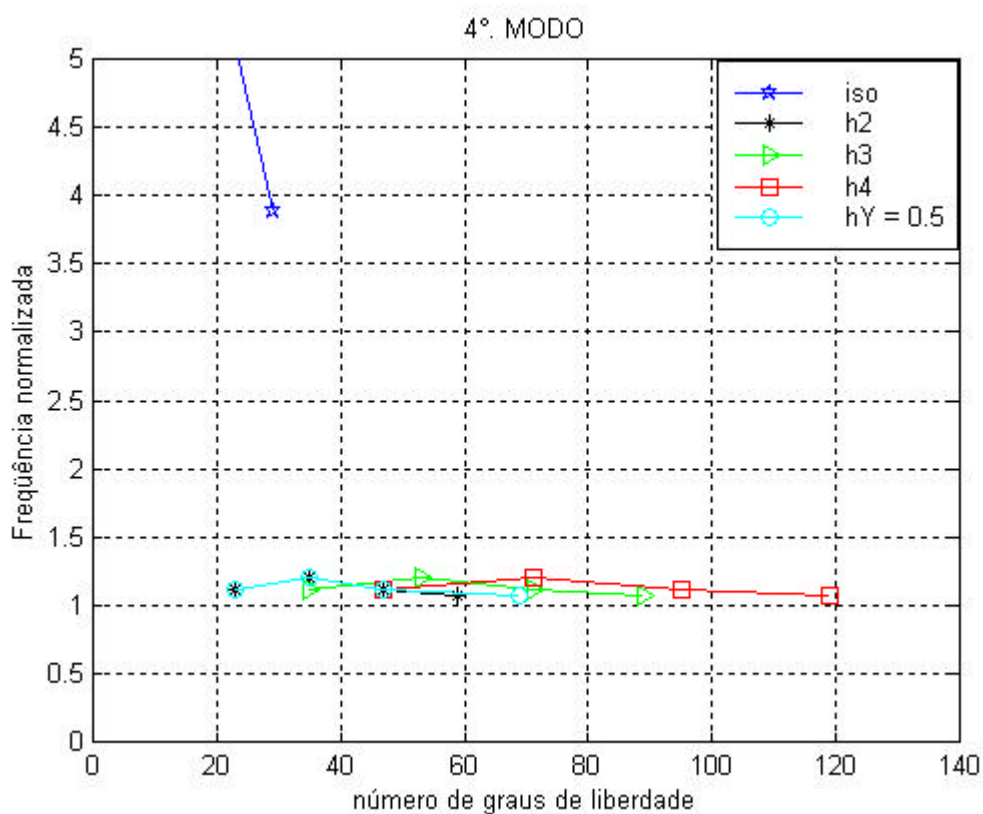
**Tabela 8.19** Terceira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.005$



**Figura 8.39** Terceira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.005$

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	6.6254	0	11	7.5638	0	17	5.1085	0	23	3.8836	0	29
$h_2$	1.1085	83.27	23	1.1967	84.18	35	1.1084	78.30	47	1.0679	72.50	59
$h_3$	1.1085	83.27	35	1.1965	84.18	53	1.1084	78.30	71	1.0679	72.50	89
$h_4$	1.1084	83.27	47	1.1965	84.18	71	1.1084	78.30	95	1.0679	72.50	119
$h_{g=0.5}$	1.1085	83.27	23	1.1965	84.18	35	1.1084	78.30	47	1.0679	72.50	69
$h_{g=0.6}$	1.1085	83.27	23	1.1965	84.18	35	1.1084	78.30	47	1.0679	72.50	67
$h_{g=0.7}$	1.1085	83.27	23	1.1965	84.18	35	1.1084	78.30	47	1.0679	72.50	67
$h_{g=0.8}$	1.1085	83.27	23	1.1965	84.18	35	1.1084	78.30	47	1.0679	72.50	67
$h_{g=0.9}$	1.1085	83.27	23	1.1965	84.18	35	1.1084	78.30	47	1.0679	72.50	63

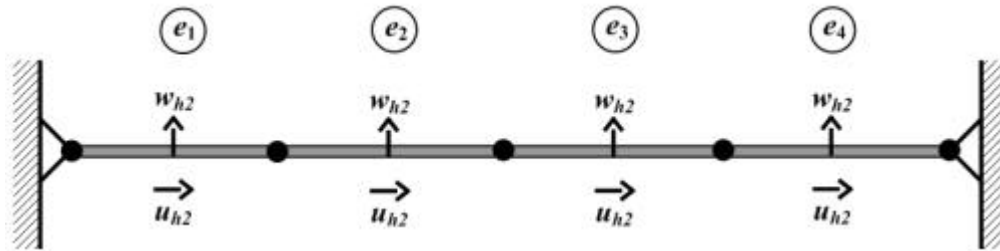
**Tabela 8.20** Quarta frequência natural normalizada para a viga biapoada com o estimador de erro e  $\beta = 0.005$



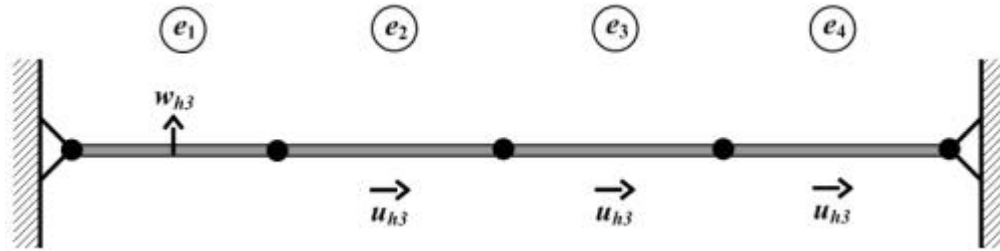
**Figura 8.40** Quarta frequência natural normalizada para a viga biapoada com o estimador de erro e  $\beta = 0.005$

#### 8.4.1 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $\gamma = 0.5$

As Figuras 8.41 a 8.44 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.5$

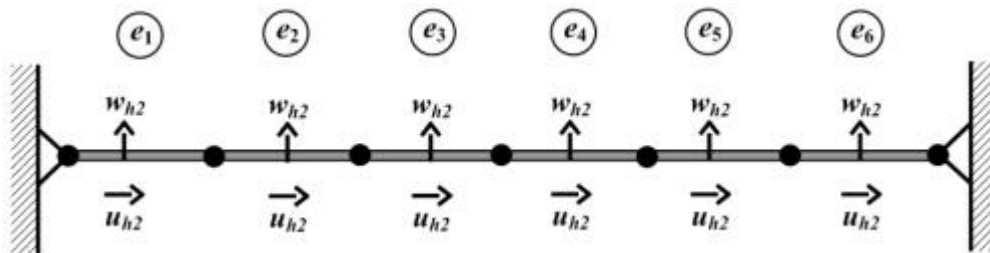


(a)

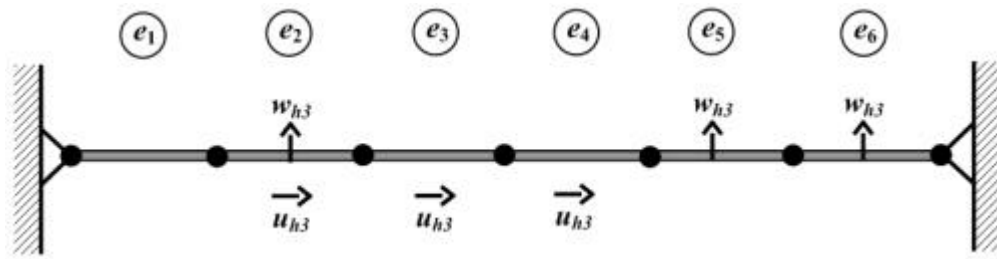


(b)

**Figura 8.41** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.5$

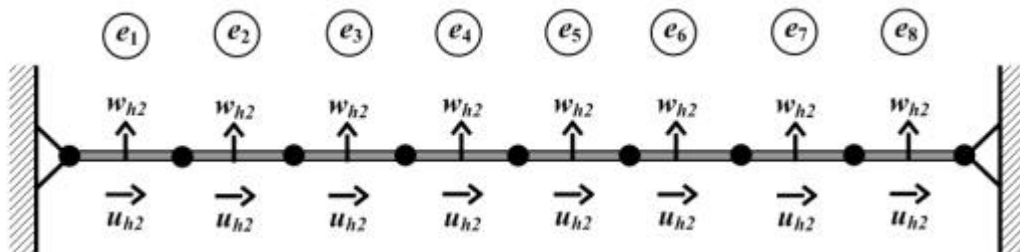


(a)

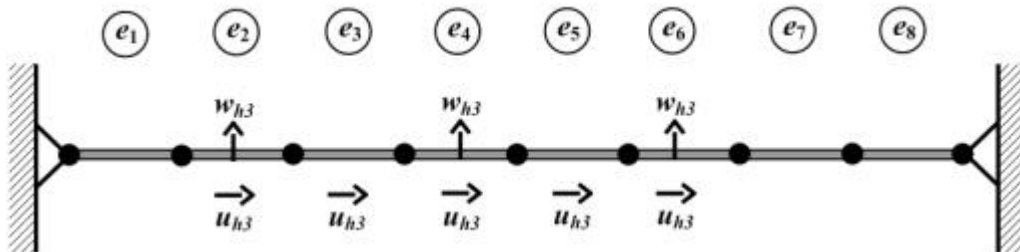


(b)

**Figura 8.42** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.5$

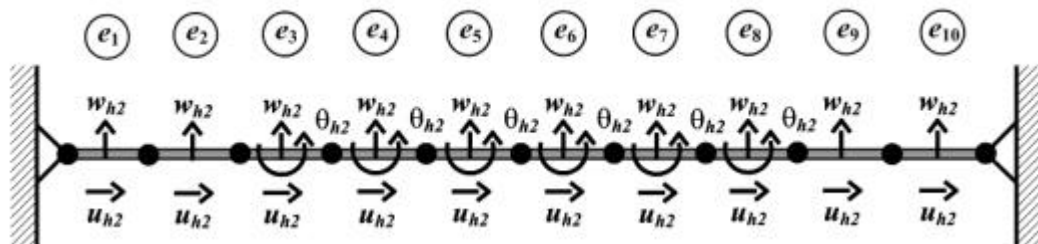


(a)

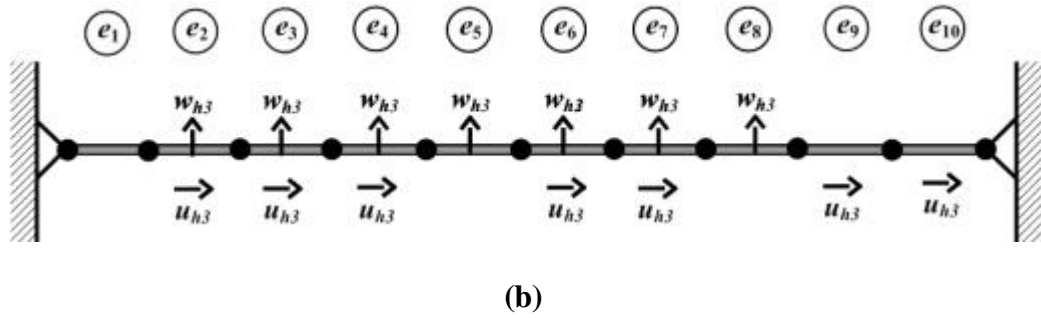


(b)

**Figura 8.43** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.5$



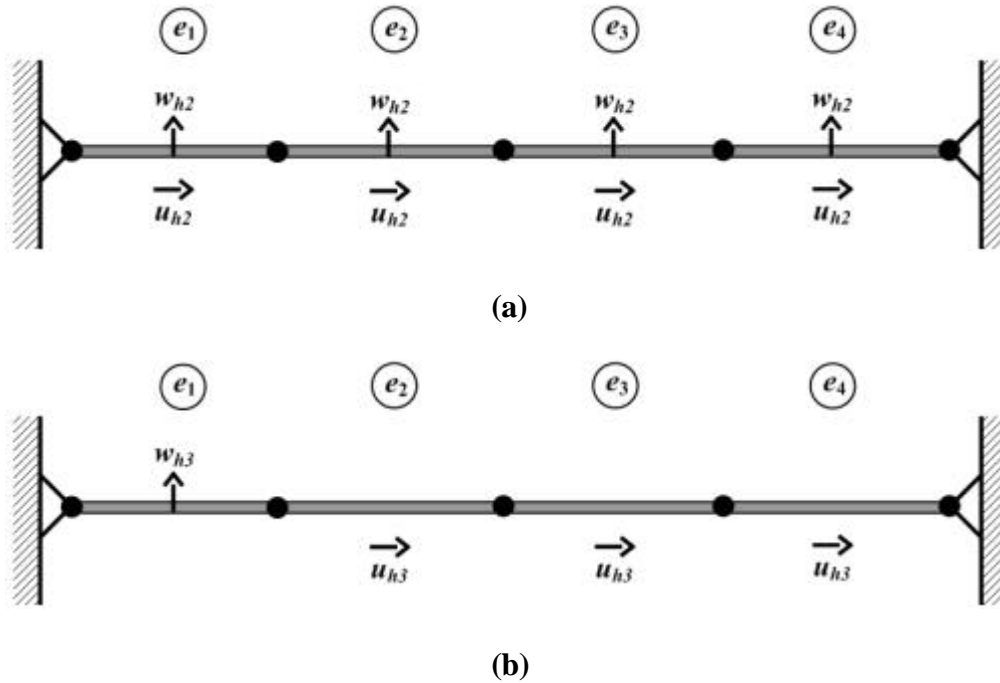
(a)



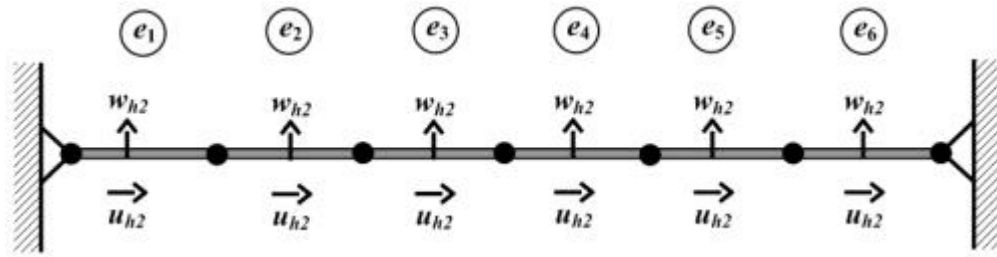
**Figura 8.44** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.5$

#### 8.4.2 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $g = 0.6$

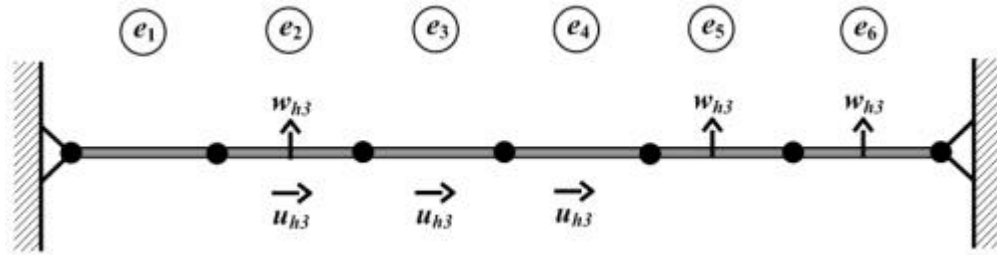
As Figuras 8.45 a 8.48 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.6$ .



**Figura 8.45** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.6$

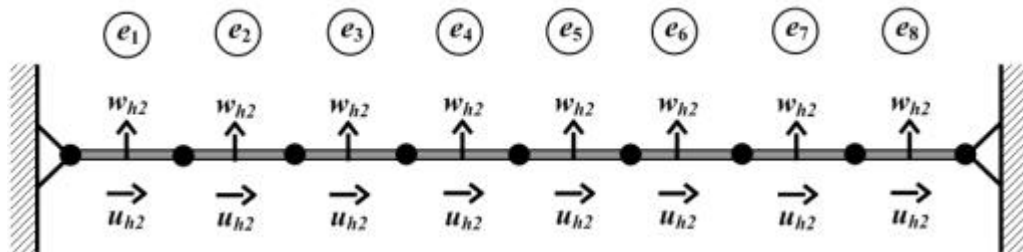


(a)

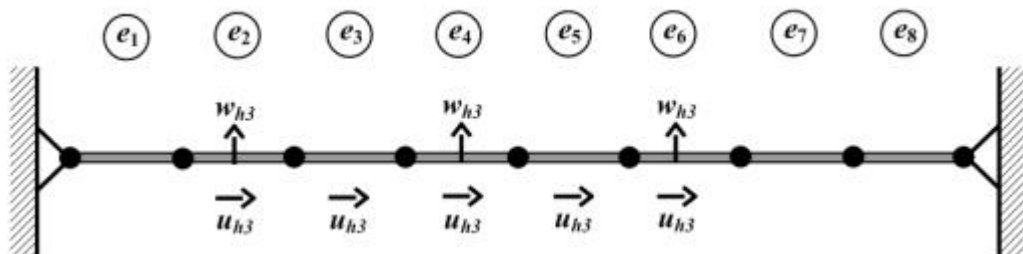


(b)

**Figura 8.46** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.6$

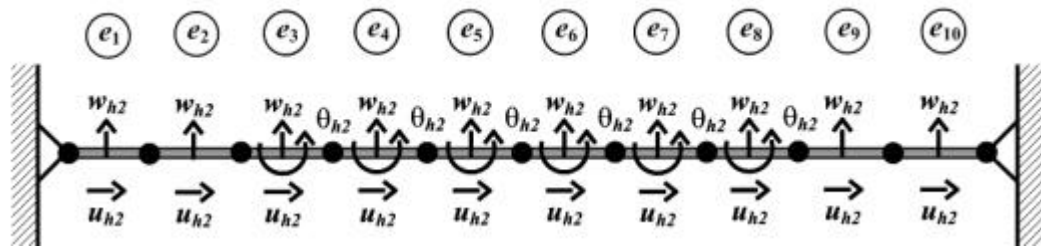


(a)

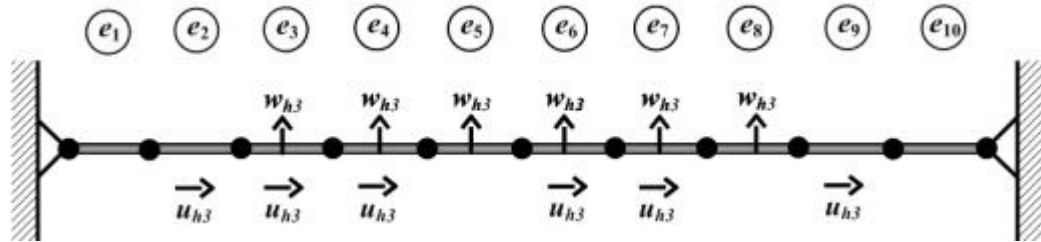


(b)

**Figura 8.47** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.6$



(a)

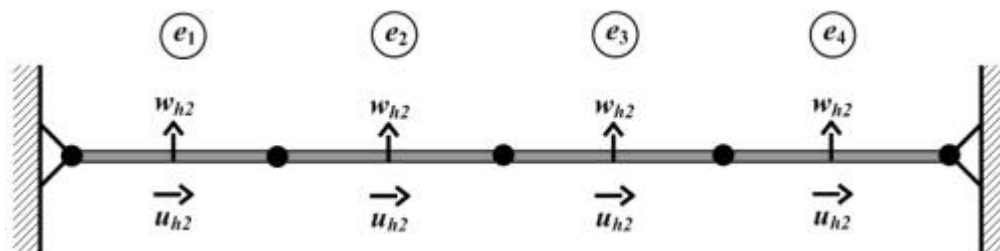


(b)

**Figura 8.48** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.6$

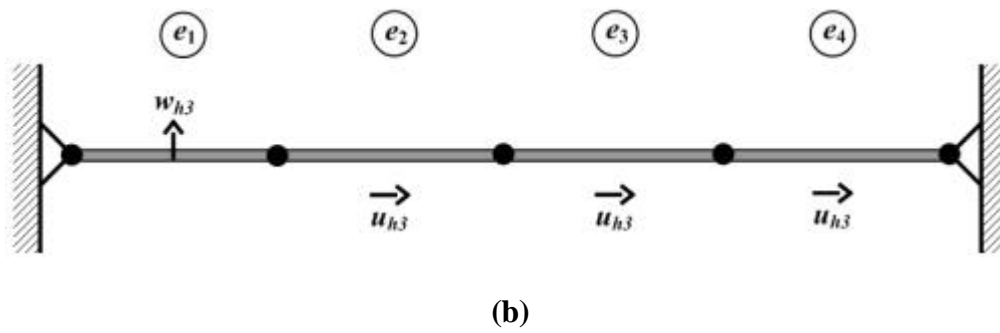
### 8.4.3 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $b = 0.005$ ) e $g = 0.7$

As Figuras 8.49 a 8.52 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.7$

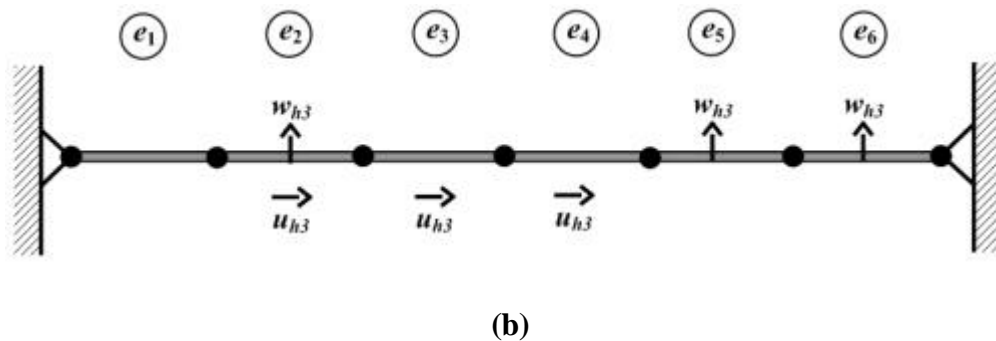
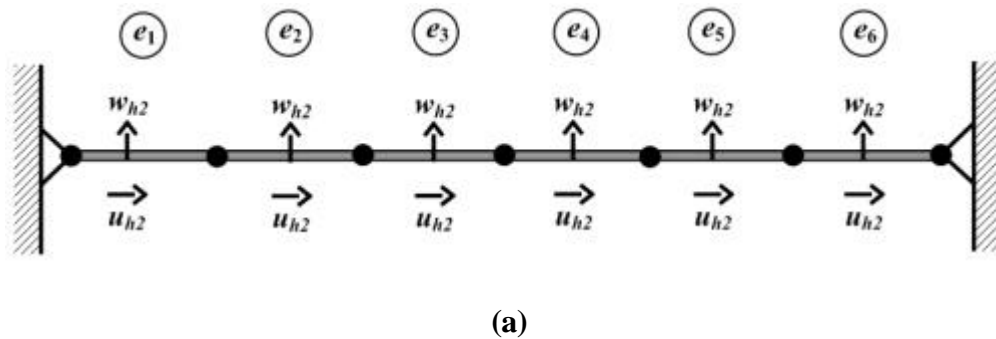


(a)

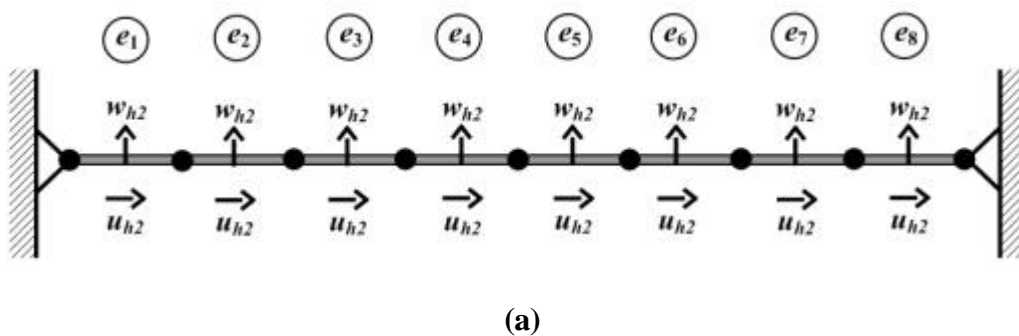


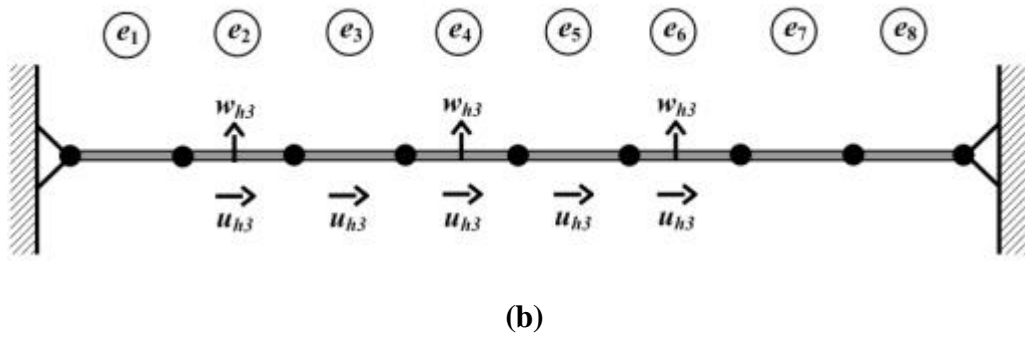


**Figura 8.49** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.7$

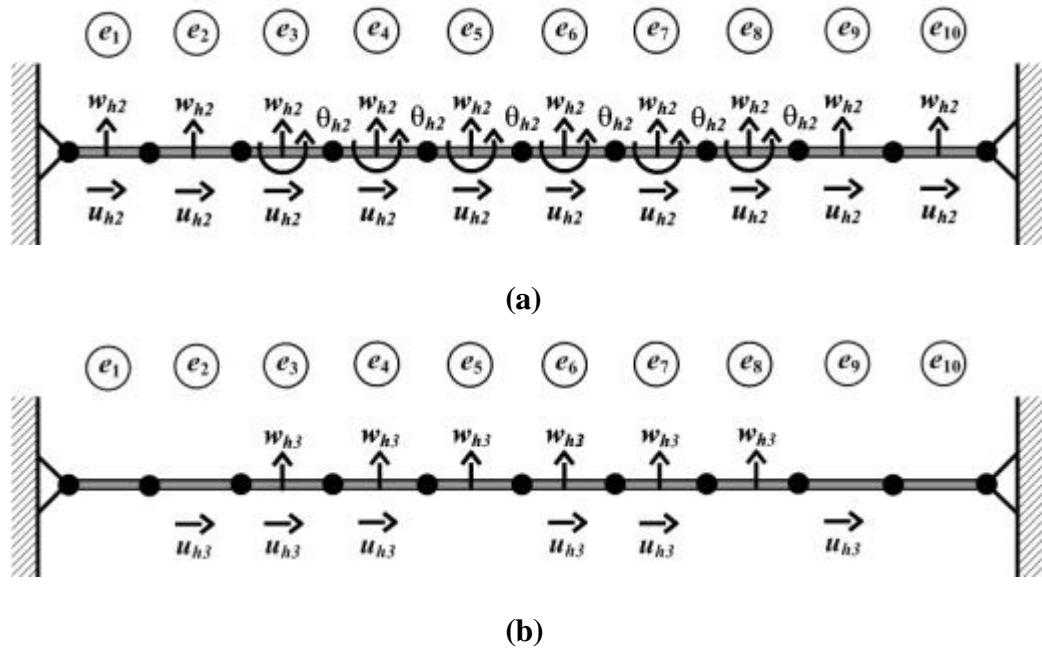


**Figura 8.50** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.7$





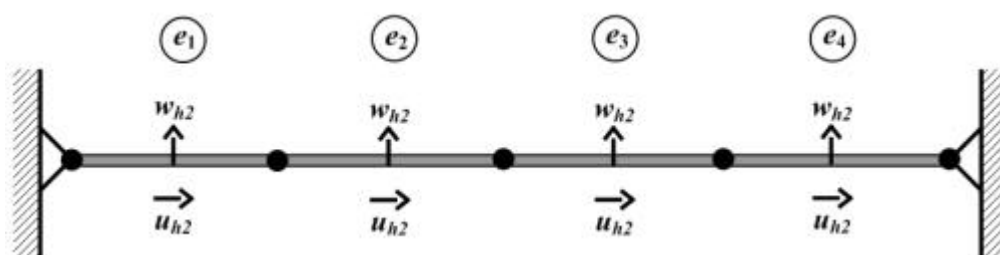
**Figura 8.51** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.7$



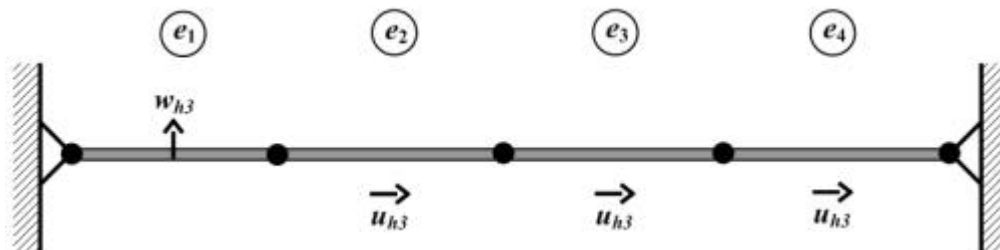
**Figura 8.52** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.7$

#### 8.4.4 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e $g = 0.8$

As Figuras 8.53 a 8.56 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.8$ .

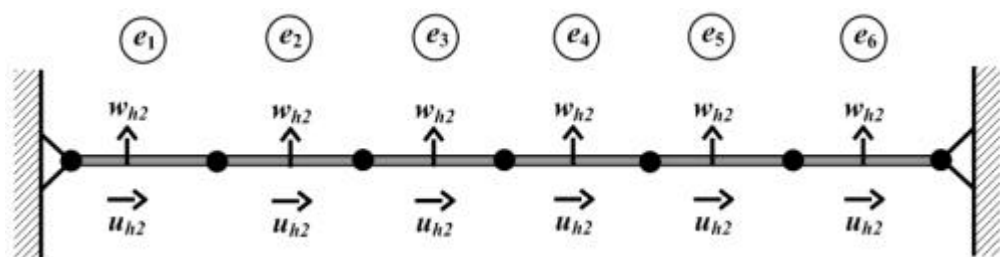


(a)

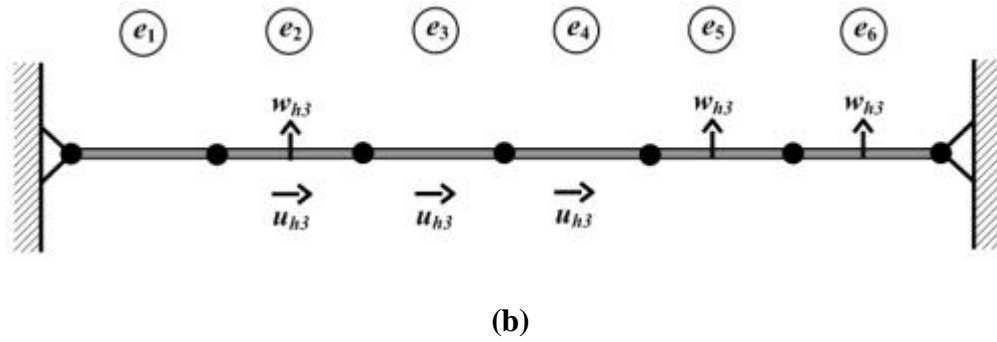


(b)

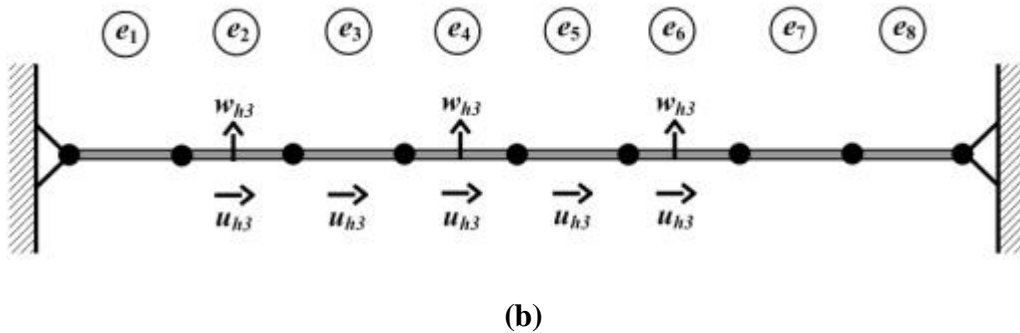
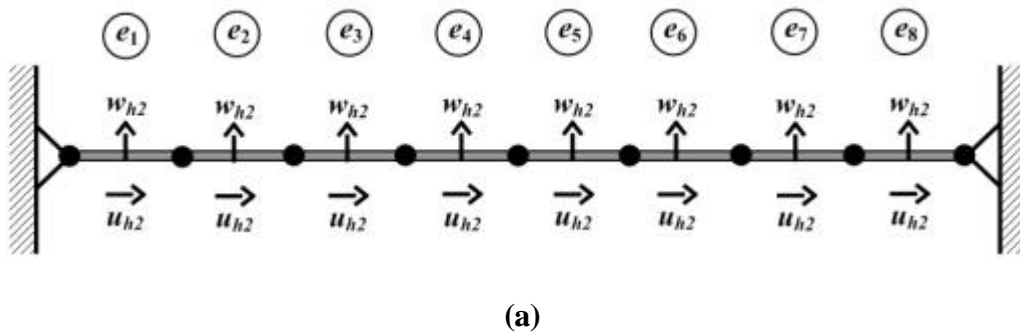
**Figura 8.53** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.8$



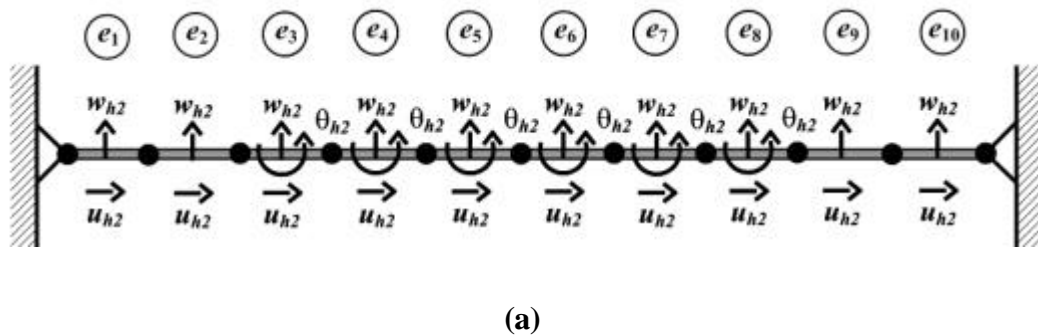
(a)

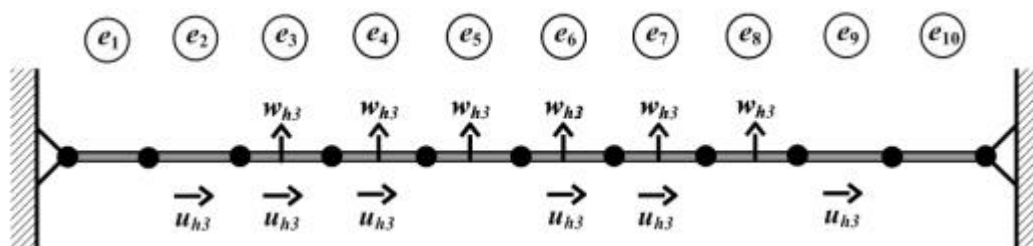


**Figura 8.54** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.8$



**Figura 8.55** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.8$



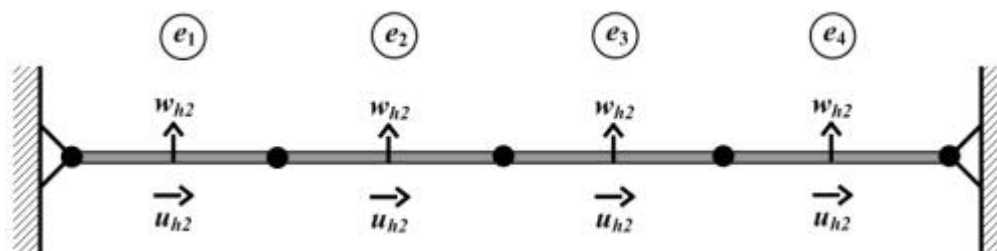


(b)

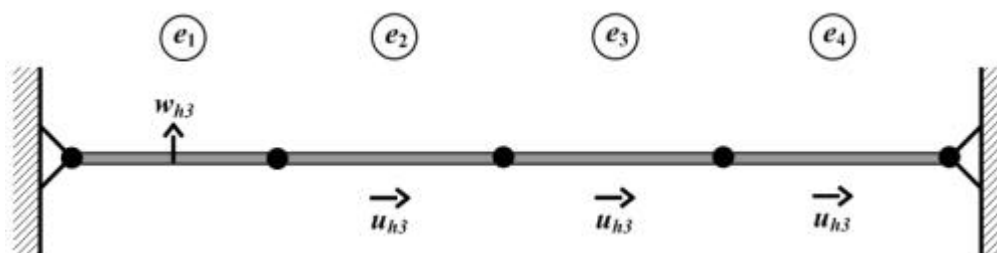
**Figura 8.56** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.8$

#### 8.4.5 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $b = 0.005$ ) e $g = 0.9$

As Figuras 8.57 a 8.60 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.9$ .

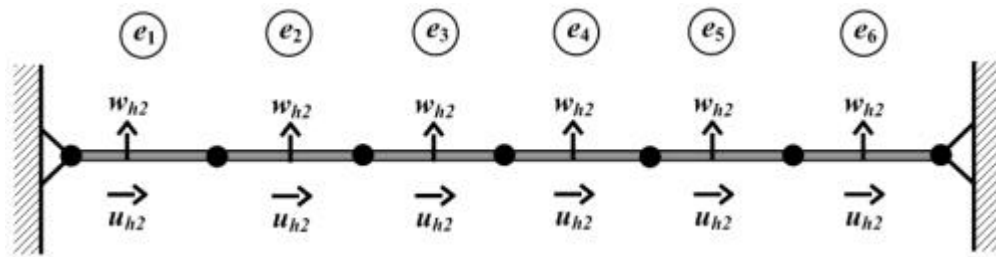


(a)

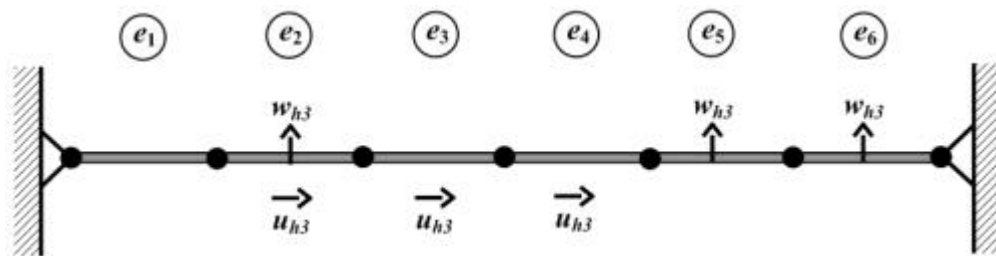


(b)

**Figura 8.57** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.9$

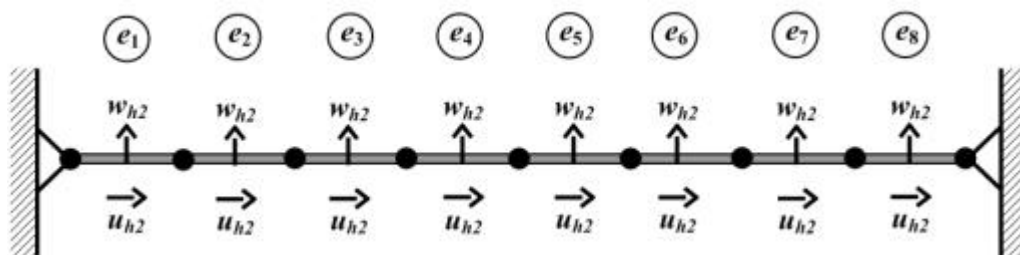


(a)

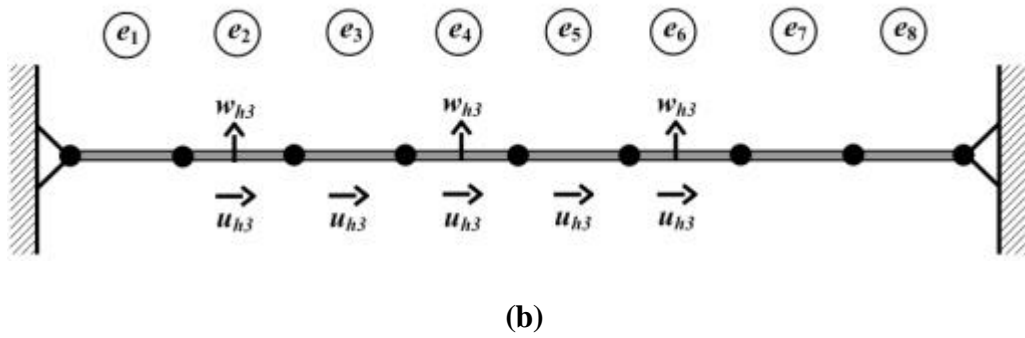


(b)

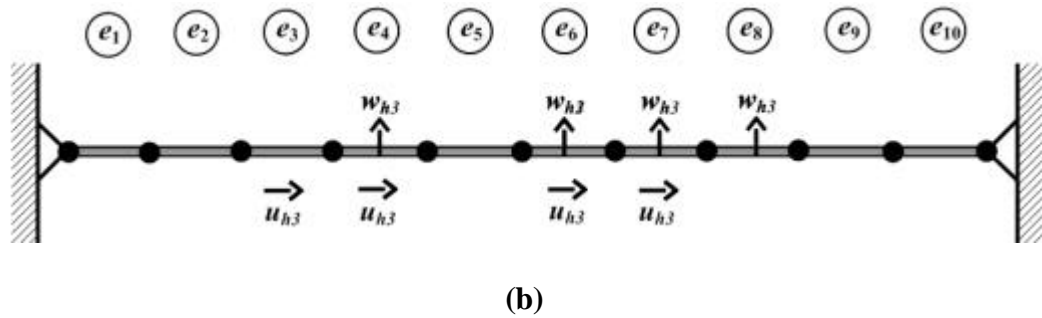
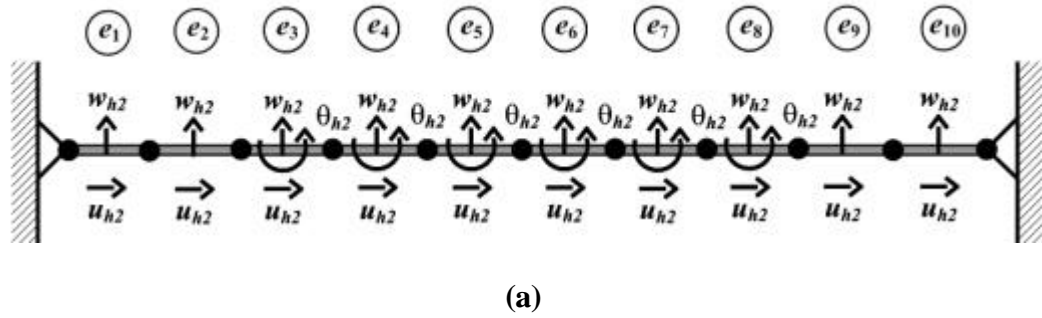
**Figura 8.58** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.9$



(a)



**Figura 8.59** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.9$



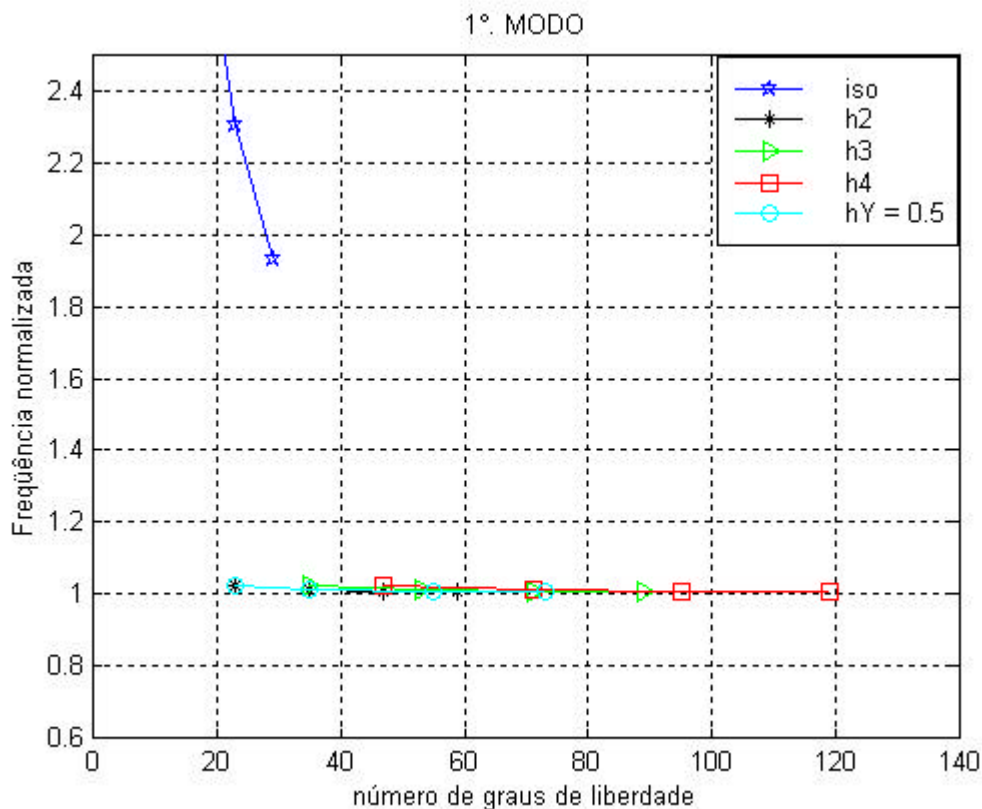
**Figura 8.60** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.005$ ) e  $\gamma = 0.9$

### 8.5 Viga de seção retangular biapoçada com estimador de erro ( $b = 0.01$ )

Utilizando o exemplo apresentado na seção 8.3, será comparado os resultados das quatro primeiras frequência normalizadas com a utilização do estimador erro e  $b = 0.01$ .

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	4.4264	0	11	2.9684	0	17	2.3039	0	23	1.9318	0	29
$h_2$	1.0261	76.82	23	1.0115	65.92	35	1.0064	56.32	47	1.0041	48.02	59
$h_3$	1.0261	76.82	35	1.0115	65.92	53	1.0064	56.32	71	1.0041	48.02	89
$h_4$	1.0261	76.82	47	1.0115	65.92	71	1.0064	56.32	95	1.0041	48.02	119
$h_{g=0.5}$	1.0261	76.82	23	1.0115	65.92	35	1.0064	56.32	55	1.0041	48.02	73
$h_{g=0.6}$	1.0261	76.82	23	1.0115	65.92	35	1.0064	56.32	55	1.0041	48.02	67
$h_{g=0.7}$	1.0261	76.82	23	1.0115	65.92	35	1.0064	56.32	55	1.0041	48.02	67
$h_{g=0.8}$	1.0261	76.82	23	1.0115	65.92	35	1.0064	56.32	55	1.0041	48.02	67
$h_{g=0.9}$	1.0261	76.82	23	1.0115	65.92	35	1.0064	56.32	55	1.0041	48.02	65

**Tabela 8.21** Primeira frequência natural normalizada para a viga biapoçada com o estimador de erro e  $\beta = 0.01$

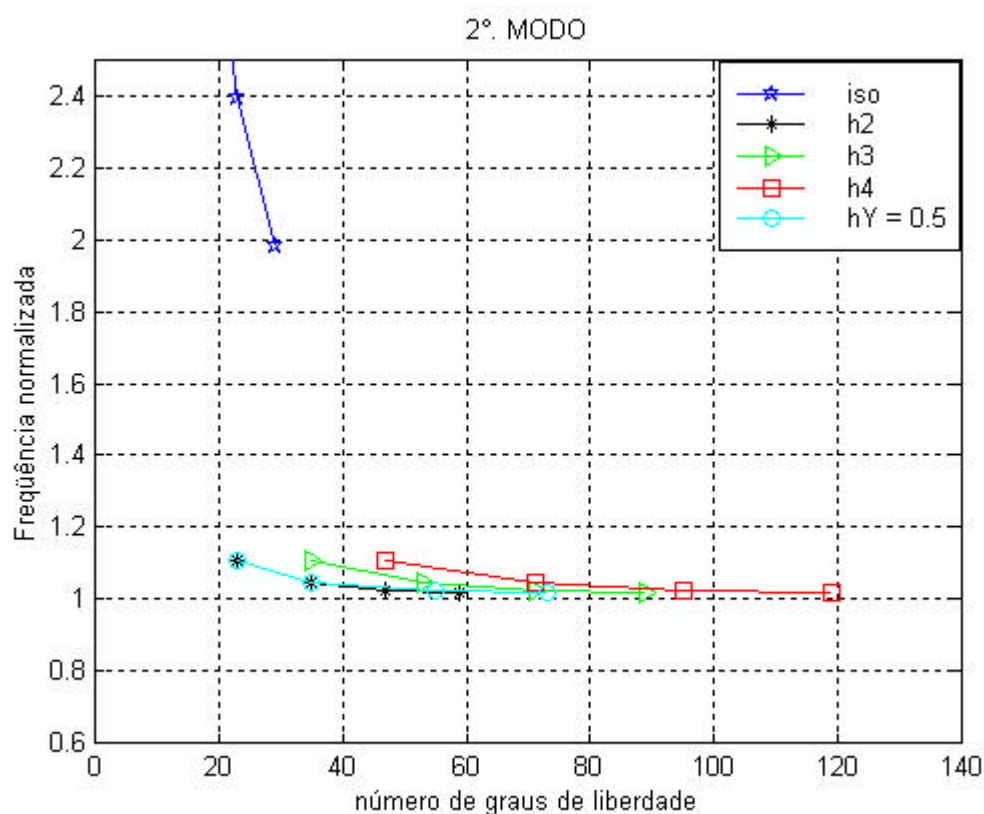


**Figura 8.61** Primeira frequência natural normalizada para a viga biapoçada com o estimador de erro e  $\beta = 0.01$



	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	5.1085	0	11	3.1734	0	17	2.3929	0	23	1.9794	0	29
$h_2$	1.1084	78.30	23	1.0466	67.02	35	1.0258	57.13	47	1.0164	48.65	59
$h_3$	1.1084	78.30	35	1.0466	67.02	53	1.0258	57.13	71	1.0164	48.65	89
$h_4$	1.1084	78.30	47	1.0466	67.02	71	1.0258	57.13	95	1.0164	48.65	119
$h_{g=0.5}$	1.1084	78.30	23	1.0466	67.02	35	1.0258	57.13	55	1.0164	48.65	73
$h_{g=0.6}$	1.1084	78.30	23	1.0466	67.02	35	1.0258	57.13	55	1.0164	48.65	67
$h_{g=0.7}$	1.1084	78.30	23	1.0466	67.02	35	1.0258	57.13	55	1.0164	48.65	67
$h_{g=0.8}$	1.1084	78.30	23	1.0466	67.02	35	1.0258	57.13	55	1.0164	48.65	67
$h_{g=0.9}$	1.1084	78.30	23	1.0466	67.02	35	1.0258	57.13	55	1.0164	48.65	65

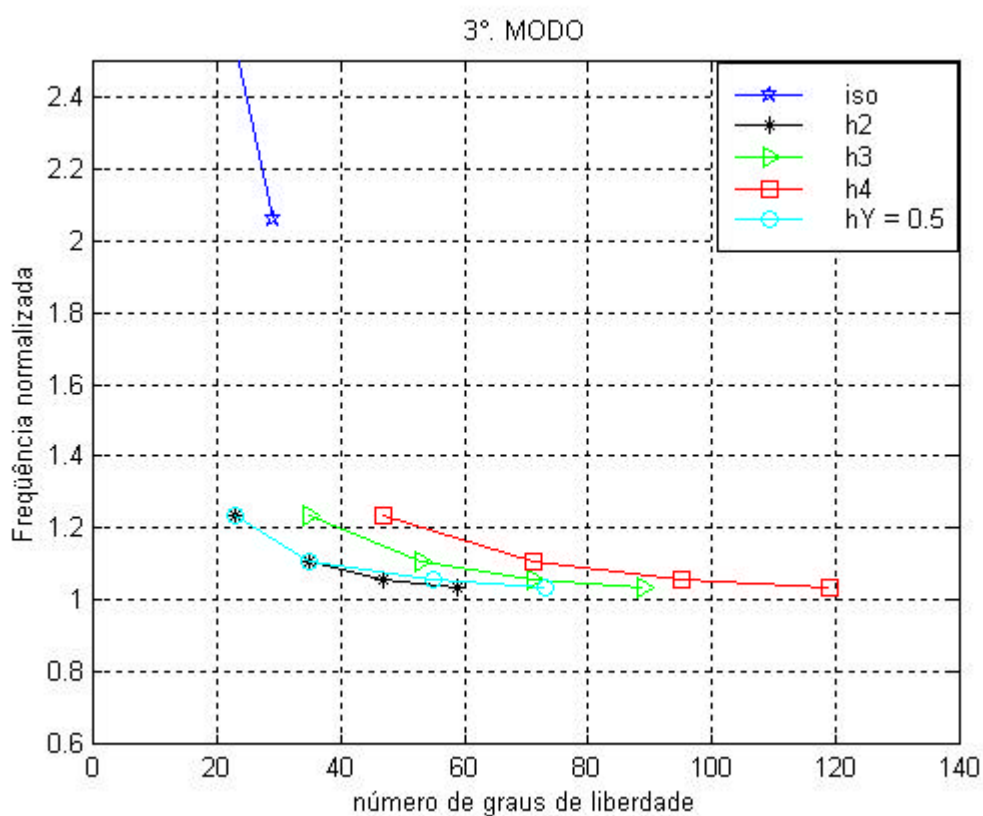
**Tabela 8.22** Segunda frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.01$



**Figura 8.62** Segunda frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.01$

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	5.9813	0	11	3.5191	0	17	2.5437	0	23	2.0595	0	29
$h_2$	1.2378	79.31	23	1.1066	68.55	35	1.0584	58.39	47	1.0369	49.65	59
$h_3$	1.2373	79.31	35	1.1065	68.56	53	1.0584	58.39	71	1.0369	49.65	89
$h_4$	1.2373	79.31	47	1.1065	68.56	71	1.0584	58.39	95	1.0369	49.65	119
$h_{g=0.5}$	1.2374	79.31	23	1.1065	68.56	35	1.0584	58.39	55	1.0369	49.65	73
$h_{g=0.6}$	1.2374	79.31	23	1.1065	68.56	35	1.0584	58.39	55	1.0369	49.65	67
$h_{g=0.7}$	1.2374	79.31	23	1.1065	68.56	35	1.0584	58.39	55	1.0369	49.65	67
$h_{g=0.8}$	1.2374	79.31	23	1.1065	68.56	35	1.0584	58.39	55	1.0369	49.65	67
$h_{g=0.9}$	1.2374	79.31	23	1.1065	68.56	35	1.0584	58.39	55	1.0369	49.65	65

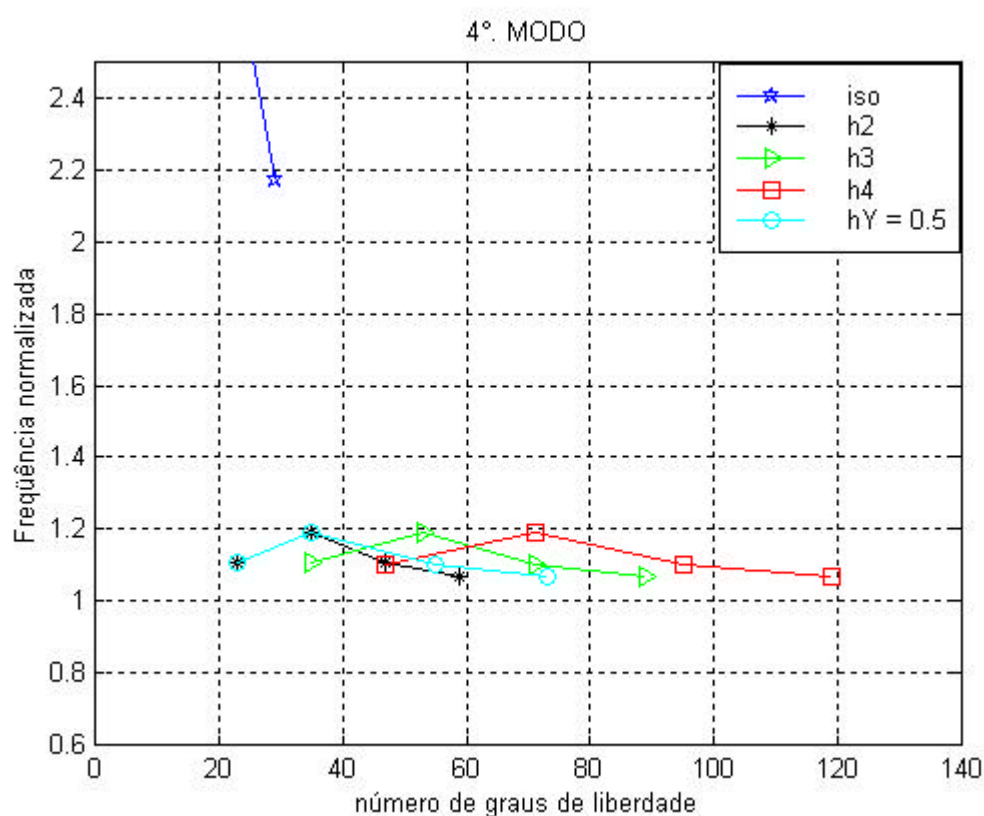
**Tabela 8.23** Terceira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.01$



**Figura 8.63** Terceira frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.01$

	4 elementos			6 elementos			8 elementos			10 elementos		
	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL	$f_n$	$e_{est}\%$	NGL
iso	38.080	0	11	3.9446	0	17	2.7537	0	23	2.1723	0	29
$h_2$	1.1045	97.10	23	1.1885	69.87	35	1.1043	59.90	47	1.0655	50.95	59
$h_3$	1.1044	97.10	35	1.1879	69.89	53	1.1041	59.90	71	1.0654	50.96	89
$h_4$	1.1041	97.10	47	1.1879	69.89	71	1.1041	59.90	95	1.0654	50.96	119
$h_{g=0.5}$	1.1045	97.10	23	1.1879	69.89	35	1.1041	59.90	55	1.0654	50.96	73
$h_{g=0.6}$	1.1045	97.10	23	1.1879	69.89	35	1.1041	59.90	55	1.0654	50.96	67
$h_{g=0.7}$	1.1045	97.10	23	1.1879	69.89	35	1.1041	59.90	55	1.0654	50.96	67
$h_{g=0.8}$	1.1045	97.10	23	1.1879	69.89	35	1.1041	59.90	55	1.0654	50.96	67
$h_{g=0.9}$	1.1045	97.10	23	1.1879	69.89	35	1.1041	59.90	55	1.0654	50.96	65

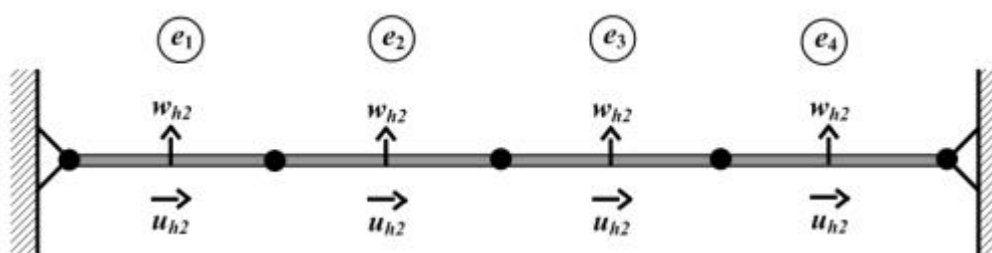
**Tabela 8.24** Quarta frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.01$



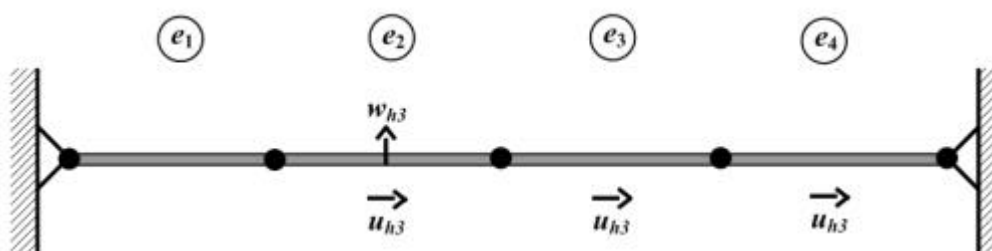
**Figura 8.64** Quarta frequência natural normalizada para a viga biapoiada com o estimador de erro e  $\beta = 0.01$

### 8.5.1 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.5$

As Figuras 8.65 a 8.68 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.5$

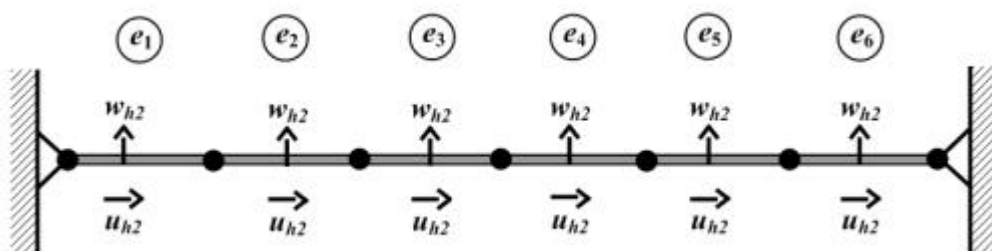


(a)

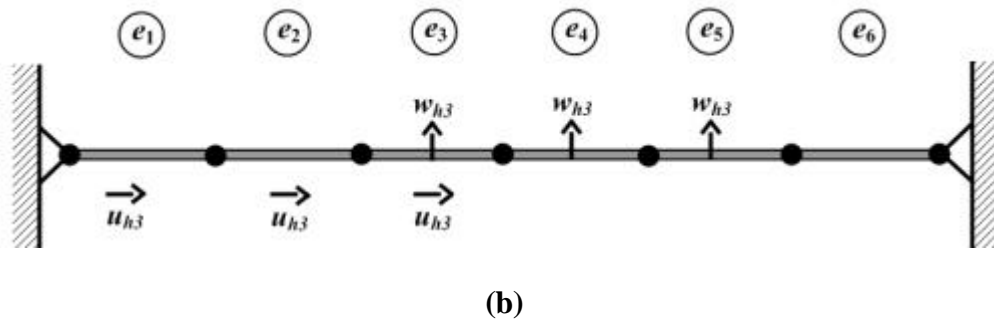


(b)

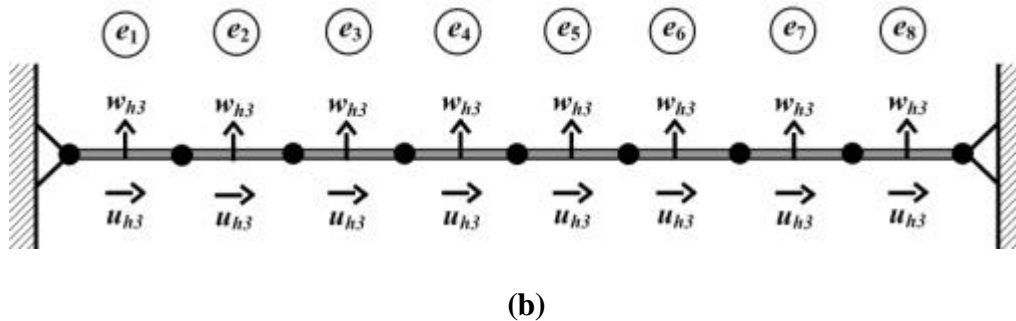
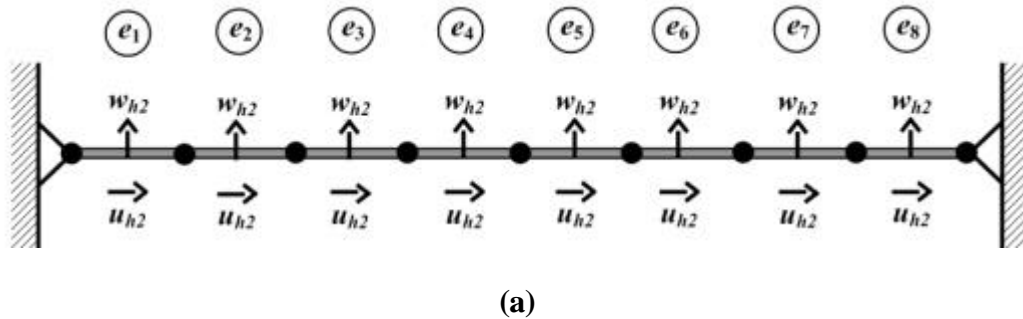
**Figura 8.65** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.5$



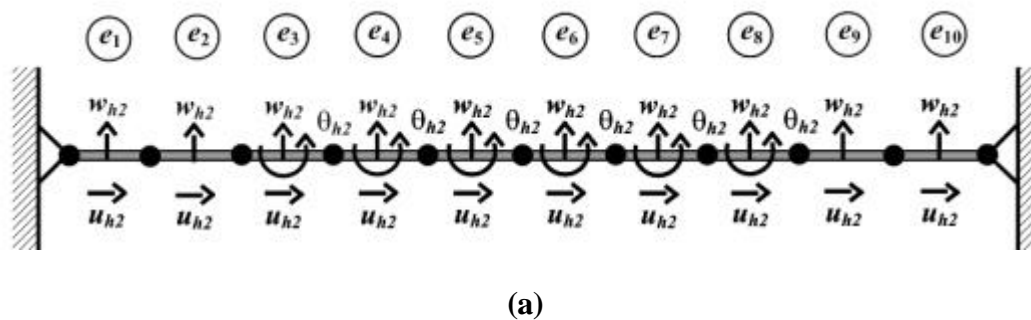
(a)

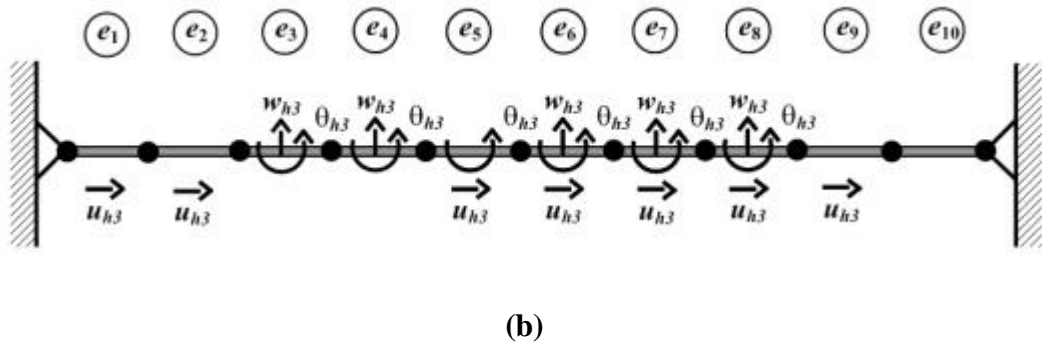


**Figura 8.66** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.5$



**Figura 8.67** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.5$

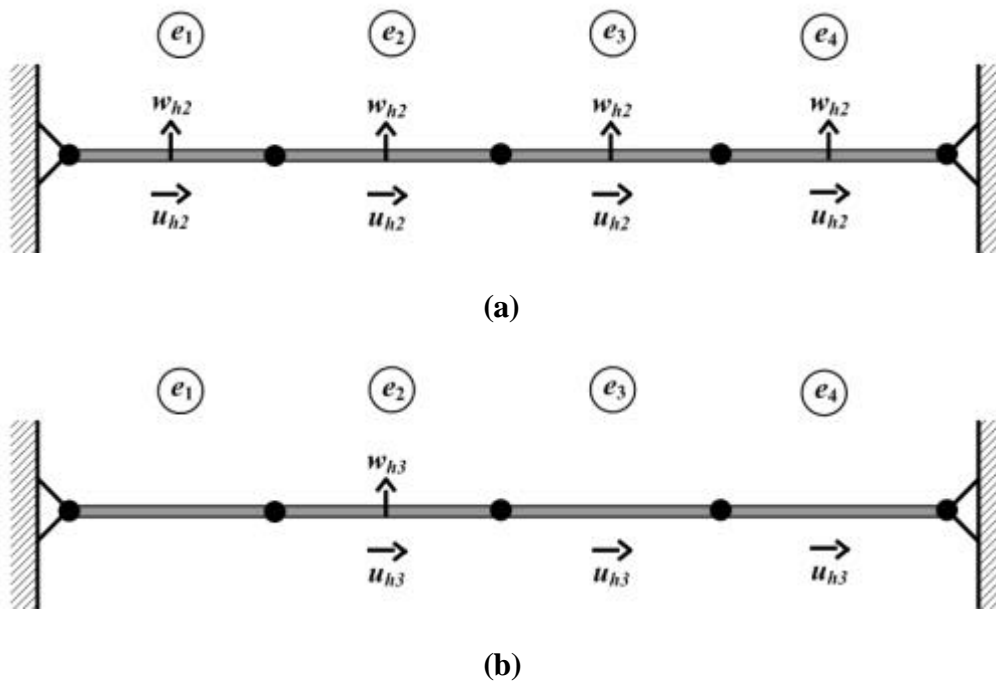




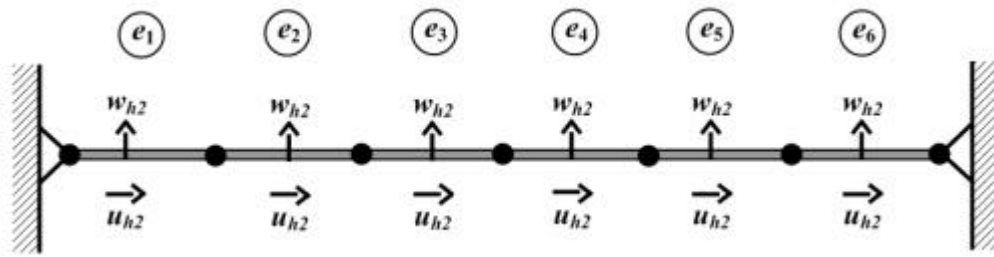
**Figura 8.68** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.5$

### 8.5.2 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $b = 0.01$ ) e $g = 0.6$

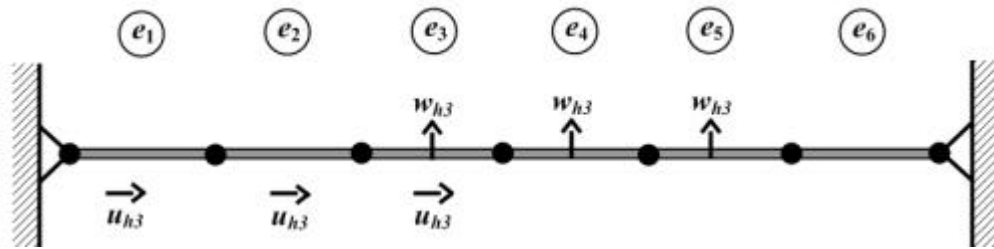
As Figuras 8.69 a 8.72 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.6$ .



**Figura 8.69** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.6$

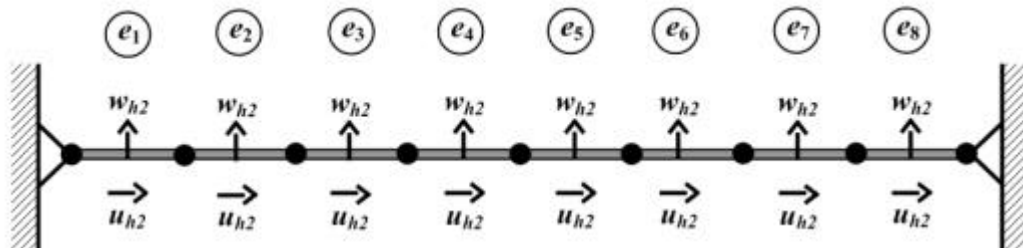


(a)

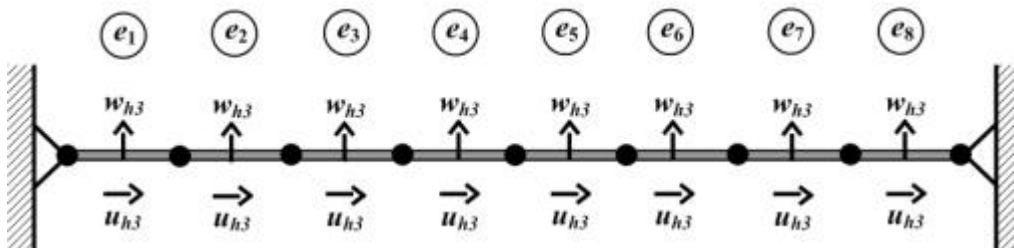


(b)

**Figura 8.70** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.6$

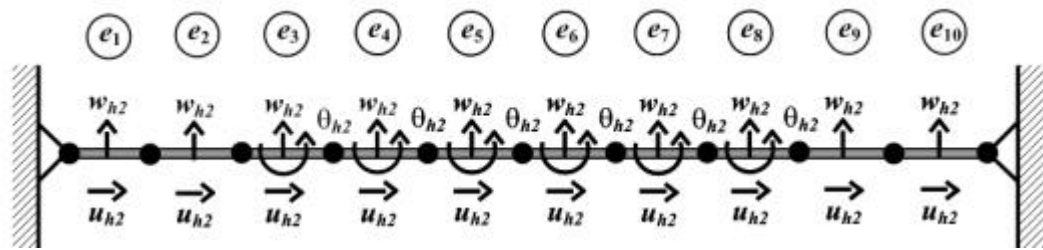


(a)

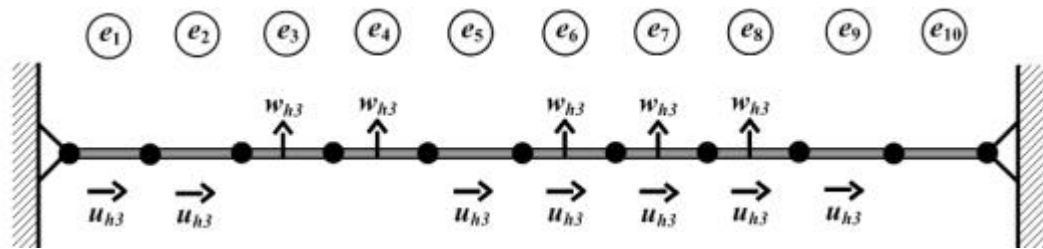


(b)

**Figura 8.71** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.6$



(a)

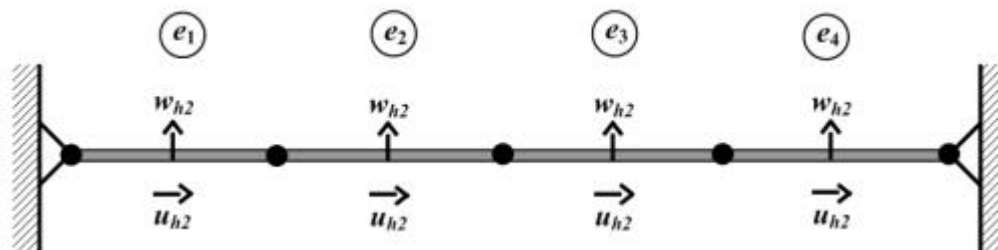


(b)

**Figura 8.72** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.6$

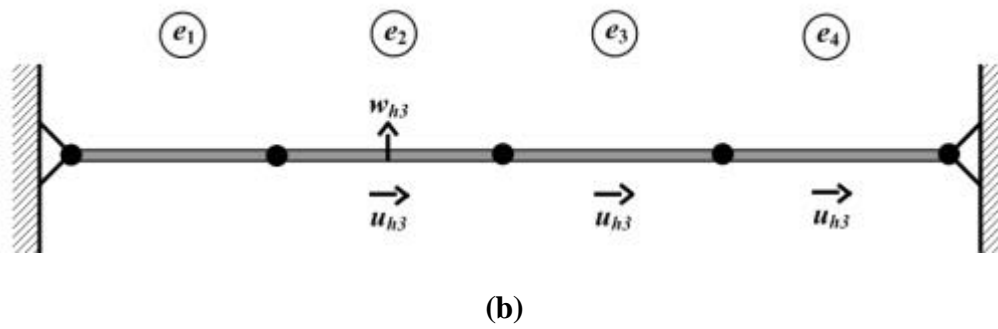
### 8.5.3 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $b = 0.01$ ) e $g = 0.7$

As Figuras 8.73 a 8.76 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.7$ .

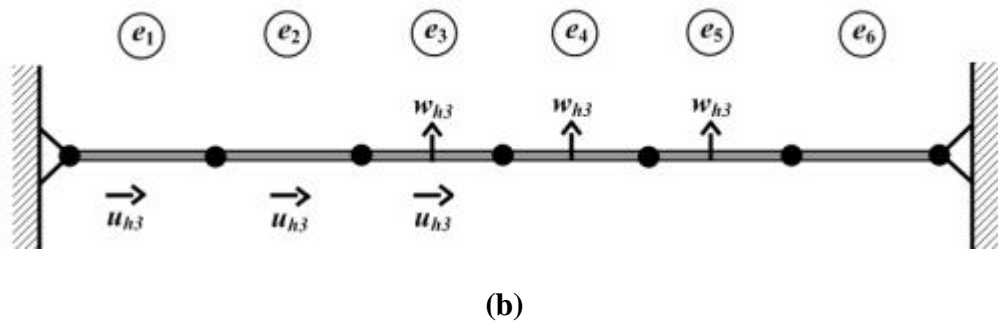
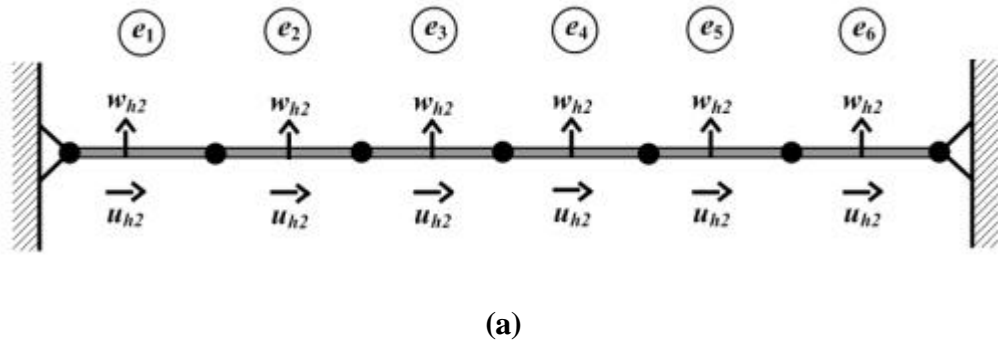


(a)

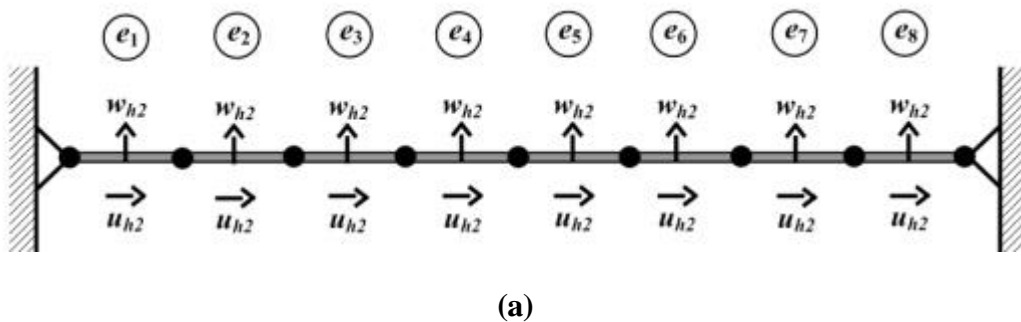


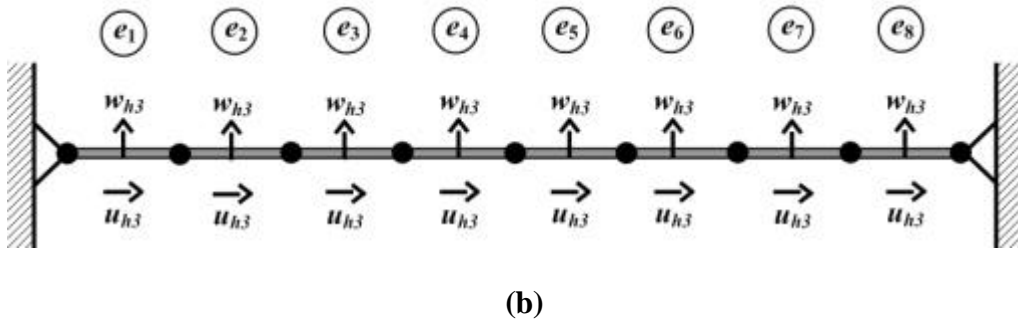


**Figura 8.73** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.7$

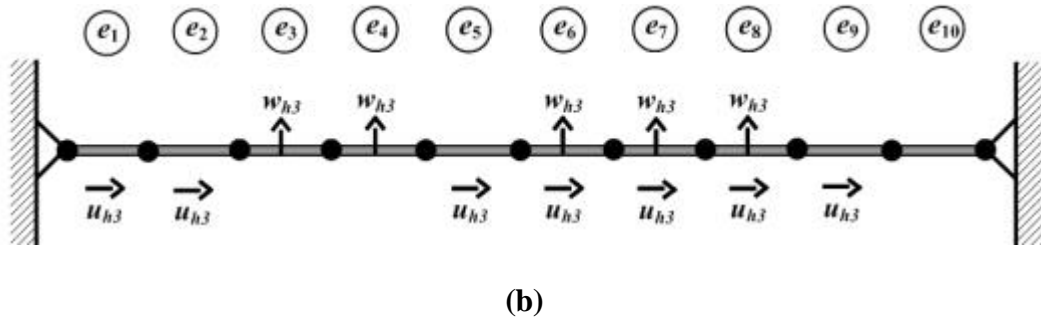
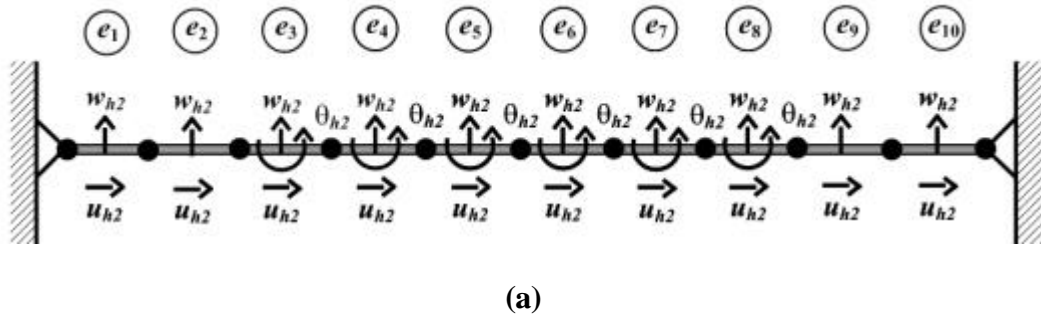


**Figura 8.74** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.7$





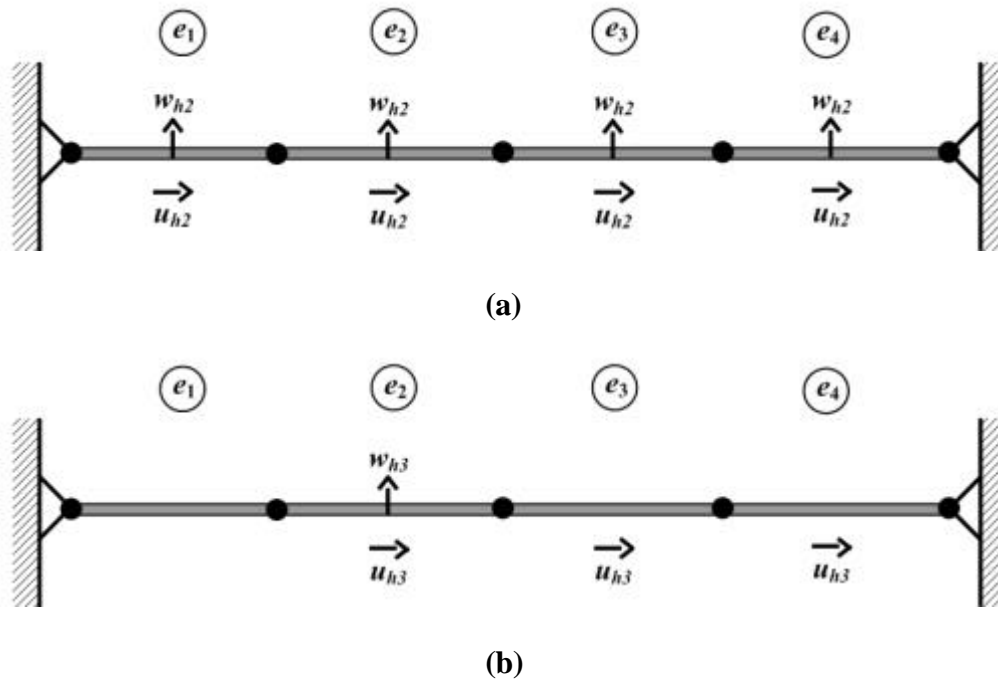
**Figura 8.75** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.7$



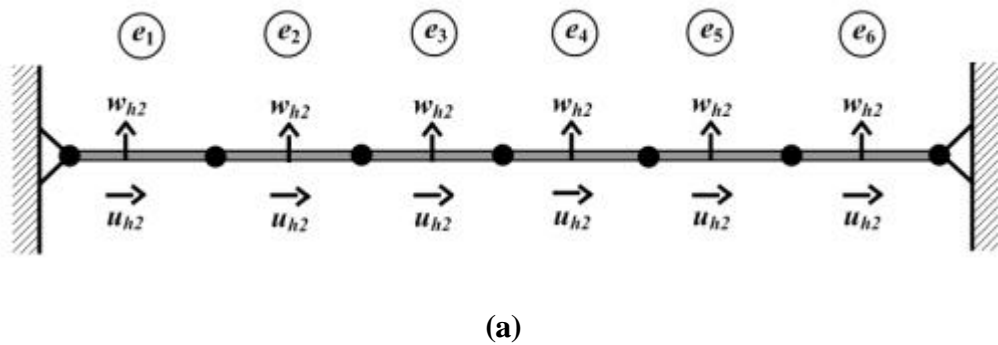
**Figura 8.76** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.7$

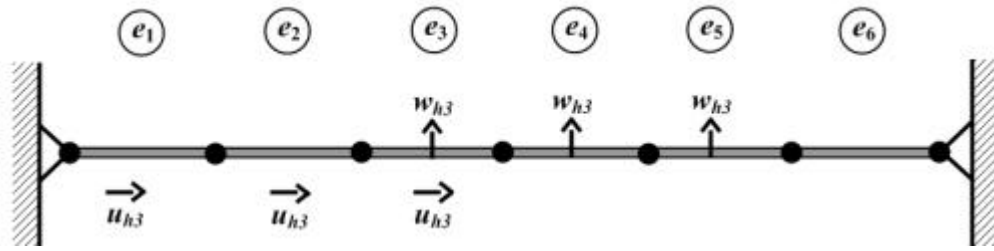
#### 8.5.4 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.8$

As Figuras 8.77 a 8.80 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $\gamma = 0.8$



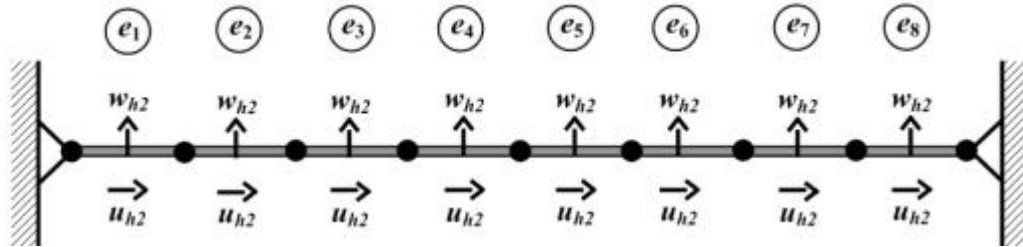
**Figura 8.77** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.8$



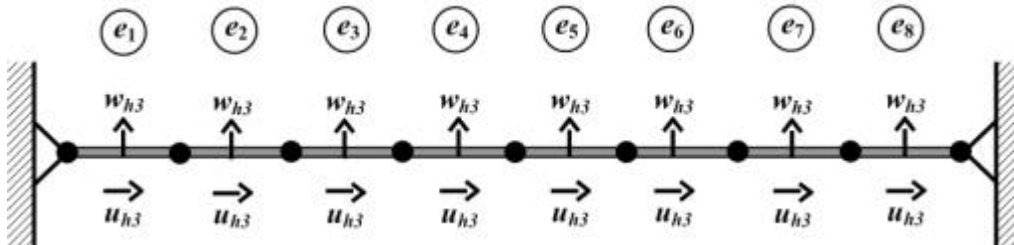


(b)

**Figura 8.78** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.8$

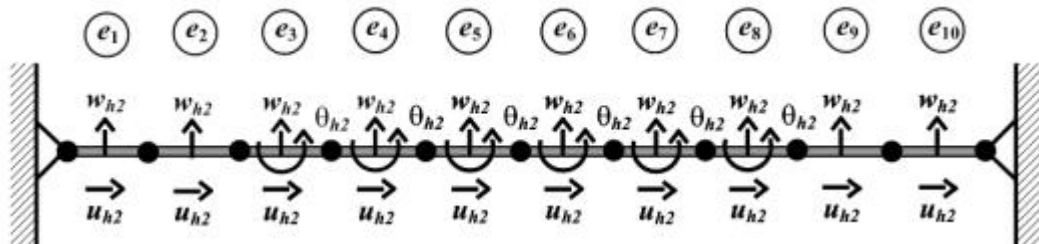


(a)

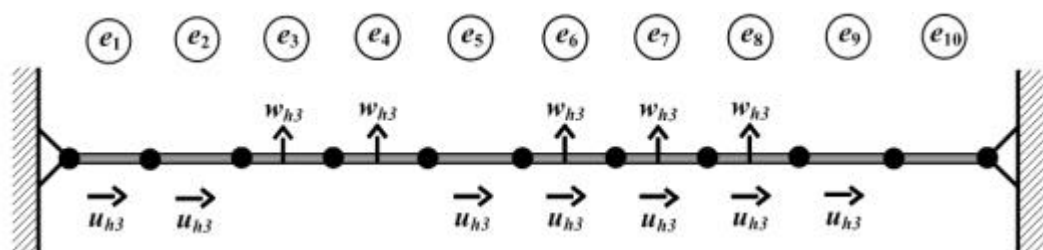


(b)

**Figura 8.79** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.8$



(a)

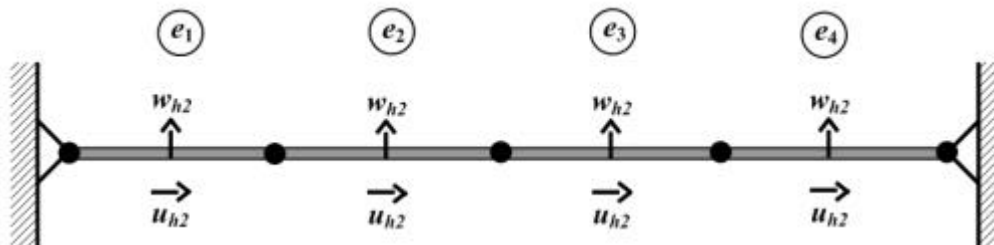


(b)

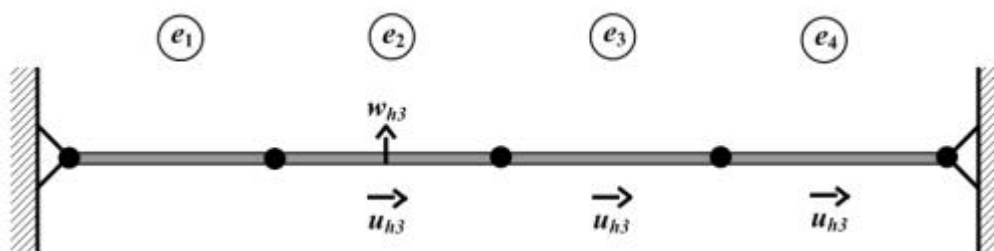
**Figura 8.80** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro freqüências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.8$

### 8.5.5 Viga de seção retangular biapoada com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e $\gamma = 0.9$

As Figuras 8.81 a 8.84 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $\gamma = 0.9$ .

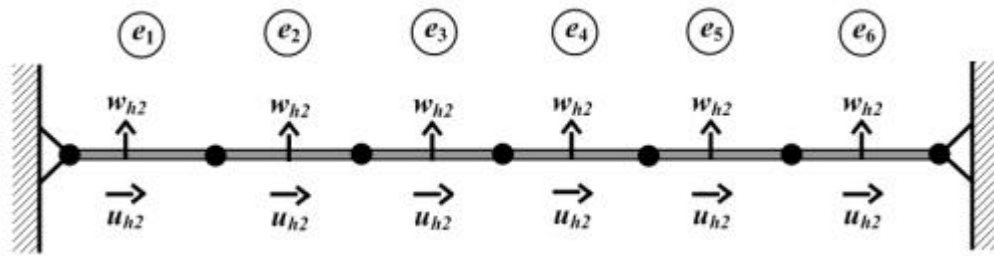


(a)

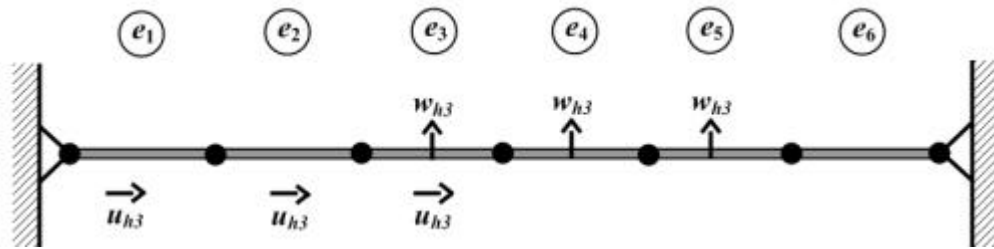


(b)

**Figura 8.81** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro freqüências da viga com 4 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.9$

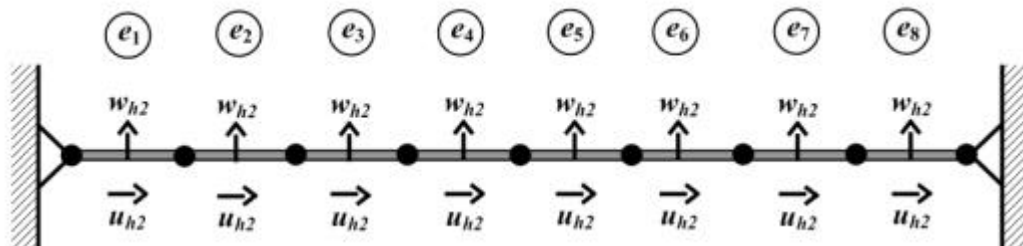


(a)

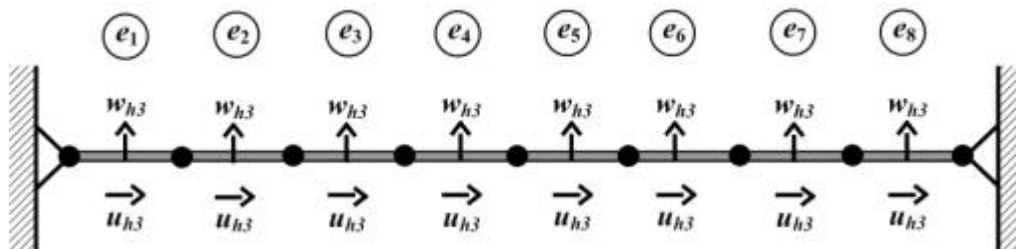


(b)

**Figura 8.82** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.9$

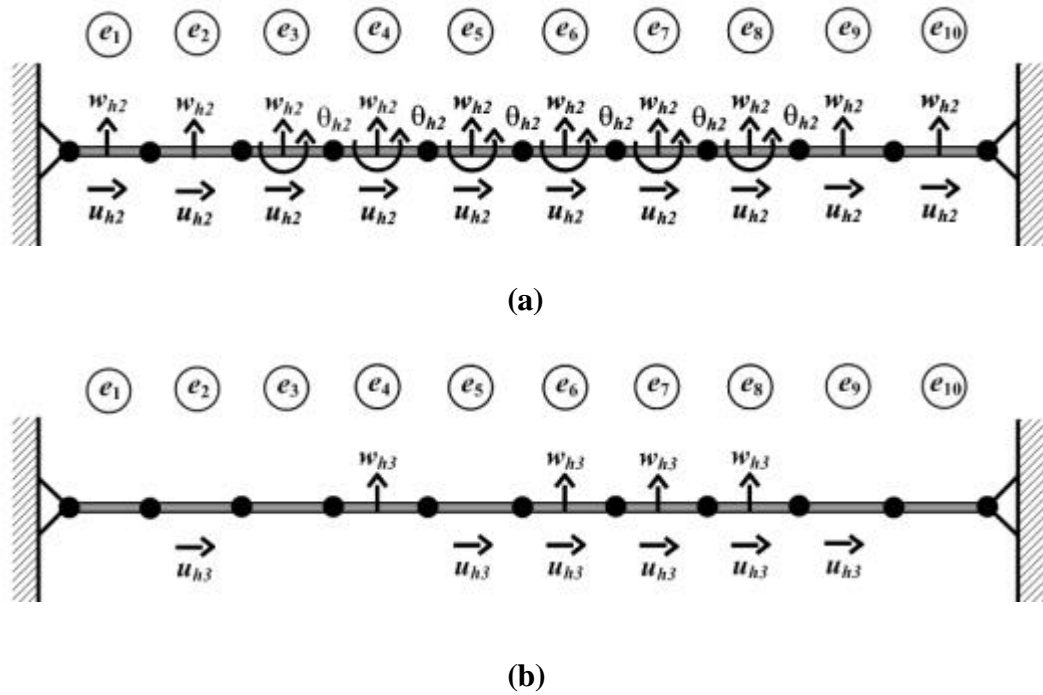


(a)



(b)

**Figura 8.83** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 8 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.9$



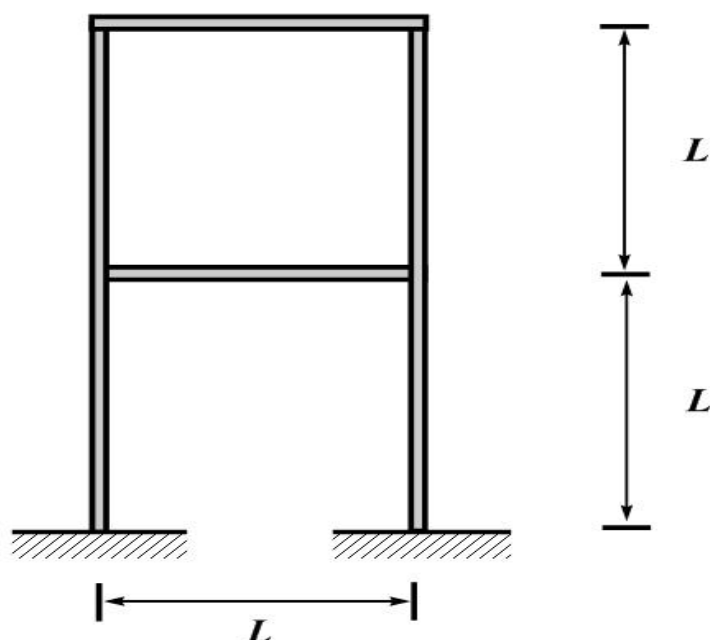
**Figura 8.84** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências da viga com 10 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.9$

## 8.6 Pórtico plano com estimador de erro ( $b = 0.01$ )

Apresentam-se, a seguir, as quatro primeiras frequências obtidas a partir do elemento finito hierárquico proposto na análise dinâmica de um pórtico plano composto por seis vigas de comprimento e propriedades idênticas, como mostra a Figura 8.25, na qual o valor de  $b = 0.01$  será mantido fixo, foram feitas comparações dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica (iso) e hierárquica de 2º grau ( $m = 2$ ), 3º grau ( $m = 3$ ), 4º grau ( $m = 4$ ) com o estimador de erro com  $g = 0.8$ .

Propriedades das vigas	Nomenclatura	Valores
<i>Comprimento</i>	$L$	$1\text{ m}$
<i>Largura</i>	$B$	$0.1\text{ m}$
<i>Modulo de elasticidade</i>	$E$	$210000000000.00\text{ N/m}^2$
<i>Poisson</i>	$\nu$	$0.3$
<i>Densidade em massa</i>	$\rho$	$7850\text{ Kg/m}^3$
<i>Momento de inércia</i>	$I$	$BH^3/12$
<i>Módulo de elasticidade transversal</i>	$G$	$E/2(1+\nu)$
<i>Coefficiente de distorção</i>	$\alpha$	$5/6$

**Tabela 8.25** Propriedades do pórtico plano.



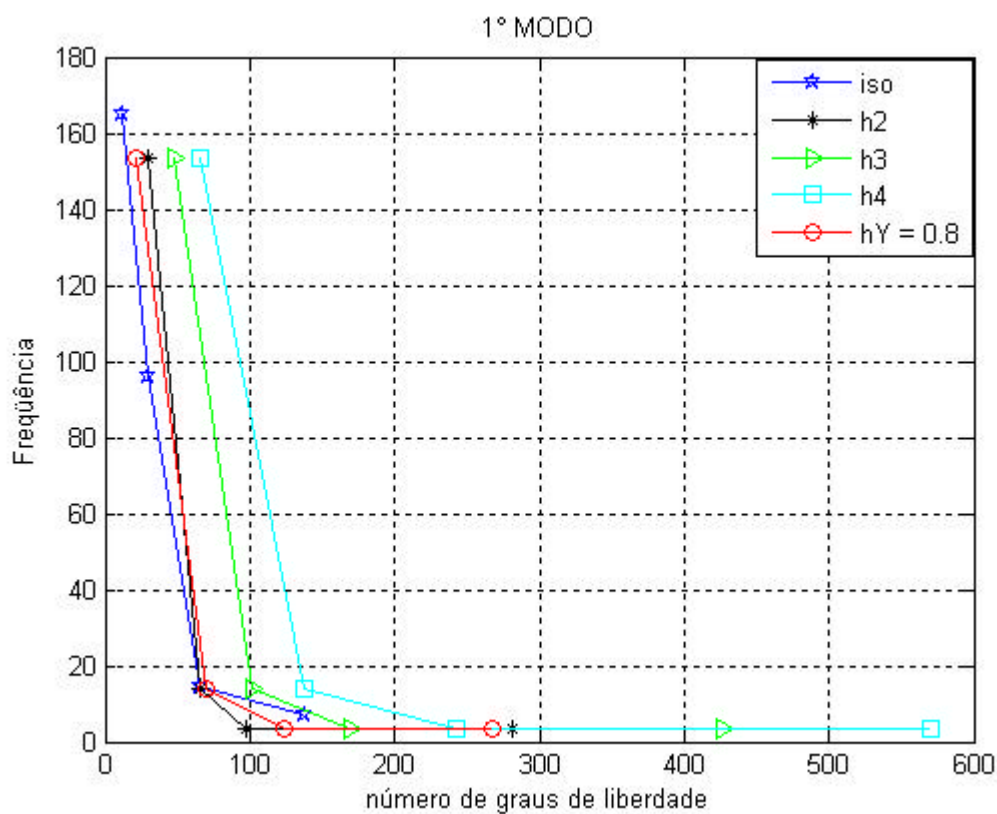
**Figura 8.85** Pórtico plano composto por seis vigas iguais.

As Tabelas 8.26 a 8.29 e as Figuras 8.26 a 8.29 apresenta a constante  $g = 0.8$ , que tem por finalidade controlar o número de graus de liberdade hierárquicos introduzidos a cada solução, tem-se também os números de elementos envolvidos na análise do elemento finito proposto, e os graus de liberdades livres ( $NGL$ ) e as frequências naturais obtidas nas análises isoparamétrica e hierárquica de 2º, 3º e 4º graus com a utilização do estimador de erro  $\alpha$ -posteriori e sem a utilização do mesmo.



	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$
$iso$	164.98	0	12	95.89	0	30	14.67	0	66	7.18	0	138
$h_2$	153.41	7.01	30	14.05	85.35	66	3.50	76.14	98	3.16	55.99	282
$h_3$	153.41	7.01	48	14.05	85.35	102	3.50	76.14	170	3.16	55.99	426
$h_4$	153.41	7.01	66	14.05	85.35	138	3.50	76.14	242	3.16	55.99	570
$h_g = 0.8$	153.41	7.01	22	14.05	85.35	70	3.50	76.14	124	3.16	55.99	268

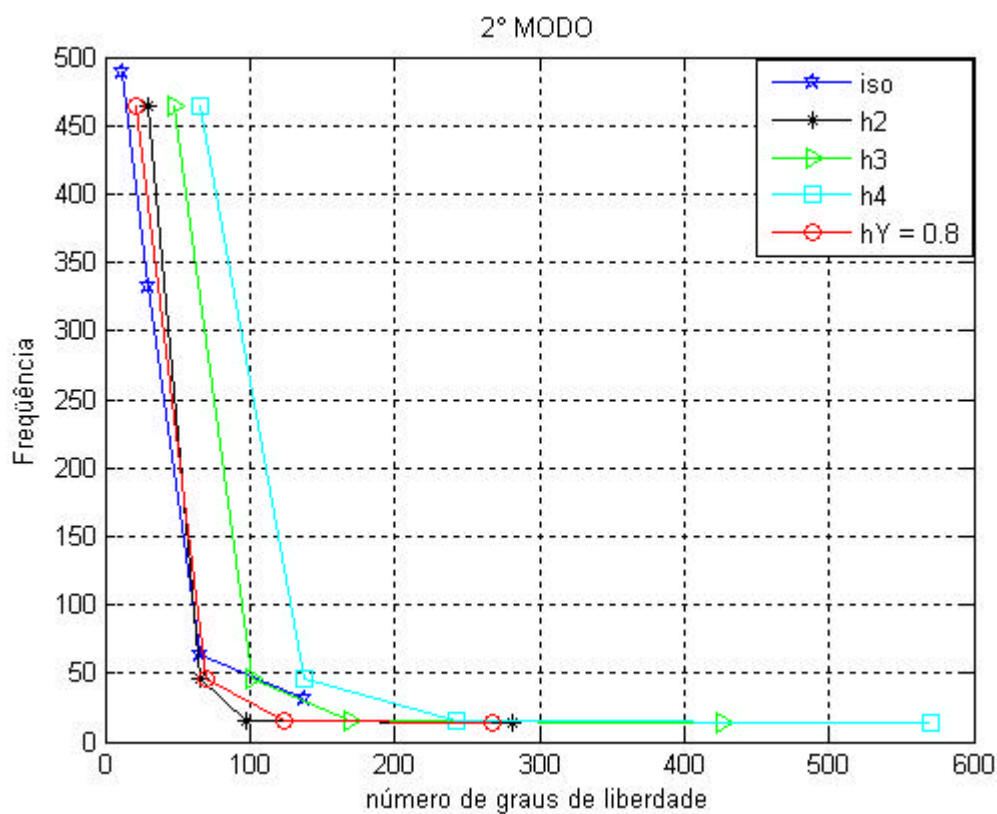
**Tabela 8.26** Primeira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro  $e$  e  $\beta = 0.01$



**Figura 8.86** Primeira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro  $e$  e  $\beta = 0.01$

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$F$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$
$iso$	489.04	0	12	332.37	0	30	64.02	0	66	30.81	0	138
$h_2$	464.55	5.01	30	46.12	86.12	66	15.84	75.26	98	13.66	55.66	282
$h_3$	464.52	5.01	48	46.12	86.12	102	15.84	75.26	170	13.66	55.66	426
$h_4$	464.50	5.02	66	46.12	86.12	138	15.84	75.26	242	13.66	55.66	570
$h_g = 0.8$	464.57	5.00	22	46.12	86.12	70	15.84	75.26	124	13.66	55.66	268

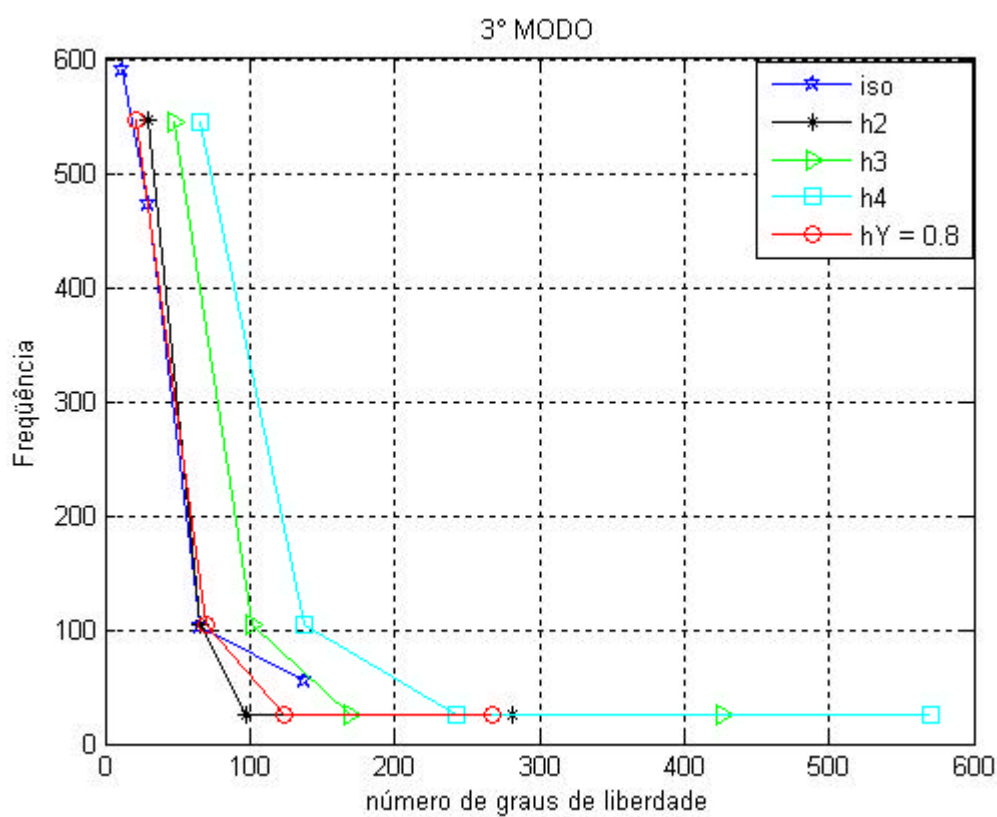
**Tabela 8.27** Segunda frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.01$



**Figura 8.87** Segunda frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.01$

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$F$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$
$iso$	591.18	0	12	472.02	0	30	102.57	0	66	55.49	0	138
$h_2$	546.04	7.64	30	103.56	78.06	66	25.18	75.45	98	24.58	55.70	282
$h_3$	544.61	7.88	48	103.56	78.06	102	25.18	75.45	170	24.58	55.70	426
$h_4$	544.59	7.88	66	103.56	78.06	138	25.18	75.45	242	24.58	55.70	570
$h_g = 0.8$	546.10	7.63	22	103.56	78.06	70	25.18	75.45	124	24.86	55.20	268

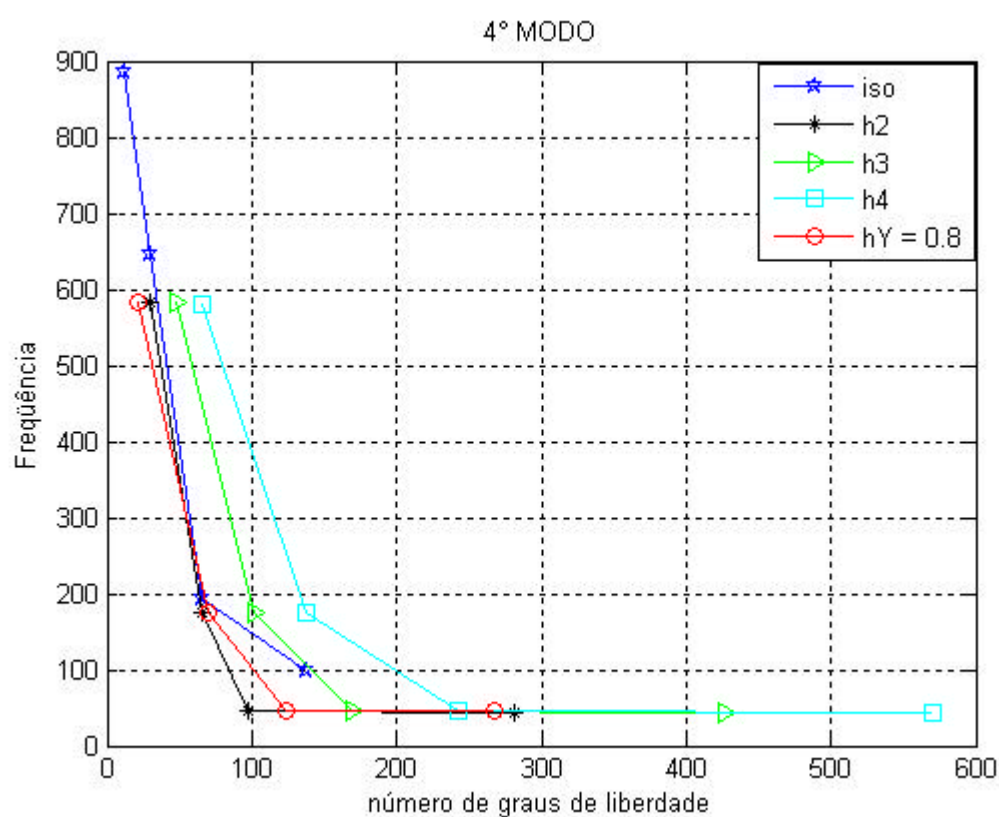
**Tabela 8.28** Terceira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.01$



**Figura 8.88** Terceira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.01$

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$F$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$
$iso$	885.78	0	12	645.03	0	30	194.19	0	66	99.09	0	138
$h_2$	581.82	34.32	30	175.75	72.75	66	47.19	75.70	98	43.76	55.84	282
$h_3$	581.69	34.33	48	175.75	72.75	102	47.19	75.70	170	43.76	55.84	426
$h_4$	581.31	34.37	66	175.75	72.75	138	47.19	75.70	242	43.76	55.84	570
$h_{g=0.8}$	581.83	34.31	22	175.75	72.75	70	47.19	75.70	124	44.75	54.84	268

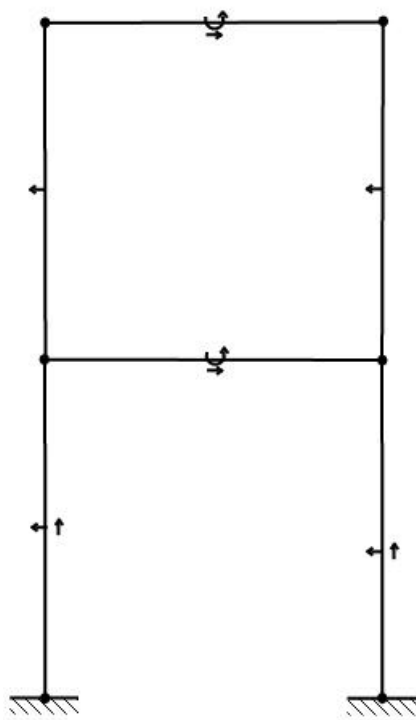
**Tabela 8.29** Quarta frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.01$



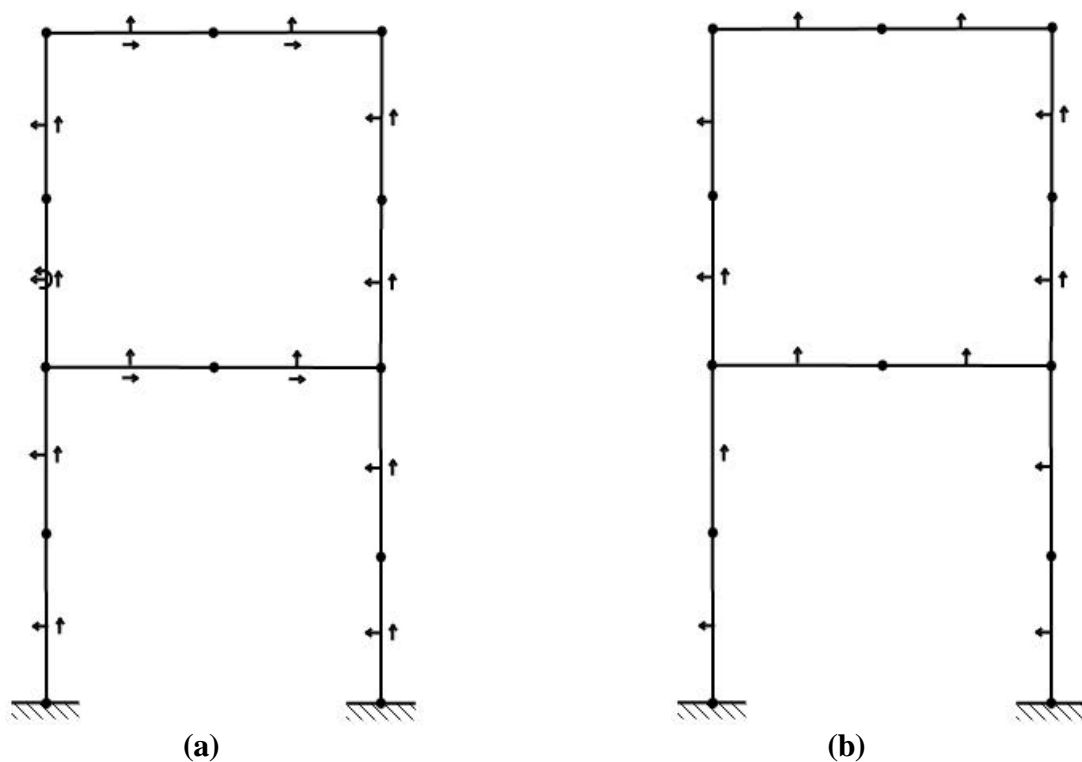
**Figura 8.89** Quarta frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.01$

### 8.6.1 Pórtico plano com estimador de erro ( $b = 0.01$ ) e $g = 0.8$

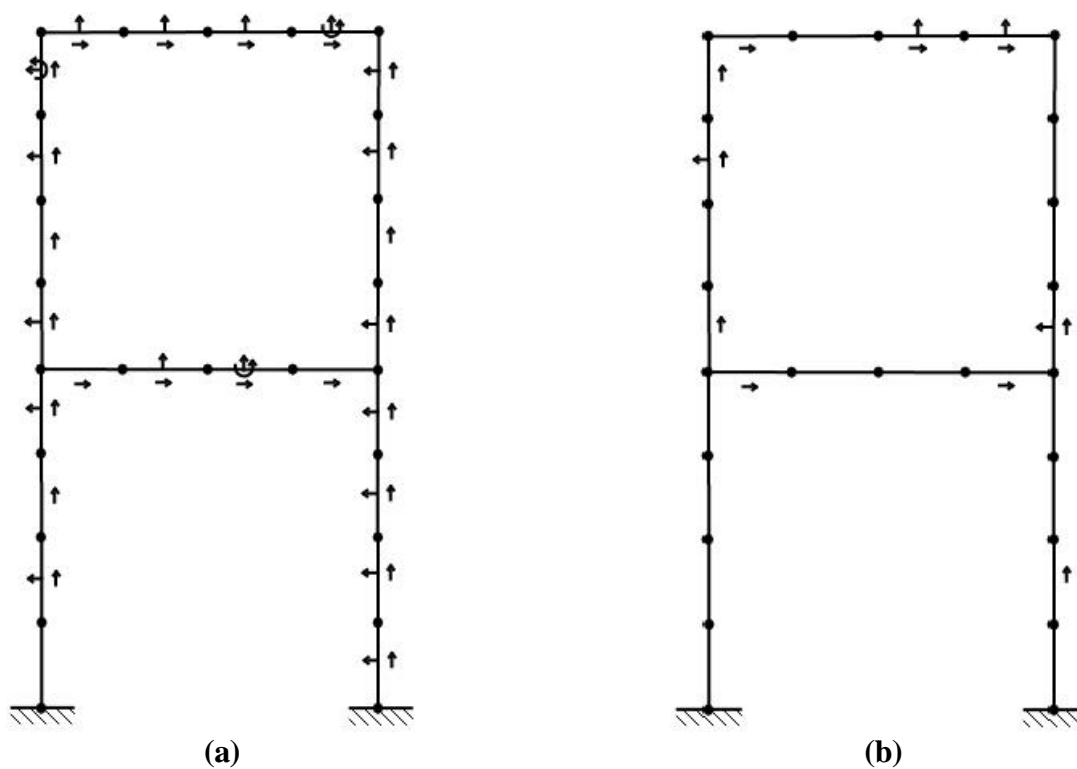
As Figuras 8.90 a 8.93 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.8$ .



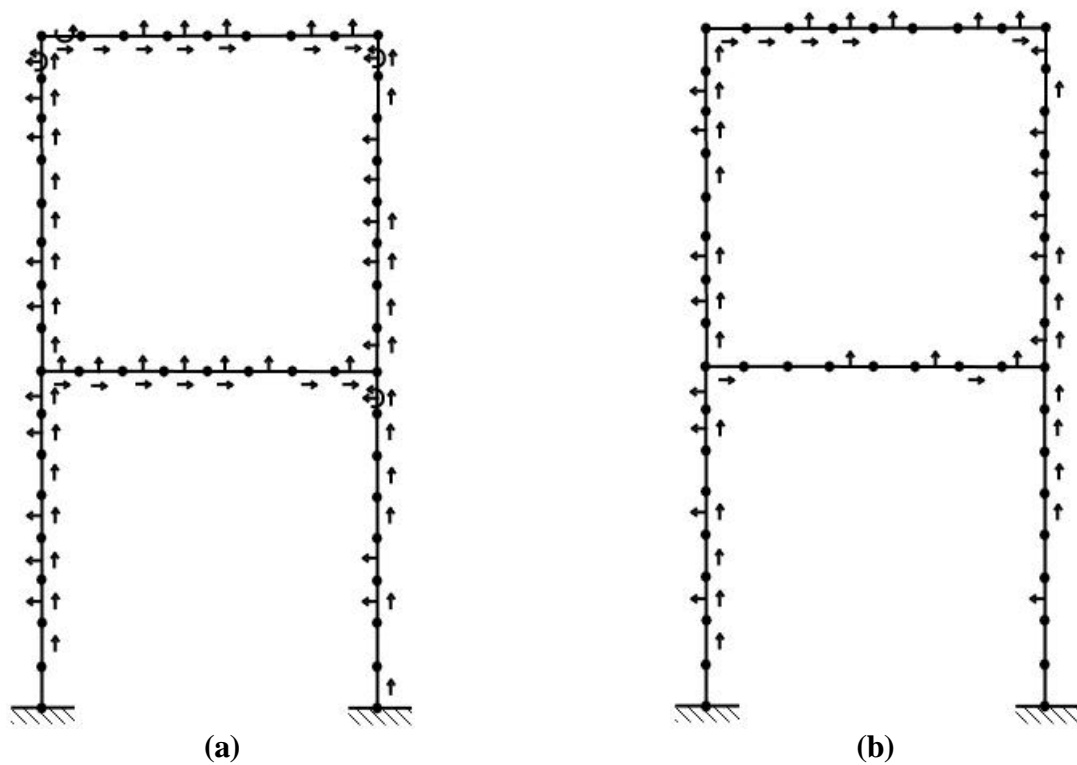
**Figura 8.90** Primeira reanálise para as quatro frequências do pórtico com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.8$



**Figura 8.91** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 12 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.8$



**Figura 8.92** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 24 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.8$



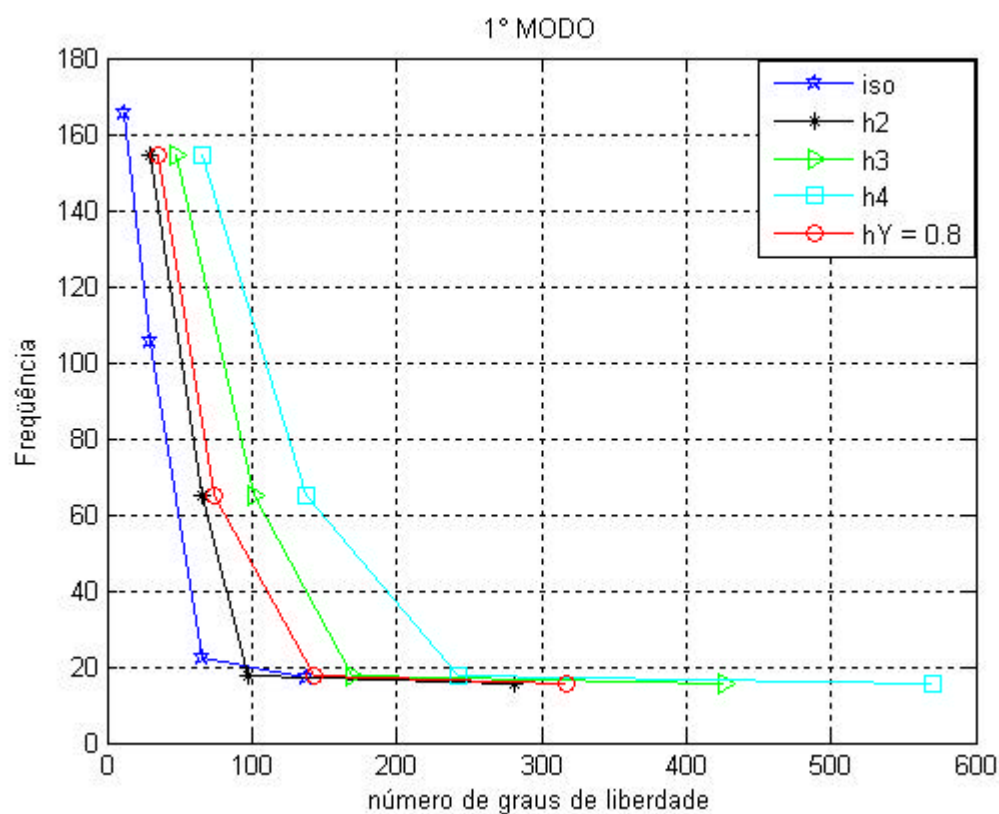
**Figura 8.93** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 48 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.01$ ) e  $\gamma = 0.8$

### 8.7 Pórtico plano com estimador de erro ( $b = 0.05$ )

Utilizando os mesmos dados da seção 8.6 será apresentado as quatro primeiras frequências com o estimador de erro ( $b = 0.05$ ) e  $g = 0.8$ .

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$
$iso$	165.78	0	12	105.78	0	30	22.43	0	66	16.98	0	138
$h_2$	154.58	6.76	30	64.94	38.61	66	17.41	22.38	98	15.73	7.36	282
$h_3$	154.58	6.76	48	64.94	38.61	102	17.41	22.38	170	15.73	7.36	426
$h_4$	154.58	6.76	66	64.94	38.61	138	17.41	22.38	242	15.73	7.36	570
$h_{g=0.8}$	154.58	6.76	35	64.94	38.61	74	17.41	22.38	143	15.73	7.36	317

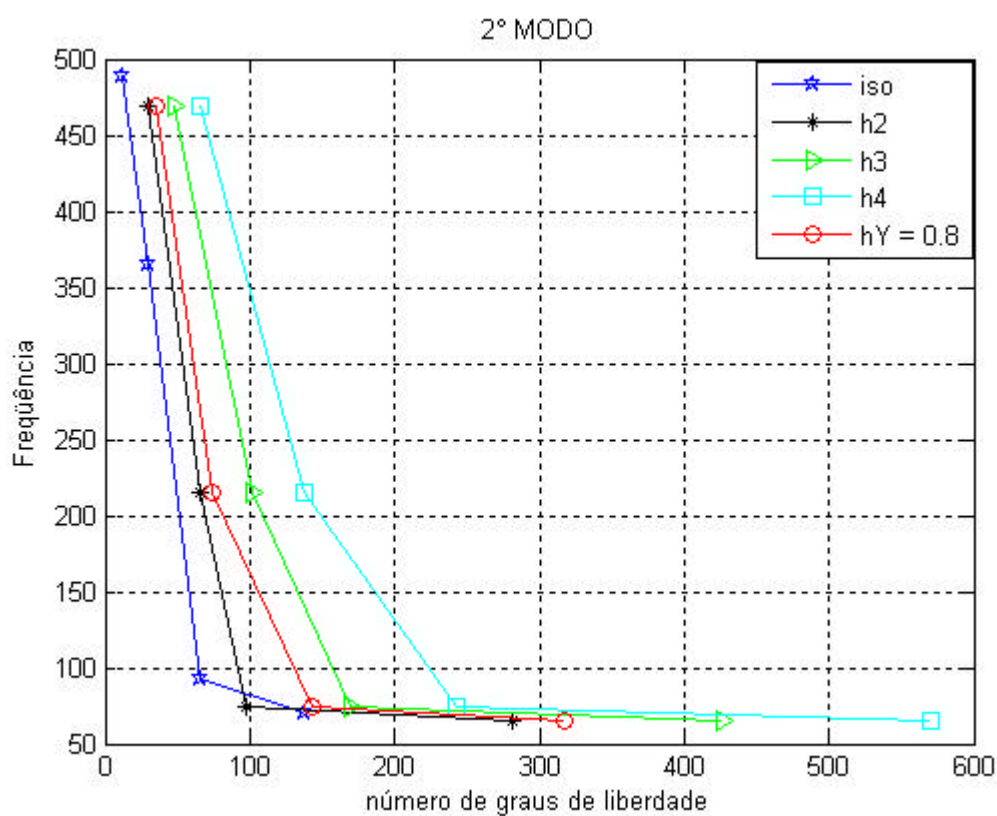
**Tabela 8.30** Primeira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.05$



**Figura 8.94** Primeira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.05$

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$
$iso$	489.04	0	12	365.40	0	30	93.20	0	66	69.80	0	138
$h_2$	469.68	3.96	30	214.94	41.18	66	74.82	19.72	98	65.12	6.70	282
$h_3$	469.64	3.97	48	214.94	41.18	102	74.82	19.72	170	65.12	6.70	426
$h_4$	469.63	3.97	66	214.94	41.18	138	74.82	19.72	242	65.12	6.70	570
$h_g = 0.8$	469.65	3.96	35	214.94	41.18	74	74.82	19.72	143	65.12	6.70	317

**Tabela 8.31** Segunda frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.05$

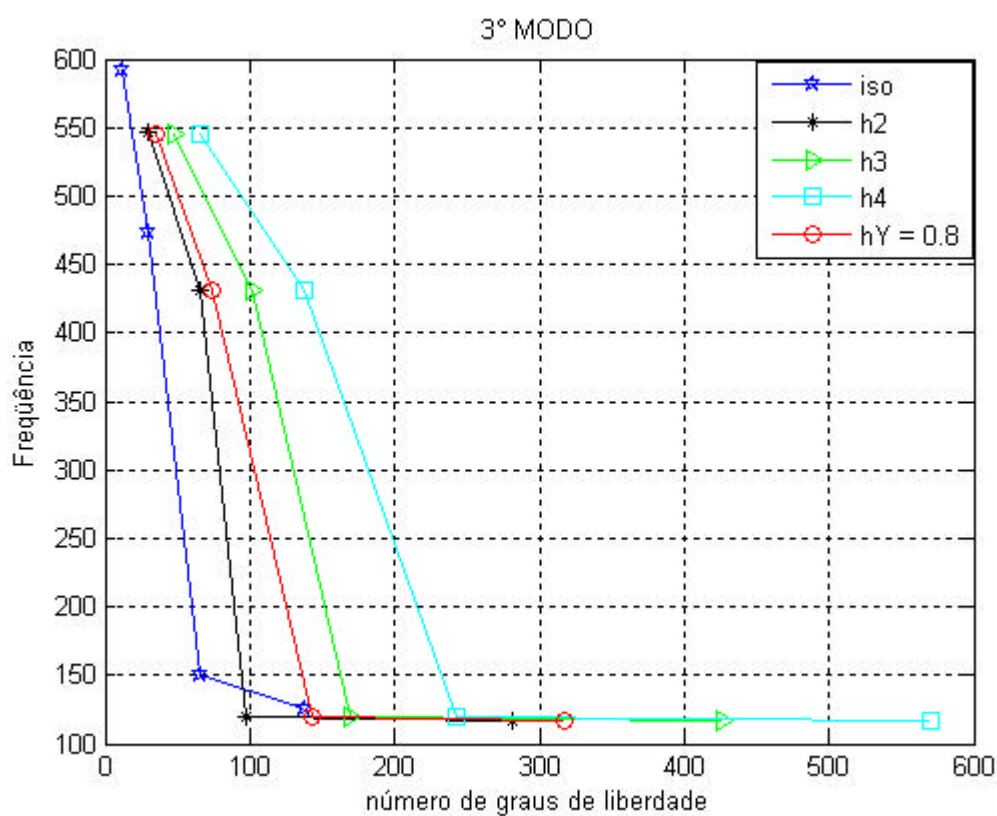


**Figura 8.95** Segunda frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.05$



	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$
$iso$	591.62	0	12	473.50	0	30	150.10	0	66	125.63	0	138
$h_2$	547.00	7.54	30	431.75	8.82	66	119.64	20.29	98	117.12	6.77	282
$h_3$	545.58	7.78	48	431.71	8.83	102	119.64	20.29	170	117.12	6.77	426
$h_4$	545.56	7.79	66	431.70	8.83	138	119.64	20.29	242	117.12	6.77	570
$h_g=0.8$	545.72	7.76	35	431.71	8.83	74	119.64	20.29	143	117.12	6.77	317

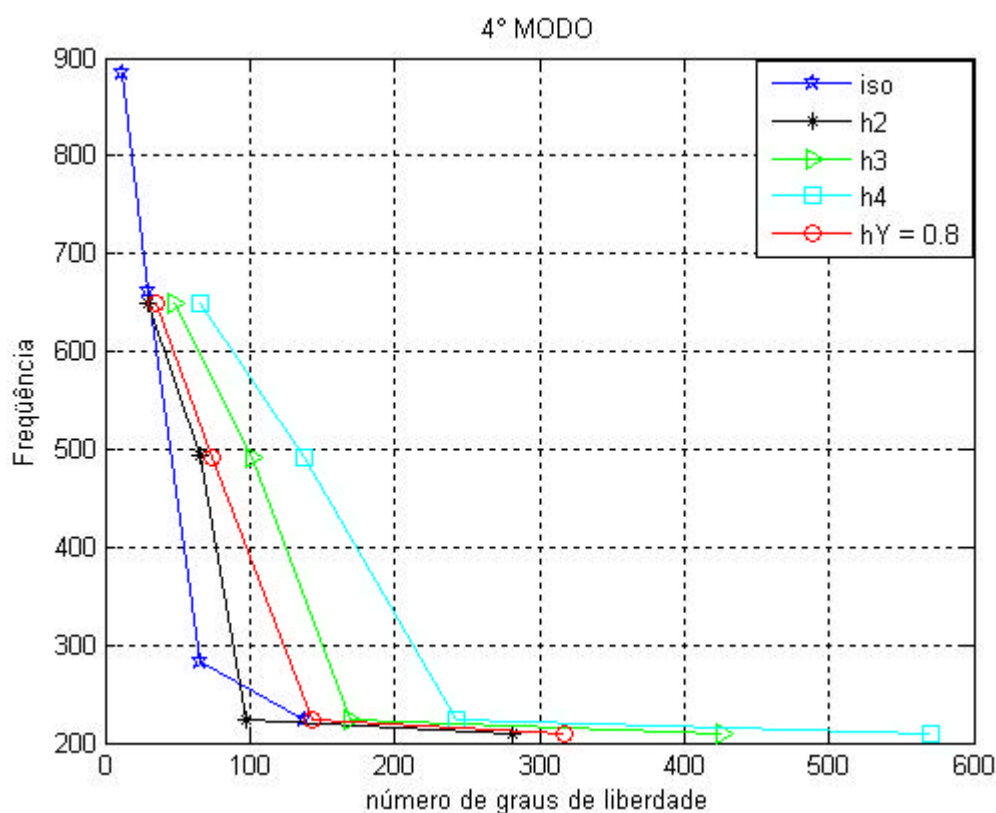
**Tabela 8.32** Terceira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.05$



**Figura 8.96** Terceira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.05$

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$F$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$
$iso$	885.64	0	12	660.88	0	30	282.58	0	66	224.07	0	138
$h_2$	649.41	26.67	30	492.79	25.43	66	223.09	21.05	98	208.27	7.05	282
$h_3$	649.19	26.70	48	492.68	25.45	102	223.09	21.05	170	208.27	7.05	426
$h_4$	648.67	26.76	66	492.67	25.45	138	223.09	21.05	242	208.27	7.05	570
$h_{g=0.8}$	649.31	26.68	35	492.69	25.45	74	223.09	21.05	143	208.27	7.05	317

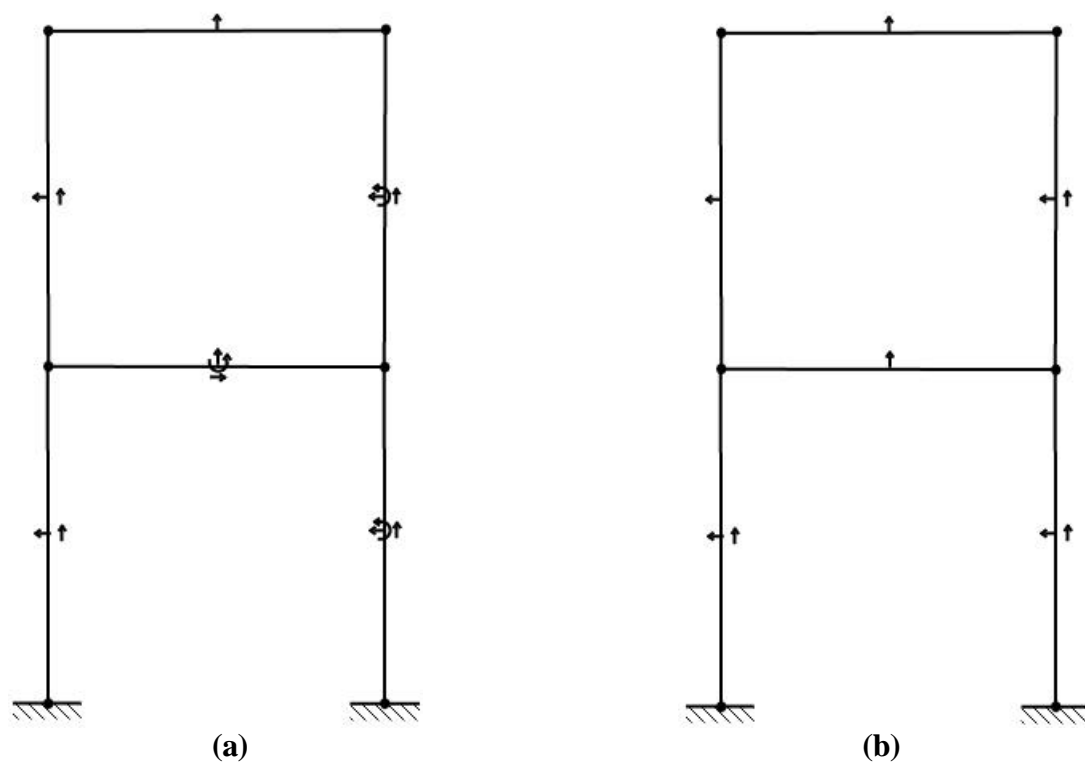
**Tabela 8.33** Quarta frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.05$



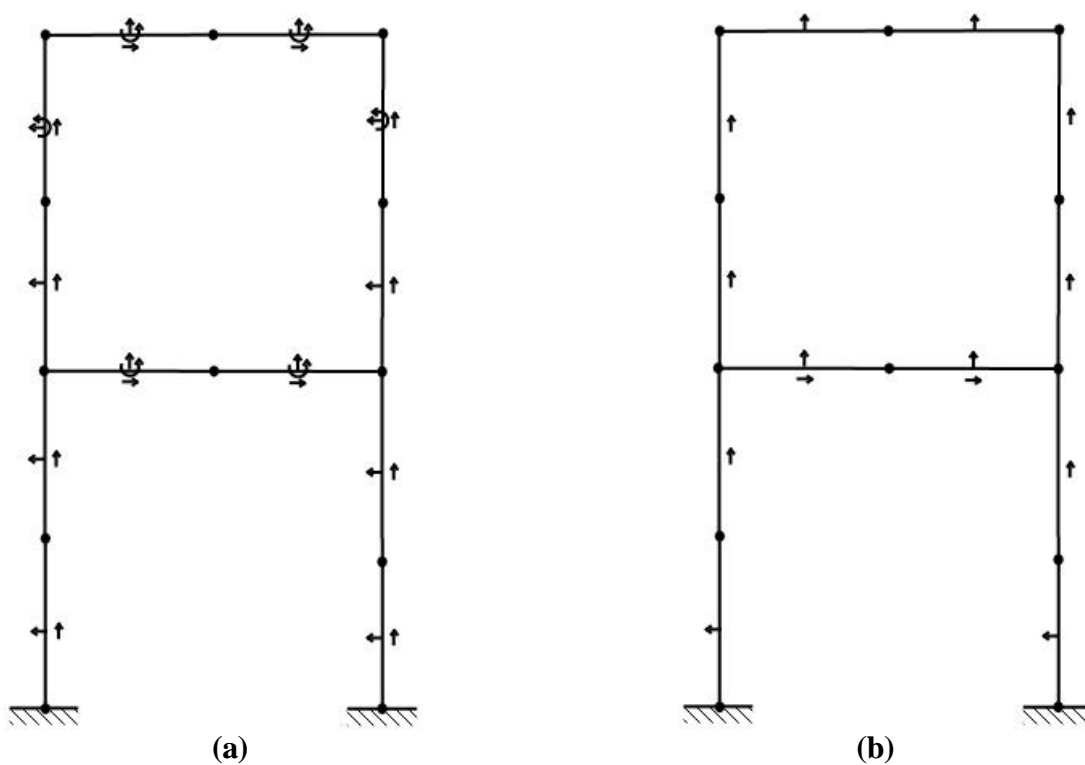
**Figura 8.97** Quarta frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.05$

### 8.7.1 Pórtico plano com estimador de erro ( $b = 0.05$ ) e $g = 0.8$

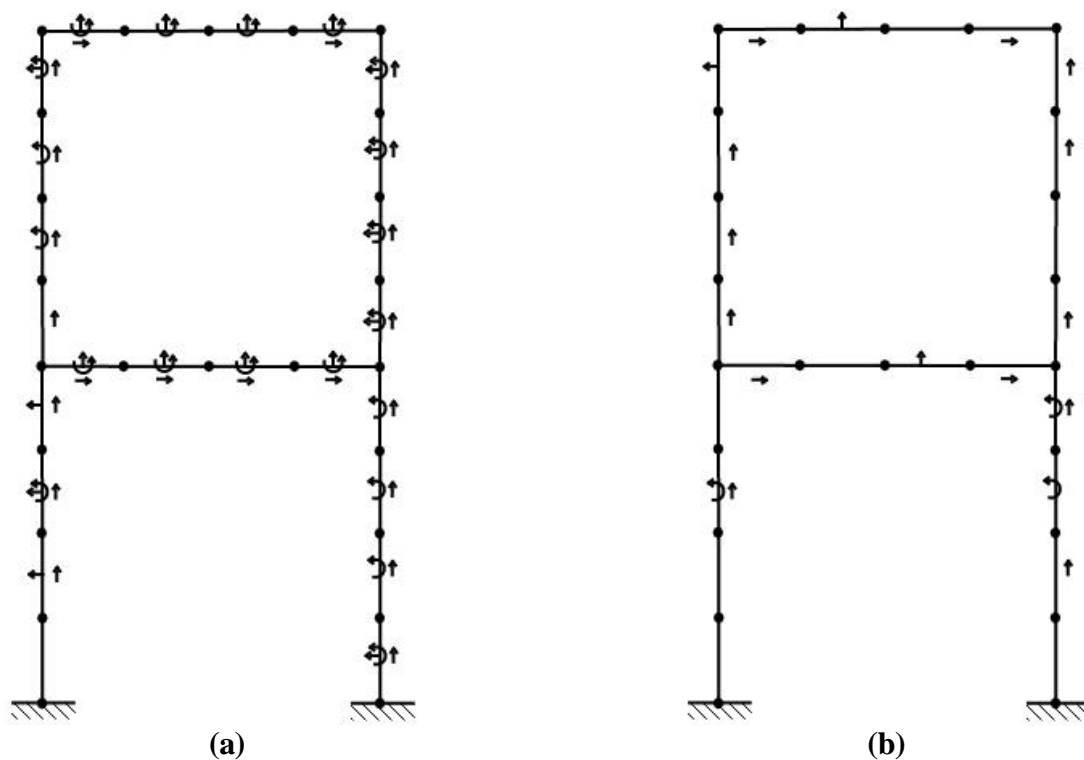
As Figuras 8.98 a 8.101 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.8$ .



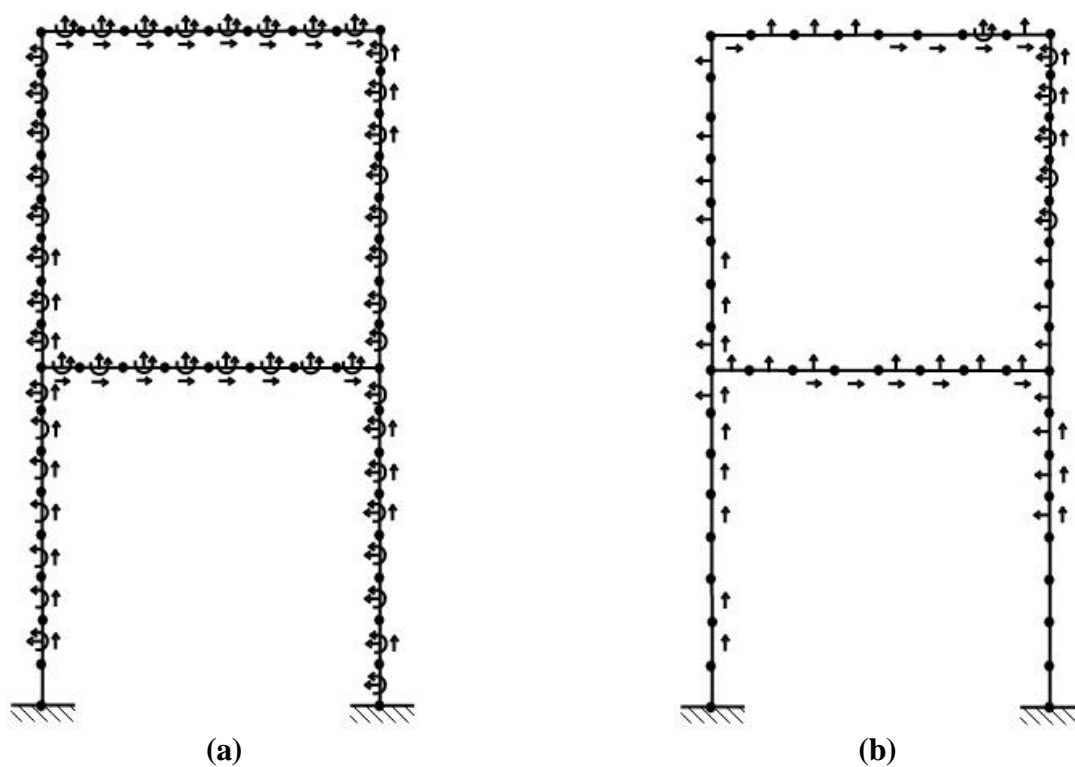
**Figura 8.98** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.05$ ) e  $\gamma = 0.8$



**Figura 8.99** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 12 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.05$ ) e  $\gamma = 0.8$



**Figura 8.100** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 24 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.05$ ) e  $\gamma = 0.8$



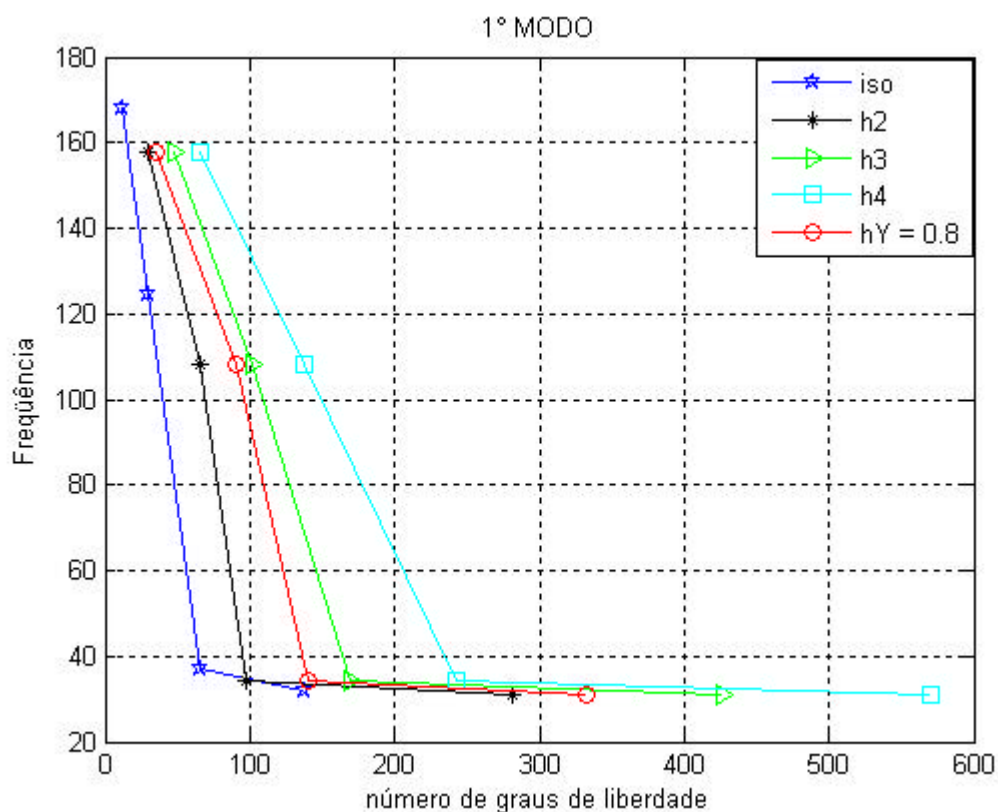
**Figura 8.101** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 48 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.05$ ) e  $\gamma = 0.8$

### 8.8 Pórtico plano com estimador de erro ( $b = 0.1$ )

Utilizando os mesmos dados da seção 8.6 será apresentado as quatro primeiras frequências com o estimador de erro ( $b = 0.1$ ) e  $g = 0.8$ .

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$F$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$	$f$	$e_{est}\%$	$NGL$
$iso$	168.15	0	12	124.79	0	30	37.03	0	66	31.72	0	138
$h_2$	157.96	6.06	30	108.16	13.33	66	34.36	7.21	98	31.09	1.99	282
$h_3$	157.95	6.07	48	108.16	13.33	102	34.36	7.21	170	31.09	1.99	426
$h_4$	157.95	6.07	66	108.16	13.33	138	34.36	7.21	242	31.09	1.99	570
$h_{g=0.8}$	157.96	6.06	35	108.16	13.33	90	34.36	7.21	140	31.09	1.99	333

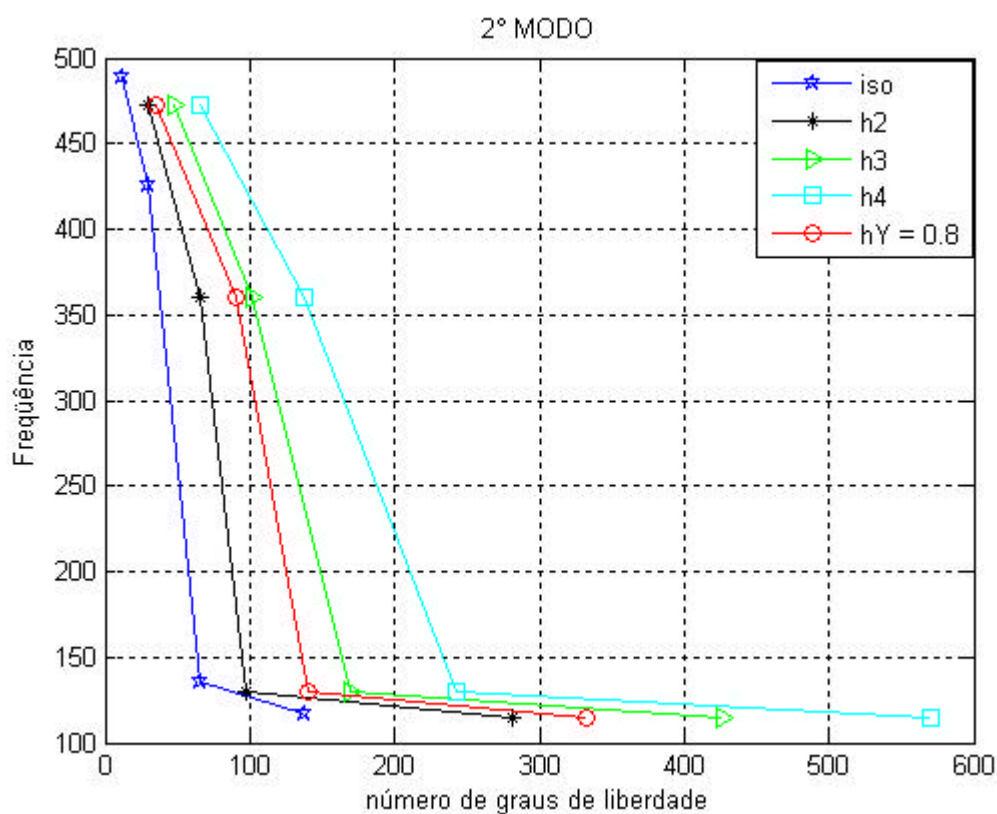
**Tabela 8.34** Primeira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.1$



**Figura 8.102** Primeira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.1$

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$F$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$
$iso$	489.04	0	12	425.93	0	30	135.96	0	66	116.65	0	138
$h_2$	473.07	3.27	30	359.96	15.49	66	129.33	4.88	98	114.97	1.44	282
$h_3$	473.03	3.27	48	359.93	15.50	102	129.33	4.88	170	114.97	1.44	426
$h_4$	473.03	3.27	66	359.93	15.50	138	129.33	4.88	242	114.97	1.44	570
$h_g = 0.8$	473.04	3.27	35	359.94	15.49	90	129.33	4.88	140	114.97	1.44	333

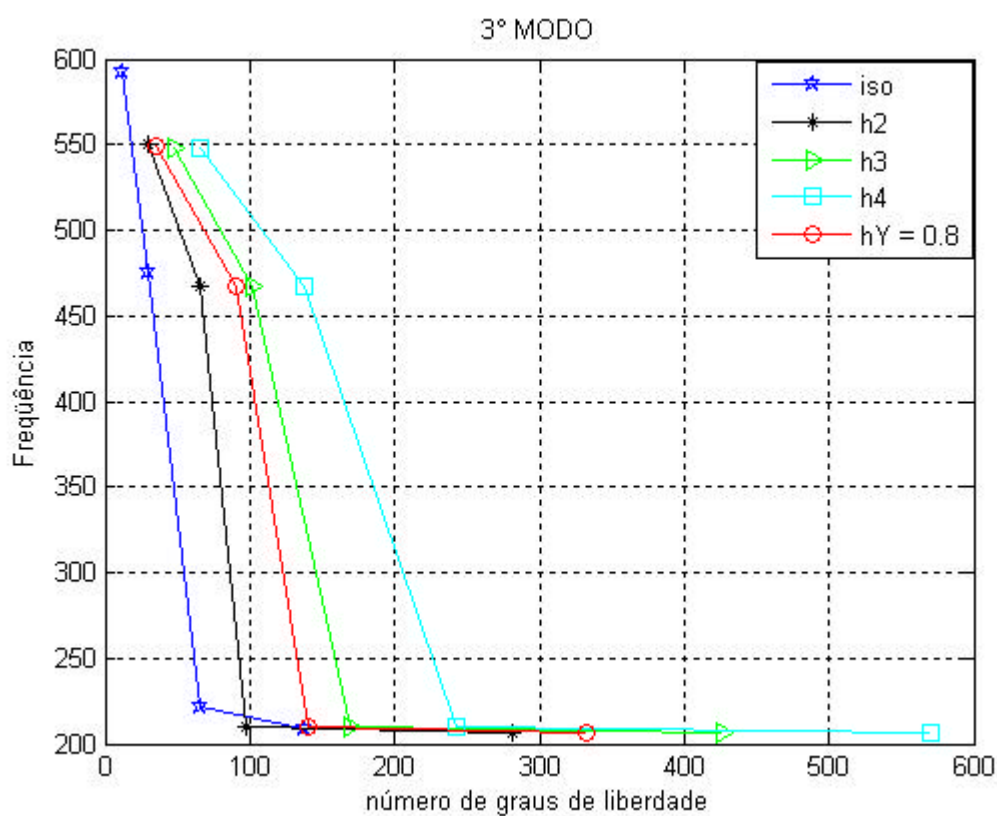
**Tabela 8.35** Segunda frequência natural para a estrutura retangular com o estimador de erro e  $\beta = 0.1$



**Figura 8.103** Segunda frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.1$

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$F$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$
$iso$	592.77	0	12	475.38	0	30	221.80	0	66	209.18	0	138
$h_2$	549.90	7.23	30	467.20	1.72	66	209.95	5.34	98	206.10	1.47	282
$h_3$	548.48	7.47	48	467.20	1.72	102	209.95	5.34	170	206.10	1.47	426
$h_4$	548.47	7.47	66	467.20	1.72	138	209.95	5.34	242	206.10	1.47	570
$h_g = 0.8$	548.76	7.42	35	467.20	1.72	90	209.95	5.34	140	206.10	1.47	333

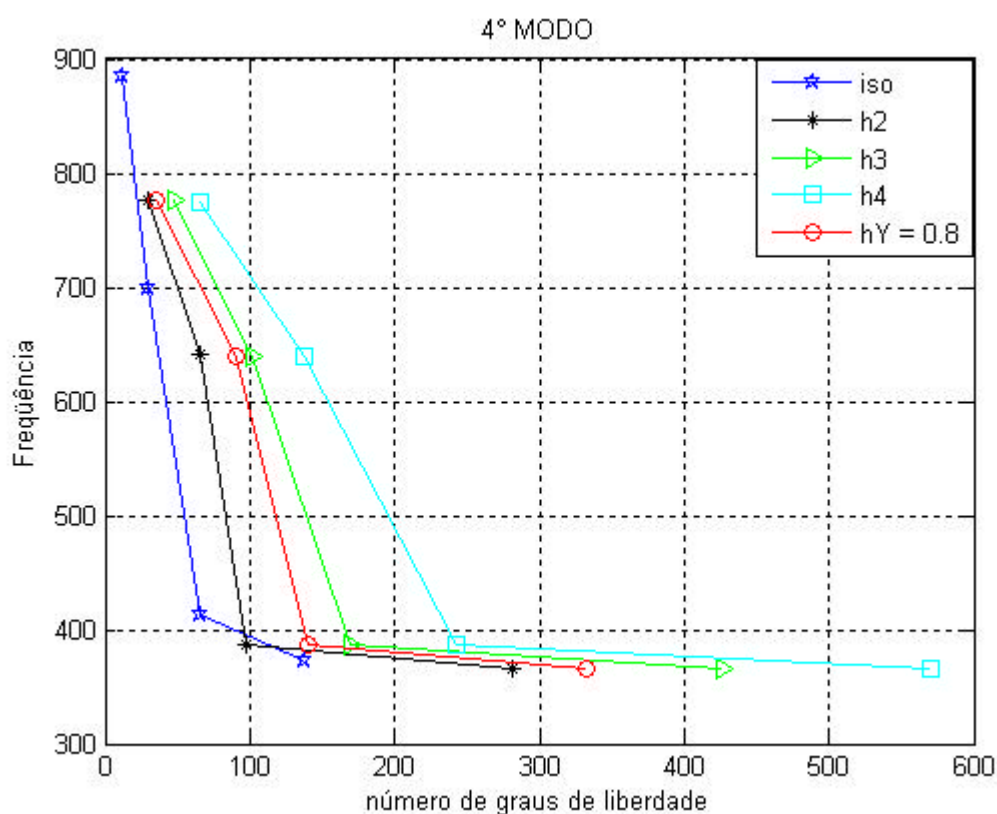
**Tabela 8.36** Terceira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.1$



**Figura 8.104** Terceira frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.1$

	6 elementos			12 elementos			24 elementos			48 elementos		
	$F$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$	$f$	$e_{est} \%$	$NGL$
$iso$	885.23	0	12	698.54	0	30	412.65	0	66	372.85	0	138
$h_2$	776.66	12.26	30	640.42	8.32	66	387.32	6.14	98	366.43	1.72	282
$h_3$	776.16	12.32	48	640.28	8.34	102	387.32	6.14	170	366.43	1.72	426
$h_4$	775.42	12.40	66	640.28	8.34	138	387.32	6.14	242	366.43	1.72	570
$h_g = 0.8$	776.59	12.27	35	640.29	8.34	90	387.32	6.14	140	366.43	1.72	333

**Tabela 8.37** Quarta frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.1$

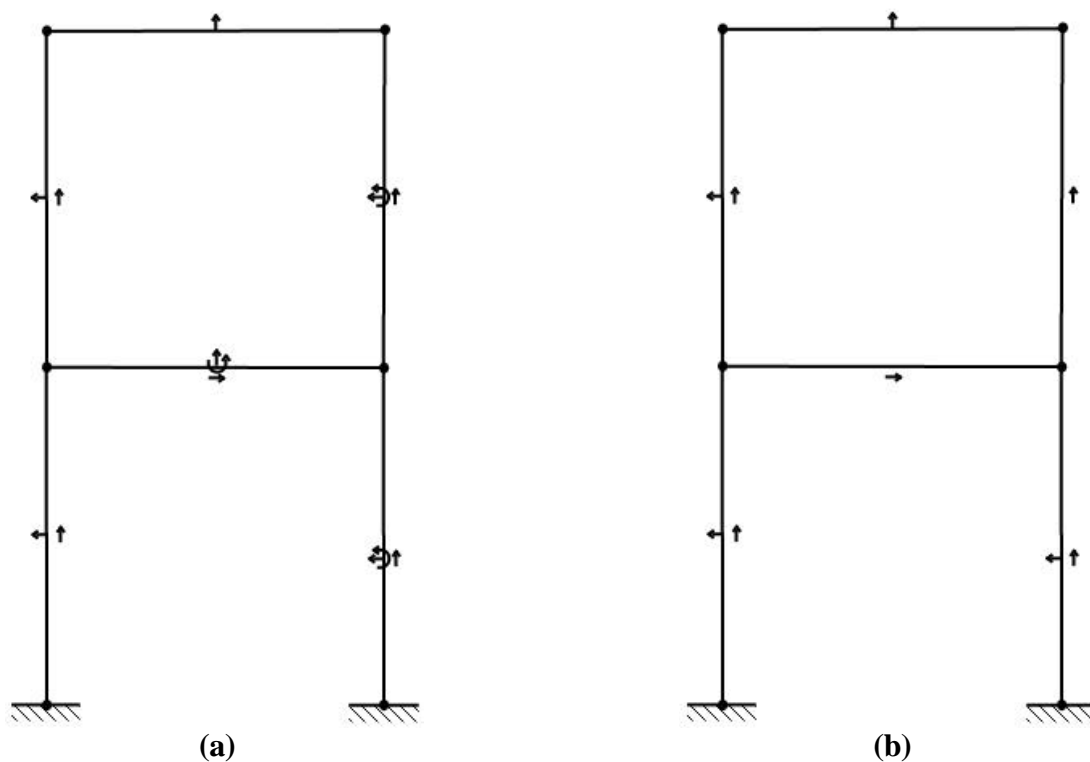


**Figura 8.105** Quarta frequência natural para um pórtico plano com estimador de erro e  $\beta = 0.1$

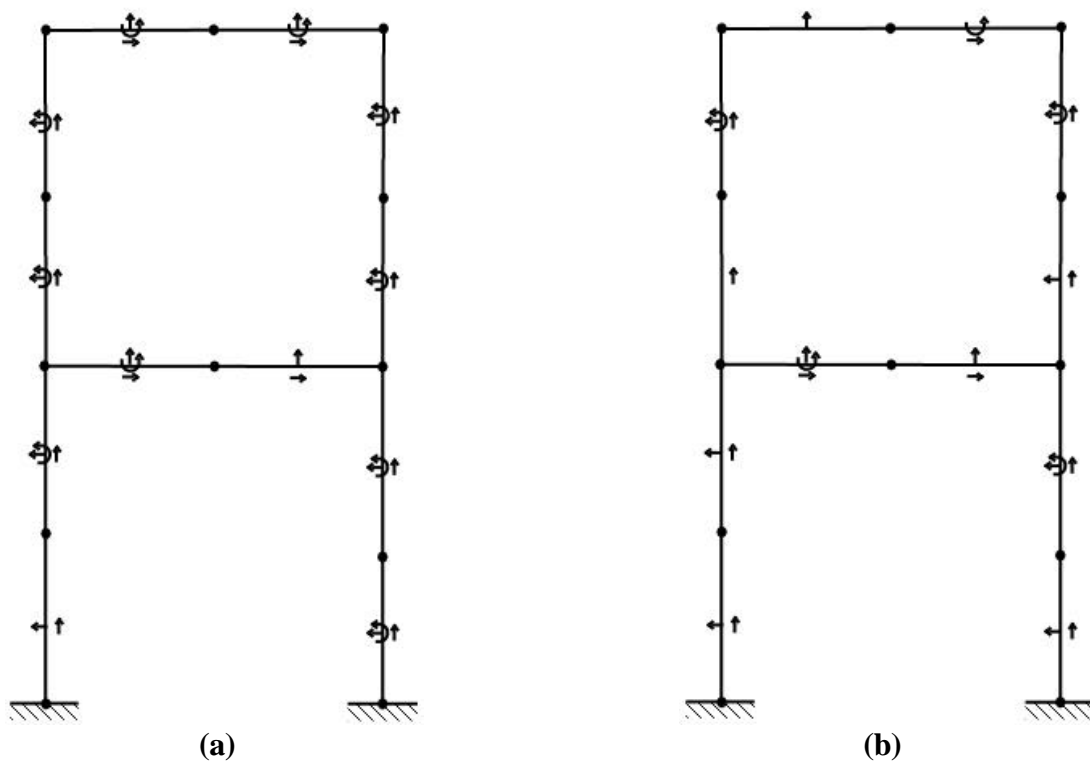
### 8.8.1 Pórtico plano com estimador de erro ( $b = 0.1$ ) e $g = 0.8$

As Figuras 8.106 a 109 apresentam para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquico introduzidos nos elementos mais carentes de refinamentos com  $g = 0.8$ .

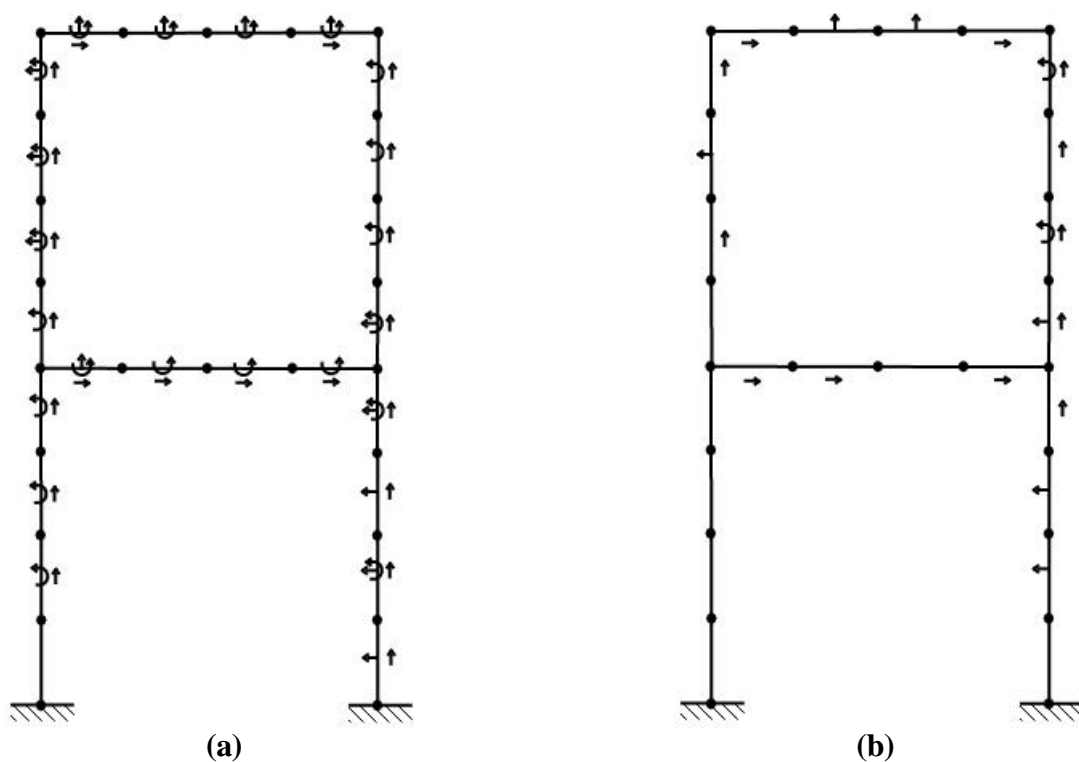




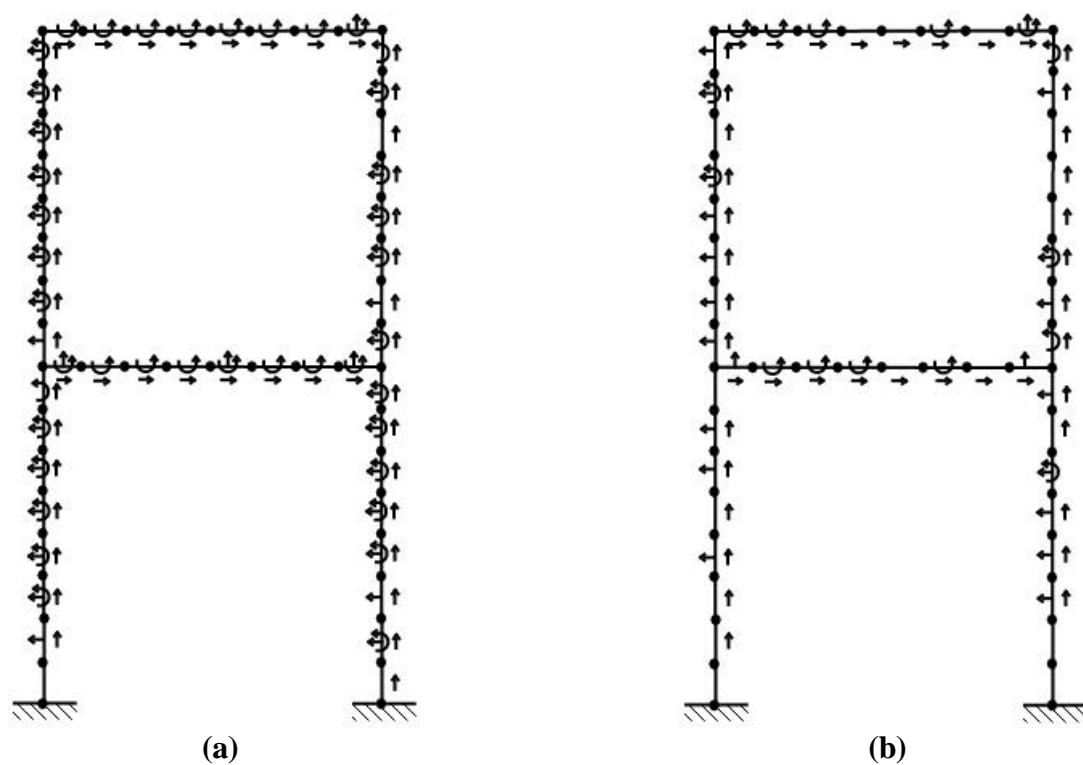
**Figura 8.106** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 6 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.1$ ) e  $\gamma = 0.8$



**Figura 8.107** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 12 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.1$ ) e  $\gamma = 0.8$



**Figura 8.108** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências do pórtico com 24 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.1$ ) e  $\gamma = 0.8$



**Figura 8.109** Primeira reanálise (a) e segunda reanálise (b) para as quatro frequências de um pórtico com 48 elementos e com estimador de erro ( $\beta = 0.1$ ) e  $\gamma = 0.8$

## 9 CONCLUSÃO

A partir dos resultados numéricos dos exemplos apresentados, pode-se observar que os valores das frequências naturais obtidos pelo processo hierárquico do método de elementos finitos podem ser considerados de ótima aproximação.

Considerando o refinamento hierárquico e empregando expansões polinomiais de mesmo grau ao longo dos elementos, ou seja, refinamento da solução do elemento isoparamétrico através da introdução de polinômios de segundo ( $m = 2$ ), terceiro ( $m = 3$ ) e quarto ( $m = 4$ ) graus, verifica-se uma excelente convergência com a introdução do polinômio de segundo grau ( $m = 2$ ) e resultados semelhantes para  $m = 3$  e  $m = 4$ .

Como a natureza hierárquica da formulação possibilita empregar expansões polinomiais diferentes ao longo dos elementos, utilizou-se uma estratégia de refinamento  $p$ -adaptativo, que tem como objetivo indicar quais graus de liberdade hierárquicos podem ser distribuídos nos elementos com eficiência e sem muito esforço computacional. Essa análise faz com que um número reduzido de graus de liberdade hierárquicos seja suficiente para que os resultados da solução final satisfaçam o nível de precisão desejada.

Utilizando o processo  $p$ -adaptativo foram obtidas informações sobre onde se deve refinar uma malha e quando se deve parar o processo de refinamento hierárquico, respectivamente. Pode-se observar que a malha de discretização sendo grosseira os resultados obtidos, com o refinamento hierárquico e com o estimador de erro, são satisfatórios em relação à análise isoparamétrica, convergindo muito mais rápido, sem a necessidade de utilizar todos os graus de liberdade hierárquicos, o que pode representar um ganho computacional.

Foi feita uma comparação dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica (so) e hierárquica de 2° grau ( $m = 2$ ), 3° grau ( $m = 3$ ) e 4° grau ( $m = 4$ ) sem a utilização do estimador de erro. Comparou-se os resultados obtidos com o elemento BEAM3 do software comercial ANSYS 5.4 e do elemento de viga de Euler Bernoulli, notou-se nos resultados apresentados que, quando se trabalha com vigas esbeltas, isto é,  $b < 0.1$ , todos os resultados apresentam bons resultados, exceto os obtidos na análise isoparamétrica. Quando a relação entre a altura da viga e seu comprimento são maiores, ou seja  $b \geq 0.1$ , os resultados do elemento de Euler-Bernoulli, do ANSYS e a análise isoparamétrica não apresentam bons resultados, enquanto que os resultados obtidos nas análises hierárquicas apresentam excelentes resultados.

Verificou-se, também, que o refinamento hierárquico com o estimador de erro, apresentou bons resultados mesmo quando os resultados da análise isoparamétrica não são satisfatórios isto é, resultados ruins.

O resultados dos exemplos numéricos apresentados mostram a eficiência da análise hierárquica baseada nos estimadores de erro a-posteriori adotados nesse trabalho, e com isso verifica-se que as vantagens em se empregar processos  $p$ -adaptativos no método de elementos finitos são evidentes.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aldraihem, O. J., Wetherhold, R. C., Singh, T. 1996, *Intelligent Beam Structures: Timoshenko Theory vs. Euler - Bernoulli Theory*, Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Control Applications, Dearborn, MI, WPO2, v4, n 15, pp 976- 981.
- Azevedo M. F. Álvaro; *Método dos Elementos Finitos*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto Portugal, 2003.
- Babuska, I., Griebel, M., Pitkäranta, J., *The problem of selecting the shape functions for a p-type finite element*, Int. J. Numer. Methods Eng. v.28, p.1891-1908, 1989.
- Babuska, I., Rheinboldt, W.C., *Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., v.17/18, p.519-540, 1979.
- Babuska, I., Szabo, B.A., Katz, I.N., *The p-version of the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., v.18, p.515-545, 1981.
- Babuska, I. and Rheinboldt, W. C. *Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations*, SIAM J. Numer. Anal., 15: n° 4, 1978.
- Babuska, I. and Rheinboldt, W. C. *A-posteriori Error Estimates for the finite element method*, International Journal for Numerical methods in Engineering, 12: 1597-1615, 1978.
- Babuska, I. and Rheinboldt, W. C. *A-posteriori Error Analysis of finite element solutions for one-dimensional problems*, SIAM J. Numer. Anal., 18: n° 3, 1981.
- Clough, R. W. - *The Finite Element in Plane Stress Analysis*, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., September 1960.
- Campion, S.D., Jarvis, J.L., *An investigation of the implementation of the pversion finite element method*, Finite elements in analysis and design, v.23, p.1-21, 1996.

- Eriksson, K. *Some Error Estimates for the p-version of the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., 23: n° 2, 403 – 411, 1986.
- Friberg, P. O.; Möller, P.; Makovicka, D. and Wiberg, N. E., *An Adaptive Producere for Eigenvalue Problems using the Hierarchical Finite element Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23: 91-98, 1986.
- Friberg, P. O., *An Error Indicador for the generalized Eigenvalue Problem using the Hierarchical Finite element Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24: 319-335, 1987.
- Gago, J.P. de S.R.; Kelly, D.W.; Zienkiewicz, O.C. and Babuska, I. *A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Parte II – Adaptive mesh refinement*, International Journal for Numerical methods in Engineering, 19: 1621 – 1656, 1983.
- Kinney, J. S., *Breve Historia de la Teoría Estructural*, Ed. CECSA, 1982.
- Kelly, D.W. *The self – equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method*, Intenational Journal for Numerical Methods in Engineering, 20: 1941 – 1506, 1984.
- Kelly, D. W.; Gago, J. P. de S. R.; Zienkiewicz, O C.and Babuska, I. *A-posteriori Error Analysis and adaptive Processes in the finite element method: Parte I - Error analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19: 1593 – 1619, 1983.
- Lima Jr., José Juliano de, Arruda, José. Roberto de França 1997, *Finite Element Modeling of Piezoceramic Sensors and Actuators*, *Anais do XVIII CILAMCE*, Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Brasília, v 1, ref 198, pp 751-757.
- Leino, Y., Pitkäranta, J., *On the membrane locking of h-p finite elements in a cylindrical shell problem*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.37, p.1053-1070, 1994.

- Liu, Y., Busby, H.R., *p-version hybrid/mixed finite element method*, Finite elements in analysis and design, v.30, p.325-333, 1998.
- Lima Jr., José Juliano de, Arantes, Ricardo Ferreira, *Estudo Dinâmico dos Modelos de Viga de Euler-Bernoulli, Vlasov e Timoshenko*, 2000.
- Oñate, E., *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - análisis estático lineal*, CIMNE, Barcelona, 1992.
- Paschoalini, A.T., Moreira, L.A., Iguti, F., *The hierarchical nine-node shell finite element*, 15<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mechanical Engineering, 1999.
- Peano, A., Pasini, A., Riccioni, R., Sardella, L., *Adaptive approximations in finite element analysis*, Computers and Structures, v.10, p.333-342, 1979.
- Peano, A., *Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending*, Comp.& Maths. with Appls., v.2, p.211-224, 1976.
- Ribeiro, F.L.B. *Formulação hierárquica do método dos elementos finitos: Refinamento auto adaptativo versão p aplicado a problemas de elasticidade*, Tese de mestrado – Coope / UFRJ, 1986.
- Rossow, M.P., Katz, I.N., *Hierarchical finite element analysis and precomputed arrays*, International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.12, p.977-999, 1978.
- Roy R. Craig, Jr., *Structural dynamics na introduction to computer*, John Wiley & Sons, 1981
- Szabo, B.A. and Sahrman, G.J. *Hierarchic plate and shell models based on p-extension*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26: 1855 – 1881, 1988.
- Timoshenko, S., Young, D. H. and Weaver, W. Jr. *Vibration problems in engineering*, John Wiley & New York, 4rd., 1974

- Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L. *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. v.3, p.375-390, 1971.
- Zienkiewicz, O.C., Gago, J.P., Kelly, D.W., *The hierarchical concept in finite element analysis*, Computers and Structures, v.16, p.53-65, 1983.
- Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. *Finite element and approximation*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. 4ed., London: McGraw-Hill, 1989.
- Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J. Z. *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24: 337 – 357, 1987.
- Yang, S. M., LEE, Y. J., *Modal analysis of stepped beams with piezoelectric materials*, Journal of Sound and Vibration, v 176, n 3, pp 289-300, 1994.
- Willmersdorf, R. B., *Formulação p-adaptativa do método dos elementos de contorno aplicado a problemas de potencial*, tese mestrado, COPPE/UFRJ, 1988.



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)