Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy

Tópicos em Teoria de Mather

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós–graduação em Matemática

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2007

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy

Tópicos em Teoria de Mather

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador: Prof. Carlos Tomei

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2007

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy

Tópicos em Teoria de Mather

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Tomei
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Carlos Tomei
PUC-Rio

Prof. George Svetlichny
PUC-Rio

Prof. Paulo Henrique Gusmão
Universidade Federal Fluminense

Prof. Leonardo Carvalho
Universidade Federal Fluminense

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 08 de Fevereiro de 2007

Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy

Graduou-se em Economia e em Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Godoy, Jorge Luiz Oliveira Santos

Tópicos em Teoria de Mather/ Jorge Luiz Oliveira Santos Godoy; orientador: Carlos Tomei. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 38 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Teoria de Mather. 3.Teoria das Singularidades. 4. Germes. 5. Determinação Finita. 6. $\mathcal{K}$-$\mathcal{R}$- equivalência.I. Tomei, Carlos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao professor Carlos Tomei, pela orientação neste trabalho.

Aos demais professores, funcionários e colegas do Departamento de Matemática da Puc-Rio, bem como ao CNPq, pelos generosos recursos que sempre me disponibilizaram.

Resumo

Godoy, Jorge Luiz Oliveira Santos; Tomei, Carlos. **Tópicos em Teoria de Mather**. Rio de Janeiro, 2007. 38p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Seja $(E_s)^t$ o espaço de germes na origem de funções suaves entre os espaços euclidianos de dimensões s e t. Nesta dissertação, apresentamos a parte da Teoria de Mather que descreve hipóteses suficientes para k-determinação em $(E_s)^t$ sob duas ações diferentes, induzindo as chamadas $\mathcal{R}$- e $\mathcal{K}$- equivalências. Um germe é k-determinado se é equivalente a qualquer perturbação que deixa invariante seu k-jato, os termos de ordem até k de sua expansão de Taylor na origem. A $\mathcal{R}$-equivalência consiste em compor germes com germes de difeomorfismos à direita. A $\mathcal{K}$-equivalência é mais difícil de descrever.

Palavras–chave

Teoria de Mather, Teoria das Singularidades, germes, k-jato, determinação finita, $\mathcal{K}$-equivalência, $\mathcal{RL}$-equivalência, órbitas, dobras, cúspides.

Abstract

Godoy, Jorge Luiz Oliveira Santos; Tomei, Carlos. **Topics in Mather Theory**. Rio de Janeiro, 2007. 38p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Let $(E_s)^t$ be the space of smooth map-germs at the origin between Euclidian spaces of dimensions s and t. In this dissertation, we present a section of Mather theory describing sufficient conditions for k-determinacy of this map-germs under two different actions, inducing the so called $\mathcal{R}$- e $\mathcal{K}$- equivalences. A map-germ is k-determined if it is equivalent to any perturbation that leaves invariant its k-jet, i.e., the terms up to order k of its Taylor expansion at the origin. The $\mathcal{R}$-equivalence consists of compositions with germs of diffeomorphisms to the right. The $\mathcal{K}$-equivalence is harder to describe.

Keywords

Mather Theory, Theory of Singularities, map-germs, k-jet, finite determinacy, $\mathcal{K}$-equivalence, $\mathcal{RL}$-equivalence, orbits, folds, cusps.

Sumário

1 Introdução **8**

2 Germes escalares **11**
2.1 E_s e M_s 11
2.2 $\mathcal{R}$-equivalência em E_s 14

3 Germes vetoriais **21**
3.1 Equivalências pelos grupos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$ 21
3.2 A k-determinação por $\mathcal{K}$-equivalência: 25

4 Dobras e cúspides: limites da teoria **30**
4.1 Perturbações e desdobramentos 30
4.2 Dobras 32
4.3 Algumas dificuldades: a cúspide 34

1
Introdução

Os teoremas da função inversa e as formas locais das submersões e imersões estão entre os teoremas mais empregados por analistas. Com hipóteses genéricas, o comportamento local de uma função desse tipo em torno de um ponto x_0 é determinado pela aproximacão linear da função f naquele ponto. De forma mais precisa, existem trocas de variáveis em vizinhanças de x_0 e $f(x_0)$ que convertem f em sua aproximação linear. Por mais importantes que sejam esses teoremas, ao ponto de fazerem parte do material ensinado a alunos de graduação em matemática, há pouca divulgação sobre o que pode ser feito quando suas hipóteses não valem.

No final dos anos 1960 e início dos 70, o matemático americano John Mather (1942), em uma série de artigos classicamente referenciados como [Mather I-IV], produziu um importante avanço na Teoria Local das Singularidades. O objetivo da teoria é expandir substancialmente a possibilidade de reduzir, por meio de trocas de variáveis adequadas, o estudo local de uma função f ao estudo de uma função mais simples, freqüentemente dada pelo truncamento da série de Taylor da função original. Estendendo o trabalho do matemático francês Tougeron, Mather encontrou condições algébricas para que a função f em um ponto x_0 seja equivalente ao polinômio de Taylor de ordem k de f nesse ponto.

Mather considerou mais de uma relação de equivalência, por várias razões, teóricas e práticas. Dada uma função suave $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$, seu estudo local, digamos, perto de zero, habitualmente concentra em dois temas, um mais geométrico, a estratificação do domínio em níveis de f, outro mais algébrico, a natureza do ideal I_f gerado pelas funções coordenadas $f_1, \ldots, f_t$ dentro do anel das funções a s variáveis, definidas perto de 0.

Os níveis não se alteram substancialmente por trocas de variáveis ϕ no domínio, mantendo as propriedades topológicas básicas. Trocas de variáveis ψ no contradomínio também são inócuas: só os valores dos níveis mudam. De forma mais sucinta, para esse tema, as funções f e $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ perto da origem são consideradas equivalentes — essa é a chamada $\mathcal{RL}$-equivalência, onde *right* e *left* correspondem respectivamente às trocas no domínio e contradomínio. Em certas situações (quando $t = 1$, por exemplo), trocas de variáveis no contradomínio não são necessárias e consideram-se $\mathcal{R}$-equivalências.

Como veremos no Teorema 3.1, duas funções f e g têm o mesmo ideal de funções coordenadas, isto é $I_f = I_g$, quando existe uma matriz invertível $U(x)$ tal que $f(x) = U(x)g(x)$, a chamada $\mathcal{C}$-equivalência. Não surpreende que $\mathcal{RL}$-equivalência e $\mathcal{C}$-equivalência sejam diferentes. Um dos objetivos da teoria é encontrar extensões generalizadas desses conceitos que sejam de fato equivalentes para uma classe relevante de funções.

Assim, há razões técnicas para estudar ainda outras equivalências: além da mais restritiva $\mathcal{R}$-equivalência, será importante incluir a $\mathcal{K}$-equivalência, mais abrangente do que a $\mathcal{C}$-equivalência. Mais, a possibilidade de inserir parâmetros ao perturbar uma função dada sugere considerar trocas de variáveis que dependam ou não desses parâmetros, com significados físicos diferentes em aplicações.

Assim como existem formas normais para difeomorfismos e submersões, é interessante procurar, dada uma função f e uma relação de equivalência, uma outra função equivalente g que seja, em algum sentido, mais simples. Um dos objetivos desse texto é apresentar as condições suficientes para *determinação finita* para $\mathcal{R}$-equivalência e $\mathcal{K}$-equivalência. Em outras palavras, serão descritas condições que asseguram que uma função f é equivalente a um truncamento apropriado de sua expansão de Taylor em zero. É importante notar que, apesar das funções serem suaves, não são analíticas. Tanto o Teorema da Função Inversa quanto a Forma Local das Submersões, aliás, são resultados desse tipo: sob a hipótese que a jacobiana $Df(0)$ tem posto t, a função f é $\mathcal{RL}$-equivalente à seu 1-jato $f(0) + Df(0)x$. A partir daí, a formulação habitual dos dois resultados segue de uma observação elementar de álgebra linear.

Os resultados apresentados tratam de aspectos da teoria construída por Mather em seus artigos seminais sob certas restrições. Assim, por exemplo, tratamos apenas de teoria local em torno de um único ponto. Mais severamente, o texto termina com um exemplo — a busca de uma forma local para a cúspide — na qual ficam claras as limitações das ferramentas apresentadas. A teoria não pode continuar sem a introdução do chamado Teorema da Preparação de Malgrange-Mather, fora do escopo desse trabalho.

Em princípio, um aluno no final de graduação de matemática está em condições de ler o texto. No Apêndice, são reunidos alguns conceitos algébricos, usados como um vocabulário muito conveniente ao longo do texto.

2
Germes escalares

2.1
E_s e M_s

Todo esse texto trata de teoria local de funções. Assim, domínios não são importantes: quase todos os resultados são válidos para vizinhanças de pontos. É conveniente substituir funções pelos seus *germes*. Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^s$. Seja $x_0 \in W = U \cap V$ e funções $f : U \subseteq \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ e $g : V \subseteq \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ de classe C^∞. Façamos $f \sim g$ quando existe um aberto Z contendo x_0 no qual as restrições de f e g coincidem. A classe de equivalência $[f]$ é denominada o *germe de f em x_0*, e diz-se que f e g possuem o mesmo germe em x_0. Outra notação freqüente é $f : (\mathbb{R}^s, x_0) \to (\mathbb{R}^t, y_0)$, representando um germe em $x_0 \in \mathbb{R}^s$, que leva x_0 a $y_0 \in \mathbb{R}^t$.
Germes em um mesmo ponto e funções compartilham várias construções, como soma e multiplicação por escalar. A composição $[f] \circ [g]$ é possível, a partir de $f \circ g : (\mathbb{R}^m, x) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}^s, y) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^t, z)$, sob as hipóteses naturais da boa definição . Aqui, os domínios e contradomínios explicitam os pontos nos quais as vizinhanças abertas das definições de germe devem ser tomadas: precisamos ter $g(x) = y, f(y) = z$.
De forma análoga, toda função C^∞ admite localmente uma expansão formal em série de Taylor, não necessariamente convergente. Assim, podemos associar ao germe a expansão de um representante. Por outro lado, não faz sentido avaliar um germe de função em um ponto $x \neq x_0$ e escrever $[f](x)$ (a menos que $x = x_0$). Não se perde generalidade ao se fazer $x_0 = 0$. Uma translação no domínio nos dá o caso geral para todas as propriedades de interesse.

Denotaremos por E_s o espaço vetorial dos germes $f : (\mathbb{R}^s, 0) \to \mathbb{R}$, aonde não exigimos que $f(0) = 0$. É conveniente pensar em E_s como um anel (comutativo, com unidade), esquecendo a multiplicação por escalar. Estaremos interessados em ideais não triviais $\mathcal{I} \subset E_s$, que serão freqüentemente descritos por uma lista de seus geradores, $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_1, \cdots, \mathcal{I}_i, \cdots \rangle \cdot E_s$ onde $\mathcal{I}_i \in E_s$, $\forall i \geqslant 1$. Todo elemento do ideal é combinação linear finita dos seus geradores, com germes de E_s usados como coeficientes. O ideal $M_s = \{f \in E_s\colon f(0) = 0\}$, formado pelos germes de E_s que preservam a origem, é especialmente interessante . Vamos obter um conjunto de geradores para M_s: precisamos de uma ferramenta auxiliar.

Lema 2.1 (Hadamard): Seja $U \in \mathbb{R}^s$ aberto contendo a origem. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função suave com $f(0) = 0$. Então existem funções suaves $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_i \alpha_i(x)\, x_i.$$

Demonstração: Defina $F(u) = f(ux)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(u)du$, ou, em termos de $f(x)$,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{du} f(ux)du = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f(ux)}{\partial x_i} x_i \right) du = \sum_{i=1}^{s} \left(\int_0^1 \frac{\partial f(ux)}{\partial x_i} du \right) x_i. \blacksquare$$

Proposição 2.1: Sejam f e g germes e $\mathcal{I}$ um ideal de E_s.
(i) $f \in E_s$ é invertível (como elemento do anel E_s) se e somente se $f(0) \neq 0$.
(ii) M_s é o único ideal maximal de E_s.
(iii) $M_s = \langle x_1, x_2, \ldots, x_s \rangle \cdot E_s$.

Demonstração:
(i) Necessidade: Suponha f invertível. Então existe $g \in E_s$ tal que $fg = 1$, o que implica em $f(0)g(0) = 1$ e $f(0) \neq 0$.
Suficiência: Seja $f \in E_s$ tal que $f(0) \neq 0$. Então $g = 1/f$ é o inverso de f.
(ii) Seja um ideal $\mathcal{I} \subseteq E_s$ tal que $M_s \subset \mathcal{I} \subseteq E_s$. Podemos então encontrar um $f \in \mathcal{I}$ tal que $f(0) \neq 0$. Por (i) vemos que f é invertível como elemento do anel E_s. Então $1 \in \mathcal{I}$ e qualquer ideal que contenha a unidade contém o anel. Daí $\mathcal{I} = E_s$ e M_s é maximal. Para verificar a unicidade, suponha que $\mathcal{I}$ seja também um ideal maximal de E_s e que $\mathcal{I} \neq M_s$. Portanto, existe $f \in \mathcal{I}$ tal que f não pertence à M_s, ou seja, $f(0) \neq 0$. Por (i) vemos que f é invertível e que $1 \in \mathcal{I}$. Já vimos que: $1 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} = E_s$.
(iii) É uma conseqüência direta do lema acima. $\blacksquare$

Quando o contexto deixar claro, omitiremos a indicação do anel ao qual o ideal pertence. Assim, $M_s = \langle x_1, \cdots, x_s \rangle \cdot E_s$ será denotado por $M_s = \langle x_1, \cdots, x_s \rangle$. Podemos associar a um germe a expansão em série (formal) de Taylor de um representante. Os germes de $M_s \subset E_s$ são aqueles para os quais o termo constante da série de Taylor em 0 se anula. O ideal M_s^k é uma descrição

algébrica conveniente dos germes de E_s cujas derivadas parciais se anulam até (e inclusive) ordem $(k-1)$.
A partir de M_s calculamos $M_s^2 = M_s \cdot M_s$ (o *produto dos ideais* $\mathcal{I}$ e J é formado pelas somas de elementos da forma $z_i z_j, z_i \in \mathcal{I}, z_j \in J$). Sejam, por exemplo, x e y as funções coordenadas de $\mathbb{R}^2$. Então
(a) $M_2^2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$, $h \in M_2^2 \overset{def}{\Leftrightarrow} h = (x^2\, f_1 + xy\, f_2 + y^2\, f_3)$, $f_1, f_2, f_3 \in E_2$.
(b) $M_2^3 = M_2 \cdot M_2^2 = \langle x, y \rangle \cdot \langle x^2, xy, y^2 \rangle = \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle$.

Proposição 2.2: Seja α multi-índice percorrendo os índices de grau total $k = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$ e o monômio $x = x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \cdots\, x_s^{\alpha_s}$ com $\langle x \rangle = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle$.
(a)$M_s^k = \langle x^\alpha \rangle = \langle x \rangle^k$.
(b) $h \in M_s^k \Leftrightarrow h = \sum_\alpha x^\alpha f_\alpha$ com $f_\alpha(0) \neq 0$.
(c) $M_s^k \cdot M_s^l = M_s^{k+l}$.
O item (a) mostra que M_s^k é um ideal finitamente gerado de E_s para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Os itens (a) e (b) seguem por indução. Para (c), basta escrever os geradores a partir de (a). ∎

Os geradores de M_2^k para $k = 1, 2, \ldots$ podem ser arrumados em linhas como no *diagrama de Siersma.*

$$
\begin{array}{c}
1 \\
x \quad y \\
x^2 \quad xy \quad y^2 \\
x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \\
x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4 \\
x^5 \quad x^4y \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^k \quad x^{k-1}y \quad x^{k-2}y^2 \;\ldots\ldots\; x^2y^{k-2} \quad xy^{k-1} \quad y^k
\end{array}
$$

Na primeira linha temos o gerador de E_2, na segunda os geradores $\langle x, y \rangle$ de M_2, na terceira os de $M_2^2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$, e assim por diante. Cada linha é construída a partir da anterior multiplicando-a pelos geradores de $M_2 = \langle x, y \rangle$.

Seja $(E_s)^t = E_s \times \overset{t\ vezes}{\cdots} \times E_s$ e seja $f \in (E_s)^t$, com coordenadas $f_i \in E_s$, α multi-índice. Seja $j^k f_i$ o germe do polinômio de Taylor de grau k de f_i,

$$j^k f_i = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f_i(0) x^\alpha}{\alpha!}.$$

O *k-jato* $j^k f$ é a t-upla $j^k f = (j^k f_1, \cdots, j^k f_t)$ de germes de polinômios de Taylor de f. Assim, 0-jatos são as aproximações de uma função por uma constante, 1-jatos são transformações afins, 2-jatos são polinômios com termos constantes, lineares e quadráticos. Terminamos a seção com um primeiro exemplo muito simples, que será generalizado de várias formas.

Proposição 2.3 (formas locais em E_1): Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave, satisfazendo $f(0) = 0$. Suponha que as primeiras derivadas de f em zero sejam todas nulas até ordem k, isto é, $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k)}(0) = 0 < f^{(k+1)}(0)$. Então existe uma troca de variáveis φ numa vizinhança da origem no domínio (isto é, um difeomorfismo local preservando a origem) tal que $f \circ \varphi = x^k$.

Demonstração: Pelo Lema de Hadamard, $f(x) = x^k g(x)$, onde $g(x)$ é suave, positiva na origem (derivando, é fácil ver que $f^{(k)}(0) = k!\, g(0)$).
Defina $X = \varphi^{-1}(x) = x(g(x))^{1/k}$. Pelo Teorema da Função Inversa, como a derivada de φ^{-1} na origem não é nula, φ é um difeomorfismo local preservando a origem. Finalmente, $f \circ \varphi(X) = X^k$. ■

Nem os teoremas de função inversa, nem aliás o Lema de Morse (descrito em 2.2 adiante), obteriam essa forma local. Se a função fosse real analítica (ou mesmo analítica), o resultado teria uma demonstração mais imediata: $f(x) = x^k g(x)$ pode ser obtido diretamente da expansão de Taylor de f em 0.

2.2
$\mathcal{R}$-equivalência em E_s

Agora, descrevemos a primeira de uma série de equivalências entre germes. As equivalências serão definidas em termos de ações de grupos, seguindo a construção descrita no Apêndice. Ao longo do texto, escolheremos grupos G que vão agir sobre conjuntos S de germes. Dado um germe de S, em geral procura-se outro equivalente (isto é, que esteja na mesma órbita da ação de G) que tenha uma representação mais simples.
O passo seguinte também se descreve nessa generalidade. Suponha que o grupo G, o conjunto S e a ação do grupo sobre o conjunto tenham alguma regularidade geométrica. A órbita $\mathcal{O}_f$ por um elemento f, então, pode ser pensada como uma superfície, dotada de um espaço tangente em cada ponto. Considere uma curva suave $g(u)$ no grupo para a qual $g(0) = e$, a identidade do grupo. A imagem de f pela ação dos elementos de $g(u)$ é uma curva $\gamma(u)$ em $\mathcal{O}_f$ e a derivada de $\gamma(u)$ para $u = 0$ pertence ao espaço tangente de $\mathcal{O}_f$ em f.

Informalmente, os elementos do espaço tangente são as alterações infinitesimais que induzem germes equivalentes a f pela ação do grupo.

Esse capítulo é dedicado à ação do grupo $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$, o conjunto de germes de difeomorfismos locais $\varphi : (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^s, 0)$ de classe C^∞ que preservam a origem. Sempre que o contexto permitir, omitiremos $\mathbb{R}^s$ em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$. A composição faz de $\mathcal{R}$ um grupo. A função $A : \mathcal{R} \times E_s \to E_s$ dada por $A(\varphi, f) = f \circ \varphi$ é uma ação de $\mathcal{R}$ em E_s. Seguindo o padrão geral descrito acima, germes $f, g \in E_s$ são $\mathcal{R}$-equivalentes quando existe $\varphi \in \mathcal{R}$ tal que $f = g \circ \varphi$. É trivial verificar que A é de fato uma ação. A ação mantém o ideal M_s invariante.
Seja $f \in E_s$ e $\varphi(x, u), u \in \mathbb{R}$ uma curva em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ com $\varphi(., 0) = I_s$, a identidade de $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$. Pela construção geral, o espaço tangente $T_f^{\mathcal{R}}$ à órbita de f é o conjunto dos germes

$$T_f^{\mathcal{R}} = \{\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial u}(x, u)|_{u=0}\} \subset E_s.$$

Vamos descrever de forma mais explícita os vetores tangentes. Seja $f_x(x)$ o vetor gradiente $1 \times s$ e $\varphi_u(x, u)$ o vetor $s \times 1$ de derivadas parciais em u de $\varphi(x, u)$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial u}(x, u)|_{u=0} = f_x(\varphi(x, u))\varphi_u(x, u).$$

É fácil ver que uma curva suave $\varphi(x, u)$ com $\varphi(x, 0) = x$ pode ter funções derivadas $\frac{\partial \varphi_j}{\partial u}(x, 0)$ arbitrárias: é só tomar $\varphi(x, u) = x + u[\frac{\partial \varphi_j}{\partial u}(x, 0)]$, onde a expressão entre colchetes denota um vetor com aquela coordenada. Assim, $T_f^{\mathcal{R}}$ é o ideal de E_s gerado pelas funções $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x), j = 1, \ldots, s$, o chamado *ideal jacobiano* J_f do germe f. Dado um germe, é natural procurar por germes equivalentes entre seus jatos em 0. Um germe f de M_s é k-*determinado* na $\mathcal{R}$-órbita quando f e seu k-jato $j^k f$ são $\mathcal{R}$-equivalentes. Um germe f é *finitamente determinado* se para algum k temos que f é k-determinado. Perto da origem, um germe k-determinado possui o comportamento qualitativo de um polinômio, seu k-jato.
A Proposição 2.3 identifica os germes k-determinados de E_1. O Teorema da Função Implícita e o Lema de Morse, descritos a seguir, são os exemplos habituais de classificação de germes por k-determinação.

Forma Local das Submersões (FLS): Seja $f \in M_s$. A FLS afirma que, se a jacobiana $f_x(0)$ é sobrejetora, então f é 1-determinado. Além disso, f é $\mathcal{R}$-equivalente ao germe da projeção $(x_1, \ldots, x_s) \mapsto x_1$. Num vocabulário mais familiar, na vizinhança de um ponto regular x_0, isto é, um ponto no qual $f_x(x_0)$ é sobrejetora, $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ é uma projeção (mais uma constante), depois de troca de variável no domínio preservando x_0 .

Lema de Morse: Seja 0 um ponto crítico não-degenerado de $f \in M_s^2$, isto é $f_x(0) = 0$, com Hessiana $Hf(0)$ invertível. Suponha $f(x) = \frac{1}{2}x^T Hf(0)x + R(x)$, onde $R(x)$ varia quadraticamente com x. Então o germe f é 2-determinado: $f \overset{\mathcal{R}}{\sim} \frac{1}{2}x^T Hf(0)x$. Mais, f é também $\mathcal{R}$-equivalente ao germe $g(x) = x^T Dx$, onde D é uma matriz diagonal tendo como entradas diagonais os números ± 1.

O resultado principal desse capítulo é o Teorema 2.1, que descreve uma condição suficiente para k-determinação por $\mathcal{R}$-equivalência. A partir do teorema, seguem a FLS em E_s e o Lema de Morse, no sentido que o teorema comprova a equivalência do germe com seus 1- ou 2-jatos, respectivamente. As versões mais finas são apenas ajustes simples usando argumentos de álgebra linear. Antes de tratar do teorema geral, apresentamos um exemplo, para perceber a dificuldade inerente a um teorema de k-determinação.

Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$. Então o germe f é 3-determinado em sua $\mathcal{R}$-órbita. Para ver isso, temos que mostrar que qualquer deformação de f por um perturbação quártica $p \in M_2^4$ permanece na mesma $\mathcal{R}$-órbita de f. Considere o germe $g(x, y) = f(x, y) + p(x, y)$: temos que mostrar que $f \overset{\mathcal{R}}{\sim} (f + p)$, o que equivale a encontrar $\varphi \in \mathcal{R}$ tal que $(f + p)(\varphi(x)) = f(x)$. Para simplificar o argumento, vamos supor que tanto f quanto g são germes reais analíticos. Denote a série de Taylor para $p(x, y)$ por

$$p(x, y) = a_1x^4 + a_2x^3y + a_3x^2y^2 + a_4xy^3 + a_5y^4 + ...$$

e agrupe os monômios na forma
$p(x, y) = x^2(a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2...) + y^3(a_4x + a_5y + ...)$,
o que aliás pode ser feito de várias maneiras diferentes, todas uniformemente convergentes. Substituindo,

$$g(x, y) = (f + p)(x, y) = x^2(1 + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2...) + y^3(1 + a_4x + a_5y + ...).$$

Agora, defina

$$X(x, y) = x(1 + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2...)^{\frac{1}{2}},$$

$$Y(x, y) = y(1 + a_4x + a_5y + ...)^{\frac{1}{3}},$$

onde as raízes são escolhidas como sendo germes positivos (estamos operando perto da origem!). Seja $\varphi(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$: vamos ver que $\varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^2)$. Certamente, φ é suave e preserva a origem. Observe que a jacobiana $D\varphi(0, 0)$ é

a identidade: pelo Teorema da Função Inversa, φ é um elemento de $\mathcal{R}$. Então, f é 3-determinado, já que $f(\varphi(x,y)) = f(X(x,y), Y(x,y)) = (f+p)(x,y)$.
O mesmo argumento poderia ser usado para considerar perturbações p um pouco mais gerais. Seria possível, por exemplo, acrescentar monômios múltiplos de x^3 ou x^2y, por exemplo. Assim, k-determinação pode ser tomada como um ponto de partida para formas normais ainda mais simples.
Perturbações suaves, mas não mais analíticas, exigem um pouco mais de trabalho: em vez de expandir em Taylor, é necessário aplicar o Lema de Hadamard, essencialmente uma série de Taylor com resto, para validar as definições análogas de X e Y.

Teorema 2.1: Seja $f \in M_s$ com ideal jacobiano $J_f = \langle f_{x_1}, \dots, f_{x_s} \rangle$. Suponha que $M_s^k \subseteq M_s J_f$. Então f é k-determinado em sua $\mathcal{R}$-órbita.

Demonstração: Sejam f e $f+p$ germes com mesmo k-jato, $p \in M_s^{k+1}$. O segmento de reta entre os dois germes permanece em M_s. Para $u_0 \in [0,1]$ fixo, seja $\tilde{f} = f + u_0\, p$. Veremos que germes no segmento suficientemente próximos a $\tilde{f}$ são $\mathcal{R}$-equivalentes. A tese — a equivalência entre f e $f+p$ — segue então por um argumento habitual combinando compacidade e conexidade.
A equivalência entre $\tilde{f} + up$ e $\tilde{f}$ corresponde à existência de um germe de difeomorfismo $\varphi(.,u) \in \mathcal{R}$ para o qual $(\tilde{f}+up)(\varphi(x,u)) = \tilde{f}(x)$. Lembre que u é um número pequeno. Levando em conta a exigência $\varphi(x,0) = x$, a existência de φ é equivalente a resolver a equação diferencial

$$\tilde{f}_x(\varphi(x,u))\varphi_u(x,u) + p(\varphi(x,u)) + u\, p_x(\varphi(x,u))\varphi_u(x,u) = 0.$$

Aqui, pensamos as derivadas em x como sendo vetores gradientes horizontais. Não estamos em condições de garantir existência para essa equação diferencial porque o coeficiente de φ_u não é necessariamente diferente de zero. Temos que empregar a informação algébrica sobre a perturbação p para prosseguir.
Afirmação 1: $J_{\tilde{f}} = J_f$.
Lembre que os geradores de J_f são as colunas da jacobiana $f_x(x)$. Vamos ver que $J_{\tilde{f}} \subseteq J_f$:

$$J_{\tilde{f}} = \langle f_x + u_0\, p_x \rangle \subseteq \langle f_x \rangle + \langle p_x \rangle = J_f + M_s^k,$$

pois a inclusão $p \in M_s^{k+1}$ implica $p_{x_i} \in M_s^k$. Por hipótese, $M_s^k \subseteq M_s J_f$, logo $J_{\tilde{f}} \subseteq J_f + M_s J_f = J_f$.

Falta ver que $J_f \subseteq J_{\tilde{f}}$. Seja $h \in J_f$, isto é, $h = f_x \gamma$ para um vetor $\gamma \in E_s$.

Então
$$h = (f_x + u_0\, p_x)\gamma - u_0\, p_x \subseteq J_{\tilde{f}} + \langle p_x \rangle.$$
Logo $J_f \subseteq J_{\tilde{f}} + \langle \frac{\partial p}{\partial x} \rangle \subseteq J_{\tilde{f}} + M_s\, J_f$, por hipótese. Fazendo $A = J_f$, $B = J_{\tilde{f}}$, $M = M_s$ no Lema de Nakayama como fraseado no Apêndice, concluímos que $J_f \subseteq J_{\tilde{f}}$.

Afirmação 2: $p \in M_s J_f = M_s J_{\tilde{f}}$ e $p_{x_i} \in J_f = J_{\tilde{f}}, \quad i = 1, \cdots, s.$

Tanto p quanto p_{x_i} são germes em M_s^k, como já vimos. Mas, por hipótese, $M_s^k \subseteq M_s\, J_f \subset J_f$. As igualdades seguem da primeira afirmação.

Voltamos à demonstração do teorema. Pela segunda afirmação, ainda mantendo gradientes como vetores horizontais, $p(y) = \tilde{f}_x(y)\beta(y)$ e $p_x(y) = \tilde{f}_x\, \alpha(y)$, onde β é um vetor s-dimensional e α é uma matriz $s \times s$, com elementos em M_s e E_s, respectivamente. A equação diferencial se torna

$$\tilde{f}_x(\varphi(x,u))[\,(I + u\,\alpha(\varphi(x,u)))\,\varphi_u(x,u) + \beta(\varphi(x,u))] = 0,$$

onde I é a matriz identidade $s \times s$. Para isso, basta exigir

$$(I + u\alpha(\varphi(x,u)))\,\varphi_u(x,u) = -\beta(\varphi(x,u))$$

e agora sim, para u e x suficientemente pequenos, estamos nas hipóteses do teorema de existência de soluções de EDO's, já que então $A = (I + u\alpha)$ é invertível (lembre que $\varphi(x,0) = x$). Mais, a solução da equação diferencial, nesse pequeno intervalo aberto contendo u_0 é tal que $\varphi(0,u) = 0$. Isso segue também do teorema de existência (melhor, de unicidade), uma vez que sabemos que $\beta(0) = 0$: por construção, $\beta \in M_s$.

Assim, quaisquer dois germes no intervalo ligando f a $f + p$ que sejam suficientemente próximos são $\mathcal{R}$-equivalentes. Por compacidade, um número finito de classes de equivalência cobre $[0,1]$ e, por conexidade, existe uma só: f e $f + p$ são então equivalentes. ■

Existem alternativas à hipótese de k-determinação. Se $M_s^{k-1} \subseteq J_f$, é claro que vale a hipótese $M_s^k \subseteq M_s J_f$. Se $M_s^k \subseteq M_s J_f + M_s^{k+1}$ novamente temos $M_s^k \subseteq M_s J_f$, agora pelo Lema de Nakayama. Em certos casos, essas hipóteses são mais simples de verificar.

Voltamos à Forma Local das Submersões em E_s: o caso geral será tratado no próximo capítulo.

Forma Local das Submersões em E_s: Seja $f \in M_s$ não-singular (i.e., f não pertence a M_s^2). Então f é 1-determinado.

Demonstração: Como f não é singular, alguma derivada parcial f_{x_i} não é nula na origem. Assim, seu ideal jacobiano J_f tem um elemento invertível: pela Proposição 2.1, J_f é o próprio E_s. A condição suficiente para 1-determinação, $M_s \subseteq M_s\, J_f$, se torna óbvia.
Portanto f é determinado pelo seu 1-jato $j^1 f(x) = f_x(0)x = \langle a, x\rangle$, para o vetor $a = f_x(0)$. Seja $T : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ uma transformação linear ortogonal levando o vetor canônico e_1 à normalização de a. Pela regra da cadeia, $\tilde{f} = f \circ T$ tem derivada $\tilde{f}_x(0)v = \langle a, Tv\rangle$. Assim, a derivada direcional ao longo de $v = e_1$ é não nula, e qualquer derivada direcional ao longo de vetores ortogonais a e_1 é igual a zero. Em outras palavras, $\tilde{f}_x(0)$ é um múltiplo não nulo de e_1, e o germe original f é equivalente à projeção $x \mapsto x_1$. ■

Agora, o Lema de Morse também se torna um problema de álgebra linear.

Lema de Morse: Seja $f \in M_s^2$ e $Hf(0)$ invertível. Então f é $\mathcal{R}$-equivalente a seu 2-jato.

Demonstração: Pelo Teorema 2.1, a condição suficiente para 2-determinação do germe f é dada por $M_s^2 \subseteq M_s\, J_f$. Vamos ver que $J_f = M_s$, o que certamente basta. A inclusão $J_f \subseteq M_s$ decorre de $f \in M_s^2$ pois isto implica que $f_{x_i} \in M_s$, $\forall\, i = 1, \ldots, s$. Temos que mostrar que $M_s = \langle x_1, \ldots, x_s\rangle \subset J_f = \langle f_{x_1}, \ldots, f_{x_s}\rangle$. Considere o germe dado pelo jacobiano de f, $f_x : (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^s, 0)$. Seu jacobiano na origem é a Hessiana $Hf(0)$ de f, que é invertível por hipótese. Assim, pelo Teorema de Função Inversa, f_x é um difeomorfismo local perto da origem, e existe um outro difeomorfismo local φ — a inversa de f_x — tal que $\varphi \circ f_x(x) = x$. Assim, para cada i, $x_i = \varphi_i(f_{x_1}, \ldots, f_{x_s})$. Como $\varphi_i \in M_s$, basta aplicar o Lema de Hadamard para concluir que $x_i \in J_f$. Assim, $M_s = J_f$ e f é determinado pelo seu 2-jato $(j^2 f)(x) = \frac{1}{2}\,(\!(Hf(0)x, x)\!)$ ■

A formulação habitual do Lema de Morse agora segue do teorema espectral: diagonalize $Hf(0) = Q^T DQ$, onde Q é uma matriz ortogonal e D é diagonal, que por sua vez se escreve $D = AEA$, para matrizes diagonais A e E, onde E só tem entradas iguais a), 1 ou -1, e as posições diagonais de A são estritamente positivas. Então

$$2j^2 f(x) = x^T Hf(0)x = x^T Q^T AEAQx = (AQx)^T E(AQx) = y^T Ey,$$

depois da troca de variáveis $y = AQx$.

Vamos considerar alguns exemplos de k-determinação.
1) $f(x, y) = x^3 + y^3 \Rightarrow J_f = \langle x^2, y^2\rangle \Rightarrow M_2 J_f = \langle x^3, yx^2, xy^2, y^3\rangle = M_2^3$.
Daí $M_2^3 = M_2 J_f$ e f é 3-determinado.

2) Para $f(x,y) = x^3 + y^3$, $J_f = \langle x^2, y^2 \rangle$ e, como antes, $M_2^3 \subseteq M_2 J_f$, logo f é 3-determinado.
3) Os últimos exemplos nos induzem a concluir que $f = x^r + y^r$ é r-determinado, mas isso não é verdade. Seja $r \geq 4$. Então $J_f = \langle x^{r-1}, y^{r-1} \rangle$ e

$$M_2^{2r-3} = \langle x^{2r-3}, x^{2r-4}y, x^{2r-5}y^2, \ldots, xy^{2r-4}, y^{2r-3} \rangle,$$

$$M_2^{r-2} = \langle x^{r-2}, x^{r-3}y, x^{r-4}y^2, \ldots, x^2y^{r-3}, y^{r-2} \rangle.$$

Por uma conta simples, $M_2^{2r-3} = M_2^{r-2} J_f \subset M_2^2 J_f$, e f é $(2r-4)$-determinado. Contudo o monômio $x^{r-2}y^{r-2}$ não pertence a $M_2 J_f$. Então:
$M_2^{2r-4} \not\subset M_2 J_f$ e f não é $(2r-5)$-determinado. Por exemplo $f = x^5 + y^5$ é 7-determinado mas não 5-determinado. É conveniente representar essas contas em diagramas de Siersma.
4) Seja $f \in E_1$. Então, pela Proposição 2.3, a primeira derivada não nula dá a ordem de k-determinação de f: se, por exemplo, $f(0) = 0, f_x(0) = 0$ mas $f_{xx}(0) \neq 0$, então f é 2-determinado.
5) Existem germes em E_s que não são finitamente determinados. Um exemplo é $f(x) = \exp(-1/x^2)$, que não é finitamente determinado em 0 porque todos os coeficientes de sua série de Taylor são nulos em 0. Mas existem germes analíticos simples que não são finitamente determinados. Um exemplo é $f(x) = x^2y$. É claro que $\mathcal{R}$-equivalência não muda o tipo topológico das raízes perto da origem. Entretanto, as raízes desse germe estão nos dois eixos e uma perturbação como $g(x,y) = x^2y + y^{2007}$ tem suas raízes apenas no eixo horizontal.

3
Germes vetoriais

3.1
Equivalências pelos grupos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$

Para germes de E_s, a $\mathcal{R}$-equivalência é natural: o contradomínio é, em um certo sentido, simples demais. Nesse capítulo, estudamos novas relações de equivalência em $(E_s)^t$, isto é, o conjunto de germes vetoriais tomando valores em $\mathbb{R}^t$. A generalização imediata é a *ação bilateral.* Considere, como no Capítulo II, os grupos de germes de difeomorfismos suaves que preservam a origem em $\mathbb{R}^s$ e $\mathbb{R}^t$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ e $\mathcal{L} = \mathcal{R}(\mathbb{R}^t)$. Seja $\mathcal{RL}$ o produto dos dois grupos. A ação bilateral de $\mathcal{RL}$ em $(E_s)^t$ é dada por

$$\psi \in \mathcal{L}, \varphi \in \mathcal{R}, f \in (E_s)^t \mapsto \psi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

De fato, a definição acima é a de uma ação de grupo. Como sempre, elementos na mesma órbita são equivalentes, nesse caso, $\mathcal{RL}$-equivalentes. As técnicas do primeiro capítulo, entretanto, não bastam para estudar a ação de $\mathcal{RL}$. Outras ações vão se revelar mais simples, e esse capítulo trata delas. Vamos considerar os seguintes grupos de germes de difeomorfismos por composição:

$$\mathcal{K} = \{H \in (E_{s+t})^{s+t} \mid H(x,y) = (\varphi(x), \psi(x,y)), \varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s), \psi(x,0) = 0\},$$
$$\mathcal{C} = \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{K} \mid \varphi = I_s\}.$$

O grupo $\mathcal{K}$ age sobre $(E_s)^t$ como

$$\begin{aligned} A : \mathcal{K} \times (E_s)^t &\to (E_s)^t \\ (H = (\varphi, \psi), f) &\mapsto g(x) = H \cdot f = \psi(\varphi^{-1}(x), f(\varphi^{-1}(x))) \end{aligned}$$

Note que, restringindo para $H \in \mathcal{C}$, obtemos uma ação de $\mathcal{C}$ sobre $(E_s)^t$. Essa vez, vale a pena mostrar que a construção acima de fato define uma ação.

Proposição 3.1: A função A é uma ação de $\mathcal{K}$ sobre $(E_s)^t$ (e, fazendo $\varphi = I_s$, a identidade em $\mathbb{R}^s$, uma ação do grupo $\mathcal{C}$).

Demonstração: Sejam: $H_1, H_2, \in \mathcal{K}$ e $g \in (E_s)^t$. Vamos nos limitar a mostrar que
$(H_2 \circ H_1) \cdot g = H_2 \cdot (H_1 \cdot g)$ — lembre que $H \cdot g = \psi(\varphi^{-1}, g \circ \varphi^{-1})$.
É fácil ver que, para $H_i = (\varphi_i, \psi_i)$, temos $H_2 \circ H_1 = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$, onde $\tilde{\varphi} = \varphi_2 \circ \varphi_1$ e $\tilde{\psi}(x, y) = \psi_2(\varphi_1(x), \psi_1(x, y))$. Temos que comparar duas expressões:

$$\begin{aligned} H_2 \cdot (H_1 \cdot g) = H_2 \cdot \left[\psi_1(\varphi_1^{-1}, g \circ \varphi_1^{-1})\right] &= \psi_2(\varphi_2^{-1}, g \circ \varphi_2^{-1}) = \\ &= \psi_2(\varphi_2^{-1}, \psi_1(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}, g \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1})) \quad \text{e} \\ (H_2 \circ H_1) \cdot g = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}^{-1}, g \circ \tilde{\varphi}^{-1}) &= \psi_2(\varphi_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1}, \psi_1, (\tilde{\varphi}^{-1}, g \circ \tilde{\varphi}^{-1})) = \\ &= \psi_2(\varphi_2^{-1}, \psi_1(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1}, g \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1})), \end{aligned}$$

de onde concluímos que $H_2 \cdot (H_1 \cdot g) = (H_2 \circ H_1) \cdot g$ ■

É fácil ver que $\mathcal{C}$ é subgrupo normal de $\mathcal{K}$ e que cada $k \in \mathcal{K}$ se escreve de maneira única como $k = r \cdot c$ com $r \in \mathcal{R}$ e $c \in \mathcal{C}$. Assim, a $\mathcal{K}$-órbita pode ser expressa como o conjunto alcançado pela ação conjunta dos dois grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$. Para referência futura, convém explicitar as equivalências associadas às duas ações. Dois germes $f, g \in (E_s)^t$ são respectivamente $\mathcal{C}$-equivalentes e $\mathcal{K}$-equivalentes quando cumprem as seguintes condições:

$$f \overset{\mathcal{C}}{\sim} g \Leftrightarrow \exists H = (I_s, \psi) \in \ \mathcal{K} : g(x) = \psi(x, f(x)),$$

$$f \overset{\mathcal{K}}{\sim} g \Leftrightarrow \exists H = (\varphi, \psi_x) \in \ \mathcal{K} : (g \circ \varphi)(x) = \psi(x, f(x)).$$

Seja $f \in (E_s)^t$. O *ideal de coordenadas* I_f do germe f é gerado pelas coordenadas $I_f = \langle f_1, \ldots, f_t \rangle \subset E_s$. O teorema a seguir oferece uma caracterização algébrica para a $\mathcal{C}$-órbita. Note que a ação de $\mathcal{C}$ pode ser interpretada como uma ação à esquerda a parâmetros.

Teorema 3.1 (Linearizando a ação à esquerda): Para $f, g \in (E_s)^t$, as seguintes afirmações são equivalentes.
(i) Os germes f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes.
(ii) Os ideais de coordenadas são iguais, $I_f = I_g$.
(iii) Existe uma matriz $t \times t$ invertível $Q(x)$, com entradas $q_{ij}(x) \in E_s$, tal que $f(x) = Q(x) \cdot g(x)$.

Demonstração:
Começamos com (i) $\Rightarrow$ (ii).
A $\mathcal{C}$-equivalência $f \overset{\mathcal{C}}{\sim} g$ é a existência de $H \in \mathcal{C}$, isto é, $H(x, y) = (x, \psi(x, y))$ com $\psi(x, 0) = 0$ tal que $(x, f(x)) = H(x, g(x)) = (x, \psi(x, g(x)))$.

Como para cada coordenada, $\psi_i(x,0) = 0$ $(i = 1, \cdots, t)$, podemos aplicar (uma versão parametrizada do) o Lema de Hadamard em cada ψ_i:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x,y) \\ \vdots \\ \psi_t(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(x,y) \cdots \alpha_{1t}(x,y) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \alpha_{t1}(x,y) \cdots \alpha_{tt}(x,y) \end{pmatrix}_{t\times t} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} = \alpha(x,y) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix},$$

onde $\alpha_{ij}(x,y) \in E_s$ e y_i são as coordenadas em $\mathbb{R}^t$. A parametrização, aliás, pode ser inserida sem dificuldade na demonstração do Lema de Hadamard sem parâmetros.

Como $f(x) = \psi(x, g(x))$, temos $f(x) = \alpha(x, g(x))g(x)$, mostrando que $I_f \subseteq I_g$. Simetricamente, $I_g \subseteq I_f$.

Agora, vamos ver (ii)$\Rightarrow$ (iii). A igualdade $I_f = I_g$ implica a existência de matrizes $t \times t$ A e B relacionando os geradores dos dois ideais, $f = Bg$ e $g = Af$. Falta ver que, a partir disso, existe uma matriz *invertível* Q tal que $f = Qg$. Note que $(I - AB)g = 0$, logo basta encontrar uma matriz C para a qual $Q = C(I - AB) + B$ seja invertível.

Afirmação: Sejam A, B matrizes reais $t \times t$. Então existe C tal que a matriz $Q = [C(I - AB) + B]$ é invertível.

Para ver isso, sejam $a, b : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^t$ as aplicações lineares correspondentes respectivamente às matrizes A e B em relação à base usual. Escolha uma base $\{e_1, \cdots, e_t\}$ de $\mathbb{R}^t$ tal que $b(e_i) = 0$ para $r + 1 \leq i \leq t$, onde r é o posto de B. É facil ver que $b(e_1), \cdots, b(e_r)$ são linearmente independentes e formam um conjunto que pode ser completado a uma base do contradomínio $\{b(e_1), \cdots, b(e_r); e'_{r+1}, \cdots, e'_t\}$.

Seja $c : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}^t$ definida por $c(e_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } 1 \leq i \leq r \\ e'_i \text{ se } r + 1 \leq i \leq t \end{cases}$

A aplicação linear $q = c(1 - ab) + b$ tem duas propriedades que a tornam invertível. Sobre os vetores no núcleo de b, q age injetivamente, preenchendo um subespaço complementar à imagem de b. Por outro lado, sobre os vetores que geram injetivamente a imagem de b, u age como a própria b, a menos de uma perturbação que pertence à imagem de c. De forma simbólica, existem escalares α_{ij} para os quais

$$q(e_i) = \begin{cases} b(e_i) + \sum\limits_{j=r+1}^{t} \alpha_{ij} e'_i \text{ se } 1 \leq i \leq r, \\ e'_i \text{ se } r + 1 \leq r \leq t. \end{cases}$$

A matriz Q associada à transformação q é a matriz procurada.

Para completar a demonstração de (ii) $\Rightarrow$(iii), basta aplicar a afirmação acima para as matrizes $A(0)$ e $B(0)$ relacionando as coordenadas de f e as de g no ponto $x = 0$, obtendo uma matriz C. Agora, defina $Q(x) = C[I - A(x)B(x)] + B(x)$, invertível em $x = 0$, e, por continuidade, ainda invertível para x pequenos, que é o que basta quando tratamos de germes. Por construção, $f(x) = Q(x)g(x)$.
Finalmente, vejamos (iii)$\Rightarrow$ (i). Considere $H(x, y) = (x, Q(x)y)$. Certamente, $Q(x)0 = 0$. Falta ver que H é um germe de difeomorfismo na origem. Derivando, $DH(0, 0)(r, s) = (r, Q(0)s)$, e como $Q(0)$ é invertível, $DH(0, 0)$ é invertível. Pelo Teorema da Função Inversa, H é um difeomorfismo local em zero. ■
Os resultados acima implicam numa caracterização simples da $\mathcal{K}$-equivalência.

Proposição 3.2:
Sejam $f, g \in (E_s)^t$. Então $f \overset{K}{\sim} g$ se e somente se $\exists\varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s) : I_{f\circ\varphi} = I_g$.
Demonstração: Por definição, $f \overset{K}{\sim} g$ quer dizer $\exists\varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s) : (f \circ \varphi) \overset{\mathcal{C}}{\sim} g$. Agora é só aplicar (ii) do teorema anterior. ■

Vamos considerar alguns exemplos simples. Sejam $f, g \in (E_2)^2$ dados por $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ e $g(x, y) = (x^2, y^2)$. Vamos ver que $f \overset{\mathcal{RL}}{\sim} g$ e $f \overset{K}{\sim} g$ mas $f \overset{\mathcal{C}}{\sim} g$ é falso.
De fato, sejam $\varphi(x, y) = (x + y, x - y)$ e $\psi(x, y) = (2x + 2y, x - y)$, com jacobianos na origem dados por

$$D\varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } D\psi(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ambos os jacobianos são invertíveis em $(0, 0)$ e portanto pelo Teorema da Função Inversa ψ e φ induzem germes de difeomorfismos. Para mostrar que $f \overset{\mathcal{RL}}{\sim} g$, é só verificar se $(f \circ \varphi)(x, y) = (\psi \circ g)(x, y)$, uma conta simples.
Temos também que $f \overset{K}{\sim} g$, como veremos explicitamente. Uma rotação anti-horária de $\pi/4$ no domínio de f (isto é, uma composição à direita), transforma g no germe $\mathcal{C}$-equivalente $\tilde{g}(x, y) = (x^2 + y^2, (x^2 - y^2)/2)$. A transformação $T(x, y) = (x, y - x/2)$ no contradomínio de $\tilde{g}$ recupera f: $f = T \circ g$, e assim f e g são $\mathcal{K}$-equivalentes.
Finalmente, $f \overset{\mathcal{C}}{\sim} g$ se e somente se

$$I_f = \langle f_1(x, y), f_2(x, y)\rangle = \langle x^2 + y^2, xy\rangle = I_g = \langle g_1(x, y), g_2(x, y)\rangle = \langle x^2, y^2.$$

Mas xy não pertence ao ideal $\langle x^2, y^2\rangle$. De fato, ao derivar em x e y, uma igualdade da forma $xy = \alpha(x, y)x^2 + \beta(x, y)y^2$ implicaria na função constante 1 do lado esquerdo e uma função do lado direito que se anula na origem.
Sejam agora $f, g \in (E_2)^2$ dados por $f(x, y) = (x^2, 0)$ e $g(x, y) = (x^2, x^3)$. Pelo Teorema 3.1(ii), os dois germes são $\mathcal{C}$-equivalentes. Vamos ver que, entretanto,

eles não são $\mathcal{RL}$-equivalentes. Note que as imagens de f e g são respectivamente o semi-eixo positivo horizontal e a cúbica (x^2, x^3). A remoção da origem das duas imagens dá origem a subconjuntos topologicamente diferentes perto da origem, o que não aconteceria se os dois germes fossem $\mathcal{RL}$-equivalentes.

Resumindo, tanto a equivalência por $\mathcal{C}$ quanto por $\mathcal{RL}$ implicam a equivalência por $\mathcal{K}$, mas as implicações opostas não são necessariamente verdadeiras.

3.2
A k-determinação por $\mathcal{K}$-equivalência:

Assim como já estudamos o espaço tangente à órbita pela ação de $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ em E_s, passamos a considerar espaços tangentes da ação por $\mathcal{K}$. Começamos pela definição, e depois, derivando uma curva numa $\mathcal{K}$-órbita, vamos nos convencer de sua adequação.

O *espaço tangente* T_f^K *à $\mathcal{K}$-órbita de* $f \in (E_s)^t$ é o E_s-módulo $T_f^K = \bar{J}_f + \bar{I}_f$, onde

$$\bar{J}_f = \{f_x(x)\alpha : \alpha \in E_s\},$$

$$\bar{I}_f = I_f(E_s)^t = \{\beta f^T : \beta \text{ matriz } t \times t,\ \beta_{i,j} \in E_s; f^T = (f_1, \cdots, f_t)^T\}.$$

Como sempre, f_x é a matriz jacobiana $t \times s$ que tem por linhas os gradientes das coordenadas f_i. O ideal $\bar{J}_f$ é uma versão vetorial natural do ideal jacobiano. Já $\bar{I}_f$ é o ideal de germes em $(E_s)^t$ onde *cada coordenada* é uma combinação linear, com coeficientes dados por elementos de E_s, das funções coordenadas f_i.

Vamos ver que T_f^K de fato é o conjunto de todos os vetores tangentes a curvas na $\mathcal{K}$-órbita passando por f. Considere a curva $\psi(\varphi(x,u), f(\varphi(x,u)), u)$, parametrizada por $u \in \mathbb{R}$, onde $\varphi(.,u)$ é uma curva em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ com $\varphi(.,0) = I_s$ e $\psi(x,y,u)$ é uma família parametrizada por (x,u) em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^t)$, com $\psi(x,.,0) = I_t$ e $\psi(x,0,u) = 0$. Derivando a curva em u, obtemos

$$\psi_x(\varphi, f(\varphi), u)\varphi_u + \psi_y(\varphi, f(\varphi), u) f_x(\varphi)\varphi_u + \psi_u(\varphi, f(\varphi), u),$$

onde φ e φ_u são sempre avaliados no ponto (x,u) e, que, para $u = 0$, vale

$$\psi_x(x, f(x), 0)\varphi_u(x,0) + \psi_y(x, f(x), 0) f_x(x)\varphi_u(x,0) + \psi_u(x, f(x), 0)$$

$$= f_x(x)\varphi_u(x,0) + \psi_u(x, f(x), 0),$$

já que $\psi_x(x, f(x), 0) = 0$ e $\psi_y(x, f(x), 0) = I_t$. A parcela $f_x(x)\varphi_u(x, 0)$ corresponde a $\bar{J}_f$. Para (x, u) fixos, cada coordenada de $\psi_u(x, y, 0)$ está em M_t, logo, por Hadamard na segunda variável, $\psi_u(x, f(x), 0) \in \bar{I}_f$. Mais precisamente, $\psi_u(x, y, 0) = \sum_i \alpha_i(x, y, 0)y_i$, logo $\psi_u(x, f(x), 0) = \sum_i \alpha_i(x, f(x), 0)f_i(x)$, e, por mais degenerado que seja o germe f na origem, as funções $e_i(x) = \alpha_i(x, f(x), 0)$ podem ser arbitrárias. Mais uma vez, não há restrições sobre os coeficientes: todo elemento de T_f^K é vetor tangente de alguma curva.
A $\mathcal{RL}$-equivalência não admite cálculos tão simples. Uma curva $\psi(f(\varphi(x, u)), u)$ implicaria num vetor tangente $f_x(x)\varphi_u(x, 0) + \psi_u(f(x), 0)$: a primeira parcela recebe o mesmo tratamento do parágrafo anterior, mas a segunda, ao ser expandida pelo lema de Hadamard, não dá origem a funções $e_i = \alpha_i(f(x), 0)$ arbitrárias, já que teriam que ser constantes em níveis de f. Essa é a dificuldade essencial ao lidar com $\mathcal{RL}$-equivalência.

Vamos ver um exemplo simples. Seja $f(x, y) = (f_1, f_2) = (x^2 + y^2, x^2y)$. Vamos calcular T_f^K. Os geradores do submódulo jacobiano $\bar{J}_f$ são os vetores

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = (2x, 2xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = \left(2y, x^2\right),$$

que devem ser multiplicados por coeficientes em E_2. Os geradores de $\bar{I}_f$ são os vetores $\{(f_1, 0), (0, f_1), (f_2, 0), (0, f_2)\}$. Assim,

$$T_f^K = \{(x, xy), (2y, x^2), (x^2 + y^2, 0), (0, x^2 + y^2), (x^2y, 0), (0, x^2y)\} \cdot E_2.$$

Como no primeiro capítulo, agora é possível demonstrar uma condição suficiente para k-determinação por $\mathcal{K}$-equivalência.

Teorema 3.2 (k-determinação por $\mathcal{K}$-equivalência): Seja $f \in M_{s,t}$ satisfazendo $M_{s,t}^k \subseteq M_s T_f^K$. Então f é k-determinado por $\mathcal{K}$-equivalência.

Demonstração: A demonstração segue a do Teorema 1.1. Suponha f satisfazendo as hipóteses, tome uma perturbação arbitrária $p \in M_{s,t}^{k+1}$ e considere o segmento $F(x, u) = f(x) + up(x)$, $u \in [0, 1]$, ligando f a $f+p$. Basta mostrar que germes suficientemente próximos no segmento são $\mathcal{K}$-equivalentes. Isso implica o resultado geral, como antes, por um argumento combinando compacidade e conexidade, que não será repetido. Começamos pelos ingredientes algébricos. Para $u_0 \in [0, 1]$ fixo, defina $F(x, u_0) = \tilde{f} = f + u_0 p$.

Afirmação 1: $T_f^K = T_{\tilde{f}}^K$.
(i) $T_{\tilde{f}}^K \subseteq T_f^K$. Como $p \in M_{s,t}^{k+1}$, $T_{\tilde{f}}^K \subseteq T_f^K + M_{s,t}^{k+1}$, que obviamente está contido em $T_f^K + M_{s,t}^k$. Pela hipótese do teorema, $T_f^K + M_{s,t}^k \subseteq T_f^K + M_s T_f^K = T_f^K$.

(ii) $T_f^K \subseteq T_{\tilde{f}}^K$.
O elemento típico de $T_f^K = \bar{J}_f + \bar{I}_f$ é da forma $f_x\alpha + \beta f$, que pode ser escrito como $\tilde{f}_x\alpha + \beta\tilde{f} - u_0 p_x\alpha - u_0\beta p$, onde $\alpha_i, \beta_{ij} \in E_s$, para $i, j = 1, \ldots, p$. Assim, $T_f^K \subseteq \bar{J}_{\tilde{f}} + \bar{I}_{\tilde{f}} + M_{s,t}^k + M_{s,t}^{k+1} = \bar{J}_{\tilde{f}} + \bar{I}_{\tilde{f}} + M_{s,t}^k$.
Da hipótese do teorema, então, $T_f^K \subseteq T_{\tilde{f}}^K + M_s T_f^K$, logo, pelo Lema de Nakayama,
$T_f^K \subseteq T_{\tilde{f}}^K$.

O passo seguinte é um pouco diferente de sua contrapartida no Teorema 1.1.

Afirmação 2: $p = F_u \in M_s T_F^K E_{s+1}$ (u é a variável indexada por $s+1$).
Observe que $M_s T_F^K = M_s T_{f+up}^K$. Temos então
$p = F_u \in M_{s,t}^{k+1} \subseteq M_{s,t}^k \subseteq M_s T_{\tilde{f}}^K$, por hipótese.
Da relação $F - \tilde{f} = up$, obtemos $\bar{I}_{\tilde{f}} \subseteq \bar{I}_F + M_{s+1} M_{s,t}^{k+1}$ e, de $F_x - \tilde{f}_x = up_x$, $\bar{J}_{\tilde{f}} \subseteq \bar{J}_F + M_{s+1} M_{s,t}^k$.
Assim, $T_{\tilde{f}}^K = \bar{J}_{\tilde{f}} + \bar{I}_{\tilde{f}} \subseteq \bar{J}_F + \bar{I}_F + M_{s+1} M_{s,t}^k = T_F^K + M_{s+1} M_{s,t}^k$, e obtemos, pela Afirmação 1,
$p \in M_{s,t}^{k+1} \subseteq M_s T_{\tilde{f}}^K \subseteq M_{s,t}^k \subseteq M_s\left(T_F^K + M_{s+1} M_{s,t}^k\right) = M_s T_F^K + M_{s+1} M_{s,t}^{k+1}$.

Aplicando Nakayama com $A = M_s^{k+1}, B = M_s T_F^K$ e $M = M_{s+1}$,

$$F_u \in M_s T_F^K E_{s+1}.$$

Voltamos à demonstração do teorema. Pela caracterização de $\mathcal{K}$-equivalência dada na proposição acima e o Teorema 3.1, devemos procurar uma curva de difeomorfismos $\varphi(., u) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ e uma curva de matrizes invertíveis $Q(x, u)$ para as quais $F(\varphi(x, u), u) = Q(x, u) F(x, u_0)$.
As duas curvas serão obtidas a partir de equações diferenciais. Para $u = u_0$, precisamos ter $\varphi(x, u_0) = x$, $Q(x, u_0) = I$.
Derivando $Q^{-1}(x, u) F(\varphi(x, u), u) = F(x, u_0)$ na variável u, obtemos

$$(Q^{-1})_u(x, u) F(Q^{-1})_u + Q^{-1}(x, u)\big((F_x)(\varphi, u)\varphi_u + F_u(\varphi, u)\big) = 0,$$

onde tanto φ quanto φ_u estão sempre avaliados em (x, u). Para derivar a inversa de Q, começamos por $Q^{-1}(x, u) Q(x, u) = I$, que dá

$$(Q^{-1})_u(x, u) = -Q^{-1}(x, u) Q_u(x, u) Q^{-1}(x, u).$$

Depois de uma simplificação óbvia, a equação diferencial se torna

$$-Q_u(x, u) Q^{-1}(x, u) F(\varphi, u) + (F_x)(\varphi, u)\varphi_u + F_u(\varphi, u) = 0.$$

Agora, usamos a informação algébrica. Pela Afirmação 2, $p = F_u \in M_s T_F^K E_{s+1}$, logo existem α e β tais que $p = F_x\alpha + \beta F$. Mais precisamente, temos

$$F_u(\varphi, u) = p(\varphi, u) = F_x(\varphi, u)\alpha(\varphi, u) + \beta(\varphi, u)F(\varphi, u),$$

onde as coordenadas do vetor α estão em M_s e β é uma matriz $t \times t$. Substituindo na equação diferencial e agrupando adequadamente,

$$\big(- Q_u(x, u)Q^{-1}(x, u) + \beta(\varphi, u)\big)F(\varphi, u) + (F_x)(\varphi, u)\big(\varphi_u + \alpha(\varphi, u)\big) = 0,$$

e a igualdade se verifica se exigirmos

$$Q_u(x, u) = \beta(\varphi(x, u), u)Q(x, u), \quad \varphi_u(x, u) = -\alpha(\varphi(x, u), u).$$

Com as condições iniciais prescritas acima para $u = u_0$, as equações diferenciais satisfazem as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade para EDO's. Falta ver que $\varphi(0, u) = 0$, que, como no primeiro capítulo, segue da unicidade da solução, combinado com o fato que $\alpha(0, u) = 0$. ■

Assim como para o Teorema 2.1, existem hipóteses mais fracas para o Teorema 3.2 que são de verificação mais simples. Por exemplo, um germe $f \in M_{s,t}$ tal que $M_{s,t}^k \subseteq T_f^K$ é $(k + 1)$-determinado por $\mathcal{K}$-equivalência. O próprio Teorema 2.1 é um caso particular da demonstração do Teorema 3.2, como se vê pelo enunciado abaixo.

Corolário: Seja $f \in M_{s,t}$ tal que $M_{s,t}^k \subseteq M_s\bar{J}_f \Rightarrow f$ é k-determinado por $\mathcal{R}$-equivalência.

Vamos mostrar que $f(x, y) = (x^2, y^2)$ é 2-determinado por $\mathcal{K}$-equivalência. É fácil ver que $T_f^K = \{(x, 0), (0, y), (y^2, 0), (0, x^2)\}$. Daí, é claro que

$$M_{2,2}^2 = \langle (x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\rangle \cdot E_2 \subseteq M_s T_f^K.$$

Terminamos a seção com duas aplicações. A $\mathcal{K}$-*codimensão* de $f \in (E_s)^t$ é a dimensão do espaço vetorial (quociente) $\dfrac{(E_s)^t}{T_f^K}$.

Proposição 3.3: Um germe de $\mathcal{K}$-codimensão finita é $\mathcal{K}$-finitamente determinado.

Demonstração:
É só ver que se f tem $\mathcal{K}$-codimensão finita então existe $k \in$ tal que $M_{s,t}^k \subseteq T_f^K$, o que implica que f é $(k + 1)$-determinado por $\mathcal{K}$-equivalência. Considere a

sequência decrescente de E_s-módulos:

$$(E_s)^t \supset T_f^K + M_{s,t} \supset \cdots \supset T_f^K + M_{s,t}^k \supset T_f^K + M_{s,t}^{k+1} \supset \cdots$$

A hipótese de $\mathcal{K}$-dimensão finita implica que a sequência estabiliza a partir de um certo k, $T_f^K + M_{s,t}^k = T_f^K + M_{s,t}^{k+1}$. Então $M_{s,t}^k \subseteq T_f^K + M_s M_{s,t}^k = T_f^K + M_{s,t}^{k+1}$, que, por Nakayama, dá $M_{s,t}^k \subseteq T_{f_0}^K$ e pelo Teorema 3.2 f é $(k+1)$-determinado por $\mathcal{K}$-equivalência.

Finalmente, vamos retomar a forma local das submersões em seu caso geral.

Proposição 3.4 (Forma local das submersões em $(E_s)^t$): Para $f \in M_{s,t}$ com $f_x(0)$ sobrejetor, existe $\varphi \in \mathcal{R}$ tal que $f \circ \varphi(x) = (x_1, \cdots, x_t)$. Em outras palavras, localmente f se comporta como uma projeção.

Demonstração: Vamos usar o corolário do Teorema 3.2. A 1-determinação por $\mathcal{R}$-equivalência segue de $M_s \subseteq M_s J_f$. Por hipótese, um subconjunto apropriado das colunas de $f_x(0)$ gera $\mathbb{R}^t$, e, por continuidade, para o mesmo subconjunto de colunas de $f_x(x)$ o mesmo ainda vale para x suficientemente pequeno. Assim, podemos escrever os vetores $\{e_1, \cdots, e_t\}$ da base canônica de $\mathbb{R}^t$ como

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11}(x)\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x) + \cdots + \alpha_{1t}(x)\frac{\partial f}{\partial x_{i_t}}(x) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ e_t &= \alpha_{t1}(x)\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x) + \cdots + \alpha_{tt}(x)\frac{\partial f}{\partial x_{i_t}}(x) \end{aligned}$$

ou, em linguagem matricial, $I_d^t = \alpha(x) \cdot D_f(x)$. Assim, $\bar{J}_f = (E_s)^t$ e obtemos $M_{s,t} = M_s \bar{J}_f$.
Agora, é questão de alterar o domínio do 1-jato de f por uma transformação linear de modo a obter a representação habitual em termos de vetores canônicos, seguindo a composição à direita construída na demonstração da forma local das submersões em M_s no capítulo 1. ■

É importante notar que qualquer conjunto de variáveis do domínio que seja associado a uma base de colunas independentes do jacobiano $f_x(0)$ pode ser empregado na descrição da forma normal da submersão.

4
Dobras e cúspides: limites da teoria

4.1
Perturbações e desdobramentos

Nesse capítulo, voltamos a considerar a $\mathcal{RL}$-equivalência, para situações especiais. Como veremos, para elaborar a Teoria de Mather em sua plenitude, é necessária a inclusão de ferramentas substanciais.

Sejam $u \in \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^s$. Seja $f_0 \in M_{s,t}$. Então o conjunto das *perturbações f do germe f_0* é

$$P^p(f_0) = \left\{ f : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^t, 0) \middle| f(0,x) = f_0(x) \right\}$$

e o conjunto dos *desdobramentos F* de f_0 é

$$D^p(f_0) = \left\{ F : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t, 0) \middle| F(u,x) = (u, f(u,x)); f(0,x) = f_0(x) \right\}.$$

Assim, $f \in P^p(f_0)$ e $F \in D^p(f_0)$ são germes, respectivamente, de uma p-perturbação e de um p-desdobramento de f_0.
Perturbações são famílias a vários parâmetros (as variáveis em $\mathbb{R}^p$) de uma função recuperada ao fazer todos os parâmetros iguais a zero. Vamos ver um exemplo simples do emprego dessa idéia.

Lema 4.1 (Forma Local das Submersões Parametrizada): Seja $f_0 \in (E_s)^t$ submersão em 0 e $f \in P^p(f_0)$, dado por $(u,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s$. Considere t vetores da base canônica, associados a variáveis no domínio cujas derivadas parciais são colunas independentes na jacobiana $D_x f_0(0)$. Seja V o subespaço gerado por esses vetores. Então é possível reduzir f à forma normal de uma submersão igual à identidade em V, por uma troca de variáveis em V que depende suavemente das variáveis restantes (em particular, dos parâmetros).

Demonstração: As t colunas de $D_x f_0(0)$ associadas a V também estão na jacobiana $D_{u,x} f(0,0)$ da perturbação f. Assim f também é uma submersão, que tem forma normal dada pela identidade quando restrita a V, obtida por uma troca de variáveis $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^{p+s})$. Então $f(u,x) = \pi\varphi_2(u,x)$, onde π é a projeção ortogonal sobre V. Daí, é fácil ver que $\varphi_2(0,.) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ o que se mantém para $\varphi_2(u,.)$, com u próximos de zero. $\blacksquare$.

As equivalências entre desdobramentos acompanham as definições correspondentes para germes, levando em conta o parâmetro do desdobramento. Assim, a *$\mathcal{RL}$-equivalência entre desdobramentos $F_1, F_2 \in D^p(f_0)$ de mesma dimensão p de um mesmo germe f_0* implica na existência de conjugações no domínio e contradomínio por difeomorfismos em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s)$ e $\mathcal{R}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^t)$ respectivamente que dependem trivialmente do parâmetro. Mais precisamente,

$$F_1 \overset{\mathcal{RL}}{\sim} F_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\ \Phi_s, \Phi_t \text{ desdobramentos da identidade}:\ F_1 \circ \Phi_s = \Phi_t \circ F_2,$$

onde os desdobramentos da identidade $\Phi_s \in M_{p+s,p+s}$ e $\Phi_t \in M_{p+t,p+t}$ satisfazem $\Phi_s(u,x) = (u, \phi_s(u,x))$, com $\phi_s(0,x) = x$ e $\Phi_t(u,y) = (u, \phi_t(u,y))$, com $\phi_t(0,y) = y$.

Vamos ver um exemplo relativamente simples. Dado $f_0(x) = x^2 \in M_1$, considere o desdobramento constante $F_1(u,x) = (u, x^2)$ e o desdobramento $F_2(u,x) = (u, x^2 + ux)$.

Tomando as deformações da identidade $\Phi_1(u,x) = (u, x + u/2)$ e $\Phi_2(u,x) = (u, y + u^2/4)$, vê-se que F_1 e F_2 são $\mathcal{RL}$-equivalentes.

O *posto* r de um germe é o posto de sua jacobiana na origem. Um germe f é *submersivo* quando seu posto é igual à dimensão do contradomínio. Para um germe f submersivo, o nível zero, denotado por V_f, é uma subvariedade passando pela origem, pela Forma Local das Submersões.

É frequente considerar germes $f_0 \in (E_s)^t$ de posto 0. Se o germe tem posto positivo, o processo descrito na proposição seguinte — a decomposição de Lyapunov-Schmidt — permite reduzir o estudo de sua forma normal para um germe de posto 0 tomando valores num espaço de dimensão mais baixa.

Proposição 4.1 (Decomposição de Lyapunov-Schmidt): Seja $F \in (E_S)^T$ de posto p. Então F é $\mathcal{RL}$-equivalente a um desdobramento $f \in D^p(f_0)$ de um germe $f_0 \in (E_{S-p})^{T-p}$ de posto nulo. Mais explicitamente, existem trocas de variável em torno da origem no domínio e contradomínio para as quais $\phi \circ F \circ \psi^{-1} = (I, f)$, onde as derivadas na origem de f nas últimas $S - p$ variáveis é nulo.

Demonstração: O argumento, tradicional, decompõe o domínio em dois subespaços complementares, $\mathbb{R}^S = U \oplus V$, onde V é o núcleo da jacobiana $DF(0)$ e U é um complemento arbitrário. O contradomínio, por sua vez, decompõe em $Z \oplus W$, onde Z é a imagem de $DF(0)$ é W é um complemento arbitrário. As decomposições induzem projeções naturais $\pi_U : \mathbb{R}^S \to U$,

$\pi_V : \mathbb{R}^S \to V$, $\pi_Z : \mathbb{R}^T \to Z$ e $\pi_W : \mathbb{R}^T \to W$. A própria função F se escreve agora como $F(u,v) = (\pi_Z F(u,v), \pi_W F(u,v))$, numa notação natural (mais precisamente, $x \in \mathbb{R}^S$ decompõe de forma única, $x = u + v$, para $u = \pi_U x, v = \pi_V x$).

Fazendo composições com isomorfismos lineares no domínio e contradomínio, podemos supor sem perda que $U = \mathbb{R}^p$, $V = \mathbb{R}^{S-p}$, $Z = \mathbb{R}^p$ e $W = \mathbb{R}^{T-p}$. Por construção, a restrição de $DF(0)$ é um isomorfismo linear entre U e Z, logo $F_1 = \pi_Z \circ F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{S-p} \to \mathbb{R}^p$ é uma submersão.

Assim, compondo com uma troca de variáveis no domínio, podemos supor $F_1(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_S) = (x_1, \ldots, x_p,)$.

A troca de variáveis pode ter alterado as coordenadas restantes, $F_2 = \pi_Z \circ F$, mas as derivadas na origem dessas coordenadas nas variáveis $x_{p+1}, \ldots, x_S$ têm que ser nulas, se não o posto de $DF(0)$ seria maior do que p. A demonstração está completa: considere o germe $f_0(x_{p+1}, \ldots, x_S)) = F_2(0, x_{p+1}, \ldots, x_S))$, de posto nulo, e sua perturbação $f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_S) = (x_1, \ldots, x_p, F_2(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_S)$. ■

Considere o estudo dos níveis de uma função $F : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^T$ perto da origem. As trocas de variáveis na decomposição de Lyapunov-Schmidt reduzem o problema ao estudo dos níveis de uma função f mais simples, ou melhor, ao estudo de uma família de funções — uma perturbação de um germe f_0 de posto nulo — parametrizadas pelas variáveis $x_1, \ldots, x_p$. Equações da forma $f(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_S) = b \in \mathbb{R}^{T-p}$ são chamadas de *equações de bifurcação* em Matemática Aplicada. Como exemplo simples, considere um germe $\tilde{F}$ de $M_{2,2}$ de posto 1. Então, $\tilde{F}$ é $\mathcal{RL}$-equivalente à função $F(x,y) = (x, f(x,y))$, onde $f(0,y)$ tem 1-jato nulo.

4.2 Dobras

Considere o germe $\tilde{F} \in M_{2,2}$ de posto 1, dotado dos seguintes propriedades geométricas. Vamos supor que o determinante da jacobiana $D\tilde{F}(x,y)$ tem 0 por valor regular, o que assegura que o conjunto crítico $\tilde{C}$ de $\tilde{F}$ é uma curva regular pela origem. Vamos supor também que o núcleo de $D\tilde{F}(0,0)$ não seja tangente a $\tilde{C}$ na origem. Um germe que satisfaz essas condições é chamado de *dobra*.

Pelo resultado do final da seção anterior, $\tilde{F}$ é $\mathcal{RL}$-equivalente ao germe $F(x,y) = (x, f(x,y))$, onde $f(0,y)$ tem 1-jato nulo. As duas propriedades geométricas foram formuladas de maneira invariante, e justamente por isso, continuam valendo para F. Nesse caso, o conjunto crítico C é dado por $\det DF(x,y) = f_y(x,y) = 0$, e a primeira propriedade quer dizer que o gradiente $(f_{xy}(0,0), f_{yy}(0,0))$ é não nulo. Por outro lado, o núcleo de $DF(0,0)$ é o vetor $(0,1)$, e a segunda propriedade implica $f_{yy}(0,0) \neq 0$.

Teorema 4.1 (Forma Normal da Dobra): Toda dobra é $\mathcal{RL}$-equivalente à forma normal $\hat{F}(x,y) = (x, y^2)$.

Demonstração: Já vimos que a dobra $\tilde{F}$ é $\mathcal{RL}$-equivalente a um germe

$$F(x,y) = (x, f(x,y)) = (x, m(x,y) + y^2(c + n(x,y))),$$

onde $m, n \in M_2$ e c é uma constante não nula. Nosso próximo passo é livrar-se de todos os termos lineares em y na expansão de $f(x,y)$. Essa afirmação não faz sentido para germes suaves, mas algo equivalente para germes analíticos faz: queremos, na verdade reduzir o problema a estudar o caso em que $f_y(x,0) = 0$. Há duas maneiras de considerar essa simplificação, uma mais algébrica, outra completamente geométrica: vamos seguir a segunda, como fez Whitney [5].

A observação básica é que exigir $f_y(x,0) = 0$ é equivalente, pelo Lema de Hadamard, a pedir que o conjunto crítico C de F seja o eixo horizontal. O que temos, até o momento, é que C tem vetor normal na origem com segunda coordenada não nula, isto é, o vetor normal não é horizontal. Assim, a tangente a C na origem não é vertical, e, localmente, C é o gráfico de uma função de x em y, passando pela origem, $C = \{(x, \phi(x))\}$.

Agora, defina o germe de difeomorfismo $\Psi(x,y) = (x, y + \phi(x))$. Que isso é uma troca de variáveis, é claro porque a jacobiana na origem é invertível. Mais, a inversa de C por Ψ é o eixo horizontal. Assim, a composta $G = F \circ \Psi$ é $\mathcal{RL}$-equivalente a F, tem seu conjunto crítico no eixo horizontal e é da forma $G(x,y) = (x, g(x,y))$, onde agora $g(x,y) = m_g(x,y) + y^2(c + n_g(x,y))$, com $m_g, n_g \in M_2$ mas, além disso, $g_y(x,0) = 0$, como queríamos.

A essa altura, é interessante observar o diagrama de Siersma de g.

$$\begin{array}{c}
\cancel{1} \\
x \quad \cancel{y} \\
x^2 \quad \cancel{xy} \quad y^2 \\
x^3 \quad \cancel{x^2y} \quad xy^2 \quad y^3 \\
x^4 \quad \cancel{x^3y} \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4 \\
x^5 \quad \cancel{x^4y} \quad x^3y^2 \quad x^2y^3 \quad xy^4 \quad y^5 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Agora, é claro o que fazer.
Escreva, por Hadamard, $g(x, y) = m(x) + y^2(c + n(x, y))$, para $m, n \in M$. Suponha c positivo. Troque de variável no domínio novamente: defina $\varphi(x, y) = (x, y(c + n(x, y)^{1/2})$, e componha, $H = G \circ \varphi^{-1}$. Mais uma vez, φ tem jacobiana invertível na origem, logo é um difeomorfismo local e agora $H(x, y) = (x, m(x) + y^2)$. Finalmente, componha com $(x, y) \mapsto (x, y - m(x))$ no contradomínio para finalmente alcançar a forma normal da dobra. Como as únicas operações envolvidas foram composições com germes de difeomorfismos à direita e à esquerda, é claro que $\tilde{F}$ é $\mathcal{RL}$-equivalente a $\hat{F}$. ■

4.3 Algumas dificuldades: a cúspide

Como vimos, tratar de $\mathcal{RL}$-equivalência é mais difícil. A Teoria de Mather contém resultados muito efetivos mesmo para essa situação, mas o conjunto de idéias necessário é completamente diferente. Para sugerir algumas dificuldades no processo, vamos considerar a teoria local da *cúspide*.

Existe uma descrição invariante da cúspide, que não nos interessa agora [5]. Em vez disso, vamos supor que foram realizadas sobre esta formulação invariante as simplificações resultantes da aplicação da Decomposição de Lyapunov-Schmidt (Proposição 4.1). Assim, obtemos germes $\mathcal{RL}$-equivalentes ao germe original, da forma $\tilde{F}(x, y) = (x, y^3(1 + n(x, y)) - xy(1 + m(x, y)))$, para $m, n \in M_2$. Um resultado importante da teoria seria uma técnica que permitisse mostrar que esse germe é $\mathcal{RL}$-equivalente à forma normal $\hat{F}(x, y) = (x, y^3 - xy)$, um teorema obtido por Whitney [5] por argumentos estritamente geométricos.

Seguindo os passos do estudo da determinação por $\mathcal{K}$-equivalência no Capítulo 3, um procedimento natural seria unir $\hat{F}$ a $\tilde{F}$ por um segmento e mostrar a $\mathcal{RL}$-equivalência localmente ao longo do segmento. Em particular, germes próximos a $\hat{F}$ no segmento devem ser $\mathcal{RL}$-equivalentes, o que sugere que curvas passando por $\hat{F}$ na $\mathcal{RL}$-órbita devem admitir como vetor tangente em $\hat{F}$ o vetor dado pela perturbação $(0, y^3\, n(x, y) - xy\, m(x, y))$.

Como já vimos ao definir T_f^K para um germe $f \in (E_s)^t$, podemos, por analogia, considerar os vetores tangentes associados à $\mathcal{RL}$-equivalência da forma $f_x(x)\varphi_u(x, 0) + \psi_u(f(x), 0)$, onde u é o parâmetro unidimensional que deforma as trocas de variáveis $\varphi(., u) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ e $\psi(., u) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^t)$ ao longo do segmento. Além disso, queremos $\varphi(0, u) = 0$ e $\psi(0, u) = 0$. Para adequar o vetor tangente geral a $\hat{F}$, fazemos $u = 0$ e usamos (x, y) para denotar as coordenadas do domínio. Estamos procurando $\varphi_u(x,y) = (\alpha_1(x,y), \alpha_2(x,y))$, $\psi_u(\hat{F}(x,y),0) = (\beta_1(\hat{F}(x,y)), \beta_2(\hat{F}(x,y)))$, com $\alpha_i, \beta_i \in M_2$ que satisfaçam a equação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 3y^2 - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(x,y) \\ \alpha_2(x,y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1(x, y^3 - xy) \\ \beta_2(x, y^3 - xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^3\, n(x,y) - xy\, m(x,y) \end{pmatrix}.$$

Note que, para que as trocas de variáveis mantenham fixa a origem, precisamos ter tanto α_i quanto β_i em M_2. Para fazer com que a igualdade da primeira coordenada valha, basta tomar $\alpha_1 = \beta_1 = 0$: o fato que existe uma solução desse tipo indica a possibilidade de realizar uma $\mathcal{RL}$-equivalência para a forma normal mantendo fixa a variável x. A igualdade da segunda coordenada é muito mais interessante:

$$(3y^2 - x)\alpha_2(x,y) + \beta_2(x, y^3 - xy) = y^3\, n(x,y) - xy\, m(x,y).$$

Para lidar com o fato que α_2 e β_2 agem sobre variáveis diferentes, vamos imaginar, para simplificar, que todas as funções envolvidas sejam reais analíticas. Então, por exemplo, escolher $\beta_2(x, y^3 - xy)$ é escolher uma combinação linear (infinita, talvez) de monômios da forma $x^k(y^3 - xy)^\ell$. Essa atitude ingênua indica que, no lado esquerdo da equação, estamos falando de um espaço vetorial A (a menos de questões de finitude das somas) gerado pelos monômios $(3y^2 - x)x^k y^\ell, x^k(y^3 - xy)^\ell$, e o lado direito é o espaço vetorial B gerado por $y^3 x^k y^\ell, xyx^k y^\ell$, onde k ou ℓ em cada monômio escolhido tem que ser não nulo para garantir $\alpha_2, \beta_2 \in M_2$.

Assim, para poder escrever uma perturbação arbitrária como um vetor do espaço tangente da $\mathcal{RL}$-órbita, é necessário ter $B \subseteq A$. Nesse caso, isso pode ser verificado de forma artesanal. Mas é claro que, mesmo para considerar a perturbação em torno de um ponto qualquer do segmento entre $\hat{F}$ e $\tilde{F}$, é conveniente ter à disposição mais recursos algébricos. O novo ingrediente, que não será discutido nesse texto, é o *Teorema de Preparação de Malgrange-Mather* [3]. Apenas para sugerir como o vocabulário de ideais e módulos, mais uma vez, é relevante, observe que a equação relacionando $\alpha_2(x,y)$ e $\beta_2(x, y^3 - xy)$ descreve a inclusão de um ideal finitamente gerado do módulo E_2 na soma de dois ideais, o primeiro sendo $(3y^2 - x)M_2$ ainda sobre E_2 e o segundo, gerado pelas coordenadas do germe $\hat{F}$, mais adequadamente descrito como um módulo sobre as funções cujas variáveis são x e $y^3 - xy$.

O exemplo acima não deve sugerir que as dificuldades no desenvolvimento da teoria sejam apenas de natureza algébrica. Como exemplo muito simples de uma dificuldade analítica, considere o seguinte resultado de Whitney [4]. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave par. Então existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave tal que $f(x) = g(x^2)$. Mais uma vez, para f real analítica, o resultado é simples, mas para funções suaves, não. O resultado segue do Teorema de Preparação citado acima quando apresentado na seguinte forma. Toda $f \in E_1$ é da forma $f(x) = g(x^2) + xh(x^2)$ para $g, h \in E_1$ adequadas.

BIBLIOGRAFIA:

[1] HILTON, Peter. **Unfolding of singularities**. Functional Analysis, Proceedings of the Brazilian Math. Society, 1976.

[2] MARTINET, Jean. **Deploiements Versels des Applications Differentiables et Classification des Applications Stables** . Lecture Notes in Mathematics no. 535, 1-44, 1975. (Singularités D'applications differentiables). Springer-Verlag.

[3] MATHER, John N. **Stability of C^∞ Mappings, III: Finitely Determined Map-Germs**. Annals of Math. 35, 1968. Institut des Hautes Études Scientifiques.

[4] WHITNEY, Hassler **Differentiable even functions**. Duke Math J. 10, 1943, 159-160.

[5] WHITNEY, Hassler **On singularities of mappings of Euclidean spaces I, Mappings of the plane into the plane**. Annals of Math. 62 (1955), 374-410.

Apêndice:
Começamos com alguns conceitos algébricos usados extensivamente. Seja R um anel comutativo e M um módulo sobre R. Dizemos que M é gerado pelos *geradores* $m_1, \ldots, m_i, \ldots$... se qualquer elemento $m \in M$ se escreve como uma combinação linear finita dos geradores com coeficientes em R, $m = \sum_i \varepsilon_i \cdot m_i$, $\varepsilon_i \in R$ e denotamos $M = \langle m_1, \cdots, m_i, \cdots \rangle R$.
Quando as somas são finitas dizemos que o módulo é finitamente gerado. O anel R é um módulo sobre si mesmo e os *ideais de um anel* R são os sub-anéis de R que são também R-módulos. Vamos usar com freqüência o resultado a seguir.

Lema (Nakayama):
Seja R um anel comutativo com identidade. Seja I um ideal em R tal que $1+z$ é invertível para qualquer $z \in I$. Sejam A, B submódulos de algum R-módulo M e suponha que A é finitamente gerado sobre R. Então a inclusão $A \subseteq B+IA$ implica $A \subseteq B$.

Demonstração:
Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\}R$. Como $A \subseteq B + IA$, cada gerador de A se escreve como $a_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} z_{i,j} a_j$, para elementos $b_i \in B$ e $z_{i,j} \in I$. Em forma matricial, as equações se escrevem como $(I - Z)a = b$, onde I é a identidade $n \times n$, Z é a matriz com entradas $z_{i,j}$, a e B são vetores com n coordenadas.
A matriz $I - Z$ é invertível, já que seu determinante é da forma $1 - z, z \in I$ (lembre que I é um ideal). O sistema tem solução (única) dada pela regra de Cramer, que mostra explicitamente que cada a_i é uma soma de monômios da forma b ou zb, onde $b \in \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $z \in I$. Assim, $a_i \in B$ para todo i, provando $A \subseteq B$. ■

Várias construções nesse texto são *ações de grupos*. Seja G um grupo com identidade e, e S um conjunto. Uma ação de G sobre S é uma função $A : G \times S \to S$, $(g, s) \mapsto A(g, s)$ tal que

$$A(e, s) = s, \forall s \in S,$$

$$A(g_1 * g_2, s) = A(g_1, A(g_2, s)), \ \forall g_1, g_2 \in G, \ \forall s \in S.$$

Dado um elemento $s \in S$ e uma ação $A : G \times S \to S$, a *órbita* por s é o conjunto de elementos de S da forma $A(g, s)$, para algum $g \in G$. É fácil ver que a relação 'pertencer à mesma órbita' é reflexiva, simétrica e transitiva: assim, uma ação induz uma *relação de equivalência* em S, que fica particionado pelas órbitas.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo