



Gisela Dornelles Marino

Equações Diferenciais Ordinárias Complexas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Julio César de Souza Rebelo

Rio de Janeiro
Junho de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Gisela Dornelles Marino

Equações Diferenciais Ordinárias Complexas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Julio César de Souza Rebelo

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Artur Avila Cordeiro de Melo

Université de Paris VI

Prof. Bruno César Azevedo Scárdua

Instituto de Matemática - UFRJ

Prof. Cesar Leopoldo Camacho Manco

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 05 de Junho de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Gisela Dornelles Marino

Graduou-se em Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em Julho de 2005.

Ficha Catalográfica

Marino, Gisela

Equações Diferenciais Ordinárias Complexas / Gisela Dornelles Marino; orientador: Julio César de Souza Rebelo. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 87 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Folheações Holomorfas. 3. Singularidades. 4. Dinâmica Complexa. I. Rebelo, Julio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao Prof. Julio Rebelo, a quem devo grande parte de meu aprendizado em matemática.

Aos professores, colegas e funcionários do Departamento de Matemática da PUC-Rio, pelo apoio e atenção.

À CAPES pelo suporte financeiro.

À minha família, presente em todas as etapas da minha vida. A Ruthvick, pelo incentivo e apoio na fase final deste trabalho.

Resumo

Marino, Gisela; Rebelo, Julio. **Equações Diferenciais Ordinárias Complexas**. Rio de Janeiro, 2007. 87p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste texto estudamos diversos aspectos de singularidades de campos vetoriais holomorfos em dimensão 2. Discutimos detalhadamente o caso particular de uma singularidade sela-nó e o papel desempenhado pelas normalizações setoriais. Isto nos conduz à classificação analítica de difeomorfismos tangentes à identidade. À seguir abordamos o Teorema de Seidenberg, tratando da redução de singularidades degeneradas em singularidades simples, através do procedimento de “blow-up”. Por fim, estudamos a demonstração do Teorema de Mattei-Moussu, acerca da existência de integrais primeiras para folheações holomorfas.

Palavras-chave

Folheações Holomorfas. Singularidades. Dinâmica Complexa.

Abstract

Marino, Gisela; Rebelo, Julio. **Complex Ordinary Differential Equations**. Rio de Janeiro, 2007. 87p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the present text, we study the different aspects of singularities of holomorphic vector fields in dimension 2. We discuss in detail the particular case of a saddle-node singularity and the role of the sectorial normalizations. This leads us to the analytic classification of diffeomorphisms which are tangent to the identity. Next, we approach the Seidenberg Theorem, dealing with the reduction of degenerated singularities into simple ones, by means of the “blow-up” procedure. Finally, we study the proof of the well-known Mattei-Moussu Theorem concerning the existence of first integrals to holomorphic foliations.

Keywords

Holomorphic Foliations. Singularities. Complex Dynamics.

Sumário

1	Introdução	8
2	Fundamentos	12
2.1	Equações Diferenciais Ordinárias Reais	12
2.2	Equações Diferenciais Ordinárias Complexas	14
2.3	Definições Básicas e Exemplos	17
2.4	O Procedimento de “Blow-up” e algumas Aplicações	25
3	Formas Normais para Singularidades de Folheações Holomorfas	28
3.1	Campos Vetoriais com Autovalores não nulos	29
3.2	Aspectos Elementares de Singularidades Sela-Nó	33
3.3	Algumas Formas Normais em Dimensões mais altas	38
4	Aspectos Avançados de Singularidades	45
4.1	Sela-Nó em Dimensão 2	45
4.2	Redução de Singularidades em Dimensão 2	55
4.3	Existência de Integrais Primeiras	63
5	Conclusão	85

1

Introdução

O assunto principal deste trabalho é o estudo de singularidades de campos vetoriais complexos de dimensão 2. Começamos traçando um paralelo entre equações diferenciais ordinárias reais e complexas, ressaltando os principais pontos em que elas diferem. Por exemplo, o análogo ao intervalo maximal de soluções de EDOs *reais* não existe no caso complexo, em geral. Por outro lado, a idéia geométrica de encarar soluções de EDOs reais (afastado do conjunto singular) como folhas bidimensionais de uma folheação pode ser facilmente adaptada ao cenário complexo. No caso de EDOs complexas, podemos dizer que as órbitas são Superfícies de Riemann e que fora das singularidades, elas são folhas de uma folheação holomorfa. No Capítulo 2 daremos a definição formal de folheação singular holomorfa, que desempenhará um papel fundamental ao longo desse texto. Alguns exemplos de folheações em diferentes variedades ilustrarão concretamente os objetos com os quais estamos lidando. Somos então levados a discutir em detalhes o exemplo específico de folheações no espaço projetivo. A seguir, introduzimos o processo de “blow-up”, que será de extrema utilidade, especialmente nas duas últimas seções.

No Capítulo 3 damos alguns resultados básicos associados a singularidades de folheações holomorfas. Começamos tratando do caso em que a folheação \mathcal{F} associada ao campo vetorial X , possui uma singularidade isolada simples em $(0, 0)$, com autovalores não-nulos λ_1 e λ_2 . Em outras palavras,

$$X(x_1, x_2) = [\lambda_1 x_1 + \varphi_1(x_1, x_2)] \frac{\partial}{\partial x_1} + [\lambda_2 x_2 + \varphi_2(x_1, x_2)] \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (1-1)$$

Passamos então a discutir o problema de linearização de tais campos vetoriais. Mais precisamente, procuramos entender quais são as condições para que exista uma troca de coordenadas holomorfa que linearize o sistema. Na verdade, é possível encontrar uma tal troca de coordenadas *formal*, com exceção de casos ressonantes específicos. Mostrar a sua convergência, no entanto, é bem mais difícil. Evidentemente, a existência de uma troca de coordenadas holomorfa que lineariza o sistema depende inteiramente dos autovalores. Por exemplo, se λ_1/λ_2 não pertence a \mathbb{R}_- e se nem λ_1/λ_2 , nem λ_2/λ_1 pertencem a \mathbb{N} então, em coordenadas apropriadas, o sistema é

linear. Este é o conteúdo do Teorema de Linearização de Poincaré. Mas se a singularidade pertence ao domínio de Siegel, i.e., $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$, não é possível obter uma troca de coordenadas holomorfa. Entretanto, em coordenadas locais (y_1, y_2) , a Equação 1-1 pode ser expressa como

$$X = \lambda_1 y_1 [1 + (h.o.t.)] \partial / \partial y_1 + \lambda_2 y_2 [1 + (h.o.t.)] \partial / \partial y_2 .$$

A seguir, iremos investigar o caso em que um dos autovalores, digamos, λ_2 é zero e $\lambda_1 \neq 0$. Tais singularidades são denominadas *selas-nó*. É possível obter uma normalização para esse tipo de singularidade, conhecida como Forma Normal de Dulac. Este resultado simplesmente garante que campos vetoriais contendo singularidades do tipo sela-nó podem ser dados, em coordenadas locais (y_1, y_2) por

$$X(y_1, y_2) = [y_1(1 + \lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)] \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2^{p+1} \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad (1-2)$$

a menos de um fator inversível.

Na Seção 3.2 estudamos brevemente singularidades em dimensões mais altas. Em particular, damos uma generalização do Teorema de Linearização de Poincaré e alguns resultados relacionados a singularidades do tipo sela-nó em dimensão 3.

O Capítulo 4 é o ponto central deste texto, sem dúvida contendo os resultados mais importantes dessa abordagem. Ele é fortemente inspirado nos trabalhos de J.-F. Mattei e R. Moussu (cf. (M-M)) e J. Martinet em conjunto com J.-P. Ramis (cf. (Ma-R)). Começamos revisitando singularidades do tipo sela-nó, mas dessa vez de um ponto de vista um pouco mais avançado. Estamos interessados em entender quando é que existe uma troca de coordenadas holomorfa, em que o termo $R(y_1, y_2)$ da Equação 1-2 se torna *identicamente* nulo. Apesar de ser possível obter uma conjugação formal entre as duas formas normais, em geral, esta aplicação não converge em uma vizinhança da singularidade. Porém, em certos setores da vizinhança, a conjugação formal é, de fato, *somável*. Este é precisamente o conteúdo de Teorema de Hukuhara-Kimura-Matuda. O passo seguinte é estudar as funções que “unem” esses setores, i.e., os difeomorfismos associados à troca de setores. No caso mais simples, existem dois difeomorfismos que realizam as duas possíveis trocas de setores, dependendo da componente conexa do domínio de interseção que está sendo considerada. Um destes difeomorfismos é uma translação, o outro é tangente à identidade. A questão interessante é que esses difeomorfismos não são únicos. Apenas as suas classes de conjugação são canônicas e podem ser usadas para parametrizar o espaço modular de selas-nó. Isso nos leva a um

outro tópico também relacionado: a classificação dos diffeomorfismos da forma $f(z) = z + z^2 + \dots$, seguindo o trabalho de S. Voronin (Vo). O procedimento a ser utilizado novamente é baseado em normalizações setoriais, porém desta vez, as aplicações normalizantes serão contruídas graças ao Teorema Mensurável de Riemann.

Até este ponto, estivemos trabalhando somente com singularidades simples. Poderíamos nos perguntar o que fazer no caso de singularidades mais degeneradas. De fato, em dimensão 2 não precisamos nos preocupar com elas, já que existe um método bastante eficaz de reduzir qualquer singularidade em uma “superposição” de singularidades simples. É precisamente este processo que explicamos na Seção 4.2, seguindo (M-M). Essencialmente, ao compor um número finito de aplicações de “blow-up”, reduzimos uma singularidade de ordem superior a uma série de curvas contendo apenas singularidades simples. Este é o conteúdo do teorema de Seidenberg. Existe mais uma redução que ainda pode ser feita no caso de singularidades simples: ou ela é reduzida a singularidades do tipo sela-nó, ou em singularidades em que ambos λ_1/λ_2 e λ_2/λ_1 não pertencem a \mathbb{N} .

Finalmente, na Seção 4.3 fazemos uma exposição do Teorema de Mattei-Moussu, tratando da existência de integrais primeiras para folheações. Em seu trabalho conjunto (M-M), J.-F. Mattei e R. Moussu dão condições necessárias e suficientes para a existência de funções que sejam constantes ao longo das folhas de uma folheação \mathcal{F} com uma singularidade isolada. Além disso, essas condições são de natureza topológica. Este teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 1.0.1 (Mattei-Moussu (M-M)) *Considere a folheação holomorfa \mathcal{F} definida em $U \subset \mathbb{C}^2$ com uma singularidade isolada em $(0,0)$. Suponha que ela satisfaz as seguintes condições:*

1. *Apenas um número finito de folhas de \mathcal{F} acumulam em $(0,0)$;*
2. *As folhas de \mathcal{F} são fechadas em $U \setminus \{(0,0)\}$.*

Então \mathcal{F} possui uma integral primeira holomorfa, não-constante em $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

A prova do Teorema de Mattei-Moussu foi dividida em 3 partes, com o intuito tornar a sua exposição mais transparente. O primeiro passo é mostrar que sob essas condições, a singularidade pode ser reduzida a uma superposição de singularidades, todas no domínio de Siegel. Isso é feito estudando a holonomia local de uma folha com respeito a um círculo em torno de cada tipo de singularidade que possa estar contido na árvore de Seidenberg de \mathcal{F} .

Chega-se a conclusão de que a única forma das Condições 1 e 2 não serem violadas é quando as singularidades pertencem ao domínio de Siegel.

O passo seguinte é mostrar que todas as singularidades da árvore de Seidenberg admitem integral primeira local. Isso é feito mostrando que o quociente λ_1/λ_2 pertence a \mathbb{Q}_- e usando o fato (também graças a J.-F. Mattei and R. Moussu) de que se a holonomia associada a uma folha de \mathcal{F} é linearizável, então o campo vetorial associado a \mathcal{F} também o é.

Finalmente, estendemos as integrais primeiras locais de forma a obter uma global. Mostramos isso no caso em que todas as singularidades são reduzidas com um único blow-up e o caso geral segue facilmente por indução.

2 Fundamentos

Estamos interessados em compreender o comportamento de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em \mathbb{C}^2 , em que o parâmetro “tempo” está em \mathbb{C} .

Primeiramente, iremos recordar os principais aspectos de equações diferenciais ordinárias reais. As Equações Diferenciais Ordinárias Complexas podem ser obtidas de EDOs reais por um procedimento natural de “complexificação”. Veremos que EDOs complexas estão intimamente relacionadas com folheações singulares holomorfas.

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias Reais

Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial dado por $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, em que P e Q são polinômios. A equação diferencial ordinária associada a esse campo vetorial é dada por

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = X(x(t), y(t)).$$

Equivalentemente, ela pode ser vista como o seguinte sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = P(x(t), y(t)), \\ \frac{d}{dt}y(t) = Q(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (2-1)$$

Como o campo vetorial é suficientemente suave (de fato, C^∞) podemos afirmar que dado $t_0 \in \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existe uma única solução $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ de (2-1) definida em uma vizinhança de t_0 , verificando

$$\phi(t_0) = (\phi_1(t_0), \phi_2(t_0)) = (x_0, y_0).$$

Além disso, existe o conceito de estender uma solução local a fim de obter uma solução definida em um domínio maximal, i.e., no “maior intervalo possível”. Isso significa que para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe um intervalo $I(x_0, y_0)$

e uma solução φ de (2-1) definida em $I(x_0, y_0)$ que satisfaz as seguintes condições

1. $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$;
2. Se ψ definida em $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, é uma outra solução de (2-1) verificando $\psi(t_0) = (x_0, y_0)$, então, $I \subset I(x_0, y_0)$ e $\varphi|_I = \psi$.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ o conjunto aberto $\{(t, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3; t \in I(x_0, y_0)\}$. O *fluxo* associado a (2-1) é definido como

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x_0, y_0) &\mapsto \phi(t), \end{aligned}$$

onde $\phi(t)$ é uma solução de (2-1) tal que $\phi(t_0) = (x_0, y_0)$.

Observe que talvez o fluxo não seja *completo*. Ou seja, talvez ele não esteja definido para todo $t \in \mathbb{R}$, já que $I(x_0, y_0)$ não é necessariamente toda a reta real. Por outro lado, é fácil verificar que quando $I(x_0, y_0) \neq \mathbb{R}$ então $\Phi(t, x_0, y_0)$ tende a infinito na medida em que t se aproxima dos extremos de $I(x_0, y_0)$, para (x_0, y_0) fixo. Aqui dizemos que $\Phi(t, x_0, y_0)$ “tende a infinito”, no sentido que ela sai de qualquer conjunto compacto contido no domínio de definição de X .

Observação 2.1.1 A discussão acima é válida para campos vetoriais regulares (digamos C^1) em variedades arbitrárias. Um resultado básico de Teoria de Equações Diferenciais é o seguinte: se as órbitas de um campo vetorial estiverem contidas em um conjunto compacto, então o intervalo maximal de definição para as soluções correspondentes é, de fato, \mathbb{R} . Em outras palavras, o fluxo gerado por esse campo vetorial é completo. Em particular, todo campo vetorial regular definido em uma variedade compacta (sem fronteira) é completo.

Retornamos então ao campo vetorial $X = (P, Q)$. O que precede implica que a imagem de Φ decompõe \mathbb{R}^2 em um conjunto de curvas (órbitas de X) juntamente com os pontos singulares de X . A fim de desenvolver esta observação, iremos recordar a definição de folheações (regulares, reais).

Definição 2.1.2 Considere uma variedade M de dimensão real n . Uma *folheação* \mathcal{F} de classe C^r e dimensão k ($1 \leq k < n$) em M consiste de uma cobertura coordenada $\{U_i, \psi_i\}$, $i \in I$, de M satisfazendo as seguintes condições:

1. Se $i \in I$, então $\psi_i(U_i) = U_i^1 \times U_i^2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, onde U_i^1, U_i^2 são discos abertos de \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^{n-k} respectivamente.

2. Se $i, j \in I$ e $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então a troca de coordenadas $\psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_i(U_i \cap U_j)$ tem a forma $\psi_i \circ \psi_j^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$ onde $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Naturalmente uma cobertura coordenada para uma folheação \mathcal{F} pode ser automaticamente estendida a um *atlas folheado* maximal. Uma coordenada $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ também é denominada *carta folheada*, *coordenada folheada* ou mesmo *coordenada trivializante para \mathcal{F}* . Dada uma carta folheada ψ como acima, um conjunto da forma $\psi_i^{-1}(U_i^1 \times \text{cte})$ é chamado *placa*. Uma *cadeia de placas* é uma sequência de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ tais que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, l-1\}$. Então introduzimos uma relação de equivalência entre pontos de M dizendo que $p \in M$ é equivalente a $q \in M$ se existe uma cadeia de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_l$. As classes de equivalência dessa relação são chamadas *folhas* de \mathcal{F} .

Observação 2.1.3 Se M é uma variedade complexa e as trocas de coordenadas para um atlas folheado são, de fato, difeomorfismos holomorfos, então temos uma folheação holomorfa.

Com essa terminologia em mãos, retornamos ao campo vetorial X . Outro fato conhecido de Equações Diferenciais Ordinárias é o assim chamado “Teorema da Caixa de Fluxo”. Este teorema garante a existência de um difeomorfismo R definido em uma vizinhança V de um ponto não-singular de X , tal que $R_*X = e_1$, onde (e_1, \dots, e_n) denota a base canônica de \mathbb{R}^n . Mais uma vez, este resultado vale para campos vetoriais C^r ($r \geq 1$) e o difeomorfismo R neste caso é tão regular quanto o campo (no caso, C^r).

Em particular, longe de pontos singulares de X , o Teorema da Caixa de Fluxo implica que as soluções de EDOs são folhas de uma folheação de dimensão 1. Neste sentido, dizemos que a imagem de Φ define uma *folheação singular* em \mathbb{R}^2 . Iremos formalizar esta definição no que se segue.

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias Complexas

Agora desejamos estender estas noções ao caso complexo. Essencialmente, identificamos \mathbb{C}^n com \mathbb{R}^{2n} considerando uma *estrutura complexa* em \mathbb{R}^{2n} . Para tanto, basta definir um automorfismo de \mathbb{R}^{2n} que desempenhe o papel da multiplicação por $\sqrt{-1}$ em um espaço vetorial complexo. Mais precisamente, uma *estrutura complexa* em \mathbb{R}^{2n} consiste de um automorfismo $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ satisfazendo $J^2 = -Id$. A seguir, iremos usar a complexificação usual, em que J é dado por $J(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n)$.

Seja $X : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por $X(z_1, z_2) = (P(z_1, z_2), Q(z_1, z_2))$ um campo vetorial polinomial. A EDO complexa associada a este campo é

$$\begin{cases} \frac{d}{dT}z_1(T) = P(z_1(T), z_2(T)) \\ \frac{d}{dT}z_2(T) = Q(z_1(T), z_2(T)), \end{cases} \quad (2-2)$$

em que o parâmetro T é complexo. Novamente, sendo X um campo vetorial holomorfo, a versão complexa do Teorema de Existência e Unicidade para EDOs regulares garante que dado $T_0 \in \mathbb{C}$ e $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ existe uma única solução holomorfa $\phi(T) = (\phi_1(T), \phi_2(T))$ de (2-2) definida em uma vizinhança B de T_0 , satisfazendo

$$\phi(T_0) = (\phi_1(T_0), \phi_2(T_0)) = (a, b).$$

O passo seguinte seria procurar unir estas soluções locais de maneira a obter um “domínio de definição maximal”. No entanto, percebemos que, em geral, isto não é possível, já que o parâmetro T pertence a \mathbb{C} . De fato, o problema é que ao tentar unir as vizinhanças, a sua união V não é necessariamente simplesmente conexa. Consequentemente, pode ser que a solução $\phi(T)$ não esteja bem definida em todo V , i.e, talvez ela seja multivaluada. Esta é uma diferença importante entre EDOs reais e complexas. Este fenômeno está ilustrado na Figura 2.1. Como a interseção de V_1 e V_2 não é conexa, soluções definidas em V_1 e V_2 , em geral, não podem ser “ajustadas” de forma a coincidir em ambas componentes conexas.

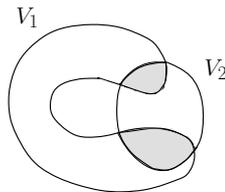


Figura 2.1: $V = V_1 \cup V_2$ não é simplesmente conexo

Agora iremos introduzir um ponto de vista mais geométrico para este tópico.

Utilizando a mencionada identificação de \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 (e \mathbb{C}^2 com \mathbb{R}^4), uma solução de (2-2) começando em $(a, b) = (a_1 + ia_2, b_1 + ib_2)$, localmente, pode ser vista como um “pedaço” de uma superfície real bidimensional L_0 em \mathbb{R}^4 passando pelo ponto (a_1, a_2, b_1, b_2) . Além disso, em (a_1, a_2, b_1, b_2) , L_0 é tangente ao espaço vetorial gerado pelos vetores

$$D_{(0,0)}(\phi_1, \phi_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_{(0,0)}(\phi_1, \phi_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2-3)$$

onde $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ é encarado como uma aplicação real de $B \subseteq \mathbb{R}^2$ em \mathbb{R}^4 , e ϕ_i ($i = 1, 2$) satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. Observe que $T_{(a,b)}L_0$ é invariante pelo automorfismo J , devido às equações de Cauchy-Riemann. Consequentemente, $T_{(a,b)}L_0$ é uma *reta complexa*, i.e a imagem de um subespaço unidimensional (sobre \mathbb{C}) de $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ sob a identificação precedente.

Na medida em que as condições iniciais (a, b) variam, de (2-3) obtemos uma distribuição de planos reais bidimensionais (ou retas complexas) que podem ser integrados no sentido de Frobenius, gerando superfícies de dimensão 2 (ou curvas complexas). Em particular, afastado do conjunto singular, o campo vetorial define uma folheação de dimensão real igual a 2. Além disso, esta folheação é holomorfa como consequência da versão complexa do Teorema da Caixa de Fluxo.

As folhas da folheação em questão herdam uma estrutura natural de superfícies de Riemann. De fato, um atlas para essa estrutura é dado pelas soluções locais ϕ de (2-2). Mais precisamente, ϕ é um difeomorfismo holomorfo de $B \subseteq \mathbb{C}$ em sua imagem na folha (superfície de Riemann) L_0 .

Em resumo, um campo vetorial holomorfo em \mathbb{C}^2 gera imediatamente uma folheação holomorfa em \mathbb{C}^2 afastado do seu conjunto singular. Também dizemos que o campo vetorial define uma folheação singular em \mathbb{C}^2 que é conhecida como a sua folheação associada. Reciprocamente, dada uma folheação (singular) holomorfa \mathcal{F} , a fim de obter o campo vetorial cujas órbitas não-constantas são as folhas de \mathcal{F} , necessitamos um dado extra. Mais precisamente, devemos associar um número complexo (ou vetor em \mathbb{R}^2) ao espaço tangente da cada folha, de forma a recuperar a parametrização das folhas de \mathcal{F} , que na situação acima era dada por ϕ . Este número complexo desempenhará o papel da “velocidade” do fluxo de X . Ele permite recuperar as parametrizações locais ϕ das folhas da folheação que são dadas como soluções locais de (2-2).

Evidentemente, a noção de folheação singular holomorfa é um meio geométrico conveniente de lidar com EDOs complexas (equivalentemente, um campo vetorial holomorfo). Entretanto, a observação acima indica que ela não contém todas as informações contidas em um campo vetorial. Conforme já mencionado, as soluções locais ϕ em geral não podem ser unidas o que torna o problema de estendê-las ainda mais sutil.

2.3

Definições Básicas e Exemplos

Em seguimento à discussão relativamente informal da seção anterior, pretendemos dar definições formais e enunciados mais detalhados.

Definição 2.3.1 *Uma variedade complexa M^n de dimensão n é uma variedade diferencial equipada com um atlas $\{U_i, \psi_i\}$ tal que*

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j)$$

é holomorfa sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, e $\psi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}^n$, $\psi_j : U_j \rightarrow V_j \subseteq \mathbb{C}^n$.

Devido às Equações de Cauchy-Riemann, o determinante Jacobiano de um difeomorfismo holomorfo é sempre positivo. Segue que toda variedade complexa é orientável.

As Equações de Cauchy-Riemann também implicam que a aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é holomorfa se e somente se $DF(Jv) = J(DFv)$, para $v \in U$. De forma que os vetores em \mathbb{R}^{2n} invariantes por J são levados, por DF em vetores que também são invariantes por J . Em outras palavras, se F é holomorfa, então DF preserva planos complexos n -dimensionais.

A seguir, daremos a definição formal de folheação singular holomorfa, em uma variedade complexa, com a qual iremos trabalhar ao longo deste texto.

Definição 2.3.2 *Uma folheação singular holomorfa \mathcal{F} definida em uma variedade complexa M^n consiste dos seguintes dados:*

1. *Existe um atlas $\{U_i, \psi_i\}$ compatível com a estrutura complexa em M^n , onde $\psi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}^n$.*
2. *Existem campos vetoriais holomorfos X_i definidos em cada V_i , dados por $P_{1,V_i} \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + P_{n,V_i} \frac{\partial}{\partial z_n}$.*
3. *Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então existem funções $h_{ij} : \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{C}$ tais que*

$$(\psi_j \circ \psi_i^{-1})_* X_i(\psi_i(U_i \cap U_j)) = h_{ij}(z_1, \dots, z_n) X_j(\psi_j(U_i \cap U_j)).$$

Se as funções h_{ij} são todas constantes iguais a 1, então trata-se, de fato, de um campo vetorial holomorfo em M .

Definição 2.3.3 Um campo vetorial holomorfo X definido em uma variedade M^n é tal que, dado um atlas de M^n , $\{U_i, \psi_i\}$, a seguinte equação é satisfeita

$$(\psi_j \circ \psi_i^{-1})_* X_i(\psi_i(U_i \cap U_j)) = X_j(\psi_j(U_i \cap U_j)),$$

onde $\psi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}^n$ e X_i são como na Definição 3.

Os exemplos a seguir indicam que a condição para que se defina um campo vetorial em uma variedade complexa é bem mais forte que as condições que nos permitem definir uma folheação singular holomorfa.

Exemplo 1: Toros Complexo

Seja Λ uma rede em \mathbb{C}^n . O toro complexo n -dimensional é dado pelo espaço quociente \mathbb{C}^n/Λ . Observe que um campo vetorial constante Y em \mathbb{C}^n induz um campo vetorial holomorfo no toro. De fato, campos vetoriais constantes são naturalmente preservados por translações de \mathbb{C}^n associadas aos elementos de Λ . Assim, Y define uma campo vetorial holomorfo no toro dado pelo quociente \mathbb{C}^n/Λ .

Exemplo 2: Superfícies de Hopf

Considere λ_1, λ_2 em \mathbb{C}^* tais que $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$. Seja $\sigma(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$. A superfície de Hopf M associada a σ é o quociente $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\})/\sigma$. É imediato verificar que M é, de fato, uma variedade complexa de dimensão 2

Seja $X(z_1, z_2) = P(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + Q(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_2}$ um campo vetorial polinomial em $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que

$$X(\sigma(z_1, z_2)) = \alpha P(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + \beta P(z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_2},$$

onde $\alpha/\lambda_1 = \beta/\lambda_2$. Então X define uma folheação singular holomorfa em $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\})/\sigma$. O leitor pode observar que a fim de se obter um campo vetorial holomorfo na superfície de Hopf, devemos ter a razão acima igual a 1. Isso indica que em superfícies de Hopf, existem muito mais folheações singulares holomorfas do que campos vetoriais holomorfos.

O seguinte exemplo concreto ilustra esta situação.

Seja $\lambda_1 = e^{-2}$ e $\lambda_2 = e^{-4}$. Considere o campo vetorial polinomial dado por $X = P \partial/\partial z_1 + Q \partial/\partial z_2$ onde

$$\begin{aligned} P(z_1, z_2) &= z_1^3 + z_1 z_2, \\ Q(z_1, z_2) &= z_2^2 + 2z_1^2 z_2. \end{aligned}$$

Observe que

$$X(\sigma(z_1, z_2)) = e^{-6}P(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + e^{-8}Q(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Por outro lado,

$$D\sigma.X(z_1, z_2) = e^{-2}P(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1} + e^{-4}Q(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

De forma que $D\sigma.X(z_1, z_2) = e^4X(\sigma(z_1, z_2))$. Tendo em vista a discussão anterior, o campo vetorial X induz uma folheação holomorfa em M , e não um campo vetorial.

Exemplo 3: Plano Projetivo Complexo (Espaço)

Folheações em espaços projetivos complexos constituem a principal fonte de exemplos, no sentido que são fáceis de descrever, englobando as dificuldades essenciais de casos mais gerais. Por isso serão tratados mais detalhadamente. Começamos por considerar a seguinte relação de equivalência.

$$z \sim z' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*; \quad z = \lambda z'; \quad z, z' \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

As classes que equivalência $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / \sim$ formam o espaço projetivo complexo de dimensão 2, denotado por $\mathbb{CP}(2)$.

Dois pontos $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ definem o mesmo ponto em $\mathbb{CP}(2)$ se e somente se

$$a/a' = b/b' = c/c'.$$

De forma que a projeção $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{CP}(2)$ é determinada pelas razões entre as coordenadas de (a, b, c) . Tradicionalmente, $\pi(a, b, c)$ é denotada por $(a : b : c)$ e a, b, c são chamadas coordenadas homogêneas para $(a : b : c)$.

Começamos considerando os seguintes conjuntos abertos que cobrem $\mathbb{CP}(2)$:

$$\begin{aligned} U_a &= \{(a : b : c) \in \mathbb{CP}(2) ; a \neq 0\}; \\ U_b &= \{(a : b : c) \in \mathbb{CP}(2) ; b \neq 0\}; \\ U_c &= \{(a : b : c) \in \mathbb{CP}(2) ; c \neq 0\}. \end{aligned}$$

Juntamente com estes conjuntos abertos, temos as seguintes cartas coordenadas:

$$\varphi_a : U_a \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$(a : b : c) \mapsto (b/a, c/a) = (x, y);$$

$$\begin{aligned} \varphi_b : U_b &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (a : b : c) &\mapsto (a/b, c/b) = (u, v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_c : U_c &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (a : b : c) &\mapsto (a/c, b/c) = (z, w). \end{aligned}$$

Seja $L_\infty = \mathbb{CP}(2) \setminus E_a = \{(0 : b : c) \in \mathbb{CP}(2); (b, c) \in \mathbb{C}^2\}$. Uma verificação direta usando as cartas coordenadas introduzidas acima mostra que L_∞ é isomorfo a $\mathbb{CP}(1)$. Assim $\mathbb{CP}(2) = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{CP}(1)$ i.e. $\mathbb{CP}(2)$ pode ser visto como \mathbb{C}^2 sendo adicionado à esfera de Riemann. Neste sentido, $\mathbb{CP}(2)$ é uma compactificação de \mathbb{C}^2 . Além disso, em coordenadas afins, (x, y) , L_∞ corresponde ao “infinito” e L_∞ está linearmente mergulhado em $\mathbb{CP}(2)$. Por isso é chamada de *linha no infinito*. Finalmente, observamos que esta construção se aplica a qualquer uma das coordenadas afins em $\mathbb{CP}(2)$, isto é, qualquer $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}(2)$ afim gera uma “linha no infinito”.

Iremos construir uma folheação singular holomorfa em $\mathbb{CP}(2)$ de forma semelhante ao que foi feito no caso de superfícies de Hopf.

Considere um campo vetorial polinomial homogêneo $X = P \frac{\partial}{\partial z_1} + Q \frac{\partial}{\partial z_2} + R \frac{\partial}{\partial z_3}$ em $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ de grau d . Considere a ação de \mathbb{C}^* em $\mathbb{C}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ dada por homotetias $\sigma(z_1, z_2, z_3) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Conforme já mencionado, o quociente desta ação é precisamente $\mathbb{CP}(2)$. Por outro lado, note que

$$X(\sigma(z_1, z_2, z_3)) = \lambda^d P(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda^d Q(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_2} + \lambda^d R(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Além disso,

$$D\sigma.X(z_1, z_2, z_3) = \lambda P(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda Q(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_2} + \lambda R(z_1, z_2, z_3) \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Assim, $D\sigma.X = \lambda^{d-1}X$ de forma que as “direções” associadas a X são invariantes por homotetias. Então X de fato define uma folheação singular em $\mathbb{CP}(2)$.

Outra maneira equivalente de definir uma folheação singular holomorfa em $\mathbb{CP}(2)$ é considerar um campo vetorial holomorfo em \mathbb{C}^2 e verificar se ele pode ser estendido a uma folheação holomorfa em todo $\mathbb{CP}(2)$. A seguir estudamos esse caso em detalhes.

Seja $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ um campo vetorial polinomial nas coordenadas afins (x, y) . Naturalmente, ele induz um campo vetorial racional Y (resp. Z) definido nas coordenadas afins (u, v) (resp. (z, w)). Note que basta multiplicar os campos vetoriais Y, Z pelos seus denominadores a fim de obter campos holomorfos (de fato, polinomiais).

Por exemplo, Y é dado por

$$\begin{aligned} Y(u, v) &= (\varphi_a \circ \varphi_b)^*(X(x, y)) \\ &= D(\varphi_a \circ \varphi_b)^{-1} \cdot X(\varphi_a \circ \varphi_b(u, v)) \\ &= \begin{pmatrix} -u^2 & 0 \\ -uv & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(1/u, v/u) \\ Q(1/u, v/u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conforme já mencionado, este campo vetorial não é holomorfo no domínio das coordenadas (u, v) já que possui pólos em $\{u = 0\}$. Entretanto, multiplicando Y por u^d , o novo campo vetorial $u^d Y$ é evidentemente holomorfo (com singularidades isoladas) no domínio de (u, v) . Agora, mudando do sistemas coordenado (u, v) para (x, y) obtemos

$$\begin{aligned} D(\varphi_a \circ \varphi_b) \cdot (u^d Y) &= u^d D(\varphi_a \circ \varphi_b) \cdot Y(u, v) \\ &= u^d D(\varphi_a \circ \varphi_b) \cdot D(\varphi_a \circ \varphi_b)^{-1} \cdot X(x, y) \\ &= u^d X(x, y). \end{aligned}$$

Repetindo este procedimento com as outras cartas coordenadas, obtemos uma folheação holomorfa em $\mathbb{CP}(2)$. Finalmente, notamos que o campo vetorial polinomial original em \mathbb{C}^2 não induz um campo vetorial holomorfo em $\mathbb{CP}(2)$. na verdade, ele induz um campo vetorial *meromorfo* cujos pólos estão contidos na linha no infinito correspondente.

Isto possui uma generalização óbvia para espaços projetivos complexos de dimensão mais alta.

Resumindo, construímos folheações singulares holomorfas em $\mathbb{CP}(2)$ seguindo, *a priori* dois métodos distintos

- Através de um campo vetorial polinomial homogêneo em \mathbb{C}^3 .
- Através de um campo vetorial polinomial em \mathbb{C}^2 .

Não é difícil verificar que ambas as construções são equivalentes, no sentido que elas produzem o mesmo conjunto de folheações. Esta verificação será feita implicitamente na prova do Lema 2.3.7. Mas é bem mais difícil ver que estas construções, de fato dão origem a *todas as folheações singulares holomorfas* em $\mathbb{CP}(2)$. Este é o conteúdo do Teorema 2.3.4 abaixo. Trata-se de uma

manifestação do Princípio de GAGA, mas que está além da abordagem que faremos neste trabalho.

Teorema 2.3.4 *Seja \mathcal{F} uma folheação singular holomorfa em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$. Então \mathcal{F} é induzida por um campo vetorial polinomial homogêneo X em \mathbb{C}^3 que, além disso, possui um conjunto singular de codimensão pelo menos 2.*

Levando em conta o Teorema 2.3.4, é natural procurar definir a noção de grau de uma folheação em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$. A princípio, poderíamos pensar em defini-lo como sendo o grau do campo vetorial polinomial que representa a folheação nas coordenadas afins. Porém, como pode ser visto facilmente, este grau pode variar dependendo da carta afim que foi escolhida.

O seguinte lema será uma motivação para a definição correta de grau de uma folheação \mathcal{F} em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ induzida por um campo vetorial polinomial $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ em \mathbb{C}^2 . Seja $P = \sum_{i=0}^d P_i(x, y)$ e $Q = \sum_{i=0}^d Q_i(x, y)$ onde P_i, Q_i são polinômios homogêneos de grau i .

Lema 2.3.5 *A “reta no infinito”, L_∞ , de $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ é invariante pela folheação \mathcal{F} , induzida por X como acima, se e somente se a componente homogênea de maior grau $P_d \frac{\partial}{\partial x} + Q_d \frac{\partial}{\partial y}$ não for da forma $h(x, y)(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})$, para algum polinômio h de grau $d - 1$.*

Prova. Para entender o comportamento de $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ próximo do infinito no sistema de coordenadas (x, y) , usamos a seguinte troca de coordenadas: $u = \frac{1}{x}, v = \frac{y}{x}$. De forma que este campo vetorial na carta coordenada (u, v) é dado por

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \begin{pmatrix} -u^2 & 0 \\ -uv & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(1/u, v/u) \\ Q(1/u, v/u) \end{pmatrix} \\ &= -u^2(P(1/u, v/u)) \frac{\partial}{\partial u} + u(Q(1/u, v/u) - vP(1/u, v/u)) \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

Agora basta analisar a folheação correspondente em uma vizinhança de $\{u = 0\}$.

Denotemos $\sum_{i=0}^{d-1} P_i$ por $\tilde{P}(1/u, v/u)$, e $\sum_{i=0}^{d-1} Q_i$ por $\tilde{Q}(1/u, v/u)$. Observe que $u^d \tilde{P}(1/u, v/u) = uh_1(u, v)$, $u^d \tilde{Q}(1/u, v/u) = uh_2(u, v)$ para polinômios apropriados h_1 e h_2 de grau $d - 1$. Além disso, $u^d P_d(1/u, v/u) = P_d(1, v)$, naturalmente existe uma expressão análoga para Q_d . Multiplicando o campo vetorial $X(u, v)$ por u^{d-1} obtemos um campo vetorial holomorfo nas coordenadas (u, v) , dado por

$$Y(u, v) = -u(P_d(1, v) + uh_1(u, v)) \frac{\partial}{\partial u} + (Q_d(1, v) - vP_d(1, v) + ug(u, v)) \frac{\partial}{\partial v},$$

onde $g(u, v) = h_2(u, v) - v h_1(u, v)$.

Se $Q_d(1, v) - v P_d(1, v) \equiv 0$, as componentes de $Y(u, v)$ são ambas divisíveis por u . Eliminando este fator em comum, fica claro que a reta no infinito não é preservada pela folheação. Reciprocamente, se $Q_d(1, v) - v P_d(1, v)$ não é identicamente nulo, L_∞ é preservada, já que a componente $\partial/\partial u$ de Y se anula identicamente em $L_\infty \simeq \{u = 0\}$.

Finalmente, está claro que $Q_d(1, v) - v P_d(1, v)$ se anula identicamente se e somente se a componente homogênea de grau mais alto for radial. \square

Definição 2.3.6 *O grau de uma folheação \mathcal{F} em $\mathbb{CP}(2)$ dada pela compactificação do campo vetorial polinomial $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ de grau d e tendo apenas zeros isolados é igual a:*

1. $d - 1$, se existe um polinômio $h(x, y)$ de grau $d - 1$ tal que $P_d \frac{\partial}{\partial x} + Q_d \frac{\partial}{\partial y} = h(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Em outras palavras, o grau é $d - 1$ se a componente homogênea de grau mais alto de X for um múltiplo do campo vetorial radial
2. d , caso contrário.

A seguir, daremos uma interpretação mais genérica do grau de uma folheação conforme foi definido acima. Na verdade, o conteúdo deste lema pode ser usado como uma definição equivalente de grau.

Lema 2.3.7 *Seja \mathcal{F} uma folheação singular holomorfa em $\mathbb{CP}(2)$ de grau d . Então:*

1. *Existe um campo vetorial polinomial Z de grau d em \mathbb{C}^3 , com conjunto singular de codimensão pelo menos 2, induzindo \mathcal{F} pela projeção radial de suas órbitas;*
2. *O número de tangências de \mathcal{F} com uma reta projetiva genérica é d .*

Prova. Primeiramente, mostraremos que a projeção de uma folheação associada a um campo vetorial polinomial de grau d em \mathbb{C}^3 é, de fato, uma folheação \mathcal{F} em $\mathbb{CP}(2)$ de grau d . Seja $Z = \sum_{i=0}^2 H_i(z_0, z_1, z_2) \frac{\partial}{\partial z_i}$, onde (z_0, z_1, z_2) representa as coordenadas de \mathbb{C}^3 . Na carta $(x, y) = (z_1/z_0, z_2/z_0)$, o campo vetorial Z é dado por

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} P(x, y) &= H_1(1, x, y) - xH_0(1, x, y) \\ Q(x, y) &= H_2(1, x, y) - yH_0(1, x, y). \end{aligned}$$

Se $H_0(1, x, y)$ tem grau d (i.e., H_0 não é divisível por z_0), então X possui grau $d + 1$. Além disso, a componente de X de grau mais alto, é dada por $-H_0^d(1, x, y)(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})$, onde H_0^d representa a componente homogênea de grau d de $H_0(1, x, y)$. De acordo com a Definição 2.3.6, \mathcal{F} tem grau d .

Se $H_0(1, x, y)$ tem grau menor que d (i.e., H_0 é divisível por z_0), então pelo menos um dentre $H_1(1, x, y)$ e $H_2(1, x, y)$ necessariamente tem grau d , caso contrário os três polinômios seriam divisíveis por z_0 . Isso implicaria que o conjunto singular de Z tem codimensão 1, contradizendo a hipótese. Logo X tem grau d , e novamente a Definição 2.3.6 implica que \mathcal{F} tem grau d . A recíproca é análoga, o que estabelece a primeira parte do lema.

Agora vamos considerar as tangências entre \mathcal{F} e uma reta genérica em $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$. A menos de fazer uma troca de coordenadas, podemos supor que as tangências com uma reta genérica projetiva $y = \lambda x$ estão todas contidas na carta afim principal de $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ de forma que

$$\lambda P(x, \lambda x) = Q(x, \lambda x),$$

ou seja, os pontos de tangência são dados pelos zeros do polinômio $\lambda P(x, \lambda x) - Q(x, \lambda x)$. Então o número de tangências (contado com multiplicidade) é o grau de $\lambda P(x, \lambda x) - Q(x, \lambda x)$. Mas, se d é o grau da folheação, então ou $P_d(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_d(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ é radial (e conseqüentemente X possui grau $d + 1$) ou não é (e neste caso X tem grau d). O primeiro caso é equivalente a $\lambda P_d(x, \lambda x) - Q_d(x, \lambda x) = 0$, o que significa que $\lambda P(x, \lambda x) - Q(x, \lambda x)$ tem grau d . O outro caso somente acontece quando a componente de grau mais alto de $\lambda P(x, \lambda x) - Q(x, \lambda x)$ é não nula, o que implica que o grau deste polinômio é d . A recíproca é análoga. \square

De acordo com o Teorema 2.3.4 e o Lema 2.3.7, o espaço $\text{Fol}(\mathbb{C}\mathbb{P}(2), d)$ que consiste das folheações singulares holomorfas de grau d é naturalmente contido no espaço dos campos vetoriais polinomiais homogêneos de grau d em três variáveis. Além disso, dois desses campos vetoriais que possuem um conjunto singular de codimensão pelo menos 2 definem a mesma folheação se e somente se eles diferem por uma constante multiplicativa. Logo uma simples contagem de coeficientes nos dá o seguinte

Corolário 2.3.8 *O espaço $\text{Fol}(\mathbb{C}\mathbb{P}(2), d)$ está naturalmente identificado com*

um conjunto aberto de Zariski do espaço projetivo complexo de dimensão

$$(d + 1)(d + 3) - 1.$$

□

Também devemos observar que o grupo de automorfismos de $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$, $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, possui uma ação natural em $\mathrm{Fol}(\mathbb{C}\mathbb{P}(2), d)$ através de trocas de coordenadas projetivas.

2.4

O Procedimento de “Blow-up” e algumas Aplicações

À princípio, o “blow-up” pode ser visto como um mero artifício que apenas cria novas variedades a partir outras. No entanto, veremos que trata-se de um procedimento particularmente útil para entender o comportamento de folheações ou campos vetoriais em pontos singulares.

Definição 2.4.1 *O “blow-up” de \mathbb{C}^2 em $(0, 0)$ é uma variedade complexa $\tilde{\mathbb{C}}^2$ obtida identificando duas cópias de \mathbb{C}^2 da seguinte maneira:*

$$(x, t) \simeq (s, y) \Leftrightarrow s = \frac{1}{t}; \quad y = tx \quad (t \neq 0, s \neq 0),$$

onde (x, t) e (s, y) são as coordenadas das duas referidas cópias.

Por definição, o *divisor excepcional* de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ é $E \subset \tilde{\mathbb{C}}^2$ dado por $\{x = 0\}$ (resp. $\{y = 0\}$) nas coordenadas (x, t) (resp. (s, y)). Assim, E está bem definido e é isomorfo a $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$.

A aplicação de “blow-up” $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é dada por $\pi(x, t) = (x, tx)$ e $\pi(s, y) = (sy, y)$. Além disso, ela é tal que:

- $\pi^{-1}(0, 0) = E$;
- $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é um difeomorfismo holomorfo;
- π é própria (i.e. a pré-imagem de um compacto é também compacta).

Agora vamos definir o “blow-up” de uma variedade complexa M de dimensão 2 em um ponto $p \in M$. Considere a carta coordenada local $\psi : U \rightarrow W \subset \mathbb{C}^2$ em uma vizinhança U de p , tal que $\psi(p) = (0, 0)$.

Seja $\tilde{W} = \pi^{-1}(W)$, onde π é a aplicação de “blow-up”. Seja M' a união disjunta de $M \setminus \{p\}$ com \tilde{W} , e considere a seguinte relação de equivalência

$$q_0 \simeq q_1 \iff q_0 \in U \setminus \{p\}, \quad q_1 \in \tilde{W} \setminus E \text{ e } q_1 = \pi^{-1}(\psi(q_0)).$$

O “blow-up” \widetilde{M} de M em p é o quociente M'/\simeq . Observe que \widetilde{M} é, de fato uma variedade complexa suave, já que \widetilde{W} é uma variedade e $\pi^{-1} \circ \psi : U \setminus \{p\} \rightarrow \widetilde{W} \setminus E$ é um difeomorfismo holomorfo.

Similarmente, existe uma aplicação de “blow-up” de \widetilde{M} em M (que também será denotada por π) que é própria e $\pi^{-1}(p) = E$. Além disso, $\pi : \widetilde{M} \setminus E \rightarrow M \setminus \{p\}$ é um difeomorfismo holomorfo.

O “blow-up” de uma folheação ou de um campo vetorial também pode ser definido de maneira natural. Seja $X = F \frac{\partial}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial y}$ um campo vetorial em \mathbb{C}^2 , onde F e G são funções holomorfas (não necessariamente polinomiais). Suponha que $(0, 0)$ é uma singularidade isolada de X de ordem k (k é o mínimo entre as ordens de F e G em $(0, 0)$).

Seja $F = \sum_{n=k}^{\infty} F_n$, e $G = \sum_{n=k}^{\infty} G_n$, onde F_n e G_n são as componentes homogêneas de grau n das séries de Taylor de F e G , respectivamente.

Usando a aplicação de “blow-up” $\pi : \widetilde{\mathbb{C}}^2 \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ nas coordenadas (x, t) , mais precisamente, $\pi(x, t) = (x, tx)$ ($x \neq 0$), definimos $\pi^* X$.

$$\pi^* X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t/x & 1/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k F_k(1, t) + x^{k+1}(F_{k+1}(1, t) + xF_{k+2}(1, t) + \dots) \\ x^k G_k(1, t) + x^{k+1}(G_{k+1}(1, t) + xG_{k+2}(1, t) + \dots) \end{pmatrix}.$$

Denotando $f(x, t)$ por $(F_{k+1}(1, t) + xF_{k+2}(1, t) + \dots)$ e $g(x, t)$ por $(G_{k+1}(1, t) + xG_{k+2}(1, t) + \dots)$, a equação acima é dada, equivalentemente por

$$\pi^* X = x^k [F_k(1, t) + xf(x, t)] \frac{\partial}{\partial x} + x^{k-1} [-tF_k(1, t) - xtf(x, t) + G_k(1, t) + xg(x, t)] \frac{\partial}{\partial t}. \tag{2-4}$$

Observe que este campo vetorial admite uma extensão holomorfa \widetilde{X} ao divisor excepcional E ($\{x = 0\}$). Assim, \widetilde{X} é o “blow-up” de X no ponto singular $(0, 0)$. Adicionalmente, se $k \geq 2$ então \widetilde{X} é singular em todo ponto de E . Similarmente, o “blow-up” da folheação \mathcal{F} associada a X é a folheação $\widetilde{\mathcal{F}}$ associada a \widetilde{X} .

O comportamento de $\widetilde{\mathcal{F}}$ (e de \widetilde{X}) em uma vizinhança de E é significativamente diferente dependendo se $G_k(1, t) - tF_k(1, t)$ é identicamente nulo ou não. Analizaremos os dois casos separadamente.

- Se $G_k(1, t) - tF_k(1, t)$ não for identicamente nulo

Dividindo a Equação (2-4) por x^{k-1} , a folheação permanece inalterada e $\widetilde{\mathcal{F}}|_{\widetilde{\mathbb{C}}^2 \setminus E}$ é simplesmente

$$x[F_k(1, t) + xf(x, t)] \frac{\partial}{\partial x} + [-tF_k(1, t) - xtf(x, t) + G_k(1, t) + xg(x, t)] \frac{\partial}{\partial t}.$$

Assim, as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ em E são dadas por $G_k(1, t) - tF_k(1, t) = 0$, e E ($\{x = 0\}$) é invariante pela folheação.

- Se $G_k(1, t) - tF_k(1, t) \equiv 0$ (equivalentemente, se $F_k(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + G_k(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ é um múltiplo do campo vetorial radial $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$)

Neste caso, podemos dividir (2-4) por x^k , obtendo:

$$[F_k(1, t) + xf(x, t)] \frac{\partial}{\partial x} + [-tf(x, t) + g(x, t)] \frac{\partial}{\partial t} .$$

Logo,

$$\tilde{\mathcal{F}}|_E = F_k(1, t) \frac{\partial}{\partial x} + [-tF_{k+1}(1, t) + G_{k+1}(1, t)] \frac{\partial}{\partial t} .$$

Observe que $F_k(1, t)$ não é identicamente nulo, pois se fosse, então $G_k(1, t) \equiv 0$ e $(0, 0)$ não seria uma singularidade de ordem k conforme supúnhamos. Assim, o divisor excepcional E não é preservado por $\tilde{\mathcal{F}}$, e as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ talvez não estejam contidas em E .

As folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ são transversas a E e são projetadas por π em curvas passando por $(0, 0)$ que são invariantes por \mathcal{F} . Como π é uma aplicação própria, a projeção é um conjunto analítico (os zeros comuns de um número finito de funções holomorfas). Uma curva analítica invariante pela folheação, contendo a singularidade de \mathcal{F} é chamada *separatriz* de \mathcal{F} . Uma singularidade com infinitas separatrizes é chamada *dicrítica*.

3

Formas Normais para Singularidades de Folheações Holomorfas

Neste capítulo estudaremos singularidades de folheações holomorfas em dimensão 2.

Considere uma folheação holomorfa \mathcal{F} com uma singularidade isolada em $(0, 0)$. Conforme vimos anteriormente, existe um campo vetorial X associado a essa folheação, que é unicamente definido a menos de multiplicação por uma função f tal que $f(0, 0) \neq 0$.

Os *autovalores* da folheação \mathcal{F} em $(0, 0)$ são os autovalores λ_1, λ_2 associados ao campo vetorial X em $(0, 0)$. Existem três possibilidades:

- (a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
- (b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$;
- (c) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

Apesar de $X(x_1, x_2)$ e $Y(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)X(x_1, x_2)$ definirem a mesma folheação \mathcal{F} , as três situações acima estão bem definidas. Ou seja, os autovalores de X e Y pertencem ao mesmo caso (a), (b), ou (c). Observe que os valores precisos de λ_1 e λ_2 (quando forem diferente de 0, naturalmente) não estão bem definidos. Entretanto, ficará claro, ao longo do texto, que as noções relevantes em questão dependem somente da razão λ_1/λ_2 , claramente invariante pelas escolhas do campo vetorial associado a \mathcal{F} .

Uma singularidade é *simples* se pelo menos um dos seus autovalores é diferente de zero. Se exatamente um dos autovalores é zero, então a singularidade é chamada *sela-nó*.

A *ordem* de uma folheação \mathcal{F} em $(0, 0)$ é o grau da primeira componente homogênea não nula da série de Taylor de X centrada em $(0, 0)$. Naturalmente, a ordem não depende do campo vetorial X escolhido.

Começaremos estudando singularidades simples, levando em consideração o problema de linearização. Depois trataremos o caso mais geral usando o Teorema de Seidenberg.

3.1

Campos Vetoriais com Autovalores não nulos

Consideremos a EDO gerada por um campo vetorial holomorfo X com singularidade isolada em $(0,0)$. Suponha ainda que os seus autovalores em $(0,0)$ são λ_1 e λ_2 , ambos diferentes de *zero*. Em outras palavras, estamos considerando a folheação associada ao sistema de EDOs

$$\begin{cases} dx_1/dT = \lambda_1 x_1 + \varphi_1(x_1, x_2), \\ dx_2/dT = \lambda_2 x_2 + \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3-1)$$

Agora pretendemos definir uma troca formal de coordenadas que lineariza o sistema. Adotaremos as seguintes notações.

Seja $Q = (q_1, q_2)$, $x^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ e $\|Q\| = q_1 + q_2$. Além disso, suponha que

$$\varphi_1 = \sum_{\|Q\|>1} \varphi_{1,Q} x^Q ; \quad \varphi_2 = \sum_{\|Q\|>1} \varphi_{2,Q} x^Q .$$

Considere a seguinte troca de coordenadas formal

$$x_1 = y_1 + \zeta_1(y_1, y_2) \quad \text{onde} \quad \zeta_1(y_1, y_2) = \sum_{\|Q\|>1} \zeta_{1,Q} y^Q , \quad (3-2)$$

$$x_2 = y_2 + \zeta_2(y_1, y_2) \quad \text{onde} \quad \zeta_2(y_1, y_2) = \sum_{\|Q\|>1} \zeta_{2,Q} y^Q . \quad (3-3)$$

Nessas novas coordenadas, o sistema (3-1) é dado por

$$\begin{cases} dy_1/dT = \lambda_1 y_1 + \psi_1(y), \\ dy_2/dT = \lambda_2 y_2 + \psi_2(y), \end{cases} \quad (3-4)$$

Substituindo (3-2) e (3-3) em (3-1), obtemos as seguintes relações

$$\sum_{\|Q\|>1} (\delta_{1,Q} \zeta_{1,Q} + \psi_{1,Q}) y^Q = \varphi_1(y_1 + \zeta_1, y_2 + \zeta_2) - \sum_{k=1,2} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y_k} \psi_k , \quad (3-5)$$

$$\sum_{\|Q\|>1} (\delta_{2,Q} \zeta_{2,Q} + \psi_{2,Q}) y^Q = \varphi_2(y_1 + \zeta_1, y_2 + \zeta_2) - \sum_{k=1,2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial y_k} \psi_k , \quad (3-6)$$

onde $\delta_{1,Q} = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_1$ e $\delta_{2,Q} = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_2$.

Observe que se $\delta_{i,Q} \neq 0$ ($i = 1, 2$) sempre é possível encontrar $\zeta_{i,Q}$ tal que $\psi_{i,Q} = 0$. Isso pode ser visto por indução em Q e lembrando que φ_i possui termos de ordem pelo menos 2. Esta última observação implica que os coeficientes $\zeta_{i,Q}$ de y^Q no lado esquerdo das Equações (3-5) e (3-6) dependem somente em termos $\zeta_{i,P}$ (para $P < Q$), dos coeficientes de φ_i e de $\delta_{i,Q}$ (que são não nulos por hipótese). Mais precisamente, $\zeta_{i,Q} = \frac{f}{\delta_{i,Q}}$, onde f é uma função

de certos coeficientes de φ_i e $\zeta_{i,P}$ para $P < Q$. Logo se $\delta_{i,Q} \neq 0$ então sempre existe uma troca de coordenadas formal ζ_i tal que $\psi_i = 0$.

Isso resolve o problema de encontrar uma troca formal e coordenadas. Porém, nada garante a convergência da série $\zeta_i(y_1, y_2)$ ($i = 1, 2$). De fato, pode ser que ela não seja convergente. Antes de lidar com o problema da convergência, introduziremos uma notação que será útil.

Dada uma série de potências formal $\xi = \sum_Q \xi_Q x^Q$, denotaremos $\bar{\xi} = \sum_Q \|\xi_Q\| y^Q$. Também iremos considerar a série em uma variável complexa z , $\bar{\bar{\xi}}$, obtida como $\bar{\bar{\xi}} = \sum_Q \|\xi_Q\| |z|^{Q\|}$. Dada outra série $\varpi = \sum_Q \varpi_Q y^Q$, dizemos que $\varpi \prec \xi$ se e somente se $\|\varpi_Q\| \leq \|\xi_Q\|$ para todo Q .

Teorema 3.1.1 (Método Majorante de Cauchy) *Seja φ_i e ζ_i (para $i = 1, 2$) como em (3-1) e (3-2), (3-3). Suponha que existe $\delta > 0$ tal que*

$$\delta \bar{\zeta}_i \prec \bar{\varphi}_i(y_1 + \bar{\zeta}_1, y_2 + \bar{\zeta}_2).$$

Então a série ζ_i ($i = 1, 2$) converge, definindo uma troca de coordenadas holomorfa.

Prova. Obtêm-se diretamente que

$$\bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 \prec \frac{1}{\delta} (\bar{\varphi}_1(z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2, z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2) + \bar{\varphi}_2(z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2, z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2)). \quad (3-7)$$

Como a série φ_i converge por hipótese, existe a_0 , $a > 0$ tal que:

$$\frac{1}{\delta} (\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) \prec \frac{a_0 z^2}{1 - az}. \quad (3-8)$$

Seja $u = \sum_i u_i z^i$ a série $\frac{1}{z} (\bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2)$. Das Equações (3-7) e (3-8) obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} (\bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2) &\prec \frac{1}{z\delta} (\bar{\varphi}_1(z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2) + \bar{\varphi}_2(z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2)) \\ &\prec \frac{1}{z} \left(\frac{a_0 (z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2)^2}{1 - a(z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2)} \right) \\ &\prec \frac{a_0 z [\frac{1}{z} (z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2)]^2}{1 - az(\frac{1}{z} (z + \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2))}, \end{aligned}$$

Logo

$$u \prec \frac{a_0 z (1 + u)^2}{1 - az(1 + u)}. \quad (3-9)$$

Agora comparamos u com a série $v = \sum_i v_i z^i$, que é uma solução de

$$v = \frac{a_0 z (1 + v)^2}{1 - az(1 + v)}.$$

Equivalentemente, v satisfaz

$$\left(\sum v_i z^i\right)^2(-az - a_0z) + \left(\sum v_i z^i\right)(-az - 2a_0z + 1) - a_0z = 0,$$

além disso, ela converge e $v_1 = a_0$. Observe que para todo i , v_i é um polinômio com coeficientes positivos nas variáveis v_1, \dots, v_{i-1} , que denotaremos por $P_i(v_1, \dots, v_{i-1})$.

Podemos escolher $a_0 > u_1$ e segue de (3-9) que

$$u_i \leq P_i(u_1, \dots, u_{i-1}).$$

Agora mostraremos $u \prec v$ por indução. Suponha que $u_j \leq v_j$ para $j \leq i - 1$. Como P_i tem coeficientes positivos para todo i temos que

$$u_i \leq P_i(u_1, \dots, u_{i-1}) \leq P_i(v_1, \dots, v_{i-1}) = v_i.$$

Logo u é convergente e conseqüentemente ζ_i ($i = 1, 2$) também o são. \square

Teorema 3.1.2 (Teorema de Linearização de Poincaré) *Considere um sistema de equações diferenciais como em (3-1). Suponha que $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ e que $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}_-$. Suponha adicionalmente que nem λ_1/λ_2 , nem λ_2/λ_1 pertencem a \mathbb{N} . Então existe uma troca de coordenadas holomorfa em que o sistema se torna linear.*

Prova. Primeiramente observamos que as hipóteses sobre λ_1 e λ_2 implicam que existe $\delta > 0$ tal que $\inf_Q \{\delta_{1,Q}, \delta_{2,Q}\} \geq \delta$. De fato, se $\delta_{1,Q} = 0 = \lambda_1(q_1 - 1) + \lambda_2 q_2$ então

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{q_2}{(1 - q_1)}.$$

Portanto, sempre que $q_2 = 0$, temos que $\lambda_1 = 0$; quando $q_1 = 0$, então $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{N}$; e se $q_1 > 1$ então $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Um argumento semelhante é válido para $\delta_{2,Q}$. Assim, nossas hipóteses garantem que todos os $\delta_{i,Q}$ são diferentes de zero. Logo sempre é possível obter $\zeta_{i,Q}$ de forma que $\psi_{i,Q} = 0$. Então existe uma troca de coordenadas formal que lineariza o sistema (3-1). Agora devemos mostrar que esta mudança de coordenadas é, de fato, convergente. Das Equações (3-5) e (3-6), para $j = 1, 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \bar{\zeta}_j &\prec \sum_Q \delta_{j,Q} \|\zeta_{j,Q}\| y^Q + \bar{\psi}_j \\ &\prec \bar{\varphi}_j(y_1 + \bar{\zeta}_1, y_2 + \bar{\zeta}_2) + \sum_{k=1,2} \frac{\partial \bar{\zeta}_j}{\partial y_k} \bar{\psi}_k. \end{aligned}$$

Como $\bar{\psi}_k = 0$, temos que

$$\delta\bar{\zeta}_j \prec \bar{\varphi}_j(y_1 + \bar{\zeta}_1, y_2 + \bar{\zeta}_2).$$

Finalmente, o Teorema 3.1.1 implica que esta mudança é convergente. \square

Agora mostraremos uma caracterização de folheações singulares holomorfas, no caso em que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$, para autovalores não-nulos.

Lema 3.1.3 *Se $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$, então existe uma troca de coordenadas analítica em que o sistema original é dado (em termos de campos vetoriais) por*

$$X = \lambda_1 y_1 [1 + (h.o.t.)] \partial/\partial y_1 + \lambda_2 y_2 [1 + (h.o.t.)] \partial/\partial y_2.$$

Em particular tais campos vetoriais possuem duas separatrizes transversas e distintas.

Prova. Mostraremos que existe uma mudança de coordenadas convergente, tal que φ_1 é divisível por x_1 e que φ_2 é divisível por x_2 , onde φ_1 e φ_2 são como em (3-1).

Como antes, consideramos uma troca de coordenadas $x_1 = y_1 + \zeta_1(y_1, y_2)$ e $x_2 = y_2 + \zeta_2(y_1, y_2)$ seja:

$$\begin{cases} \psi_{1,Q} = 0 & \text{quando } q_1 = 0 \text{ ou } q_2 = 0 \\ \zeta_{1,Q} = 0 & \text{quando } q_1 \neq 0 \text{ e } q_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \psi_{2,Q} = 0 & \text{quando } q_1 = 0 \text{ ou } q_2 = 0 \\ \zeta_{2,Q} = 0 & \text{quando } q_1 \neq 0 \text{ e } q_2 \neq 0 \end{cases}$$

Se essa troca for de fato convergente, então nestas coordenadas apropriadas $\{y_1 = 0\}$ e $\{y_2 = 0\}$ são invariantes, o que é o conteúdo do lema.

Então devemos analisar expressões de $\delta_{1,Q}$ apenas no caso em que $q_1 = 0$ ou $q_2 = 0$. Afinal, quando $q_1 \neq 0$ e $q_2 \neq 0$, tem-se que $\zeta_{1,Q} = 0$, de forma que estes termos não contam na série $\bar{\zeta}_1$. Nesta situação, temos

$$\begin{aligned} \delta_{1,Q} &= \lambda_2 q_2 - \lambda_1 \\ \frac{\delta_{1,Q}}{\lambda_2} &= q_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Um argumento semelhante implica que $\delta_{2,Q} > \varepsilon_2$. Mais precisamente, $\delta_{2,Q} = 0$ se $q_2 > 1$ (neste caso, $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}_-$). Segue que quando $q_2 = 0$, existe ε_2 tal que $\delta_{2,Q} > \varepsilon_2$.

Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $\inf_Q \{\delta_{1,Q}, \delta_{2,Q}\} \geq \delta$.

Usando este fato juntamente com as Equações (3-5) e (3-6), têm-se

$$\delta\bar{\zeta}_1 \prec \sum_Q \delta_{1,Q} \|\zeta_{1,Q}\| y^Q \prec \bar{\varphi}_1(y_1 + \bar{\zeta}_1, y_2 + \bar{\zeta}_2) + \frac{\partial \bar{\zeta}_1}{\partial y_1} \bar{\psi}_1 + \frac{\partial \bar{\zeta}_1}{\partial y_2} \bar{\psi}_2.$$

Por construção, os coeficientes não-nulos em $\bar{\zeta}_1$ estão relacionados somente com monômios que são potências de y_1 ou potências de y_2 , i.e, não existem monômios que misturam as variáveis y_1 e y_2 . Por outro lado, todos os termos não-nulos que entram em $\bar{\psi}_1$ e $\bar{\psi}_2$ são tais que $q_1 = 0$ e $q_2 = 0$. De maneira que a seguinte estimativa mais forte é válida:

$$\delta\bar{\zeta}_1 \prec \bar{\varphi}_1(y_1 + \bar{\zeta}_1, y_2 + \bar{\zeta}_2).$$

Um argumento semelhante implica que

$$\delta\bar{\zeta}_2 \prec \bar{\varphi}_2(y_1 + \bar{\zeta}_1, y_2 + \bar{\zeta}_2).$$

E a aplicação do Teorema 3.1.1 garante a convergência das séries. \square

3.2

Aspectos Elementares de Singularidades Sela-Nó

3.2.1

Forma Normal de Dulac e Consequências

Agora iremos considerar o caso de *selas-nó*, i.e quando $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$. Veremos que neste caso, por sucessivas trocas apropriadas de coordenadas, o sistema de EDOs (ou a 1-forma) que induz a folheação possui uma representação canônica. Este é o conteúdo de seguinte

Teorema 3.2.1 (Dulac) *Seja \mathcal{F} uma folheação que define uma sela-nó em $(0,0)$ em \mathbb{C}^2 . Então, em coordenadas apropriadas (y_1, y_2) , \mathcal{F} é dada pela 1-forma holomorfa*

$$\omega = [y_1(1 + \lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)] dy_2 - y_2^{p+1} dy_1.$$

Prova. Primeiramente iremos considerar a seguinte troca de coordenadas $x_1 = y_1 + \zeta_1(y_1, y_2)$, $x_2 = y_2 + \zeta_2(y_1, y_2)$ no seguinte sistema de EDOs:

$$\begin{cases} dx_1/dT = x_1 + \varphi_1(x_1, x_2), \\ dx_2/dT = \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Agora definimos

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{1,Q} = 0 \text{ sempre que } q_2 = 0 \\ \zeta_{1,Q} = 0 \text{ sempre que } q_2 \neq 0, \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{2,Q} = 0 \text{ sempre que } q_2 = 0 \\ \zeta_{2,Q} = 0 \text{ sempre que } q_2 \neq 0, \end{array} \right.$$

para cada índice $Q = (q_1, q_2)$. Como $\|Q\| \geq 2$, segue que $\delta_{1,Q} = q_1 - 1 \geq 1$ para $\zeta_{1,Q} \neq 0$. De forma semelhante, $\delta_{2,Q} = q_1 \geq 2$ sempre que $\zeta_{2,Q} \neq 0$. Por outro lado, temos

$$\delta \bar{\zeta}_1 \prec \bar{\varphi}_1(y_1 + \bar{\zeta}_1, y_2 + \bar{\zeta}_2) + \frac{\partial \bar{\zeta}_1}{\partial y_1} \bar{\psi}_1 + \frac{\partial \bar{\zeta}_1}{\partial y_2} \bar{\psi}_2.$$

Observe que $\zeta_{1,Q} = 0$ quando $q_2 \neq 0$ então $\bar{\zeta}_1$ depende somente de y_1 , de forma que $\frac{\partial \bar{\zeta}_1}{\partial y_2} = 0$. Em particular, os coeficientes não-nulos da série $\bar{\zeta}_1$ são tais que $q_2 = 0$. Segue da troca de coordenadas acima definida que todos os monômios que aparecem em $\partial \bar{\zeta}_1 / \partial y_1 \bar{\psi}_1$ dependem de y_2 . Portanto estes monômios não aparecem na série de ζ_1 e podemos concluir a seguinte estimativa mais forte

$$\delta \bar{\zeta}_1 \prec \bar{\varphi}_1(y_1 + \bar{\zeta}_1, y_2 + \bar{\zeta}_2).$$

Um argumento semelhante implica que

$$\delta \bar{\zeta}_2 \prec \bar{\varphi}_2(y_1 + \bar{\zeta}_1, y_2 + \bar{\zeta}_2).$$

A convergência da troca de coordenadas segue ao aplicarmos o Método Majorante de Cauchy. Isso nos permite supor que φ_1 e φ_2 são divisíveis por x_2 . Em outras palavras, o sistema de EDOs original é dado por

$$X(x_1, x_2) = [x_1 + x_2 R(x_1, x_2)] \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \phi(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Suponha que $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2 R(x_1, x_2)$ e $B(x_1, x_2) = x_2 \phi(x_1, x_2)$. Observe que o conjunto $\{A = 0\} \cap \{B = 0\}$ se reduz à origem $(0, 0)$. Logo o ideal associado ao ponto $(0, 0)$ é maximal, sendo gerado por x_1 e x_2 . Segue do Teorema de Nullstellensatz de Hilbert que este ideal maximal é o radical do ideal gerado por A e B . Em particular, existe $p + 1 \geq 2$ tal que x_2^{p+1} pertence ao ideal gerado por A e B (já que x_2 não pode pertencer a esse ideal). A seguir, expandimos tanto A quanto B em termos de x_2 , i.e., $A = a_0(x_1) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x_1) x_2^i$ e $B = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(x_1) x_2^i$. Da divisão de B por A no anel $C\{x_1\}$ obtemos

$$B = AQ + x_2^{p+1} U(x_2) \quad (Q = 0 \text{ se } x_2 = 0).$$

De fato, $a'_0(x_1) = 1$ de forma que o resto não depende de x_1 . Além disso, $U(0) \neq 0$ já que $p + 1$ é a menor potência positiva de x_2 que pertence ao ideal gerado por A e B . Agora considere o compo vetorial

$$Y = -\frac{Q}{U} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial x_1},$$

que satisfaz $Y(0, 0) \neq (0, 0)$, pois $U(0, 0) = U(0) \neq 0$. Segue (de $Q = 0$ para $\{x_2 = 0\}$) que $\{x_2 = 0\}$ é uma solução de Y . Pelo Teorema da Caixa de Fluxo, existem coordenadas (z_1, z_2) tais que o campo vetorial se torna

$$Y = \frac{\partial}{\partial z_1} \quad \text{e} \quad z_2 = x_2,$$

donde o resultado segue. □

Considere uma folheação \mathcal{F} como no teorema precedente, possuindo uma singularidade sela-nó. Logo, existem coordenadas apropriadas em que o campo vetorial é dado pela seguinte forma normal:

$$X = [y_1(1 + \lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)] \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2^{p+1} \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Agora iremos calcular a holonomia $h(z)$, para z em uma seção local transversa à separatriz $\{y_2 = 0\}$, associada a um círculo contornando a singularidade. Este cálculo simples será útil nas seções subsequentes. Por enquanto, esta conta nos dará uma interpretação geométrica para o número $p + 1$ que aparece na forma normal acima.

Lema 3.2.2 *A holonomia associada à separatriz $\{y_2 = 0\}$ e a um círculo em torno de uma singularidade sela-nó é dada por $h(z) = z + z^{p+1} + \dots$.*

Prova. Definindo $y_1(t) = re^{2\pi it}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dt} &= \frac{dy_2}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dt} \\ &= \frac{y_2^{p+1}}{[y_1(1 + \lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)]} \frac{dy_1}{dt} \\ &= \frac{y_2^{p+1}}{re^{2\pi it}[1 + \lambda y_2^p + y_2 Q(re^{2\pi it}, y_2)]} 2\pi i r e^{2\pi it} \\ &= y_2^{p+1}(t)(1 + h.o.t.)2\pi i \end{aligned} \tag{3-10}$$

Além disso, denotamos por $y_2(t) = \sum_{k \geq 1} a_k(t)z^k$ com condição inicial $y_2(0) = z$, tal que

$$\frac{dy_2}{dt} = \sum_{k \geq 1} a'_k(t)z^k, \tag{3-11}$$

$$(y_2)^{p+1}(t) = \left(\sum_{k \geq 1} a_k(t) z^k \right)^{p+1}. \quad (3-12)$$

Comparando as expressões obtidas para $\frac{dy_2}{dt}$ em (3-10) e em (3-11), percebemos que $a'_k(t) = 0$ para $k \leq p$, i.e., as funções $a_k(t)$ são todas constantes. Como $y_2(0) = z$, temos que $a_1(0) = 1$, $a_2(0) = \dots = a_p(0) = 0$.

Agora comparamos o termo $k = p + 1$ e usando (3-12) obtêm-se

$$a'_{p+1}(t) = 2\pi i a_1^{p+1}(t),$$

De forma que $a_{p+1}(t) = 2\pi i t$, pois $a_1(t) = 1$.

Concluimos que para $t = 1$, $y_2(1) = z + 2\pi i z^{p+1} + \dots$. Como $h(z) = y_2(1)$, para condição inicial $y_2(0) = z$, segue que $h(z) = z + z^{p+1} + \dots$. \square

3.2.2

Coordenadas de Fatou e Flor de Leau

Tendo em vista o Lema 3.2.2, somos naturalmente levados a investigar a dinâmica topológica de difeomorfismos que são tangentes à identidade. Em particular, gostaríamos de entender o papel da multiplicidade “ $p + 1$ ” na dinâmica topológica desses difeomorfismos. Aqui seguimos a abordagem feita em (Car-G).

Primeiramente iremos analisar aplicações da forma $f(z) = z + z^{p+1} + \dots$, no caso prototípico em que $p = 1$. Primeiramente, aplicaremos uma mudança de coordenadas, $A_0(z) = -1/z$, levando 0 em ∞ . Nestas novas coordenadas, f assume a seguinte expressão

$$g(z) = z + 1 + b/z + \dots$$

perto de infinito.

Considere $R_1 = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > c\}$. Note que se $c > 0$ for suficientemente grande, então $g(R_1) \subset R_1$. Por indução, é fácil verificar que para $g(z) = z + 1 + o(1)$ em R_1 ,

$$\operatorname{Re}(g^n(z)) > \operatorname{Re}(z) + \frac{n}{2},$$

e

$$\frac{n}{2} \leq |g^n(z)| \leq |z| + 2n,$$

onde $g^n = g \circ \dots \circ g$, (n vezes) e $n \geq 1$. Agora defina a aplicação φ_n em R_1 dada por $\varphi_n(z) = g^n(z) - n - b \log n$.

Como $g^{k+1}(z) = g^k(z) + 1 + \frac{b}{g^k(z)} + O(1/k^2)$, obtêm-se

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k(z) = b[\log k - \log(k+1)] + \frac{b}{g^k(z)} + O(1/k^2) = O(1/k).$$

Assim, temos que para $z \in R_1$:

$$|\varphi(z) - z| \leq |\varphi_1(z) - z| + \sum_{k=1}^{n-1} |\varphi_{k+1}(z) - \varphi_k(z)| = O(\log n).$$

Observe que se mostrarmos que φ_n é convergente, então teremos mostrado que g é holomorficamente conjugada à translação $T(z) = z + 1$. De fato, temos que $\lim \varphi_n(g(z)) = \lim[\varphi_{n+1}(z) + 1 + b \log(1 + 1/n)] = \lim \varphi_{n+1} + 1$.

Lema 3.2.3 *A sequência φ_n converge para a função conforme φ .*

Prova. Considere as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z) &= b \log n - b \log(n+1) + g^{n+1}(z) - g^n(z) - 1 \\ &= -\frac{b}{n} + \frac{b}{g^n(z)} = O(1/n^2) \\ &= b \left[\frac{1}{n + b \log n + \varphi_n(z)} - \frac{1}{n} \right] + O(1/n^2) \\ &= \frac{1}{n^2} O(|b \log n + \varphi_n(z)|) + O(1/n^2) = O\left(\frac{\log n}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Assim, $\sum |\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| < \infty$. Como todos os φ_n são conformes, o limite uniforme φ também o é. \square

A seguir, estendemos φ analiticamente a qualquer domínio Ω , em que g esteja definida, $g(\Omega) \subset \Omega$ e tal que $\text{Re}(g^n(z))$ tende a ∞ , para $z \in \Omega$.

Em particular, é possível construir um tal domínio invariante Ω com fronteira suave, conforme a Figura 3.1.

Assim, $f(z) = z + z^2 + \dots$ é conjugada à translação $T(z) = z + 1$ na região formada pelo cardióide, $A_0^{-1}(\Omega)$, como mostra a Figura 3.2. Em particular, observamos a presença de conjuntos abertos constituídos por pontos cujos α -limite e ω -limite de f coincide com $(0, 0)$.

O caso geral, $p \geq 2$ pode ser tratado com métodos semelhantes, brevemente descrevemos o procedimento. Considere $f(z) = z + z^{p+1} + \dots$. Observe que, a menos de uma conjugação, podemos supor que $f(z) = z + \frac{1}{p} z^{p+1} + \dots$. Agora, conjugando por $A_p(z) = -z^{1/p}$ obtêm-se

$$A_p^{-1} \circ f \circ A_p(z) = f_p(z) = z \left(1 + \frac{1}{p} z + \dots \right)^p = z + z^2 + \dots$$

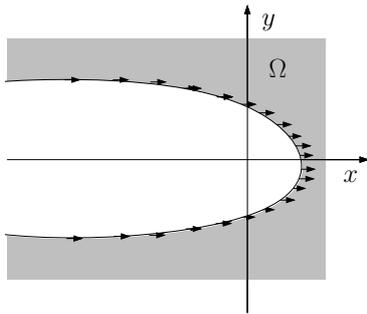


Figura 3.1: Domínio Invariante por g

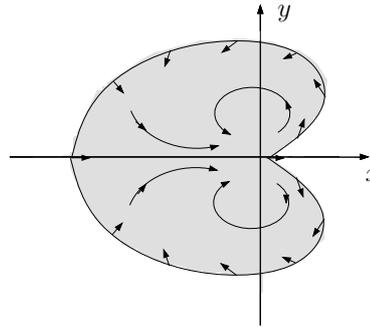


Figura 3.2: Dinâmica de f no cardióide

De forma que se reduz ao caso em que $p = 1$, analisado anteriormente. Observe que os setores $|\arg z - 2k\pi/p| < \pi/p$ são mapeados conformemente no plano menos o eixo real negativo por A_p^{-1} . Essencialmente, trata-se de uma ramificação de ordem p da figura obtida anteriormente.

Em termos mais precisos, um domínio V é dito um *domínio de Leau* se f é conjugada à translação $T(z) = z + 1$ em V e se a sequência f^n converge para um ponto em ∂V . Em particular, a região formada pelo cardióide, ilustrada na Figura 3.2 é um domínio de Leau.

A aplicação f tem p *pétalas atratoras* P_k , que são domínios invariantes limitados por curvas de Jordan c_k , que são simétricas em relação aos raios $\arg z = (2k\pi)/p$. Na origem, c_k possui duas tangentes $\arg z = (2k \pm 1)\pi/p$.

A figura final é resumida pelo teorema a seguir.

Teorema 3.2.4 (Teorema da Flor) *Suponha que $f(z) = z + z^{p+1} + \dots$ perto de 0. Então f tem exatamente p domínios de Leau L_1, \dots, L_p correspondendo ao ponto da fronteira 0, e (f^n) converge a zero, localmente uniformemente em L_k . Cada domínio L_k contém uma pétala atratora invariante P_k (não unicamente determinada). Em particular, existe uma função ϕ_k em L_k conjugando $h(z) = z + 1 + \dots$ a uma translação, levando L_k no plano complexo.*

3.3

Algumas Formas Normais em Dimensões mais altas

Primeiramente, observamos que a generalização do Método Majorante de Cauchy para várias variáveis é direta e aqui iremos apenas enunciá-lo.

Teorema 3.3.1 (Método Majorante de Cauchy em Várias Variáveis)

Considere um sistema de EDOs em várias variáveis dada por um campo vetorial X :

$$\begin{cases} dx_1/dT = \lambda_1 x_1 + \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ dx_n/dT = \lambda_n x_n + \varphi_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (3-13)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores associados a X em uma singularidade. Considere ainda, a seguinte troca formal de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \zeta_1(y_1, \dots, y_n) \quad \text{onde} \quad \zeta_1(y_1, \dots, y_n) = \sum_{\|Q\|>1} \zeta_{1,Q} y^Q, \\ &\vdots \\ x_n &= y_n + \zeta_n(y_1, \dots, y_n) \quad \text{onde} \quad \zeta_n(y_1, \dots, y_n) = \sum_{\|Q\|>1} \zeta_{n,Q} y^Q. \end{aligned} \quad (3-14)$$

Suponha que existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta \bar{\zeta}_i < \bar{\varphi}_i(y_1 + \bar{\zeta}_1, \dots, y_n + \bar{\zeta}_n).$$

para $i = 1, \dots, n \in \mathbb{C}$. Então a série de ζ_i converge e portanto define uma troca de cartas holomorfa. \square

Iremos obter um resultado que é análogo ao Teorema 3.1.2 para várias variáveis.

Definição 3.3.2 Uma n -upla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ pertence ao domínio de Poincaré se $\{z \in \mathbb{C} ; t_1 \lambda_1 + \dots + t_n \lambda_n = z \text{ e } t_1 + \dots + t_n = 1\}$, não contém a origem $0 \in \mathbb{C}$.

Um campo vetorial X definido em \mathbb{C}^n é do tipo Poincaré se o seu espectro estiver no domínio de Poincaré. Em particular, isso implica que X é diagonalizável.

Teorema 3.3.3 (Teorema de Linearização de Poincaré) Seja X um campo vetorial holomorfo definido em torno da origem de \mathbb{C}^n tendo parte linear do tipo Poincaré, com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Suponha que não existam números naturais a_1, \dots, a_n tais que $a_1 \lambda_1 + \dots, a_n \lambda_n = 0$ (não-ressonante). Então existe uma troca de coordenadas holomorfa que lineariza o sistema.

Prova. A idéia da prova é a mesma do caso em que a dimensão é 2. Substituindo as Equações (3-14) no sistema (3-13), obtêm-se as seguintes relações.

$$\sum_{\|Q\|>1} (\delta_{i,Q} \zeta_{i,Q} + \psi_{i,Q}) y^Q = \varphi_i(y_1 + \zeta_1, \dots, y_n + \zeta_n) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \zeta_i}{\partial y_k} \psi_k,$$

para $i = 1, \dots, n$, onde $y^Q = y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n}$ e $\delta_{i,Q} = q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_n - \lambda_i$, com $q_i \in \mathbb{N}$.

Graças à hipótese de não-ressonância, $\delta_{i,Q} \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$.

Seja $\delta = t_1 \lambda_1 + \dots + t_n \lambda_n$, onde $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ e $t_1 + \dots + t_n = 1$. Como a parte linear de X é do tipo Poincaré, $\delta > 0$, e por construção, $\delta < \delta_{i,Q}$ para $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta \bar{\zeta}_j &< \sum_Q \delta_{j,Q} \|\zeta_{j,Q}\| y^Q + \bar{\psi}_j \\ &< \bar{\varphi}_j(y_1 + \bar{\zeta}_1, \dots, y_n + \bar{\zeta}_n) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{\zeta}_j}{\partial y_k} \bar{\psi}_k. \end{aligned}$$

Como $\bar{\psi}_k = 0$, temos que

$$\delta \bar{\zeta}_j < \bar{\varphi}_j(y_1 + \bar{\zeta}_1, \dots, y_n + \bar{\zeta}_n).$$

A convergência da desejada troca de coordenadas resulta da aplicação do Teorema 3.3.1. \square

Agora iremos lidar com o caso de uma singularidade sela-nó em dimensão 3. Primeiramente iremos considerar o caso em que apenas um dos autovalores é zero.

Teorema 3.3.4 *Seja X um campo vetorial holomorfo definido em torno da origem de \mathbb{C}^3 com parte linear do tipo Poincaré, com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Suponha que eles são não-ressonantes e que $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Então existe uma troca de cartas analítica em que o sistema original é dado (em termos de campos vetoriais) por*

$$X = [\lambda_1 y_1 + \psi_1(y_1, y_2, y_3)] \partial / \partial y_1 + [\lambda_2 y_2 + \psi_2(y_1, y_2, y_3)] \partial / \partial y_2 + y_3 H(y_1, y_2, y_3) \partial / \partial y_3.$$

Em particular, o 2-plano $\{y_3 = 0\}$ é invariante.

Prova. Usando a mesma notação anterior, consideramos a troca formal de coordenadas tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{1,Q} = 0 \text{ se } q_3 = 0 \\ \zeta_{1,Q} = 0 \text{ se } q_3 \neq 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \psi_{2,Q} = 0 \text{ se } q_3 = 0 \\ \zeta_{2,Q} = 0 \text{ se } q_3 \neq 0 \end{array} \right. \text{ and } \left\{ \begin{array}{l} \psi_{3,Q} = 0 \text{ se } q_3 = 0 \\ \zeta_{3,Q} = 0 \text{ se } q_3 \neq 0 \end{array} \right.$$

Como no Teorema 3.3.3, a hipótese sobre os autovalores garante a existência de $\delta > 0$ tal que $\delta < \delta_{i,Q}$ para $i = 1, 2, 3$.

Assim,

$$\delta\bar{\zeta}_i \prec \bar{\varphi}_j(y + \bar{\zeta}) + \frac{\partial\bar{\zeta}_i}{\partial y_1}\bar{\psi}_1 + \frac{\partial\bar{\zeta}_i}{\partial y_2}\bar{\psi}_2 + \frac{\partial\bar{\zeta}_i}{\partial y_3}\bar{\psi}_3.$$

Observe que $\bar{\zeta}_i$ depende somente de y_1 e y_2 , de forma que o último termo na estimativa acima se anula para $i = 1, 2, 3$. Por outro lado, por construção, todos os coeficientes não-nulos $\psi_{i,Q}$ estão associados a monômios que dependem de y_3 , de tal forma que podemos concluir o seguinte

$$\delta\bar{\zeta}_i \prec \bar{\varphi}_i(y + \bar{\zeta}).$$

Como antes, aplicando o Teorema 3.3.1 conclui-se a demonstração. \square

Observação 3.3.5 Observe que como o plano $\{y_3 = 0\}$ é invariante por X , podemos aplicar o Lema 3.1.3 e supor que o campo tem duas separatrizes neste plano.

A seguir, consideramos o caso em que dois autovalores são iguais a *zero*. Veremos que o método utilizado no caso anterior para provar a existência de um plano invariante não funciona nesta situação.

Suponha X como no Teorema 3.3.4, exceto que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 \neq 0$. Por esse método, podemos tentar ver se existe uma troca de cartas convergente que faz com que o plano seja invariante. Denotemos X por

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3)\partial/\partial x_1 + \varphi_2(x_1, x_2, x_3)\partial/\partial x_2 + [\lambda_3 x_3 + \varphi_1(x_1, x_2, x_3)]\partial/\partial x_3.$$

Observe que se existe uma troca de coordenadas em que podemos supor φ_1, φ_2 e φ_3 divisíveis por x_1 , então $X(0, x_2, x_3) = (0, 0, \lambda_3 x_3)$. O mesmo ocorre se ao invés de x_1 , tomarmos x_2 , isto é, o plano $\{x_2 = 0\}$ também é degenerado em uma reta. Podemos encontrar uma troca formal de coordenadas tal que φ_1 seja divisível por x_1 , e φ_2, φ_3 sejam divisíveis por x_2 . Neste caso, o plano $\{x_1 = 0\}$ é invariante por X . Porém, o método que usamos nas situações anteriores não nos permite concluir a convergência da série.

Agora retornamos ao caso sela-nó, em que dois dos autovalores são diferentes de *zero*.

Teorema 3.3.6 *Seja X um campo vetorial holomorfo definido em torno da origem de \mathbb{C}^3 , com autovalores $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_3 = 0$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ um inteiro positivo arbitrário. Então existe uma troca de coordenadas analítica em que o sistema original é dado (em termos de campos vetoriais) por*

$$X = F(y_1, y_2, y_3)\partial/\partial y_1 + G(y_1, y_2, y_3)\partial/\partial y_2 + H(y_1, y_2, y_3)\partial/\partial y_3,$$

tal que $F(0, 0, y_3) = G(0, 0, y_3) \equiv 0$, i.e., o eixo $\{y_1 = y_2 = 0\}$ é invariante por X .

Prova. Considere uma troca de coordenadas da forma

$$x_1 = y_1 + \sum_{i=2}^N a_i y_3^i, \quad x_2 = y_2 + \sum_{i=2}^N b_i y_3^i, \quad x_3 = y_3. \quad (3-15)$$

Devemos mostrar que N, a_i, b_i podem ser escolhidos de maneira a cumprir as exigências. Nas coordenadas (y_1, y_2, y_3) o campo vetorial X é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sum_{i=2}^N i a_i y_3^{i-1} \\ 0 & 1 & -\sum_{i=2}^N i b_i y_3^{i-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ G_1 \\ H_1 \end{bmatrix}. \quad (3-16)$$

Na fórmula acima, as funções F_1, G_1, H_1 admitem, respectivamente, as seguintes expressões

$$F_1 = \lambda_1 y_1 + \sum_{i=2}^N \lambda_1 a_i y_3^i + \left(\sum_{i=2}^N a_i y_3^i \right) \left(\sum_{i=2}^N b_i y_3^i \right) (f_{1,1}(y_3) + (*)) + f_{1,2}(y_3) + (**), \quad (3-17)$$

$$G_1 = \lambda_2 y_2 + \sum_{i=2}^N \lambda_2 b_i y_3^i + \left(\sum_{i=2}^N a_i y_3^i \right) \left(\sum_{i=2}^N b_i y_3^i \right) (g_{1,1}(y_3) + (***)) + g_{1,2}(y_3) + (* ** *), \quad (3-18)$$

$$H_1 = h(y_3) + (* ** * *). \quad (3-19)$$

Nas equações acima, as componentes representadas por $(*), \dots, (* ** * *)$ não contém constantes ou termos que dependem somente de y_3 . Em outras palavras, estas componentes pertencem ao ideal $I(y_1) \cup I(y_2)$.

Por outro lado, desejamos considerar os termos que dependem somente de y_3 que aparecem nas duas primeiras coordenadas de X . Após realizarmos o produto matricial (4-1), estas coordenadas são dadas respectivamente, por

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^N \lambda_1 a_i y_3^i + \left(\sum_{i=2}^N a_i y_3^i \right) \left(\sum_{i=2}^N b_i y_3^i \right) f_{1,1}(y_3) + f_{1,2}(y_3) - \left(\sum_{i=2}^N i a_i y_3^{i-1} \right) h(y_3) \quad (3-20) \\ & \sum_{i=2}^N \lambda_2 b_i y_3^i + \left(\sum_{i=2}^N a_i y_3^i \right) \left(\sum_{i=2}^N b_i y_3^i \right) g_{1,1}(y_3) + g_{1,2}(y_3) - \left(\sum_{i=2}^N i b_i y_3^{i-1} \right) h(y_3) \quad (3-21) \end{aligned}$$

Agora consideramos as expansões de Taylor de $f_{1,1}, g_{1,1}$.

$$f_{1,1}(y_3) = \alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y_3 + \dots \quad \text{e} \quad g_{1,1}(y_3) = \beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} y_3 + \dots \quad (3-22)$$

Além disso, a hipótese sobre a parte linear de X e a expressão da troca de coordenadas em (3-15) nos permitem escrever

$$\begin{aligned} f_{1,2}(y_3) &= \alpha_2^{(2)} y_3^2 + \cdots \quad ; \quad g_{1,2}(y_3) = \beta_2^{(2)} y_3^2 + \cdots \quad , \\ h(y_3) &= c_k y_3^k + \cdots \quad (c_k \neq 0, k \geq 2). \end{aligned} \quad (3-23)$$

Como apenas desejamos cancelar os coeficientes de grau menor que $n_0 + 1$, que dependem somente de y_3 , as Equações (3-20) e (3-21) podem ser respectivamente substituídas por (3-24) e (3-25) sem perda de generalidade, onde

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n_0} \lambda_1 a_i y_3^i + \left(\sum_{i=2}^{n_0-1} a_i y_3^i \right) \left(\sum_{i=2}^{n_0-1} b_i y_3^i \right) (\alpha_0^{(1)} + \alpha_1^{(1)} y_3 + \cdots + \alpha_{n_0-2}^{(1)} y_3^{n_0-2}) + \\ + (\alpha_2^{(2)} y_3^2 + \cdots + \alpha_{n_0}^{(2)} y_3^{n_0}) - \left(\sum_{i=2}^{n_0-k} i a_i y_3^{i-1} \right) (c_k y_3^k + \cdots + c_{n_0} y_3^{n_0}) \end{aligned} \quad (3-24)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n_0} \lambda_2 b_i y_3^i + \left(\sum_{i=2}^{n_0-1} a_i y_3^i \right) \left(\sum_{i=2}^{n_0-1} b_i y_3^i \right) (\beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} y_3 + \cdots + \beta_{n_0-2}^{(1)} y_3^{n_0-2}) + \\ + (\beta_2^{(2)} y_3^2 + \cdots + \beta_{n_0}^{(2)} y_3^{n_0}) - \left(\sum_{i=2}^{n_0-k} i b_i y_3^{i-1} \right) (c_k y_3^k + \cdots + c_{n_0} y_3^{n_0}). \end{aligned} \quad (3-25)$$

Levando em consideração as Fórmulas (3-24) e (3-25), a proposição se reduz à seguinte afirmação.

Afirmação: Os coeficientes $\alpha_0^{(1)}, \beta_0^{(1)}$ são constantes (isto é, eles não dependem de a_i, b_i). Além disso, $\alpha_l^{(1)}, \beta_l^{(1)}$ são polinomiais em $a_1, b_1, \dots, a_l, b_l$ para $1 \leq l \leq n_0 - 2$. Ainda, $\alpha_l^{(2)}, \beta_l^{(2)}$ polinomiais em $a_1, b_1, \dots, a_{l-1}, b_{l-1}$ para $1 \leq l \leq n_0$. Em particular, nenhum desses coeficientes dependem de a_{n_0}, b_{n_0} .

Prova da Afirmação. Os fatos referentes a $\alpha_l^{(1)}, \beta_l^{(1)}$ ($l = 0, 1, \dots, n_0 - 2$) são consequências imediatas de (3-22) e da forma da troca de coordenadas (3-15).

A afirmação referente a $\alpha_l^{(2)}, \beta_l^{(2)}$ ($l = 1, \dots, n_0$) possui uma justificativa semelhante, contudo, merece mais alguns comentários.

Ao realizar a troca de coordenadas dada por (3-15) e, por exemplo, considerarmos dy_1/dT , temos

$$\lambda_1 y_1 + \sum_{i=2}^N \lambda_1 a_i y_3^i + \left(\sum_{i=2}^N a_i y_3^i \right) \left(\sum_{i=2}^N b_i y_3^i \right) (f_1^1(y_3) + (*)) + f_2^1(y_3) + (**),$$

para funções holomorfas apropriadas f_1^1, f_2^1 . Além disso, (*) representa termos que não dependem somente da variável y_3 enquanto que (**) representa termos

que não são nem constantes nem dependem somente da variável y_3 . Fixemos um monômio de f_2^1 de grau $r \in \mathbb{N}$. Os coeficientes que entram no termo $\alpha_q^{(2)}$ são aqueles que correspondem aos monômios $y_1^{q_1} y_2^{q_2} y_3^{q_3}$ tais que $1 < q_1 + q_2 + q_3 < r$. Isto resulta a afirmação, e assim concluimos a demonstração do Teorema. \square

4

Aspectos Avançados de Singularidades

4.1

Sela-Nó em Dimensão 2

4.1.1

Propriedades Básicas

Conforme foi visto anteriormente, para uma folheação \mathcal{F} (ou campo vetorial) com uma singularidade do tipo sela-nó em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ existe uma troca de coordenadas holomorfa, através da qual \mathcal{F} pode ser dada pela seguinte 1-forma (i.e, Forma Normal de Dulac).

$$\omega(y_1, y_2) = [y_1(1 + \lambda y_2^p) + y_2 R(y_1, y_2)] dy_2 - y_2^{p+1} dy_1,$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^*$ e a ordem de R em $(0, 0)$ com relação a y_1 é pelo menos $p + 1$.

Consideremos a seguinte troca de coordenadas *formal*:

$$(y_1, y_2) \mapsto (\varphi(y_1, y_2), y_2), \quad (4-1)$$

levando ω em sua forma normal formal $\omega_{p,\lambda}$, onde $\varphi(y_1, y_2) = y_1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(y_1)y_2^i$, e

$$\omega_{p,\lambda}(y_1, y_2) = [y_1(1 + \lambda y_2^p)] dy_2 - y_2^{p+1} dy_1.$$

A existência de uma tal troca formal de coordenadas se resume a um caso particular do caso de dimensão 3, analisado na seção anterior. Revendo o argumento com um pouco mais de cuidado, observamos que as funções $a_1(y_1)$ são holomorfas em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, apesar da troca de coordenadas *não* ser necessariamente convergente. Ou seja, as 1-formas, ω e $\omega_{p,\lambda}$ *não* são holomorficamente conjugadas, em geral.

Exemplo: Consideremos o seguinte exemplo dado por Euler:

$$(y - x^2)dx - x^2dy = 0.$$

Observe que ela admite uma solução formal dada por

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n+1},$$

que não converge em nenhuma vizinhança de 0.

Nesta seção iremos discutir o problema da classificação analítica de selas-nó, seguindo (Ma-R). Nosso objetivo é resumir os principais pontos de (Ma-R), evidenciando o papel das normalizações setoriais e abordando os invariantes analíticos que surgem com a “troca de setores”.

Denominamos um *setor* V com vértice em 0, um setor angular de ângulo $\theta < 2\pi$, intersectado com a bola $B_r \subset \mathbb{C}$ centrada em $0 \in \mathbb{C}$ de raio r .

Seja f uma função holomorfa em $U \times V$, onde U é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ e $V \subseteq \mathbb{C}$ é um setor com vértice em 0. Dizemos que f possui uma *expansão assintótica* em $0 \in \mathbb{C}$, se dado $\hat{f} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(y_1)y_2^i$, para cada $y_1 \in U$ e todo $n \in \mathbb{N}$, existir $A_n(y_1) > 0$ tal que

$$|f(y_1, y_2) - \sum_{r=0}^{n-1} a_r(y_1)y_2^r| \leq A_n(y_1)y_2^n.$$

A idéia é que determinadas séries formais podem ser realizadas como expansões assintóticas de funções holomorfas, definidas em setores de ângulos $\theta < 2\pi$ e de raio r suficientemente pequeno. Em outras palavras, elas não estão definidas em uma vizinhança de zero, pois se este fosse o caso, a série teria que convergir, já que coincidiria com a série de Taylor das funções.

O próximo teorema devido ao trabalho em conjunto de H. Hukuara, T. Kimura, T. Matuda (H-K-M) implica que, embora em geral as 1-formas ω e $\omega_{p,\lambda}$ não sejam holomorficamente conjugadas em vizinhanças de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, elas o são em setores convenientemente escolhidos.

Teorema 4.1.1 (Hukuara-Kimura-Matuda (H-K-M)) *Seja φ uma série formal conforme definido em (4-1), i.e., a troca de coordenadas que leva ω em $\omega_{p,\lambda}$. Então para cada setor $V \in \mathbb{C}$ de ângulo menor que $\frac{2\pi}{p}$, existe uma aplicação holomorfa limitada*

$$\begin{aligned} \Phi_V : B_r \times (V \setminus \{0\}) &\rightarrow \mathbb{C} \times (V \setminus \{0\}) \\ (y_1, y_2) &\mapsto (\varphi_v(y_1, y_2), y_2), \end{aligned}$$

tal que:

1. $\Phi_V^* \omega \wedge \omega_{p,\lambda} = 0$;

2. φ é uma expansão assintótica em $0 \in \mathbb{C}$ de φ_v .

Φ_V chamada aplicação normalizante.

Simplificando, consideremos o caso particular em que $p = 1$. Note que os casos em que $p > 1$ podem ser lidados de maneira similar, exceto que o número de setores necessários para que se cubra a bola centrada em $0 \in \mathbb{C}$ aumenta. O procedimento geral seria uma generalização do caso $p = 1$.

Segundo o Teorema de Hukuara-Kimura-Matuda 4.1.1, é possível cobrir uma vizinhança B_r de $0 \in \mathbb{C}$ com dois setores de ângulos menores que 2π . Para fixar idéias, vamos supor que $V_1 = B_r \cap \{z \in \mathbb{C}; \arg \in [0, 5\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi]\}$ e $V_2 = B_r \cap \{z \in \mathbb{C}; \arg \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, 2\pi]\}$. Observe que $V_1 \cap V_2$ possui duas componentes conexas. A bissetriz de uma delas é o semi-eixo real positivo, assim iremos denotá-lo por V^+ . Analogamente denotaremos por V^- , a componente cuja bissetriz é o semi-eixo real negativo.

Consideremos a folheação induzida pela equação $\omega_{1,\lambda} = 0$ em uma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^2$. Seja \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_2) a folheação restrita a $B_r \times V_1$ (resp. $B_r \times V_2$). Naturalmente, \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 coincidem na interseção dos domínios, então denotamos a folheação em $B_r \times V^+$ (resp. $B_r \times V^-$) por \mathcal{F}^+ (resp. \mathcal{F}^-). O Teorema 4.1.1 garante a existência de aplicações normalizantes H_1 e H_2 definidas em $B_r \times (V_1 \setminus \{0\})$ e $B_r \times (V_2 \setminus \{0\})$, respectivamente.

No que se segue, nosso objetivo é o de entender o comportamento das aplicações que são responsáveis pela troca de setores. Primeiramente, a troca de setores $H_1 \circ H_2^{-1}$ dá origem a dois difeomorfismos, que denotaremos por g^+ e g^- , dependendo se estamos analisando a troca dos setores de \mathcal{F}^+ para \mathcal{F}^- ou de \mathcal{F}^- a \mathcal{F}^+ . A proposição seguinte nos dá uma caracterização para estas funções.

Proposição 4.1.2 *O difeomorfismo $g^+ = H_1 \circ H_2^{-1}|_{V^+}$ é uma translação e o difeomorfismo $g^- = H_1 \circ H_2^{-1}|_{V^-}$ é tangente à identidade.*

Antes de começarmos a demonstração da proposição, daremos uma abordagem geométrica para g^+ e g^- . Observe que as soluções de $\omega_{1,\lambda} = 0$, i.e, as folhas da folheação são dadas por

$$y_1(y_2) = c \cdot y_2^\lambda \cdot \exp\left(\frac{-1}{y_2}\right), \quad (4-2)$$

para $c \in \mathbb{C}$. De forma que cada folha de \mathcal{F}^+ (resp. \mathcal{F}^-) está em correspondência com $c \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, o espaço das folhas é isomorfo a \mathbb{C} , sendo parametrizado pelas constantes $c \in \mathbb{C}$. Portanto, g^+ (ou g^- , conforme $Re(x) > 0$ ou $Re(x) < 0$) está definido em \mathbb{C} e $g^+(c)$ (ou $g^-(c)$) é a folha correspondente quando trocamos de setores.

O que se segue é clássico após (Ma-R), entretanto seguimos a discussão em (R1). Consideremos o grupo dos automorfismos $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(V)$, tal que cada elemento é um difeomorfismo ϕ definido em um setor V com as seguintes propriedades:

1. $\phi(y_1, y_2) = (\varphi(y_1, y_2), y_2)$,
2. ϕ é uma expansão assintótica da identidade,
3. ϕ preserva a folheação \mathcal{F} induzida por $\omega_{1,\lambda} = 0$.

Assim, a aplicação normalizante obtida no Teorema 4.1.1 *não* é unicamente determinada. De fato, se H_1 é uma aplicação normalizante em $B_r \times (V_1 \setminus \{0\})$, então $H_1 \circ \phi$, com $\phi \in \Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(B_r \times V_1)$ também admite a troca de coordenadas (4-1) como expansão assintótica. Ou seja, a aplicação normalizante está unicamente definida a menos de uma composição com um elemento de $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(V)$. É por isso que a troca $H_1 \circ H_2^{-1}$ *não* é a identidade, em geral. Na realidade, a troca é uma *expansão assintótica da identidade*. Mais precisamente, trata-se de um elemento de $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(B_r \times V_1)$. O case especial em que a “colagem” das folhas é a identidade é exatamente o caso em que a forma normal formal é holomorficamente conjugada a Forma Normal de Dulac.

Um elemento $\phi(y_1, y_2) = (y_1 + b_0(y_2) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(y_2)y_1^i, y_2)$ está em $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}(V)$, se for assintótico à identidade e se preservar a folheação. Esta última condição implica que

$$d\phi(X) = X(\phi),$$

onde $X = (y_1(1 + \lambda y_2), y_2^2)$, i.e, o campo vetorial associado a $\omega_{1,\lambda} = 0$. Além disso, ϕ é assintótico à identidade se e somente se as funções $b_j(y_2)$ forem assintóticas à função nula quando y_2 tende a $0 \in \mathbb{C}$. Levando em conta estas considerações, podemos mostrar o resultado.

Prova da Proposição 4.1.2. Conforme foi visto anteriormente, a troca de setores $\phi = H_1 \circ H_2^{-1}$ é um elemento de $\Lambda_{\omega_{1,\lambda}}$. De fato, o Teorema 4.1.1 garante que as condições 1 e 2 são satisfeitas. Quanto à terceira, observamos que H_i ($i = 1, 2$) são tais que

$$dH_i(Y) = X(H_i)$$

onde X é como antes e $Y = (y_1(1 + \lambda y_2) + y_2 R(y_1, y_2), y_2^2)$. Logo,

$$\begin{aligned} d(H_1 \circ H_2^{-1})(X)(H_1 \circ H_2^{-1})^{-1} &= dH_1 \circ dH_2^{-1}(X)H_2 \circ H_1^{-1} \\ &= dH_1 \circ dH_2^{-1} \circ dH_2(Y) \circ H_1^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= dH_1(Y) \circ H_1^{-1} \\ &= X(H_1) \circ H_1^{-1} \\ &= X. \end{aligned}$$

Portanto, a folheação é preservada. Usando o fato que $\phi = H_1 \circ H_2^{-1}$ preserva a folheação, obtêm-se

$$\begin{aligned} &\left(y_1(1 + \lambda y_2) \left(1 + \sum_j j b_j(y_2) y_1^{j-1} \right) + y_2^2 b'_0(y_2) + y_2^2 \sum_j b'_j(y_2) y_1^j, y_2^2 \right) = \\ &\left(\left[y_1 + b_0(y_2) + \sum_j b_j(y_2) y_1^j \right] (1 + \lambda y_2), y_2^2 \right), \end{aligned}$$

o que nos leva à seguinte equação diferencial ordinária:

$$b'_j(y_2) y_2^2 + b_j(y_2) (j - 1) (1 + \lambda y_2) = 0.$$

Uma solução desta equação é dada por

$$b_j(y_2) = c_j \exp\left(\frac{j-1}{y_2}\right) \frac{1}{y_2^{(j-1)\lambda}},$$

onde c_j é a condição inicial.

Assim, para $j \geq 1$, têm-se

$$\begin{cases} \lim_{y_2 \rightarrow 0^+} b_j(y_2) = \infty \\ \lim_{y_2 \rightarrow 0^-} b_j(y_2) = 0 \end{cases}$$

Por outro lado, a hipótese de ϕ ser assintótica à identidade implica que quando $y_2 \rightarrow 0$, $b_j(y_2)$ é assintótico à função nula. Estas duas condições somente são válidas simultaneamente quando $y_2 \in V^+$ se $c_j = 0$ para $j \geq 1$. Finalmente, observamos que

$$\begin{cases} \lim_{y_2 \rightarrow 0^+} b_0(y_2) = 0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow 0^-} b_0(y_2) = \infty \end{cases}$$

um argumento análogo implica que $c_0 = 0$ quando $y_2 \in V^-$. Assim, chegamos à seguinte conclusão

$$\begin{cases} \text{if } y_2 \in V^+, & g^+ = \phi(y_1, y_2)|_{V^+} = (y_1 + c_0, y_2) \\ \text{if } y_2 \in V^-, & g^- = \phi(y_1, y_2)|_{V^-} = (y_1 + \sum_{i=1}^{\infty} b + i(y_2) y_1^i, y_2) \end{cases}$$

E o resultado segue. □

Consideremos agora duas folheações com singularidades sela-nó que são holomorficamente conjugadas. É interessante estudar a relação entre os seus difeomorfismos responsáveis pelas trocas de setores (no caso em que $p = 1$ nós os denotamos por g^+ e g^-). Veremos que se as selas-nó são holomorficamente conjugadas, então os difeomorfismos que fazem as trocas de setores são conjugados por um automorfismo do espaço das folhas.

Sejam \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 folheações holomorficamente conjugadas, dadas pelas 1-formas ω_1 e ω_2 , respectivamente. Ou seja, existe um difeomorfismo H que leva as folhas de \mathcal{F}_1 nas folhas de \mathcal{F}_2 . Também existem trocas formais de coordenadas h_1 e h_2 que levam ω_1 e ω_2 , respectivamente, em formas normais formais $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$. Conforme vimos anteriormente, apesar de h_1 (resp. h_2) não ser analítico em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, existem setores em que a série converge e as funções g_1^+ , g_1^- (resp. g_2^+ , g_2^-) que “colam” as folhas dos setores V^+ e V^- (no caso de $p = 1$).

Definiremos a seguinte relação de equivalência: dois difeomorfismos f e \tilde{f} são ditos equivalentes (e denotados por $f \sim \tilde{f}$) se existe $\sigma \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ com $\sigma'(0) = 1$ tal que:

$$\tilde{f} = \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma.$$

Em outras palavras, funções conjugadas pertencem à mesma classe de equivalência. Neste sentido, se as folheações são holomorficamente conjugadas, as funções de transição g_1^+ e g_1^- são equivalentes, respectivamente, a g_2^+ e g_2^- . De fato, observe que a função $\sigma = h_2 \circ H \circ h_1^{-1} \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ é um automorfismo do espaço das folhas (que é isomorfo a uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ conforme observado pela Fórmula 4-2) tangente à identidade. Denotando por $\sigma_+ = \sigma|_{V^+}$ e $\sigma_- = \sigma|_{V^-}$ segue que $g_1^+ = \sigma_+^{-1} \circ g_2^+ \circ \sigma_+$ e $g_1^- = \sigma_-^{-1} \circ g_2^- \circ \sigma_-$.

Em resumo os tipos analíticos de sela-nó com $p = 1$ estão em correspondência com as classes de equivalência dos difeomorfismos g^+ e g^- . Como a classe de conjugação das translações é óbvia, vemos que a informação está totalmente contida na conjugação do difeomorfismo g^- tangente à identidade. Logo, é natural estudarmos o espaço modular dos difeomorfismos de $(\mathbb{C}, 0)$ tangentes à identidade, de forma a termos realmente invariantes para singularidades do tipo sela-nó.

4.1.2

Automorfismos de $(\mathbb{C}, 0)$ Tangentes à Identidade

Agora iremos estudar os automorfismos σ de $(\mathbb{C}, 0)$ tangentes à identidade que foram utilizados na relação de equivalência na seção anterior. A descrição

desses espaços modulares foi feita independentemente por Ecalle e Voronin. Seguiremos a construção dada por Voronin para o caso prototípico, $p = 1$.

Mais precisamente, faremos uma classificação analítica de aplicações do conjunto $\mathcal{A} = \{f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) ; f(z) = z + az^2 + \dots, a \neq 0\}$. Como sempre, definimos duas aplicações $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ como sendo equivalentes se e somente se existir um difeomorfismo holomorfo H tal que $H \circ f_1 = f_2 \circ H$. Aqui iremos descrever estas classes de equivalência.

Começamos com alguns resultados de Análise e definições que serão utilizadas ao longo desta seção.

Definição 4.1.3 *Um homeomorfismo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ é quasiconforme se*

$$|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$$

para $k < 1$ em quase todo ponto.

A função $h_f = f_{\bar{z}}/f_z$ é denominada a *característica* da aplicação quasiconforme f , e

$$K_f(z_0) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|}{\inf_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|}.$$

é o *desvio quasiconforme* da aplicação f no ponto z_0 . Observe que se g for quasiconforme com característica $h_g = h_f$, então $g \circ f^{-1}$ é conforme.

Proposição 4.1.4 *Uma aplicação é quasiconforme em Ω se e somente se $K_f(z_0) < \infty$ para todo $z_0 \in \Omega$ e $K = \|K_f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$.*

Teorema 4.1.5 (Teorema Mensurável de Riemann) *Para qualquer função mensurável h tal que $\|h\|_{L^\infty} < 1$, existe uma aplicação quasiconforme f do plano \mathbb{C} em si mesmo, tendo h como função característica $h = h_f$.*

A seguir, vamos considerar o caso específico da função $f_0(z) = z/(1 - z)$ em \mathcal{A} . Observe que a inversão $A_0(z) = -1/z$ conjuga f_0 conformemente à translação $T(z) = z + 1$ em \mathbb{C}^* , isto é,

$$A_0 \circ f_0 = T \circ A_0. \tag{4-3}$$

Veremos que esta última observação de fato vale em geral. Ou seja, para cada função f pertencente a \mathcal{A} , existem certos domínios de \mathbb{C} em que f é *quasiconformemente* conjugada a T . Provamos isto usando os seguintes dois resultados.

Teorema 4.1.6 (A. Shcherbakov) *Seja $f \in \mathcal{A}$, $f_0(z) = z/(1-z)$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe δ e um homeomorfismo $H(z) = z + h(z)$ do disco K_δ (de raio δ) em si mesmo tal que:*

$$H \circ f_0 = f \circ H \text{ em } K_\delta \quad (4-4)$$

$$|h(z_1) - h(z_2)| < \varepsilon |z_1 - z_2|, z_j \in K_\delta \quad (4-5)$$

Este teorema basicamente afirma que toda função tangente à identidade é conjugada, em um disco suficientemente pequeno a f_0 por uma aplicação de Lipschitz com constante de Lipschitz próxima de 1.

Lema 4.1.7 *Suponha que para o homeomorfismo $H(z) = z + h(z)$, a Estimativa (4-5) é válida para $\varepsilon < 1$, então H é quasiconforme em K_δ .*

Prova. Este lema segue diretamente da Proposição 4.1.4. De fato, nestas condições, o desvio quasiconforme de H , $K(z_0)$ é tal que $K(z_0) \leq (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ para $z \in K_\delta$. □

Proposição 4.1.8 *Para cada $f \in \mathcal{A}$ existem domínios $R, L \in \mathbb{C}$ e uma aplicação quasiconforme G definida em $R \cup L$, satisfazendo*

- $G \circ T = f \circ G$ em R ,
- $G \circ T^{-1} = f^{-1} \circ G$ em L .

Escolhemos ε , $0 < \varepsilon < 1$ e pelo Teorema 4.1.6, obtêm-se um homeomorfismo $H : K_\delta \rightarrow K_\delta$, conjugando f e f_0 como em (4-4). Além disso, pelo Lema 4.1.7, ele é quasiconforme.

Seja $R = \{z \in \mathbb{C}; |\text{Im } z| > c, \text{Re } z > c\}$ para um número complexo fixado $c = 1/\rho$, para $\rho < \delta$.

A aplicação $G = H \circ A_0^{-1}$ em R está bem-definida e é quasiconforme, sendo a composição de uma aplicação conforme com uma quasiconforme. Seja $\Omega_1 = G(R)$. Segue de (4-3) e (4-4) que G é precisamente a conjugação desejada. Em conclusão, f é quasiconformemente conjugada a uma translação.

Além disso, como $T(R) \subset R$, Ω_1 é invariante por f (i.e, $f(\Omega_1) \subset \Omega_1$). Analogamente, podemos definir um domínio Ω_2 que seja invariante por f^{-1} . Mais precisamente, $\Omega_2 = G(L)$ onde $L = \{z \in \mathbb{C}; |\text{Im } z| > c, \text{Re } z < -c\}$ com c igual ao anterior. Naturalmente, no domínio L , f^{-1} é quasiconformemente conjugada à translação T^{-1} . O que estabelece a proposição. □

Equivalentemente, pode-se definir domínios R e L de forma que suas fronteiras deixam suaves (cf. (Car-G)). Nestas circunstâncias, $A_0^{-1}(R)$ é a conhecida região no formato de um cardióide (cf. Seção 3.2.2).

O seguinte lema, garante a existência de coordenadas analíticas A_1 e A_2 definida nos domínios Ω_1 e Ω_2 . No que se segue, podemos traçar um paralelo entre o caso sela-nó, analisado na seção anterior, e a “colagem” dos domínios Ω_1 e Ω_2 . Neste sentido, ainda estamos considerando conjugações que não estão definidas em toda uma vizinhança da origem. No caso sela-nó, obtivemos normalizações setoriais através do Teorema de Hukuara-Kimura-Matuda. O análogo a este teorema na presente situação é o seguinte

Lema 4.1.9 (Lema Básico) *Sejam R e Ω_1 como antes. Considere a translação $T(z) = z + 1$ e o homeomorfismo quasiconforme G_1 do domínio R em Ω_1 . Suponha que f é analítica em Ω_1 e tal que*

$$G_1 \circ T = f \circ G_1. \quad (4-6)$$

Então existe uma aplicação analítica $A_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo

1. A_1 é univalente em Ω_1 .
2. $A_1 \circ f = T \circ A_1$.
3. Se A'_1 é outra aplicação analítica em Ω_1 verificando as condições 1 e 2, então existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $A'_1 = A_1 + c$ em Ω_1 .

Observe que um lema análogo pode ser formulado para a existência de uma aplicação analítica $A_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ com as modificações óbvias.

Prova. Conforme visto, $f \in \mathcal{A}$ é equivalente a uma translação. Este lema assegura que a equivalência é, de fato, analítica.

O espaço quociente R/T é conformemente equivalente ao plano perfurado \mathbb{C}^* , com projeção $\pi_0 : R \rightarrow \mathbb{C}^*$. Como G_1 é uma aplicação analítica satisfazendo (4-6), as órbitas de f são discretas e $\Omega_1/f = S$ é uma Superfície de Riemann. Seja $\tilde{\pi} : \Omega_1 \rightarrow S$ a projeção do espaço quociente. De (4-6), obtemos um homeomorfismo quasiconforme $\tilde{G} : \mathbb{C}^* \rightarrow S$ entre os espaços quocientes.

Afirmção 1 : Se existe uma aplicação conforme $B : S \rightarrow \mathbb{C}^*$ então existe uma aplicação analítica $A_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ verificando 1, 2 and 3.

De fato, observe que Ω_1 é um recobrimento de \mathbb{C}^* com projeção holomorfa $\pi = B \circ \tilde{\pi}$. Entretanto, o recobrimento universal de \mathbb{C}^* é \mathbb{C} com projeção $\hat{\pi}$. Como Ω é um recobrimento simplesmente conexo de \mathbb{C}^* então existe uma inclusão $A : \Omega_1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\pi = \hat{\pi} \circ A$. Esta aplicação satisfaz 1, 2 e 3 (para mais detalhes confira (Vo)).

Afirmção 2 : Se existe uma aplicação quasiconforme $\tilde{G} : \mathbb{C}^* \rightarrow S$, então S é conformemente equivalente a \mathbb{C}^* .

Como $\tilde{G}^{-1} : S \rightarrow \mathbb{C}^*$ é uma aplicação quasiconforme de S em um domínio U , a característica h do seu inverso independe da escolha de um parâmetro

local em S , e $\|h\|_{L^\infty(U)} = k < 1$. Definindo, $h|_{\mathbb{C} \setminus U}$, h ainda é mensurável e $\|h\|_{L^\infty(U)} = k$. Pelo Teorema 4.1.5 existe um homeomorfismo quasiconforme F de \mathbb{C} em si mesmo com característica h e podemos supor que $F(0) = 0$. De forma que a aplicação $B = F \circ \tilde{G}^{-1} : S \rightarrow \mathbb{C}^*$ é conforme. \square

Agora analisamos as funções que fazem a troca de setores, i.e., os análogos a g_\pm no caso sela-nó.

Seja $\Phi_\pm = A_2 \circ A_1^{-1}|_{V_\pm}$, onde $V_+ = \Omega_1 \cap \Omega_2|_{\{z: \text{Im } z > 0\}}$ e $V_- = \Omega_1 \cap \Omega_2|_{\{z: \text{Im } z < 0\}}$.

Observação 4.1.10 Não é obvio, mas com algum esforço, é possível obter uma expressão para Φ_\pm , mais precisamente, $\Phi_\pm(z) = z + \sum_{k \geq 0} c_k^\pm \exp(\pm 2\pi i k z)$ (cf. (Vo)).

Para cada $f \in \mathcal{A}$ associamos um par Φ_\pm de funções holomorfas. Como estamos interessados em estudar as classes de equivalência de elementos de \mathcal{A} , é natural compreender as relações entre as aplicações Φ_\pm e $\tilde{\Phi}_\pm$ associadas a difeomorfismos conjugados f , e \tilde{f} , respectivamente. A vantagem da construção precedente reside no fato que as aplicações de transição correspondentes estão relacionadas de uma maneira particularmente simples.

De fato, pelo Lema 4.1.9 temos A_1 e, analogamente, existe A_2 tais que:

$$\begin{aligned} A_1 \circ f &= T \circ A_1 \\ A_2 \circ f^{-1} &= T^{-1} \circ A_2. \end{aligned}$$

Por hipótese, $f = H_0^{-1} \circ \tilde{f} \circ H_0$ de forma que

$$\begin{aligned} A_1 \circ H_0^{-1} \circ \tilde{f} &= T \circ A_1 \circ H_0^{-1} \\ A_2 \circ H_0^{-1} \circ \tilde{f}^{-1} &= T^{-1} \circ A_2 \circ H_0^{-1} \end{aligned}$$

Suponha que \tilde{A}_1 seja dada pelo Lema 4.1.9 para \tilde{f} . Então pelo item 3 deste mesmo lema, segue que

$$A_1 \circ H_0^{-1} \equiv \tau_1 \circ \tilde{A}_1.$$

Similarmente,

$$A_2 \circ H_0^{-1} \equiv \tau_2 \circ \tilde{A}_2,$$

onde τ_1 e τ_2 são translações. Então

$$\Phi_\pm = A_2 \circ A_1^{-1}|_{V_\pm}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_2 \circ \tilde{A}_2 \circ H_0 \circ H_0^{-1} \circ \tilde{A}_1^{-1} \circ \tau_1^{-1} \\
&= \tau_2 \circ \tilde{\Phi}_{\pm} \circ \tau_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Em conclusão, obtivemos o seguinte

Teorema 4.1.11 *Se f e \tilde{f} pertencem à mesma classe de equivalência analítica, então as funções de transição Φ_{\pm} e $\tilde{\Phi}_{\pm}$ são conjugadas por uma translação.*

Observação 4.1.12 O leitor deve ter percebido que, começando com o problema de classificar selas-nó, iteramos duas vezes o procedimento de “normalização setorial”. Talvez isso dê a impressão de que não fizemos nenhum progresso efetivo no sentido de descrever concretamente o espaço modular. Entretanto, este não é o caso. De fato, no caso sela-nó, usamos as normalizações setoriais obtidas pelo Teorema de Hukuhara-Kimura Matuda a fim de ter difeomorfismos g^+ , g^- em que classes de conjugação determinam o tipo analítico de uma sela-nó. A dificuldade é que g^- é tangente à identidade mas *não* é unicamente determinado. Apenas a classe de conjugação de g^- em $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ é canônica, no sentido em que ela é unicamente determinada. Assim, em uma comparação “concreta” entre duas selas-nó, seríamos reduzidos a ter que decidir se dois difeomorfismos tangentes à identidade “distintos” são conjugados em $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. A resposta para esse problema não é de maneira alguma óbvia. A fim de lidar com esta questão, novamente aplicamos normalizações setoriais (desta vez, obtidas pelo Lema Básico) para se ter novas funções ϕ_{\pm} . A vantagem seta segunda normalização é que ϕ_{\pm} estão “quase” unicamente determinados, no sentido que dois deles são conjugados por uma translação. Em particular, é fácil decidir se dois deles definem ou não o mesmo ponto no espaço modular correspondente.

4.2

Redução de Singularidades em Dimensão 2

Até agora estivemos analisando apenas campos vetoriais com singularidades simples. Porém, ficará evidente ao longo desta seção, que existe um método particularmente efetivo de lidar com singularidades de ordem superior. O Teorema de Seidenberg basicamente afirma que através da composição de um número finito de aplicações de “blow-up”, é possível reduzir a ordem de uma singularidade isolada até que se obtenha uma superposição de singularidades simples. Nesta seção pretendemos mostrar como isso é feito.

Esta exposição está fortemente inspirada no tratamento apresentado em (M-M), que, por sua vez, é uma mistura do trabalho original de A. Seidenberg (Se) e o de de Ven den Essen.

Começamos fixando notações e com algumas definições. Seja \mathcal{F} a folheação singular holomorfa associada ao campo vetorial holomorfo X com uma singularidade isolada em $(0, 0)$. Ou, podemos pensar em termos de 1-formas, afinal, a 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ e o campo $X(x, y) = B(x, y)\frac{\partial}{\partial x} - A(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ definem a mesma folheação \mathcal{F} .

Os *autovalores* de $\omega = Adx + Bdy$ em $(0, 0)$ são definidos como sendo os autovalores λ_1, λ_2 de X .

Lembramos que o “blow-up” da 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ nas coordenadas (x, t) é dado por:

$$\pi^*(\omega) = [A_k(1, t) + tB_k(1, t) + x(\tilde{t}\tilde{b}(x, t) + \tilde{a}(x, t))]dx + x[B_k(1, t) + x\tilde{b}(x, t)]dt.$$

Nas coordenadas (t, y) obtemos

$$\pi^*(\omega) = y[A_k(t, 1) + y\tilde{a}(t, y)]dt + [B_k(t, 1) + tA_k(t, 1) + y(\tilde{b}(t, y) + t\tilde{a}(t, y))]dy,$$

onde

$$\tilde{a}(x, t) = A_{k+1}(1, t) + xA_{k+2}(1, t) + \dots = \frac{1}{x^k}a(x, tx),$$

e $a(x, tx) = \sum_{n>k} A_n(x, tx)$, usando A_k para denotar a componente homogênea de grau k da série de Taylor de A centrada em $(0, 0)$. Adotamos uma notação análoga para B .

Seja $J_{(0,0)}^1(\omega) = A_1(x, y)dx + B_1(x, y)dy$, e defina C_ω como sendo o subconjunto do divisor excepcional $E \approx \mathbb{CP}(1)$ formado pelas singularidades da “nova” folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ (i.e, a folheação associada a $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$, onde π é a aplicação de blow-up). Observe que no caso não-dicrítico ($A_1(1, t) + tB_1(1, t)$ não é identicamente nulo), o conjunto C_ω é dado pelas soluções de $A_1(1, t) + tB_1(1, t) = 0$. Seja μ_c a ordem da singularidade $c \in C_\omega$.

Suponha que F seja uma aplicação definida em $U \subset \mathbb{C}^2$ com uma singularidade em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. A *ordem* de F em 0 , denotada por $\nu_0(F)$ é o grau da primeira componente homogênea não-trivial da série de Taylor de F com centro na origem. Também definimos a ordem de um campo vetorial (conforme feito na Seção 2.4). Se $X(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ é singular em $(0, 0)$ a *ordem* de X é o mínimo entre as ordens de F e G . Analogamente, é possível definir a *ordem* da 1-forma ω em 0 .

Considere duas curvas algébricas V e W

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; f(x, y) = 0\}, \quad W = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; g(x, y) = 0\},$$

suponha que elas se intersectam em $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Lembramos que se g for irreduzível, então existe uma normalização local (Parametrização de Puiseux)

$$\gamma : t \mapsto (t^k, \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n),$$

para um certo k e $m < k$. O número de interseção de V e W em $(0, 0)$ é definido como sendo

$$I(f, g; 0) = \nu_0(f \circ \gamma).$$

Se g não for irreduzível e $g = g_1^{\alpha_1} \dots g_p^{\alpha_p}$, onde g_1, \dots, g_p são irreduzíveis, então o número de interseção de V e W em $(0, 0)$ é dado por

$$I(f, g; 0) = \sum_{i=1}^p \alpha_i I(f, g_i; 0).$$

Finalmente, definimos o número de interseção da 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ como sendo

$$I_0(\omega) = I(A, B; 0).$$

Agora podemos enunciar o teorema de Seidenberg.

Teorema 4.2.1 (Seidenberg) *Seja \mathcal{F} a folheação singular holomorfa associada à 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ definida em $U \in \mathbb{C}^2$ com uma singularidade isolada em $(0, 0)$. Existe uma aplicação própria analítica $\pi : V \rightarrow U$ (obtida por uma composição de blow-ups) de uma variedade complexa bidimensional V em U , tal que:*

- $\pi^{-1}(0, 0) = E$, onde E é o divisor excepcional de V ;
- $\pi : V \setminus E \rightarrow U \setminus \{(0, 0)\}$ é um difeomorfismo holomorfo;
- $\nu_p(\pi^*(\omega)) \leq 1$ para todo $p \in V$

Em outras palavras, o “blow-up” de U é uma variedade complexa V tal que todos os seus pontos p são regulares ou singularidades simples.

Prova. Suponha que $(0, 0)$ seja a única singularidade de ω em U . Seja k a ordem de ω em $(0, 0)$. Se $k > 1$, utilizamos o procedimento de blow-up, descrito na Seção 2.4. Em outras palavras, existe uma aplicação própria $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $\pi(x, t) = (x, tx)$, com $\pi^{-1}(0, 0) = E$, onde E é o divisor excepcional. Além disso, o blow-up de ω nas coordenadas (x, t) é dado por

$$\tilde{\omega} = \pi^*\omega = [A_k(1, t) + tB_k(1, t) + x(\tilde{t}\tilde{b}(x, t) + \tilde{a}(x, t))]dx + x[B_k(1, t) + x\tilde{b}(x, t)]dt. \tag{4-7}$$

Conforme visto anteriormente, o comportamento de $\tilde{\omega}$ varia significativamente na vizinhança de E dependendo se $A_k(1, t) + tB_k(1, t)$ é identicamente nulo ou não. Analizando estes dois casos, não é difícil obter igualdades que relacionam o número de interseção de ω com a sua ordem em $(0, 0)$ (confira (M-M)).

- Se $A_k(1, t) + tB_k(1, t)$ não for identicamente nulo, então

$$I_0(\omega) = k^2 - k + 1 + \sum_{c \in E} I_c(\tilde{\omega}). \quad (4-8)$$

lembramos que neste caso o divisor excepcional é invariante pela folheação.

- Se $A_k(1, t) + tB_k(1, t) \equiv 0$, então

$$I_0(\omega) = k^2 + k - 1 + \sum_{c \in E} I_c(\tilde{\omega}). \quad (4-9)$$

Este é o caso dicrítico, i.e, as folhas da folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ associada a $\tilde{\omega}$ são regulares e transversas a E .

Existem duas possibilidades, ou a 1-forma $\tilde{\omega}$ possui apenas singularidades simples e pontos regulares em $\pi^{-1}(U)$, e o teorema está provado. Ou ainda existem pontos $c \in \pi^{-1}(U)$, tais que $\nu_c(\tilde{\omega}) > 1$.

No último caso, primeiramente definimos

$$V_1 = \pi^{-1}(U), \quad \pi_1 = \pi|_{V_1} : V_1 \rightarrow U.$$

A seguir, simultaneamente fazemos o blow-up de todos os pontos $c \in E \subset V_1$ tais que $\nu_c(\tilde{\omega}) > 1$. Seja $\pi_2 : V_2 \rightarrow V_1$ a aplicação correspondente a estes blow-ups. Então definimos

$$\pi^2 = \pi_1 \circ \pi_2 : V_2 \rightarrow U$$

Por indução, construímos aplicações $\pi_i : V_i \rightarrow V_{i-1}$, fazendo o blow-up de todos os pontos c de V_{i-1} tais que $\nu_c((\pi^{i-1})^*(\omega)) > 1$, onde

$$\pi^{i-1} = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_{i-1}.$$

As Equações (4-8) e (4-9) garantem que este procedimento é finito. De fato, apesar dos dois comportamentos distintos que $\tilde{\mathcal{F}}$ possa assumir, em ambos os casos, o número de interseção I_c decresce se $k > 1$. Assim, repetindo este procedimento, haverá um i suficientemente grande, tal que para todo c em V_i , $\nu_c((\pi^i)^*(\omega)) \leq 1$. □

A seguir, trataremos do caso em que a folheação \mathcal{F} possui apenas singularidades simples. Realizando aplicações de blow-ups adicionais, é possível obter uma expressão mais simples para a 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ associada a \mathcal{F} . Esta 1-forma correspondente não pode ser simplificada realizando mais aplicações de blow-up. Por isso elas são chamadas de “irredutíveis”.

Teorema 4.2.2 *Considere a folheação singular holomorfa associada à 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ definida em $U \in \mathbb{C}^2$ com uma singularidade isolada em $(0, 0)$. Seja $\pi : V \rightarrow U$ a aplicação de blow-up obtida pelo Teorema 4.2.1. Então para cada $p \in V$ onde $\nu_p(\pi^*(\omega)) = 1$, existe uma carta coordenada (u, v) centrada em p tal que:*

$$\pi^*(\omega) = [\lambda_1 + (\dots)v]du - [\lambda_2 + (\dots)]udv, \quad (4-10)$$

onde $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, e $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1$ não pertencem a \mathbb{N} . Ou,

$$\pi^*(\omega) = [v + (\dots)]du. \quad (4-11)$$

Começamos enunciando o seguinte

Lema 4.2.3 *Suponha que a 1-forma $\omega = Adx + Bdy$ seja não-dicrítica. Se existir $c \in \mathbb{CP}(1)$, tal que $\mu_c = 1$, então $J^1(\tilde{\omega}_c) = \tilde{A}_1dx + \tilde{B}_1dy \neq 0$. Em outras palavras, o blow-up de ω em c , $\tilde{\omega}_c$, não eleva a ordem $\mu_{\pi^{-1}(c)}$. Além disso, $\tilde{\omega}_c$ possui um autovalor não-nulo.*

Prova do Teorema 4.2.2. Suponhamos que a ordem de ω em $(0, 0)$ seja $k = 1$. De acordo com os autovalores de ω , existem 5 situações distintas que devem ser analisadas separadamente:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$;
3. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1$ pertencem a \mathbb{N} ;
4. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ e $\lambda_1/\lambda_2, \lambda_2/\lambda_1$ não pertencem a \mathbb{N} ;
5. $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

Observe que os casos 4 e 5 correspondem precisamente às situações refletidas pelas Equações (4-10) e (4-11), respectivamente. Agora mostraremos que fazendo o blow-up da variedade em certos pontos, os 3 casos anteriores se reduzem aos casos 4 ou 5.

Caso 1

Nesta situação, a matriz jacobiana do campo vetorial $X = (B, -A)$ em $(0, 0)$ é semelhante a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $J_{(0,0)}^1(\omega) = ydy$, de forma que o conjunto C_ω é formado pelo ponto $c = (1, 0)$ e $\mu_c = 2$.

Agora fazemos o blow-up da folheação em c , obtendo

$$\tilde{\omega}_c = [t^2 + x(t\tilde{b}(x, t) + \tilde{a}(x, t))]dx + x[t + x\tilde{b}(x, t)]dt,$$

Suponha que $A_2(1, t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2$.

Observe que a ordem de $\tilde{\omega}$ pode ser 1 ou 2 dependendo se α_1 é igual a zero ou não. Analizemos as duas possibilidades separadamente

– **(1.a)** $\alpha_1 \neq 0$

Neste caso, $\nu(\tilde{\omega}) = 1$ e para simplificar a notação, denotamos $\tilde{\omega}$ por:

$$\eta = [y^2 + x(y\tilde{b}(x, y) + \tilde{a}(x, y))]dx + x[y + x\tilde{b}(x, y)]dy,$$

Observe que C_ω é dado pela equação

$$\alpha_1 x^2 = 0,$$

logo formado pelo ponto $c = (0, 1)$ com $\mu_c = 2$. Agora realizamos o procedimento de blow-up em c e nas coordenadas (t, y) , $t = x/y$ obtemos

$$\tilde{\eta}_c = y[\alpha_1 t + y(1 + \dots)]dt + [\alpha_1 t^2 + y(2t + \dots)]dy.$$

Portanto, $C_{\tilde{\eta}_c}$ é dado pela equação

$$ty(3y + 2\alpha_1 t) = 0,$$

logo contendo apenas pontos simples. Aplicando o Lema 4.2.3, conclui-se que nestas coordenadas $\lambda_1 \neq 0$. Assim, reduzimos ω a uma 1-forma que não pertence ao **Caso 1**.

– **(1.b)** $\alpha_1 = 0$

Neste caso, $\nu(\tilde{\omega}) = 2$, como antes, denotamos $\tilde{\omega}$ por η . O conjunto C_η é dado por

$$x(2y^2 + \gamma xy + \delta x^2) = x(y - a_1x)(y - a_2x) = 0,$$

para certas constantes γ, δ, a_1 e a_2 .

- Se $a_1 \neq a_2$ aplicamos o Lema 4.2.3 e chegamos à mesma conclusão anterior.
- Se $a_1 = a_2 = a \neq 0$ então

$$\tilde{\eta} = [(t - a)^2 + x(\dots)]dx + x[t + x(\dots)]dt.$$

Então a matriz jacobiana associada a $\tilde{\omega}$ é $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, portanto admitindo um autovalor não-nulo.

- Se $a = 0$ então o ponto $c = (1, 0) \in C_\eta$, tem multiplicidade $\mu_c = 2$ e

$$\tilde{\eta}_c = [2t^2 + x(\dots)]dx + x[t + x(\dots)]dt$$

Logo, $\tilde{\eta}$ ainda é do mesmo tipo que η . Observe que pelo Teorema 4.2.1 $\nu(\tilde{\eta}) = 1$. Portanto esta possibilidade nos leva ao **Caso (1.a)**.

Em conclusão, sempre existe um meio de fazer o blow-up de ω de maneira que ambos os seus autovalores sejam diferentes de *zero*.

Caso 2

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lambda = 1$. Assim, existem basicamente duas possibilidades a serem consideradas:

- A matriz jacobiana do campo vetorial X em $(0, 0)$ é semelhante a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesta situação, $J_{(0,0)}^1(\omega) = ydx - xdy$. Trata-se, portanto do caso dicrítico. Fazendo o blow-up de ω em cada $c \in \mathbb{CP}(1)$, observe que $\tilde{\omega}_c$ não possui singularidades ($\nu_p(\tilde{\omega}_c) = 0$ para todo $p \in V$).

- A matriz jacobiana do campo vetorial X em $(0, 0)$ é semelhante a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aqui, $J_{(0,0)}^1(\omega) = -xdx + (x+y)dy$, e o conjunto C_ω resume-se ao ponto $c = (1, 0)$ com $\mu_c = 2$. Fazendo o blow-up de ω em c obtêm-se:

$$\tilde{\omega}_c = [t^2 + x(\dots)]dx + x[1 + t + x(\dots)]dt$$

Observe que a matriz jacobiana associada a $\tilde{\omega}$ em c é equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Isto corresponde ao **Caso 5**, de forma que ω se reduz à Equação (4-11).

Caso 3

Neste caso, $J_{(0,0)}^1(\omega) = -\lambda_2 y dx + \lambda_1 x dy$. Podemos supor que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = n$. Assim, ω pode ser escrito como

$$\omega = [-ny + (\dots)]dx + [x + (\dots)]dy.$$

Observe que existem exatamente dois pontos em C_ω , mais precisamente $c_1 = (1, 0)$ e $c_2 = (0, 1)$. Realizando o procedimento de blow-up ω em c_1 nas coordenadas (x, t) , $t = y/x$ obtêm-se

$$\tilde{\omega}_{c_1} = [t(1 - n) + x(\dots)]dx + x[1 + x(\dots)]dt$$

de forma que a matriz jacobiana é dada por:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ * & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n - 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, ω se reduz à 1-forma com autovalores $\tilde{\lambda}_1 = 1$ e existem três possibilidades para $\tilde{\lambda}_2$:

- Se $n = 0$ então $\tilde{\lambda}_2 = -1$ e a redução de ω pertence ao **Caso 4**.
- Se $n = 1$ então $\tilde{\lambda}_2 = 0$ e a redução de ω pertence ao **Caso 5**.
- Se $n > 1$ então $\tilde{\lambda}_2 = n - 1$ e fazendo o blow-up $n - 1$ vezes, temos que a redução de ω pertence ao **Caso 2**.

Analizemos agora o procedimento de blow-up de ω em c_2 nas coordenadas (t, y) , $t = y/x$ onde

$$\tilde{\omega}_{c_2} = y[-n + y(\dots)]dt + [t(1 - n) + y(\dots)]dy.$$

Assim, a matriz jacobiana é dada por:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 - n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

- Se $n = 0$ então $\tilde{\lambda}_1 = 1$ e $\tilde{\lambda}_2 = 0$, logo a redução de ω pertence ao **Caso 5**.
- Se $n = 1$ então $\tilde{\lambda}_1 = 0$ e $\tilde{\lambda}_2 = 1$, logo a redução de ω pertence ao **Caso 5**.
- Se $n > 1$ então $\tilde{\lambda}_1 < 0$ e $\tilde{\lambda}_2 > 0$, logo a redução de ω pertence ao **Caso 4**.

Isto completa a demonstração do teorema. □

4.3

Existência de Integrais Primeiras

Ilustraremos com um problema concreto uma aplicação das técnicas utilizadas na seção anterior. Nesta seção faremos a demonstração detalhada de um teorema fundamental de J.-F Mattei e R. Moussu (M-M) acerca da existência de integrais primeiras para determinadas folheações.

Lembramos que uma *integral primeira* holomorfa para uma folheação holomorfa \mathcal{F} é uma função holomorfa não-constante $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ que é constante quando restrita às folhas de \mathcal{F} . Se ω representa a 1-forma que define \mathcal{F} , f é tal que $\omega \wedge df = 0$. Equivalentemente, as folhas de \mathcal{F} são as componentes irredutíveis das superfícies de nível de f .

Nesta seção, pretendemos caracterizar topologicamente folheações que admitem uma integral primeira holomorfa. Trata-se do principal resultado de (M-M).

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa definida em $U \subset \mathbb{C}^2$, com uma singularidade isolada em $(0, 0)$. Suponha que f seja uma integral primeira holomorfa para \mathcal{F} . Então as seguintes condições são válidas:

1. Apenas um número *finito* de folhas de \mathcal{F} acumulam em $(0, 0)$.
2. As folhas de \mathcal{F} são fechadas como subconjuntos de $U \setminus \{(0, 0)\}$.

De fato, se uma tal função existe, o conjunto $f^{-1}(0)$ é o conjunto das separatrizes de \mathcal{F} . Lembramos que uma separatriz é apenas uma curva analítica irredutível, invariante por \mathcal{F} , contendo a singularidade. Mas f possui necessariamente um número finito de fatores irredutíveis, i.e. $f = g_1^{k_1} \dots g_n^{k_n} H$ (onde $H(0, 0) \neq 0$). Logo o número de separatrizes também tem que ser finito, já que são dadas pelas equações $\{g_i = 0\}$. Este é precisamente o conteúdo da Condição 1.

Como f é constante quando restrito às folhas, a Condição 2 também é válida. Em particular, uma folha L de \mathcal{F} que não esteja contida no conjunto $f^{-1}(0)$ não pode se acumular em uma separatriz. Iremos utilizar esta observação frequentemente ao longo do texto.

Reciprocamente, uma folheação satisfazendo as Condições 1 e 2 admite uma integral primeira. Este é o conteúdo do seguinte teorema, que desempenhará um papel fundamental nesta seção.

Teorema 4.3.1 (Mattei-Moussu (M-M)) *Considere a folheação holomorfa \mathcal{F} definida em $U \subset \mathbb{C}^2$ com uma singularidade isolada em $(0,0)$. Suponha que ela satisfaça as seguintes condições:*

1. *Apenas um número finito de folhas de \mathcal{F} acumulam em $(0,0)$.*
2. *As folhas de \mathcal{F} são fechadas como subconjuntos de $U \setminus \{(0,0)\}$.*

Então \mathcal{F} admite uma integral primeira holomorfa não-constante $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Antes de dar início à demonstração do teorema, considere duas folheações holomorfas com singularidades isoladas, \mathcal{F} e \mathcal{F}' definidas em uma vizinhança U da origem. Dizemos que \mathcal{F} e \mathcal{F}' são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow U$, tal que $h(0,0) = (0,0)$ levando as folhas de \mathcal{F} nas folhas de \mathcal{F}' . Segue do teorema acima que a existência de uma integral primeira holomorfa obedece o seguinte critério topológico: se \mathcal{F} admite uma integral primeira, então \mathcal{F}' também admite.

Podemos dizer que a demonstração do Teorema 4.3.1 consiste de três etapas:

Parte 1: Se \mathcal{F} satisfaz as Condições 1 e 2, então realizando sucessivas aplicações de blow-up (confira a Seção 4.2), as únicas singularidades irredutíveis encontradas na árvore de Seidenberg são aquelas em que ambos os autovalores λ_1 e λ_2 , e, além disso, $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Dizemos que estas singularidades pertencem ao *domínio de Siegel*.

Parte 2: Estudo de \mathcal{F} em uma vizinhança de uma singularidade no domínio de Siegel. Em particular, encontramos uma caracterização para aquelas que possuem integral primeira holomorfa.

Parte 3: Extensão das “integrais primeiras” locais obtidas na **Parte 2** a uma vizinhança do divisor excepcional E . Se \tilde{f} representa esta extensão, então $f = \pi_*\tilde{f}$ é a integral primeira desejada.

Agora abordamos cada uma destas etapas nas 3 seções subsequentes. Juntas, elas concluem a prova do Teorema de Mattei-Moussu.

4.3.1

Parte 1: Análise das Singularidades da Árvore de Seidenberg de \mathcal{F}

Começamos analisando as singularidades irredutíveis obtidas pelo procedimento de Seidenberg. De agora em diante assumiremos que \mathcal{F} satisfaz as hipóteses do Teorema 4.3.1.

Proposição 4.3.2 *Seja \mathcal{F} uma folheação satisfazendo as Condições 1 e 2. Então as únicas singularidades irredutíveis existentes na árvore de Seidenberg de \mathcal{F} são aquelas que possuem autovalores não-nulos λ_1 e λ_2 tal que o quociente λ_1/λ_2 pertence a \mathbb{R}_- .*

Conforme visto na seção anterior, toda singularidade de uma dada folheação \mathcal{F} pode ser reduzida por sucessivas aplicações de blow-up, até que a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ apenas contenha singularidades simples com autovalores λ_1 e λ_2 em um dos seguintes casos:

- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, i.e., uma singularidade sela-nó.
- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, nem λ_1/λ_2 , nem λ_2/λ_1 são inteiros positivos.

Discutiremos as diferentes possibilidades separadamente.

Lema 4.3.3 *A árvore de Seidenberg não contém singularidades sela-nó.*

Prova. Por absurdo, suponha que o enunciado seja falso. Conforme visto em seções anteriores, existem coordenadas locais (x, y) em torno de uma singularidade sela-nó em que a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ é dada por

$$\omega(x, y) = [x(1 + \lambda y^p) + yR(x, y)]dy - y^{p+1}dx.$$

Observe que $\{y = 0\}$ é invariante pela folheação $\tilde{\mathcal{F}}$. A seguir, considere-mos a aplicação de holonomia associada a $\tilde{\mathcal{F}}$ e em relação a um círculo contido em $\{y = 0\}$ em torno na origem. Já vimos na Seção 3.2.1 que a holonomia é dada por $h(z) = z + z^{p+1} + \dots$ para z em alguma seção local transversal Σ .

Da estrutura dinâmica de h (em particular, da existência de coordenadas de Fatou) observamos que existem infinitos pontos acumulando em $0 \in \mathbb{C} \simeq \Sigma$ sob a iteração de h . Estes pontos naturalmente correspondem a folhas de \mathcal{F} que se acumulam na parte regular de $\{y = 0\}$. Temos duas possibilidades.

Se $\{y = 0\}$ estiver contido no divisor excepcional, então será projetado em $(0, 0)$. Logo existiriam infinitas folhas acumulando na origem. Isto não é possível, já que estamos levando em conta a Condição 1.

Por outro lado, se $\{y = 0\}$ for transversal ao divisor excepcional, então será projetado por π como uma separatriz (lembramos que π é uma

aplicação própria). Existem infinitas folhas acumulando nesta separatriz, o que novamente é impossível, já que contradiz a Condição 2.

Em conclusão, a redução de ω não contém nenhuma singularidade selanó. □

A seguir discutimos o caso de singularidades irredutíveis com autovalores λ_1, λ_2 diferentes de zero. Este tipo de singularidade é denominada *hiperbólica* se $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Lema 4.3.4 *Não existem singularidades hiperbólicas na árvore de Seidenberg.*

Prova. Pelo Teorema de Linearização de Poincaré (cf. Section 3.1) podemos supor que o campo vetorial associado a $\tilde{\mathcal{F}}$ é dado em coordenadas locais por

$$\tilde{X} = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$$

Novamente, $\{y = 0\}$ é invariante pela folheação. Como antes, a fim de estudar o comportamento das folhas perto de $\{y = 0\}$, consideraremos a sua holonomia local.

Seja Σ uma seção transversal com parâmetro z . A folha da folheação passando por $(1, z) \in \mathbb{C}^2$ é dada por $F(t) = (e^{\lambda_1 t}, ze^{\lambda_2 t})$. A próxima vez que a folha atravessa Σ ocorre quando $t = \theta_1$, de forma que $e^{\lambda_1 \theta_1} = 1$. Em outras palavras, $\theta_1 = \frac{2\pi i}{\lambda_1}$. Assim, a aplicação de holonomia é dada por $h(z) = e^{2\pi i \lambda_2 / \lambda_1} z$. Entretanto, temos que $\text{Re}(2\pi i \lambda_2 / \lambda_1) \neq 0$ já que λ_2 / λ_1 não está em \mathbb{R} . Agora, iterando h , obtêm-se

$$h^n(z) = z r^n \alpha^n.$$

Podemos supor que $r = e^{-2\pi \text{Im}(\lambda_2 / \lambda_1)} < 1$. Se este não fosse o caso, seria suficiente trocar os papéis de λ_1 e λ_2 desde o início. Como $|r|^n |\alpha|^n$ tende a zero na medida em que n aumenta, segue que as folhas vizinhas se acumulam em $\{y = 0\}$.

Como antes, as Condições 1 e 2 impedem que este tipo de comportamento aconteça e concluímos que a folheação reduzida não pode conter este tipo de singularidade. □

Lema 4.3.5 *A árvore de Seidenberg não contém singularidades com autovalores não-nulos tais que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_+$.*

Pelo Teorema 3.1.2, o campo vetorial ainda é linearizável e $\{y = 0\}$ é invariante. Observe que neste caso, aplicação de holonomia não nos ajudará a concluir que este tipo de singularidade não ocorre. De fato, a holonomia é

da forma $z \mapsto e^{2\pi i\theta}z$, i.e. a holonomia é conjugada a uma rotação por θ de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$.

Entretanto, seguindo as retas radiais que conectam um ponto x_0 do plano $\{y = 0\}$ à origem, observamos que as folhas vizinhas acumulam na origem. De fato, a folha passando pelo ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ é dada por $(x_0e^{\lambda_1 t}, y_0e^{\lambda_2 t})$. Supondo que $\lambda_1 > 0$, então $x_0e^{\lambda_1 t}$ tende a 0 se e somente se $t \rightarrow -\infty$. Como λ_2 também é positivo, $y_0e^{\lambda_2 t}$ tende a zero. Finalmente, isso implica que existem infinitas folhas acumulando em $(0, 0)$.

Novamente, este tipo de singularidade não pode ocorrer. □

Finalmente, chegamos a conclusão de que podemos assumir que $\tilde{\mathcal{F}}$ possui apenas singularidades com autovalores tais que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Um último lema:

Lema 4.3.6 *Todas as componentes invariantes da árvore de Seidenberg são invariantes pela folheação correspondente.*

Prova. Se não fosse assim, existiriam infinitas separatrizes, o que contradiz nossas hipóteses. □

Observação 4.3.7 O argumento utilizado no lema precedente pode ser estendido de forma a mostrar que uma singularidade possui infinitas separatrizes se e somente se, ao realizarmos uma sequência finita de blow-ups, obtivermos uma componente irreduzível do divisor excepcional total que *não* seja invariante pela folheação correspondente. Este tipo de singularidade é chamada de *dicrítica*.

Estes lemas nos levam à demonstração da Proposição 4.3.2, correspondendo à primeira parte da prova.

4.3.2

Parte 2: Existência de Integrais Primeiras Locais

Estudaremos em mais detalhes as únicas singularidades que aparecem na árvore de Seidenberg, i.e, aquelas que possuem autovalores tais que λ_1/λ_2 pertence a \mathbb{R}_- . Obtemos do Lema 2.3.7 que em coordenadas locais (x, y) , o campo vetorial é dado por:

$$\lambda_1 x[1 + h.o.t.]\partial/\partial x + \lambda_2 y[1 + h.o.t.]\partial/\partial y, \tag{4-12}$$

para $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Primeiramente, é preciso verificar se este campo vetorial é linearizável ou não. Estamos interessados em saber quando que dois campos vetoriais como acima (com λ_1, λ_2 fixos) são conjugados. A próxima proposição devida à J.-F. Mattei e R. Moussu é de importância fundamental, já que nos permite reduzir o problema ao de saber se a holonomia correspondente é ou não linearizável (conjugada).

Proposição 4.3.8 (Mattei-Moussu (M-M), (M)) *Suponha que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sejam dadas em coordenadas (x, y) pela Equação (4-12) com $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. Denote por h_1 (resp. h_2) a holonomia do eixo $\{y = 0\}$ relativa a \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_2). Então existe um difeomorfismo analítico ϕ definido em uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ conjugando $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ se e somente se existe um difeomorfismo analítico φ definido em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, conjugando h_1, h_2 .*

Existem dois casos bem diferentes a serem considerados quando a razão λ_1/λ_2 é racional ou não.

Primeiramente, suponha que $\lambda_1/\lambda_2 = -m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$. Neste caso, a holonomia associada a \mathcal{F} e a uma volta em torno da origem na separatriz $\{y = 0\}$, é dada por

$$h(z) = e^{-2\pi in/m} z + \dots,$$

onde z é um parâmetro em uma seção local transversa a $\{y = 0\}$. Esta aplicação é linearizável se e somente se $h^m(z) = z$. Está claro que se h for linearizável, então $h^m(z) = z$. A recíproca não é óbvia, mas pode ser verificada observando que $f = (\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{-i} h^i)^{-1}$ lineariza h . Quando a holonomia não for linearizável (i.e, $h^m(z) = z + \dots$) obtemos novamente o caso estudado anteriormente. Precisamente, a dinâmica das pétalas, analisada na Seção 3.3.2. Similar ao caso de uma sela-nó, isto não pode ocorrer já que haveria infinitas folhas acumulando em $\{y = 0\}$, o que contradiz nossas hipóteses.

Assim, podemos supor que h é linearizável. Da Proposição 4.3.8, o campo vetorial associado a $\tilde{\mathcal{F}}$ admite a forma local, dada em coordenadas (x, y) por

$$\tilde{X} = m x \frac{\partial}{\partial x} - n y \frac{\partial}{\partial y}. \tag{4-13}$$

Agora iremos lidar com o caso em que $\alpha = \lambda_1/\lambda_2$ é irracional. Como antes, a aplicação de holonomia é dada por $h(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \dots$. Entretanto, como α é irracional, a dificuldade de saber se h é ou não linearizável aumenta significativamente. O problema de encontrar os valores irracionais de α que fazem com que a holonomia h seja linearizável é conhecido como o “Problema de Siegel”. De fato, para certos valores de α , é possível obter difeomorfismos locais h como acima que não são linearizáveis.

Observação 4.3.9 Observe que não é difícil obter uma conjugação formal f que linearize qualquer h . Mais precisamente, resolvendo formalmente $f^{-1} \circ h \circ f(z) = \lambda z$, obtêm-se $f(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i z^i$, com $f_1 = 1$ e

$$f_i = \frac{1}{\lambda^i - \lambda} \left[f_i + \sum_{p=2}^{i-1} f_p \sum_{j_1 + \dots + j_p = i, h_{j_k} \geq 1} h_{j_1} \cdots h_{j_p} \right].$$

A fim de lidar com os valores irracionais de α , primeiramente consideramos o caso linearizável. Então h é conjugado a uma rotação irracional de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Seja C o conjunto dos pontos de interseção entre a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ passando por $(1, z_0) \in \mathbb{C}^2$ e o círculo $S = \{z \in \Sigma; |z| = z_0\}$. Como sempre, Σ é a seção transversa a $\{y = 0\}$ passando por $1 \in \mathbb{C}$. Como uma rotação irracional possui órbitas densas, segue que C é denso no círculo S . Em outras palavras, as folhas não são fechadas, o que contradiz a Condição 2. Em particular, qualquer possível integral primeira f , seria constante. De fato, a restrição de f a Σ é constante em círculos em torno de $0 \simeq \Sigma \cap \{y = 0\}$. Como resultado, f seria sempre constante.

Então ficamos reduzidos a discutir o caso em que h não é linearizável. Iremos mostrar que existem folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ que não são fechadas em vizinhanças arbitrariamente pequenas de $0 \in \Sigma$. Começamos com um lema simples atribuído a J. Lewowicz.

Antes de enunciá-lo, daremos algumas definições que serão úteis ao longo do texto. Seja U uma vizinhança de 0 , onde $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ esteja definida, holomorfa e injetiva. Seja V um subconjunto de U e $x \in V$.

Definição 4.3.10 *A V -órbita de x é o conjunto de pontos de V , obtidos ao iterarmos h positivamente (i.e., $h^p = h \circ \dots \circ h$, p vezes) e negativamente (i.e., $h^{-p} = h^{-1} \circ \dots \circ h^{-1}$, p vezes), juntamente com o próprio x (denotando por $h^0(x) = x$). Em outras palavras,*

$$O_V(x) = \{y \in V; y = h^i(x), i \in \mathbb{Z}\}$$

O número de iterações de x é o número de vezes que h é iterado, levando x em um ponto em $O_V(x)$. Ele é denotado por $\mu_V(x)$ e pertence a $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Observe que existem pontos x em V tais que $\mu_V(x) = \infty$ mas $\#O_V(x) < \infty$. Estes pontos são chamados de *periódicos* em V . Naturalmente, se $\mu_V(x)$ for finito, então $\#O_V(x)$ é necessariamente finito.

Definição 4.3.11 *Dizemos que um elemento $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ possui órbitas finitas se existe uma vizinhança aberta V arbitrariamente pequena de 0 onde h esteja definida, holomorfa e injetiva,*

$$\#O_V(x) < \infty,$$

para todo $x \in V$.

Lema 4.3.12 *Seja K uma vizinhança compacta conexa de $0 \in \mathbb{R}^n$ e h um homeomorfismo de K em $h(K) \in \mathbb{R}^n$, verificando $h(0) = 0$. Então existe um ponto x na fronteira ∂K de K tal que o seu número de iterações em K é finito ($\mu_K(x) = \infty$).*

Prova. Denotando o interior de K por $\text{int}(K)$. E seja $\mu_K(x)$ (resp. $\mu_{\text{int}(K)}(x)$) o número de iterações de x em K (resp. $\text{int}(K)$). Suponha, por contradição, que μ_K apenas atinge um número finito de valores na fronteira ∂K de K . Como K é compacto, μ_K é uniformemente limitado em ∂K . Em outras palavras, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_K|_{\partial K} < N < \infty.$$

Os seguintes não conjuntos abertos não-vazios de K :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in K; \mu_K(x) < N\} \supset \partial K \\ B &= \{x \in \text{int}(K); \mu_{\text{int}(K)}(x) \geq N\} \ni 0 \end{aligned}$$

Além disso, como $\mu_{\text{int}(K)}(x) \leq \mu_K$, os conjuntos são disjuntos. Observe que existe $x_0 \in K$ tal que x_0 não pertence a $A \cup B$. De fato, se não existisse, então todo $x \in K$ seria tal que $x \in A \cup B$, ou seja, $K = A \cup B$. Como K é conexo, teríamos que $K = A$ ou $K = B$, o que é impossível. Portanto, existe x_0 tal que $\mu_K(x_0) \geq N > \mu_{\text{int}(K)}(x_0)$. Segue que as órbitas x_0 em K e $\text{int}(K)$ são diferentes ($O_K(x_0) \neq O_{\text{int}(K)}(x_0)$). Em outras palavras, a órbita de x_0 passa por ∂K . Seja $y \in O_K(x_0) \cap \partial K$, então, $\mu_K(y) = \mu_K(x_0) \geq N$, o que contradiz $\mu_K|_{\partial K} < N$. \square

O Lema de Lewowicz (Lema 4.3.12) assegura a existência de pontos cujas órbitas nunca saem de uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Entretanto, não exclui a possibilidade de todos os pontos serem periódicos. Nesta direção, a seguinte proposição será de importância fundamental.

Proposição 4.3.13 *Se $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ não é periódica, então existem vizinhanças abertas U de 0 em \mathbb{C} em que h é holomorfa, injetiva e para cada U , o conjunto de pontos $x \in U$ com U -órbita infinita é não-enumerável e 0 é um ponto de acumulação.*

A idéia básica por trás desta demonstração é a de considerar conjuntos U_n , para $n \in \mathbb{N}$ tais que $U_n = \{x \in U; h(x), \dots, h^n(x) \text{ estão definidos, e } h^n(x) = x\}$. Se o domínio de h^n fosse conexo, e $h^n \neq \text{id}$ então cada U_n seria um conjunto finito. Em particular, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ seria enumerável. Pelo lema, o conjunto de pontos com um número infinito de iterações é não-enumerável, logo existiria um conjunto

não-enumerável de pontos com órbita infinita. A dificuldade deste argumento está no fato que talvez o domínio de h^n seja desconexo e h^n talvez coincida com a identidade em uma componente conexa, mas não na que contém 0. É por isso que a prova desta proposição é um pouco mais sutil. De fato, precisamos levar em conta as diferentes componentes conexas do domínio de h^n .

Prova da Proposição 4.3.13. Seja D_{ρ_0} um disco fechado centrado em 0 de raio ρ_0 . Usando as mesmas notações do Lema 4.3.12, definimos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} P &= \{x \in D_{\rho_0}; \mu_{D_{\rho_0}}(x) = \infty, \#O_{D_{\rho_0}}(x) < \infty\} \\ F &= \{x \in D_{\rho_0}; \mu_{D_{\rho_0}}(x) < \infty, \#O_{D_{\rho_0}}(x) < \infty\} \\ I &= \{x \in D_{\rho_0}; \mu_{D_{\rho_0}}(x) = \infty, \#O_{D_{\rho_0}}(x) = \infty\} \end{aligned}$$

Naturalmente, $D_{\rho_0} = P \cup F \cup I$. Além disso, o Lema 4.3.12 implica que para todo $\rho \leq \rho_0$

$$(P \cup I) \cap \partial D_{\rho} \neq \emptyset.$$

Afirmção: Um dos conjuntos, ou P ou I (ou ambos) é não-enumerável.

De fato, pelo Lema 4.3.12, para cada disco compacto D_{ρ} , $\rho \leq \rho_0$ existe um ponto x_0 em sua fronteira com um número infinito de iterações. Logo existe um número *não-enumerável* de pontos x_0 em D_{ρ_0} tais que $\mu_{D_{\rho_0}}(x_0) = \infty$. Estes pontos pertencem a $I \cup P$, assim, ou P ou I tem que ser *não-enumerável*.

Com estas notações, basta mostrar que conjunto I é não-enumerável. Assim, devemos mostrar que se P é não-enumerável, então I necessariamente também o é. Faremos isso a seguir.

Antes de continuar, definimos os seguintes conjuntos contendo 0:

$$A_1 = D_{\rho_0}, \quad A_2 = D_{\rho_0} \cap h^{-1}(A_1), \quad \dots \quad A_n = D_{\rho_0} \cap h^{-1}(A_{n-1}), \quad \dots$$

Observe que A_n é precisamente o domínio de definição de h^n .

Seja C_n a componente (compacta) conexa de A_n que contém 0. Seja

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Em particular C é conexo.

Lema 4.3.14 *Podemos supor, sem perda de generalidade, que C é enumerável.*

Prova. Considere o caso em que C é não-enumerável. Suponha por absurdo, que I seja enumerável (e P não-enumerável). Então $I \cap C$ também seria enumerável. Agora consideramos $C \cap P$ e observamos que este conjunto tem que ser *não-enumerável*, caso contrário, C seria enumerável, já que $C \subset P \cup I$. Seja

$$C \cap P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n,$$

onde P_n é o conjunto dos $x \in C \cap P$ de período n .

Observe que existe um certo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que P_{n_0} é infinito, caso contrário, todos os P_n seriam finitos e $C \cap P$ seria enumerável. Sendo infinito, P_{n_0} possui um ponto de acumulação não-trivial em C_{n_0} . A aplicação h^{n_0} é holomorfa em uma vizinhança aberta U_0 de C_{n_0} e é a identidade em $P_n \cap U_0$, como este conjunto possui um ponto de acumulação em C_{n_0} , pelo Teorema de Identidade, $h^{n_0}(z) = z$ em U_0 . Por construção, C_{n_0} contém a origem, de forma que U_{n_0} é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Isto contradiz a hipótese de não-periodicidade de h . Logo, I é não-enumerável. \square

Levando em conta o lema precedente, iremos assumir que C consiste de um número enumerável de pontos.

Primeiramente observamos que existe $\rho < \rho_0$ tal que $C \cap \partial D_\rho = \emptyset$. Senão, C iria conter um ponto x_0 na fronteira de D_ρ para todo $\rho < \rho_0$. Isto é naturalmente impossível, já que C é enumerável. Daqui em diante, iremos fixar um certo $\rho > 0$.

A seguir, observamos que os conjuntos $C_1 \cap \partial D_\rho, (C_1 \cap C_2) \cap \partial D_\rho, (C_1 \cap C_2 \cap C_3) \cap \partial D_\rho, \dots$ formam uma sequência decrescente de compactos encaixados. Logo a interseção $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \cap \partial D_\rho$ é não-nula, a não ser que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $C_{n_0} \cap \partial D_\rho = \emptyset$. O último caso tem que ocorrer, já que ρ foi escolhido de maneira que $C \cap \partial D_\rho = \emptyset$.

Seja K um compacto conexo em uma vizinhança de C_{n_0} , não intersectando as outras componentes conexas de A_{n_0} (se elas existirem). Em particular, tem-se $\partial K \cap A_{n_0} = \emptyset$.

Lema 4.3.15 *Para todo $x \in \partial K$ existe $m \leq n_0$ tal que $h^m(x)$ não pertence a D_ρ . Além disso, $\partial K \cap P = \emptyset$.*

Prova. Para verificar a existência de m , vamos supor por contradição que para todo $m \leq n_0$, $h^m(x)$ pertence a D_ρ , para $x \in \partial K$. Neste caso, x teria pelo menos n_0 iterações positivas de h . Isto significa que $x \in A_{n_0}$, o que contradiz a construção de K .

Além disso, se existisse um ponto periódico de D_{ρ_0} em ∂K , então x pertenceria a todo conjunto A_n . Em particular pertenceria a A_{n_0} , o que é uma contradição. \square

Antes de continuar a mostrar que I é não-enumerável, iremos definir os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} P' &= \{x \in K; \mu_K(x) = \infty, \#O_K(x) < \infty\} \\ F' &= \{x \in K; \mu_K(x) < \infty, \#O_K(x) < \infty\} \\ I' &= \{x \in K; \mu_K(x) = \infty, \#O_K(x) = \infty\}. \end{aligned}$$

Seja

$$P' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P'_n,$$

onde P'_n é o conjunto dos pontos periódicos em K de período n .

Lema 4.3.16 $P'_n = \text{int}(P'_n) \cup \partial P'_n$, onde $\text{int}(P'_n)$ é aberto sem fronteira e $\partial P'_n$ é finito, consistindo de pontos isolados.

Prova. Seja p o limite de uma sequência de pontos em P'_n . Observe que não estamos assumindo que esta sequência seja constituída por pontos dois-a-dois distintos, de forma que todo ponto pertencente a P'_n automaticamente satisfaz esta condição. Claramente, é suficiente mostrar que existe uma vizinhança de p contida em P'_n . Por definição, existe uma vizinhança aberta conexa W de p , onde h^n está definida e holomorfa. Além disso, se p não for um ponto isolado, h^n é a identidade em $P'_n \cap W$. Logo, segue do Teorema de Identidade, que $h^n(z) = z$ em W . Por outro lado, a K -órbita de p não intersecta ∂K (cf. Lema 4.3.15). Logo W pode ser escolhido suficientemente pequeno de forma que $h(W), h^2(W), \dots, h^n(W) \subset \text{int}(K)$. Isto mostra que $W \subset \text{int}(P'_n)$. Assim, P' consiste de pontos isolados e de $\text{int}(P'_n)$. Claramente, o número de pontos isolados tem que ser finito, o que implica o lema. \square

Lema 4.3.17 A fronteira de P' é enumerável (consistindo da união dos pontos isolados de P'_n , para $n \in \mathbb{N}$).

Prova. Primeiramente consideremos $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}(P'_n)$. Naturalmente é um conjunto aberto, iremos mostrar que é sem fronteira. Suponha por absurdo, que exista p na fronteira de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}(P'_n)$. Existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ convergindo para p . Fixe um disco suficientemente pequeno em torno de p e escolha um ponto $p_k \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{int}(P'_n)$ pertencendo a esta bola. Logo existe n_0 tal que $p_k \in P'_{n_0}$. Claramente p_k pertence a K , já que $P' \subseteq K$. Além disso, p pertence a K também, já que K é fechado. Como K é conexo (por construção), existe um caminho $c : [0, 1] \rightarrow K$ unindo p_k a p (i.e., $c(0) = p_k, c(1) = p$). Como p_k pertence a P'_{n_0} e p não, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $c(t_0)$ pertence à

fronteira de $\text{int}(P'_{n_0})$. Isto contradiz o lema anterior. Assim, $\partial P'$ é enumerável, como união de conjuntos finitos $\partial P'_n$. \square

Finalmente, temos um último lema simples que nos permitirá concluir a prova.

Lema 4.3.18 F' é um conjunto aberto de K .

Prova. Observe que, por definição, para pontos $x \in F'$, $\mu_K(x) + 1 = \#O_K(x)$. Seja

$$F' = \bigcup_{n \geq 0} F'_n,$$

onde F'_n é o conjunto dos pontos de F' tais que $\mu_K(x) = n$. Afirmamos que F'_n são conjuntos abertos. De fato, por continuidade de h , todo ponto de F'_n possui uma vizinhança de pontos que também têm n iterações em K . Como F' é a união de abertos, ele próprio é um conjunto aberto. \square

Para concluir a proposição procedemos da seguinte maneira. Claramente temos

$$K = \text{int}(P') \cup F' \cup (I' \cup \partial P').$$

Iremos analisar separadamente as seguintes possibilidades:

- Suponha que $F' = \emptyset$.

Então $\partial K \subseteq \text{int}(P') \cup (I' \cup \partial P')$. Porém, pelo Lema 4.3.15, ∂K não contém pontos periódicos, logo, $\partial K \subseteq I' \cup \partial P'$. Mas $\partial P'$ é enumerável, pelo Lema 4.3.17 e por construção ∂K é não enumerável. Então concluímos que I' é não-enumerável.

- Suponha que $F' \neq \emptyset$ e $\text{int}(P') = \emptyset$.

Neste caso, temos que $K = F' \cup (I' \cup \partial P')$. Observe que para valores suficientemente pequenos de $r > 0$, os discos compactos D_r estão contidos em K . Assim, pelo Lema de Lewowicz (Lema 4.3.12), temos que $\partial D_r \cap (I' \cup \partial P')$ é não-vazio. Portanto, $(I' \cup \partial P')$ é não enumerável, e como antes, I' também tem que ser não-enumerável.

- Suponha que $F' \neq \emptyset$ e $\text{int}(P') \neq \emptyset$.

Observe que $\text{int}(F')$ e $\text{int}(P')$ são conjuntos abertos não-vazios de $\text{int}(K)$. Logo $K \setminus (\text{int}(F') \cup \text{int}(P'))$ é não-vazio, então é não-enumerável. Naturalmente, ele está contido em $(I' \cup \partial P')$ assim, I' também é não-enumerável.

Isto completa a demonstração da Proposição 4.3.13 \square

Proposição 4.3.19 *Suponha que a holonomia associada a $\tilde{\mathcal{F}}$ e a uma seção local transversa Σ seja dada por $h = e^{2\pi i \alpha} z + \dots$, onde α é irracional. Então*

existem folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ que não são fechadas em vizinhanças arbitrariamente pequenas de 0.

Prova. Segue da proposição precedente que existe uma sequência de pontos $p_n \in L \cap \Sigma$, dois-a-dois disjuntos, acumulando em p (i.e., existe $x \in \partial K \subset \Sigma$, tal que $\mu_K(x) = \infty$ e $\#O_K(x) = \infty$). Mostraremos que a folha L passando por p_n não é fechada.

Suponha que o ponto de acumulação p pertence a L , caso contrário a afirmação seria trivial. Suponhamos que exista um ponto isolado q de $L \cap \Sigma$. Considere um caminho em L ligando estes dois pontos, por continuidade da aplicação de holonomia, existe uma sequência de pontos de $L \cap \Sigma$ acumulando em q . Ou seja, $L \cap \Sigma$ não possui pontos isolados. Portanto, o fecho $\overline{L \cap \Sigma}$ de $L \cap \Sigma$ é não-enumerável (sendo um conjunto perfeito). Todavia, $L \cap \Sigma$ é enumerável, já que toda folha da folheação pode intersectar uma seção transversal apenas um número enumerável de vezes. Assim, $L \cap \Sigma$ possui pontos de acumulação que não estão contidos nele mesmo. Em particular, L não é fechado. \square

Proposição 4.3.20 *Seja \mathcal{F} uma folheação satisfazendo as Condições 1 e 2, então a sua árvore de Seidenberg contém apenas singularidades que admitem integral primeira local. Em particular, a holonomia local das suas separatrizes é finita.*

Prova. De fato, a discussão precedente nos permite concluir que a única possibilidade que não contradiz as hipóteses é quando $\lambda_1/\lambda_2 = -m/n$ é um número racional. Segue da Proposição 4.3.8 que o campo vetorial associado a \mathcal{F} é holomorficamente conjugado a um linear, localmente dado pela Equação (4-13). Observe que ele tem como solução $(x_0 e^{mt}, y_0 e^{-nt})$, logo existe uma integral primeira local. Mais precisamente, $f(x, y) = x^n y^m$ é constante sobre as órbitas do campo vetorial. \square

Agora retornamos à Proposição 4.3.8 e damos uma idéia dos princípios básicos por trás da sua demonstração.

Prova da Proposição 4.3.8. Suponha que exista um difeomorfismo holomorfo φ conjugando as holonomias h_1 e h_2 relativas às folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , respectivamente e a um círculo S^1 contornando a origem. Seja $D(\varepsilon)$ um disco em uma seção local Σ transversa a $\{y = 0\}$ no ponto 1, de raio $\varepsilon > 0$ cuja imagem por h_1 ainda esteja contida na vizinhança previamente escolhida.

Lembramos que o campo vetorial X , associado a $\tilde{\mathcal{F}}$ é dado por:

$$X = \lambda_1 x [1 + h.o.t.] \partial / \partial x + \lambda_2 y [1 + h.o.t.] \partial / \partial y .$$

Observe que longe de $\{x = 0\}$, as folhas da folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ são transversas às retas verticais complexas, i.e., às fibras de $\pi_1(x, y) = x$.

Primeiramente, definimos uma aplicação holomorfa ϕ no toro sólido $S^1 \times D(\varepsilon)$. Fazemos isso, levantando caminhos γ , em relação a π_1 , ao longo de S^1 que ligam 1 a $e^{i\theta_0}$, a um caminho γ_1 na folha L_1 de \mathcal{F}_1 que passa por $z \in \sigma$. Observe que esse levantameto está bem-definido, já que as folhas são transversas às fibras de π_1 . Também levantamos, com relação a π_1 , γ a um caminho γ_2 na folha L_2 de \mathcal{F}_2 passando por $\varphi(z)$. Agora estendemos o difeomorfismo ϕ , declarando que ϕ leva a extremidade final de γ_1 à extremidade final de γ_2 . Devemos mostrar que esta extensão de ϕ está bem-definida quando γ trata-se de uma volta em torno de $0 \in \{y = 0\}$. Mas isso é claro, já que a extremidade final de γ_1 (resp. γ_2) é, por construção a imagem de z por h_1 (resp. h_2) e temos que $\varphi \circ h_1 = h_2 \circ \varphi$. Logo concluímos que ϕ está bem-definido em $S^1 \times D(\varepsilon)$.

A seguir, pretendemos estender ϕ holomorficamente para uma vizinhança de $(0, 0)$ e de forma que ainda conjugue as folheações. Considere as retas radiais R_{θ_0} ligando cada ponto $e^{i\theta_0}$ em S^1 à origem. Seja L_1 a folha de \mathcal{F}_1 passando por $(e^{i\theta_0}, z) \in S^1 \times D(\varepsilon)$ e γ_{θ_0} o caminho em L_1 tal que $\Pi(\gamma_{\theta_0}) = R_{\theta_0}$. Analogamente, seja L_2 a folha de \mathcal{F}_2 que passa por $\phi(e^{i\theta_0}, z)$ e η_{θ_0} o caminho em L_2 que se projeta em R_{θ_0} por π_1 . Definimos ϕ levando γ_{θ_0} em η_{θ_0} . Por construção, ϕ é uma conjugação holomorfa entre \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 em seu domínio. Observe que o domínio de ϕ é precisamente o saturado de Σ por \mathcal{F} , que denotaremos por \mathcal{F}_Σ .

Todavia, note que *a priori*, na medida em que seguimos as retas radiais em direção à origem, a união de \mathcal{F}_Σ e $\{x = 0\}$ talvez não defina uma vizinhança de $(0, 0)$.

Mais precisamente, revisitemos a construção de ϕ ao longo das retas radiais R_{θ_0} . Por exemplo, considere esta construção sobre a reta radial R_0 , unindo $1 = \Sigma \cap \{y = 0\}$ e $0 \in \mathbb{C} \simeq \{y = 0\}$. Por definição, começamos com um ponto $z_0 \in \Sigma$ e consideramos o caminho $\gamma_{z_0} : [0, 1] \rightarrow L_{z_0}$, $\gamma(0) = z_0$, que levanta apenas um segmento da reta radial R_0 em $\{y = 0\}$, indo de 1 até o ponto q , perto de $0 \in \mathbb{C}$. Seja Σ_{z_0} o conjunto consistindo das extremidades finais, $\gamma_{z_0}(1)$ dos caminhos γ_{z_0} como acima, para todo $z \in \Sigma$. Em particular, Σ_{z_0} está contido na reta vertical $\{x = q\}$. A dificuldade em assegurar que ϕ nos conduzirá a uma conjugação definida em torno de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, está relacionada com o fato de que Σ_{z_0} talvez não contenha um disco uniforme em torno de $0 \in \mathbb{C}$ na medida em que $q \rightarrow 0 \simeq (0, 0)$.

Em seu manuscrito, (M), J.-F. Mattei estima o tamanho dos conjuntos Σ_{z_0} como acima (para todas as folhas radiais envolvidas e não apenas no

exemplo específico de R_0). O resultado fundamental em (M) é a existência de um $\varepsilon > 0$ uniforme, tal que todo conjunto Σ_{z_0} contém uma bola de raio ε em torno de $0 \in \mathbb{C}$. Em particular, ele obteve:

Proposição 4.3.21 (Mattei (M)) *Seja \mathcal{F} uma folheação com autovalores λ_1 e λ_2 , tais que $\text{Re}(\lambda_1/\lambda_2) < 0$, então $\mathcal{F}_\Sigma \cup \{x = 0\}$ contém uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.*

A estimativa de um $\varepsilon > 0$ uniforme como acima é feito integrando ao longo de R_{θ_0} a equação diferencial que induz a folheação \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_2). Neste ponto é que a suposição de $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$ desempenha um papel importante.

Este comportamento fica particularmente claro quando consideramos EDOs reais com autovalores reais λ_1 e λ_2 satisfazendo $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_-$. De fato, isto nos daria a figura clássica do plano de fase de uma sela. (cf. Figura 4.1).

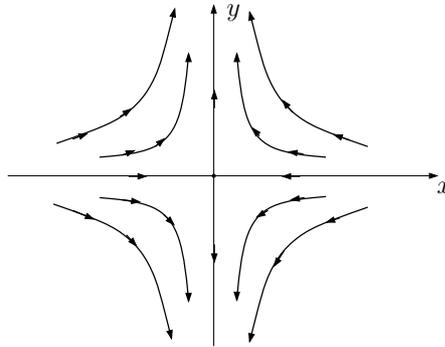


Figura 4.1: Espaço de Fase de uma sela.

Observe ainda, que se considerarmos o caso em que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, a afirmação seria falsa. De fato usando uma notação análoga, os conjuntos Σ_{z_0} estariam contidos em bolas com raios convergindo a zero quando $q \rightarrow 0 \simeq (0, 0)$.

Apesar do manuscrito do Mattei não ter sido publicado, pode-se encontrar uma extensão deste resultado para dimensões superiores em (R2).

Retornemos então à demonstração da Proposição 4.3.8. Enquanto que ϕ é holomorfa em seu domínio, este domínio claramente não contém $\{x = 0\}$. Para estender ϕ a $\{x = 0\}$ é suficiente notar que ϕ é limitado por construção. Por outro lado, também sabemos que ϕ está definido em $U \setminus \{x = 0\}$, onde U é uma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Assim, a extensão de ϕ a $\{x = 0\}$ segue imediatamente do Teorema de Extensão de Riemann. Com isso finalizamos a demonstração de Proposição 4.3.8. \square

Isto conclui a segunda parte da demonstração do Teorema de Mattei-Moussu.

4.3.3

Parte 3: Extensão a uma Integral Primeira Global

Nesta parte, pretendemos estender as integrais primeiras locais, obtidas na seção anterior, a uma integral primeira global definida em uma vizinhança do divisor excepcional do “blow-up” da folheação. Naturalmente, isto implica a existência de uma integral primeira da folheação original, resultando o Teorema 4.3.1.

Para explicar a idéia da construção, primeiramente suponha que uma única aplicação de “blow-up” seja suficiente para obter singularidades reduzidas p_1, \dots, p_n no divisor excepcional $E \simeq \mathbb{CP}(1)$. Segue do que precede que estas singularidades admitem integrais primeiras locais. Também ficará evidente que este caso contém as principais dificuldades da construção geral.

A idéia básica é a de estender as integrais primeiras em torno de singularidades ao longo das folhas da folheação. Se mostrarmos que uma tal extensão está bem-definida, então a integral primeira estará definida em uma vizinhança do divisor excepcional. De fato, pela estimativa de Mattei (Proposição 4.3.21), o saturado de uma seção transversal local Σ_i pela folheação contém uma vizinhança das singularidades p_i (exceto pelas separatrizes em cada p_i que são transversas a $E = \pi^{-1}(0, 0)$). Consequentemente, a extensão estaria definida em uma vizinhança de $\mathbb{CP}(1)$, já que pode ser novamente estendida às separatrizes transversas graças ao Teorema de Extensão de Riemann.

A fim de estender a integral primeira mencionada, é necessário estudar a *holonomia projetiva* de $\tilde{\mathcal{F}}$. Observe que $E = \pi^{-1}(0, 0)$ menos as singularidades $\{p_1, \dots, p_n\}$ é uma folha regular de $\tilde{\mathcal{F}}$. A holonomia associada a esta folha, denominada holonomia projetiva de $\tilde{\mathcal{F}}$ (ou de \mathcal{F}), nos dá uma representação

$$\rho : \Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

onde $\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ é o grupo fundamental de $E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. No que se segue, não faremos distinção entre a holonomia projetiva de $\tilde{\mathcal{F}}$ e o subgrupo de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ definido como imagem de ρ .

Lema 4.3.22 *A holonomia projetiva de $\tilde{\mathcal{F}}$ é finita (i.e., $\rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é um subgrupo finito de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$).*

Prova. Note que $\rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é Abeliano. Se não fosse bastaria considerar $h \neq \text{id}$ da forma $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ para $f, g \in \rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$. Observe entretanto, que $h'(0) = f'(0)g'(0)(f'(0))^{-1}(g'(0))^{-1} = 1$, i.e., h é tangente à identidade. Então a dinâmica local de h é a de pétalas (cf.

Seção 3.2.2), logo existem infinitas folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ acumulando em $E = \pi^{-1}(0, 0)$. Estas folhas produzem um número infinito de folhas de \mathcal{F} acumulando em $(0, 0)$ o que é impossível.

Completamos a demonstração, observando que $\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\})$ é gerado por pequenos círculos em torno das singularidades p_i , ($i = 1, \dots, n$). Assim, $\rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é gerado pelas holonomias locais h_i associadas a estas singularidades. Mas cada h_i tem ordem finita, graças à Proposição 4.3.13. Como $\rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é Abeliano, e o resultado segue. \square

Lema 4.3.23 *O grupo $G = \rho(\Pi_1(E \setminus \{p_1, \dots, p_n\}))$ é, de fato, cíclico.*

Prova. Considere o seguinte grupo:

$$G' = \{f'(0); f \in G\}$$

Considere o homomorfismo $\alpha : G \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0) \rightarrow G' \subset \mathbb{C}^*$ que associa a cada elemento f de G a sua derivada em 0. Afirmamos que este homomorfismo é injetivo, e portanto uma bijeção em sua imagem. De fato, suponha que f_1 e f_2 são elementos *distintos* de G e tais que $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$. Então $f = f_1 \circ f_2^{-1} \neq \text{id}$ e $f'(0) = 1$. Ou seja, f tem ordem infinita, o que é impossível, já que o grupo é finito.

Seja f um elemento de G . A derivada $f'(0)$ tem norma igual a 1 já que f tem ordem finita. Em outras palavras, G' é um subgrupo de S^1 identificado com o número complexo de norma 1. Um subgrupo discreto de S^1 é cíclico: para encontrar o gerador, basta escolher o elemento de “menor” argumento (diferente de 1). Em particular, G' é cíclico, pois é finito. Finalmente, como α induz uma bijeção entre G e G' concluímos que G é cíclico. \square

Antes de dar prosseguimento, faremos um exemplo simples de uma folheação com integral primeira global f .

Como antes, estamos considerando o caso em que apenas um “blow-up” da folheação nos dá as singularidades p_1, p_2, p_3 no divisor excepcional E , todas no domínio de Siegel. Elas são obtidas como a interseção de E com as transformações próprias das separatrizes de $\tilde{\mathcal{F}}$ (que é simplesmente o conjunto $f^{-1}(0)$). Suponha que a integral primeira seja dada pelo polinômio

$$f(x, y) = x^{n_1} y^{n_2} (x - y)^{n_3}.$$

Observe que o campo vetorial X , associado à folheação \mathcal{F} , tendo f como sua integral primeira, seja dado por

$$X = \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

De fato, a 1-forma associada a X é $\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Como $\omega \wedge df = 0$, f é, por definição uma integral primeira de \mathcal{F} .

Analizemos o “blow-up” da folheação em uma vizinhança da sua singularidade dada pela interseção do divisor excepcional $\pi^{-1}(0, 0)$ com a transformada própria da separatriz $y = 0$. Podemos usar a coordenadas (x, y) , onde $\pi(x, t) = (x, tx)$

$$\begin{aligned} \pi^*(X) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t/x & 1/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2 x^{(n_1+n_2+n_3-1)} t^{(n_2-1)} (1-t)^{n_3} - n_3 x^{(n_1+n_2+n_3-1)} t^{n_2} (1-t)^{(n_3-1)} \\ -n_1 x^{(n_1+n_2+n_3-1)} t^{n_2} (1-t)^{n_3} - n_3 x^{(n_1+n_2+n_3-1)} t^{n_2} (1-t)^{(n_3-1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n_2 x^{(n_1+n_2+n_3-1)} t^{(n_2-1)} (1-t)^{n_3} - n_3 x^{(n_1+n_2+n_3-1)} t^{n_2} (1-t)^{(n_3-1)} \\ x^{(n_1+n_2+n_3-2)} t^{n_2} (1-t)^{(n_3-1)} [-n_1 - n_2 - n_3 + t(n_1 + n_2 + n_3)] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eliminando os fatores em comum, $x^{(n_1+n_2+n_3-2)} t^{(n_2-1)} (1-t)^{(n_3-1)}$ a folheação permanece a mesma, o blow-up do campo vetorial \tilde{X} pode ser dado por

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= [n_2 x(1-t) - n_3 xt] \frac{\partial}{\partial x} + t[-n_1 - n_2 - n_3 + t(n_1 + n_2 + n_3)] \frac{\partial}{\partial t} \\ &= n_2 x [1 + h.o.t] \frac{\partial}{\partial x} - (n_1 + n_2 + n_3) t [1 + h.o.t] \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Assim, os autovalores associados a \tilde{X} em uma vizinhança da singularidade p_2 na separatriz $\{y = 0\}$ são $\lambda_1 = -(n_1 + n_2 + n_3)$ e $\lambda_2 = n_2$. Lembrando a discussão anterior, concluímos que a holonomia local é dada por $h_2(z) = e^{-2\pi i n_2 / (n_1+n_2+n_3)} z$. Analisando as outras duas singularidades p_1 na separatriz $\{x = 0\}$ e p_3 em $\{x = y\}$, fazendo cálculos análogos, observamos que as suas holonomias são dadas respectivamente, por $h_1(z) = e^{-2\pi i n_1 / (n_1+n_2+n_3)} z$ and $h_3(z) = e^{-2\pi i n_3 / (n_1+n_2+n_3)} z$.

O caso geral de uma integral primeira polinomial, dado por k separatrizes,

$$P(x, y) = x^{n_1} y^{n_2} (x - y)^{n_3} (x - \alpha_4 y)^{n_4} \dots (x - \alpha_k y)^{n_k}$$

é análogo. Em cada p_i a holonomia é dada por $h_i(z) = e^{-2\pi i n_i / (n_1 + \dots + n_k)} z$, onde n_i é a multiplicidade da separatriz que contém p_i . Observe que fixamos 3 separatrizes, i.e., $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ e $\{x - y = 0\}$. Sempre é possível fazer isso, sem perda de generalidade, i.e., podemos supor que 3 das singularidades são produzidas por estas separatrizes. De fato, como $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ age transitivamente em triplas de pontos em $\mathbb{CP}(1)$, i.e., sempre existe uma transformação levando p_1, p_2 e p_3 em quaisquer 3 pontos distintos de $\mathbb{CP}(1)$. Assim, a normalização desejada pode ser obtida por uma mudança linear de coordenadas.

Naturalmente, o campo vetorial X que possui P como integral primeira, é um polinômio homogêneo de grau $n_1 + \dots + n_k - 1$. Assim, a folheação associada a X é preservada por homotetias. De fato, têm-se $X(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{(n_1 + \dots + n_k - 1)} X(x, y)$, para $\lambda \in \mathbb{C}^*$, de forma que a “direção” determinada por X nos pontos (x, y) e $(\lambda x, \lambda y)$ é a mesma. Isso implica que as aplicações de holonomia h associadas a folha $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}$ (i.e., os elementos do grupo de holonomia projetiva de \mathcal{F} , $\tilde{\mathcal{F}}$) comuta com homotetias. Isso pode ser visto em detalhes no seguinte

Lema 4.3.24 *Se $X(x, y) = F(x, y)\partial/\partial x + G(x, y)\partial/\partial y$ for homogêneo, então o grupo de holonomia projetiva h é linear. Em outras palavras, os elementos do grupo $\rho(\Pi_1(\mathbb{CP}(1) \setminus \{p_1, \dots, p_k\}))$ são aplicações lineares de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Em particular todo o grupo é Abelian.*

Prova. Seja \mathcal{F} a folheação associada a X . Como X é homogêneo, as separatrizes de \mathcal{F} são retas radiais. No complemento das separatrizes, as folhas de \mathcal{F} são transversas às retas verticais complexas de \mathbb{C} . De maneira que \tilde{X} é da forma

$$\tilde{X} = xF(1, t)\frac{\partial}{\partial x} + (G(1, t) - tF(1, t))\frac{\partial}{\partial t}, \quad (4-14)$$

Podemos parametrizar as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ por $t \rightarrow (\varphi(t), t)$. De fato, fora das transformadas próprias das separatrizes de \mathcal{F} , $\tilde{\mathcal{F}}$ é transversa à fibração de Hopf dada nestas coordenadas por $(x, t) \mapsto t$, onde t é a coordenada natural ao longo do divisor excepcional. Assim, o fato de existir uma parametrização para as folhas de \mathcal{F} , nos dá a seguinte equação diferencial:

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t), \quad (4-15)$$

onde $A(t) = \frac{F(1, t)}{G(1, t) - tF(1, t)}$. Observe que a aplicação $\varphi_{t_0} : x \mapsto \varphi(t_0, x)$ onde t_0 está fixo, e x é a condição inicial, é linear. De fato, se φ_1, φ_2 forem soluções de (4-15), a sua soma $\varphi_1 + \varphi_2$ bem como o produto $c\varphi_1$, $c \in \mathbb{C}$, também são soluções de (4-15). Assim, $\varphi_{t_0}(x_1, x_2) = \varphi_{t_0}(x_1) + \varphi_{t_0}(x_2)$ e $\varphi_{t_0}(ct_0) = c\varphi_{t_0}(x)$. Segue que $\varphi_{t_0}(x)$ é da forma $\lambda(t_0).x$. Em particular, as aplicações de holonomia são lineares. De fato, a coordenada $\partial/\partial t$ em (4-14) depende somente de t , de forma que as aplicações de holonomia coincidem com os fluxos de “tempo t_0 ”.

□

Retornando ao exemplo, temos que os geradores h_1, \dots, h_k são finitos. Portanto, a holonomia projetiva corresponde ao grupo de rotações de ordem $n_1 + \dots + n_k$. De fato, eles podem ser escolhidos como sendo as holonomias locais em torno das singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Consideremos nossa folheação inicial \mathcal{F} satisfazendo as Condições 1 e 2 do Teorema de Mattei-Moussu. Lembramos que estamos supondo que as

singularidades da árvore de Seidenberg de \mathcal{F} podem ser reduzidas com um único “blow-up”. Para fixar notações, suponha que $\tilde{\mathcal{F}}$ tem k singularidades reduzidas, p_1, \dots, p_k .

Consideremos a folheação \mathcal{F}_P que admite uma integral primeira polinomial P , tal que $\tilde{\mathcal{F}}_P$ possui precisamente as mesmas singularidades p_1, \dots, p_k que $\tilde{\mathcal{F}}$. Lembramos que a folheação $\tilde{\mathcal{F}}_P$ admite uma fibração transversa ao divisor excepcional e tal que as separatrizes são fibras, que é simplesmente a fibração de Hopf. Ela realiza $\tilde{\mathbb{C}}^2$ como um fibrado de retas em $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$ (projeção ao longo das transformadas próprias das retas radiais de \mathbb{C}^2).

Naturalmente, poderíamos nos perguntar se \mathcal{F} é na realidade conjugada à nossa folheação “modelo” \mathcal{F}_P . Se isto for verdade, então a existência de uma integral primeira para \mathcal{F} seria um corolário. Tomemos a identificação óbvia do divisor excepcional E (associado ao “blow-up” de \mathcal{F}) com o divisor excepcional do “blow-up” de \mathcal{F}_P , que também será denotado por E . Naturalmente, $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ é uma folha da folheação $\tilde{\mathcal{F}}$. Além disso, lembramos que a holonomia projetiva em ambos os casos é cíclica, de forma que elas coincidem.

O problema de decidir se \mathcal{F} , \mathcal{F}_P são conjugadas, é um caso particular do estudo dos espaços modulares para folheações holomorfas.

Teorema 4.3.25 *Suponha que exista uma fibração Π , transversa ao divisor excepcional, e tal que as transformadas próprias de \mathcal{F} sejam fibras. Então as folheações \mathcal{F} e \mathcal{F}_P são holomorficamente conjugadas.*

Prova. As hipóteses acerca da existência de uma fibração transversa em uma vizinhança da origem nos permite levantar caminhos de $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ em caminhos nas folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$. O método que utilizaremos é essencialmente o mesmo que usamos na demonstração da Proposição 4.3.8.

Seja h uma conjugação entre os grupos de holonomia de $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_P$ representados em Σ . Dado um ponto $z \in \Sigma$ e um caminho $\gamma \subseteq E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ podemos levantar γ com relação a Π em um caminho $\tilde{\gamma}$ contido na folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ que passa por $z \in \Sigma$. Analogamente, γ também pode ser levantado com relação à fibração de Hopf em um caminho contido em uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}_P$.

A fim de construir uma conjugação entre $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{F}}_P$ procedemos como se segue. Consideremos $z \in \Sigma$ e um caminho $\gamma \subseteq E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ como acima. Seja $\tilde{\gamma}_1$ o levantamento de γ com relação a Π na folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ passando por z . Semelhantemente, seja $\tilde{\gamma}_2$ o levantamento de γ com relação à fibração de Hopf na folha de $\tilde{\mathcal{F}}_P$ passando por $h(z)$. A seguir, impomos que H leve o ponto final de $\tilde{\gamma}_1$ no extremo de $\tilde{\gamma}_2$. Esta aplicação está bem-definida, pois as holonomias projetivas são conjugadas. Além disso, graças à estimativa de Mattei, (Proposição 4.3.21), H está definido na vizinhança de cada singularidade

p_i , exceto pelas separatrizes não contidas no divisor excepcional. Como antes, usamos o Teorema de Extensão de Riemann para definir H nas separatrizes. \square

Sendo assim, o problema de encontrar uma conjugação como a desejada, reside apenas na existência de uma fibração em $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ tendo as referidas separatrizes como fibras. Entretanto, a existência desta fibração somente pode ser garantida se o número de singularidades é no máximo 4. Um contra-exemplo para o caso de 5 singularidades pode ser visto em (B-M-S). Isso nos impede de deduzir o Teorema 4.3.1 de um resultado forte relacionado com espaços modulares de folheações. Assim, a fim de tratar o caso geral, não podemos contar necessariamente com a conjugação de \mathcal{F} e \mathcal{F}_P . Na verdade, a existência desta fibração é uma suposição bem mais forte do que o que realmente é necessário para resolver o problema de se obter uma integral primeira.

De fato, não se faz necessária uma aplicação que conjugue as folhas de \mathcal{F} e \mathcal{F}_P , na verdade, basta encontrar ϕ que seja *constante* ao longo das folhas de \mathcal{F} e definida em uma vizinhança de E . Faremos isso a seguir.

Prova do Teorema 4.3.1 no caso em que um único “blow-up” se faz necessário. Daqui para frente, consideremos uma folheação \mathcal{F} e o seu “blow-up” $\tilde{\mathcal{F}}$. Considere novamente a seção transversa Σ para $\tilde{\mathcal{F}}$. Conforme visto, a holonomia projetiva de $\tilde{\mathcal{F}}$ é finita e cíclica. Seja z uma coordenada local em Σ em que o gerador da holonomia de $\tilde{\mathcal{F}}$ seja dado por

$$z \mapsto e^{2\pi i/m} z.$$

A seguir, consideramos a função $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ dada nestas coordenadas por $h(z) = z^m$. Claramente, h é invariante pelo grupo de holonomia da folha $E \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$. Agora estendemos h a uma função H , impondo o seguinte,

1. H coincide com h em Σ .
2. H é constante sobre as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}$ intersectando Σ .

A invariância de h pelo grupo de holonomia projetiva implica que H está bem-definido. A estimativa de Mattei assegura que H está definido em uma vizinhança de E menos as separatrizes. Pelo Teorema de Extensão de Riemann, uma extensão contínua de H às separatrizes é automaticamente holomorfa. Finalmente apenas precisamos verificar que H pode ser continuamente estendida às separatrizes, definindo $H = 0$ sobre elas. Isto segue imediatamente, observando que uma sequência de folhas L_i de $\tilde{\mathcal{F}}$ acumulando na separatriz, também acumula no divisor excepcional. Naturalmente, $h(0) = 0$ de forma que $H = 0$ sobre E e o teorema segue. \square

Agora podemos provar o caso geral do Teorema de Mattei-Moussu.

Prova do Teorema 4.3.1. Iremos mostrar para o caso em que dois “blow-ups” são suficientes para reduzir a singularidade. Ficará claro que o procedimento é o mesmo para qualquer número de “blow-ups”. Considere uma folheação \mathcal{F} cuja árvore de Seidenberg apenas contenha singularidades reduzidas após dois “blow-ups”. Em outras palavras, suponha que o divisor excepcional E_1 do “blow-up” $\tilde{\mathcal{F}}_1$ por π_1 em $(0,0)$ contenha singularidades p_1, \dots, p_k , tais que a razão dos seus autovalores seja um número racional negativo, e com uma única singularidade degenerada q .

Consideremos o “blow-up” π_2 de $q \in E_1$, resultando a folheação $\tilde{\mathcal{F}}_2$. Devemos mostrar que existe uma aplicação holomorfa definida em uma vizinhança do divisor excepcional $E_2 = (\pi_1 \circ \pi_2)^{-1}(0,0)$ de $\tilde{\mathcal{F}}_2$, que seja constante ao longo das folhas. Denotemos por E o conjunto $\pi_2^{-1}(p)$ (isomorfo a $\mathbb{CP}(1)$), que apenas contém singularidades reduzidas, digamos q_1, \dots, q_l . Considere uma seção local Σ_1 transversa a E_1 perto de p , e a seção Σ_2 em E . Considere a holonomia “local” (no sentido que provém de singularidade p), h associada à folha $E_2 \setminus \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l\}$ e um caminho com pontos inicial e final, $c(0)$ e $c(1)$ na interseção de Σ_1 com E_1 , e “envolvendo” E . Este grupo de holonomias é cíclico e finito, já que existe uma correspondência natural entre si e o grupo de holonomia projetiva associado a Σ_2 e $E \setminus \{q_1, \dots, q_l\}$. Este último é o grupo cíclico de rotações conforme visto anteriormente. As outras holonomias locais associadas a uma volta em torno de cada singularidade p_i também são finitos e cíclicos. Assim, a holonomia “global”, i.e., o grupo de holonomia associado à folha $E_2 \setminus \{p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l\}$ de $\tilde{\mathcal{F}}_2$ e *qualquer* caminho nesta folha é um grupo cíclico de rotações. Então podemos definir a integral primeira conforme feito anteriormente e estendê-la a vizinhanças das singularidades pela estimativa de Mattei e pelo Teorema de Extensão de Riemann. \square

Isto conclui a demonstração do Teorema de Mattei-Moussu.

5 Conclusão

Neste texto abordamos aspectos locais e globais de folheações holomorfas. Apesar de termos incluído certos resultados em dimensão mais alta, em essência o trabalho foi concentrado em resultados para campos vetoriais complexos em dimensão 2. Em conclusão, trata-se de um primeiro passo em direção ao estudo mais profundo de folheações holomorfas.

Referências Bibliográficas

- [B-M-S] M. Berthier, R. Meziani, P. Sad, *On the classification of nilpotent singularities*, Bull. Sci. Math. 123 (1999), no. 5, 351-370. 4.3.3
- [C-S] C. Camacho, P. Sad, *Pontos Singulares de Equações Diferenciais Analíticas*, 16 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (1987);
- [Car-G] L. Carleson, T.W. Gamelin *Complex Dynamics*, New York: Springer-Verlag, (1993) p. 174; 3.2.2, 4.1.2
- [F-Gr] K. Fritzsche, H. Grauert, *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*, Sringer (2000);
- [G-R] E. Ghys, J.-C. Rebelo, *Singularités des Flots Holomorphes II*, Ann. Inst. Fourier, Vol. 47, No. 4, 1117-1174 (1997).
- [G] P.A. Griffiths, *Introduction to Algebraic Curves*, Amer. Math. Soc. (1989) p. 225;
- [H-K-M] H. Hukuara, T. Kimura, T. Matuda, *Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe*, Publ. Math. Soc. of Japan, 1961. 4.1.1, 4.1.1
- [Ma-R] J. Martinet, J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. Math. I.H.E.S., **55**, (1982), p.63-164; 1, 4.1.1, 4.1.1
- [M-M] J.-F. Mattei, R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sc. E.N.S., IV Sér. **13** (1980), p. 469-523; 1, 1.0.1, 4.2, 4.3, 4.3.1, 4.3.8
- [M] J.-F. Mattei, unpublished manuscript (1996) 4.3.8, 4.3.2, 4.3.21
- [PM] R. Pérez-Marco, *Solution Complète au Problème de Siegel de Linéarisation d'une Application Holomorphe au Voisinage d'un Point Fixe (D'après J.-C. Yoccoz)*, Sémin. Bourbaki, Astérisque 206 (1992), p.273-310;
- [Re] J.-C. Rebelo, Lecture notes of a course given at Stony Brook during fall 2001.

- [R1] H. Reis *Analytic Classification of Complex Differential Equations*, Tese de Doutorado Universidade do Porto (2006) Faculdade de Ciências da Universidade do Porto; 4.1.1
- [R2] H. Reis *Equivalence and semi-completeness of foliations*, Nonlinear Analysis, theory, Methods and Applications, Vol. 64, No. 8, 1647-1896 (2006); 4.3.2
- [Se] A. Seidenberg, *Reduction of Singularities of the Differentiable Equation $Ady = Bdx$* , Amer. J. Math., 90 (1968), p. 248-269; 4.2
- [Vo] S. Voronin, *Analytic Classification of Germs of Conformal Mappings $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ with Identity Linear Part*, Moscow State University. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, vol. 15, No.1 (1981) p. 1-17. 1, 4.1.2, 4.1.10

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)