Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Betina Vath

União de bolas, eixo medial e deformações no espaço tridimensional

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador: Prof. Thomas Lewiner

Rio de Janeiro
agosto de 2007

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Betina Vath

União de bolas, eixo medial e deformações no espaço tridimensional

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Thomas Lewiner
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Marcos Craizer
Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes
Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Luiz Henrique de Figueiredo
Laboratório Visgraf — IMPA

Prof. Geovan Tavares
Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Sandra Mara Cardoso Malta
Coordenação de Matemática Aplicada — LNCC

Prof. José Eugênio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 10 de agosto de 2007

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Betina Vath

Graduou-se em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (2001–2005).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Ficha Catalográfica

Vath, Betina

União de bolas, eixo medial e deformações no espaço tridimensional / Betina Vath; orientador: Thomas Lewiner. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 57 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. União de bolas; Eixo medial; Discretização de formas; Deformação. I. Lewiner, Thomas. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

À minha família e ao meu namorado pelo apoio e carinho.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Thomas Lewiner por toda a dedicação na produção desse trabalho e por sua prontitude em sanar minhas dúvidas.

Ao meu namorado Alex que acompanhou todo o meu trabalho de perto e contribuiu muito para o desenvolvimento do mesmo. Agradeço por seu imensurável apoio e incentivo.

Aos meus amigos, por dividirem comigo as alegrias e as tristezas.

Agradeço aos meus pais Arno e Sandra pela paciência e o amor que me dedicam.

À todos os funcionários e professores do departamento de matemática pela ajuda prestada.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

Resumo

Vath, Betina; Lewiner, Thomas. **União de bolas, eixo medial e deformações no espaço tridimensional**. Rio de Janeiro, 2007. 57p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O eixo medial é uma descrição compacta de um objeto que preserva sua topologia e induz naturalmente uma discretização da sua forma como união de bolas. O estudo de união de bolas possui aplicações em diversas áreas da Matemática, em particular na Geometria Computacional onde se usa, por exemplo, para reconstrução de curvas e superfícies. Este trabalho pretende utilizar união de bolas para simular deformações a partir do eixo medial, apresentando conceitos e teoremas a fim de construir algoritmos para a extração do eixo medial em $\mathbb{R}^3$. A deformação será, então, definida por movimentos locais das bolas ao longo das direções do eixo medial. Este trabalho contém resultados com movimentos simples, em um programa que utiliza a biblioteca CGAL.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Palavras–chave

União de bolas; Eixo medial; Discretização de formas; Deformação.

Abstract

Vath, Betina; Lewiner, Thomas. **Union of balls, medial axis and deformations in three-dimensional space**. Rio de Janeiro, 2007. 57p. M.Sc. Thesis — Departament of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The medial axis is a compact description of an object that preserves its topology and naturally induces a discretisation of its forma in terms of union of balls. The study of union of balls has applications in various areas of Mathematics, in particular in Computational Geometry where it is used for curve and surface reconstruction. This work pretends to use union of balls in order to simulate deformations described on the medial axis. It introduces concepts and theorems in order to setup algorithms for medial axis extraction in $\mathbb{R}^3$. The deformation will thus be defined by local ball moves along the medial axis directions. This work contains results with simple movements, in a program that uses the CGAL library.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Keywords

Union of balls; Medial axis; Forma discretisation; Deformation.

Sumário

1 Introdução **12**

2 Conceitos Preliminares **14**
2.1 Estruturas Fundamentais 14
2.2 União de Bolas 15
2.3 Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi 16
2.3.1 Diagrama de Voronoi 17
2.3.2 Triangulação de Delaunay 17
2.4 Triangulação Regular e Diagrama de Potência 18
2.4.1 Diagrama de Potência 18
2.4.2 Triangulação Regular 19
2.5 Alpha-Shape 20
2.5.1 Alpha-Shape de Pontos sem Peso 20
2.5.2 Alpha-Shape de Pontos com Peso 22
2.5.3 0-Shape 23

3 Eixo Medial **25**
3.1 Eixo Medial de uma União de Bolas 25
3.2 Caracterização Combinatorial 26
3.3 *Crossing Edges* e Arestas do Alpha Forma 30

4 Implementação **33**
4.1 Biblioteca CGAL 33
4.1.1 Descrição da Biblioteca CGAL 34
4.2 Implementação do Eixo Medial 35
4.2.1 Classe 36
4.2.2 Implementação do Alpha-Shape 36
4.2.3 Rotina para encontrar os vértices $\mathcal{V}$ da união $\mathcal{U}$ 36
4.2.4 Rotina do diagrama de Voronoi 37
4.2.5 Interseção do diagrama de Voronoi 37

5 Movimentos baseados no Eixo Medial **38**
5.1 Motivação 38
5.2 Grafo de suporte 39
5.3 Bases do movimento 39
5.4 Movimento simples 40
5.5 Condição de amostragem 40

6 Resultados **41**
6.1 Exemplo 1 41
6.1.1 Movimento de contração 41
6.1.2 Movimento de dilatação 41
6.2 Exemplo 2 43
6.2.1 Movimento de contração 43

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

6.2.2 Movimento de dilatação 43
6.3 Exemplo 3 45
6.3.1 Movimento de contração 45
6.3.2 Movimento de dilatação 45
6.4 Exemplo 4 47
6.4.1 Movimento de contração 47
6.4.2 Movimento de dilatação 47
6.5 Exemplo 5 49
6.5.1 Movimento de contração 49
6.5.2 Movimento de dilatação 49
6.6 Limitação do movimento 51
6.7 Movimentos com estruturas separadas 52
6.7.1 Movimento de contração 52
6.7.2 Movimento de dilatação 52

7 Conclusões e Trabalhos Futuros 54

Referências Bibliográficas **55**

A Apêndice 57

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Lista de figuras

2.1 2-Esfera (corpo oco)/ 3-Bola (corpo maciço). 14
2.2 Exemplos de simplexos. 15
2.3 Conjunto de bolas $\mathcal{B}$ e união $\mathcal{U}$ em $\mathbb{R}^2$. 15
2.4 Escrita Não Mínima Escrita Mínima. 16
2.5 Vértices do bordo da união $\mathcal{U}$. 16
2.6 Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi. 18
2.7 Potência de p em relação a x. 19
2.8 Triangulação Regular e Diagrama de Potência. 20
2.9 α-shapes para diferentes valores de α em $\mathbb{R}^2$. 20
2.10 Triangulação de Delaunay e α-shape. 21
2.11 Aresta α-exposto/ Simplexo não α-exposto. 21
2.12 $DT(S)$/ $\partial\mathcal{S}$/ C_α. 22
2.13 Faces Singulares e Componentes Regulares de $\mathcal{S}$. 23
2.14 0-shape. 24

3.1 Bolas e o Eixo Medial em $\mathbb{R}^2$. 25
3.2 Eixo Medial de uma união de bolas. 26
3.3 $\mathcal{U} - \mathcal{S}$. 27
3.4 Simplexos em $\mathcal{S}$ e duais no $\partial\mathcal{U}$. 27
3.5 Pontos na componente regular $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ e respectivos pontos mais próximos em $\mathcal{U}$. 29
3.6 Faces singulares, componentes regulares e arestas do $Vor(\mathcal{V})$. 29
3.7 Simplexo σ particiona a célula de Voronoi de v. 30
3.8 Arestas do 0-shape. 31
3.9 Aresta do 0-shape e *crossing edge*. 31

4.1 Estrutura do CGAL. 35

6.1 Primeiro exemplo: eixo medial desenhado em lilás. 41
6.2 Primeiro exemplo: Movimento de contração nos dois primeiros e sexto passo da iteração. 42
6.3 Primeiro exemplo: Movimento de dilatação nos três primeiros passos da iteração. 42
6.4 Segundo exemplo: Boneco e seu eixo medial. 43
6.5 Segundo exemplo: Movimento de contração nas duas primeiras e quinta iteração. 43
6.6 Segundo exemplo: Movimento de contração depois de 13 iterações. 44
6.7 Segundo exemplo: Movimento de dilatação nas três primeiras iterações. 44
6.8 Terceiro exemplo: eixo medial desenhado em preto. 45
6.9 Terceiro exemplo: Movimento de contração nas três primeiras iterações. 45
6.10 Terceiro exemplo: Movimento de contração quarta, quinta e nona iteração. 46

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

6.11 Terceiro exemplo: Movimento de dilatação nas três primeiras iterações. 46
6.12 Terceiro exemplo: Quarta, quinta e sexta iteração. Tendência para a formação de uma única bola. 46
6.13 Quarto exemplo: Futeboleno. 47
6.14 Quarto exemplo: Movimento de contração nas três primeiras iterações. 47
6.15 Quarto exemplo: Movimento de contração na quinta, sexta e décima iteração. 48
6.16 Quarto exemplo: Movimento de dilatação nas três primeiras iterações 48
6.17 Quinto exemplo: Molécula e eixo medial. 49
6.18 Quinto exemplo: Movimento de contração nas três primeiras iterações. 49
6.19 Quinto exemplo: Movimento de contração na quarta, quinta e sétima iteração. 50
6.20 Quinto exemplo: Movimento de dilatação na segunda, terceira e quarta iteração. 50
6.21 Limitação: Movimento na quinta, décima e décima quinta iteração para $d = 1.01$. 51
6.22 Exemplo de estruturas não conectadas e eixo medial. 52
6.23 Contração: Movimento na primeira, segunda e sexta iteração com três estruturas para $d = 0.8$. 52
6.24 Dilatação: Movimento na primeira, segunda e terceira iteração para $d = 1.2$. 53
6.25 Dilatação: Movimento na quarta, quinta e sexta iteração para $d = 1.2$. 53
6.26 Dilatação: Movimento na sétima e oitava iteração para $d = 1.2$. 53

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

1
Introdução

A primeira etapa a ser dada em um trabalho de geometria discreta é o de definir os objetos a serem estudados. O eixo medial é uma descrição compacta da forma do objeto sólido que preserva várias de suas características, induzindo uma discretização natural do objeto como uma união de bolas.

O estudo de união de bolas possui aplicações em diversas áreas da Matemática. Em Geometria Computacional ela é usada, por exemplo, na reconstrução de curvas e superfícies (*crust*), vide (12) e (14). Uma das motivações para este trabalho é o grande uso dessa técnica em Química e Biologia Computacional, onde moléculas são freqüentemente modeladas como uma união de bolas em $\mathbb{R}^3$. Cada átomo é representado por uma bola cujo tamanho e posição espacial são determinados pelas forças de Van der Waals.

Essa dissertação estuda certas deformações de formas tridimensionais. A deformação da forma tridimensional é definida como uma mudança gradual de um objeto no espaço em outro. A maioria das transformações começam na procura de uma boa compatibilidade entre duas formas, vide (15). Neste trabalho escolhemos representar objetos usando união de bolas devido à sua simplicidade e pela topologia do bordo da união ser explicitamente definida por uma estrutura simples chamada α-shape.

Esta estrutura é atualizada a cada passo da deformação. É, então, essencial acharmos um algoritmo simples para que a implementação produza um sistema compacto de programas. Ao mesmo tempo, a eficiência é importante, pois diversas aplicações envolvem muitos pontos ou bolas. Devido a isso, usamos a biblioteca CGAL (*Computational Geometry Algorithms Library*), que procura combinar robustez, generalidade, eficiência e facilidade de uso, vide (1).

A contribuição principal deste trabalho é desenvolver uma base de algoritmos robustos para deformar uniões de bolas a partir do eixo medial. Esta base combina algoritmos e estruturas do CGAL com estruturas próprias à deformação. Este trabalho apresenta estas prévias com deformações simples: contração e expansão.

Essa dissertação possui 7 capítulos. No capítulo 2 são apresentados as

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

bases teóricas de Geometria Computacional necessários. O capítulo 3 contém propriedades do eixo medial de união de bolas que nos darão suporte para implementação do algoritmo que constrói o eixo medial da união. O capítulo 4 descreve a organização da biblioteca CGAL e a estrutura para implementação do eixo medial em C++. O capítulo 5 descreve o movimento proposto e o capítulo 6 apresenta alguns dos resultados obtidos. O capítulo 7 expõe conclusões e trabalhos futuros.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

2
Conceitos Preliminares

Neste capítulo introduziremos conceitos geométricos usados para descrever uma coleção finita de bolas, com o objetivo de desenvolver ferramentas e dar suporte para a realização deste trabalho.

2.1
Estruturas Fundamentais

Definição 2.1 (bola^d) *Seja $|x, z|$ a distância Euclidiana entre dois pontos $x, z \in \mathbb{R}^d$. Um subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$ é uma bola^d se existe um ponto $z \in \mathbb{R}^d$ e um real $r > 0$ tal que $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^d \ / \ |x, z| \leq r\}$. z é chamado de* centro *e r de* raio *de b.*

Uma d-esfera é o bordo de $(d+1)$-bola. Note que uma 0-bola é um ponto, uma 1-bola é um segmento de reta e 2-bola é um disco. Uma 0-esfera é um par de pontos, 1-esfera é um círculo e 2-esfera é o que chamamos, em $\mathbb{R}^3$, de esfera, vide (10) e Figura 2.1.

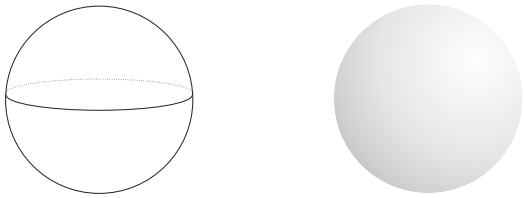

Figura 2.1: 2-Esfera (corpo oco)/ 3-Bola (corpo maciço).

Definição 2.2 (Simplexo) *Um p-simplexo é o fecho convexo de $p+1$ pontos $v_0, ..., v_p$, em $\mathbb{R}^d$, quando os vetores $v_1 - v_0, ..., v_p - v_0$ são linearmente independentes.*

Note que um 0-simplexo é um vértice, um 1-simplexo é uma aresta, um 2-simplexo é um triângulo, um 3-simplexo é um tetraedro e um 4-simplexo é um *pentachoron* (Figura 2.2).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

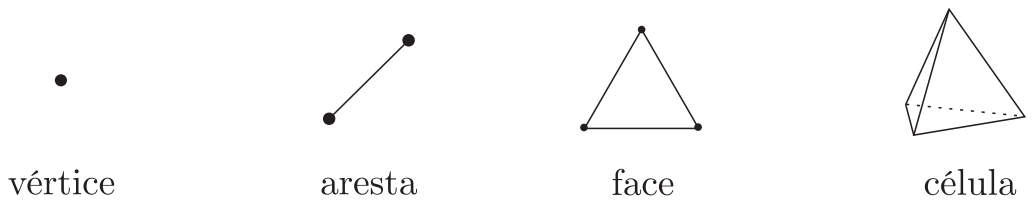

Figura 2.2: Exemplos de simplexos.

2.2 União de Bolas

Um objeto composto de bolas com, possivelmente, diferentes raios pode ser definido como uma *união de bolas*. O estudo de união de bolas possui aplicações em diversas áreas da Matemática. Em Geometria Computacional, por exemplo, muitas vezes é desejado que um objeto, em $\mathbb{R}^3$, seja aproximado por um número finito de bolas. Descreveremos abaixo alguns dos resultados que podem ser encontrados em (13) com mais detalhes.

Seja $\mathcal{B}$ um conjunto de bolas em $\mathbb{R}^d$ e seja $\mathcal{U}$ sua união, vide Figura 2.3. Assumiremos que essas bolas estão em posição geral: no plano isto significa que três centros não estarão em uma mesma reta e quatro não estarão no mesmo círculo; generalizando para o caso n-dimensional, $n+1$ centros não estarão no mesmo hiperplano e $n+2$ não poderão estar na mesma hiperesfera.

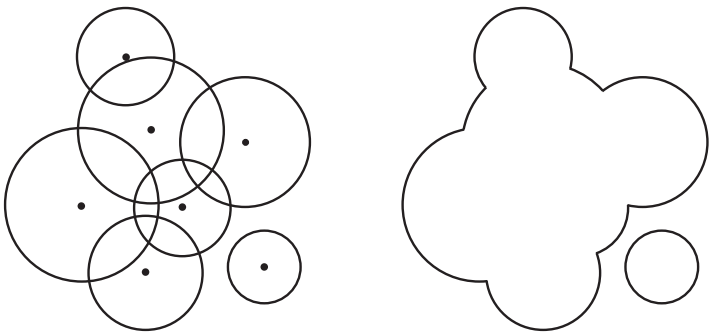

Figura 2.3: Conjunto de bolas $\mathcal{B}$ e união $\mathcal{U}$ em $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.3 (Escrita Mínima) *Seja $\mathcal{U}$ uma união de bolas. Dizemos que $\mathcal{U} = \bigcup B_i$, $1 \leq i \leq k$ é uma escrita mínima de $\mathcal{U}$ se $\mathcal{U}$ não pode ser escrita como a união de um subconjunto dos $B_i's$.*

É importante observar que a estrutura de uma união de bolas não é necessariamente mínima. Observe na Figura 2.4 que algumas bolas são supérfluas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

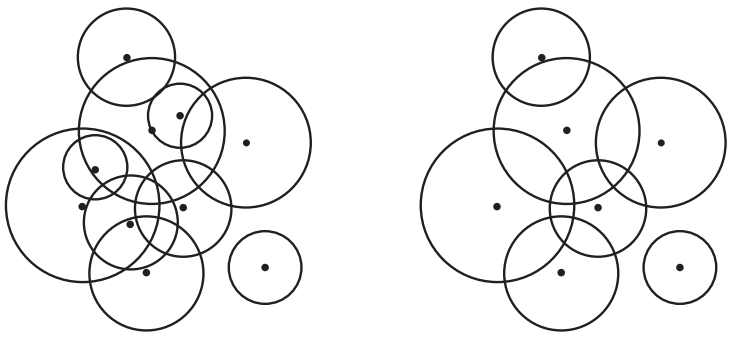

Figura 2.4: Escrita Não Mínima Escrita Mínima.

Definição 2.4 (k-face) *Uma k-face de $\mathcal{U}$ é um subconjunto da fronteira $\partial\mathcal{U}$ contido na interseção de um subconjunto de $\mathcal{B}$ de cardinalidade $(d-k)$.*

Definição 2.5 (Vértices) *Os vértices de $\mathcal{U}$ são os pontos formados pelas 0-faces de $\mathcal{U}$. Denominaremos $\mathcal{V}$ como o conjunto dos vértices de $\mathcal{U}$.*

A união de bolas e seus vértices são exibidos na Figura 2.5.

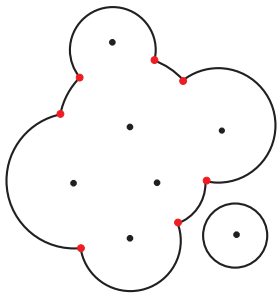

Figura 2.5: Vértices do bordo da união $\mathcal{U}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

2.3 Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi

Apresentaremos os conceitos da triangulação de Delaunay e do seu dual, o diagrama de Voronoi. O diagrama de Voronoi divide o espaço em células poliédricas convexas e cada uma delas é formada pelos pontos mais próximos a um bola $b \in \mathcal{B}$. Essas estruturas permitem calcular eficientemente a geometria, a topologia e o eixo medial de uma união de bolas $\mathcal{U}$. Para mais detalhes, vide (17).

2.3.1
Diagrama de Voronoi

Definimos *diagrama de Voronoi* de um ponto M_i em uma coleção finita $M \subseteq \mathbb{R}^d$ como o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ mais próximos a M_i do que de qualquer outro ponto de M:

$$Vor(M_i) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid |x, M_i| \leq |x, M_j|, \text{ para todo } j \neq i\right\}$$

onde $|,|$ denota a distância Euclidiana em $\mathbb{R}^d$. O conjunto de todos os $Vor(M_i)$'s formam uma partição de $\mathbb{R}^d$. Essa decomposição é chamada diagrama de Voronoi de M e é denotada por $Vor(M_i)$.

2.3.2
Triangulação de Delaunay

A triangulação de Delaunay é classicamente definida como dual do diagrama de Voronoi. Assumindo que o conjunto de pontos M está em posição geral, existe uma única triangulação do conjunto M construída da seguinte forma: se duas regiões de Voronoi $Vor(M_i)$ e $Vor(M_j)$ são vizinhas no diagrama de Voronoi, então essas regiões são conectadas por uma aresta, que definem os triângulos de Delaunay com vértices nos pontos M_i. A triangulação de Delaunay é um tipo especial de triangulação que possui propriedades interessantes.

Definição 2.6 (Triangulação de Delaunay) *Dado um conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^d$ em posição geral. A Triangulação de Delaunay $DT(S)$ consiste em:*

(i) Todos os d-simplexos σ_T, com $T \subseteq M$ tais que o círculo circunscrito a T não contém nenhum ponto de M e

(ii) Todos os k - simplexos ($k < d$) que são faces de algum outro simplexo em DT(S).

A triangulação de Delaunay, em $\mathbb{R}^3$, consiste de tetraedros de Delaunay e de seus triângulos, arestas e vértices incidentes. Na Figura 2.6 temos um exemplo de diagrama de Voronoi e diagrama de Delaunay, em $\mathbb{R}^2$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

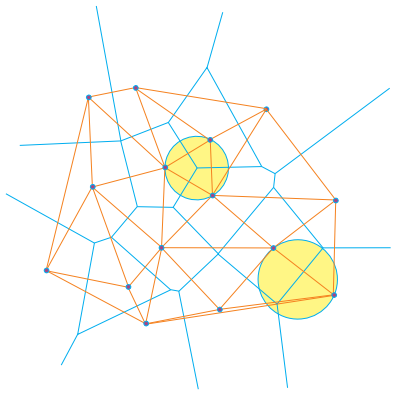

Figura 2.6: Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi.

2.4 Triangulação Regular e Diagrama de Potência

O *diagrama de Potência* $Pow(\mathcal{B})$ de um conjunto de bolas $\mathcal{B}$ é uma generalização do diagrama de Voronoi para pontos com peso, dividindo o espaço em células poliédricas convexas, onde cada uma delas divide o espaço em pontos "mais próximos" de um conjunto de bolas $b \in \mathcal{B}$. Para definições e propriedades detalhadas, pode-se citar (3), (10) e (17). Assim como o diagrama de Voronoi tem como dual a triangulação de Delaunay, $Pow(\mathcal{B})$ tem como dual a *triangulação regular*, consistindo de simplexos que conectam os centros de todo conjunto de bolas formando uma face de $Pow(\mathcal{B})$.

Restringindo a subdivisão do espaço definido por $Pow(\mathcal{B})$ à união $\mathcal{U}$ teremos uma subdivisão de $\mathcal{U}$, em $\mathbb{R}^3$, em células poliédricas. O subconjunto das faces do $Pow(\mathcal{B})$ na subdivisão de $\mathcal{U}$ corresponde ao subconjunto de simplexos que formam o complexo de $\mathcal{B}$. Este complexo (ou seja, a união de todos os simplexos) é denominado α-shape $\mathcal{S}$.

2.4.1 Diagrama de Potência

Potência (de um ponto a um ponto com peso)

Dado um ponto com peso $P = (p', w)$, onde $p' \in \mathbb{R}^d$ é dito posição de P, $w \in \mathbb{R}$ é dito peso de P e o raio $r = \sqrt{w}$. A *potência* π de um ponto $x \in \mathbb{R}^d$ a P é definido como

$$\pi_P(x) = |p', x|^2 - w$$

Definição 2.7 (Potência entre dois pontos com peso) *Seja $S \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Um conjunto de pontos com peso denotado por $p = (p', w_p)$, com $p' \in \mathbb{R}^d$ como*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

posição e $w_p \in \mathbb{R}$ *o peso. Para dois pontos com peso,* $p = (p', w_p)$ *e* $x = (x', w_x)$*, definimos*

$$\pi(p, x) = |p', x'|^2 - w_p - w_x$$

A Figura 2.7 mostra a potência entre dois pontos com peso.

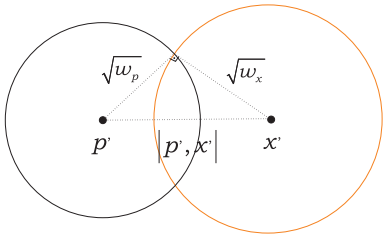

Figura 2.7: Potência de p em relação a x.

Definição 2.8 (Ortogonalidade) *Dois pontos com peso* p *e* x *são ditos ortogonais se* $\pi(p, x) = 0$.

Diagrama de Potência ou Diagrama de Laguerre

Dado um conjunto $S = p_1, ..., p_n$ de pontos com peso, o *diagrama de Potência* é a divisão do espaço em regiões convexas, onde o i-ésimo pedaço é do conjunto de pontos mais próximos de um vértice p_i, na distância de potência. Ou seja,

$$W_i = \{p \in \mathbb{R}^d \mid \pi(pi, p) \leq \pi(pj, p), \text{ para todo } j \neq i\}$$

O conjunto de todos os $W_i's$ formam uma partição de $\mathbb{R}^d$.

2.4.2 Triangulação Regular

A *triangulação regular* é dual ao diagrama de Potência, assim como a triangulação de Delaunay é dual ao diagrama de Voronoi. Os vértices da triangulação são conectados se, e somente se, as células de Voronoi com peso correspondentes tem uma face comum.

Definição 2.9 (Simplexo Regular) *Seja* T *um conjunto de três bolas. O simplexo* σ_T *é dito regular se existe uma bola* X *tal que* $\pi(X, p_i) = 0$, $\forall p_i \in T$ *e* $\pi(X, p_j) > 0$, $\forall p_j \in S - T$

Definição 2.10 (Triangulação Regular) *A coleção de todos os* d*-simplexos regulares define a Triangulação Regular de* S*, denotada por* $\mathcal{R}(\mathcal{S})$.

A Figura 2.8 nos mostra exemplos em 2D.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

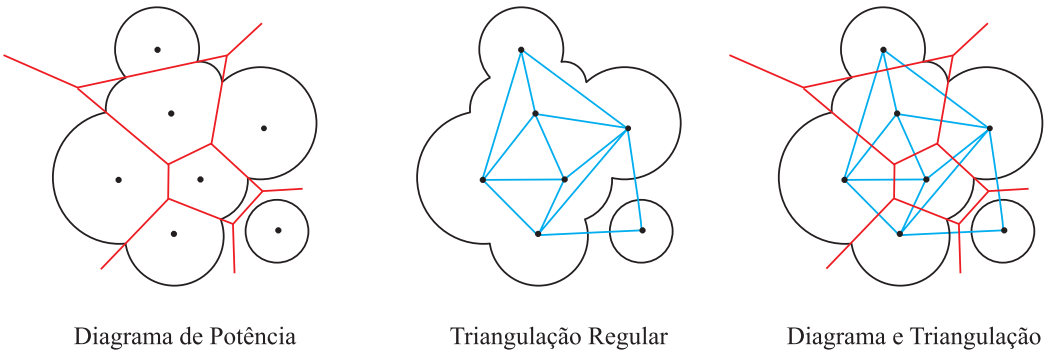

Figura 2.8: Triangulação Regular e Diagrama de Potência.

2.5 Alpha-Shape

Assuma que, dado um conjunto de pontos, deseja-se descrever a figura formada por esses pontos. Essa é uma noção vaga e teremos possivelmente várias interpretações, o α-shape $\mathcal{S}$ será uma delas. A Figura 2.9 ilustra o α-shape de um conjunto de pontos para diferentes valores de α. Para maiores detalhes sobre este assunto são sugeridos (8), (16), (11) e também (9).

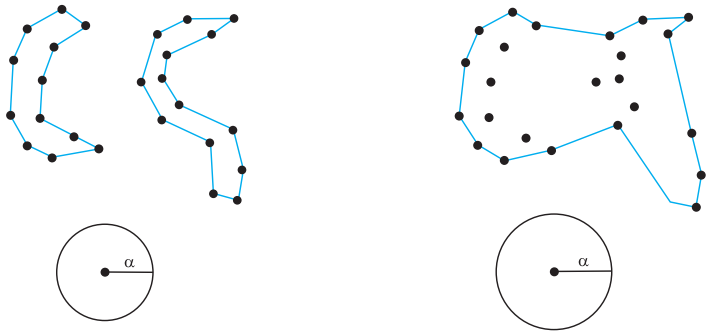

Figura 2.9: α-shapes para diferentes valores de α em $\mathbb{R}^2$.

2.5.1 Alpha-Shape de Pontos sem Peso

Para $\alpha > 0$, o α-shape de S é definido por conter uma aresta entre pontos $p, q \in S$ se existir um disco de raio α sem pontos de S em seu interior onde p e q estarem no bordo desse disco. A definição de α-shape é baseada nas triangulações de Delaunay e regular. O α-shape básico é sempre parte da triangulação de Delaunay e α-shape com peso é parte da triangulação regular.

Para α suficientemente grande, obtemos o fecho convexo de S. Quanto menor o valor de α, mais fina é a resolução da forma de $\mathcal{S}$. Note que α não

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

contém arestas se α é menor do que a distância dos pares mais próximos de S, vide Figura 2.10.

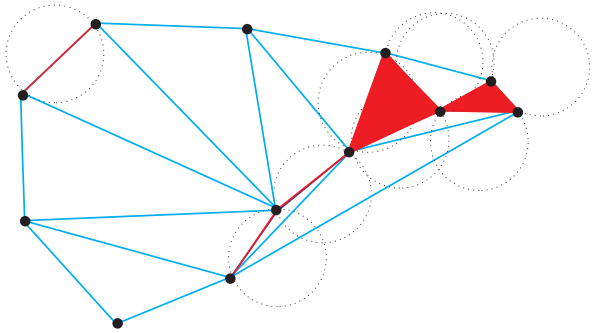

Figura 2.10: Triangulação de Delaunay e α-shape.

Definição 2.11 (Bola Vazia / Simplexo α-exposto) *Para $0 < \alpha < \infty$, seja α-bola uma bola aberta de raio α e S um conjunto de pontos. Uma α-bola b é vazia se $b \cap S = \emptyset$. Além disso, um k-simplexo σ_T é dito α-exposto se existe uma α-bola b vazia com $T = \partial b \cap S$.*

Observe que, para $d = 3$, ∂b é (a superfície de) uma esfera. A Figura 2.11 é um exemplo de simplexo α-exposto em $\mathbb{R}^2$.

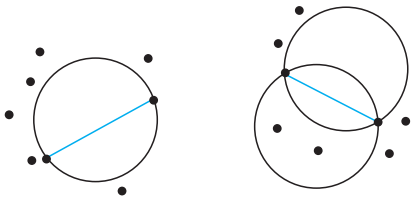

Figura 2.11: Aresta α-exposto/ Simplexo não α-exposto.

Definição 2.12 (α-complexo) *Para um conjunto de pontos $S \subset \mathbb{R}^d$ e $0 < \alpha < \infty$, o α-complexo $C_\alpha(S)$ é um subcomplexo simplicial de $DT(S)$. Um simplexo σ_T de $DT(S)$ está em C_α:*

(i) se o círculo de menor raio r que passa pelos vértices de σ_T não contém nenhum outro ponto de $S - T$ e é tal que $r < \alpha$ ou

(ii) se σ_T é face de outro simplexo em C_α.

Definição 2.13 (α-shape) *O α-shape $\mathcal{S}$ de um conjunto de pontos $S \subseteq \mathbb{R}^d$ consiste na realização geométrica do complexo simplicial C_α.*

Teorema 2.14 (Bordo $\partial\mathcal{S}$) *O bordo $\partial\mathcal{S}$ do α-shape $\mathcal{S}$ de um conjunto de pontos S consiste de todos os k-simplexos ($0 \leq k < d$) de S que são α-expostos.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

A Figura 2.12 mostra três formas do mesmo conjunto de pontos. Na esquerda a triangulação de Delaunay, no meio o bordo do α-shape e na direita o α-complexo.

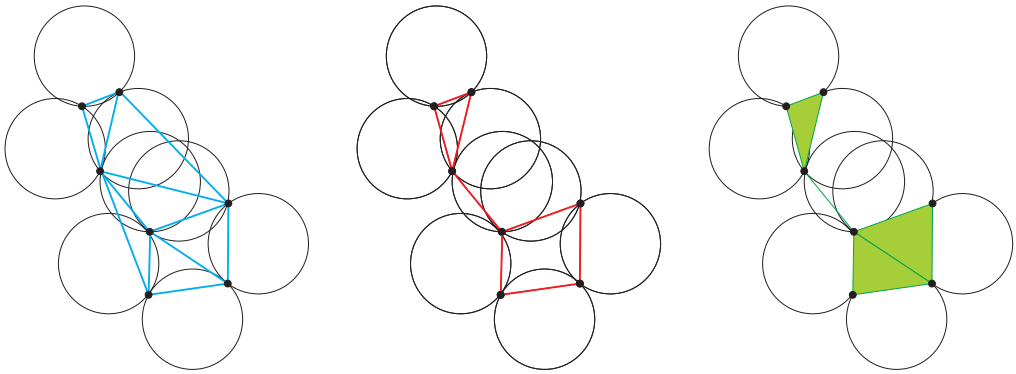

Figura 2.12: $DT(S)/\ \partial\mathcal{S}/\ C_\alpha$.

2.5.2
Alpha-Shape de Pontos com Peso

O conceito de α-shape também pode ser generalizado para um conjunto de pontos com peso. Como referência, sugerimos (9).

Definição 2.15 (Simplexo α-exposto) *Considere um conjunto S de pontos com peso. Um k-simplexo σ_T $(k < d)$ é dito α-exposto se existe um ponto com peso $X = (x, \alpha)$ tal que $\pi(p, X) = 0$, $\forall p \in T$ e $\pi(q, X) > 0$, $\forall q \in S - T$.*

Definição 2.16 (α-complexo) *Para um conjunto de pontos $S \subset \mathbb{R}^d$ e $0 \leq \alpha \leq \infty$, o α-complexo $C_\alpha(S)$ de S é um subcomplexo simplicial de $\mathcal{R}(\mathcal{S})$.*

Seja σ_T um simplexo de $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ e $X = (x, w)$ o círculo de menor peso ortogonal aos círculos cujos centros são os vértices de σ_T. σ_T está em está em $\mathcal{C}_\alpha(\mathcal{S})$ se:

(i) $w^2 < \alpha$ e $\pi(p, X) > 0$, $\forall S - T$ ou

(ii) σ_T é face de outro simplexo em $\mathcal{R}(\mathcal{S})$.

Definição 2.17 (α-shape) *O α-shape S_α de um conjunto de pontos com peso S consiste na realização geométrica do complexo simplicial C_α.*

Teorema 2.18 (Bordo $\partial\mathcal{S}$) *O bordo $\partial\mathcal{S}$ do α-shape $\mathcal{S}$ de um conjunto de pontos com peso S consiste de todos os k-simplexos $(0 \leq k < d)$ de S que são α-expostos.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Definição 2.19 (Face Singular/Componente Regular) *Uma face no bordo $\partial\mathcal{S}$ do α-shape é singular se não é uma face de um simplexo d-dimensional no α-complexo $C_\alpha(S)$. O conjunto das componentes conexas que ficam se removermos as faces singulares do α-shape $\mathcal{S}$ são denominadas componentes regulares.*

Em $\mathbb{R}^3$, uma componente regular $\mathcal{C}$ do α-shape $\mathcal{S}$ é um sólido que não precisa, necessariamente, ter todas as arestas congruentes. Note que as componentes regulares são as componentes de dimensão mais alta do α-shape.

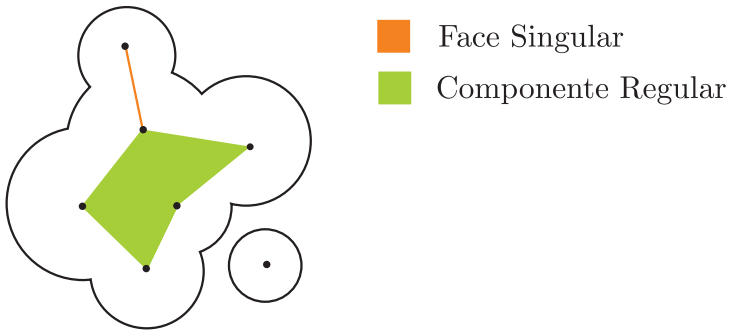

Figura 2.13: Faces Singulares e Componentes Regulares de $\mathcal{S}$.

2.5.3
0-Shape

Suponha que a união de bolas $\mathcal{U}$ está na sua escrita mínima. Um simplexo σ_T da triangulação regular está no 0-shape se, e somente se, as bolas correspondentes se interceptam.

De fato, se σ_T está no 0-shape, existe um ponto X que define a mesma potência negativa em relação às bolas cujos centros determinam σ_T. Assim, X é interior à todas as bolas que definem σ_T, o que significa que X é um ponto comum às bolas que definem σ_T. Reciprocamente, se as bolas cujos centros definem σ_T se interceptam, o ponto X que realiza a mesma potência em relação às bolas de σ_T deve estar no interior de todas as bolas correspondentes. Assim, a potência de X em relação às bolas é negativa e o simplexo σ_T está no 0-shape. A Figura 2.14 é um exemplo de 0-shape.

Poderíamos fazer o cálculo das interseções externas $\mathcal{V}$ sem utilisar o 0-shape, porém ficaria computacionalmente mais lento. De fato, essas interseções poderiam ser calculadas intersectando as bolas duas a duas, e depois testar para cada interseção de duas bolas se ela esta contida numa terceira bola. Isso seria um algoritmo de ordem de complexidade pelo menos $O(n^2)$, onde n é o número de bolas da união. O 0-shape por sua parte tem complexidade média $O(n \cdot \log(n))$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

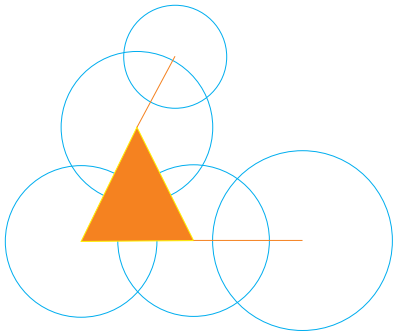

Figura 2.14: 0-shape.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

3
Eixo Medial

O eixo medial de uma figura nos dá uma representação compacta de suas características e sua conectividade. O eixo medial é, às vezes, chamado de esqueleto, pois a simetria do esqueleto de um ser vivo é parecida com o eixo medial da forma do membros. A complexidade do eixo medial está relacionada com a complexidade do objeto. Além disso, existe uma série de relações entre o eixo medial e seu objeto. Como referência, podemos citar (3) e (13).

Definição 3.1 (Eixo Medial) *O eixo medial interior (ou simplesmente eixo medial) $\mathcal{X}$ de um objeto $\mathcal{O}$ é o fecho do conjunto de pontos $m \in \mathcal{O}$ tal que m é centro de bola tangente ao $\partial\mathcal{O}$ em pelo menos dois pontos.*

O eixo medial é, então, o conjunto dos centros de bolas maximais contidas em $\mathcal{O}$ que tangenciam o $\partial\mathcal{O}$ em pelo menos dois pontos. Isso o torna particularmente adaptado para representar uniões de bolas.

3.1
Eixo Medial de uma União de Bolas

Considere uma bola b contida em um objeto $\mathcal{O}$ e tocando $\partial\mathcal{O}$ em pelo menos dois pontos. A definição de eixo medial implica que o centro p de b é um ponto no eixo medial de $\mathcal{O}$, como, por exemplo, a curva fechada da Figura 3.1.

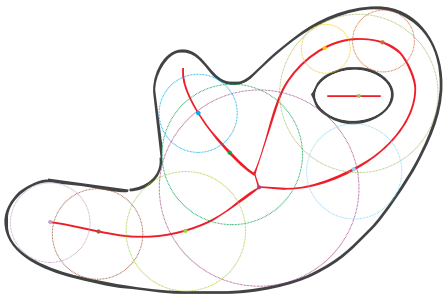

Figura 3.1: Bolas e o Eixo Medial em $\mathbb{R}^2$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Teorema 3.2 ((13), Teo 1) *Seja $\mathcal{U}$ uma união de bolas, seja $\mathcal{V}$ seus vértices e $\mathcal{S}$ o 0-shape, então o eixo medial $\mathcal{X}$ de $\mathcal{U}$ consiste de:*

(i) faces singulares de $\mathcal{S}$, e

(ii) subconjunto do diagrama de Voronoi $Vor(\mathcal{V})$ tais que o ponto mais próximo do $\partial\mathcal{U}$ é um vértice em $\mathcal{V}$.

Observe a Figura 3.2.

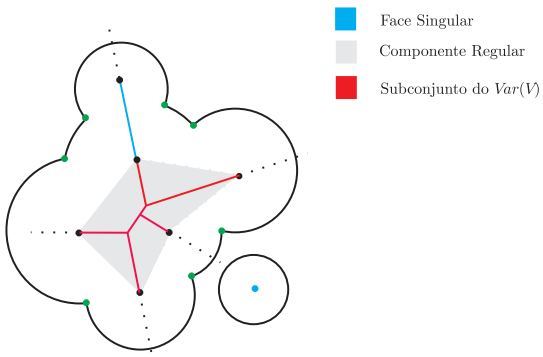

Figura 3.2: Eixo Medial de uma união de bolas.

Observação: Identificar algoritmicamente os elementos que satisfazem a condição (i) é fácil, mas não é óbvio fazê-lo para a condição (ii). Primeiro é preciso localizar os vértices, arestas e faces do $Vor(\mathcal{V})$ e determinar quais deles, ou quais partes, estão mais próximos de um vértice de $\mathcal{V}$ do que de qualquer outro ponto no $\partial\mathcal{U}$. Combinatorialmente, isso tem algumas dificuldades numéricas, motivando, assim, a caracterização combinatorial do subconjunto do $Vor(\mathcal{V})$ pertencente ao eixo medial, que será visto adiante.

3.2 Caracterização Combinatorial

O teorema a seguir dá a caracterização do eixo medial de uma união de bolas $\mathcal{U}$.

Teorema 3.3 ((13), Teo 2) *Seja $\mathcal{U}$ uma união de bolas em $\mathbb{R}^d$, seja $\mathcal{V}$ os vértices de $\mathcal{U}$ e seja $\mathcal{S}$ o 0-shape de $\mathcal{U}$. O eixo medial $\mathcal{X}$ de $\mathcal{U}$ consiste de:*

(i) faces singulares de $\mathcal{S}$, e

(ii) o subconjunto do diagrama de Voronoi $Vor(\mathcal{V})$ que intersecta as componentes regulares de $\mathcal{S}$.

Para provar o Teorema 3.3 algumas propriedades do 0-shape serão usadas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Observação 3.4 ((13)) *Note que os pontos $\mathcal{U} - \mathcal{S}$ não pertencem ao eixo medial de $\mathcal{U}$.*

Observação 3.5 ((13), Obs 3) *Para cada ponto $x \in \mathcal{U} - \mathcal{S}$, existe um ponto $u \in \partial\mathcal{U}$ tal que para todo $v \in \partial\mathcal{U}$, $d(u, x) < d(v, x)$.*

Para ilustrar as observações 3.4 e 3.5 vide Figura 3.3.

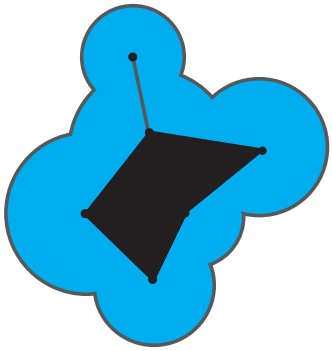

Figura 3.3: $\mathcal{U} - \mathcal{S}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Observação 3.6 ((13), Obs 4) *Se $y \in \sigma_T$, onde σ_T é um simplexo em $\partial\mathcal{S}$, então y é o centro de uma bola^d b_y com face dual $s_T \subseteq \delta b_y \subseteq \mathcal{U}$. Vide Figura 3.4.*

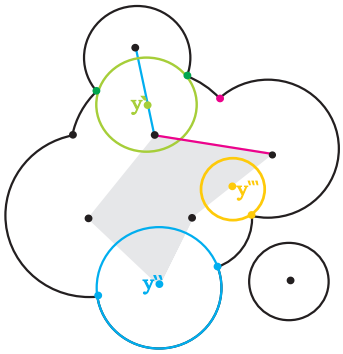

Figura 3.4: Simplexos em $\mathcal{S}$ e duais no $\partial\mathcal{U}$.

Observação 3.7 ((13), Obs 5) *Uma $(d-1)$-face singular em $\mathcal{S}$ é dual a 0-face contendo dois vértices de $\mathcal{U}$. Uma $(d-1)$-face que pertence a uma componente regular de $\partial\mathcal{S}$ é dual a um único vértice de $\mathcal{U}$.*

Em duas dimensões, uma aresta singular de $\mathcal{S}$ é dual a uma 0-componente do bordo de $\mathcal{U}$ contendo dois pontos do conjunto de vértices $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Um 1-simplexo que pertence a fronteira $\partial\mathcal{C}$ de uma componente regular $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ é dual

a uma 0-componente do bordo de $\mathcal{U}$ contendo um único ponto do conjunto de vértices $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Um 0-simplexo em $\partial\mathcal{C}$ pode ser dual a mais de uma 1-componente do bordo de $\mathcal{U}$.

Lema 3.8 ((13), Lema 6) *Qualquer k-simplexo de $\partial\mathcal{S}$, para $0 \leq k < (d-1)$ pertence ao eixo medial $\mathcal{X}$ de $\mathcal{U}$.*

Prova do Lema: Considere a k-face σ_T de $\mathcal{S}$, com $k < (d-1)$. A dimensão s_T, a face dual σ_T, é maior do que zero. Pela Observação 3.6, qualquer ponto x contido em σ_T é o centro de uma bola b com $s_T \subseteq \partial b_y \subseteq \mathcal{U}$. Desde que a dimensão de s_T seja pelo menos um, ∂b contém mais de um ponto do $\delta\mathcal{U}$ e x é um ponto do eixo medial. □

Em $\mathbb{R}^2$, $0 \leq k < 1$, ou seja, $k = 0$. A 0-face σ_T está em $\mathcal{S}$, logo será um ponto e sua face dual s_T no $\partial\mathcal{S}$ tem dimensão maior do que 0. Daí, pela Observação 3.6, teremos mais de um ponto mais próximo no $\partial\mathcal{U}$, ou seja, será um ponto do eixo medial.

Lema 3.9 ((13), Lema 7) *Qualquer ponto pertencente à face singular de $\mathcal{S}$ pertence ao eixo medial $\mathcal{X}$ de $\mathcal{U}$.*

Prova do Lema: Considere σ_T de dimensão $(d-1)$ e um ponto x contido neste simplexo. Pela Observação 3.7, a face dual s_T consiste de dois vértices que, pela Observação 3.6, serão mais próximos de x no $\partial\mathcal{U}$. Logo, x pertence ao ao eixo medial. □

O Lema 3.8 mostrou que, para $k < (d-1)$, qualquer ponto na k-face no bordo da componente regular $\mathcal{C}$ pertence ao eixo medial. Agora será considerado o interior de $\mathcal{C}$. Começando, será mostrado que, para qualquer ponto em $\mathcal{C}$, os pontos mais próximos no $\partial\mathcal{U}$ é um vértice de $\mathcal{U}$.

Lema 3.10 ((13), Lema 8) *Seja $\mathcal{C}$ uma componente regular de $\mathcal{S}$. Então, para qualquer $x \in \mathcal{C}$*

(i) x tem exatamente um ponto mais próximo p no $\partial\mathcal{U}$ e p é vértice de $\mathcal{U}$, ou

(ii) x tem mais de um ponto mais próximo de $\partial\mathcal{U}$, pelo menos dois deles são vértices de $\mathcal{U}$.

Alguns pontos na componente regular $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ e respectivos pontos mais próximos no bordo de $\mathcal{U}$ são mostrados na Figura 3.5.

Agora é possível provar o Teorema 3.3, que caracteriza o eixo medial $\mathcal{X}$ de $\mathcal{U}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

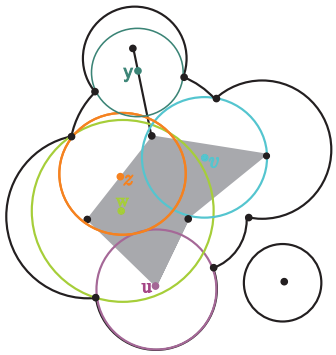

Figura 3.5: Pontos na componente regular $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ e respectivos pontos mais próximos em $\mathcal{U}$.

Prova do Teorema: Primeiro será provado que qualquer ponto da face singular de $\mathcal{S}$ ou pertence à componente regular de $\mathcal{S}$ e ao $Vor(\mathcal{V})$ é um ponto do eixo medial. Em seguida, será demonstrado que qualquer ponto do eixo medial pertence à face singular ou à componente regular de $\mathcal{S}$ e ao $Vor(\mathcal{V})$.

Pelo Lema 3.9, qualquer ponto da face singular de $\mathcal{S}$ pertence ao eixo medial. Com isso mostramos (i). Qualquer ponto x na componente regular pertencente ao $Vor(\mathcal{V})$ tem mais de um ponto mais próximo do $\partial\mathcal{U}$. O Lema 3.10 implica que não existe outro ponto no $\partial\mathcal{U}$ mais próximo de x e, então, x tem que pertencer ao eixo medial $\mathcal{U}$.

Agora considere um ponto m no eixo medial $\mathcal{U}$; m não pode ser um ponto em $\mathcal{U}-\mathcal{S}$, pela observação 3.5. O fato de m pertencer à uma face singular já foi feito. Caso contrário, m pertence à componente regular e precisa ter mais de um ponto mais próximo de $\mathcal{V}$. Assim, pelo Lema 3.10, m pertence ao $Vor(\mathcal{V})$. $\square$

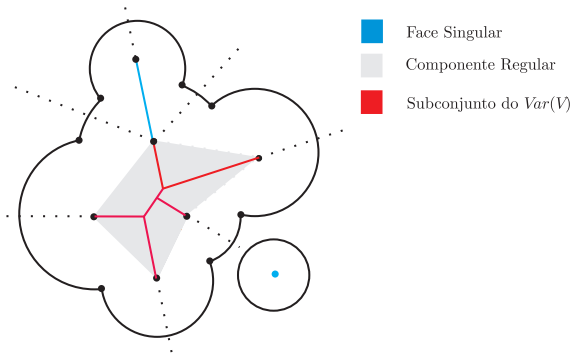

Figura 3.6: Faces singulares, componentes regulares e arestas do $Vor(\mathcal{V})$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

3.3 Crossing Edges e Arestas do Alpha Forma

Pelos Teoremas 3.2 e 3.3 é sabido que parte do eixo medial consiste do subconjunto do diagrama de Voronoi que está contido na componente regular $\mathcal{C}$. Essa seção, mostra que só existem dois modos nos quais os simplexos do $\partial\mathcal{C}$ interagem com $Vor(\mathcal{V})$. Essa diferenciação evitará instabilidade numérica na construção do eixo medial.

Lema 3.11 ((13), Lema 9) *O interior de qualquer $(d-1)$-simplexo $\sigma \in \partial\mathcal{C}$ de vértice dual v está no interior das células de Voronoi.*

Lema 3.12 ((13), Lema 10) *Cada k-simplexo $\sigma_T \in \partial\mathcal{C}$ para $k < (d-1)$ é parte da face do $Vor(\mathcal{V})$ de dimensão $\leq (d-1)$.*

Teorema 3.13 ((13), Teo 11) *Seja σ um $(d-1)$-simplexo no bordo de $\partial\mathcal{C}$ e seja $v \in \mathcal{V}$ seu vértice dual. A face σ divide a célula de Voronoi $Vor(v)$ de v em duas partes, uma dentro e outra fora de $\mathcal{C}$. Vide Figura 3.7.*

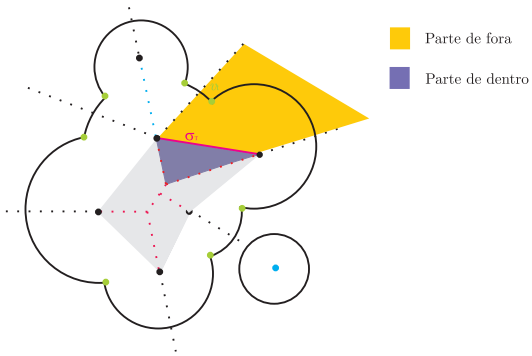

Figura 3.7: Simplexo σ particiona a célula de Voronoi de v.

O próximo Lema implicará que a interseção das arestas do $Vor(\mathcal{V})$ com $\partial\mathcal{C}$ recaem em duas categorias.

Lema 3.14 ((13), Lema 12) *Seja e uma aresta do $Vor(\mathcal{V})$ que intersecta $\partial\mathcal{C}$, e seja σ uma face do $\partial\mathcal{C}$ de menor dimensão que contém a interseção de e e $\partial\mathcal{C}$. Então*

(i) σ é um vértice de $\mathcal{C}$, ou

(ii) σ é idêntico a e.

Quando e intersecta $\partial\mathcal{C}$ em um vértice chamamos e de ***aresta cortante*** (item *i*) e quando e é a própria aresta do $\partial\mathcal{C}$ chamamos e de **aresta do 0-shape** (item *ii*).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

A Figura 3.8 dá um exemplo de união de bolas induzindo uma aresta do 0-shape: a aresta longa que une os centros das duas bolas maiores no 0-shape é também aresta do $Vor(\mathcal{V})$, eqüidistante dos quatro vértices na interseção das duas maiores bolas.

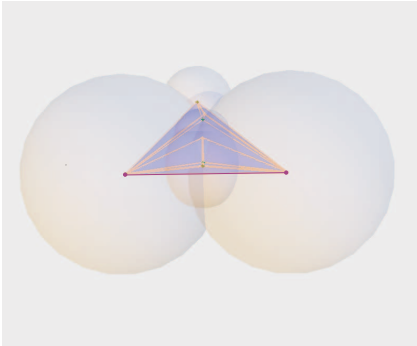

Figura 3.8: Arestas do 0-shape.

Os próximos dois Lemas mostram como as *crossing egde* e arestas do 0-shape, respectivamente, podem ser identificadas, examinando o conjunto de bolas que induzem características do $Vor(\mathcal{V})$ e de $\mathcal{C}$.

Lema 3.15 ((13), Lema 13) *Seja e_v uma aresta do $Vor(\mathcal{V})$ induzida pelo conjunto $V \subseteq \mathcal{V}$. Seja σ um vértice de $\partial\mathcal{C}$, que é centro da bola de entrada b. A aresta e_v passa por σ se, e somente se, todos os vértices em V estão no bordo de b.*

Lema 3.16 ((13), Lema 14) *Seja e_v uma aresta do $Vor(\mathcal{V})$ induzida pelo conjunto $V \subseteq \mathcal{V}$. Seja σ uma aresta no $\partial\mathcal{C}$, que conecta os centro das bolas b_1, b_2. A aresta e_v é idêntica à σ se, e somente se, os vértices em V estão na interseção de $b_1 \cap b_2$.*

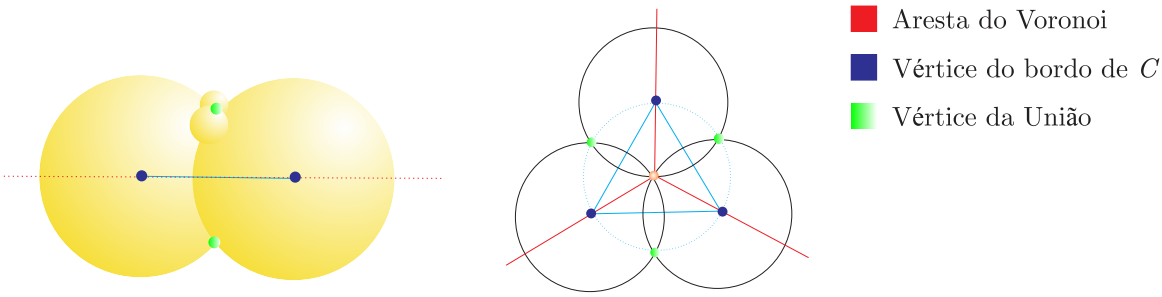

Figura 3.9: Aresta do 0-shape e *crossing edge*.

Observe que, em duas dimensões, não teremos aresta de Voronoi como Voronoi como aresta do $\partial\mathcal{C}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Usando os lemas 3.15 e 3.16 identificamos as *crossing edges* e as arestas do 0-shape. Para cada aresta e_v no $Vor(\mathcal{V})$, calcularemos a interseção do conjunto de famílias:

$$\mathcal{B} = \bigcap \{T \mid v_T \in e_v\}$$

Se $\mathcal{B}$ consiste de uma única bola b, e_v é uma *crossing edge*. Se $\mathcal{B}$ contém um par de b_1, b_2, e_v é uma aresta do 0-shape.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

4
Implementação

4.1
Biblioteca CGAL

CGAL(Computational Geometry Algorithms Library) é uma biblioteca de estruturas de dados e algoritmos geométricos confiáveis e robustos, escrita em C++ e que vem sendo desenvolvida por nove instituições: Instituto Max Plank (Alemanha), INRIA Sophia-Antipolis (França), Universidade de Tel-Aviv (Israel), GeometryFactory (França), ETH Zurich (Suíça), Universidade de Utrecht (Países Baixos), Universidade Livre de Berlim (Alemanha), Forth (Grécia), SciSoft (Argentina). Seu principal objetivo é proporcionar implementações de objetos e algoritmos geométricos e, com isso, facilitar o desenvolvimento de aplicações geométricas mais complexas, através da reutilização de seus componentes.

CGAL foi desenvolvida por diferentes grupos de usuários e é usada para diversos propósitos. Alguns pesquisadores trabalham diretamente com geometria computacional e utilizam a biblioteca para desenvolver e testar seus próprios algoritmos, enquanto pesquisadores de outras áreas usam recursos de geometria computacional em suas aplicações. Há ainda o uso comercial do CGAL, no qual empresas utilizam a biblioteca para o desenvolvimento de aplicações industriais. Os grupos de usuários de CGAL são, portanto, um pouco heterogêneos e, devido a isso, demandam diferentes recursos. Para suprir essa demanda, CGAL procura combinar robustez, generalidade, eficiência e facilidade de uso, apesar de seu uso não ser tão trivial. Como referência, indicamos (1).

Nossa escolha pelo uso do CGAL foi, principalmente, pelo fato de:

- oferecer tipos de números especiais, com maior precisão, evitando, assim, erros de arredondamento;
- apresentar ao usuário mais de uma opção de algoritmo para resolver determinado problema. Cabe ao usuário decidir qual é o mais apropriado para sua aplicação, aumentando a eficiência do algoritmo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

– o uso de *typedefs* da linguagem C++ para evitar contato direto do usuário com os *templates*, que muitas vezes são complicados para usuários menos experientes.

– acessar diversos algoritmos comprovados (como 0-shape e diagrama de Voronoi) numa mesma estrutura.

4.1.1 Descrição da Biblioteca CGAL

Para obter flexibilidade e eficiência, CGAL está divida em três principais camadas, vide Figura 4.1 e como referência indicamos (1).

1. Os núcleos (*kernels*), onde estão implementadas as representações dos números nas coordenadas cartesianas e homogêneas e alguns tipos de números com maior precisão em relação aos tipos básicos de C++. O núcleo contém também objetos geométricos primitivos (como, por exemplo, pontos, retas, semi-retas e círculos) e predicados (operam objetos e retornam valores booleanos ou tipos enumerados, como a comparação de resultados - igual, menor ou maior - e testes de orientação - colinear, lado esquerdo ou lado direito). CGAL fornece a implementação do núcleo em $2D$ e $3D$, para objetos em dimensão arbitrária e para objetos curvos em $2D$.

2. A biblioteca básica, onde estão implementados algoritmos geométricos básicos e algumas estruturas de dados, como

   - algoritmos para determinar o fecho convexo de um conjunto de pontos.

   - operações com polígonos, como o cálculo da área, sua orientação, verificação de sua simplicidade ou convexidade e etc.

   - triangulações, 0-shape, etc.

3. A última camada da biblioteca consiste de facilidades de suporte não geométricos, assim como fornecimento de tipos de números, *handles* ("ponteiros inteligentes"), *circulators*, etc.

Essas três partes do CGAL interagem para qualquer algoritmo da biblioteca, resultando numa biblioteca extremamente flexível. Como dito anteriormente, cabe ao usuário determinar os recursos necessários para sua aplicação. Além disso, se um predicado e/ou algoritmo geométrico do núcleo não satisfazem as necessidades de uma aplicação, o usuário pode implementar seus próprios predicados e objetos geométricos. Porém, essa flexibilidade resulta também numa dificuldade para adaptar o CGAL a um problema específico.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Na CGAL existem as *traits classes*, onde estão implementados os predicados e objetos geométricos básicos. Todo algoritmo da biblioteca básica é parametrizada por uma *traits class* e, por *default*, essa *traits class* é o núcleo. O usuário pode definir sua própria *traits class* e utilizá-la com os algoritmos da biblioteca básica, desde que ela obedeça aos requisitos definidos por tais algoritmos. A utilização de programação genérica proporciona aos usuários de CGAL grande flexibilidade, tornando seu uso bastante atraente.

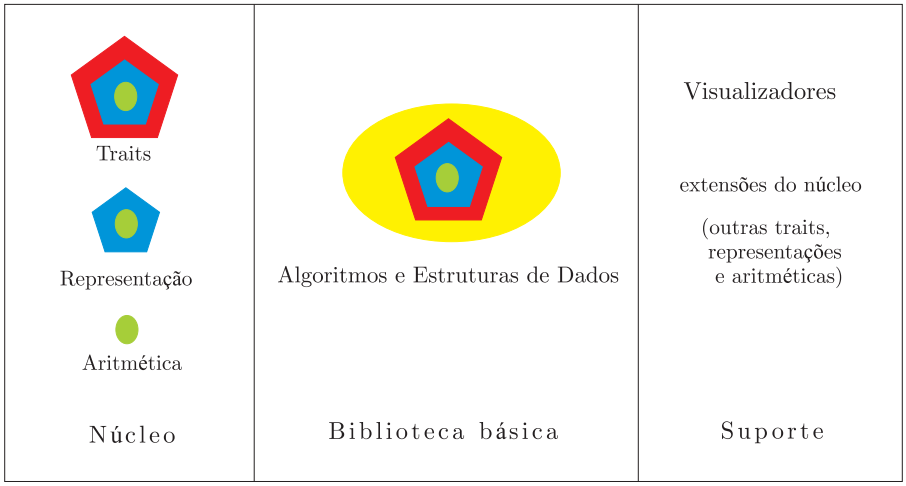

Figura 4.1: Estrutura do CGAL.

Algumas rotinas do nosso programa utilizaram a biblioteca CGAL.

4.2 Implementação do Eixo Medial

O algoritmo para extração do eixo medial de uma união de bolas em $\mathbb{R}^3$ foi realizado a partir de (13) usando a biblioteca CGAL. A idéia do algoritmo é marcar os vértices do $Vor(\mathcal{V})$ como pertencentes ou exteriores ao 0-shape $\mathcal{S}$. Vértices no bordo de $\mathcal{S}$ são marcados como pertencentes a $\mathcal{S}$. A face do $Vor(\mathcal{V})$ onde todos os vértices pertencem a $\mathcal{C}$ e as faces singulares do 0-shape $\mathcal{S}$ consistirão do eixo medial.

Seguindo os resultados enunciados no capítulo 3, as principais etapas da construção do eixo medial estão programadas no algoritmo 1. Como visto no capítulo 2, o cálculo das interseções externas tem a complexidade do cálculo do 0-shape, ou seja $O(n \cdot \log(n))$ em média. O diagrama de Voronoi tem a mesma complexidade, mas com relação ao número de interseções externas. Este número depende a priori linearmente do número de bolas. Os testes de interseção entre o diagrama de Voronoi e a componente regular do 0-shape pode ser implementado com complexidade constante para cada aresta do Voronoi.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Portanto, o algoritmo inteiro de cálculo do eixo medial tem complexidade $O(n \cdot \log(n))$ em média.

Algoritmo 1 Eixo Medial

1: Entre com o conjunto de bolas $\mathcal{B}$.
2: Calcule o 0-shape $\mathcal{S}$ do conjunto de bolas $\mathcal{B}$.
3: Adicione todas as arestas (singulares e regulares) de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{X}$.
4: Adicione todos os triângulos singulares de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{X}$.
5: Calcule os vértices $\mathcal{V}$ da união $\mathcal{U}$ como os duais dos triângulos do bordo (faces dos tetraedros) de $\mathcal{S}$.
6: Calcule o diagrama de Voronoi $Vor(\mathcal{V})$.
7: Determine todas as interseções do diagrama de Voronoi $Vor(\mathcal{V})$ com os triângulos regulares (tetraedros) do 0-shape $\mathcal{S}$.
8: Adicione a $\mathcal{X}$ todas as faces do diagrama de Voronoi de $\mathcal{V}$ no qual todos os vértices pertencem a $\mathcal{S}$.
9: Retorne $\mathcal{X}$.

4.2.1
Classe

As classes utilizadas foram a **class Point**, definida por três coordenadas e o peso (raio da bola), a **class Triangle**, definida por três vértices e a **class Polygon**.

4.2.2
Implementação do Alpha-Shape

Rotina para a criação do objeto 0-shape usando a biblioteca CGAL está descrita no algoritmo 2.

Algoritmo 2 0-shape

1: Entre com o conjunto de bolas $\mathcal{B}$.
2: Construa uma lista de pontos com peso.
3: Itere sobre as bolas e coloque na lista de pontos.
4: Aloque, utilizando CGAL, o α-shape no modo 'GENERAL' usando os pontos com peso da lista e faça α=0.
5: Retorne $*\&as$ (ponteiro para referenciação dos *handles*), onde será alocada a estrutura do 0-shape.

4.2.3
Rotina para encontrar os vértices $\mathcal{V}$ da união $\mathcal{U}$

A idéia do rotina é encontrar o circumcentro das faces da componente regular do 0-shape $\mathcal{S}$, traçar a normal passando pelo circumcentro e calcular a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

interseção com a bola do bordo mais próxima. Os vértices $\mathcal{V}$ que encontraremos são duais aos triângulos do $\partial\mathcal{C}$.

4.2.4
Rotina do diagrama de Voronoi

Rotina para desenhar o diagrama de Voronoi como dual da triangulação de Delaunay usando a biblioteca CGAL está descrita no algoritmo 3. Os itens 2 e 3 constroem as arestas do diagrama de Voronoi, enquanto os itens 4, 5 constroem os polígonos.

Algoritmo 3 Diagrama de Voronoi

1: Itere sobre as faces de Delaunay.
2: Crie o objeto dual e adicione o dual da face.
3: Retorne o diagrama de Voronoi.

Observe que o dual da face pode ser raio, segmento ou ponto (se for infinito).

4.2.5
Interseção do diagrama de Voronoi

A rotina que determina a interseção do diagrama de Voronoi com as partes regulares do 0-shape está descrita no algoritmo 4.

Algoritmo 4 Parte regular do Alpha-Shape

1: Percorra todas as arestas de Delaunay, cujos vértices são as interseções.
2: Crie o polígono dual da aresta.
3: Classifique o polígono como interior ou exterior.
4: Retorne o polígono que corresponde ao eixo medial.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

5
Movimentos baseados no Eixo Medial

O eixo medial representa as características da união de bolas. Usando este fato, podemos simplificar a união diretamente a partir do eixo medial. Assim, buscamos deformações definidas por movimentos locais ao longo do eixo medial, seguindo (4, 5, 7) no caso bidimensional. Além disso, alguns dos eventuais defeitos do movimento (instabilidade numérica, mudanças topológicas) podem ser corrigidos diretamente no eixo medial.

Para calcular o movimento, guardamos o eixo medial na forma de grafo, cujos nós são os vértices do eixo medial e as arestas ligam vértices adjacentes. Os nós podem (ou não) corresponder aos centros das bolas originais e/ou serão pontos criados pelo eixo medial. Na estrutura, dois vértices só serão adjacentes quando suas respectivas bolas tiverem interseção.

5.1
Motivação

Um dos modelos mais simples para a representação de moléculas consiste em representar um átomo por uma bola cujo raio depende do tipo de átomo. Este modelo é chamado de Modelo de Van der Waals. Por esta razão, em Biomatemática o estudo computacional de união de bolas é bastante importante para entender interações moleculares e desenvolver remédios. Esperamos que os movimentos propostos sejam úteis em Biologia para a simulação de encaixes de moléculas, pois trabalhar com uma molécula não simplificada é inviável computacionalmente.

Muitas das funções de proteínas, por exemplo, estão relacionadas com as interações de uma série de moléculas, responsáveis pelo metabolismo e estrutura dos organismos vivos. Entender como os processos biológicos ocorrem no nível celular implica entender o papel funcional das diversas proteínas envolvidas nesses processos. A grande maioria das reações metabólicas ocorre através de encaixes do tipo chave-fechadura entre moléculas protéicas e, por esse motivo, a função das proteínas está geralmente relacionada à sua conformação tridimensional. Assim, outra aplicação possível é a análise de formas, principalmente para visualização e armazenamento de objetos, criando

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

uma hierarquia de simplificações de bolas. Para mais informações sobre o assunto, indicamos a refêrência (6).

Essa dissertação, no entanto, possui caráter investigativo, visando apenas iniciar o estudo de evolução de bolas no espaço tridimensional.

5.2 Grafo de suporte

Os movimentos realizados caracterizaram-se pela variação do raio e da posição das bolas. Temos três tipos de objetos:

(i) As bolas originais que são vértices do eixo medial.

(ii) As bolas originais que não são vértices do eixo medial.

(iii) Os vértices do eixo medial que não são bolas originais.

Como os nós do grafo são os vértices do eixo medial, todo o cálculo do movimento pode ser feito no grafo. Como os objetos do tipo iii, isto é, os vértices do eixo medial que não são bolas originais, são derivados das bolas originais, nada precisa ser feito para eles. Porém, eles contribuem ao movimento, e podemos associá-los a um raio, definido como o raio da bola inscrita na união de bolas. Temos, assim, uma estrutura uniforme de grafo, onde todos os nós são bolas.

5.3 Bases do movimento

No nosso contexto, o movimento para os objetos do tipo i e do tipo ii é definido localmente, envolvendo apenas as bolas vizinhas ao objeto. Nesta primeira investigação, consideramos apenas objetos que estão diretamente adjacentes ao longo do eixo medial. Em trabalhos futuros, poderão ser consideradas bolas vizinhas no 0-shape e, em particular, para calcular a curvatura num ponto do bordo da união de bolas. Para cada bola $b = (x, r)$ do tipo i, com centro x e raio r, denotamos por $\mathcal{A}_b$ o conjunto de nós (bolas de tipo i ou iii) adjacentes no grafo.

A cada iteração, a nova posição das bolas depende a priori das bolas vizinhas. É o caso das bolas do tipo (i). Porém, as bolas de tipo (ii) não têm vizinho, e portanto a nova posição depende apenas delas mesmo. Assim, o movimento pode ser definido esquematicamente pelas funções f^i e f^{ii}:

$$\forall b = (x, r) \in Type_i, \qquad x \leftarrow f^i_x\left(b, \mathcal{A}_b\right), \quad r \leftarrow f^i_r(b, \mathcal{A}_b).$$

$$\forall b = (x, r) \in Type_{ii}, \qquad x \leftarrow f^{ii}_x(b), \quad r \leftarrow f^{ii}_r(b).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

5.4
Movimento simples

Cada passo do movimento de contração pode ser definido como um conjunto de nível $-k$ da transformada em distância da forma. Isto corresponde a diminuir o raio das bolas de um fator $d < 1$ e aproximar os centros das bolas. No nosso contexto, podemos aproximar este movimento definindo f^i e f^{ii} por:

$$f^i_x(b, \mathcal{A}_b) = d \cdot \sum_{(x',r') \in \mathcal{A}_b} \vec{xx'}, \qquad f^i_r(b, \mathcal{A}_b) = d \cdot r$$

$$f^{ii}_x(b) = x, \qquad f^{ii}_r(b) = d \cdot r$$

Movimentos de dilatação podem ser definidos de maneira similar usando um fator $d > 1$. Neste caso não precisaríamos manter uma condição de amostragem, pois as bolas não se desconectarão, enquanto no movimento de contração poderia ser usado para aproximar melhor o caso usual.

5.5
Condição de amostragem

Para evitar o desconectar da forma que está sendo deformada e também para evitar a dependência demasiada da discretização do objeto, é possível incluir no movimento uma condição de amostragem. Uma amostragem densa demais é naturalmente filtrada pela triangulação regular, onde bolas cobertas por bolas vizinhas não são trianguladas. Para compensar uma amostragem esparsa demais, é possível incluir bolas novas na união, seguindo (7).

Se duas bolas b e b', adjacentes no eixo medial, são distantes mais do que o raio da menor bola ($|x, x'| < \min(r, r')$), uma bola extra b^+ será inserida na união, no meio das duas bolas b e b': $x^+ = \frac{1}{2}(x + x')$, $r^+ = \frac{1}{2}(r + r')$.

Esta condição de amostragem impede que o eixo medial se desconecte, o que pode ser interessante ao estender movimentos por curvatura em 3D.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

6
Resultados

Neste capítulo mostraremos o comportamento do movimento simples proposto em alguns exemplos. Nas simulações, fixamos, arbitrariamente, o valor de $d = 0.8$ para contração e $d = 1.2$ para dilatação.

6.1
Exemplo 1

Como primeiro exemplo buscamos uma estrutura simples, com a união de sete bolas. A Figura 6.1 mostra a imagem com seu respectivo eixo medial.

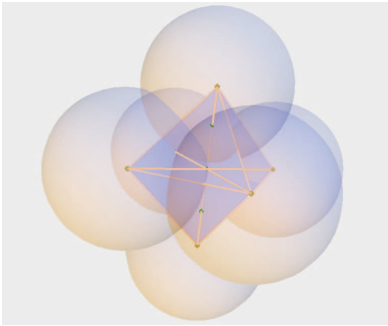

Figura 6.1: Primeiro exemplo: eixo medial desenhado em lilás.

6.1.1
Movimento de contração

Neste primeiro movimento observamos a contração da união até uma única bola. A Figura 6.2 exibe as duas primeiras e a sexta iteração. Nesse primeiro exemplo a união manteve sua escrita mínima sem a necessidade de remoção de bolas.

6.1.2
Movimento de dilatação

A Figura 6.3 ilustra o segundo movimento. A estrutura tendeu para uma única bola.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

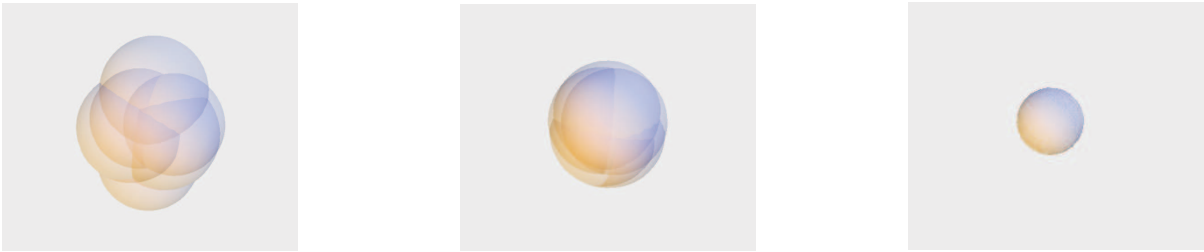

Figura 6.2: Primeiro exemplo: Movimento de contração nos dois primeiros e sexto passo da iteração.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Figura 6.3: Primeiro exemplo: Movimento de dilatação nos três primeiros passos da iteração.

6.2
Exemplo 2

Este segundo exemplo denominamos de "boneco" formado por 45 bolas. Na Figura 6.4 temos sua representação e respectivo eixo medial.

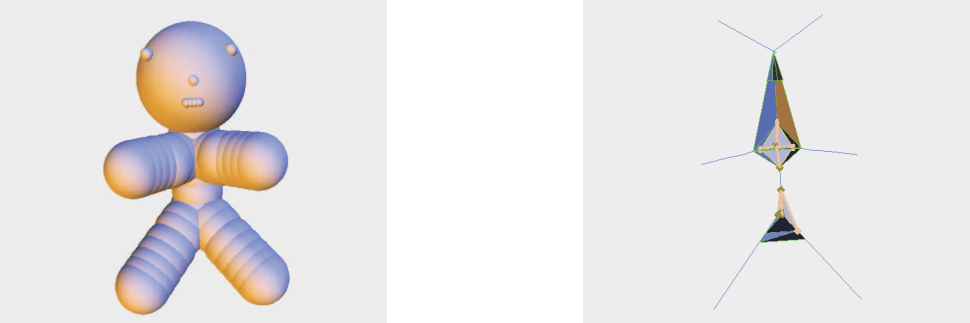

Figura 6.4: Segundo exemplo: Boneco e seu eixo medial.

6.2.1
Movimento de contração

Neste movimento, sete bolas foram removidas pela triangulação regular na segunda iteração e houve a desconexão do pescoço; na terceira iteração, mais nove bolas foram removidas e houve a desconexão da perna, vide Figura 6.5. Depois de onze iterações, o boneco tendeu para a imagem da Figura 6.6, onde as bolas restantes correspondem às "partes mais importantes" do boneco.

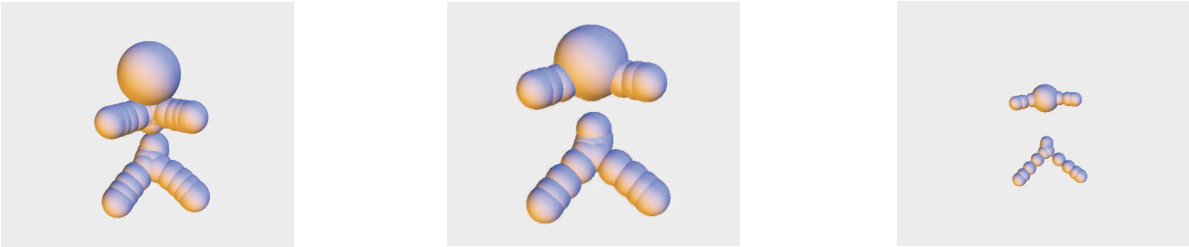

Figura 6.5: Segundo exemplo: Movimento de contração nas duas primeiras e quinta iteração.

6.2.2
Movimento de dilatação

A Figura 6.7 ilustra o segundo movimento para. Neste segundo movimento obtemos, depois de 3 iterações, a forma de uma bola. Da primeira para

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

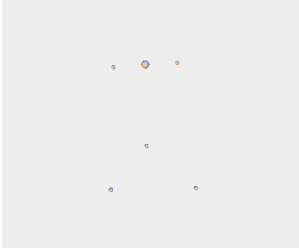

Figura 6.6: Segundo exemplo: Movimento de contração depois de 13 iterações.

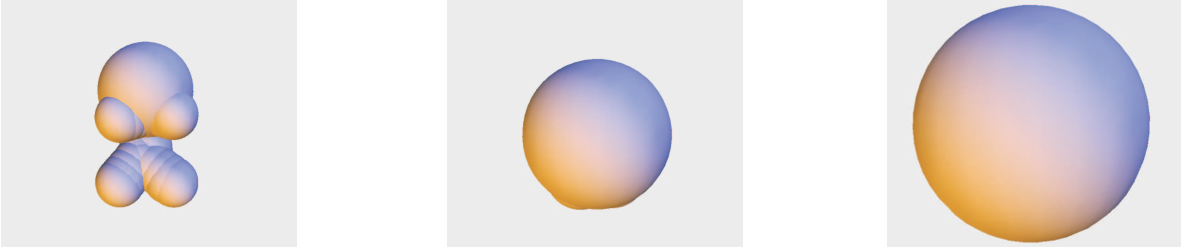

Figura 6.7: Segundo exemplo: Movimento de dilatação nas três primeiras iterações.

segunda iteração 18 bolas foram removidas, em seguida 23 e, então, 3, restando apenas uma bola.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

6.3
Exemplo 3

No exemplo seguinte temos uma configuração na qual 158 bolas estão em formato de arco. A Figura 6.8 ilustra sua imagem e respectivo eixo medial.

Figura 6.8: Terceiro exemplo: eixo medial desenhado em preto.

6.3.1
Movimento de contração

As Figuras 6.9 e 6.10 exibem algumas iterações. As bolas verdes representam as que possuem interseção com outra(s), enquanto as vermelhas não possuem interseção. Note que a partir de um determinado número de iterações já temos uma previsão da imagem que será formada.

Figura 6.9: Terceiro exemplo: Movimento de contração nas três primeiras iterações.

6.3.2
Movimento de dilatação

Como já era previsto, este movimento aproximou as bolas depois de algumas iterações, já que estamos deslocando os centros na direção do eixo medial e aumentando o tamanho do raio.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

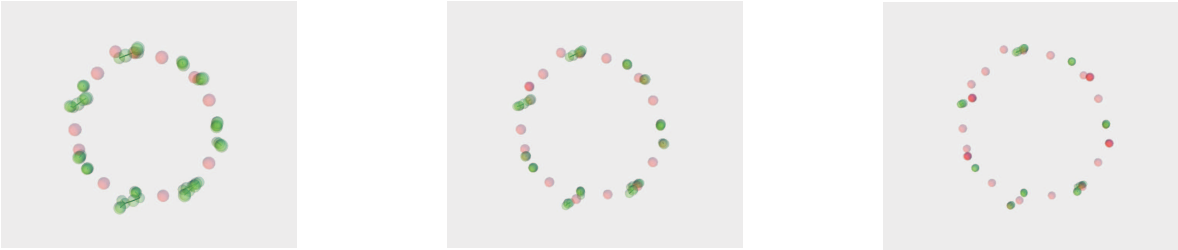

Figura 6.10: Terceiro exemplo: Movimento de contração quarta, quinta e nona iteração.

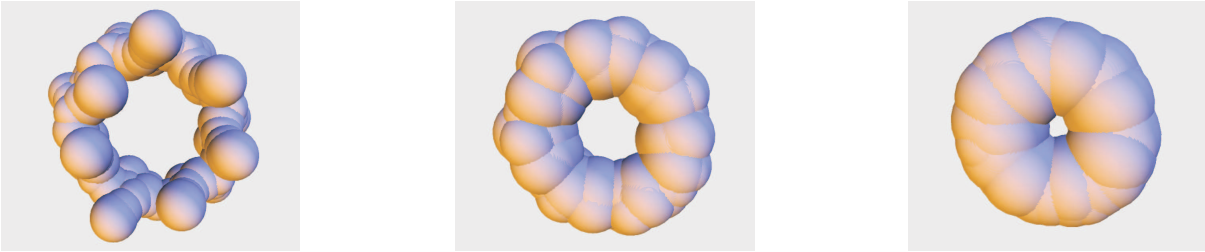

Figura 6.11: Terceiro exemplo: Movimento de dilatação nas três primeiras iterações.

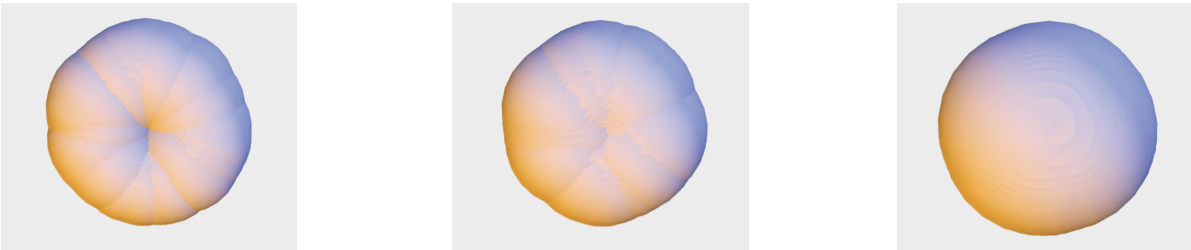

Figura 6.12: Terceiro exemplo: Quarta, quinta e sexta iteração. Tendência para a formação de uma única bola.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

6.4
Exemplo 4

O quarto exemplo ilustra a estrutura de uma molécula denominada futeboleno, que possui 60 átomos de carbono, vide Figura 6.13. As arestas de seu eixo medial formam pentágonos e hexágonos, semelhante a uma bola de futebol.

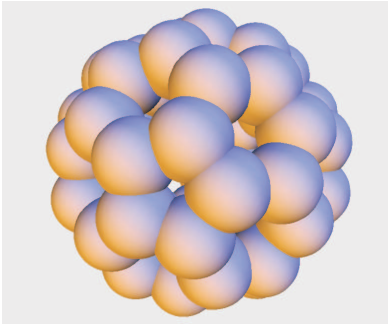

Figura 6.13: Quarto exemplo: Futeboleno.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

6.4.1
Movimento de contração

Observe que as bolas vão se organizando ao longo do eixo medial, no entanto, já na segunda iteração ocorre uma desconexão, vide Figuras 6.14 e 6.15.

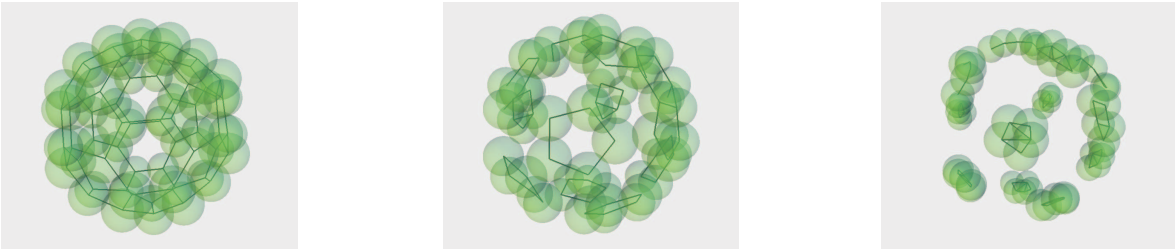

Figura 6.14: Quarto exemplo: Movimento de contração nas três primeiras iterações.

6.4.2
Movimento de dilatação

Esse movimento resultou na formação de uma única bola rapidamente, vide Figura 6.16.

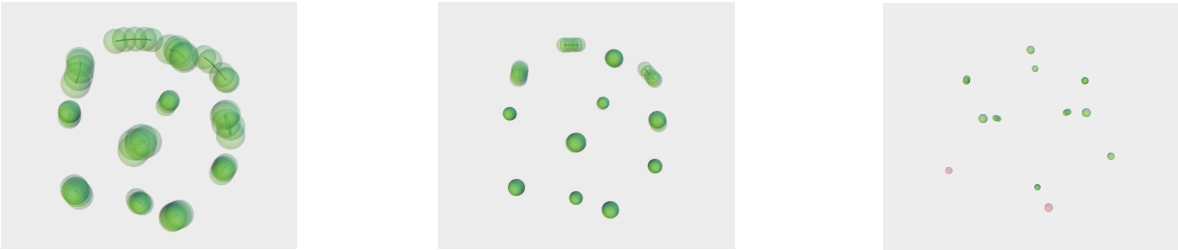

Figura 6.15: Quarto exemplo: Movimento de contração na quinta, sexta e décima iteração.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

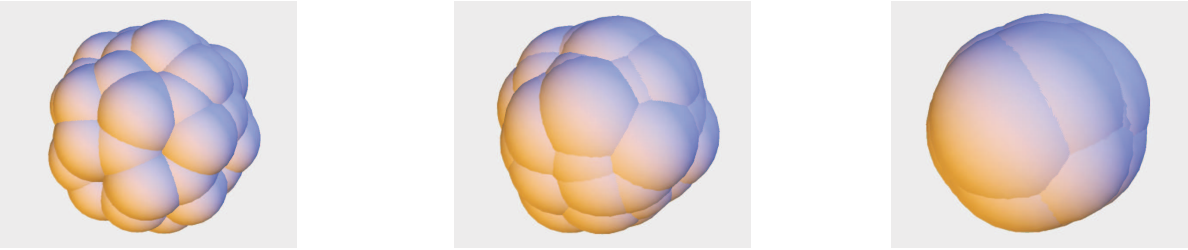

Figura 6.16: Quarto exemplo: Movimento de dilatação nas três primeiras iterações

6.5
Exemplo 5

Nosso último exemplo é uma molécula composta de 576 átomos. A Figura 6.17 ilustra a imagem e seu eixo medial.

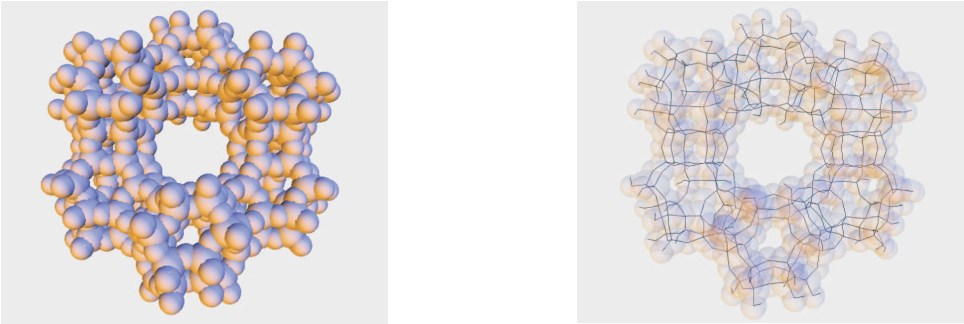

Figura 6.17: Quinto exemplo: Molécula e eixo medial.

6.5.1
Movimento de contração

Observe nas Figuras 6.18 e 6.19 que o movimento resultou na desconexão da molécula em vários pontos diferentes de forma quase homogênea.

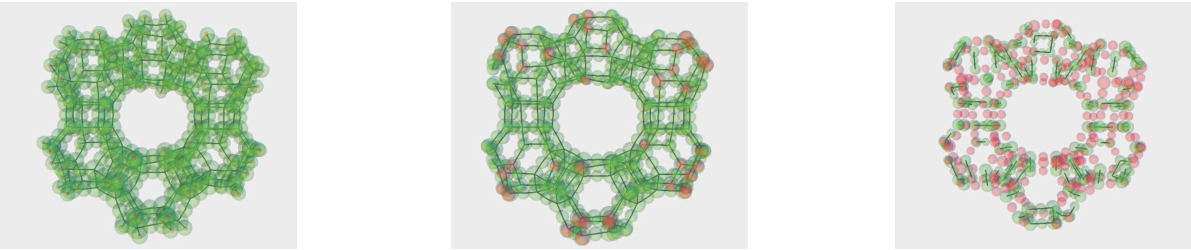

Figura 6.18: Quinto exemplo: Movimento de contração nas três primeiras iterações.

6.5.2
Movimento de dilatação

Esse movimento resultou na redução do número de bolas e depois de algumas iterações é natural que haja o fechamento do buraco devido a própria construção do movimento, vide Figura 6.20.

Nos três exemplos anteriores o eixo medial e o 0-shape são parecidos e isso pode ser explicado por estarmos tratando de moléculas e essas estruturas se apresentarem na sua conformação mais estável, ou seja, os átomos se arranjam

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

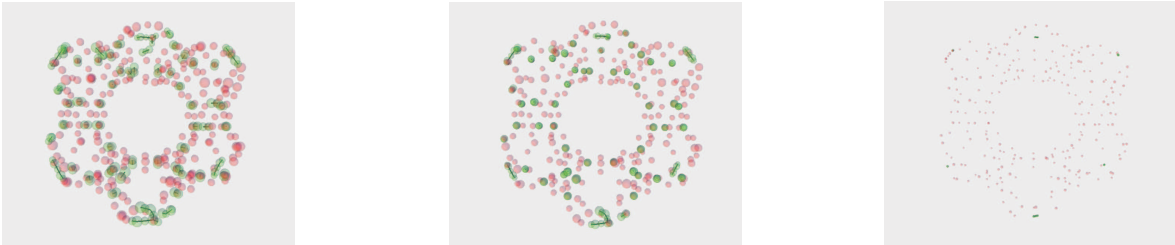

Figura 6.19: Quinto exemplo: Movimento de contração na quarta, quinta e sétima iteração.

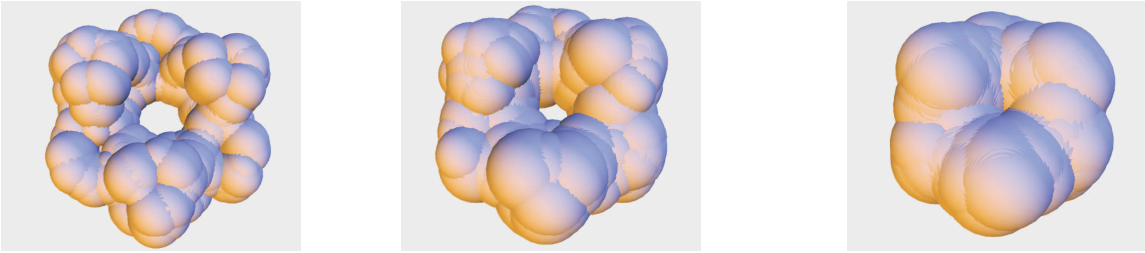

Figura 6.20: Quinto exemplo: Movimento de dilatação na segunda, terceira e quarta iteração.

de forma que a energia entre eles é a menor possível. Para maiores detalhes sobre este assunto sugerimos a referência (2).

Em uma CPU Intel Core Duo T2300 1.66GHz e 1GB de RAM, obtemos o eixo medial dos exemplos anteriores quase instantaneamente, enquanto que, para o Exemplo 6.5, é extraído depois de cerca de 4 segundos por apresentar um número maior de bolas na união.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

6.6
Limitação do movimento

A Figura 6.21 mostra uma limitação em relação à nossa formulação do movimento de dilatação das bolas.

Nessa simulação a forma se desconectou em alguns pontos na quinta iteração. As bolas em vermelho representam aquelas que não possuem interseção com outra bola, ou seja, não fazem parte do grafo. Como o movimento pelo eixo medial foi lento, apesar do aumento do raio, tivemos a desconexão das bolas.

Por estarmos tratando de $d = 1.01$, valor muito próximo de um, as bolas se desconectam, diferente dos resultados esperados de um movimento de dilatação.

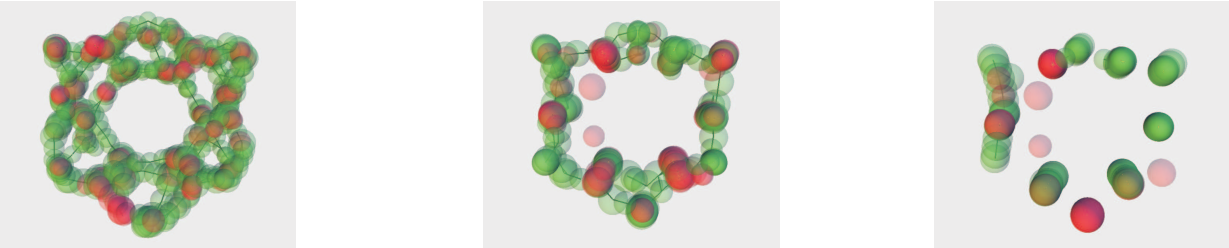

Figura 6.21: Limitação: Movimento na quinta, décima e décima quinta iteração para $d = 1.01$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

6.7
Movimentos com estruturas separadas

Nesta seção mostraremos o comportamento dos movimentos propostos quando tivermos a presença de estruturas não conectadas, mas relativamente próximas. A Figura 6.22 exibe sua imagem e grafo.

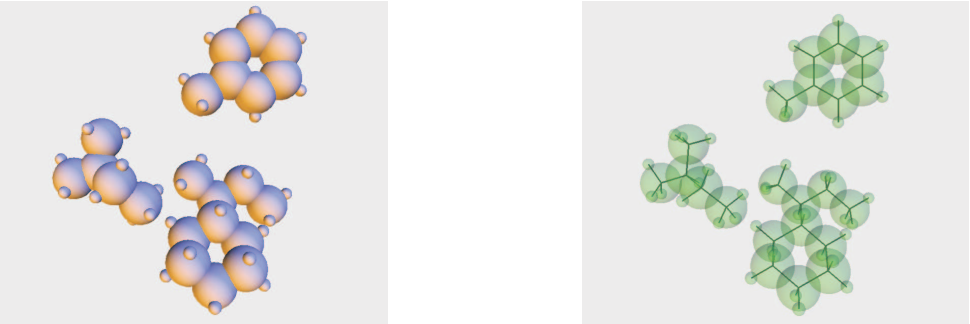

Figura 6.22: Exemplo de estruturas não conectadas e eixo medial.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

6.7.1
Movimento de contração

Como já era previsto, esse movimento desconectou a forma, pois além de deslocar os centros das bolas na direção do eixo medial, estamos também diminuindo o tamanho dos raios, vide Figura 6.23.

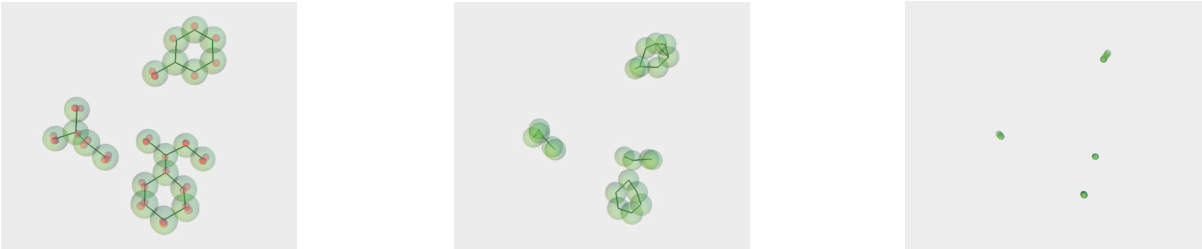

Figura 6.23: Contração: Movimento na primeira, segunda e sexta iteração com três estruturas para $d = 0.8$.

6.7.2
Movimento de dilatação

Este movimento evitou que a forma se desconecte, fechou os buracos e, devido o aumento do raio das bolas, as figuras, depois da quarta iteração, começaram a se juntar, formando uma única estrutura, vide Figuras 6.24, 6.25, 6.26.

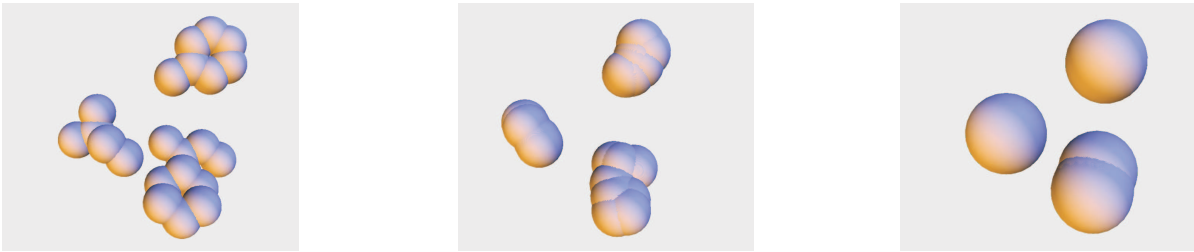

Figura 6.24: Dilatação: Movimento na primeira, segunda e terceira iteração para $d = 1.2$.

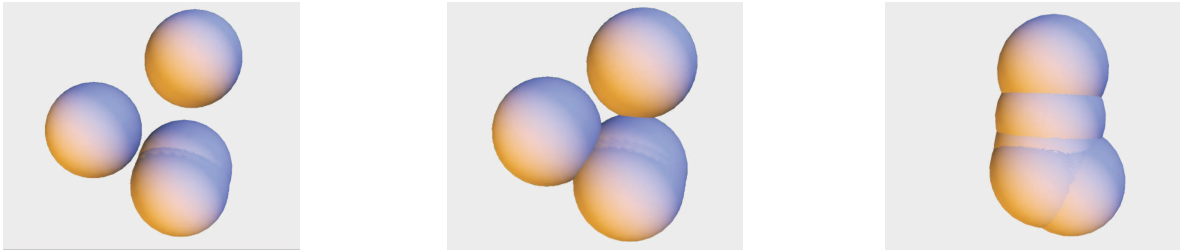

Figura 6.25: Dilatação: Movimento na quarta, quinta e sexta iteração para $d = 1.2$.

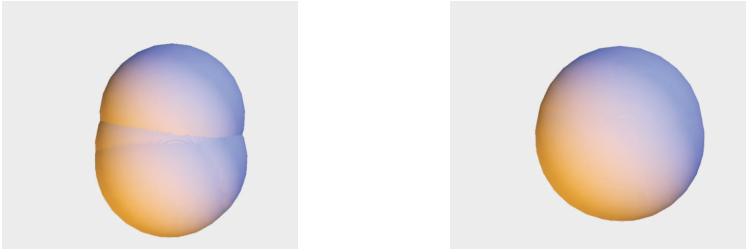

Figura 6.26: Dilatação: Movimento na sétima e oitava iteração para $d = 1.2$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

7
Conclusões e Trabalhos Futuros

Nessa dissertação consideramos a discretização de formas como união de bolas e a representação de deformações a partir do eixo medial, em $\mathbb{R}^3$. Essas deformações são definidas por movimentos locais das bolas ao longo das direções do eixo medial.

Nessa dissertação fizemos a implementação das bases deste tipo de movimentos, calculando o eixo medial de uma união de bolas, relacionando-o diretamente com a implementação de 0-shape, diagramas de Voronoi e cálculo dos vértices do bordo da união $\mathcal{U}$. Testamos essa implementação em movimentos simples de contração e dilatação.

Nesse trabalho apenas iniciamos o estudo no espaço tridimensional e diversas variações merecem ser testadas. Para a continuação desse trabalho achamos relevante o estudo de outros movimentos, como, por exemplo, derivados do movimento por curvatura.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Referências Bibliográficas

[1] BÄSKEN, M.; BRÖNNIMANN, H.; FRANK, D.; DEVILLERS, O.; ESTER, E.; FABRI, A.; FLATO, E.; GÄRTNER, B.; GIEZEMAN, G.-J.; HALPERIN, D.; HANNIEL, I.; HAR-PELED, S.; HERRMANN, T.; HERT, S.; HIRSCH, S.; HOFFMANN, M.; KETTNER, L.; NECHUSHTAN, O.; NEYER, G.; PASECHNIK, D.; PION, S.; SCHIRRA, S.; SCHÖNHERR, S.; SEEL, M.; TEILLAUD, M.; VELTKAMP, R.; WEIN, R.; WESSELINK, W. ; YVINEC, M.. **Cgal reference and user manuals**, 2007. 1, 4.1, 4.1.1

[2] BRUICE, P. Y.. **Organic Chemistry**. 2006. 6.5.2

[3] FERREIRA, C. O. L.. **Evolution of union of balls from medial axis**. Master's thesis, Department of Mathematics, PUC–Rio, 2005. in portuguese. 2.4, 3

[4] TEIXEIRA, R. C.. **Medial axes and mean curvature motion I: regular points**. Journal of Visual Communication and Image Representation, 13(1):135–155, 2002. 5

[5] TEIXEIRA, R. C.. **Medial axes and mean curvature motion II: singularities**. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 23(1):87–105, 2005. 5

[6] CAZALS, F.; CHAZAL, F. ; LEWINER, T.. **Molecular shape analysis based upon Morse–Smale complex and the Connolly function**. In: SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, p. 351–360. ACM, 2003. 5.1

[7] LEWINER, T.; FERREIRA, C.; CRAIZER, M. ; TEIXEIRA, R. C.. **Curvature motion for union of balls**. In: SIBGRAPI, p. 47–54, Natal, Oct. 2005. IEEE. 5, 5.5

[8] FISCHER, K.. **Introduction to Alpha Shapes**, 2000. 2.5

[9] EDELSBRUNNER, H.. **Weighted alpha–shapes**. Technical Report 1760, University of Illinois, 1992. 2.5, 2.5.2

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

[10] EDELSBRUNNER, H.. **The union of balls and its dual shape**. Discrete and Computational Geometry, 13(1–2):415–440, 1995. 2.1, 2.4

[11] EDELSBRUNNER, H.; MÜCKE, E.. **Three-dimensional alpha shape**. In: VOLUME VISUALIZATION, p. 75–82, 1992. 2.5

[12] AMENTA, N.; BERN, M. W. ; KAMVYSSELIS, M. K.. **Crust: A New Voronoï-Based Surface Reconstruction Algorithm**. In: SIGGRAPH, p. 415–422. ACM, 1998. 1

[13] AMENTA, N.; KOLLURI, R.. **The medial axis of unions of balls**. Computational Geometry, 20(1–2):25–37, 2001. 2.2, 3, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 4.2

[14] AMENTA, N.; CHOI, S. ; KOLLURI, R. K.. **The Power Crust, unions of balls, and the medial axis transform**. Computational Geometry, 19(2-3):127–153, 2001. 1

[15] SHAMIR, A.; SCHARF, A. ; COHEN-OR, D.. **Enhanced hierarchical shape matching for shape transformation**. International Journal for Shape Modeling, 9(1–2):203–222, 2003. 1

[16] AURENHAMMER, F.; KLEIN, R.. **Voronoi Diagrams**, volumen V, p. 201–290. Elsevier, 1996. 2.5

[17] BOISSONNAT, J.-D.; YVINEC, M.. **Algorithmic geometry**. Cambridge University Press, 1998. 2.3, 2.4

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

A
Apêndice

Nomeclatura

$\mathcal{B}$: Conjunto de bolas em $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{C}$: Componente Regular de $\mathcal{S}$

$\partial\mathcal{C}$: Bordo da Componente Regular de $\mathcal{S}$

$DT(S)$: Triangulação de Delaunay de $\mathcal{S}$

$\mathcal{R}(\mathcal{S})$: Triangulação Regular de $\mathcal{S}$

e, e_v : Aresta do $Vor(\mathcal{V})$

$\mathcal{O}$: Objeto

$Pow(\mathcal{B})$: Diagrama de Potência do conjunto $\mathcal{B}$

S : Conjunto de pontos

$\mathcal{S}$: α-shape

s_T : Face do $\partial\mathcal{U}$

σ_T : simplexo no $\partial\mathcal{S}$, com dual s_T

$\mathcal{U}$: União das Bolas

$\partial\mathcal{U}$: Bordo da União das Bolas

v : Vértices do $\partial\mathcal{U}$

$\mathcal{V}$: Vértices da União de Bolas

$Vor(v)$: Diagrama de Voronoi de v

$Vor(\mathcal{V})$: Diagrama de Voronoi de $\mathcal{V}$

$\mathcal{X}$: Eixo Medial

$|,|$: Distância Euclidiana

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0521438/CA

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo