



Fábio Silva de Souza

Nós Legendreanos em T^3

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Paul Alexander Schweitzer, S. J.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Fábio Silva de Souza

Nós Legendreanos em T^3

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paul Alexander Schweitzer, S. J.

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Derek Hacon

PUC

Prof. Leonardo Navarro de Carvalho

UFF

Prof. Nicolau Corção Saldanha

PUC

Prof. Paulo Henrique Cabido Gusmão

UFF

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 27 de Fevereiro de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Fábio Silva de Souza

Ficha Catalográfica

Souza, Fábio

Nós Legendreanos em T^3 / Fábio Silva de Souza; orientador: Paul Alexander Schweitzer, S. J.. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 73 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Nós Legendreanos. 3. Estruturas de Contato. 4. Nós Topológicos. 5. Toro T^3 . 6. Número de Thurston-Bennequin. 7. Número de Maslov. I. Schweitzer, S. J., Paul Alexander. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

À minha mãe e minha vó.

Agradecimentos

A Deus por ter colocado as pessoas certas na minha vida e me dado força nos momentos mais difíceis.

À minha mãe Hermelina Duarte Silva de Souza e minha vó Fidelcina Silva Miranda por terem cuidado de mim esse tempo todo, sem elas jamais teria conseguido chegar até aqui.

Ao meu orientador Pe. Paul Schweitzer pela compreensão, paciência com que conduziu meus estudos e pelos seus valiosos conselhos.

Ao professor Nicolau Saldanha por ter cedido seu tempo para responder muitas das minhas dúvidas.

Aos professores da graduação, em especial a Hamilton Simões por seus ensinamentos e por sua ajuda, e também Alan Freitas Machado Clícia Valadares, Luerbio Faria e Carlos Orelhana por terem incentivado meus estudos.

Ao professor John Etnyre por ter respondido todas as minhas dúvidas por email e por ter me cedido as figuras do seu artigo “Legendrian and Transversal Knots”.

À Stefan Schönenberger por ter me cedido as figuras que compõem o capítulo 3 desta dissertação.

Ao professor Thomas Lewiner pela ajuda com o \LaTeX .

Ao professor Derek Hacon por ter sido quem trouxe ao nosso conhecimento o assunto: nós legendreanos.

À minha namorada Geziane Aparecida por ter tido paciência comigo.

E por fim, mas não menos aos meus amigos em especial à Arlei dos Santos Silva.

Resumo

Souza, Fábio; Schweitzer, S. J., Paul Alexander. **Nós Legendreanos em T^3** . Rio de Janeiro, 2007. 73p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesse trabalho apresentamos os nós legendreanos numa variedade M de dimensão 3 destacando as estruturas de contato canônicas em \mathbb{R}^3 e T^3 . Para o primeiro caso estudamos os invariantes clássicos: Números de Thurston-Bennequin e Maslov. No segundo caso o número de Maslov é facilmente estendido para esse contexto, mas para o número de Thurston-Bennequin existe uma dificuldade em defini-lo, pois T^3 não é simplesmente conexo. Apresentamos uma definição desse invariante para os nós lineares legendreanos em T^3 , seguindo um trabalho de Y. Kanda.

Palavras-chave

Nós Legendreanos. Estruturas de Contato. Nós Topológicos. Toro T^3 . Número de Thurston-Bennequin. Número de Maslov.

Abstract

Souza, Fábio; Schweitzer, S. J., Paul Alexander. **Legendrian Knots in T^3** . Rio de Janeiro, 2007. 73p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work we study legendrian knots in a 3-manifold M , with emphasis on the canonical contact structures in \mathbb{R}^3 and T^3 . For the first case we will study the classic invariants: of Thurston-Bennequin and Maslov numbers. The Maslov number is easily extended to T^3 , but it is difficult to define the Thurston-Bennequin number, because T^3 is not simply connected. We present a definition of that invariant for the linear legendrian knots in T^3 following a paper of Y. Kanda.

Keywords

Legendrian Knots. Contact Structures. Topological Knots. Torus T^3 . Thurston-Bennequin Number. Maslov Number.

Sumário

1	Introdução	10
2	Nós e Enlaces	12
2.1	Preliminares	12
2.2	Diagramas	15
2.3	Movimentos de Reidemeister	17
2.4	Aritmética dos Nós	20
2.5	Superfície de Seifert	22
2.6	Invariantes Numéricos	24
2.7	Polinômios	26
3	Geometria de Contato	30
3.1	Formas Diferenciais	30
3.2	Estruturas de Contato	39
4	Nós Legendreanos	47
4.1	Conceitos Básicos	47
4.2	Projeções Frontal e Lagrangeana	48
4.3	Números de Thurston-Bennequin e Maslov	54
5	Nós Legendreanos em T^3	62
5.1	Elemento de Contato	62
5.2	Números de Thurston-Bennequin e Maslov de nós em T^3	64

*Já não quero dicionários
consultados em vão.
Quero só a palavra
que nunca estará neles
nem se pode inventar.
Que resumiria o mundo
e o substituiria.
Mais sol do que o sol,
dentro da qual vivêssemos
todos em comunhão
mudos,
saboreando-a.*

Carlos Drummond, *A paixão medida.*

1

Introdução

Uma curva legendreana numa variedade diferencial de dimensão 3, M^3 , é uma aplicação suave da circunferência S^1 em M^3 que é tangente em cada ponto à estrutura de contato. Se tal aplicação é um mergulho é um nó legendreano. Os nós legendreanos além de possuírem invariantes dos nós topológicos ainda admitem os invariantes “clássicos” que são os números de Thurston-Bennequin e Maslov.

Por estrutura de contato ξ em M^3 entendemos um campo de planos completamente não integrável dado localmente pelo núcleo de uma 1-forma α em M^3 . Dizer que ξ é completamente não integrável significa dizer que não existe nenhuma superfície S pequena em M^3 tal que $TS = \xi|_S$, onde TS é o campo de planos tangentes a S . O teorema de Frobenius traduz essa condição em $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ em todos os pontos de M^3 . Essa última condição é o que chamamos de condição de contato.

Com o passar dos anos o estudo dos nós legendreanos tem demonstrado ser um importante objeto para novas descobertas na geometria de contato, principalmente no que diz respeito a classificação delas em estruturas de contato tensas e super torcidas, em inglês *tight* e *overtwisted*. Em 1997 Yutaka Kanda publicou um artigo na revista *Communication in Analysis Geometry*, (Kan), onde classificou as estruturas de contato no toro tridimensional T^3 . Nesse artigo Kanda provou que duas estruturas de contato dadas por uma 1-forma do tipo $\alpha_n = \cos(2\pi n z)dx + \sin(2\pi n z)dy$, com $n \neq m$ não são contatomorfos. Além disso, nesse mesmo artigo demonstrou que uma estrutura tensa em T^3 é contatomorfa a estrutura de contato dada pela 1-forma $\alpha_n = \cos(2\pi n z)dx + \sin(2\pi n z)dy$ para algum inteiro positivo n . Esses resultados apresentados por Kanda foram obtidos com o uso do número de Thurston-Bennequin adaptado para os nós legendreanos em T^3 . Sete anos depois Ghiggini publicou o artigo “Linear Legendrian curves in T^3 ”, (Gh), fortemente influenciado pelo trabalho de Kanda citado. Nesse artigo Ghiggini dá uma classificação das curvas legendreanas lineares por isotopia legendreana em todas as estruturas de contato tensas em T^3 .

Organizamos o texto da seguinte maneira: no início do capítulo 2 damos

a definição de conceitos básicos da teoria dos nós e enlaces topológicos. Em seguida definimos o diagrama de um nó e provamos que para todo nó existe um nó equivalente que tem um diagrama. Apresentamos também os movimentos de Reidemeister num diagrama de nó e provamos no caso de nós poligonais que dois nós poligonais são equivalentes se, e só se, seus diagramas podem ser obtidos um do outro por uma sequência finita de movimentos de Reidemeister e isotopias planares. Observamos ainda a independência desses movimentos. Tratamos também de alguns invariantes numéricos de nós topológicos, a existência de uma superfície de Seifert de um nó e no final do capítulo apresentamos alguns polinômios de nós. No capítulo 3 damos uma breve revisão do conceito de formas diferenciais com algumas de suas propriedades, em seguida definimos o que é uma estrutura de contato e apresentamos alguns resultados da teoria que nos serão úteis para desenrolar a teoria de nós legendreanos. Dentre esses resultados destacamos o teorema de Darboux o qual não iremos demonstrar, e o teorema de Gray. No capítulo 4 trataremos dos nós legendreanos em M^3 dando destaque aos nós em \mathbb{R}^3 e seus invariantes “clássicos”. Provaremos que todo nó numa variedade de contato de dimensão 3 é C^0 -próximo à um nó legendreano por uma isotopia pequena. Serão dadas fórmulas para calcularmos os invariantes “clássicos” de nós legendreanos em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Dividimos o capítulo 5 em duas seções; a primeira iniciamos definindo elemento de contato o que nos dá uma motivação natural para escolhermos as estruturas ξ_n dadas por $\alpha_n = \cos(2\pi nz)dx + \sin(2\pi nz)dy$. Na segunda seção tratamos os números de Thurston-Bennequin (segundo a definição de Kanda) e o número de Maslov.

2

Nós e Enlaces

2.1

Preliminares

Ao longo de todo o texto o conjunto dos números naturais (começando em 1), o conjunto dos inteiros e o conjunto dos números reais serão representados pelos símbolos \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{R} , respectivamente. Denotaremos por \mathbb{R}^n o espaço n -dimensional, isto é,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\},$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Além disso, indicaremos por I o intervalo fechado $[0, 1]$. A n -esfera é definida por:

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\},$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em \mathbb{R}^{n+1} .

Sejam M e N duas variedades em \mathbb{R}^n . Dizemos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é um mergulho se $f : M \rightarrow f(M)$ é um homeomorfismo. Diremos que uma função f é diferenciável (ou suave) se ela for de classe C^∞ , isto é, se ela possui derivadas de todas as ordens. Caso a derivada de f , $Df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$, seja injetiva f chama-se imersão.

Duas aplicações contínuas $h_0, h_1 : M \rightarrow N$ são ditas homotópicas se existe uma aplicação contínua

$$h : M \times I \rightarrow N$$

tal que $h(x, 0) = h_0(x)$ e $h(x, 1) = h_1(x)$. Neste caso h chama-se homotopia. Fazendo $h_t(x) = h(x, t)$ obtemos uma família a um parâmetro $\{h_t\}_{t \in I}$ que começa em h_0 e termina em h_1 ; então podemos pensar a aplicação h_t como uma deformação contínua.

Estamos aqui interessados em estudar os nós no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 ou no toro tridimensional T^3 que é identificado como $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. Sendo assim, quando estivermos nos referindo a um nó (ou enlace) em M , onde M

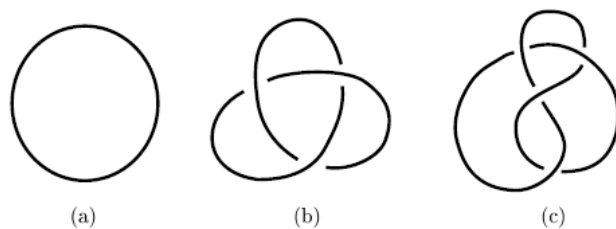


Figura 2.1: (a) nó trivial; (b) nó trevo; (c) a figura oito nó.

é uma variedade de dimensão 3, estaremos implicitamente supondo $M = \mathbb{R}^3$ (ou $M = T^3$).

Definição 2.1.1 Um nó em M é um mergulho $\kappa : S^1 \rightarrow M$.

Definição 2.1.2 Um enlace com n componentes é um mergulho

$$\ell : \coprod_{i=1}^n S_i^1 \rightarrow M,$$

onde \coprod denota a união disjunta e cada S_i^1 é uma cópia de S^1 .

Às vezes, quando não houver ambigüidade nos referiremos a um enlace ℓ pela sua imagem

$$\ell\left(\coprod_{i=1}^n S_i^1\right) = L.$$

Assim podemos escrever $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$, onde cada L_i é um nó. A orientação de S_i^1 induz uma orientação natural em cada L_i . Note que todos os enlaces com n componentes são homeomorfos e que um enlace com uma componente é um nó.

Definição 2.1.3 Seja $h : M \times I \rightarrow M$ uma homotopia. Dizemos que h é uma isotopia ambiente se h_0 é a identidade e h_t é um homeomorfismo, $\forall t \in I$.

Definição 2.1.4 Dois enlaces L_0 e L_1 são ditos isotópicos (ou equivalentes, com notação $L_0 \sim L_1$) se existe uma isotopia ambiente h tal que $h_1(L_0) = L_1$. Caso L_0 e L_1 sejam orientados além disso, h deve preservar a orientação.

A relação de \sim é uma relação de equivalência no conjunto de todos os enlaces. De fato, dado um enlace L em M temos que a aplicação $h : M \times I \rightarrow M$ definida por $h(x, t) = x$ é uma isotopia ambiente entre L e L , logo \sim é reflexiva. Sejam L_0 e L_1 dois nós tais que $L_0 \sim L_1$. Daí existe uma isotopia

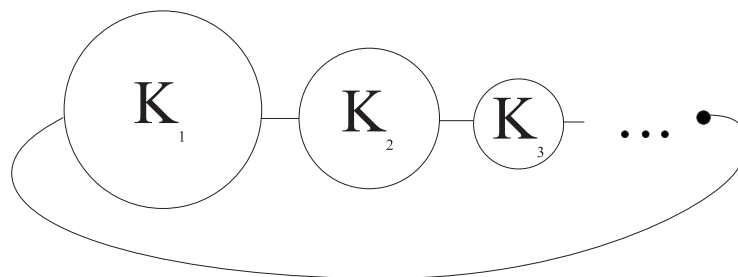


Figura 2.2: Nó selvagem.

ambiente $h : M \times I \rightarrow M$ entre os nós L_0 e L_1 . Considere $\tilde{h} : M \times I \rightarrow M$ definida por $\tilde{h}(x, t) = h_t^{-1}(x)$. Temos que \tilde{h}_0 é identidade e $\tilde{h}_1(L_1) = L_0$. Logo $L_1 \sim L_0$. Suponhamos agora que $L_0 \sim L_1$ e $L_1 \sim L_2$. Daí existem isotopias $h : M \times I \rightarrow M$ entre L_0 e L_1 , e $g : M \times I \rightarrow M$ entre L_1 e L_2 . Tomemos

$$\bar{h}(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t), & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ g(h_1(x), 2t - 1), & \text{se } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A aplicação \bar{h} definida como acima é uma isotopia ambiente entre L_0 e L_2 , logo $L_0 \sim L_2$.

Cada classe de equivalência de um nó, \mathcal{K} , é chamada **nó tipo**. Assim nós equivalentes tem o mesmo nó tipo.

Observação 2.1.5 *Um nó equivalente a uma circunferência em \mathbb{R}^3 chama-se nó trivial.*

Um nó pode ter um comportamento estranho, como por exemplo ter uma sequência infinita de malhas convergindo para um ponto limite. Este é um exemplo de um nó selvagem (veja figura 2.2). Para evitarmos essas patologias vamos considerar em nosso estudo apenas os nós comportados cuja definição segue abaixo.

Um nó cuja imagem é uma união finita de segmentos de reta chama-se **nó poligonal**, os segmentos de retas que compõem a imagem do nó chamam-se lados e os pontos de encontro entre dois lados chamam-se vértices. Um enlace poligonal é um enlace onde cada uma de suas componentes é um nó poligonal.

Definição 2.1.6 *Um enlace é dito **comportado** se é equivalente à um enlace poligonal. Caso contrário chama-se enlace selvagem.*

Chamamos de **isotopia elementar** uma reparametrização de um lado \overline{AB} com dois lados \overline{AC} e \overline{CB} , veja figura 2.3. Dizemos que dois enlaces poligonais são **isotópicos por isotopia elementar** se existe uma sequência de isotopias elementares que transforma um no outro.

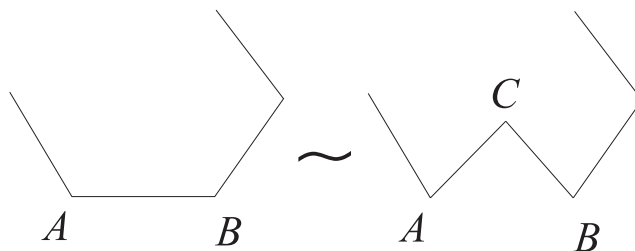


Figura 2.3: Isotopia elementar.

Observação 2.1.7 *Obviamente, dado um enlace comportado L existe um enlace poligonal equivalente a L . Chamamos esse enlace de **representante poligonal** de L . Um fato conhecido (veja corolário 3.16 do livro (BZ)) é que: dois enlaces comportados são equivalentes se, e somente se, seus representantes são isotópicos por isotopia elementar. Agora se quisermos mostrar que dois nós são equivalentes precisamos apenas mostrar que seus representantes poligonais são isotópicos por isotopia elementar, o que em geral é muito mais fácil.*

Um nó $\kappa : S^1 \rightarrow M$ é dito **suave** se κ é uma aplicação diferenciável. Os nós suaves (resp. comportados) podem ser entendidos como uma curva suave (resp. suave por partes) fechada simples $\alpha : I \rightarrow M$. Um **arco** é a imagem de um mergulho $f : J \rightarrow M$, onde J é um intervalo contido em I . Um **nó com referencial** é um nó que tem uma base ordenada do plano normal que varia continuamente. Se M é orientada basta ter o primeiro campo normal.

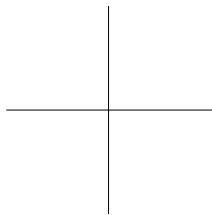
Proposição 2.1.8 *Todo nó suave parametrizado pelo comprimento de arco é comportado.*

Uma prova desta última proposição é dada no apêndice I do livro (CF).

2.2 Diagramas

A **projeção** de um enlace L em $M = \mathbb{R}^3$ (ou $M = T^3$) é a projeção $\pi|_L : L \rightarrow \mathbb{R}^2$ (ou T^2). Um ponto $q \in \pi(L)$ é dito **regular** se $\pi^{-1}(q)$ é unitário, caso contrário dizemos que q é **ponto múltiplo**. Se $\#\pi^{-1}(q) = 2$, então dizemos que q é **ponto duplo**. Um ponto duplo q é dito **transversal** se existem uma vizinhança U de q e um homeomorfismo em U que leva um arco em U no eixo x e o outro arco em U no eixo y , onde o eixo x é unido com o eixo y como ilustra a figura 2.4.

Definição 2.2.1 *Dizemos que a projeção π é uma **projeção regular** do enlace L se $\pi(L)$ tem um número finito de pontos múltiplos e todos eles são pontos duplos transversais.*

Figura 2.4: Duas retas em \mathbb{R}^2

Teorema 2.2.2 *Todo enlace poligonal possui uma projeção regular.*

Prova. Seja L um enlace poligonal e consideremos uma projeção $\pi : M \rightarrow P$. Podem ocorrer as seguintes situações:

- o enlace L tem algum lado paralelo à direção da projeção π ;
- existe um ponto múltiplo q tal que $\#\pi^{-1}(q) > 2$;
- um ponto duplo produzido por um vértice de L ;
- dois lados paralelos de L transversais a uma mesma reta que contenha a direção da projeção π .

Em todos esse casos é possível fazer uma pequena perturbação em L de modo que nenhum desses casos citados aconteça (ver teorema 3.2.1 de (Cr)). Obtemos assim uma projeção π que possui apenas pontos duplos transversais.

Note que cada ponto duplo transversal é produzido por um par de lados de L . Como o enlace L possui um número finito de lados segue que $\pi(L)$ possui um número finito de pontos duplos transversais. Portanto π é uma projeção regular do enlace L . \square

Na imagem de uma projeção regular chamamos de **cruzamentos** os pontos que correspondem a pontos duplos transversais.

Definição 2.2.3 *Sejam L um enlace e $\pi : M \rightarrow P$ uma projeção regular de L . O **diagrama** de L é a imagem $\pi(L)$ com a informação em cada cruzamento de qual arco está por cima e qual está por baixo.*

Por definição, o número de cruzamentos no diagrama de um enlace é finito. Um nó orientado dá uma orientação natural para o seu diagrama. Assim classificamos como **cruzamentos positivos** e **cruzamentos negativos** os cruzamentos no diagrama de um nó (veja figura 2.5).

Corolário 2.2.4 *Todo nó poligonal possui um diagrama.*

Com este último corolário podemos admitir que para cada enlace comportado L existe um enlace equivalente a L que possui um diagrama.

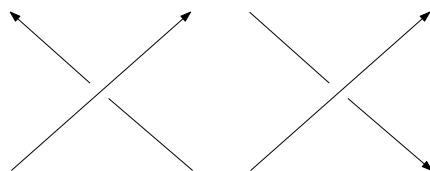


Figura 2.5: Cruzamentos positivo e negativo, respectivamente, no diagrama orientado.

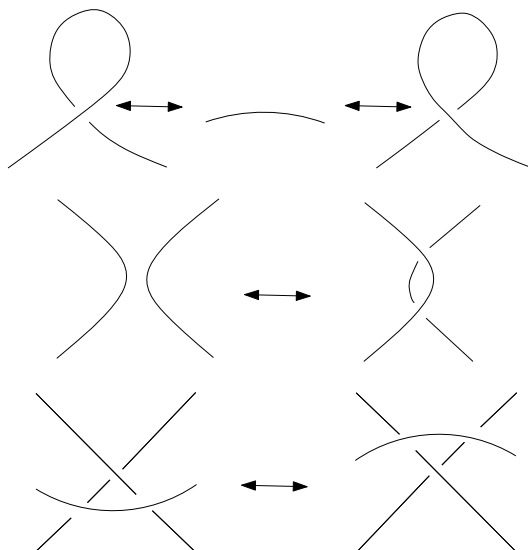


Figura 2.6: Movimentos de Reidemeister: R_1 (em cima), R_2 (no meio) e R_3 (em baixo).

Definição 2.2.5 *Seja \mathcal{D} o diagrama de um enlace em \mathbb{R}^3 (resp. T^3). Uma isotopia planar (resp. toroidal) do diagrama \mathcal{D} é um isotopia do plano (resp. T^2) em si próprio que não muda a configuração do diagrama.*

2.3 Movimentos de Reidemeister

Existem três movimentos R_1 , R_2 e R_3 ilustrados na figura 2.6. Esses movimentos são chamados de **movimentos de Reidemeister**.

Proposição 2.3.1 *Dois enlacs poligonais em \mathbb{R}^3 (ou T^3) são isotópicos por isotopia elementar se, e somente se, o diagrama de um pode ser obtido do diagrama do outro por uma sequência finita de isotopias planares (ou toroidais) e movimentos de Reidemeister.*

Prova. Observemos que os movimentos de Reidemeister e as isotopias planares não mudam a classe de isotopia de um enlace. Assim basta provarmos a outra implicação.

Sejam \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 dois diagramas de dois enlacs poligonais equivalentes L_1 e L_2 em \mathbb{R}^3 , respectivamente. Pela definição de isotopia entre L_1 e L_2 temos

que existe um número finito de isotopias elementares tal que $\overline{AB} \mapsto \overline{AC} \cup \overline{CB}$ (veja figura 2.3). Este primeiro enlace é reconstruído tornando-se um segundo enlace. Sem perda de generalidade podemos supor que cada passo nos dá um triângulo ABC , onde os segmentos \overline{DA} e \overline{BE} que vem do final do segmento AB não intersectam o interior de ABC . Caso contrário, podemos obtê-lo por R_1 .

Seja \mathcal{D} o diagrama do primeiro enlace citado anteriormente no plano ABC . Agora separamos a interseção das componentes de ABC e \mathcal{D} em dois conjuntos: superior e inferior de acordo com a localização dos arcos do enlace cujo diagrama é \mathcal{D} com respeito ao plano ABC .

Consideremos uma triangularização de ABC . Podemos supor que esses triângulos são dos tipos seguintes:

- Primeiro tipo, contém apenas um cruzamento de \mathcal{D} ; neste caso os lados de \mathcal{D} cruzam dois lados de ABC ;
- Segundo tipo, contém apenas um vértice de \mathcal{D} e partes dos dois lados de \mathcal{D} que se ligam ao vértice;
- Terceiro tipo, contém apenas parte de um lado de \mathcal{D} ;
- Quarto tipo, não contém vértices nem lado de \mathcal{D} .

Estes triângulos exceto, o quarto tipo, estão ilustrados na figura 2.7.

Tal decomposição em triângulos pode ser feita da seguinte maneira: primeiro corte todos os cruzamentos e vértices por um triângulo do primeiro e segundo tipo, respectivamente. Depois triangularize a parte restante do triângulo ABC com os dois outros tipos de triângulos restantes.

Em vez de executar isotopia elementar ao triângulo ABC vamos executar passo-à-passo isotopias elementares em pequenos triângulos que compõem ABC .

Agora observemos que o triângulo do primeiro tipo gera uma combinação de R_2 e R_3 , os triângulos do segundo e terceiro tipo geram R_2 ou uma isotopia planar e o quarto triângulo gera uma isotopia planar. Logo isotopias podem ser representadas por uma combinação de movimentos de Reidemeister e isotopias planares.

A mesma demonstração pode ser feita para o caso de enlaces em T^3 , pois a projeção em \mathbb{R}^2 é localmente equivalente a projeção em T^2 . \square

Observação 2.3.2 *Existe uma versão mais geral da proposição que acabamos de provar cujo enunciado afirma que dois enlaces comportados são isotópicos se e somente se seus diagramas podem ser obtidos um do outro por uma sequência finita de movimentos de Reidemeister e isotopias planares. A demonstração*

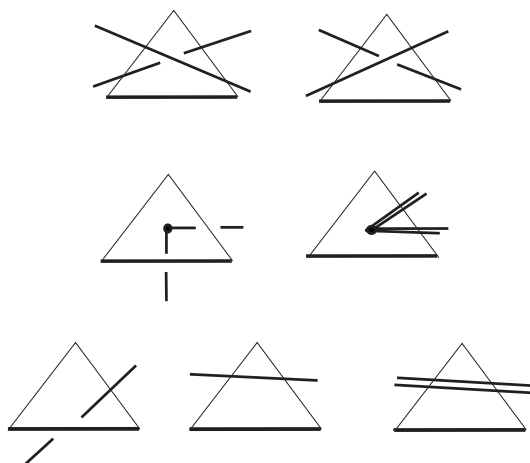


Figura 2.7: Triângulo do primeiro tipo (em cima), triângulo do segundo tipo (no meio) e triângulo do terceiro tipo (em baixo).

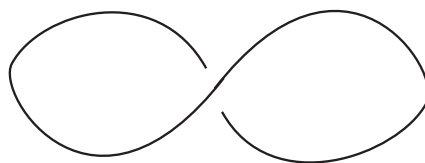


Figura 2.8: Diagrama do nó trivial.

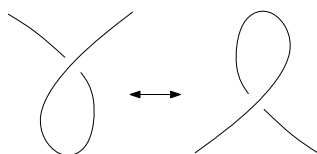


Figura 2.9: Movimento R'_1 .

desse resultado pode ser encontrada em (PS). Ao contrário da demonstração do caso de nós poligonais a demonstração desse caso mais geral não é nada simples.

Proposição 2.3.3 *Os movimentos de Reidemeister são independentes.*

Apenas iremos ilustrar esse fato com um simples exemplo de que realizando apenas os movimentos R_2 e R_3 não obtemos um diagrama que foi obtido realizando-se apenas o movimento R_1 , ou seja, R_2 e R_3 não implicam R_1 . Para mais exemplos e a demonstração da proposição 2.3.3, indicamos ao leitor ver o apêndice A do livro (Ma).

Exemplo 2.3.4 *A figura 2.8 ilustra um diagrama de um nó trivial com um cruzamento. Realizando apenas o movimento R_1 nesse diagrama é fácil ver que podemos obter um novo diagrama sem cruzamentos. Por outro lado o movimento R_2 cria ou destrói dois cruzamentos num diagrama, logo não muda a paridade do número de cruzamentos do diagrama. Realizando o movimento R_3 continuamos com o mesmo número de cruzamentos, logo também não muda*

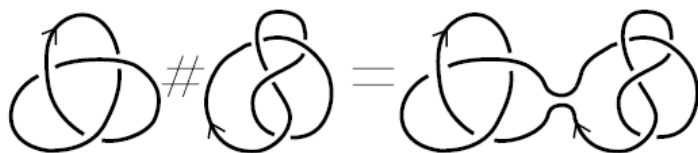


Figura 2.10: Soma conexa de dois nós.

a paridade do número de cruzamentos no diagrama. Portanto é impossível transformar tal diagrama num diagrama sem cruzamentos usando apenas os movimentos R_2 e R_3 .

Introduzimos mais um movimento que denotaremos por R'_1 ilustrado na figura 2.9. Uma sequência finita de movimentos R'_1 , R_2 e R_3 realizados sobre o diagrama de um nó (ou enlace) chama-se **isotopia regular**. Dizemos que dois diagramas são **isotópicos por isotopia regular** se podemos obter um através do outro por isotopia regular.

2.4

Aritmética dos Nós

Nesta seção vamos considerar apenas os nós em \mathbb{R}^3 .

Definição 2.4.1 *Sejam K_1 e K_2 dois nós orientados. A soma conexa de K_1 com K_2 é um nó $K_1 \# K_2$ obtido colocando K_i numa 3-bola B_i tais que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e de forma que algum arco curto de K_i esteja no bordo de B_i , apague parte desses arcos, e em seguida identifique as extremidades de K_1 às extremidades de K_2 via um homeomorfismo que preserva a orientação (veja figura 2.10 para uma ilustração).*

A soma conexa está bem definida para nós orientados em \mathbb{R}^3 , isto é, a soma conexa não depende da escolha dos arcos a serem apagados.

Sejam K_1 e K_2 dois nós em \mathbb{R}^3 . Para obtermos o nó $K_1 \# K_2$ escolhemos um arco de K_1 para ser preso a um arco escolhido de K_2 , podemos considerar que o nó $K_2 \# K_1$ foi obtido prendendo-se o mesmo arco de K_1 ao mesmo arco de K_2 agora observe que os diagramas de $K_1 \# K_2$ e $K_2 \# K_1$ são “idênticos”. Logo pela observação 2.3.2 temos que $K_1 \# K_2$ e $K_2 \# K_1$ são equivalentes. Assim, podemos concluir que a soma conexa $\#$ é comutativa.

Note que além de ser comutativa a soma conexa é associativa. Note também que a soma conexa do nó trivial com um outro nó K é o próprio nó K . Assim o conjunto de todos os nós com a operação soma conexa é um semi-grupo comutativo. Veremos que o conjunto de todos os nós com a operação soma conexa não é um grupo.

Teorema 2.4.2 *Sejam K e \tilde{K} dois nós. Se K não é equivalente ao nó trivial, então $K\sharp\tilde{K}$ não é equivalente ao nó trivial.*

Prova. Seja K um nó não trivial e \tilde{K} um nó qualquer. Suponhamos que $K\sharp\tilde{K}$ é um nó trivial. Consideremos a sequência

$$\underbrace{K\sharp\tilde{K}}_{K_1}, \underbrace{(K\sharp\tilde{K})\sharp\tilde{K}}_{K_2}, \underbrace{(K\sharp\tilde{K})\sharp\tilde{K}\sharp\tilde{K}}_{K_3}, \dots,$$

onde K_1 esta dentro de uma bola de raio 1, K_2 esta dentro uma bola de raio $\frac{1}{2}$, K_3 esta dentro de uma bola de raio $\frac{1}{4}$, e assim por diante.

Formamos deste modo uma série infinita num compacto, veja figura 2.2. Daí obtemos um nó

$$\bar{K} = (K\sharp\tilde{K})\sharp(K\sharp\tilde{K})\sharp(K\sharp\tilde{K})\sharp\dots$$

que possivelmente é selvagem.

Como o nó $K\sharp\tilde{K}$ é trivial temos que o nó \bar{K} é trivial também. Sendo a soma conexa infinita associativa podemos escrever

$$\bar{K} = K\sharp(\tilde{K}\sharp K)\sharp(\tilde{K}\sharp K)\sharp\dots$$

Como a soma conexa é comutativa segue que $\tilde{K}\sharp K$ é trivial. Logo K é equivalente à \bar{K} o que é uma contradição. \square

Corolário 2.4.3 *Sejam K e \tilde{K} dois nós. Se $K\sharp\tilde{K}$ é equivalente ao nó trivial, então K e \tilde{K} são equivalentes ao nó trivial.*

O teorema 2.4.2 nos diz que um nó não trivial não possui um simétrico com relação à operação soma conexa, assim o conjunto de todos os nós com a operação soma conexa não é um grupo.

Definição 2.4.4 *Um nó K é dito **composto** se dados dois nós K_1 e K_2 tais que $K = K_1\sharp K_2$ tem-se que K_1 e K_2 não são equivalentes ao nó trivial. Um nó que não é composto chama-se **nó primo**.*

Definição 2.4.5 *Sejam K e L dois nós. Dizemos que L divide K se existe um nó N tal que $K = L\sharp N$.*

Proposição 2.4.6 *Sejam L e N dois nós. Se K é um nó primo que divide $L\sharp N$, então K divide L ou K divide N .*

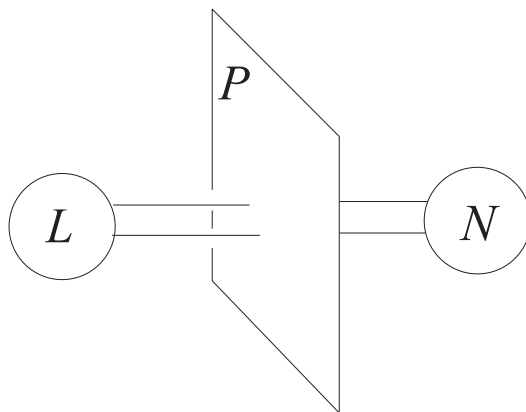


Figura 2.11: Plano separando L de N .

Prova. Consideremos um nó $L\sharp N$ e algum plano P , intersectando $L\sharp N$ em dois pontos e separando L de N como na figura 2.11. Como $L\sharp N$ é divisível por K existe uma 2-esfera S^2 que intersecta o nó $L\sharp N$ em dois pontos e tal que o nó K está dentro de S^2 .

Se essa esfera não intersecta P acabou. Caso contrário, a esfera S^2 intersecta o plano em algum ponto que não é um cruzamento de curvas simples, neste caso circunferências. Se cada uma dessas circunferências forem enlaçadas com $L\sharp N$ então elas podem ser removidas por uma deformação simples. No caso restante segue do fato que K é primo que pelo menos uma parte da esfera contém a parte trivial do nó K . Logo eles também podem ser removidos por alguma deformação da esfera, daí segue o resultado. \square

2.5 Superfície de Seifert

Definição 2.5.1 *Seja K um nó (ou enlace) orientado. Uma superfície de Seifert para K é uma superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 conexa compacta e orientada em \mathbb{R}^3 , onde o bordo é K e a orientação de K induz a orientação da superfície.*

Teorema 2.5.2 *Para cada nó (ou enlace) orientado K em \mathbb{R}^3 existe uma superfície de Seifert de K .*

Prova. Consideremos um diagrama \mathcal{D} do nó K . Podemos suavizar os cruzamentos do nó como mostra a figura 2.12, levando em conta as orientações. Assim obtemos um conjunto de curvas simples fechadas que não se intersectam no plano. Tais curvas são chamadas de **circunferências de Seifert**.

Seja agora um disco preso em cada circunferência de Seifert. Embora o interior de um desses discos no plano pudesse conter um outro disco, no espaço tridimensional podemos prender esses discos sem interseções.

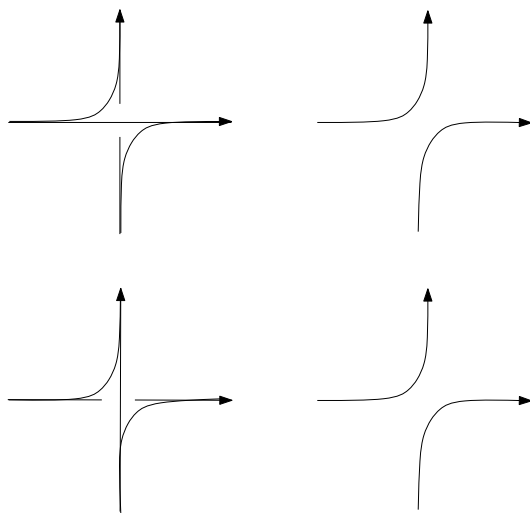


Figura 2.12: Suavisando os cruzamentos no diagrama

Na vizinhança de cada cruzamento, dois discos encontram-se cada um com outro. Escolhamos dois intervalos fechados no bordo de seus discos e conectemos eles por uma faixa torcida (veja figura 2.5 na pag. 18 do livro (BZ)). Os bordos de suas faixas são dois arcos do nó incidente à escolha dos cruzamentos.

Agora vamos verificar se a superfície obtida é orientada. Para isso observe que a orientação de cada circunferência de Seifert induz uma orientação no disco oposto. Em cada cruzamento as duas orientações são opostas o que corresponde a faixa colocada no cruzamento.

Daí obtemos uma superfície orientada que poderia não ser conexa. Conectando diferentes componentes destas superfícies por tubos “magros” de modo a respeitar a orientação, obtemos uma superfície conexa com o mesmo bordo.

□

Note que o teorema anterior não é verdadeiro em geral para um nó em uma outra variedade. Por exemplo o nó em T^3 , ilustrado na figura 2.13, não possui uma superfície de Seifert.

Definição 2.5.3 *Seja K um nó (ou enlace) em \mathbb{R}^3 . O gênero de K , $g(K)$, é definido como o gênero mínimo dentre as superfícies de Seifert de K .*

Um resultado conhecido sobre o gênero de um nó é que dados dois nós K e K' , tem-se

$$g(K\#K') = g(K) + g(K').$$

A prova para esse resultado pode ser encontrada em vários livros que tratam de gênero de um nó, por exemplo em (Cr).

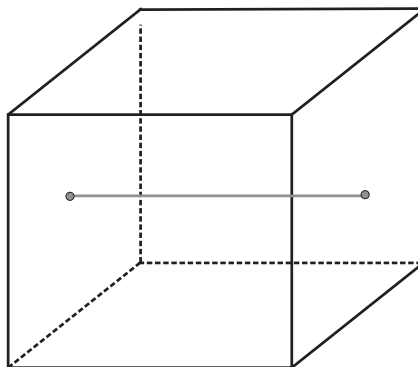


Figura 2.13: Nó em T^3 .

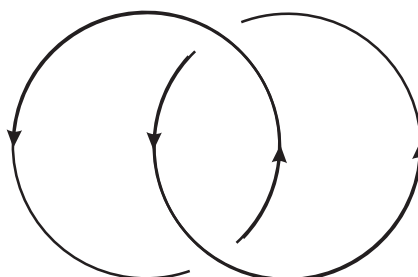


Figura 2.14: Diagrama de dois nós triviais.

2.6 Invariantes Numéricos

Definição 2.6.1 Dados dois nós orientados K e \tilde{K} em \mathbb{R}^3 , definimos o número de enlaçamento por

$$lk(K, \tilde{K}) = \frac{1}{2} \sum_{p \in K \cap \tilde{K}} c_p,$$

onde $K \cap \tilde{K}$ denota o conjunto dos cruzamentos de K sobre \tilde{K} no diagrama de $K \cup \tilde{K}$.

$$c_p = \begin{cases} +1, & \text{se } p \text{ é um cruzamento positivo} \\ -1, & \text{se } p \text{ é um cruzamento negativo.} \end{cases}$$

Exemplo 2.6.2 A figura 2.14 representa o diagrama de dois nós triviais nesse diagrama. Temos dois cruzamentos positivo, logo o número de enlaçamento é 1.

Proposição 2.6.3 Sejam dois nós K e \tilde{K} . Se Σ_K é uma superfície de Seifert de K tal que \tilde{K} é transversal a Σ_K , então $lk(K, \tilde{K})$ é o número de interseções de \tilde{K} com Σ_K contadas com sinal.

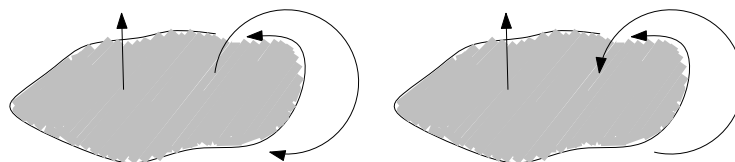


Figura 2.15: Interseção positiva e negativa, respectivamente.

Prova. Primeiramente observe que cada interseção de \tilde{K} com Σ_K nos dá pelo menos dois cruzamentos de K sobre \tilde{K} em algum diagrama \mathcal{D} de $K \cup \tilde{K}$. Podemos supor que cada interseção nos dá apenas dois cruzamentos. Além disso, cada um desses cruzamentos no diagrama dados por essa interseção tem o mesmo sinal. A interseção do nó \tilde{K} com Σ_K pode ser contada com sinal; basta considerarmos a orientação Σ_K quando o nó \tilde{K} intersecta Σ_K . Indo na direção positiva da orientação de Σ_K dizemos que tal interseção é positiva e contamos $(+1)$. Caso contrário dizemos que a interseção é negativa e contamos (-1) . Veja figura 2.15 para uma ilustração.

Agora note que os dois cruzamentos que correspondem a interseção positiva (resp. negativa) são dois cruzamentos positivos (resp. negativos) no diagrama \mathcal{D} . Daí segue o resultado. \square

Proposição 2.6.4 *O número de enlaçamento é invariante sob movimentos de Reidemeister.*

Prova. Sejam K e \tilde{K} dois nós. O primeiro movimento, $R1$, age ou sobre K ou sobre \tilde{K} exclusivamente, assim não altera $lk(K, \tilde{K})$. O segundo movimento, se envolve só K (ou só \tilde{K}), não muda o número de cruzamentos de K com \tilde{K} . Aplicando o segundo movimento entre um fio de K e outro de \tilde{K} perde-se ou ganha um cruzamento positivo e um cruzamento negativo, logo não altera $lk(K, \tilde{K})$. E o terceiro movimento não altera o tipo dos cruzamentos, portanto não altera o número de enlaçamento. \square

Se invertemos a orientação de um dos nós o número de enlaçamento muda de sinal, caso invertemos a orientação dos dois nós o número de enlaçamento não é alterado. Além disso temos que $lk(K, \tilde{K}) = lk(\tilde{K}, K)$. De fato, basta observar que os cruzamentos do diagrama de $K \cup \tilde{K}$ são os mesmo do diagrama de $\tilde{K} \cup K$.

Definição 2.6.5 *Seja L um enlace orientado. A torção de L é definida por:*

$$\omega(L) = \sum_{p \in \mathcal{C}} c_p,$$

onde \mathcal{C} é o conjunto de todos os cruzamentos no diagrama de L .

Observação 2.6.6 *Ao contrário do número de enlaçamento a torção não é um invariante sob movimentos de Reidemeister, pois o movimento R_1 cria ou remove um cruzamento no diagrama de um enlace, adicionando ou subtraindo uma unidade à torção.*

2.7

Polinômios

Nesta seção faremos uma breve apresentação sobre alguns polinômios de enlaces, pois nosso interesse em tal assunto se restringe, uma vez que iremos apresentar posteriormente “poucos” resultados relacionando polinômios com invariantes de nós legendreanos. Para mais detalhes sobre os polinômios aqui apresentados o leitor interessado pode ver (Ma).

Consideremos um diagrama do enlace orientado L . A este diagrama associaremos um polinômio $P_L \in \mathbb{Q}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ que é definido pelos seguintes axiomas:

1. P_L é invariante sob isotopia. Mais precisamente: se $L \sim L'$, então $P_L(v, z) = P_{L'}(v, z)$;
2. se L é equivalente ao nó trivial, então $P_L(v, z) = 1$;
3. $v^{-1}P_{L_+}(v, z) - vP_{L_-}(v, z) = zP_{L_0}(v, z)$, onde L_+ , L_- e L_0 são enlaces cujos diagramas diferem apenas localmente num cruzamento como ilustrado na figura 2.16.

Uma das primeiras perguntas que pode surgir nesse momento é: se o polinômio P_L de fato existe? E a resposta para essa pergunta é dada pelo seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em (Ka1).

Teorema 2.7.1 *Existe um único polinômio P_L que satisfaz os axiomas 1, 2 e 3.*

O polinômio $P_L \in \mathbb{Q}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ definido pelos axiomas 1, 2 e 3 chama-se **polinômio de HOMFLY**.

O polinômio P_L foi descoberto por J. Hoste, P. Freyd, W. B. R. Lickorish, D. Yetter, K. C. Millet e A. Ocneanu por volta de 1985 e publicado no artigo (HOMFLY). Antes da descoberta do polinômio P_L já eram conhecidos dois outros polinômios: polinômio de Jones e polinômio de Conway que também são invariantes sob isotopia. O polinômio de HOMFLY (ver (HOMFLY)) surge como uma generalização desses dois polinômios. Para uma abordagem mais detalhada sobre os polinômios de Jones e Conway sugerimos o leitor ver (Ma).

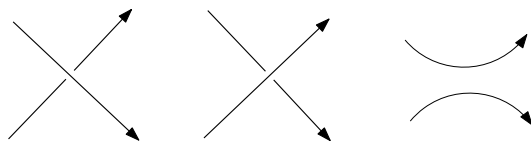


Figura 2.16: Os cruzamentos que diferem L_+ , L_- e L_0 , respectivamente.

Aqui vamos apresentar esses polinômios como casos particulares do polinômio de HOMFLY.

Fazendo $\nabla_L(z) = P_L(1, z)$ obtemos o polinômio $\nabla_L \in \mathbb{Q}[z^{\pm 1}]$ que é invariante sob isotopia que satisfaz $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$ e

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z),$$

onde \bigcirc denota o nó trivial cujo diagrama não possui cruzamentos. O polinômio $\nabla_L(z)$ chama-se **polinômio de Conway** (ver (Co)).

Agora fazendo $z = v^{\frac{1}{2}} - v^{-\frac{1}{2}}$ obtemos um polinômio $V_L(v) = P_L(v, v^{\frac{1}{2}} - v^{-\frac{1}{2}}) \in \mathbb{Q}[v^{\pm 1}]$ com as seguintes propriedades: $V_L(v)$ é invariante sob isotopia, $V_{\bigcirc}(v) = 1$ e

$$v^{-1}V_{L_+}(v) - vV_{L_-}(v) = (v^{\frac{1}{2}} - v^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(v).$$

O polinômio $V_L(v)$ é conhecido como **polinômio de Jones** (ver (Jo)).

Observação 2.7.2 *O polinômio de HOMFLY pode ser calculado recursivamente usando-se o axioma 3. Apagamos e suavizamos os cruzamentos no diagrama do enlace até obtermos o diagrama de um enlace que é constituído de componentes que são nós triviais distantes. Com auxílio do exemplo anterior e fazendo $\delta = z^{-1}(v^{-1} - v)$ não é difícil ver que $P_{L \sqcup \bigcirc}(v, z) = \delta P_L$, onde $L \sqcup \bigcirc$ denota a união distante com o nó trivial, ou seja, dois enlaces cujos diagramas não se intersectam. Mais geralmente $P_{L \sqcup L'} = \delta P_L P_{L'}$, aqui novamente $L \sqcup L'$ denota a união distante.*

Teorema 2.7.3 *Se K é um nó (ou enlace), então*

$$P_K = P_{-K},$$

onde $-K$ denota o nó com orientação oposta a de K .

Prova. Por definição de P_K temos que $P_K = P_{-K}$. □

Teorema 2.7.4 *Sejam K e K' dois nós (ou enlaces). Então*

$$P_{K \# K'} = P_K P_{K'}.$$

Prova. Pelo axioma 3 temos que

$$v^{-1}P_{K\sharp K'} - vP_{K\sharp K'} = zP_{K\sqcup K'}.$$

Mas pela observação 2.7.2 $P_{K\sqcup K'} = \delta P_K P_{K'}$ temos que

$$v^{-1}P_{K\sharp K'} - vP_{K\sharp K'} = z\delta P_K P_{K'},$$

onde $\delta = z^{-1}(v - v^{-1})$. Então

$$(v - v^{-1})P_{K\sharp K'} = (v - v^{-1})P_K P_{K'},$$

logo $P_{K\sharp K'} = P_K P_{K'}$. □

Apresentaremos em seguida o polinômio de Kauffman, que foi publicado pela primeira vez por Louis H. Kauffman em 1990. E por isso ficou conhecido como polinômio de Kauffman.

Primeiramente consideremos o diagrama de um enlace não orientado L e associamos a esse diagrama um polinômio $R_L(x, a) \in \mathbb{Q}[x^{\pm 1}, a^{\pm 1}]$ que é definido pelos seguintes axiomas:

1. R_L é invariante sob isotopia regular, isto é, se L e L' são isotópicos por isotopia regular, então

$$R_L = R_{L'};$$

- 2.

$$R_{\bigcirc}(a, x) = 1 + \frac{a - a^{-1}}{x},$$

$$R_{L^+} = aR_L,$$

$$R_{L^-} = a^{-1}R_L;$$

3. $R_{L_+} - R_{L_-} = x(R_{L_0} - R_{L_\infty})$, onde L_+ , L_- , L^+ , L^- , L_0 , L_∞ e L são os enlaces cujos diagramas diferem apenas localmente como ilustrados na figura 2.17.

Teorema 2.7.5 *Existe um único polinômio $R_L \in \mathbb{Q}[x^{\pm 1}, a^{\pm 1}]$ que satisfaz os axiomas acima.*

A demonstração para este fato pode ser encontrada na seção 14 do livro (Ka3).

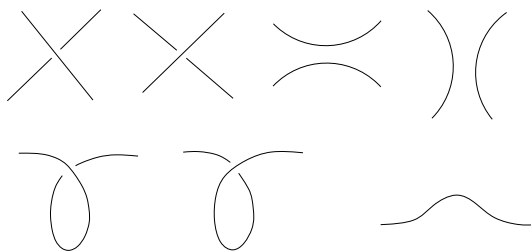


Figura 2.17: As relações entre os diagramas de L_+ , L_- , L_0 e L_∞ (em cima) e L^+ , e L^- e L (em baixo).

Definição 2.7.6 O polinômio de Kauffman F_L para um enlace não orientado L é definido pela fórmula

$$F_L(x, a) = a^{-\omega(L)} R_L(x, a),$$

onde $\omega(L)$ é a torção do enlace L .

Aqui devemos ter um certo cuidado, pois a torção de L deve ser calculada através de um diagrama que é isotópico por isotopia regular ao diagrama usado para se calcular R_L .

O polinômio de Kauffman existe de fato e é o único polinômio como definido acima. Além disso, o polinômio de Kauffman, $F_L(x, a)$, é invariante sob movimentos de Reidemeister, conseqüentemente um invariante sob isotopia.

3

Geometria de Contato

3.1

Formas Diferenciais

Para facilitar o entendimento das formas diferenciais iremos começar com o caso \mathbb{R}^3 , depois faremos uma primeira generalização para o caso \mathbb{R}^n e finalmente passaremos a tratar das formas diferenciais em uma variedade M de dimensão n .

Seja $p \in \mathbb{R}^3$. O conjunto de vetores aplicados em p , chamado de espaço tangente de \mathbb{R}^3 em p , será denotado por $T_p\mathbb{R}^3$. Identificaremos os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ da base canônica de \mathbb{R}^3 com os seus transladados $(e_1)_p$, $(e_2)_p$, $(e_3)_p$ ao ponto p .

Consideremos para cada espaço tangente $T_p\mathbb{R}^3$ o espaço dual $(T_p\mathbb{R}^3)^* = \{f : T_p\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é um funcional linear}\}$.

Os funcionais lineares $(dx_i)_p : T_p\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ definidos por $(dx_i)_p \cdot v = v_i$, onde $v = v_1(e_1)_p + v_2(e_2)_p + v_3(e_3)_p$, formam a base dual do espaço $(T_p\mathbb{R}^3)^*$. De fato, $(dx_i)_p \in (T_p\mathbb{R}^3)^*$, $i = 1, 2, 3$ e

$$(dx_i)_p(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Definição 3.1.1 *Uma 1-forma diferencial (ou simplesmente 1-forma) em \mathbb{R}^3 é uma aplicação $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow (T\mathbb{R}^3)^*$ que pode ser escrita na forma*

$$\lambda(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$

ou

$$\lambda = \sum_{i=1}^3 a_i dx_i,$$

onde $a_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

Seja $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ o conjunto das aplicações $\varphi : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineares e alternadas, isto é, $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$, $\forall v_1, v_2 \in T_p\mathbb{R}^3$. Sabemos que

$(\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3))^*$, $+$, \cdot) é um espaço vetorial real.

Sejam φ_1 e φ_2 1-formas diferenciais. Definimos

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix}.$$

Note que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$.

Observação 3.1.2 Com o visto acima damos um significado para $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p$ onde $i, j = 1, 2, 3$. Fazendo $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p = (dx_i \wedge dx_j)_p$ temos que o conjunto $\{(dx_i \wedge dx_j)_p, i < j\}$ é uma base para o espaço $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ (essa afirmação será apresentada futuramente como uma proposição mais geral, proposição 3.1.4). Além disso,

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p$$

e

$$(dx_i \wedge dx_i)_p = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Definição 3.1.3 Uma **2-forma diferencial** (ou simplesmente 2-forma) em \mathbb{R}^3 é uma aplicação $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Lambda^2(T\mathbb{R}^3)^*$ que pode ser escrita na forma

$$\lambda(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p + a_{13}(p)(dx_1 \wedge dx_3)_p + a_{23}(p)(dx_2 \wedge dx_3)_p$$

ou

$$\lambda = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

onde $a_{ij} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

Sejam $p \in \mathbb{R}^n$, $T_p\mathbb{R}^n$ o espaço tangente de \mathbb{R}^n em p e $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ o seu espaço dual. Denotaremos por $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ o **conjunto das aplicações k -lineares alternadas**,

$$\varphi : \underbrace{T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \times \dots \times T_p\mathbb{R}^n}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Temos que $(\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n))^*$, $+$, \cdot) é um espaço vetorial real.

Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ 1-formas. Definimos

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) & \dots & \varphi_1(v_k) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) & \dots & \varphi_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \varphi_k(v_2) & \dots & \varphi_k(v_k) \end{vmatrix}.$$

Das propriedades de determinante concluímos que

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*.$$

Assim $(dx_{i_1})_p \wedge (dx_{i_2})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$. Denotaremos este elemento por $(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p$.

Proposição 3.1.4 (Ver (Ca)) *O conjunto*

$$A = \{(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, i_1 < i_2 < \dots < i_k, \text{ onde } i_j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

é uma base para $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$.

Definição 3.1.5 *Uma k -forma diferenciável (ou simplesmente k -forma) em \mathbb{R}^n é uma aplicação $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^k(T\mathbb{R}^n)^*$ que pode ser escrita na forma*

$$\lambda(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(p) (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

onde $a_{i_1 \dots i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações diferenciáveis.

Para a notação ficar menos pedante vamos indicar por I a k -upla (i_1, \dots, i_k) , $i_1 < \dots < i_k$, com $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$ e passaremos denotar λ por:

$$\lambda = \sum_I a_I dx_I.$$

Às vezes, ao invés de escrevermos $\lambda(p)$ escreveremos λ_p . Em alguns contextos (desde que não gere confusão) omitiremos o ponto e λ passará denotar um funcional linear, caso λ seja uma 1-forma.

Observação 3.1.6 *Por convenção, diremos que uma função diferenciável de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} é uma **0-forma** em \mathbb{R}^n .*

Sejam α e β k -formas. Consideremos

$$\alpha = \sum_I a_I dx_I,$$

$$\beta = \sum_I b_I dx_I,$$

onde $I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_1 < \dots < i_k$.

Definimos a soma por:

$$\alpha + \beta = \sum_I (a_I + b_I) dx_I.$$

Definição 3.1.7 *Sejam $\alpha = \sum_I a_I dx_I$, $I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_1 < \dots < i_k$, $\beta = \sum_J b_J dx_J$, $J = (j_1, \dots, j_s)$, $j_1 < \dots < j_s$. Definimos o **produto exterior** por:*

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Exemplo 3.1.8 *Sejam $\alpha = dx - 5ydy + xydz$ e $\beta = zdx \wedge dy + 2ydx \wedge dz$ formas diferenciáveis em \mathbb{R}^3 . Calculemos o produto exterior de α com β .*

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= zdx \wedge dx \wedge dy + 2ydx \wedge dx \wedge dz - 5yzdy \wedge dx \wedge dy \\ &\quad - 10y^2dy \wedge dx \wedge dz + xyzdz \wedge dx \wedge dy + 2xy^2dz \wedge dx \wedge dz \\ &= -10y^2dy \wedge dx \wedge dz + xyzdz \wedge dx \wedge dy \\ &= (10y^2 + xyz)dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Proposição 3.1.9 (Ver (Ca)) *Sejam α uma k -forma, β uma r -forma e γ uma s -forma. Então:*

1. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$;
2. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kr} \beta \wedge \alpha$;
3. $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$, caso $r = s$.

Não precisamos sempre considerar formas diferenciais definidas em todo espaço \mathbb{R}^3 , podemos considerar formas diferenciais definidas apenas em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Obviamente as definições e propriedades apresentadas se estendem naturalmente a esta situação.

A próxima definição nos dá uma operação sobre k -formas, que generaliza a operação de diferenciação para funções. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, em particular f é uma 0-forma, então sua diferencial

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

é uma 1-forma. Assim por analogia tal operação sobre uma k -forma deve nos dar uma $(k + 1)$ -forma.

Definição 3.1.10 *Seja $\lambda = \sum_I a_I dx_I$ uma k -forma diferenciável. Definimos a diferencial exterior de λ por:*

$$d\lambda = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

Exemplo 3.1.11 *Seja $\lambda = 3xydx - xzdy$ uma 1-forma em \mathbb{R}^3 . Calculemos diferencial de λ :*

$$\begin{aligned} d\lambda &= d(3xy) \wedge dx - d(xz) \wedge dy \\ &= 3(ydx + xdy) \wedge dx - (zdx + xdz) \wedge dy \\ &= -3xdx \wedge dy - zdx \wedge dy + xdy \wedge dz \\ &= -(3x + z)dx \wedge dy + xdy \wedge dz. \end{aligned}$$

Algumas propriedades da diferenciação de k -formas são dadas pela proposição:

Proposição 3.1.12 (Ver (Ca)) *Sejam α uma r -forma e β uma s -forma. Então:*

1. $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$, caso $r = s$;
2. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$;
3. $d(d\alpha) = d^2\alpha = 0$.

Em nosso estudo será conveniente que considerarmos formas diferenciais definidas em uma variedade diferenciável. O que vamos fazer agora é definir as formas diferenciais numa variedade diferenciável $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão m e observar que para esta situação existem propriedades análogas às de formas diferenciais definidas em \mathbb{R}^n . De agora em diante $\Lambda^k(T_p M)^*$ denota o conjunto de todas as aplicações k -lineares alternadas

$$\varphi : \underbrace{T_p M \times T_p M \times \dots \times T_p M}_k \text{ vezes} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definição 3.1.13 *Uma k -forma diferencial (ou k -forma) em M é uma aplicação suave $\lambda : M \rightarrow \Lambda^k(TM)^*$ que associa a cada ponto $p \in M$ uma aplicação k -linear alternada λ_p no espaço tangente $T_p M$.*

Observação 3.1.14 *Seja $\phi : U_0 \rightarrow U$ uma parametrização de um aberto $U \subset M$, onde U_0 é um aberto em \mathbb{R}^m com coordenadas u_1, u_2, \dots, u_m . Dado*

um ponto $p \in U$ temos $p = \phi(u)$ e a base

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial u_m}(u) \right\} \subset T_p M.$$

Consideremos $\{du_1, \dots, du_m\}$ como a base dual de $(T_p M)^*$. Na verdade, du_1, du_2, \dots, du_m são 1-formas diferenciais em U . Para cada $p \in U$ temos funcionais lineares $du_i(p) \in (T_p M)^*$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$. De modo que a notação fique mais simples, vamos usar a notação (du_i) ao invés de $du_i(p)$, pois não há risco de confusão.

Em cada ponto $p = \phi(u) \in U$ temos que as k -formas $du_I = du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_k}$, com $I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_1 < \dots < i_k$, constituem uma base de $\Lambda^k(T_p M)^*$. Daí se λ é uma k -forma diferencial em M , então podemos escrever para cada ponto $p = \phi(u) \in U$:

$$\lambda_p = \lambda(\phi(u)) = \sum_I a_I(u) du_I,$$

onde $a_I : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves.

Sejam M e N duas variedades e consideremos uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$. Dado um ponto $p \in M$ a aplicação f induz uma transformação linear

$$f_p^* : \Lambda^k(T_{f(p)} N) \rightarrow \Lambda^k T_p M$$

que associa k -formas em N à k -formas em M .

Seja λ uma k -forma em N . Definimos a k -forma diferencial $f^* \lambda$ em M como:

$$(f^* \lambda)_p(v_1, v_2, \dots, v_k) = \lambda_{f(p)} \cdot (Df(p) \cdot v_1, \dots, Df(p) \cdot v_k), \quad (3-1)$$

onde $v_1, \dots, v_k \in T_p M$ e $Df(p)$ denota a derivada de f no ponto $p \in M$. Escrevemos $f_p^* \lambda_{f(p)} = (f^* \lambda)_p$, e fazendo o ponto p variar em M obtemos uma aplicação f^* que leva k -formas de N em k -formas de M .

Como sabemos $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é uma transformação linear. Deste modo podemos considerar sua transposta $[Df(p)]^t : \Lambda^k(T_{f(p)} N)^* \rightarrow \Lambda^k(T_p M)^*$. Por definição temos que

$$[Df(p)]^t \cdot \lambda_{f(p)} = \lambda_{f(p)} Df(p).$$

Pela eq. (3-1) segue que

$$(f^* \lambda)_p = [Df(p)]^t \cdot \lambda_{f(p)}.$$

Caso $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma 0-forma convencionamos que $f^*g = g \circ f$.

Definição 3.1.15 A forma diferencial $f^*\lambda$ chama-se “pull-back” da forma diferencial λ por meio de f .

Proposição 3.1.16 (Ver (Ca)) Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável e λ uma forma diferencial em \mathbb{R}^n . Então

$$d(f^*\lambda) = f^*(d\lambda).$$

Observação 3.1.17 Sejam $\phi : U_0 \rightarrow U \subset M$ e $\psi : V_0 \rightarrow V \subset N$ parametrizações suaves, com $f(U) \subset V$ e $\lambda_q = \sum_I b_I dv_I$ para todo $q = \psi(v) \in V$. Um resultado conhecido (ver (Li2) pag. 418) é que para cada I , tem-se

$$f^*(dv_I) = \sum_J \det \left(\frac{\partial v_I}{\partial u_J} \right) du_J,$$

onde $\left(\frac{\partial v_I}{\partial u_J} \right)$ é a matriz jacobiana de $D_u(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)$ e $\det \left(\frac{\partial v_I}{\partial u_J} \right)$ denota o determinante da matriz $k \times k$ obtida de $\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right)$ tomando-se os $\frac{\partial v_i}{\partial u_j}$ com $i \in I$ e $j \in J$. Desta maneira para obtermos $f^*\lambda$ basta substituímos em λ cada dv_I por

$$\sum_J \det \left(\frac{\partial v_I}{\partial u_J} \right) du_J.$$

Proposição 3.1.18 (Ver (Li2)) Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, α uma r -forma e β uma s -forma. Então:

1. $f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta$, caso $r = s$;
2. $f^*(c\alpha) = cf^*\alpha$, onde $c \in \mathbb{R}$;
3. $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$;
4. $(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha)$, onde $g : N \rightarrow P$ é outra aplicação diferenciável.

Seja λ uma k -forma diferencial em uma variedade M . Se consideramos uma parametrização $\phi : U_0 \rightarrow U$ em M , existe uma única $(k + 1)$ -forma diferencial $d_\phi\lambda$ em U tal que $\phi^*(d_\phi\lambda) = d\phi^*\lambda$, pois o “pull-back” $\lambda \mapsto \phi^*\lambda$ é uma bijeção das formas em U sobre as formas em U_0 . Se $\lambda|_U = \sum_I a_I(u) du_I$, então pela observação anterior temos que $\phi^*\lambda = \sum_I a_I dx_I$, daí $d(\phi^*\lambda) = \sum_I da_I \wedge dx_I$. Logo a identidade $\phi^*(d_\phi\lambda) = d(\phi^*\lambda)$ significa que

$$d_\phi\lambda = \sum_I da_I \wedge du_I.$$

Definição 3.1.19 A diferencial exterior $d\lambda$ de uma k -forma diferencial em M é a $(k + 1)$ -forma em M cujo valor em cada ponto $p \in M$ é dado por $d\lambda_p = d_\phi\lambda_p$, onde $\phi : U_0 \rightarrow U$ é uma parametrização em U tal que $p \in U$.

Lema 3.1.20 A diferencial exterior de uma forma diferencial não depende da parametrização escolhida.

Prova. Sejam $\phi : U_0 \rightarrow U$ e $\psi : V_0 \rightarrow V$ duas parametrizações diferenciáveis de M . Basta provarmos que se λ é uma forma diferencial em M , então $d_\phi\lambda = d_\psi\lambda$ em $U \cap V$. Temos que

$$\phi = \psi \circ \xi : \phi^{-1}(U \cap V) \rightarrow U \cap V.$$

Logo pela proposição 3.1.18 item 4 segue que $\phi^* = \xi^* \circ \psi^*$. Assim,

$$\phi^*(d_\psi\lambda) = (\xi^*\psi^*)(d_\psi\lambda) = d(\xi^*\psi^*\lambda) = d(\phi^*\lambda) = \phi^*(d_\phi\lambda).$$

Portanto $d_\psi\lambda = d_\phi\lambda$ em $U \cap V$. □

As propriedades apresentadas anteriormente para a diferencial exterior de formas diferenciais definidas em \mathbb{R}^n são válidas também para as definidas em uma variedade.

Agora vamos apresentar outras construções básicas envolvendo formas diferenciais e suas propriedades sem fazer suas respectivas demonstrações. Para o leitor interessado nas demonstrações aqui omitidas sugerimos ver (AM).

Um campo de vetores de uma variedade M é uma aplicação suave X que leva um ponto $p \in M$ num vetor tangente à M em p :

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto X(p) \in T_pM. \end{aligned}$$

Um campo de vetores tempo-dependente, X_t , é uma família suave a um parâmetro de campos de vetores. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores da variedade M .

Definição 3.1.21 Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e λ uma $(k + 1)$ -forma. O **produto interior** de λ por X é a k -forma $i_X(\lambda)$ definida por

$$i_X\lambda(X_1, \dots, X_k) = \lambda(X, X_1, \dots, X_k),$$

onde $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 1, \dots, k$.

Proposição 3.1.22 *Sejam α uma r -forma e β uma s -forma em M , $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então:*

1. $i_X(f\alpha + g\beta) = fi_X\alpha + gi_X\beta$, caso $r = s$;
2. $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^r\alpha \wedge i_X\beta$;
3. $i_{(fX+gY)}\alpha = fi_X\alpha + gi_Y\alpha$;
4. $i_Xdh = X(h)$, onde $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável.

Definição 3.1.23 *A derivada de Lie de uma k -forma ω ao longo de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ é uma k -forma $\mathcal{L}_X\omega$ definida por:*

$$\mathcal{L}_X\omega = \left. \frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*\omega - \omega}{t},$$

onde $\phi_t : M \rightarrow M$ é o fluxo associado a X .

Proposição 3.1.24 *Sejam α r -forma e β s -forma ambas em M e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então:*

1. $\mathcal{L}_X(a\alpha + b\beta) = a\mathcal{L}_X\alpha + b\mathcal{L}_X\beta$, caso $r = s$;
2. $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta$;
3. $\mathcal{L}_Xf = X(f)$, onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável;
4. $\mathcal{L}_Xd\alpha = d\mathcal{L}_X\alpha$.

Teorema 3.1.25 (Fórmula de Cartan) *Sejam ω uma k -forma diferencial em M e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então*

$$\mathcal{L}_X\omega = i_Xd\omega + di_X\omega.$$

3.2

Estruturas de Contato

Definição 3.2.1 *Seja M uma variedade de dimensão $2n + 1$. Uma 1-forma α em M é dita **forma de contato** se*

$$\alpha_p \wedge (d\alpha_p)^n \neq 0, \forall p \in M.$$

Definição 3.2.2 *Seja M uma variedade de dimensão $2n + 1$. Um campo de hiperplanos ξ em M chama-se **estrutura de contato** se para cada ponto p existem uma vizinhança V de p e uma forma de contato α tal que $\xi|_V = \ker(\alpha)$. O par (M, ξ) é chamado variedade de contato.*

O teorema de Frobenius (ver pag. 215 de (CN)) afirma que um campo de planos definido localmente por uma 1-forma α é completamente integrável se e somente se $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$. Assim uma estrutura de contato é um campo de planos completamente não integrável.

Exemplo 3.2.3 *Seja $M = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$. A 1-forma $\lambda = dz - ydx$ é uma forma de contato.*

De fato,

$$\lambda \wedge d\lambda = (dz - ydx) \wedge (dx \wedge dy) = dz \wedge dx \wedge dy \neq 0.$$

A estrutura de contato dada pela forma de contato $\lambda = dz - ydx$ é chamada **estrutura de contato canônica** de \mathbb{R}^3 , denotada por ξ_{can} . Note que em um ponto (x, y, z) a estrutura de contato ξ é gerada por $\{\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\}$. Assim em qualquer ponto no plano xz o campo de planos ξ é horizontal. Se movimentamos até o ponto $(0, 1, 0)$ temos que o plano de contato nesse ponto tem uma inclinação de 45° em relação ao eixo y . Em geral se iniciamos da origem de um ponto no plano xy temos o plano horizontal e à medida que vamos nos afastando do plano xz por uma reta que contenha a direção $\frac{\partial}{\partial y}$ no sentido positivo o plano gira em sentido anti-horário e quando a coordenada y de tal ponto tende para ∞ o plano tende a ficar vertical, veja figura 3.1.

Exemplo 3.2.4 *Consideremos o 3-toro $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. A 1-forma $\alpha_n = \cos(2\pi nz)dx + \sin(2\pi nz)dy$ é uma forma de contato, onde $n \in \mathbb{N}$.*

De fato,

$$\begin{aligned} \alpha_n \wedge d\alpha_n &= 2n\pi(\cos^2(2\pi nz) + \sin^2(2\pi nz))dx \wedge dz \wedge dy \\ &= 2n\pi dx \wedge dz \wedge dy \neq 0. \end{aligned}$$

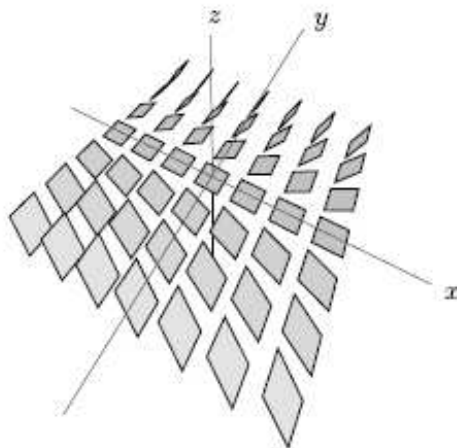


Figura 3.1: Estrutura de Contato Canônica de \mathbb{R}^3

Observe que essa estrutura de contato é gerada por $\{\frac{\partial}{\partial z}, \text{sen}(2n\pi z)\frac{\partial}{\partial x} - \text{cos}(2n\pi z)\frac{\partial}{\partial y}\}$, logo tem comportamento similar (ao longo de retas que contém a direção $\frac{\partial}{\partial z}$) ao visto na estrutura de contato canônica de \mathbb{R}^3 . Mas neste caso para todo $n \in \mathbb{N}$ a variação total do ângulo num intervalo fechado de comprimento 1 do plano de contato com a reta x é igual $2\pi n$ e os planos giram em torno do eixo z .

Exemplo 3.2.5 *Sejam agora \mathbb{R}^3 com coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e $\alpha = dz + r^2 d\theta$. Note que*

$$\alpha \wedge d\alpha = 2rdz \wedge dr \wedge d\theta \neq 0, \quad r \neq 0,$$

logo $\xi_{sim} = \ker \alpha$ é uma estrutura de contato. O conjunto $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial}{\partial z}\}$ gera o campo de planos ξ_{sim} , daí o campo de planos se comporta como ilustrado na figura 3.2.

Exemplo 3.2.6 *Consideremos \mathbb{R}^3 com coordenadas cilíndricas e $\alpha = \text{cos } r dz + r \text{sen } r d\theta$. A estrutura de contato ξ_{ot} dada por α tem comportamento semelhante (ao longo de retas perpendiculares ao eixo z) a do exemplo anterior. Mas quando move-se na direção perpendicular ao eixo z os planos giram muitas vezes (ver figura 3.3), já na estrutura de contato do exemplo anterior os planos giram no máximo 90° (o ângulo de 90° é atingido no ∞).*

Exemplo 3.2.7 *Consideremos S^3 em \mathbb{R}^4 e a 1-forma*

$$\alpha_0 = (x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + x_2 dy_2 - y_2 dx_2)|_{S^3},$$

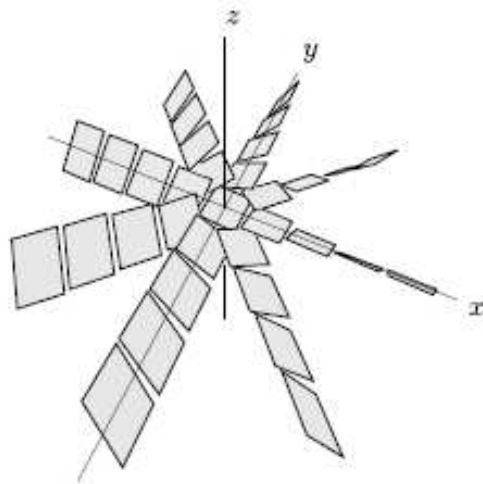


Figura 3.2: Estrutura de Contato ξ_{sim} em \mathbb{R}^3

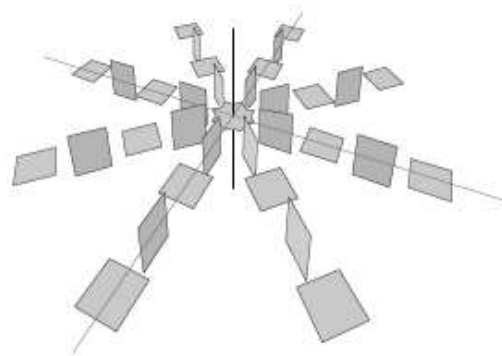


Figura 3.3: Estrutura de Contato ξ_{ot} em \mathbb{R}^3

onde (x_1, y_1, x_2, y_2) são coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^4 . Se r denota a coordenada radial de \mathbb{R}^4 , isto é, $r^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$, então $\alpha_0 \wedge d\alpha_0 \wedge r dr \neq 0$ em $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Assim o núcleo de α_0 é uma estrutura de contato, dizemos que $\ker(\alpha_0)$ é a estrutura de contato canônica de S^3 e o par (S^3, ξ_{can}) denota a esfera S^3 com estrutura de contato dada por $\ker(\alpha_0)$.

Definição 3.2.8 Uma estrutura de contato ξ é dita **transversalmente orientável** se é dada globalmente por alguma forma de contato α , isto é, $\xi = \ker \alpha$.

Dada uma forma de contato α temos que $f\alpha$ também é uma forma de contato, para toda função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que não se anule. De fato,

$$f\alpha \wedge (df\alpha)^n = f\alpha \wedge (fd\alpha + df \wedge \alpha)^n = f^{n+1}\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

Além disso, $f\alpha$ determina a mesma estrutura de contato dada por α . Como dois funcionais lineares que possuem o mesmo núcleo são múltiplos um do

outro temos que se as formas de contato α e β determinam a mesma estrutura de contato, então existe uma função diferenciável f que não se anula tal que $\beta = f\alpha$.

Definição 3.2.9 *Seja M uma variedade de dimensão 3. Uma estrutura de contato ξ em M é dita **paralelizável** se o seu campo de hiperplanos subjacente é trivial, isto é, se existem dois campos de vetores X e Y tais que em todo ponto $p \in M$, $X(p)$ e $Y(p)$ formam uma base de ξ_p .*

Note que se temos a orientação de M mais a orientação transversa, então temos uma orientação do plano. Dado um campo de vetores X com $0 \neq X(p) \in \xi_p$, podemos obter $Y(p)$ girando $X(p)$ pelo ângulo $\frac{\pi}{2}$ na direção positiva dada pela orientação de ξ_p , relativo a uma métrica riemanniana qualquer em M . Deste modo se existe uma forma de contato α tal que $\xi = \ker \alpha$ (ξ é transversalmente orientável), então ela é paralelizável se, e somente se, existe um campo de vetores X em M tal que $0 \neq X(p) \in \ker \alpha_p$, para todo $p \in M$.

Proposição 3.2.10 *Seja M uma variedade de dimensão 3 fechada. Se $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$, então a estrutura de contato $\ker(\alpha)$ em M é paralelizável.*

Uma demonstração deste último fato pode ser encontrada em (Lin).

Definição 3.2.11 *Duas variedades de contato (M_1, ξ_1) e (M_2, ξ_2) são ditas **contatomorfas** se existe um difeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ tal que*

$$Df(\xi_1) = \xi_2,$$

onde $Df : TM_1 \rightarrow TM_2$ denota a derivada de f . Se as estruturas de contato ξ_i são dadas por $\xi_i = \ker(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, então equivalentemente as variedades de contato (M_1, ξ_1) e (M_2, ξ_2) são contatomorfas se existem um difeomorfismo f e uma aplicação $g : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(p) \neq 0 \forall p \in M_1$, tais que $f^*\lambda_2 = g\lambda_1$. Neste caso f é chamado de **contatomorfismo**.

Proposição 3.2.12 *Seja \mathbb{R}^3 com coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Então ξ_{sim} é contatomorfa a ξ_{can} .*

Prova. Temos que

$$d(z + xy) - 2ydx = dz + xdy - ydx = dz + r^2d\theta.$$

Logo $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(x, y, z) = (x, 2y, z+xy)$ é um contatomorfismo entre ξ_{can} e ξ_{sim} . \square

Proposição 3.2.13 (Ver (Ge)) *Se $p \in S^3$, então a variedade de contato $(S^3 \setminus \{p\}, \xi_0)$ é contatomorfa a $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$.*

Seja D um disco numa variedade M de dimensão 3. O disco D é chamado de **disco super torcido** se D é tangente à alguma estrutura de contato ξ em M ao longo do seu bordo e transversal ao interior de D exceto em um ponto.

Definição 3.2.14 *Uma estrutura de contato ξ em M é dita **super torcida** se existe um mergulho de algum disco super torcido D . Caso contrário a estrutura de contato é dita **tensa**.*

Exemplo 3.2.15 *A estrutura de contato ξ_{ot} é super torcida. De fato, basta observar que o disco $D = \{(r, \theta, z); z = 0 \text{ e } r \leq \pi\}$ é um disco super torcido para ξ_{ot} .*

Observação 3.2.16 *Para uma estrutura de contato ser super torcida é necessário que o campo de planos de tal estrutura de contato gire pelo menos 2π .*

A proposição 3.2.13 junto com o teorema de Bennequin o qual afirma que a estrutura de contato canônica em S^3 é tensa (ver (Ben)) mostra que a estrutura de contato canônica de \mathbb{R}^3 é tensa.

Proposição 3.2.17 (Ver (El)) *Toda estrutura de contato tensa em S^3 é contatomorfa à ξ_0 .*

Além desses resultados já mencionados sabe-se que a estrutura de contato canônica ξ_{can} é a única estrutura de contato tensa em \mathbb{R}^3 a menos de contatomorfismo. Uma justificativa deste fato pode ser encontrada em (Ge).

Sabe-se também que as estruturas de contato $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, em $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ definidas por

$$\alpha_n = \cos(2\pi n z) dx + \sin(2\pi n z) dy = 0$$

são tensas. Uma justificativa para tal fato pode ser encontrada em (Ge). Além disso, Kanda provou em (Kan) que qualquer estrutura de contato tensa em T^3 é contatomorfa à uma delas e também que, se $m \neq n$, então ξ_m e ξ_n não são contatomorfos.

Definição 3.2.18 *Seja λ uma forma de contato. O **campo de vetores de Reeb** de λ é o campo de vetores R_λ definido pelas seguintes condições:*

1. $\lambda(R_\lambda) \equiv 1$;

2. $i_{R_\lambda}(d\lambda) \equiv 0$.

Como $d\lambda$ é uma forma bilinear alternada numa variedade M de dimensão ímpar seu determinante sobre uma base é zero. Daí, podemos encontrar um vetor não nulo R_λ de modo que $i_{R_\lambda}(d\lambda) \equiv 0$. Este vetor pode não estar numa reta em $\ker(\lambda)$, pois $d\lambda$ é não degenerada neste hiperplano tangente. Logo $\lambda(R_\lambda) \neq 0$, e neste caso podemos normalizar R_λ de modo que $\lambda(R_\lambda) \equiv 1$.

Além disso, pelo teorema 3.1.25, a derivada de Lie \mathcal{L}_X ao longo de um campo de vetores X satisfaz a seguinte fórmula:

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d.$$

Assim as condições que caracterizam o campo de vetores de Reeb podem ser escritas como:

$$\lambda(R_\lambda) \equiv 1 \text{ e } \mathcal{L}_{R_\lambda}(\lambda) \equiv 0.$$

Teorema 3.2.19 (Darboux) *Seja M uma variedade de dimensão $2n + 1$. Se λ é uma forma de contato e $p \in M$, então existe um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ em uma vizinhança $U \subset M$ de p tais que*

$$\lambda|_U = dz - \sum_i^n y_i dx_i.$$

O Teorema de Darboux nos garante que em qualquer variedade de dimensão 3 uma forma de contato pode ser escrita localmente como a forma de contato que define a estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 . Assim toda estrutura de contato numa vizinhança de uma variedade tem o mesmo comportamento que a estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 . A grosso modo podemos dizer que todas as estruturas de contato são localmente “parecidas” com ξ_{can} . Para uma discussão mais detalhada sobre o Teorema de Darboux sugerimos o leitor ver pag 85 de (Ber).

Assim como o Teorema de Darboux o Teorema de Gray é um dos mais significantes teoremas da geometria de contato.

Teorema 3.2.20 (Gray) *Seja M uma variedade diferenciável fechada. Se existe uma família suave a um parâmetro de estruturas de contato ξ_t , $t \in [0, 1]$ então existe uma família a um parâmetro de difeomorfismos ϕ_t tal que $\phi_0 = id$ e $\phi_t^*(\xi_t) = \xi_0$, $\forall t \in [0, 1]$.*

Lema 3.2.21 *Sejam ω_t , $t \in [0, 1]$ uma família suave de k -formas em uma variedade M e ψ_t uma isotopia de M . Defina um campo de vetores X_t (que*

depende do tempo t) em M por $X_t \circ \psi_t = \dot{\psi}_t$, onde $\dot{\psi}_t$ denota a derivada de ψ_t com respeito a t (ψ_t é o fluxo de X_t). Então

$$\frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega_t) = \psi_t^*(\dot{\omega}_t + \mathcal{L}_{X_t} \omega_t),$$

onde $\dot{\omega}_t = \frac{d\omega_t}{dt}$.

Prova. Seja ω uma k -forma que não depende do tempo. Pela proposição 3.1.24 item 4 temos que

$$\frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega) = \psi_t^*(\mathcal{L}_{X_t} \omega).$$

Calculemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega_t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_{t+h}^* \omega_{t+h} - \psi_t^* \omega_t}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_{t+h}^* \omega_{t+h} - \psi_{t+h}^* \omega_t + \psi_{t+h}^* \omega_t - \psi_t^* \omega_t}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \psi_{t+h}^* \left(\frac{\omega_{t+h} - \omega_t}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_{t+h}^* \omega_t - \psi_t^* \omega_t}{h} \\ &= \psi_t^*(\dot{\omega}_t + \mathcal{L}_{X_t} \omega_t). \end{aligned}$$

□

Prova do teorema 3.2.20. Seja α_t , $t \in [0, 1]$, uma família suave a um parâmetro de formas de contato com $\xi_t = \ker \alpha_t$. A equação no teorema se traduz em

$$\phi_t^*(\alpha_t) = \lambda_t \alpha_0,$$

onde $\lambda_t : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma família suave de funções suaves. A diferenciação dessa equação com respeito a t rende, com ajuda do procedimento do lema 3.2.21

$$\phi_t^*(\dot{\alpha}_t + \mathcal{L}_{X_t} \alpha_t) = \dot{\lambda}_t \alpha_0 = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \phi_t^* \alpha_t$$

ou com ajuda da fórmula de Cartan $\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ e com $\mu_t = \frac{d}{dt}(\log \lambda_t) \circ \phi_t^{-1}$,

$$\phi_t^*(\dot{\alpha}_t + d(\alpha_t(X_t)) + i_{X_t} d\alpha_t) = \phi_t^*(\mu_t \alpha_t).$$

Pode-se mostrar que existe $X_t \in \xi_t$. Logo a equação acima será satisfeita se

$$\dot{\alpha}_t + i_{X_t} d\alpha_t = \mu_t \alpha_t. \tag{3-2}$$

Aplicando a eq. (3-2) ao campo de vetores de Reeb R_{α_t} temos que

$$\dot{\alpha}_t(R_{\alpha_t}) = \mu_t. \tag{3-3}$$

Assim podemos usar a eq. (3-3) para definirmos μ_t . Como M é fechada, podemos recuperar o difeomorfismo ϕ_t resolvendo a equação

$$X_t(\phi_t(p)) = \dot{\phi}_t(p), \quad \forall p \in M \text{ e } \phi_0 = id,$$

para todo t . □

Corolário 3.2.22 *Duas estruturas de contato orientadas em uma variedade diferenciável e fechada que são homotópicas no espaço das estruturas de contato em M são contatomorfas.*

Prova. Consequência imediata do teorema de Gray (teorema 3.2.20). □

Teorema 3.2.23 *Toda variedade fechada orientada de dimensão 3 admite uma estrutura de contato.*

O teorema acima foi demonstrado pela primeira vez por Lutz e Martinet. Uma prova de tal teorema pode ser encontrada em (Ge).

4

Nós Legendreanos

De agora em diante M denotará uma variedade orientada de dimensão 3. Nesse capítulo trataremos os nós legendreanos em uma variedade M dando destaque ao caso $M = \mathbb{R}^3$.

4.1

Conceitos Básicos

De agora em diante vamos considerar apenas os nós que são imersões.

Definição 4.1.1 *Seja $\kappa : S^1 \rightarrow M$ um nó na variedade de contato (M, ξ) . Dizemos que κ é um **nó legendreano** na variedade de contato (M, ξ) se*

$$\dot{\kappa}(t) \in \xi_{\kappa(t)}, \quad \forall t \in S^1.$$

Se K é a imagem de κ , então equivalentemente K é legendreano se

$$T_p K \subset \xi_p, \quad \forall p \in K.$$

Embora nosso interesse seja pelos nós legendreanos, convém mencionarmos aqui a definição de **nó transverso**. Um nó suave $\kappa : S^1 \rightarrow M^3$ numa variedade de contato (M, ξ) é dito nó transverso se $\dot{\kappa}(t)$ é transverso a ξ em todo ponto $\kappa(t)$. Se K é a imagem de κ , então equivalentemente K é transverso se

$$T_p K \oplus \xi_p = T_p M, \quad \forall p \in K.$$

Definição 4.1.2 *Sejam $\kappa_0, \kappa_1 : S^1 \rightarrow M$ nós legendreanos e $I = [0, 1]$. Dizemos que κ_0 e κ_1 são **isotópicos por isotopia legendreana** se existe uma isotopia $h : S^1 \times I \rightarrow M$ entre κ_0 e κ_1 , onde $h_t : S^1 \rightarrow M$ é um nó legendreano para cada $t \in I$. Neste caso h chama-se **isotopia legendreana**.*

Observemos que se K_0 e K_1 são as imagens dos nós legendreanos κ_0 e κ_1 respectivamente, então κ_0 e κ_1 são isotópicos por isotopia legendreana se, e somente se, existe uma família contínua $\{K_t\}_{t \in I}$ de nós legendreanos que começa em K_0 e termina em K_1 e, além disso, o campo de vetores tangentes é não singular e varia continuamente.

Definição 4.1.3 *Sejam K_0 e K_1 nós legendreanos em M . Dizemos que K_0 e K_1 são isotópicos por contato se existe uma família contínua de difeomorfismos $\{\phi_t : M \rightarrow M\}_{t \in I}$ tal que ϕ_t é um contatomorfismo, $\forall t \in I$, $\phi_0 = id$ e $\phi_1(K_0) = K_1$.*

Teorema 4.1.4 *A classificação de nós legendreanos por isotopia de contato é equivalente à classificação por isotopia legendreana.*

Prova. Sejam K_0 e K_1 nós legendreanos numa variedade de contato (M, ξ) . Se K_0 e K_1 são isotópicos por contato, então existe uma família $\{\phi_t\}$ como na definição 4.1.3. Fazendo $K_t = \phi_t(K_0)$, temos que

$$T_{\phi_t(p)}K_t = T_p\phi_t(K_0) = D\phi_t(T_pK_0) \subset D\phi_t(\xi_p) = \xi_p, \quad \forall p \in K_0.$$

Assim obtemos uma família $\{K_t\}$ de nós legendreanos que começa em K_0 e termina em K_1 . Reciprocamente, se κ_t é uma família contínua de nós legendreanos em (M, ξ) que começa em κ_0 e termina em κ_1 , então existe uma família contínua de difeomorfismos $\phi_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, tal que $\phi_t(K_0) = K_t$. Além disso, é fácil fazer com que $\phi_t^*(\xi|_{K_t}) = \xi|_{K_0}$, pois podemos girar o campo normal aos nós de modo que os planos de contato sejam preservados. Consideremos $\xi_t = \phi_t^*(\xi)$; temos que $\{\xi_t\}$ é uma família a um parâmetro de estruturas de contato, com $\xi_t = \xi_0$ ao longo de K_0 . Pelo teorema de Gray (teorema 3.2.20) existe uma família de difeomorfismos ψ_t tal que $\psi_t^*(\xi_t) = \xi_0$ e ψ_t é a identidade em K_0 . Tomemos $f_t = \phi_t \circ \psi_t$. Note que

$$f_t^*(\xi_0) = \psi_t^*(\phi_t^*(\xi_0)) = \psi_t^*(\xi_t) = \xi_0.$$

Assim f_t , para $t \in [0, 1]$ é um contatomorfismo de $\xi_0 = \xi$. Além disso, $f_t \circ \kappa_0 = \phi_t \circ \kappa_0 = \kappa_t$. \square

Agora nos limitaremos a estudar o caso em que $M = \mathbb{R}^3$ com estrutura de contato canônica ξ_{can} . Existem duas motivações para nos limitarmos a esse caso. A primeira delas é que toda variedade de contato de dimensão 3 é localmente “parecida” com $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Esse fato segue do teorema de Darboux visto no capítulo anterior. E a segunda se dá pelo fato de podermos definir projeções que vão nos ajudar a entender melhor os nós legendreanos.

4.2

Projeções Frontal e Lagrangeana

Seja K um nó legendreano na variedade de contato $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, isto é, K é um nó em \mathbb{R}^3 tal que a campo de vetores tangentes a K esta em ξ_{can} .

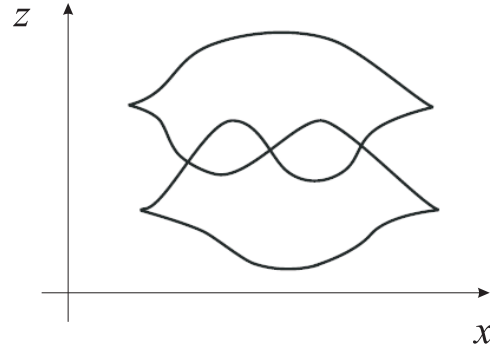


Figura 4.1: Projeção frontal do nó trevo legendreano.

Consideremos $\kappa : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização do nó legendreano K definida por:

$$\kappa(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{4-1}$$

e suponhamos que κ seja uma imersão de classe C^1 .

Como K é um nó legendreano temos que K é tangente à ξ_{can} . Daí

$$\dot{\kappa}(t) \in \xi_{can}(\kappa(t)),$$

mas $\xi_{can} = \ker(dz - ydx)$. Assim

$$\dot{z}(t) - y(t)\dot{x}(t) = 0 \tag{4-2}$$

Definição 4.2.1 *Seja $\pi_F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção definida por*

$$\pi_F(x, y, z) = (x, z).$$

*A imagem $\pi_F(K)$ é chamada **projeção frontal** de K .*

Consideremos $\kappa_{\pi_F} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\kappa_{\pi_F} = (\pi_F \circ \kappa)(t) = (x(t), z(t)).$$

Embora κ seja uma imersão κ_{π_F} nunca será uma imersão, pois caso κ_{π_F} fosse uma imersão $x(t)$ seria monótona, mas $x(t)$ é periódico.

Definição 4.2.2 *Dizemos que κ é **genérico** se κ_{π_F} é uma projeção regular (vide def. 2.2.1) e o conjunto*

$$\mathfrak{S} = \{t \in S^1; \dot{x}(t) = 0\}$$

*é discreto e além disso, $\ddot{x}(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathfrak{S}$. Os pontos $(x(t), y(t), z(t))$ tais que $\dot{x}(t) = 0$ são chamados **pontos cúspides**.*

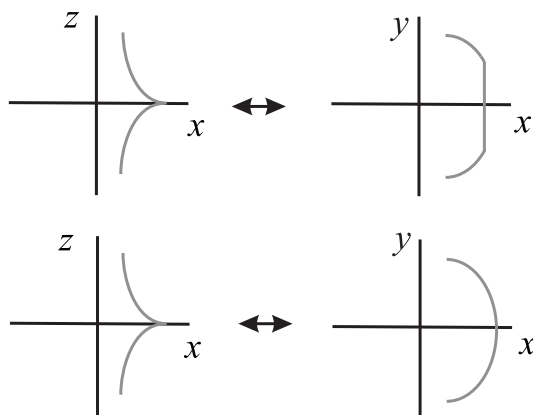


Figura 4.2: Mudança de um arco legendreano onde $\dot{x}(t) = 0$.

Observação 4.2.3 *Existem nós legendreanos tais que $\dot{x}(t) = 0$ para t pertencente a algum intervalo aberto. Neste caso, podemos fazer com que a cúspide fique “mais pontiaguda” (ver figura 4.2). Isso pode ser feito por isotopia legendreana no arco, onde $\dot{x}(t) = 0$. Assim para uma imersão genérica que é um mergulho suave em \mathbb{R}^3 podemos fazer com que $\dot{x}(t) = 0$ apenas em pontos isolados, de modo que nestes pontos $\ddot{x} \neq 0$.*

Lema 4.2.4 *Seja $\kappa : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um nó legendreano genérico. Então κ pode ser reobtido de sua projeção frontal $\kappa_{\pi_F}(t) = (x(t), z(t))$.*

Prova. Para $t \in S^1$ tal que $\dot{x}(t) \neq 0$, segue da equação (4-2) que

$$y(t) = \frac{\dot{z}(t)}{\dot{x}(t)}$$

e para $t_0 \in S^1$ tal que $\dot{x}(t_0) = 0$ fazamos

$$y(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\dot{z}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Esse limite existe pela regra de L'Hospital, pois $\ddot{x}(t_0) \neq 0$. Segue disto e da observação 4.2.3 o resultado. \square

Teorema 4.2.5 *Todo nó em M^3 pode ser C^0 aproximado por um nó legendreano isotópico por uma isotopia C^0 -pequena. Em particular, existem nós legendreanos que representam qualquer nó topológico.*

Prova. Seja $\kappa(t) = (x(t), y(t), z(t))$ um nó em \mathbb{R}^3 e seja $\kappa_{\pi_F} = (x(t), z(t))$ a projeção frontal de κ . Para encontrarmos uma aproximação C^0 do nó dado precisamos apenas encontrar um nó cuja projeção frontal não tenha tangentes

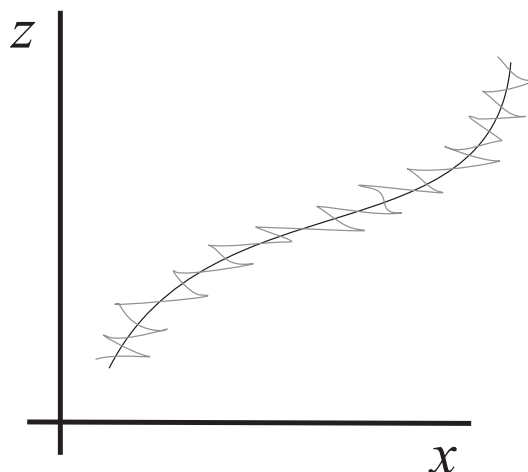


Figura 4.3: Aproximação C^0 por um arco legendreano.

verticais, que possua pontos cúspides isolados e que o coeficiente angular da projeção frontal no tempo t seja C^0 -próximo de $y(t)$. Se κ é legendreano no intervalo (a, b) podemos tomar a aproximação de κ_{π_F} como sendo a própria projeção de κ_{π_F} no intervalo (a, b) . Desta forma o levantamento legendreano de κ_{π_F} coincide com o levantamento de κ . Caso κ não seja legendreano no intervalo (a, b) podemos aproximar a projeção deste nó num subintervalo fechado de (a, b) , como mostra a figura 4.3. Utilizando esse procedimento em cada arco da projeção do nó dado obtemos uma projeção com as características descritas anteriormente.

Agora usamos o procedimento descrito na prova da proposição 4.2.4 para reobtermos o nó legendreano C^0 -próximo e isotópico ao nó original.

Segue pelo teorema de Darboux que localmente todas as estruturas de contato tem comportamento semelhante ao comportamento da estrutura de contato ξ_{can} em \mathbb{R}^3 . Logo o resultado é valido para qualquer variedade de contato (M^3, ξ) .

□

Podemos adaptar os movimentos de Reidemeister de nós topológicos para o contexto dos nós legendreanos (veja figura 4.4 que mostra os movimentos legendreanos de Reidemeister na projeção frontal no plano xz).

Vale observarmos aqui que são permitidos reflexões. Por exemplo o movimento ilustrado na figura 4.5 é uma reflexão do segundo movimento de Reidemeister apresentado na figura 4.4.

Teorema 4.2.6 ((Sw)) *Sejam K e K' dois nós legendreanos genéricos. Os nós K e K' são isotópicos por isotopia legendreana se, e somente se, a projeção frontal de um pode ser obtido do outro por um número finito de movimentos*

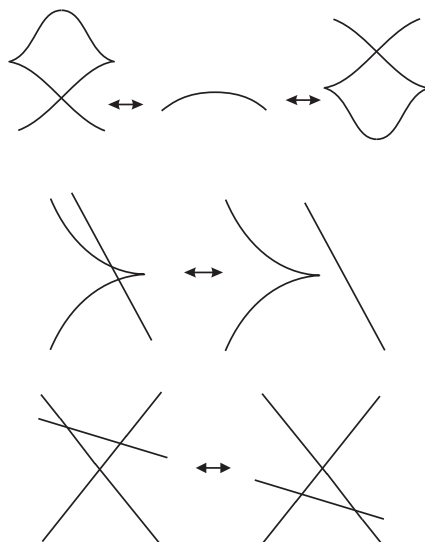


Figura 4.4: Movimentos Legendreanos de Reidemeister.

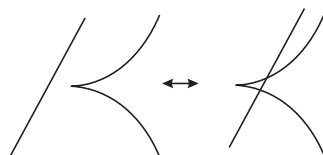


Figura 4.5: Reflexão do segundo movimento de Reidemeister.

legendreanos de Reidemeister e isotopias planares que não admitem tangentes verticais.

Seja K um nó legendreano orientado. Na projeção frontal de K dizemos que um cruzamento é positivo se com respeito a orientação de K os dois arcos cruzam a reta vertical na mesma direção. Caso contrário dizemos que o cruzamento é negativo (veja figura 4.6).

Na projeção frontal chamaremos de cúspides subindo e cúspides descendo as cúspides da figura 4.7, respectivamente. Observe que a reta tangente numa cúspide não precisa ser necessariamente horizontal.

Definição 4.2.7 *Sejam K um nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ e $\pi_L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção definida por $\pi_L(x, y, z) = (x, y)$. Chama-se **projeção lagrangeana** a imagem $\pi_L(K)$.*

Considerando K parametrizado como na fórmula (4-1) temos que

$$\kappa_{\pi_L}(t) = (x(t), y(t)).$$

Ao contrário da projeção frontal a projeção lagrangeana sempre pode ser parametrizada por uma imersão. Isso é o que garante a seguinte:

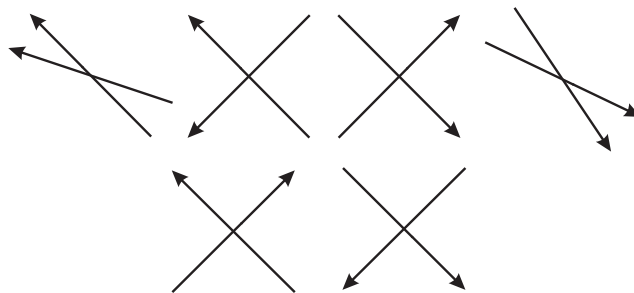


Figura 4.6: Cruzamentos positivos (em cima) e cruzamentos negativos (em baixo).

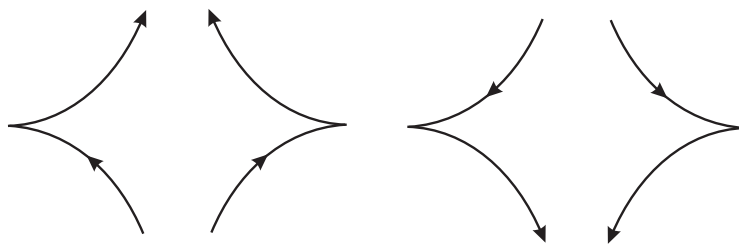


Figura 4.7: Cúspides subindo e cúspides descendo.

Proposição 4.2.8 *Seja $\kappa : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um nó legendreano. Se κ é uma imersão, então sua projeção lagrangeana κ_{π_L} é uma imersão. O nó κ pode ser reobtido (a menos de translação vertical) de κ_{π_L} por*

$$z(t) = z(0) + \int_0^t y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Prova. Da equação (4-2) temos que se $\dot{x}(t) = 0$ então $\dot{z}(t) = 0$. Do fato de κ ser uma imersão segue que $\dot{y}(t) \neq 0$. Assim κ_{π} é uma imersão. Vamos obter $z(t)$ integrando a equação

$$\dot{z}(t) = y(t)\dot{x}(t).$$

Daí segue o resultado. □

Note que podemos escrever

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{z}(t)dt = z(t_0) + \int_{t_0}^t y(t)\dot{x}(t)dt.$$

Como κ_{π_L} é uma curva fechada no plano xy tem-se $\oint_{\kappa_{\pi_L}} ydx = 0$ e a integral $\oint_{\kappa_{\pi_L}} ydx$ é a área (contada com o sinal) da curva orientada limitada por κ_{π_L} , dada por esta integral, é zero.

4.3

Números de Thurston-Bennequin e Maslov

Seja agora K um nó legendreano orientado na variedade de contato (M, ξ) , onde ξ é orientada. Se movimentarmos ligeiramente o nó K na direção positiva ou negativa do campo de vetores normais v de K no campo de hiperplanos ξ de forma que $\{\kappa', v\}$ é a orientação positiva de ξ ao longo de K (onde κ é uma parametrização de K) obteremos dois novos nós K_+ e K_- respectivamente. Note que os nós K_+ e K_- são transversos a ξ , e conseqüentemente tem orientação natural. A orientação natural de K_- corresponde a orientação de K e a orientação natural de K_+ corresponde a orientação oposta de K .

Definição 4.3.1 *Seja K um nó legendreano homólogo à zero na variedade de contato (M, ξ) , com ξ orientada. O número de Thurston-Bennequin é definido por:*

$$\beta(K) = lk(K, K_+),$$

onde $lk(K, K_+)$ é o número de enlaçamento de K com K_+ .

Consideremos K um nó transverso orientado homólogo a 0 em uma variedade orientada M de dimensão 3 tal que $H_1(M^3) = 0$ com uma estrutura de contato paralelizável (vide 3.2.9) dada pela forma de contato α . Então existe um campo de vetores não nulo X em M tal que $X(p) \in \ker(\alpha_p)$ para todo p em M . Podemos obter outro nó \tilde{K} por um ligeiro movimento na direção do campo de vetores X de forma que K e \tilde{K} são disjuntos. E definimos

$$\tau(K) = lk(K, \tilde{K}).$$

Proposição 4.3.2 *O número $\tau(K)$ não depende da escolha do campo de vetores.*

Prova. Sejam X e Y campos de vetores não nulos tais que $X, Y \in \ker \alpha$. Consideremos uma estrutura quase complexa J em $\ker \alpha$ compatível com a forma $d\alpha$. Podemos supor sem perda de generalidade que $d\alpha(X, JX) = d\alpha(Y, JY) = 1$. Logo $Y = e^{i\theta}X$, onde $e^{i\theta}$ define uma função de M em S^1 . Como K é homologicamente trivial em M , esta função restrita a K é homotopicamente trivial. Daí podemos obter uma família $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$, onde K_t é disjunto de $K \forall t \in [0, 1]$, é obtido movendo-se K ligeiramente de modo que $K_0 = \tilde{K}$ é obtido por um ligeiro movimento de K na direção do campo X , e K_1 é obtido por um ligeiro movimento de K na direção do campo Y . Portanto $\ell(K, \tilde{K}) = \ell(K, K_1)$. \square

Proposição 4.3.3 (Ver (Lin)) *Seja \mathbb{R}^3 com coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e ξ_{sim} a estrutura de contato dada pela forma de contato $\lambda = dz + r^2 d\theta$. Se K é um nó transverso em $(\mathbb{R}^3, \xi_{sim})$, então*

$$\tau(K) \leq -\chi(\Sigma_K),$$

onde $\chi(\Sigma_K)$ é a característica de Euler da superfície de Seifert do nó K .

Sejam K um nó legendreano orientado homólogo à zero na variedade de contato (M, ξ) , com ξ transversalmente orientada e paralelizável e Σ_K a superfície de Seifert de K . Restringindo o campo de planos ξ a superfície Σ_K obtemos um campo de planos trivial $\xi|_{\Sigma_K}$. Esta trivialização do campo de planos $\xi|_{\Sigma}$ induz uma trivialização $\xi|_K = L \times \mathbb{R}^2$. Como K é orientado podemos tomar o campo de vetores tangentes, \dot{K} a K na direção da orientação de K . Como K é legendreano o campo de vetores \dot{K} está em $K \times \mathbb{R}^2$. Então podemos pensar \dot{K} como um caminho de vetores não nulo. Logo o campo de vetores \dot{K} tem um número de giros em $\xi|_K$ com respeito a trivialização.

Definição 4.3.4 *Definimos o número de Maslov, $\mu(K)$, como o número de giros de \dot{K} em $\xi|_K$.*

Se $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$, então $\mu(K)$ depende apenas da orientação de K e ξ . O sinal de $\mu(K)$ muda se invertemos a orientação de K . Sendo assim denotaremos o número de Maslov de um nó orientado $\kappa(S^1) = K$ numa variedade de contato (M, ξ) , onde $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$, por $\mu(K)$.

Teorema 4.3.5 *Se K é um nó legendreano orientado homólogo à zero, então*

$$\tau(K_+) = \beta(K) + \mu(K), \quad \tau(K_-) = \beta(K) - \mu(K).$$

Prova. Primeiramente consideremos $\kappa, \kappa_+, \kappa_- : S^1 \rightarrow M$ tais que $\kappa(S^1) = K$, $\kappa_+(S^1) = K_+$ e $\kappa_-(S^1) = K_-$, onde K_+ e K_- tem a mesma orientação do que K . Seja X um campo de vetores não nulo no campo de hiperplanos parametrizável ξ . O número $\tau(K_+)$ é o número de enlaçamento de $\kappa_+ = \kappa + \epsilon v$ e $\kappa_+ + \epsilon' X = \kappa + \epsilon v + \epsilon' X$, para $\epsilon' > 0$ pequeno. Como v é perpendicular à κ , o número $\beta(K)$ é o número de enlaçamento de κ e $\kappa + \epsilon v$, e por conseguinte é também o número de enlaçamento de $\kappa + \epsilon' X$ e $\kappa + \epsilon v + \epsilon' X$. Assim, $\tau(K_+) - \beta(K)$ é o número de rotações de v com respeito a X que é igual à $\mu(K)$. Isto prova a primeira inequação. A prova da segunda inequação é análoga. \square

Corolário 4.3.6 *Se κ é um nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$, então*

$$\beta(K) + |\mu(K)| \leq -\chi(\Sigma_K),$$

onde $\chi(\Sigma_K)$ é a característica de Euler da superfície de Seifert de K .

Prova. Do fato de κ_- e κ_+ serem nós transversos à ξ_{can} e serem isotópicos à κ pela proposição 4.3.3 temos que

$$\beta(K) \leq -\chi(\Sigma_K) - \mu(K) \text{ e } \beta(K) \leq -\chi(\Sigma_K) + \mu(K).$$

Logo $\beta(K) \leq -\chi(\Sigma_K) - |\mu(K)|$. □

Corolário 4.3.7 *Se K é um nó trivial legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ então*

$$\beta(K) < 0.$$

Prova. Como K é um nó trivial temos que $\chi(\Sigma_K) = 1$. Pelo corolário 4.3.6 segue que

$$\beta(K) \leq -1 - |\mu(K)| < 0.$$

□

Teorema 4.3.8 (Ver (FT)) *Seja K um nó legendreano. Então*

1. $\beta(K) + |\mu(K)| < e_v(K)$;
2. $\beta(K) < \eta(K)$,

onde $e_v(K)$ é o grau mínimo de v no polinômio de HOMFLY $P_K(v, z)$ e $\eta(K)$ é o grau mínimo de a no polinômio de Kauffman de K , reduzido módulo 2.

Seja agora K um nó legendreano em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Podemos calcular os números de Thurston-Bennequin e Maslov facilmente. Basta considerarmos as projeções frontal e lagrangeana de K .

Proposição 4.3.9 *Na projeção frontal de um nó legendreano orientado K em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ tem-se*

$$\mu(K) = \frac{1}{2}(C_+(K) - C_-(K)),$$

onde $C_+(K)$ é o número de cúspides subindo e $C_-(K)$ é o número de cúspides descendo.

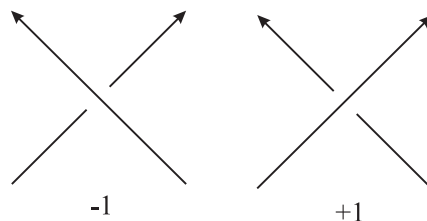


Figura 4.8: Interseção positiva e negativa que satisfaz a regra da mão esquerda.

Prova. Seja $w = \frac{\partial}{\partial y}$ em \mathbb{R}^3 . É um campo vertical não nulo em ξ . Assim pode ser usado para trivializar $\xi|_K$ independente da superfície de Seifert achada para K . Agora para calcularmos o número de Maslov do nó K precisamos ver quantas vezes o campo de vetores v tangente a K gira, pensando tal campo como um campo em \mathbb{R}^2 pela trivialização dada por w , isto é o mesmo que contar com o sinal quantas voltas v dá em volta da origem de \mathbb{R}^2 . Mas, isto equivale a fazer uma conta (considerando-se o sinal) de quantas vezes v e w apontam para a mesma direção, chamaremos isto de interseção de v e w . O “sinal da interseção” é determinado por $(+1)$ se v passa por w no sentido anti-horário ou por (-1) se v passa por w no sentido horário. Na projeção frontal v aponta na direção de $\pm w = \pm \frac{\partial}{\partial y}$ nas cúspides. Pode-se facilmente verificar que a interseção será positiva ao descer uma cúspide (cúspide descendo) e negativa ao subir uma cúspide (cúspide subindo). Além disso, isto conta o número de vezes que v “cruza” $\pm w$, mas para obtermos μ temos que dividir por 2. \square

Proposição 4.3.10 *Na projeção lagrangeana de um nó legendreano orientado K tem-se*

$$\mu(K) = \text{número de giros de } \pi_L(K).$$

Prova. Seja $w = \frac{\partial}{\partial y}$ em \mathbb{R}^3 . Na projeção lagrangeana w projeta a $\frac{\partial}{\partial y}$. Assim o número de Maslov é visto como o número de giros do vetor tangente a $\pi(K)$ no plano xy . \square

Observação 4.3.11 *Uma interseção é positiva se satisfaz a regra da mão direita e negativa se satisfaz a regra da mão esquerda (ver figura 4.8).*

Proposição 4.3.12 *Seja K um nó legendreano em \mathbb{R}^3 . Na projeção frontal de K tem-se*

$$\beta(K) = Cr_+(K) - Cr_-(K) - \frac{1}{2}C(K),$$

onde $Cr_+(K)$ é o número de cruzamentos positivos da projeção $\pi_F(K)$, $Cr_-(K)$ é o número de cruzamentos negativos e $C(K)$ é o número de cúspides.

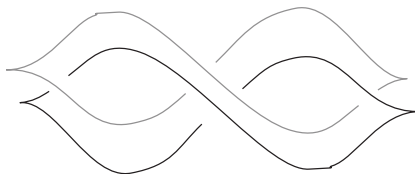


Figura 4.9: Nó K em preto e o nó K^+ em cinza usado para o cálculo de $\beta(K)$.

Prova. Seja $v = \frac{\partial}{\partial z}$ em \mathbb{R}^3 . Assim v é um campo de vetor transverso à ξ ao longo de K . Temos que $\beta(K)$ é o enlaçamento de K com K_+ . Assim na projeção frontal K e K_+ são como na figura 4.9. Agora o número de enlaçamento de K e K_+ é necessariamente a metade das vezes (contados com o sinal) que as projeções $\pi_F(K)$ e $\pi_F K_+$ se intersectam. Note que cada cruzamento de $\pi_F(K)$ dá duas interseções de $\pi_F(K)$ e $\pi_F(K_+)$, ambas com o mesmo sinal do cruzamento. Numa cúspide positiva ou negativa de $\pi_F(K)$ haverá um cruzamento negativo de K e K_+ . Portanto na projeção frontal de K temos que $\beta(K) = Cr_+(K) - Cr_-(K) - \frac{1}{2}(C(K))$. \square

Proposição 4.3.13 *Na projeção lagrangeana de um nó legendreano K tem-se*

$$\beta(K) = \omega(K),$$

onde $\omega(K)$ é a torção de K calculada através do diagrama dado pela projeção lagrangeana de K .

Prova. O número $\beta(K)$ é definido por $\beta(K) = lk(K, K_+)$. Assim na projeção lagrangeana se ao levantarmos K_+ , K_+ não intersecta K então o número de enlaçamento deles é zero. Além disso, cada cruzamento do diagrama de K contribui em (± 1) para o número de enlaçamento. Logo segue o resultado. \square

Os dois próximos resultados sobre nós legendreanos em \mathbb{R}^3 nos garantem que os números de Bennequin e Maslov são invariantes sobre isotopia legendreana.

Proposição 4.3.14 *O número de Thurston-Bennequin de um nó legendreano é invariante por movimentos legendreanos de Reidemeister sobre a projeção frontal.*

Prova. Nós aproximamos esta prova examinando os três movimentos legendreanos de Reidemeister ilustrados na figura 4.4. Se o primeiro movimento for executado, duas cúspides e um cruzamento positivo estão perdidos, produzindo uma mudança líquida de zero, ou duas cúspides e um cruzamento positivo são ganhos, produzindo uma mudança líquida de zero. Assim, o primeiro

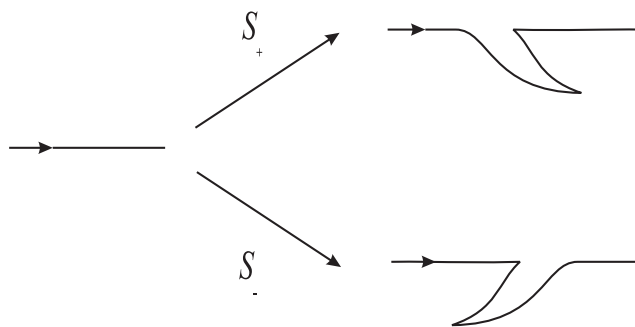


Figura 4.10: Estabilização positiva e negativa na projeção frontal.

movimento de Reidemeister não muda o número de Thurston-Bennequin. Se o segundo movimento for executado, um cruzamento positivo e um cruzamento negativo estão perdidos, produzindo uma mudança líquida de zero. Isto também não altera o número de Bennequin. Se o terceiro movimento for executado, um cruzamento positivo e um cruzamento negativo estão perdidos, e um cruzamento positivo e um negativo são ganhos, também produzindo uma mudança líquida de zero. \square

Proposição 4.3.15 *O número de Maslov de um nó legendreano orientado é invariante por movimentos legendreanos de Reidemeister sobre a projeção frontal.*

Prova. Temos que o segundo e terceiro movimento de Reidemeister não alteram nem o número de cúspides descendo nem o número de cúspides subindo, logo tudo que nós necessitamos verificar é a invariância sob o primeiro movimento. Não obstante a orientação, o primeiro movimento de Reidemeister remove ou adiciona uma cúspide subindo e uma descendo. Nenhuma adição ou remoção muda o número de Maslov. \square

Seja um nó legendreano orientado K em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Podemos obter um outro nó legendreano do mesmo tipo topológico que o nó K acrescentando zig-zag a sua projeção frontal e chamamos essa operação de **estabilização**. Classificamos a estabilização como estabilização positiva (negativa) e denotamos por $S_+(K)$ ($S_-(K)$) a estabilização na estrutura canônica de \mathbb{R}^3 na figura 4.10.

Note que

$$\beta(S_{\pm}(K)) = \beta(K) - 1$$

e

$$\mu(S_{\pm}(K)) = \mu(K) \pm 1.$$

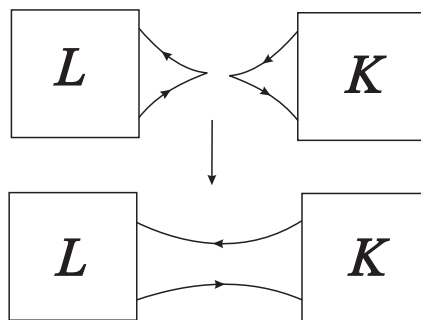


Figura 4.11: Soma conexa na projeção frontal

A operação de estabilização é bem definida, em \mathbb{R}^3 . Basta observar que os zig-zags podem ser movidos passando por cúspides e cruzamentos na projeção frontal. Além disso, a operação de estabilização pode ser estendida para qualquer variedade de contato (M^3, ξ) . Para mais detalhes ver (Et2).

Chamaremos uma composição de estabilizações de estabilização múltipla e somente uma estabilização chamaremos de estabilização simples.

Podemos realizar a estabilização de maneira análoga na projeção lagrangeana.

Teorema 4.3.16 (Ver (FT)) *Sejam K_1 e K_2 nós legendreanos em $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$. Se K_1 e K_2 são topologicamente isotópicos, então depois que cada um for estabilizado em algum número de vezes eles serão isotópicos por isotopia legendreana.*

Definição 4.3.17 *Seja K um nó legendreano. Dizemos que K é **destabilizável** se existe um nó legendreano K' tal que $S_{\pm}(K) = K'$.*

Seja \mathcal{K} um nó tipo em \mathbb{R}^3 (ver p. 14). Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ o conjunto dos nós legendreanos na variedade de contato $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ que pertencem a \mathcal{K} .

Definição 4.3.18 *Seja \mathcal{K} um nó tipo em \mathbb{R}^3 com estrutura de contato ξ_{can} . Definimos o **número máximo de Thurston-Bennequin** por:*

$$\bar{\beta}(\mathcal{K}) = \max\{\beta(L); L \in \mathcal{L}(\mathcal{K})\}.$$

O número máximo de Thurston-Bennequin está bem definido uma vez que pelo corolário 4.3.6 temos que o conjunto $\{\beta(L); L \in \mathcal{L}(\mathcal{K})\}$ é limitado superiormente e por definição de β este conjunto é subconjunto não vazio de \mathbb{Z} , logo $\bar{\beta}(\mathcal{K})$ existe. Além disso, como o número de Thurston-Bennequin de um nó legendreano é um invariante segue que $\bar{\beta}$ é um invariante de nós topológicos.

Na figura 4.11 ilustramos a soma conexa $K \sharp L$ na projeção frontal de dois nós legendreanos orientados K e L na variedade de contato $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$.

Utilizando a projeção frontal e proposição 4.3.12 e proposição 4.3.9 é fácil ver que

$$\beta(K\sharp L) = \beta(K) + \beta(L) + 1$$

e

$$\mu(L\sharp K) = \mu(K) + \mu(L).$$

5 Nós Legendreanos em T^3

5.1 Elemento de Contato

Definição 5.1.1 Um elemento de contato do ponto $(x, y) \in T^2$ é uma reta no plano tangente $T_{(x,y)}T^2$ passando por (x, y) .

Definição 5.1.2 A co-orientação de um elemento de contato é uma escolha de um dos semi-planos de $T_{(x,y)}T^2$ dividido pelo elemento de contato.

Podemos caracterizar essa escolha por um vetor unitário normal ao elemento de contato. Por outro lado podemos representar os elementos de $T^2 \times S^1$ por vetores unitários aplicados em um ponto de T^2 . Assim o espaço de todos os elementos de contato co-orientados pode ser identificado com $T^2 \times S^1$, o qual é difeomorfo a T^3 .

Consideremos a 1-forma

$$\alpha_n = \cos(2\pi n z)dx + \sin(2\pi n z)dy, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

em T^2 com coordenadas (x, y) . O núcleo de α_n é uma reta em $T_{(x,y)}T^2$. A equação de tal reta é

$$\cos(2\pi n z)dx + \sin(2\pi n z)dy = 0. \tag{5-1}$$

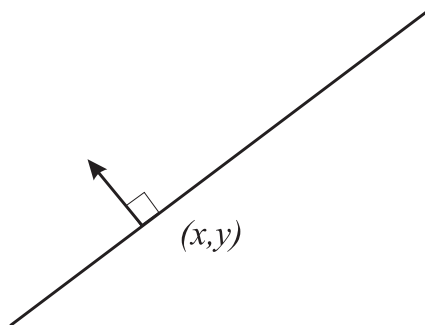


Figura 5.1: Elemento de contato co-orientado.

Observemos que o espaço de todos os elementos de contato co-orientados é dado pela equação (5-1) e cada elemento de contato tem co-orientação $(\cos(2\pi n z), \text{sen}(2\pi n z))$ para algum $z \in S^1$.

Agora não mais olhando z como parâmetro mas como coordenada temos que

$$\alpha_n = \cos(2\pi n z)dx + \text{sen}(2\pi n z)dy$$

é uma 1-forma em $T^2 \times S^1$ com coordenadas (x, y, z) . Aliás α_n é uma forma de contato em T^3 como vimos no exemplo 3.2.4.

Vamos considerar $T^3 = T^2 \times S^1$ com coordenadas (x, y, z) e a forma de contato $\alpha_1 = \cos(2\pi z) dx + \text{sen}(2\pi z) dy$ em T^3 .

Lembre-se que cada plano de contato desse campo de planos contém o vetor na direção z , mais geral que isso: o campo $\ker \alpha_1$ é gerado pelo vetor $\frac{\partial}{\partial z}$ e o elemento de contato em (x, y) ortogonal a $(\cos(2\pi z), \text{sen}(2\pi z))$. Assim $\kappa : S^1 \rightarrow T^2 \times S^1$ definida por $\kappa(t) = (x_0, y_0, z(t))$ é um nó legendreano, pois

$$\dot{\kappa}(t) = (0, 0, \dot{z}(t)) = \dot{z}(t) \frac{\partial}{\partial z},$$

logo $\alpha_1(\dot{\kappa}(t)) = 0$.

Agora vejamos como a partir de uma projeção que seja uma imersão, obtemos um levantamento que seja um nó legendreano. Seja $\kappa_P : S^1 \rightarrow T^2$ uma imersão genérica, ou seja, κ_P é uma imersão cuja imagem possui apenas pontos duplos transversais. Suponhamos que κ_P é parametrizada por $\kappa_P(t) = (x(t), y(t))$. Nosso objetivo é encontrar uma aplicação $z : S^1 \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que satisfaça a equação:

$$\dot{x}(t) \cos(2\pi z(t)) + \dot{y}(t) \text{sen}(2\pi z(t)) = 0 \tag{5-2}$$

de modo que $\kappa(t) = (x(t), y(t), z(t))$ seja um nó legendreano. Podemos obter unicamente $z(t)$ (módulo 1) resolvendo a equação (5-2) com a condição que os vetores $\dot{\kappa}_P = (\dot{x}, \dot{y})$ e $v = (\cos(2\pi z), \text{sen}(2\pi z))$ estão orientados de $\dot{\kappa}_P$ para v . Assim obtemos um levantamento $\kappa(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde κ é um mergulho, pois κ_P é uma imersão genérica, e portanto κ é um nó legendreano.

Note que em geral se κ é um nó legendreano em T^3 sua projeção κ_P não é uma imersão, pois o nó κ pode ter algum vetor tangente na direção z .

Proposição 5.1.3 *A projeção de um nó legendreano genérico κ tem apenas pontos duplos transversais e pontos cúspides como suas singularidades.*

Prova. Seja $\kappa = (x(t), y(t), z(t))$ um nó legendreano em T^3 .

Por uma pequena perturbação legendreana podemos assumir que $A = \{t \in S^1; \dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0\}$ é finito. Para $t \notin A$ a projeção $\kappa_P = (x(t), y(t))$ é

uma imersão. Por outra perturbação legendreana pequena podemos fazer com que todos os pontos duplos sejam transversais e também eliminar os pontos tríplexes. Assim podemos assumir que κ_P tem apenas pontos cúspides e pontos duplos transversais.

Próximo de um ponto de κ_P onde $\dot{x} = \dot{y} = 0$, temos que o vetor normal $(\cos(2\pi z), \sin(2\pi z))$ percorre suavemente este ponto, pois κ é legendreano. Num primeiro caso, se as orientações de T^2 dadas por $(\cos(2\pi z), \sin(2\pi z))$ e $\dot{\kappa}_P$ antes e depois desse ponto singular são os mesmos, podemos perturbar κ_P para eliminar esse ponto singular, usando uma deformação arbitrariamente pequena.

Assumiremos que as orientações de T^2 dadas por $\dot{\kappa}_P$ e $(\cos 2\pi z, \sin 2\pi z)$ antes e depois do ponto singular são diferentes. Um modelo típico dessa situação é a seguinte singularidade:

$$(x(t), y(t)) = (t^3, -t^2), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

com $\epsilon > 0$ pequeno.

A singularidade é em $t = 0$. Resolvendo a equação:

$$\dot{x} \cos(2\pi z) + \dot{y} \sin(2\pi z) = 0$$

temos que $z(t) = \frac{1}{2\pi} \arctan(\frac{3t}{2})$. Esta é uma função suave. Não é difícil ver que sempre podemos modificar κ_P próximo de um ponto singular por uma isotopia legendreana suave e perturbá-la de forma que se tenha esta forma canônica. \square

Pelo teorema 4.2.5 temos a seguinte:

Proposição 5.1.4 *Todo nó em T^3 é isotópico a um nó legendreano.*

5.2

Números de Thurston-Bennequin e Maslov de nós em T^3

Consideremos agora a identificação $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

Definição 5.2.1 *Um nó K em T^3 é chamado de **nó quase linear** se existe um nó γ em T^3 tal que K é isotópico a γ e o levantamento $\tilde{\gamma}$ ao recobrimento universal $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow T^3$ seja uma reta racional.*

Note que a identificação $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ induz uma identificação $H_1(T^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^3$. Dessa maneira uma orientação de um nó quase linear representa uma classe de homologia que corresponde a um vetor $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3$, onde as coordenadas v_1, v_2, v_3 são primos entre si. Tal vetor chama-se **vetor primitivo**.

Definição 5.2.2 O vetor (v_1, v_2, v_3) que corresponde à classe de homologia de um nó quase linear K chama-se **direção**.

Definição 5.2.3 Seja $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3$ um vetor primitivo. Definimos um **nó tipo direcionado** $\mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)$ como o conjunto de todos os nós quase lineares em T^3 com direção (v_1, v_2, v_3) .

Denotaremos o conjunto de todos os nós quase lineares $K \in \mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)$, com K legendreano em (T^3, ξ_n) (vide ex. 3.2.4) por $\mathcal{L}_n(v_1, v_2, v_3)$.

Definição 5.2.4 Um 2-toro T mergulhado em M^3 por $f : T \rightarrow M^3$ é dito **incompressível** se o homeomorfismo induzido do grupo fundamental $f_* : \pi_1(T, x_0) \rightarrow \pi_1(M^3, f(x_0))$ é injetor.

Observe que dado um nó legendreano K quase linear em T^3 , existe um toro incompressível que contém K . De fato, como K é quase linear existe um nó \tilde{K} linear que é isotópico a K . Podemos fazer uma mudança de base usando uma matriz $A_{3 \times 3}$ com entradas inteiras cujo determinate é igual a 1 de modo que a matriz A leve o nó \tilde{K} num nó vertical, e é evidente que um nó vertical está contido num 2-toro linear, portanto incompressível.

Lema 5.2.5 Seja K um nó legendreano em T^3 quase linear. Dados dois toros incompressíveis T_1 e T_2 que contêm K , se X_i é campo de vetores não singular ao longo de K ortogonal a \dot{K} e tangente a T_i , então no plano ortogonal a \dot{K} o número de giros de X_1 com respeito a X_2 é zero.

Prova. Seja K um nó legendreano quase linear em T^3 . Existe uma projeção linear $T^3 \rightarrow T^2$ tal que a direção de K será a fibra da projeção. Sendo K isotópico à sua direção podemos mudar a projeção por uma isotopia a uma projeção de fibrado $\pi : T^3 \rightarrow T^2$ que tem K como fibra. Provemos que dado um toro incompressível T contendo K o referencial em K induzido por T é homotópico ao referencial induzido por π .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times S^1 & \longrightarrow & T^3 \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\Psi} & T^2 \end{array}$$

Sejam $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ o recobrimento universal e $\tilde{\pi} : \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o pull-back de π . O toro T levanta a um análogo \mathcal{T} com bordo $\partial\mathcal{T} = \tilde{K}_0 - \tilde{K}_1$, onde \tilde{K}_0 e \tilde{K}_1 são componentes conexas da pré imagem de K . A diferença entre o referencial induzido por T e a projeção do referencial é o número de pontos

de interseção (contando-se com sinal) entre \mathcal{T} e uma fibra \tilde{K}' de $\tilde{\pi}$ próxima à \tilde{K}_0 . Mas toda fibra é homóloga à fibra disjunta de \mathcal{T} , logo a diferença entre os dois referenciais é zero. \square

Definição 5.2.6 *Sejam K um nó quase linear legendreano na variedade de contato (T^3, ξ_n) e T um toro incompressível contendo K . O **número de Thurston-Bennequin**, $\beta(K)$, é definido como o número de giros do referencial de K induzido por ξ_n com respeito ao referencial induzido pelo toro T .*

Definição 5.2.7 *Seja $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3$ um vetor primitivo. O **número máximo de Bennequin** do nó tipo direcionado $\mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)$ relativo a ξ_n é definido por:*

$$\bar{\beta}(\mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)) = \max\{\beta(K); K \in \mathcal{L}_n(v_1, v_2, v_3)\}.$$

Proposição 5.2.8 (Ver (Kan)) *Seja $\mathcal{K}(v_1, v_2, v_3)$ um nó tipo direcionado com (v_1, v_2, v_3) primitivo e considere a estrutura de contato ξ_n em T^3 . Então*

$$\bar{\beta}(\mathcal{L}_n(v_1, v_2, v_3)) = |nv_3|.$$

Definição 5.2.9 *Sejam X uma seção de ξ_n que não se anula e K um nó legendreano orientado na variedade de contato (T^3, ξ_n) . Definimos o número de Maslov de K com relação a X em ξ_n , denotado por $\mu_X(K)$, como o número de giros de \dot{K} em ξ_n com respeito a X ao longo de K .*

Vamos calcular o número de Maslov de K , nó legendreano em (T^3, ξ_1) com respeito a seção

$$X = \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} + \sin \theta \left(\sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

na sua projeção em T^2 . Suponhamos que κ é uma parametrização genérica do nó K tal que sua projeção κ_P em T^2 tem apenas pontos duplos transversais e singularidades cúspides. Num ponto cúspide em κ_P temos que

$$\dot{\kappa} = \pm \frac{\partial}{\partial z},$$

onde o sinal de $\frac{\partial}{\partial z}$ é positivo (negativo) se o ângulo z é crescente (decrecente) quando se move ao longo de κ em uma dada direção. Esses casos correspondem aos pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ respectivamente.

Vamos avaliar os casos quando κ_P passa por um ponto cúspide.

Caso 1: Se o ângulo z é crescente e o sinal de $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de $-$ para $+$, então $\dot{\kappa}$ movimenta-se até $\theta = 0$. Assim esse ponto cúspide contribui uma unidade positiva para o número de Maslov.

Caso 2: Se o ângulo z é crescente e o sinal de $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de $+$ para $-$, então $\dot{\kappa}$ movimenta-se até $\theta = \pi$. Assim esse ponto cúspide contribui uma unidade negativa para o número de Maslov.

Caso 3: Se o ângulo z é decrescente e o sinal de $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de $-$ para $+$, então $\dot{\kappa}$ movimenta-se até $\theta = \pi$. Assim esse ponto cúspide contribui uma unidade negativa para o número de Maslov.

Caso 4: Se o ângulo z é decrescente e o sinal de $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de $+$ para $-$, então $\dot{\kappa}$ movimenta-se até $\theta = 0$. Logo esse ponto cúspide contribui uma unidade positiva para o número de Maslov.

Definição 5.2.10 *Um ponto é dito cúspide positiva se quando passa-se por este ponto ao longo de κ numa direção dada tem-se:*

1. z é crescente e $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de sinal de $-$ para $+$; ou
2. z é decrescente e $\dot{x} \sin(2\pi z) - \dot{y} \cos(2\pi z)$ muda de sinal de $+$ para $-$.

Caso contrário chama-se cúspide negativa.

Denotando-se o número de cúspides positivas por μ_+ e o número de cúspides negativas por μ_- temos a seguinte:

Proposição 5.2.11 *Se K é um nó legendreano em (T^3, ξ_1) , então*

$$\mu_X(K) = \frac{1}{2}(\mu_+ - \mu_-).$$

Definição 5.2.12 *Sejam K e K' nós legendreanos em (T^3, ξ_n) isotópicos por isotopia legendreana e $\Sigma \subset T^3$ uma superfície compacta orientada mergulhada com $\partial\Sigma = K - K'$. Definimos o número relativo de Maslov de K com respeito a K' como a obstrução à estender \dot{K} e \dot{K}' para uma trivialização de $\xi_n|_\Sigma$. Denotaremos o número relativo de Maslov de K com respeito a K' por $\mu(K, K')$.*

Proposição 5.2.13 *Sejam K e K' nós legendreanos quase lineares em (T^3, ξ_n) isotópicos suavemente por isotopia legendreana. Se K e K' atingem o número máximo de Thurston-Bennequin para o nó tipo deles, então $\mu(K, K') = 0$.*

Prova. Seja $\Sigma \subset T^3$ uma superfície convexa mergulhada com bordo K e K' . Observemos que a equação $\mu(K, K') = 0$ é válida se Σ é um cilindro. De fato, Γ_Σ não contém arco que divide paralelamente ao bordo, pois $\beta(K) = \beta(K')$ é máximo no nó tipo de K e K' . Daí

$$\mu_\Sigma = \chi(\Sigma_+) - \chi(\Sigma_-) = 0.$$

Se Σ não é um cilindro, considere um recobrimento finito $\Upsilon : T^3 \rightarrow T^3$ que é trivial quando restrito à K e K' , e escolha um levantamento $\hat{\Sigma}$ de Σ . Seja $\hat{\xi}$ o pull-back esticado da estrutura de contato, e $\partial\hat{\Sigma} = \hat{K} \cup \hat{K}'$. Se o recobrimento $\Upsilon : T^3 \rightarrow T^3$ tem um número suficientemente grande de folhas, podemos assumir que existe um β máximo de um nó legendreano linear \hat{K}_0 tal que \hat{K} e \hat{K}_0 são ligados por um cilindro C e \hat{K}' e \hat{K}_0 são ligados por um cilindro C' . Então

$$\mu_{\hat{\Sigma}}(\hat{K}, \hat{K}') + \mu_{C'}(\hat{K}', \hat{K}_0) + \mu_C(\hat{K}_0, \hat{K}) = \langle v_1(\hat{\xi}), [\hat{\Sigma} \cup C \cup C'] \rangle = 0,$$

daí $\mu_\Sigma(K, K') = 0$, pois $\mu_{C'}(\hat{K}', \hat{K}_0) = \mu_C(\hat{K}', \hat{K}_0) = 0$. \square

Pela proposição 5.2.13 podemos escolher um campo X em ξ_n de modo que qualquer $\bar{\beta}$ de um nó legendreano quase linear K em um dado nó tipo que tem número de Maslov $\mu_X(K) = 0$. No seguinte, sempre que essa escolha é determinada, escrevemos simplesmente $\mu(K)$.

Seja T^3 com estrutura de contato ξ_n e seja v um campo de vetores de contato em M , isto é, um campo de vetores cujo fluxo preserva ξ_n . O **conjunto característico** C de v é o conjunto de todos os pontos x em M tal que v é tangente à ξ_n em x . Se Σ é transversal a v (em outras palavras Σ é convexo), então o **conjunto divisor** de Σ , é o conjunto Γ_Σ dos pontos x em Σ tal que v é tangente a ξ_n em x . Note que o conjunto divisor Γ_Σ é igual a interseção de Σ com o conjunto característico de Σ .

A próxima proposição descreve o conjunto divisor de um toro convexo incompressível.

Proposição 5.2.14 *Sejam $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ vetores de uma base de \mathbb{Z}^3 e T a imagem de um mergulho $f : T^2 \rightarrow T^3$ induzido por*

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ru_1 + sv_1 \\ ru_2 + sv_2 \\ ru_3 + sv_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Então T é um toro convexo com declive $s(T) = -\frac{u_3}{v_3}$ e $\#\Gamma_T = 2n \operatorname{mdc}(u_3, v_3)$, onde $\operatorname{mdc}(u_3, v_3)$ é o maior divisor comum entre u_3 e v_3 .

Prova. Como $v_3 \neq 0$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ é transverso à T . Para todo n as estruturas de contato ξ_n são invariantes na direção x e y , logo T é convexo, pois X é um campo de vetores de contato. O conjunto característico $\Sigma = \{p \in T^3; X(p) \in \xi_n(p)\}$ consiste de $2n$ cópias paralelas de um toro horizontal da forma $\{z \in \mathbb{Z}\}$, assim o conjunto $\Gamma_T = T \cap \Sigma$ consiste de $2n$ cópias do conjunto $\{ru_3 + sv_3 \in \mathbb{Z}\}$. Calculando temos que $s(T) = -\frac{u_3}{v_3}$ e $\#\Gamma_T = 2n \operatorname{mdc}(u_3, v_3)$. \square

Por fim apenas enunciaremos os principais resultados demonstrados por Ghiggini em seu artigo (Gh).

Teorema 5.2.15 *Sejam K_1 e K_2 nós legendreanos em $\mathcal{L}_n(v_1, v_2, v_3)$, com $v_3 \neq 0$. Então K_1 é isotópico por isotopia legendreana a K_2 se, e somente se, $\beta(K_1) = \beta(K_2)$ e $\mu(K_1) = \mu(K_2)$.*

Teorema 5.2.16 *Todo nó quase linear K em $\mathcal{K}_n(v_1, v_2, 0)$ possui $\beta \leq 0$. Todo nó legendreano $K \in \mathcal{L}_n(v_1, v_2, 0)$ com $\beta(K) < 0$ é isotópico por isotopia legendreana a uma estabilização (múltipla) de um nó legendreano K' com $\beta(K') = 0$. Dois nós legendreanos $K_1, K_2 \in \mathcal{L}_n(v_1, v_2, 0)$ são isotópicos por isotopia legendreana se, e somente se, $\beta(K_1) = \beta(K_2)$, $\mu(K_1) = \mu(K_2)$ e pelo menos uma das seguintes afirmações é verificada:*

1. K'_1 e K'_2 são isotópicos por isotopia legendreana;
2. $|\mu(K_i)| < |\beta(K_i)|$, $i = 1, 2$;
3. $|\mu(K_i)| = |\beta(K_i)|$, e K'_1 e K'_2 correspondem a um nó divisor de T limitando uma região R , e o sinal de R é oposto ao sinal de $\mu(K_i)$, $i = 1, 2$.

Referências Bibliográficas

- [Ad] ADAMS, C.C. **The knot book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots**. W. H. Freeman and Company, 1994.
- [AM] ABRAHAM, R.; MARSDEN, J.E. **Foundations of Mechanics**. Benjamin-Cummings. Reading, MA, 1978. 3.1
- [Ben] BENNEQUIN, D. **Entrelacement et Equations de Pfaff**. *Asterisque*, 107-108, P. 83–161, 1983. 3.2
- [Ber] BERNDT, R. **An Introduction to Symplectic Geometry**. American Mathematical Society. Rhode Island, vol 26, 2001. 3.2
- [Br] BRANSON, M. **Tabulation of the Legendrian Knots by Ambient Isotopy**. paper, 2002.
- [BZ] BURDE, G.; ZIESCHANG, H. **Knots**. Walter de Gruyter, 1985. 2.1.7, 2.5
- [Ca] CARMO, M.P., **Formas Diferenciais e Aplicações**. 8º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1971. 3.1.4, 3.1.9, 3.1.12, 3.1.16
- [CF] CROWELL, R.H.; FOX, R.H., **Introduction to Knot Theory**. Graduate Texts in Mathematics, 57. Springer-Verlag, 1963. 2.1
- [CN] CAMACHO, C.; NETO, A. L., **Teoria Geométrica das Folheações**. Projeto Euclides. IMPA, 1979. 3.2
- [Co] CONWAY, J.H. **An Enumeration of Knots and Links and Some of Their Algebraic Properties**. Computational Problems in Abstract Algebra. Pergamon Press. New York. P. 329–358, 1970. 2.7
- [Cr] CROMWELL, P., **Knots and Links**. Published by the Press Syndicate of the University of Cambridge, 2004. 2.2, 2.5

- [Dy] DYMARA, K., **Legendrian Knots in Over-twisted Contact Structure**. 2005. Disponível em <<http://arxiv.org/abs/math/0410122>>.
- [El] ELIASHBERG, Y., **Contact 3-Manifolds Twenty Years Since J. Martinet's Work**. 623–637, Invent. Math. 98, 1989. 3.2.17
- [EFM] PSTEIN, J.; FUCHS, D.; MEYER, M., **Chekanov-Eliashberg Invariants and Transverse Approximations of Legendrian Knots**. Pacific Journal of Mathematics, vol. 201, *n*º 1, P. 89–106, 2001.
- [Et1] ETNYRE, J.B., **Introductory Lectures on Contact Geometry**. 2002. Disponível em <<http://arxiv.org/abs/math/0111118>>.
- [Et2] ETNYRE, J.B., **Legendrian and Transversal Knots**. 2004. Disponível em <<http://arxiv.org/abs/math/0306256>>. 4.3
- [Fe] FERRAND, E., **On Legendrian Knots and Polynomial Invariants**. 2002. Disponível em <<http://arxiv.org/abs/math/0002250>>.
- [FT] FUCHS, D.; TABACHNIKOV, S., **Invariants of Legendrian and contact knots in the standard contact space**. Topology, 36(5), P. 1025–1053, 1997. 4.3.8, 4.3.16
- [Ge] GEIGES, H., **Contact Geometry**. 2004. Disponível em <<http://arxiv.org/abs/math/0307242>>. 3.2.13, 3.2, 3.2
- [Gh] GHIGGINI, P., **Linear Legendrian Curves in T^3** . 2004. Disponível em <<http://arxiv.org/abs/math/0402005>>. 1, 5.2
- [Ha] HACON, D., **Introdução à Teoria dos nós em \mathbb{R}^3** . 15º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1985.
- [HOMFLY] FREYD, P.; YETTER, D.; HOSTE, J.; LICKORISH, W.B.R.; MILLET, K.; OCNEANU, A. **A New Polynomial Invariant of Knots and Links**. Bull. Amer. Math. Soc. 2(12), P. 239–246, 1985. 2.7
- [Ho1] HONDA, K., **On the Classification of Tight Contact Structures I**. 4, P.309–368, Geom. Topol., 2000.

- [Ho2] HONDA, K., **On the Classification of Tight Contact Structures II**. 55(1), J. Differential Geom., P. 83–143, 2000.
- [Jo] JONES, V.F.R., **A New Knot Polynomial and von Neumann Algebra**. Notices of AMS, 1985 2.7
- [Kan] KANDA, Y., **The Classification of Tight Contact Structures on the 3-Torus**. Comm. Anal. Geom. 5(3), P. 413–438, 1997. 1, 3.2, 5.2.8
- [Ka3] KAUFFMANN, L.H., **Knots and Physics**. Series on Knots and Everything. Vol. 1, World Scientific, 1991. 2.7
- [Ka1] KAUFFMANN, L.H., **On Knots**. Ann.of Math.Studies, 115, Princeton Univ.Press, 1987. 2.7
- [Ka2] KAUFFMANN, L.H., **Formal Knot Theory**. Mathematical Notes 30, Princeton Univ.Press, 1983.
- [Li1] LIMA, E.L., **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Projeto Euclides. IMPA, 1998.
- [Li2] LIMA, E.L., **Curso de Análise vol. 2**. Projeto Euclides. IMPA, 2000. 3.1.17, 3.1.18
- [Lin] LIN, X.S., **An Introduction to 3-Dimensional Contact Topology**. 2002. Disponível em <<http://math.ucr.edu/~xl/contact.pdf>>. 3.2, 4.3.3
- [Ma] MANTUROV, V., **Knot Theory**. Chapman & Hall/CRC, 2004. 2.3, 2.7, 2.7
- [Mu] MURASUGI, K., **Knot Theory & Its Applications**. Birkhäuser, 1996.
- [No] NOGUEIRA, P.H.A.S. **Álgebra de Hecke, Diagramas de Young e Invariantes de 3-Variedades**. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo. São Paulo, 1998.
- [Ot] OTTERSON, J., **Contact Geometry and 3-manifolds**. Novembro 2002.
- [PS] PRASOLOV, V.V.; SOSSINSKY, A.B. **Knots, Links, Braids and 3-Manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology**. Translations of Math. Monographs, A.M.S. 154, 1996. 2.3.2

- [Ro] ROLFSEN, D., **Knots and Links**. Publish or Perish Inc., 1976.
- [Sp] SPIVAK, M., **O Cálculo em Variedades**. Coleção Clássicos da Matemática. Ed. Ciência Moderna, 2003.
- [Sw] SWIATKOWSKI, J., **On the Isotopy of Legendrian Knots**. Ann. Glob. Anal. Geom. 10, P. 195–207, 1992. 4.2.6
- [To] TORISU, I., **On The Additivity of the Thurston-Bennequin Invariants Legendrian Knots**. 2001. Disponível em <<http://arxiv.org/abs/math/0103023>>.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)