PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Marcelo Eduardo Pereira

ANÁLISE DE SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM ENVOLVENDO NÚMEROS RACIONAIS:
Uma abordagem para o ensino de argumentações e provas na Matemática Escolar

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Marcelo Eduardo Pereira

ANÁLISE DE SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM ENVOLVENDO NÚMEROS RACIONAIS:
Uma abordagem para o ensino de argumentações e provas na Matemática Escolar

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***Mestre Profissional em Ensino de Matemática*** sob a orientação da ***Professora Doutora Ana Paula Jahn***.

SÃO PAULO
2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________ Local e Data: ______________

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à *Professora Ana Paula Jahn*, pessoa incansável em sua dedicação, pelas discussões e reflexões que tornaram possível a conclusão deste trabalho e pela amizade, compreensão e paciência em todos os momentos. Jamais conseguirei agradecê-la plenamente.

Às *Professoras Lulu Healy* e *Regina Célia Grando,* que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, cujas considerações, críticas e recomendações foram de extrema valia. Agradeço também à *Professora Lulu* pela simpatia e atenção que demonstrou sempre que solicitada e à *Professora Regina* pelo cuidado com que escreveu palavras esclarecedoras e motivadoras sobre este trabalho.

À *coordenação* e aos *meus professores* do Programa de Estudos Pós-graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pela riqueza intelectual que compartilham conosco.

À *Capes*, pelo apoio financeiro, trazendo-me a tranqüilidade necessária para que pudesse me dedicar a esta missão.

Ao *Professor Vincenzo Bongiovanni,* pelas brilhantes sugestões dadas na etapa inicial deste trabalho.

Às Professoras Ana Paula Jahn, Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, Janete Bolite Frant, Lulu Healy, Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Sonia Pitta Coelho e ao *Professor Vincenzo Bongiovanni* pela dedicação ao projeto AProvaME, do qual emanou este trabalho.

À professora *Cileda* pelo apoio em um momento importante.

À *minha família*, pela paciência, compreensão e pela paz que me proporcionou para escrever esta dissertação.

À *Melissa,* pelas palavras motivadoras e pelas críticas e sugestões, sempre bem colocadas, com elegância e sabedoria ímpares.

Ao *Renato* pelos longos anos de convivência, amizade e aprendizado.

Ao *Marco* e à *Patrícia*, pessoas muito queridas, pelos ensinamentos, conselhos e carinho. Esta caminhada não seria a mesma sem a presença destes amigos.

À *Cláudia*, pelas críticas implacáveis e perturbadoras e pela generosidade sem paralelo.

À *Mut*, colega de viagem e de sala, pela amizade, reflexões e pelos conselhos que ouvi e, felizmente, aproveitei.

Ao *Valério*, pela contribuição intelectual e pelas longas conversas.

Ao colega de turma, *Moacir*, pelo companheirismo e amizade demonstrados ao longo deste curso.

Ao *Francisco*, secretário do programa, pela atenção e auxílio.

À *Márcia Haddad*, pela gentileza de me ceder várias de suas aulas.

Aos alunos que voluntariamente participaram desta pesquisa. Em particular às alunas *Isabela*, *Jéssica*, *Luana*, *Luma* e *Nicole*, que participaram da fase Piloto do trabalho e aos alunos *Carolina*, *Jonas*, *Lucas*, *Marcela*, *Paula* e *Thayana* que participaram do estudo experimental. Todos merecem agradecimentos especiais pela nobreza com que se dispuseram a perder algumas manhãs e tardes de sol.

Aos meus alunos do curso de Licenciatura, *Fernando Gomes de Pinho*, *Mariana Simões Barreto* e *Sidney Costa da Silva*, que, sempre dispostos e atenciosos, atenderam a todas as minhas solicitações.

A todos aqui citados, minha eterna gratidão.

O Autor

RESUMO

A proposta deste trabalho é analisar situações de aprendizagem envolvendo argumentações e provas matemáticas, integrando uma ferramenta computacional, tendo sido desenvolvido no âmbito do projeto AProvaME – *Argumentação e Prova na Matemática Escolar,* referindo-se, particularmente, à 2ª Fase deste projeto. Fundamentamo-nos em pesquisas que exploram as funções que uma prova pode assumir e as avaliam, no contexto escolar, sob vários aspectos e níveis de generalidade. À luz dos principais resultados desses estudos e do levantamento das concepções sobre prova de alunos adolescentes, realizado na 1ª Fase do Projeto, elaboramos uma seqüência de atividades com o intuito de engajá-los nas várias etapas do processo de prova e discutir as condições de transição das *provas pragmáticas* para as conceituais. Buscamos, neste contexto, explorar outras funções da prova, além da função de verificação e avaliar o papel da ferramenta *Microsoft Excel* no trabalho empírico dos alunos. A seqüência foi aplicada, em sessões extraclasse, a três duplas de alunos de 15-16 anos de uma escola particular da cidade de Santos-SP, que participaram voluntariamente da experimentação. Como resultado, verificou-se que a interação dos alunos com o computador dinamizou o processo de produção de conjecturas e de validação experimental destas, bem como a observação de propriedades dos objetos manipulados, favorecendo a elaboração de justificativas que vão além das evidências empíricas. Assim, por meio desta abordagem, os alunos tiveram a oportunidade de vivenciar as etapas do processo de prova, apresentando, por meio de raciocínios dedutivos, argumentos que evidenciam a generalidade envolvida nas tarefas propostas.

Palavras-chave: Ensino de Prova, Conjecturas, Provas conceituais, Argumentos empíricos, Números Decimais.

ABSTRACT

The purpose of this research is to analyze learning situations concerning argumentations and mathematical proofs combined with a computational tool and had been developed into the AprovaME project - *Argumentação e Prova na Matemática Escolar* (Argumentation and Proof in School Mathematics), particularly during the second phase. We are founded by researches that explore the assuming functions of proof as well as evaluate them in the school context, underneath various aspects and generality levels. Guided by the main results of this studies and the survey of proof conceptions made by the teenager students that had been accomplished during the first phase of the project, we prepared a sequence of activities intending to engage them throughout the stages of proving and to argue about the conditions of transiting between pragmatic and conceptual proofs. We search, into this context, to explore different functions proof, beyond the verification one, and to analyze the role of the *Microsoft Excel* tool in the students' empirical work. The activities were applied in extra classes' sessions for three pairs of volunteer students between 15-16 years old from a private school in Santos-SP. As result, it was verified that students' interaction with the computer had dynamized the process of surveying conjectures and validating them. Also through the computer experience they were able to notice the manipulated objects' properties which developed the production of justifications beyond empirical evidences. Therefore, within this proposal, the students had experienced the moments of proving and presented, by deductive reasoning, argumentations that show clearly the generality involved in the suggested tasks.

Keywords: Proof Teaching, Conjectures, Conceptual Proofs, Empirical Argumentation, Decimal Numbers.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Algumas inquietações relacionadas à prova, que trazemos desde o nosso curso de Graduação, constituem o ponto de partida para a escolha do ensino e aprendizagem de provas na Matemática Escolar como objeto deste trabalho.

Julgamos que as provas devam ser objeto de ensino por constituírem a essência do fazer matemático. Entretanto, antes do trabalho junto ao projeto AProvaME[1], não nos sentíamos preparados para abordar este tema em sala de aula, principalmente pelas experiências que trazíamos da nossa formação.

Nosso contato efetivo com o formalismo matemático e o raciocínio dedutivo deram-se inicialmente em três disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática: *Cálculo I*, *Geometria Analítica* e *Lógica*. Nas duas primeiras, o formalismo nos parecia inacessível e as demonstrações pouco nos traziam além de um sentimento de frustração e impotência perante o conhecimento matemático. Em contrapartida, na disciplina *Lógica*, o estudo das idéias elementares do cálculo proposicional impulsionava nossa admiração pela desafiadora coerência do processo dedutivo. Mas, se a Lógica permeia as demonstrações presentes em todos os ramos da Matemática, por que tínhamos impressões ambíguas em relação a este tema?

Hoje, acreditamos que isto se deve ao fato de que a apresentação de uma demonstração – o que ocorria nas aulas de Cálculo, por exemplo – nos evidencia claramente o rigor e o formalismo presentes. Entretanto, a sua elaboração é um processo complexo que abrange outras fases, como o levantamento e a validação de hipóteses, podendo envolver, inclusive, um trabalho empírico de verificação. Este processo não nos parecia evidente ou natural.

Em suma, desde que situações de prova nos foram apresentadas e efetivamente propostas, trazemos questionamentos, tais como: “De onde o professor ou o autor do livro

[1] Argumentação e Prova na Matemática Escolar (Anexo I); projeto coordenado pela Professora Lulu Healy e financiado pelo CNPq sob o número de processo 478272/2004-9). Faremos uma descrição desse projeto no Capítulo 1.

‘tirou’ este argumento?” ou “Como saber quando usar este ou aquele argumento? Existe uma regra ou padrão?”. É evidente que ao longo dos anos a experiência nos foi respondendo estas questões. Entretanto, o contato com as idéias da Educação Matemática e, particularmente, com o projeto AProvaME trouxe-nos, agora no âmbito do ensino, outras questões: “Como abordar o ensino de provas de maneira que o aluno tenha a oportunidade de vivenciar diversas etapas do processo de produção de uma prova?” e “Que papel pode desempenhar uma ferramenta computacional nos processos de ensino e aprendizagem de provas?”.

No intuito de conhecer as concepções dos alunos sobre provas, bem como avaliar os tipos de provas por eles construídas, fizemos uso dos dados obtidos a partir de um questionário sobre provas, aplicado a 1998 estudantes de escolas do Estado de São Paulo, com idades entre 14 a 16 anos, dentro do Projeto AProvaME, especificamente na 1ª Fase. Com esta exploração, verificamos, entre outros resultados, que grande parte destes alunos utiliza argumentos baseados na manipulação de casos particulares e são poucos os que atingem algum grau de generalidade em seus raciocínios.

Fato semelhante foi observado com alunos de outros países.

> Enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência por argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento. (HEALY e HOYLES, 2000)

Estes exemplos integram um contexto mais amplo, em que há um consenso quanto às dificuldades que se apresentam ao ensino e aprendizagem de provas no âmbito escolar. Não obstante estas dificuldades, nota-se que estudantes de diversos países podem utilizar diferentes abordagens ao construírem suas provas.

Esta foi uma das motivações do projeto AProvaME para a aplicação de um questionário sobre provas no contexto brasileiro. Fazia-se necessária uma avaliação destas dificuldades diante das concepções e da cultura escolar dos nossos alunos.

A partir destes resultados, assumimos a hipótese de que este tema deva ser abordado de maneira a dar ao aprendiz a oportunidade de entrar em contato com as dificuldades inerentes a uma prova, ou seja, inseri-lo em situações nas quais possa produzir suas próprias conjecturas e, além disso, buscar argumentos para validá-las ou refutá-las e avaliar estes argumentos quanto à consistência e generalidade.

Acreditamos que o trabalho experimental pode ser dinamizado com o uso do computador, dada sua possibilidade de gerar, em pouco tempo, uma considerável quantidade de exemplos, auxiliando o aprendiz no trabalho de verificação e produção de conjecturas.

Apesar disso, julgamos necessário que o aluno desenvolva uma atitude de desconfiança diante de resultados observados a partir de casos particulares. Pesquisas em Educação Matemática discutem o problema de o aluno considerar uma evidência empírica como prova (HEALY e HOYLES, 2000; BALACHEFF, 1988), levando-nos a supor que esta desconfiança nem sempre ocorre de maneira espontânea.

Assim, buscando uma abordagem para o aprendizado de provas e acreditando no potencial dos recursos tecnológicos, nosso objetivo é a concepção, aplicação e análise de uma seqüência de atividades que integre um ambiente informatizado – no nosso caso, o *Microsoft Excel* – e coloque os alunos perante situações de prova, dando-lhes a oportunidade de vivenciar diversas etapas deste processo. Conforme explicitaremos no Capítulo 1, este objetivo refere-se à proposta da 2ª Fase do projeto AProvaME.

No sentido de complementar os dados obtidos por meio da aplicação da seqüência de atividades estão previstas entrevistas com alguns alunos selecionados entre os participantes do estudo experimental.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos.

O Capítulo 1 apresenta, em linhas gerais, o projeto AProvaME, do qual fazemos parte como professor-colaborador[2]. Neste capítulo, é descrita a organização do projeto, no que se refere ao papel e participação de seus integrantes, bem como os desenvolvimentos da 1ª Fase (elaboração, aplicação e correção do questionário sobre provas) e da 2ª Fase (elaboração e aplicação de situações de aprendizagem).

---

2 Dentro do projeto AProvaME, os 27 mestrandos participantes foram denominados professores-colaboradores.

O Capítulo 2 relata as pesquisas de referência que subsidiaram este trabalho, dando-nos ferramentas conceituais para nossas escolhas na elaboração da seqüência de atividades. Apoiar-nos-emos nas idéias de Balacheff (1988), De Villiers (2001) e Healy e Hoyles (2000).

No Capítulo 3, descrevemos em detalhe cada etapa da seqüência de atividades, explicitando os objetivos de cada uma. Desta forma, apresentaremos nossa proposta, justificando nossas escolhas em cada atividade da seqüência.

As considerações metodológicas deste trabalho estão descritas no Capítulo 4, em que apresentamos os sujeitos envolvidos, o ambiente no qual os experimentos foram realizados, bem como os procedimentos e a dinâmica da aplicação das atividades. Ademais, fazemos uma breve descrição do desempenho dos alunos envolvidos no experimento, quando responderam ao questionário sobre provas, referente à 1ª Fase do projeto AProvaME.

O Capítulo 5 é dedicado à análise qualitativa das produções destes alunos no desenvolvimento da seqüência de atividades e das entrevistas.

Nas considerações finais, faremos uma síntese das conclusões obtidas, discutindo o ensino de provas e refletindo sobre o impacto deste trabalho em nossa formação e prática docente.

CAPÍTULO 1

O PROJETO AProvaME

É sabido que antes de se descobrir a álgebra *– este grande instrumento e esta prova insigne da sagacidade do homem – os homens olhavam com espanto para muitas das demonstrações dos antigos matemáticos.*

(Leibniz)

1.1 Do objeto de estudo

Coordenado pela Professora Doutora Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy), do grupo de pesquisa *Tecnologia e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM), no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP, o projeto AProvaME – *Argumentação e Prova na Matemática Escolar* – tem como meta fomentar a discussão sobre o ensino e aprendizagem de argumentações e provas na Matemática da Educação Básica, por meio de um levantamento das concepções de alunos sobre provas (1ª Fase) e do desenvolvimento e avaliação de situações de aprendizagem em ambiente informatizado, envolvendo a elaboração de provas matemáticas (2ª Fase).

O projeto foi motivado por um panorama educacional, segundo o qual algumas pesquisas (HEALY e HOYLES, 2000; BALACHEFF, 1988) apontam dificuldades que os alunos têm em se expressar e apresentar argumentos, muitas vezes tratando justificativas empíricas como provas consistentes.

Estas dificuldades podem, também, estar associadas à maneira como o ensino de provas é abordado nos livros didáticos. Conforme verificado por Gouvêa (1998), o trabalho com provas (no caso, em Geometria) é prejudicado pela ausência, nos livros didáticos, de orientações de como conduzir este trabalho em sala de aula.

Em pesquisas recentes, verifica-se uma evolução neste sentido. Carlovich (2005) constatou que, em geral, coleções de livros didáticos do ano de 1990 apresentam provas de propriedades geométricas sob um enfoque axiomático em detrimento do empírico, ao passo que nas coleções de 2000 o enfoque dedutivo diminui, dando "espaço" ao empírico.

Atualmente, alguns livros didáticos procuram apresentar situações de prova, embora são poucas as situações que efetivamente envolvem os alunos neste trabalho, e as provas encontradas, geralmente envolvendo Geometria, apresentam um nível de generalidade, a nosso ver, inacessível para a maioria dos estudantes (BARBOSA, 2007; JAMELLI, 2007).

Conforme aponta Healy e Hoyles (2000), em pesquisa realizada na Inglaterra, os estudantes julgam que argumentos contendo Álgebra são mais difíceis de entender e oferecem pouco no que concerne à comunicação e explicação da matemática envolvida. Além disso, o currículo é um elemento importante na formação das concepções dos aprendizes.

> Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, podem-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país (Anexo I, p. 2)

Particularmente no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) acenam para um ensino de Matemática que possibilite aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Segundo o documento, uma das finalidades do Ensino Fundamental é levar o aluno a "comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas" (BRASIL, 1998, p. 37).

Ademais, os PCN tratam o ato de argumentar como necessário para o exercício da cidadania e da convivência social.

> A confrontação daquilo que cada criança pensa com o que pensam seus colegas, seu professor e demais pessoas com quem convive é uma forma de aprendizagem significativa, principalmente por pressupor a necessidade de formulação de argumentos [...] e a de comprová-los [...] (BRASIL, 1998, p. 31).

Tem-se, portanto, que o ensino de provas é considerado essencial não só pelas competências que desenvolve e que são intrínsecas ao conhecimento matemático, mas pela necessidade cotidiana de encadeamento de idéias e eloqüência em argumentações.

Entretanto, para que possamos propiciar condições deste aprendizado por parte de estudantes da Educação Básica, julgamos conveniente tratar as construções de prova de alunos sob uma perspectiva mais abrangente do que aquela adotada na Matemática. Neste sentido, Pietropaolo (2005, p. 209), referindo-se à inclusão do ensino de provas nas escolas, aponta que "todos parecem considerar que as possibilidades deste trabalho são grandes se o significado de *prova* for tomado em seu sentido mais amplo, ou seja, se o desenvolvimento incluir, necessariamente, as verificações empíricas".

Assim, apoiar-nos-emos em pesquisas nas quais construções de provas de estudantes são avaliadas segundo o nível de generalidade. Dessa forma, compreendendo as especificidades de cada nível, pretendemos criar condições para que os estudantes tenham a oportunidade de construir provas em diferentes níveis, evoluindo para aqueles de maior generalidade.

Mais precisamente, nosso estudo enfoca a elaboração, aplicação e análise de uma seqüência de atividades em ambiente informatizado envolvendo a representação decimal de números racionais, com o objetivo de desenvolver habilidades relacionadas à prova, tais como conjecturar, validar, refutar e generalizar. Portanto, este trabalho relaciona-se, particularmente, à 2ª Fase do projeto AProvaME. Detalharemos, em seguida, a organização das duas fases deste projeto.

1.2 Organização e dinâmica do projeto

Participam do projeto AProvaME seis professores-pesquisadores[3] e vinte e sete professores-colaboradores (mestrandos[4] em Educação Matemática).

---

3 Pesquisadores do Grupo de pesquisa TecMEM.

4 Estes mestrandos são alunos do curso de Mestrado Profissional do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

A proposta inicial é que o projeto se desenvolva com todos os integrantes do grupo trabalhando cooperativa e colaborativamente em todas as etapas. Cada professor-colaborador deve elaborar seu trabalho final abordando e focando alguma etapa específica do projeto, que está dividido conforme quadro a seguir.

Fases do projeto AProvaME	Período de realização
1ª Fase: Levantamento das concepções dos alunos sobre argumentação e prova: elaboração, aplicação e análise do questionário sobre prova.	2º semestre de 2005
2ª Fase: elaboração e aplicação de atividades em ambiente informatizado, de forma a inserir estudantes em situações favoráveis ao desenvolvimento de habilidades relativas à construção de uma prova.	1º semestre de 2006 (intra-grupos[5]) 2º semestre de 2006 (inter-grupos)

Quadro 1.1: Organização do projeto AProvaME.

Na próxima seção, explicitaremos detalhadamente como se desenvolveu o projeto em cada uma de suas fases.

1.2.1 Desenvolvimento da 1ª fase do projeto

A partir de agosto de 2005, o grupo do projeto passou a reunir-se quinzenalmente, em diferentes horários. Para estas reuniões presenciais, foi necessário dividir o grupo em três subgrupos, cada qual com pesquisadores e professores-colaboradores. Nestas reuniões, visava-se à elaboração de um questionário[6] sobre provas, que seria o instrumento de coleta de dados referentes às concepções dos alunos sobre argumentação e prova.

[5] As dinâmicas intra-grupos e inter-grupos serão explicitadas no item 1.2.2 (p. 25).

[6] Este questionário encontra-se disponível no Anexo II.

Ressaltamos que, não apenas nesta fase do projeto, como também na segunda, além das reuniões presenciais, fizemos uso da plataforma virtual TelEduc[7], em que podíamos nos comunicar e aprofundar as discussões das reuniões presenciais, por meio dos recursos *Fóruns de Discussão* e *Correio*. Além destes, utilizamos com freqüência os recursos:

- *Material de apoio*, com documentos relativos ao projeto;
- *Leituras*, com textos que referenciavam as discussões do grupo;
- *Portfólio*, para que cada integrante pudesse disponibilizar suas diversas tarefas e produções realizadas dentro do projeto.

Desta forma, o ambiente TelEduc foi incorporado ao trabalho do grupo de maneira a dinamizar as discussões e complementar as atividades e interações das reuniões quinzenais. Cabe observar que nesse ambiente mantínhamos contato e compartilhávamos idéias com todos os integrantes do projeto.

1.2.1.1 Elaboração do questionário sobre prova

Durante as reuniões do segundo semestre de 2005, as discussões iniciais versavam sobre um questionário produzido por Healy e Hoyles (2000) que serviu de base para a elaboração daquele que posteriormente aplicaríamos no âmbito do projeto AProvaME.

O questionário preparado pelo grupo é composto de dois cadernos contendo cinco questões cada, sendo um caderno de Álgebra e um de Geometria. As questões de Álgebra foram denotadas por A1, A2, etc., e as de geometria por G1, G2, etc., algumas contendo subitens. Do questionário de Healy e Hoyles (2000) foram utilizadas algumas questões e incluídas outras[8], elaboradas pelos pesquisadores do projeto. Tanto no caderno de Álgebra como no de Geometria havia dois tipos de questões: as questões de múltipla escolha e as questões abertas.

---

[7] Informações sobre o ambiente TelEduc estão disponíveis em: <http://hera.nied.unicamp.br/teleduc>.

[8] As questões elaboradas pelos professores-pesquisadores do projeto e incluídas em nosso questionário foram A5, G4 e G5.

Nas questões de múltipla escolha, os alunos deveriam avaliar argumentos apresentados e que foram produzidos por outros estudantes e, nas questões abertas, deveriam produzir suas próprias provas e apresentar argumentos para validar certas proposições.

Em A1 e G1, nas quais os alunos deveriam escolher a resposta que dariam se tivessem que resolver a questão, buscávamos verificar que tipo de argumento estava mais próximo das suas experiências.

Ainda nestas questões, ao solicitar que escolhessem a resposta à qual eles consideravam que seus respectivos professores atribuiriam a maior nota, procurávamos levantar dados que nos mostrassem os elementos que os alunos julgam importantes em uma prova, para que seja qualificada por uma autoridade (neste caso, o professor), como uma prova correta.

Em A2 e G2, visávamos verificar como os alunos avaliavam a generalidade de uma prova. Questionamos, então, a necessidade de uma nova prova para checar a validade de uma afirmação sobre números pares maiores que 100, tendo esta já sido provada para todos os números pares.

Nas questões A3 e G3, o intuito era averiguar de que maneira os aprendizes se apropriavam dos argumentos contidos em A1 e G1 e como os adaptavam para responder A3 e G3, respectivamente.

Em A4, A5, G4 e G5, propunham-se situações “novas” que exigiam dos alunos a compreensão de cada enunciado proposto a fim de buscar uma justificativa. Em A4, por exemplo, era preciso verificar que um múltiplo de 6 é, necessariamente, um múltiplo de 3.

A classificação das provas dada por Balacheff (1988), que será descrita no Capítulo 2 (p. 31), foi tomada como referência para a classificação das respostas apresentadas nas questões abertas. Dessa forma, atribuímos a cada resposta um determinado valor, conforme quadro a seguir.

0: *Respostas totalmente erradas, que não apresentam justificativas ou exemplos, ou respostas que simplesmente repetem o enunciado, caracterizando um "círculo vicioso".*

1: *Respostas com alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências. Por exemplo, respostas que são completamente empíricas.*

2: *Respostas com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova.*

2a*: Respostas nas quais falta muito para se chegar à prova completa (mais próximo de 1).*

2b*: Respostas nas quais falta pouco para se chegar à prova completa (mais próximo de 3).*

3**:** *Respostas corretas, totalmente justificadas.*

Quadro 1.2: Codificação das respostas no questionário.

Esta codificação foi amplamente discutida nos encontros presenciais e nos *Fóruns de Discussão* no ambiente *TelEduc*. Inicialmente, não havia consenso entre os professores-colaboradores na atribuição destas pontuações em alguns exemplos de respostas de alunos, já que nas próprias concepções dos integrantes do grupo verificavam-se divergências.

Um ponto importante nestas discussões foi a busca por um consenso na idéia de *prova* no contexto da Matemática Escolar. Inicialmente, houve resistência de alguns colegas em aceitar certos argumentos de alunos como passíveis de receber alguma pontuação, por estarem em desacordo com o que eles, como professores, pensam ou acreditam ser uma prova, ou seja, distante de uma demonstração formal.

Gradativamente, a partir das leituras e discussões, a diferença entre prova e demonstração no âmbito da Matemática Escolar foi sendo compreendida e aceita pela maioria, que entendeu o caráter menos formal e mais flexível de avaliação das justificativas dos aprendizes, para os quais os argumentos formais são de difícil acesso.

Dessa forma, trataremos as justificativas dadas pelos alunos, na tentativa de validar uma proposição, como provas, não necessariamente incluindo argumentos apresentados formalmente. Estas serão classificadas, na correção do questionário, conforme descrito anteriormente (quadro 1.2).

1.2.1.2 Aplicação e correção do questionário

A aplicação do questionário sobre provas realizou-se no mês de novembro de 2005. Foi aplicado a 1998 estudantes de 14 a 16 anos que cursavam a 8ª série do Ensino Fundamental ou 1º ano do Ensino Médio em escolas do Estado de São Paulo. Cada professor-colaborador ficou incumbido de aplicar o questionário a três turmas de alunos, sorteadas aleatoriamente entre cinco turmas por ele indicadas.

A aplicação do questionário foi conduzida pelo professor-colaborador ou pelo professor responsável da turma. Estes professores foram devidamente instruídos a não interferirem na tarefa e darem apenas as informações necessárias para que os alunos se apropriassem da proposta.

Em geral, os cadernos que compunham o questionário (o de Álgebra e o de Geometria) foram aplicados separadamente, sendo um em cada aula de 50 minutos. Alguns professores preferiram aplicar os dois cadernos em um único momento, utilizando duas aulas consecutivas. Além disso, a ordem dos cadernos não foi padronizada.

Em seqüência à aplicação, passou-se à codificação das respostas dos alunos com base na classificação apresentada no quadro 1.2. Cada professor-colaborador ficou incumbido de codificar os questionários referentes às três turmas para as quais ele foi responsável pela aplicação.

Nas questões A5a, A5c e G4 a pontuação 3 foi subdividida em “3C”, para respostas corretas, totalmente justificadas por meio de cálculos, e “3P” para respostas corretas, totalmente justificadas, com referência a propriedades pertinentes e de caráter geral.

Os objetivos pretendidos com o levantamento das concepções de prova dos alunos foram atingidos, pois pudemos, de posse destes dados, focar nossas escolhas quando da elaboração da seqüência de atividades, objeto de nosso estudo.

1.2.2 Desenvolvimento da 2ª fase do projeto

Esta fase foi dedicada à elaboração de situações de aprendizagem, integrando alguma ferramenta computacional e envolvendo argumentação e provas em Matemática. Assim, buscamos *investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições* (Projeto AProvaME, Anexo I, p. 3).

Com isto, nosso objetivo é desenvolver nos aprendizes habilidades e atitudes necessárias à produção de provas, inserindo-os em situações que lhes permitam formular e avaliar a veracidade de conjecturas matemáticas.

O processo de elaboração das atividades, bem como a codificação do questionário, foram subsidiados pela leitura e discussão de textos sobre argumentação e provas em reuniões com o grupo de pesquisa. Estas reuniões contribuíram para a apropriação, por parte dos mestrandos envolvidos no projeto, das idéias de Balacheff (1988), posteriormente adotado no projeto AProvaME.

Embora essa discussão tenha se iniciado com as primeiras reuniões do grupo, na 1ª Fase do projeto, ainda havia certa resistência por parte de alguns mestrandos em aceitar como prova um discurso que visa validar uma proposição matemática, independentemente do seu nível de generalidade.

Por fim, o grupo chegou a um consenso, do qual prescindíamos para a elaboração de seqüências de atividades, no sentido de abordar a prova do ponto de vista da Educação Matemática, ou seja, valorizando todas as etapas do processo de construção de uma prova, inclusive o trabalho empírico e de elaboração de conjecturas.

1.2.2.1 Elaboração de atividades (intra-grupos)

Para a elaboração das seqüências de atividades, formaram-se cinco equipes (grupos colaborativos), com dois professores pesquisadores e cinco ou seis professores-colaboradores em cada uma. Estas equipes reuniam-se quinzenalmente e coube ao grupo a elaboração de dez seqüências de atividades (duas para cada equipe) que deveriam integrar um ambiente informatizado, sendo uma no contexto da Geometria e outra no da Álgebra.

Os temas das atividades foram selecionados pelos professores pesquisadores – por se tratar de temas que normalmente podem dar lugar à apresentação, discussão e desenvolvimento de provas ou justificativas matemáticas – e atribuídos a cada equipe, conforme quadro a seguir.

	Álgebra	**Geometria**
Equipe 1	Função do 1º Grau	Triângulos e Ângulos
Equipe 2	Progressões Aritmética e Geométrica	Paralelismo e Perpendicularismo no Plano
Equipe 3	Números e Conjuntos Numéricos[9]	Paralelismo e Perpendicularismo no Espaço
Equipe 4	Múltiplos e Divisores	Propriedades de Quadriláteros
Equipe 5	Teorema Fundamental da Aritmética	Teorema de Pitágoras

Quadro 1.3: Distribuição dos temas das seqüências de atividades.

[9] A partir deste tema, que nos foi atribuído pelos professores-pesquisadores, elaboramos uma seqüência de atividades – que será descrita em detalhes no Capítulo 3 – focando o conjunto dos números racionais; em particular, a representação decimal de frações.

Cada uma destas atividades tinha como objetivo:

- Estimular a produção de conjecturas;
- Permitir uma ampla exploração de casos para validação ou refutação destas conjecturas;
- Levar o aluno a generalizar a partir de padrões observados, fomentando novas conjecturas e, conseqüentemente, novas tentativas de validação, gerando assim um processo de investigação e conduzindo-o a elaborar provas cada vez mais convincentes.

Temos por hipótese de que o trabalho empírico fica dinamizado quando se lança mão de um computador ou uma calculadora, proporcionando um grande número de verificações. Pressupomos que isto permita ao aprendiz atentar para padrões e regularidades, facilitando, assim, os processos de formulação e validação de conjecturas.

1.2.2.2 Discussão de atividades (inter-grupos)

Durante o 2º semestre de 2006, as atividades previamente elaboradas por cada equipe foram submetidas à análise pelas outras equipes do projeto. Para isso, foram disponibilizadas no ambiente *TelEduc*, ao qual todos os integrantes tinham acesso.

As análises eram feitas em reuniões presenciais quinzenais e por meio dos *Fóruns de Discussão*, ficando cada equipe incumbida de examinar as atividades de uma outra, escolhida pelos professores pesquisadores. Dessa forma, enquanto professor-colaborador, participamos da verificação de uma seqüência de atividades concebida por uma outra equipe.

Algumas dificuldades fizeram com que esta etapa se apresentasse, em certos momentos, pouco eficaz no sentido da cooperação entre as equipes. Em geral, os mestrandos que efetivamente participaram das discussões e reflexões levantadas nas reuniões presenciais e nos *Fóruns de Discussão* foram aqueles cujos trabalhos finais referiam-se à elaboração de uma seqüência de atividades, ou seja, com foco na 2ª Fase do projeto. Os demais estavam, neste momento, em vias de conclusão de suas dissertações. Talvez, por esta razão, não puderam contribuir da maneira prevista.

Referente à nossa seqüência, recebemos algumas sugestões e questionamentos via ambiente *TelEduc*, das quais destacamos alguns exemplos, com as respectivas respostas (fig. 1.1 a 1.5). A partir destas observações, procedemos a algumas modificações na seqüência de atividades.

4. **cores** — Segunda, 18/09/2006, 14:57:48

Vc queria algo com as cores?
As vezes parece que sim e as vezes não.

5. **Re: cores** — Sexta, 22/09/2006, 23:09:57

Sim. Queria agrupar da seguinte maneira:

2 e 4 (azul);
3 e 9 (amarelo);
5, 6, 7 e 10 (cada um com uma cor distinta).

O critério era: dois numeradores tinham cores iguais se um deles era uma potencia e o outro a base. Caso contrário, teriam cores diferentes.

Acabei cometendo um equívoco e colocando o 10 com a mesma cor do 5(verde).

Já fiz a alteração. Está disponível no teleduc, agora com o nome de Fracoes_Decimais_V3

Figura 1.1: Interação no ambiente TelEduc (Exemplo 1).

6. **Racionais Atividade 1** — Segunda, 18/09/2006, 15:18:49

Parte B
- Qual seria o momento de desistir?, não fica muito claro.

7. **Re: Racionais Atividade 1** — Domingo, 01/10/2006, 11:52:44

Realmente não está claro o momento de "desistir" pois não é essa a proposta. Consideramos que essa atitude deve partir do aluno.

Figura 1.2: Interação no ambiente TelEduc (Exemplo 2).

8. **questão 3 - atividade 2** Segunda, 18/09/2006, 15:31:05

achei dificeis de serem respondidas as questões 3 da atividade 2:
A partir de suas observações na planilha e de suas respostas nas questões (1) e (2), faça uma conclusão explicando de que maneira os numeradores influenciam nos resultados.
o estudante pode procurar uma resposta como: quanto maior o numerador maior será o valor racional.

9. **Re: questão 3 - atividade 2** Domingo, 01/10/2006, 11:55:49

Verdade. Nos pilotos isso ficou bem evidente. Os alunos não sabem o que responder, pois não querem escrever a mesma coisa que escreveram nas perguntas anteriores.

Figura 1.3: Interação no ambiente TelEduc (Exemplo 3).

12. **Atividade 2** Segunda, 18/09/2006, 16:05:32

Parte B
- Bloquear células que não devem ser editadas;

13. **Re: Atividade 2** Domingo, 01/10/2006, 12:26:57

Bloqueei as células convenientes, ótima sugestão.

Figura 1.4: Interação no ambiente TelEduc (Exemplo 4).

18. **Cores na nova versão** Terça, 26/09/2006, 13:01:31

Na nova versão, no texto de explicação, aparece escrito "cor amarela", "cor verde", nas atividades 2A e 2B.

Verifiquem isso

19. **Re: Cores na nova versão** Quarta, 27/09/2006, 18:47:24

Já foi alterado. Obrigado.

Figura 1.5: Interação no ambiente TelEduc (Exemplo 5).

No capítulo seguinte, exploraremos as pesquisas de referência que subsidiaram este trabalho, fomentando e servindo de inspiração para a elaboração da seqüência de atividades, descrita no Capítulo 3.

CAPÍTULO 2
O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROVA EM MATEMÁTICA

Eu gostava de pensar nas aplicações da matemática ao mundo físico, e esperava que algum dia haveria uma matemática do comportamento humano, tão exata quanto a matemática das máquinas. Eu esperava isso, porque gostava de demonstrações e, na maior parte do tempo, esse motivo pesava mais que o desejo, que eu também sentia, de acreditar no livre-arbítrio.

(Bertrand Russell)

2.1 Introdução

A preocupação com o ensino de provas no Brasil é um fenômeno recente, tendo iniciado em meados dos anos 90.

Conforme mencionamos no Capítulo 1, os PCN (BRASIL, 1998) apontam para a importância do desenvolvimento de certas atitudes na formação do cidadão, tais como levantar hipóteses e argumentar. Neste sentido, propõem uma abordagem que valorize situações nas quais os alunos tenham a oportunidade de levantar hipóteses e sejam motivados a justificar resultados. Concordando com estas idéias, consideramos que o ensino de provas em Matemática exige, antes de tudo, despertar no aprendiz a convicção de que estas são necessárias e, sobretudo, acessíveis.

Em relação à abordagem das provas na Educação Básica, Mello (1999) constata a possibilidade de um trabalho com alunos do Ensino Fundamental por meio da aplicação de uma seqüência didática que, segundo a autora, "favoreceu o aprendizado da técnica da *demonstração* em geometria".

Carlovich (2005), no que diz respeito aos livros didáticos, faz um paralelo entre obras dos anos de 1990 e de 2000 e verifica que o enfoque axiomático foi dando lugar a um enfoque empírico no tratamento de provas de propriedades geométricas.

Diante deste panorama, concebemos o trabalho com argumentações e provas na sala de aula como um meio para que o aluno possa compreender e vivenciar o processo de produção de uma prova. Assim, este trabalho deve, a nosso ver, ir além da mera reprodução de provas formais – incessíveis para a maioria dos alunos – colocando-os efetivamente perante situações de levantamento de conjecturas e construção de justificativas matemáticas.

Consideramos que, com esta abordagem, o aprendizado de provas se aproxima da atividade do matemático, na medida em que o aluno produz suas próprias conjecturas e busca estratégias particulares para convencer a si mesmo e aos outros da veracidade destas. Isto faz com que a sala de aula seja um ambiente privilegiado em promover esta aproximação, visto que, fora do contexto escolar – como no cotidiano ou em outras ciências – uma prova pode se confundir com uma evidência empírica.

Buscamos então, neste capítulo, sintetizar alguns resultados de pesquisas em Educação Matemática, relativas à temática do projeto AProvaME, descrevendo algumas ferramentas teóricas que embasarão as escolhas e análises presentes neste trabalho.

Iniciamos com uma classificação dos diferentes tipos de prova propostos por Balacheff (1988), na qual nos baseamos desde a 1ª Fase do projeto e que será nosso parâmetro para avaliação das provas produzidas pelos alunos no desenvolvimento das situações de aprendizagem, apresentadas no Capítulo 3. Ainda no contexto da produção dos alunos e de suas concepções em relação à prova, teremos como referência o trabalho de Healy e Hoyles (2000), e, sobre as funções da prova na Matemática Escolar, nos apoiaremos nas idéias de De Villiers (2001).

2.2 Tipos de provas

No contexto escolar, em geral, ao se construir uma prova, busca-se convencer alguém ou a si próprio de que determinada proposição é verdadeira. O nível de generalidade de uma prova, bem como a qualidade dos argumentos necessários a este convencimento, é variável. Com efeito, um aluno pode se convencer de que um teorema é válido após a constatação de que seu enunciado satisfaz alguns casos particulares, ao passo que não se pode esperar que um argumento deste tipo convença um matemático. De fato, para se validar uma proposição no domínio da Matemática, é preciso uma demonstração ou prova, nos moldes deste domínio, com todo o rigor e a formalidade necessários. Já na Matemática escolar acreditamos que os argumentos ou justificativas dos alunos, ainda que não constituam uma demonstração aceita pela comunidade matemática, devam ser tratados como objetos de ensino e não apenas como respostas inconsistentes.

Neste sentido, Balacheff (1988) diferencia os termos *prova* e *demonstração*, sendo o primeiro mais abrangente e o segundo, mais particular. Para este pesquisador, uma prova é um discurso que valida uma proposição, para uma determinada comunidade, podendo assumir diversos níveis de generalização, ao passo que uma demonstração é um tipo particular de prova que valida uma proposição por meio de um encadeamento dedutivo rigoroso e formal, em termos matemáticos.

Alguns pesquisadores fazem distinção, ainda, entre os processos de *argumentação* e *demonstração*. É o caso de Duval (1989) que, inclusive, considera que há uma ruptura cognitiva entre um processo e outro. Para este pesquisador, a estrutura de uma argumentação diferencia-se da estrutura de uma demonstração, já que em uma argumentação tem-se uma sucessão de idéias não necessariamente estruturadas dedutivamente, o que caracterizaria uma demonstração.

No que tange ao significado da palavra *prova*, adotaremos neste trabalho a posição de Balacheff (1988). Desta maneira, referir-nos-emos ao termo *prova* como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita no âmbito da Matemática, mas, sim, no contexto escolar, ou seja, como uma produção de aluno, que pode ser classificada de acordo com seu nível de generalidade.

O termo *demonstração* será reservado a um tipo de prova que envolve um raciocínio no qual são usadas regras de inferência, baseado em um conjunto de axiomas e outras propriedades já demonstradas que resulta em uma conclusão, como nos processos hipotético-dedutivos de diversos modelos matemáticos. Na descrição que segue, este tipo de prova é designado por *cálculo nas afirmações*.

Balacheff (1988) divide as provas em *pragmáticas* e *conceituais*; as *pragmáticas* se apóiam em ações, em que o conhecimento necessário não é formulado explicitamente, e as *conceituais* baseiam-se em propriedades e nas relações entre elas. As *provas pragmáticas* e conceituais são ainda subdividas por Balacheff (1988) em níveis, de acordo com o grau de generalidade.

As *provas pragmáticas* são divididas em três níveis.

- *Empirismo ingênuo*: não há generalidade no argumento. O aluno conclui a partir da observação de casos particulares. Como exemplo, temos a resposta de Beth na questão A1 do nosso questionário sobre provas.

Resposta de Beth

$2+2=4 \quad 4+2=6$
$2+4=6 \quad 4+4=8$
$2+6=8 \quad 4+6=10$

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Figura 2.1: Resposta de Beth na questão A1 do questionário sobre prova.

Não há nenhuma alusão à generalidade, ou seja, nada que caracterize, explicitamente, os números envolvidos como números pares.

- *Experimento crucial*: o aluno tenta generalizar o resultado, escolhendo um exemplo que, para ele, possui uma característica especial. No caso de se provar que a soma de dois números pares é um número par, um exemplo de *experimento crucial* seria escolher dois números pares, suficientemente "grandes", somá-los, obtendo como resultado um número par e concluir que isto vale para quaisquer dois números pares. Neste caso, o aluno estaria considerando como crucial o fato de se tomar números "grandes".

- *Exemplo genérico*: o aluno explicita, no seu exemplo, as características que o relacionam com os demais da sua classe, dando ao seu argumento um caráter de generalidade. Tem-se, então, um pragmatismo, dado que se faz uso de exemplos ou casos particulares, mas, ao mesmo tempo, incluem-se elementos que evidenciam a generalidade da questão. Dessa forma, o *exemplo genérico* situa-se em um nível de generalidade que se aproxima de uma *prova conceitual*. Como exemplo, temos a resposta de Hanna na questão A1 do referido questionário sobre provas.

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Figura 2.2: Resposta de Hanna na questão A1 do questionário sobre prova.

Apesar de escolher um caso particular de adição de números naturais, ela explicita o que caracteriza um número par qualquer quando o representa como um produto, em que um dos fatores é 2 e, na soma, indica a existência do fator comum, neste caso, o fator 2.

As *provas conceituais* são divididas em dois níveis.

- *Experimento de pensamento*: neste caso, o foco da construção da prova são as propriedades dos objetos e as relações entre elas. Desse modo, os resultados são obtidos por meio de um raciocínio dedutivo.

Como exemplo, transcrevemos a seguir a resposta de Duda em A1.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai
ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Figura 2.3: Resposta de Duda na questão A1 do questionário sobre prova.

Nesta prova, Duda explicita uma propriedade comum a todos os números pares e, ao constatar que esta propriedade também se verifica para toda soma de dois números pares, conclui que a afirmação dada é verdadeira.

- *Cálculo nas afirmações*: é uma prova completa e rigorosa, ou seja, os axiomas e os passos do processo dedutivo são explicitados por meio da linguagem formal da Matemática.

Exemplos de *cálculos nas afirmações* são as demonstrações formais, normalmente encontradas no contexto da Matemática do Ensino Superior.

Já no âmbito da Matemática da Educação Básica parece-nos natural que, inicialmente, para seu próprio convencimento, o aluno apele ao empirismo. Esta é uma atitude comum quando se busca verificar a validade de uma afirmação, inclusive para os profissionais como matemáticos ou professores de Matemática. O que se espera é que os alunos que adotam este tipo de validação possam passar para o estágio da *prova conceitual*, usando a experiência empírica como uma ferramenta na busca de padrões, propriedades e no levantamento de conjecturas.

Entretanto, esta passagem não parece ser espontânea nem natural, ao contrário, revela-se muito complexa para os aprendizes. Balacheff (1988) aponta que esta passagem prescinde da apropriação do caráter genérico da situação, o que exigiria d*escontextualização*, *despersonalização* e *destemporalização* do objeto em jogo. O pesquisador considera que um objeto é descontextualizado quando é visto como componente de uma classe de objetos; é despersonalizado quando não se leva em conta quem ou o que agiu sobre este objeto e é destemporalizado quando tornamos independentes as ações sobre o objeto de seu tempo e sua duração.

Acreditamos, assim, que esta passagem merece atenção de professores e educadores, devendo ser alvo de ensino específico. Nesse sentido, nossa hipótese é de que um trabalho que considere a prova como um processo mais amplo, envolvendo fases de conjecturas e possibilitando utilização de *exemplos genéricos*, pode auxiliar nesta difícil transição do experimental para o conceitual.

2.3 Um estudo sobre concepções de alunos sobre prova

Neste item, discutiremos alguns resultados apresentados no trabalho realizado por Healy e Hoyles (2000), no qual as pesquisadoras fazem um estudo das concepções de alunos sobre provas em Álgebra. Para o levantamento destas concepções, elaboraram e aplicaram a alunos ingleses com idades de 14 a 15 anos um questionário sobre provas, que serviu de base para nossa pesquisa na Fase 1 do projeto AProvaME, conforme mencionamos no Capítulo 1 (p. 20).

As autoras sustentam que provar, em Matemática, é uma tarefa que difere da de provar em outros âmbitos, principalmente no cotidiano. O que é aceito como prova em contextos em que se manipulam objetos concretos e argumenta-se sobre fatos isolados não é aceito em Matemática. Assim, argumentar e provar em situações que envolvam generalidade não é uma prática comum fora da Matemática. Para Balacheff (1999 apud PIETROPAOLO, 2005, p. 75), "Haveria assim um grande obstáculo entre argumentação cotidiana – na qual uma evidência empírica é aceita como prova – e a prova matemática formal".

Segundo Healy e Hoyles (2000), para os alunos, há provas que explicam e convencem, mas estas não são, necessariamente, as que gozam de um melhor *status* para eles.

> [...] os alunos possuíam duas concepções simultâneas e diferentes de prova. Aquelas concepções sobre argumentos que eles consideravam que receberiam as melhores notas e aquelas sobre os argumentos que eles adotariam para si mesmos (HEALY e HOYLES, 2000, p. 396).

Esta afirmação refere-se à questão A1[10] do questionário sobre provas elaborado por Healy e Hoyles (2000). Nesta questão, os alunos deveriam escolher, entre as provas apresentadas, aquela que mais se parecia com a que eles dariam e aquela à qual, segundo eles, o professor atribuiria maior nota. Entre os sujeitos da pesquisa, nitidamente há um comportamento ambíguo em relação ao uso da Álgebra: eles não a escolhem quando precisam expor seus argumentos, mas o mesmo não ocorre quando avaliam um argumento. Em outras

[10] No questionário elaborado para nossa pesquisa, utilizamos esta mesma questão, com adaptação dos argumentos.

palavras, apesar de perceberem a limitação dos casos particulares e, de certa forma, raciocinarem por indução a partir destes, valorizam as provas algébricas, de caráter formal, mesmo não se saindo bem em construí-las. As autoras complementam:

> [...] os alunos preferiram argumentos que eles poderiam avaliar e que eles acharam convincentes e explicativos, preferências estas que excluíam Álgebra. O argumento empírico predominou nas construções de provas dos próprios alunos embora a maioria dos alunos estivesse consciente das limitações deste empirismo (HEALY e HOYLES, 2000, p. 396).

Em seus estudos, estas autoras destacam alguns tipos de argumentos usados pelos alunos, relacionados à classificação de Balacheff (1988) e também à forma, dividindo-os em *empíricos*, quando o aluno fundamenta seu raciocínio na sua experiência concreta, muitas vezes baseado em exemplos ou casos particulares; *formais ou algébricos*, quando o aluno apresenta aspectos gerais de forma simbólica; e *narrativos*[11], quando o aluno descreve seus argumentos em linguagem natural.

No cotidiano, provar é uma atividade geralmente focada em exemplos, mais especificamente em fatos. Assim, parece-nos natural que os alunos utilizem *argumentos empíricos* em construções de prova, mesmo que muitas vezes tenham consciência de que casos particulares não dêem conta de provar uma afirmação matemática em sua generalidade.

A formalidade matemática parece gozar de um *status* de algo distante e, por vezes, inatingível para os alunos. A prova formal expressa em linguagem simbólico-algébrica é tida por eles como o "caminho" correto, o mais "lógico" para se provar algo, aquele que os professores de Matemática utilizam, mas do qual eles, alunos, estão distantes. Este *status* fica evidente quando julgam este tipo de argumento. De acordo com Healy e Hoyles (2000):

> [...] os argumentos que incluíram Álgebra eram claramente os preferidos dos alunos [...] quando eles fizeram a escolha para melhor nota. [...] Claramente, muitos alunos não haviam checado a lógica dos argumentos que eles haviam escolhido para melhor nota, mas, ao invés disso, suas atenções foram desviadas pela presença da forma algébrica (p. 412).

[11] Esta foi a denominação usada pelas autoras e está sendo interpretada por nós como referente à forma, em particular, ao tipo de registro utilizado, correspondendo a argumentos expressos em língua natural, também chamados de *argumentos com palavras*.

No questionário de provas (HEALY e HOYLES, 2000), esse foi o caso na escolha da resposta de Eric, reproduzida na figura abaixo.

Seja x = um número ímpar qualquer.

Seja y = um número ímpar qualquer.

$x + y = z$

$z - x = y$

$z - y = x$

$z + z - (x + y) = 2z$

Então Eric diz que a afirmação é verdadeira.

Figura 2.4: Resposta de Eric na questão A1 do questionário sobre provas.

Conforme indicado pelas autoras, esta resposta foi escolhida por 42% dos alunos como a que eles julgavam que seus respectivos professores dariam a melhor nota.

Em entrevista com os alunos, constatou-se que “muitos não haviam checado a lógica dos argumentos que eles escolheram para melhor nota, mas o fizeram pela presença da sua forma algébrica” (HEALY e HOYLES, 2000, p. 412). Conseqüentemente, quando tinham que elaborar suas provas, embora não se sentissem aptos a manipular objetos algébricos, alguns procuraram inserir Álgebra em seus argumentos.

O fato citado anteriormente de que alguns alunos escolhem *argumentos algébricos*, sem ao menos examinar a lógica envolvida, parece refletir uma atitude de adotar este tipo de argumento como uma tentativa de dar maior precisão às suas justificativas ou de apresentá-las sob uma forma que se assemelha à do professor. Dessa forma, verifica-se que poucos demonstram alguma habilidade ao tentarem usar Álgebra em suas provas.

> Em ambas as questões de múltipla escolha, [...] os argumentos algébricos foram os menos freqüentemente selecionados como os mais próximos aos argumentos que os alunos usariam e a Álgebra raramente foi usada como uma linguagem por meio da qual os alunos tentaram escrever suas próprias provas [...]. Quando os alunos davam argumentos algébricos, freqüentemente [...] eles pareciam simplesmente jogar letras de uma maneira ilógica, sem sentido (HEALY e HOYLES, 2000, p. 413).

Ao contrário desse insucesso em *argumentos algébricos*, os alunos tendem a apresentar provas mais criativas e com raciocínios dedutivos quando utilizam *argumentos narrativos*. “[...] 42% dos *argumentos narrativos* foram de provas completas [...] e aproximadamente dois terços dos alunos que adotaram esse modo de argumentação usaram algum raciocínio dedutivo” (HEALY e HOYLES, 2000, p. 415).

Considerando este resultado, julgamos importante proporcionar oportunidades para que os alunos exponham seus raciocínios e produzam explicações por meio de *argumentos narrativos*. Esperamos, com esta abordagem, obter resultados semelhantes aos de Healy e Hoyles (2000), ou seja, respostas com raciocínios dedutivos baseados em idéias e propriedades matemáticas. Neste sentido, visamos deslocar o foco da prova como um texto formal – objeto inacessível aos alunos – tratando-a como uma forma de registro de raciocínio.

2.4 As funções da prova

Para se trabalhar com provas em uma sala de aula de Matemática, é preciso que se tenha clara a pertinência disso, em particular, o porquê e para quê provar uma determinada afirmação. É evidente que para convencer um aluno da veracidade de uma afirmação não é necessária uma prova formal. Muitas vezes, principalmente em Geometria, o resultado pode parecer óbvio e, quando não, geralmente a palavra do professor é suficiente. Neste contexto, é comum que surjam questões como “Por que demonstrar o que é óbvio?” ou “Por que demonstrar algo que o professor já afirmou ser verdade?”.

Acreditamos que, dada uma proposição matemática, a necessidade de validá-la deve ter sentido para o aprendiz e as situações de aprendizagem devem motivá-lo a buscar uma prova ou uma justificativa. Caso contrário, o aluno ocupará uma posição passiva em relação ao processo de prova.

Para criar situações que favoreçam o aparecimento dessa necessidade, talvez com as mesmas situações nas quais nós, professores, nos vemos motivados a buscar uma prova, julgamos essencial discutir os diversos papéis que esta pode assumir na Matemática Escolar.

Neste sentido, nos apoiaremos nas idéias de De Villiers (2001), que se inspirou na atividade de matemáticos, procurando investigar a natureza desta, de modo a caracterizar as diversas funções da prova no âmbito da Matemática e trazê-las para o da Matemática Escolar.

A questão "Que funções tem a demonstração na própria Matemática que podem ser utilizadas na sala de aula para tornar a demonstração mais significativa para os alunos?" (DE VILLIERS, 2001, p. 1) emana de um quadro, apontado pelo autor, no qual a idéia de que "a demonstração é usada principalmente para tirar dúvidas, sejam elas pessoais e/ou de outros cépticos" (DE VILLIERS, 2002, p. 3) influencia a discussão e a prática do ensino de provas.

Este pesquisador busca então uma discussão mais ampla, em que a prova pode assumir diversos papéis que "em algumas situações são muito mais importantes para os matemáticos do que a mera verificação" (ibid., p. 3). As funções que uma prova pode assumir, segundo De Villiers (2001), são descritas a seguir.

2.4.1 Explicação

O fato de estarmos convencidos da veracidade de uma afirmação não quer dizer, necessariamente, que conhecemos a explicação ou o porquê desta veracidade. Podemos estar convencidos porque o professor assim afirmou ou mesmo por termos nos servido de um *software* matemático que, visualmente, nos convenceu. Neste caso, uma prova teria a função de explicar os "porquês" em jogo.

2.4.2 Descoberta

A busca por uma prova é um processo que prescinde de uma atitude investigativa e de criatividade, o que pode nos levar a conclusões que provavelmente não encontraríamos se não tivéssemos lançado mão de uma prova. Segundo De Villiers (2001), "[...] a demonstração é, portanto, não apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas muitas vezes também uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados" (DE VILLIERS, 2001, p. 7).

2.4.3 *Verificação*

Este talvez seja o papel mais evidente de uma prova. Podemos estar convencidos por processos indutivos ou empíricos, mas dúvidas ou incertezas só podem ser dirimidas por meio de uma prova. Conforme afirma De Villiers (2002, p. 11), "uma explicação lógica ou demonstração é necessária para ter a certeza absoluta".

2.4.4 *Desafio intelectual*

Diferentemente da *descoberta*, em que se podem encontrar objetos ou, particularmente, descobrir fatos matemáticos, dos quais sequer se conhecia a existência, tem-se, neste caso, o desafio de se buscar ou se provar algo que já se sabe que existe ou que é verdadeiro. A prova como *desafio intelectual* foca o "caminho" a ser percorrido e não o resultado final, ou seja, a argumentação assume o papel principal em detrimento da veracidade da afirmação.

2.4.5 *Sistematização*

Dentro de um sistema dedutivo, cada proposição é validada a partir de uma verdade anterior. Esta verdade anterior ou é um axioma, ou uma proposição já provada. Dessa forma, a prova assume um papel central na sistematização de resultados, relacionada à estrutura de um modelo matemático.

2.4.6 *Comunicação*

A prova pode assumir um papel de *comunicação*, de interação, quer seja entre matemáticos, entre professores e alunos ou até mesmo entre alunos.

Para isso, faz-se necessário que o receptor da mensagem, no caso a prova, possua um conhecimento subjacente que lhe permita compreendê-la. Além disso, há, entre emissor e receptor, "[...] uma negociação subjetiva, não apenas dos significados dos conceitos em jogo, mas também implicitamente dos critérios relativos ao que é um argumento aceitável" (DE VILLIERS, 2001, p. 5).

Das funções que uma prova pode assumir, a *explicação* é aquela à qual daremos mais ênfase na elaboração da seqüência de atividades, objeto de nosso estudo. Assim, em nossas atividades, pretendemos propor um trabalho de investigação e explicação do porquê da validade de determinadas proposições em cada situação abordada.

Inspirados por estas idéias passamos à elaboração das atividades – descritas no Capítulo 3 – com as quais procuraremos explorar a relevância da manipulação empírica como importante ferramenta na etapa de levantamento de conjecturas. Não esperamos que os argumentos apresentados sejam formais ou rigorosos, mas que apresentem elementos que evidenciem uma atitude investigativa dos alunos na busca de explicações.

Procuraremos propor situações que contemplem várias etapas do processo de prova, assumindo esta vários papéis, levando os aprendizes a entender a sua importância dentro do contexto da Matemática.

2.5 Algumas considerações para nosso estudo

Diante das referências teóricas e de pesquisas apresentadas, admitimos que provas construídas por alunos devem ser analisadas, no âmbito da Matemática Escolar, sob diferentes aspectos, formas e considerando-se diferentes níveis de generalidade. A classificação dada por Balacheff (1988) nos permite examinar amplamente as construções de prova dos alunos de maneira que possamos verificar em que medida, nas situações de aprendizagem propostas, os aprendizes encontram elementos ou condições para evoluírem das *provas pragmáticas* às *conceituais*.

Conforme Healy e Hoyles (2000) nos apontam, há uma predominância de *argumentos empíricos* nas construções de prova dos alunos. Ainda que muitos deles não considerem este tipo de argumento como satisfatório, o recurso à Álgebra não é uma atitude comum e, quando ocorre, manifesta a pouca habilidade dos alunos com a linguagem algébrica. Esta concepção dos alunos não deve, a nosso ver, motivar o nosso desprezo ao trabalho empírico. Pretendemos tratar este trabalho como uma etapa importante e inerente à atividade matemática, buscando reproduzi-lo em sala de aula.

Sob esta perspectiva, buscamos criar situações de aprendizagem que propiciem aos aprendizes "olhar" para a experiência empírica como uma ferramenta na busca pelas características gerais das relações e propriedades dos objetos matemáticos em questão. Partindo do trabalho com os *argumentos empíricos* – que são os mais acessíveis aos alunos e os que eles mais utilizam em suas construções de prova (HEALY e HOYLES, 2000) – procuraremos investigar condições para uma evolução desse trabalho empírico. Neste sentido, acreditamos que os *exemplos genéricos* possam contribuir nesta passagem, já que trazem, em sua essência, elementos empíricos (referindo-se a casos particulares) e conceituais (com características que relacionam os casos particulares a uma classe).

Daremos prioridade aos *argumentos narrativos* tendo como hipótese que com este tipo de argumento é mais provável que os alunos apresentem raciocínios dedutivos, conforme verificaram Healy e Hoyles (2000) com seus sujeitos. Para isto, não daremos nenhum indício aos alunos de que devem fazer uso de formalidade na linguagem, inclusive não apresentando exemplos de provas como fizemos, propositalmente, no questionário sobre provas. Dessa forma, não trabalharemos com proposições ou teoremas previamente enunciados e já conhecidos pelos alunos. As proposições a serem justificadas por eles surgirão de suas próprias conjecturas acerca dos objetos envolvidos em cada tarefa proposta. Neste sentido, esperamos que as provas dos alunos possam assumir, além do papel de convencimento ou *verificação*, um caráter de *explicação* e de *comunicação*, podendo inclusive levar a *descobertas*.

Segundo De Villiers (2001), as diversas funções da prova vão além do papel de *verificação*, embora no ensino este seja enfatizado. Como afirmamos anteriormente, pretendemos propor situações em que as provas assumam outros propósitos, principalmente os de *explicação* e *comunicação*.

No capítulo seguinte, descrevemos o processo de elaboração da seqüência de atividades, objeto de estudo deste trabalho, e de que maneira estas idéias nos influenciaram neste processo.

CAPÍTULO 3
A SEQÜÊNCIA DE ATIVIDADES

> *Podemos ir longe, se começarmos de muito perto. Em geral começamos pelo mais distante, o* supremo princípio*, o* maior ideal*, e ficamos perdidos em algum sonho vago do pensamento imaginativo. Mas, quando partimos de muito perto, do mais perto, que é nós, então o mundo inteiro está aberto -- pois nós somos o mundo. Temos de começar pelo que é real, pelo que está acontecendo agora, e o agora é sem tempo.*
>
> (Jiddu Krishnamurti)

3.1 Introdução

Com a seqüência de atividades, que passaremos a descrever, visamos inserir os alunos em um processo de investigação, em que eles possam, ao longo da execução das atividades, levantar conjecturas e, posteriormente, produzir argumentos para validá-las ou encontrar contra-exemplos para refutá-las, evoluindo no processo de construção de provas de um nível empírico a um nível conceitual, no sentido de Balacheff (1988).

Os argumentos esperados são aqueles que estão além da observação visual e/ou empírica, ou seja, embasados em propriedades dos objetos em jogo e considerando a generalidade de cada situação.

As situações foram criadas de maneira que a prova assuma papéis que vão além do papel de *verificação*[12], como os papéis de *explicação*, *comunicação* e *descoberta*, propostos por De Villiers (2001).

Para que os alunos tenham a oportunidade de expor e discutir suas idéias ao longo da execução da seqüência, optamos por aplicá-la a duplas de alunos. Esperamos que este tipo de situação, em particular, favoreça o surgimento de provas com as funções de *comunicação* e *explicação*. Segundo Balacheff, a interação social gera situações de argumentação e "[...] se

[12] Neste trabalho, os termos *comunicação*, *descoberta*, *explicação, verificação*, quando relacionados aos papéis ou funções de uma prova, foram tomados no sentido de De Villiers (2001), conforme descrito no Capítulo 2 (p. 39).

manifestaria claramente como um instrumento potente que serviria para possibilitar os processos de devolução aos alunos da responsabilidade matemática sobre as atividades e suas produções" (BALACHEFF, 1999 apud PIETROPAOLO, 2005, p. 75).

Para realizar esta seqüência de atividades, cada dupla dispõe de um material impresso e de um computador. O material impresso corresponde a uma ficha de trabalho que designaremos por Ficha[13] (Anexo III), em que a dupla registra suas respostas e justificativas. No computador, será disponibilizado um arquivo do *Microsoft Excel*, contendo quatro planilhas (Anexo IV), que designaremos por Planilha.

É importante ressaltar que em nenhum momento a Planilha fornece respostas ou correções de erros, mas permite a verificação de hipóteses empiricamente, ou seja, potencializa o campo de investigação. Cabe aos alunos a iniciativa de reformular suas hipóteses e efetuar eventuais correções.

Conforme destacado no Capítulo 1, "Números Racionais" foi o tema – relacionado à Álgebra – selecionado para a nossa equipe. Optamos, então, por elaborar uma seqüência de atividades abordando as relações entre os componentes de uma fração (numerador e denominador) e a sua representação decimal.

Espera-se que os alunos, por meio de tarefas que envolvem estas relações, possam distinguir, sem dividir o numerador pelo denominador, as frações em dois grupos: o das frações que correspondem a números decimais exatos e o das que correspondem a dízimas periódicas.

Antes de passarmos à apresentação das atividades que compõem a seqüência, faremos algumas considerações sobre os objetos matemáticos tratados, bem como alguns objetivos gerais relacionados ao conteúdo.

[13] Os arquivos referentes à Ficha e à Planilha utilizadas neste trabalho, encontram-se disponíveis em CD-Rom anexo, sob a forma de arquivo *Word* e *Excel*, respectivamente.

3.2 Breves considerações sobre números racionais

Em razão de trabalharmos com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio, que foram nossos sujeitos na experimentação, focamos o trabalho nas relações entre representação fracionária e decimal de números racionais, por considerarmos que esses alunos já foram introduzidos nesse campo numérico e também nas formas de conversão de uma representação em outra.

Buscaremos, então, uma exploração, por parte destes alunos, das relações entre as duas representações, associando o comportamento dos componentes de uma fração (numerador e denominador) à sua forma decimal (como número decimal exato ou dízima periódica).

Neste sentido, é possível que as resoluções dos alunos estejam ligadas ao *subconstruto decimal do número racional*, que, "segundo Behr et al. (1983), enfatiza as propriedades desse tipo de número, na sua representação decimal, associadas ao sistema de numeração decimal" (NACARATO et al., p. 53). Conforme estes autores, "entendem-se por construto as elaborações e sistematizações conceituais, com base em dados simples. Subconstrutos seriam as idéias que compõem um determinado construto" (ibid, p. 64).

Embora a Planilha seja o recurso utilizado para efetuar a divisão do numerador pelo denominador, a idéia de dividir um número pelo outro estará presente, sendo, portanto, percebida pelos alunos, que poderão fazer alusão a critérios de divisibilidade, e não, necessariamente, à decomposição em fatores primos. Procuraremos motivar esta última, a fim de aprofundar as relações estabelecidas pelos alunos.

Passaremos, agora, a descrever cada uma das quatro atividades da seqüência, destacando suas propostas, objetivos, justificando nossas escolhas e apontando o que esperamos que os alunos alcancem em cada etapa.

3.3 Descrição das atividades

3.3.1 Atividade 1

O objetivo desta atividade é levar os alunos a observar os denominadores de algumas frações e a decidir, para cada denominador, se a respectiva fração gera – nunca, às vezes ou sempre – uma dízima periódica, quando representada na forma decimal. Além disso, é proposto aos alunos que justifiquem suas respostas.

Com esta atividade, buscamos inserir os alunos em uma das etapas do processo de provas: o levantamento de conjecturas e a produção de provas, ainda que em um nível empírico.

A Planilha será a ferramenta utilizada pelos alunos na produção e organização dos exemplos a serem manipulados, de maneira que possam testar e visualizar, rapidamente, vários casos.

3.3.1.1 Atividade 1 - Parte A

Nesta parte, os alunos devem ler as instruções na Ficha e preencher, na planilha "Atividade 1", os numeradores das frações, com números naturais, tais que a soma em cada grupo seja 50, conforme figuras a seguir.

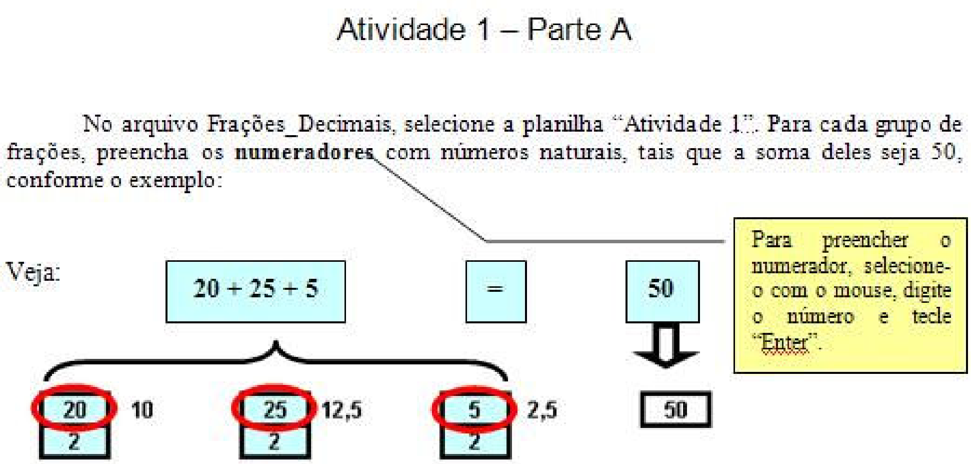


Figura 3.1: Enunciado da Atividade 1 – Parte A.

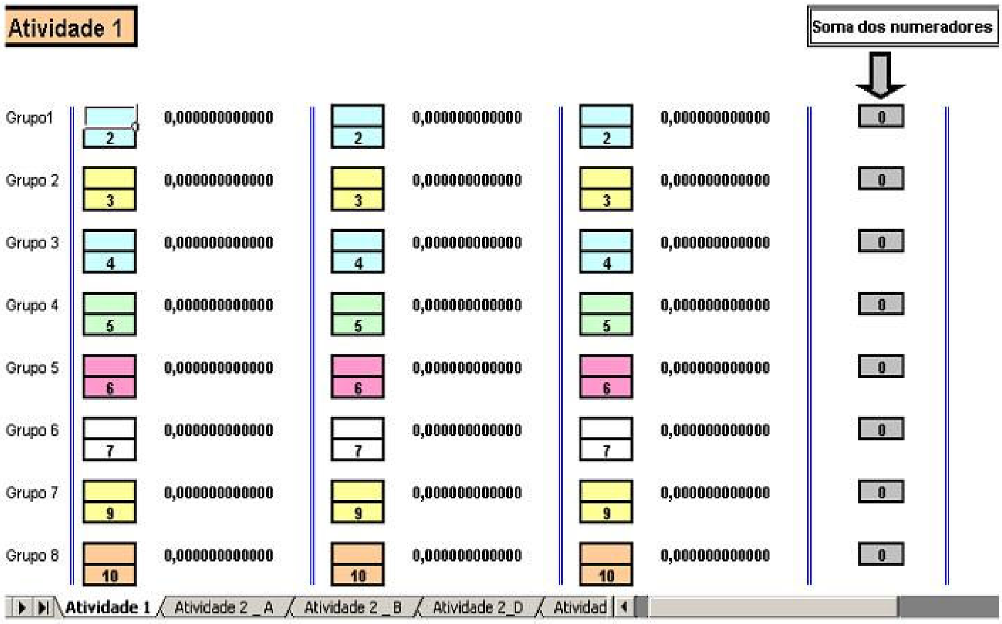


Figura 3.2: Planilha "Atividade 1".

A proposta desta etapa é subsidiar a seguinte (Parte B), no sentido de que os alunos obtenham exemplos, tanto de frações que geram dízimas periódicas quanto de frações que geram decimais exatos. Para que isto efetivamente ocorra, a soma dos numeradores das três frações de cada grupo foi fixada em 50, evitando, com isto, que figurem apenas decimais exatos. Este valor foi escolhido de acordo com os seguintes critérios:

Não poderia ser um múltiplo de 3, 6, 7 ou 9. Dessa forma, no caso dos grupos 2, 5, 6 e 7, pelo menos uma das três frações de cada grupo geraria uma dízima periódica.

Deveria ser um número suficientemente grande para permitir uma boa gama de exemplos, ampliando seu campo de investigação, no sentido de Healy e Hoyles (2000), quando afirmam que nas investigações "um padrão é encontrado e, se possível, explicado e provado".

Nesta etapa, a Planilha efetua os cálculos (somas dos numeradores das três frações e divisão do numerador pelo denominador, em cada item), dando a representação decimal da fração. Cabe aos alunos apenas a escolha dos numeradores convenientes.

Assim, ao lado de cada fração é apresentada sua representação decimal. Conforme destacado na figura 3.3, no caso das dízimas periódicas, optamos por incluir reticências para distingui-las dos decimais exatos.

Para esta etapa, não esperamos que os alunos apresentem dificuldades. No caso de dúvidas relacionadas à manipulação da Planilha, uma vez que os alunos podem não estar familiarizados com o *Microsoft Excel*, estamos prevendo uma intervenção do professor, no sentido de fornecer informações sobre os diferentes elementos da Planilha e, eventualmente, dos recursos necessários para seu uso.

3.3.1.2 Atividade 1 - Parte B

Ainda utilizando a planilha "Atividade 1", os alunos devem, agora, ajustar os numeradores – previamente preenchidos na Parte A – obtendo como representação de cada uma das frações, se possível, números decimais exatos. A soma de 50 para os três numeradores de cada grupo deve ser mantida, conforme enunciado na Ficha (fig. 3.3).

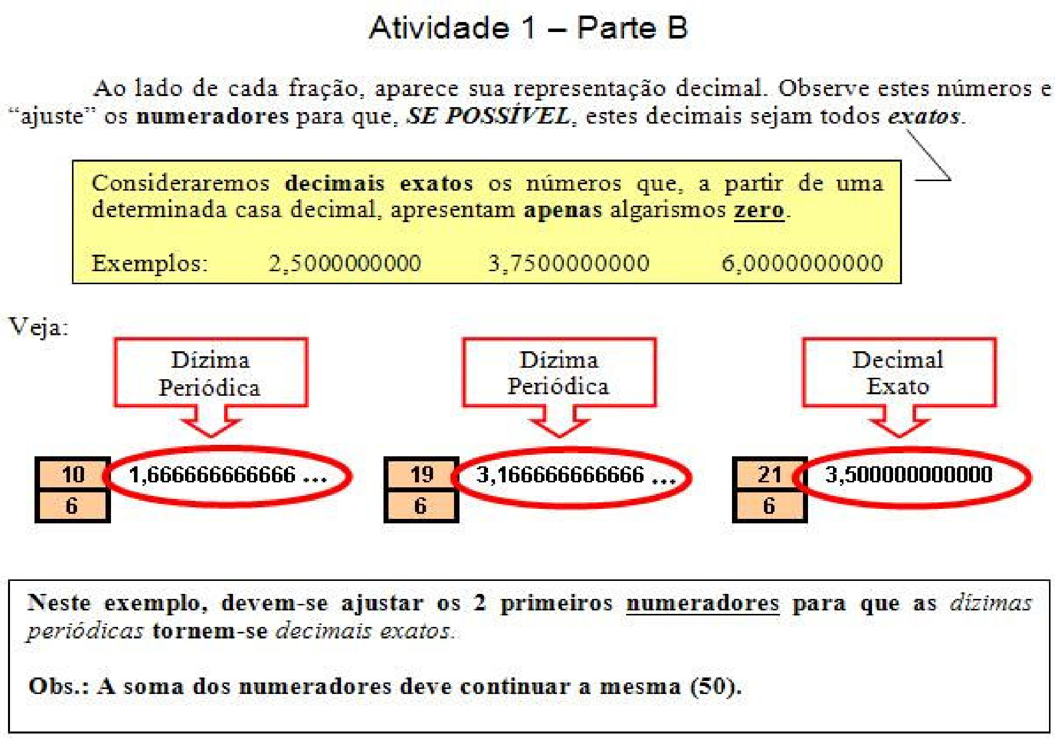


Figura 3.3: Enunciado da Atividade 1 – Parte B.

O objetivo aqui é inserir os alunos em um processo de investigação, em que tenham a liberdade de alterar os numeradores quantas vezes julgarem necessário, podendo assim verificar muitos casos e levantar conjecturas.

No grupo 2 (frações com denominador 3), por exemplo, quando os alunos preenchem os dois primeiros numeradores, obtendo decimais exatos em ambas as frações e não conseguem o mesmo na terceira – pois é impossível – surge a necessidade do ajuste. Se tentarem ajustar o terceiro numerador para que a respectiva fração gere um decimal exato, a condição de obter soma 50 nos numeradores não será mais satisfeita, surgindo a necessidade de alterar um dos dois primeiros numeradores e assim por diante, até que atentem para o fato de que nem sempre é possível satisfazer, simultaneamente, estas condições.

Estas frações ficam disponíveis para visualização e manipulação durante todo o processo. Acreditamos que o uso da Planilha potencialize estas observações, dado que fornece resultados imediatos, podendo os alunos concentrar-se apenas no comportamento destes resultados.

Consideramos que os alunos, a princípio, não percebam a impossibilidade de satisfazer as condições desta etapa. Ainda que destaquemos a expressão *se possível* no enunciado, é comum que os alunos acreditem que para um problema proposto pelo professor sempre há uma solução. Após algumas tentativas, julgamos que os alunos possam se convencer desta impossibilidade, passando à parte C. Caso isto não ocorra e comprometa o andamento das atividades, o professor deve intervir, questionando os alunos sobre esta impossibilidade ou sugerindo que passem à próxima etapa, retomando esta em seguida.

3.3.1.3 Atividade 1 - Parte C

Esta parte é composta de oito questões (C1 a C8). A partir das observações feitas na Parte B, os alunos devem analisar os denominadores, decidir quais deles podem ou não fazer com que as respectivas frações gerem decimais exatos ou dízimas periódicas e tentar justificar, escrevendo suas respostas na Ficha. Nesta etapa, espera-se que a Planilha deixe de ser apenas um "gerador" de exemplos, mas assuma um importante papel como ferramenta de validação experimental.

Aqui, o objetivo é fazer com que conjecturem e organizem suas conclusões, ainda que preliminares. Não esperamos que produzam argumentos consistentes nem definitivos, caracterizando *provas conceituais*[14], mas que tenham a oportunidade de expor o que foi observado na etapa anterior, destacando as características ou invariantes identificados. Conforme mencionamos no Capítulo 2, não demos indício de que esperamos alguma formalidade nestas justificativas, inclusive utilizando no enunciado o verbo *tentar* no intuito de dar um caráter informal à questão.

Além disso, para evitar que os alunos se limitem a casos particulares e ampliem seu campo de experimentação, incluímos, após cada afirmação, as opções "Nunca", "Às vezes" e "Sempre" (fig. 3.4), com o intuito de motivá-los a buscar as justificativas para o que observaram na Parte B.

Apesar de não estarmos propondo explicitamente o uso da Planilha, os alunos têm a liberdade de fazê-lo. Acreditamos que, diante da tarefa de justificar, os alunos passem a buscar evidências mais "fortes", principalmente no que concerne à opção "Nunca".

Atividade 1 – Parte C

A partir do que você observou, assinale uma das alternativas e justifique sua resposta:

C1	Frações com denominador 2 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

Figura 3.4: Enunciado da Atividade 1 – Parte C.

[14] Neste trabalho adotaremos as expressões *empirismo ingênuo, exemplo genérico, experimento de pensamento, prova pragmática* e *prova conceitual* no sentido de Balacheff (1988), conforme descrito no Capítulo 2. As expressões *argumento narrativo* e *argumento empírico* estão sendo tomadas no sentido de Healy e Hoyles (2000).

Inicialmente, acreditamos que os alunos apresentem *argumentos empíricos*, baseados nos exemplos obtidos. Nesta etapa, é provável que os alunos considerem as três frações de cada grupo como argumentos convincentes. Entretanto, a inclusão da questão com as opções “Nunca”, “Às vezes” e “Sempre” deve favorecer a consideração, por parte dos alunos, de mais casos ou exemplos, buscando uma análise mais ampla ou uma explicação mais geral. A escolha desse tipo de questão tem por objetivo levar os alunos a questionarem o porquê ou quando (em que condições) uma fração gera uma dízima periódica, por exemplo. Com isso, esperamos argumentos nos quais os alunos relacionem os exemplos de que dispõem com sua classe, pautados em características estruturais destes exemplos, apresentando provas do tipo *exemplo genérico*.

Nesta etapa, temos por hipótese que as interações entre os alunos propiciem um ambiente de questionamentos, refutações e busca por explicações, já que devem apresentar uma justificativa comum para a dupla.

Esperamos, nestas interações, que as provas produzidas assumam diversos papéis, no sentido de De Villiers (2001). Esperamos encontrar provas com as funções de *explicação* e *comunicação* e, apesar de não termos focado a seqüência de atividades neste sentido, acreditamos que as provas dos alunos assumam, eventualmente, o papel de *descoberta*, ou seja, que na busca por algum resultado os alunos encontrem outros.

3.3.2 Atividade 2

O objetivo desta atividade é levar os alunos a perceberem a importância de analisar os fatores que compõem os elementos em jogo – numerador e denominador de cada fração – criando condições para que identifiquem o papel destes elementos na geração de decimais exatos ou de dízimas periódicas. Com isso, visamos inseri-los em uma situação na qual eles possam utilizar o trabalho empírico como meio de identificar a classe de objetos que estão manipulando. Isto, a nosso ver, caracteriza uma ferramenta importante na busca por *provas conceituais*.

Além disso, destacamos que nesta atividade a Planilha assume tanto o papel de gerar exemplos como o de verificar hipóteses levantadas pelos alunos, conforme veremos adiante.

3.3.2.1 Atividade 2 - Parte A

Nesta parte, os alunos devem ler as instruções na Ficha e preencher a planilha Atividade 2_A com os numeradores das frações de modo a obter dízimas periódicas para um grupo de frações (primeira coluna) e decimais exatos para o outro (segunda coluna), conforme figuras abaixo.

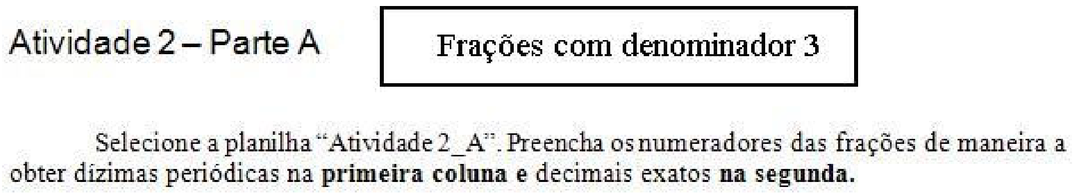


Figura 3.5: Enunciado da Atividade 2 – Parte A.

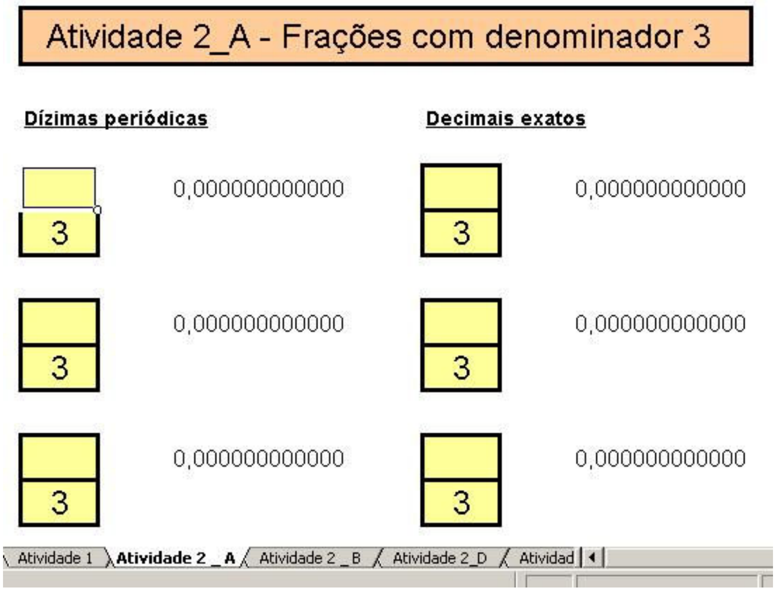


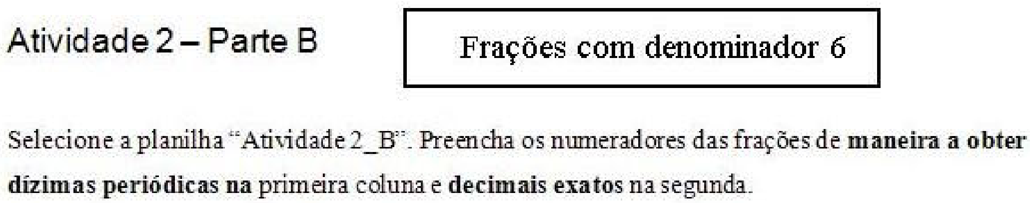
Figura 3.6: Planilha "Atividade 2_A".

A proposta desta etapa é levar os alunos a perceberem que o critério para decidir se uma fração com denominador 3 gera um decimal exato ou uma dízima periódica reside no fato de o numerador ser ou não múltiplo de 3. Entretanto, esperamos que já tenham formulado essa conjectura quando da realização da Atividade 1.

Em seguida (Parte B), colocamos este critério em confronto com o critério para frações de denominador 6, levantando a hipótese de que alguns alunos estendam, equivocadamente, o critério verificado para frações com denominador 3. Caso isto ocorra, terão a oportunidade de refletir sobre este equívoco na Atividade 3 (descrita adiante).

3.3.2.2 Atividade 2 - Parte B

Assim como na Parte A, os alunos devem ler as instruções na Ficha, preenchendo a planilha Atividade 2_B com os numeradores das frações, de modo a obter dízimas periódicas para um grupo de frações (primeira coluna) e decimais exatos para o outro (segunda coluna), conforme figuras abaixo.


Atividade 2 – Parte B

Frações com denominador 6

Selecione a planilha "Atividade 2_B". Preencha os numeradores das frações de **maneira a obter dízimas periódicas na** primeira coluna e **decimais exatos** na segunda.

Figura 3.7: Enunciado da Atividade 2 – Parte B.

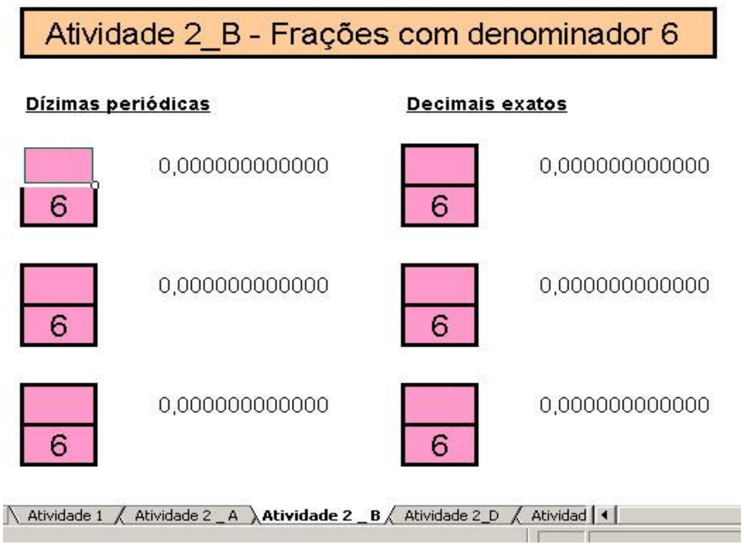


Figura 3.8: Planilha "Atividade 2_B".

Nesta parte, é provável que os alunos conjecturem que o critério, relativo ao numerador, para decidir se uma fração gera um decimal exato ou uma dízima periódica é o mesmo tanto para denominador 3 quanto para denominador 6. Julgamos que esta conjectura será importante para que os alunos percebam o risco de erro ao se generalizar a partir de um ou mais casos particulares.

Além disso, esta situação foi criada com o intuito de que os alunos percebam de que maneira o fator 2 (e, mais adiante, o fator 5) influi no resultado em questão, ou seja, que o fato de o numerador ser múltiplo do denominador é suficiente, mas não necessário, para que a fração gere um decimal exato. Assim, esperamos que as experimentações possibilitem aos alunos concluírem que, ainda que o numerador não seja múltiplo do denominador, pode-se ter como representação decimal da respectiva fração, uma dízima periódica.

Levantamos aqui a hipótese de que alguns alunos podem não estar familiarizados com os conceitos de condição necessária e condição suficiente, conjecturando conforme mencionado no parágrafo anterior. Neste caso, espera-se que preencham os numeradores com múltiplos de 6, obtendo o que é pedido em cada coluna, já que assim satisfazem a condição suficiente para que a fração gere um decimal exato. Conforme descrito a seguir, a Parte C vem complementar esta fase, retomando este critério.

Para que os alunos se deparem com situações em que o numerador não é múltiplo do denominador e ainda assim a fração gere um decimal exato – no nosso caso, os numeradores seriam múltiplos de 3 que não são múltiplos de 6 – eles devem, na Atividade 2 – Parte C, classificar algumas frações escolhidas de modo a contemplar estes casos. Acreditamos que essa etapa possa levar os alunos a ampliar a análise anterior, incluindo mais situações. Esta classificação deve ser realizada, a princípio, sem o auxílio da Planilha. Em seguida, eles a utilizam para verificar seus acertos e erros e, conseqüentemente, reelaborar suas conclusões.

3.3.2.3 Atividade 2 - Parte C

Conforme descrito anteriormente, para que os alunos não se detenham no caso particular em que o numerador é múltiplo do denominador e percebam que esta condição não é necessária para obter um decimal exato, solicitamos que classifiquem algumas representações de frações utilizando as hipóteses levantadas até então e, em seguida, verifiquem os resultados por meio da Planilha. Dessa forma, têm a oportunidade de reformular suas conclusões.

Esta parte da Atividade 2 será feita na Ficha, inicialmente, sem o auxílio da Planilha e sem efetuar cálculos (divisão do numerador pelo denominador), conforme figura abaixo.

Atividade 2 – Parte C

Baseado nas suas conclusões das partes A e B e **SEM EFETUAR CÁLCULOS**, classifique as representações decimais das frações abaixo em **decimais exatos (DE)** ou **dízimas periódicas (DP)**. Marque um "X" na sua opção:

a) $\frac{5}{6}$

D.E.	
D.P.	

b) $\frac{15}{6}$

D.E.	
D.P.	

c) $\frac{21}{6}$

D.E.	
D.P.	

d) $\frac{18}{6}$

D.E.	
D.P.	

e) $\frac{14}{6}$

D.E.	
D.P.	

Agora utilize a planilha "Atividade 2_B" e verifique se você acertou. Caso não tenha acertado todas, reformule as respostas das partes A e B.

Figura 3.9: Enunciado da Atividade 2 – Parte C.

No item (a), não esperamos, a princípio, que os alunos apresentem dificuldades, por se tratar de um numerador que não é múltiplo de 3.

Nos itens (b) e (c), presumimos que alguns alunos classifiquem a representação decimal como dízima periódica, fazendo analogia ao critério das frações de denominador 3. Conforme enunciado na questão, ao final desta etapa, os alunos terão a oportunidade de verificar as respostas, podendo reformular as justificativas dadas nas partes A e B.

Esta situação foi proposta para que os alunos possam comparar os numeradores, já que os denominadores coincidem. Na comparação entre os itens (a) e (b), por exemplo, esperamos que atentem para a decomposição, verificando que o fator 3 presente na decomposição do numerador 15 anula-se com o fator 3 presente na decomposição do denominador 6, fazendo com que a fração simplificada apresente denominador 2, o que gera, sem exceções, um número decimal exato.

Incluímos esta situação por acreditarmos que a decomposição em fatores primos não seja uma estratégia usada espontaneamente pelos alunos. Esta crença está relacionada à nossa prática docente e à verificação de que os livros didáticos, em geral, não tratam a decomposição em fatores primos em problemas que envolvem divisibilidade.

Pretendemos, assim, que os alunos tenham a oportunidade de analisar a fração irredutível equivalente à fração dada para decidir se sua representação é um decimal exato ou uma dízima periódica.

Estas situações foram incluídas na seqüência de atividades por admitirmos que, para os alunos, perceber a diferença entre condição necessária e suficiente é uma competência importante para um trabalho com argumentação e provas.

Os elementos de análise preliminar referentes às partes D, E e F desta atividade são análogos aos das partes A, B e C, respectivamente.

3.3.3 Atividade 3

O objetivo desta atividade é que os alunos classifiquem as representações decimais de algumas frações dadas, colocando em prática as conclusões obtidas nas atividades anteriores. Os alunos devem iniciar o trabalho exclusivamente na Ficha (fig. 3.10) para, ao final, conferirem suas respostas com o auxílio da Planilha.

Atividade 3

Sem usar a planilha, classifique as representações das frações abaixo em **decimais exatos (DE)** ou **dízimas periódicas (DP)**. Justifique sua resposta.

a) $\frac{785}{2}$	b) $\frac{15}{3}$	c) $\frac{7}{3}$	d) $\frac{495}{5}$	e) $\frac{59}{5}$
f) $\frac{33}{6}$	g) $\frac{14}{6}$	h) $\frac{40}{14}$	i) $\frac{35}{14}$	j) $\frac{17}{40}$

Agora, se desejar, teste os resultados na planilha "Atividade 3".

Figura 3.10: Enunciado da Atividade 3.

Uma vez que os alunos precisam responder e justificar sem o auxílio da Planilha, esperamos que busquem outros argumentos, que vão além dos *empíricos*. A título de exemplo, nos itens (h), (i) e (j) apresentamos denominadores diferentes daqueles trabalhados até então. Dessa forma, os alunos não dispõem de evidências empíricas a respeito destes “novos” denominadores e devem elaborar estratégias que os relacionem aos “antigos”.

3.3.4 Atividade 4

Nesta atividade, pretendemos que os alunos identifiquem representações decimais de frações analisando o seu numerador e denominador, descrevendo, ao final, uma regra ou método para classificar, sem efetuar a divisão do numerador pelo denominador, a representação decimal de uma dada fração.

Em linhas gerais, solicitamos aos alunos que:

1. Representem uma fração decimal como decimal exato;
2. Representem, quando possível, uma fração qualquer como fração decimal e, posteriormente, como decimal exato;
3. Expliquem o porquê de algumas frações poderem ser representadas como frações decimais e outras não;
4. Explicitem um método para decidir se uma fração pode ou não ser representada como uma fração decimal e, conseqüentemente, como um decimal exato.

Nesta atividade, restringimos o uso da Planilha à geração de exemplos de frações decimais, especificamente na Parte A, ou seja, não daremos ênfase ao trabalho empírico esperando que os alunos apresentem justificativas baseadas nas observações feitas ao longo da execução desta seqüência de atividades.

3.3.4.1 Atividade 4 - Parte A

Nesta parte, os alunos devem, fazendo uso da Planilha, preencher os numeradores de frações cujos denominadores são potências de base 10, conforme enunciado na figura 3.11. Aqui o objetivo é que os alunos percebam ou reforcem a idéia de que é suficiente que uma fração apresente uma potência de base 10 no denominador para gerar um decimal exato.

Não esperamos que os alunos apresentem alguma dificuldade nesta etapa, já que provavelmente este assunto lhes é familiar. Incluímos esta tarefa para enfatizar a relação entre uma fração decimal e sua representação decimal.

Atividade 4 - Parte A

Na planilha "Atividade 4_A", entre com valores para os numeradores das frações. Ao lado da fração, aparece sua representação decimal.

Observe que os denominadores das frações são **potências de base 10**:

$10 = 10^1$ $100=10^2$ $1000=10^3$ $10000=10^4$ etc...

Frações com denominadores deste tipo são chamadas **frações decimais.**

Com base nos resultados obtidos na planilha, descreva uma maneira prática para representar uma fração decimal como um decimal exato.

Figura 3.11: Enunciado da Atividade 4 – Parte A.

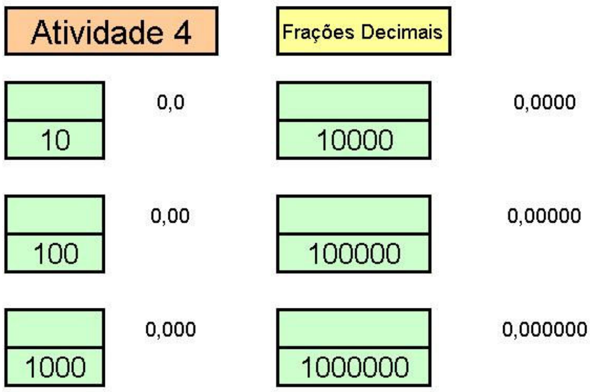


Figura 3.12: Planilha "Atividade 4".

3.3.4.2 Atividade 4 - Parte B

Com base no que observaram na Parte A, esperamos que os alunos se engajem em obter potências de base 10 a partir de denominadores quaisquer, a fim de representar uma fração qualquer como fração decimal, quando possível.

Os alunos devem, então, encontrar frações decimais equivalentes às frações dadas, justificando o porquê da impossibilidade, quando for o caso.

a) É possível fazer o mesmo para a fração $\frac{3}{5}$ e escrevê-la como fração decimal? Por quê? Justifique sua resposta.

Figura 3.13: Enunciado da Atividade 4 – Parte B, item (a).

No item (g) desta questão (fig. 3.14), solicitamos aos alunos que descrevam uma maneira de classificar a representação decimal de uma fração qualquer, analisando seu numerador e denominador.

g) Descreva uma regra para sabermos se uma fração **pode ou não** ser escrita como **fração decimal**, sem que precisemos dividir o numerador pelo denominador.

Figura 3.14: Enunciado da Atividade 4 – Parte B, item (g).

O objetivo é levar os alunos a concluir que, dada uma fração irredutível, sua representação decimal será uma dízima periódica se a decomposição do denominador em fatores primos apresentar algum fator diferente de 2 e 5 e que, caso contrário, a representação será um decimal exato.

No capítulo seguinte, caracterizamos os sujeitos envolvidos e o ambiente em que os experimentos foram realizados, bem como os procedimentos e a dinâmica da aplicação desta seqüência de atividades.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

> *Se o entendimento é uma faculdade da unidade dos fenômenos mediante regras, a razão é a faculdade da unidade das regras do entendimento sob princípios. Portanto, ela jamais se refere imediatamente à experiência ou a qualquer objeto, mas ao entendimento, para dar aos seus múltiplos conhecimentos unidade* a priori *mediante conceitos, a qual pode denominar-se unidade da razão e é de natureza completamente diferente da que pode ser produzida pelo entendimento.*
>
> (Immanuel Kant, *Crítica da razão pura*)

4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos as escolhas metodológicas que fizemos no intuito de responder às questões: "Como abordar o ensino de provas de maneira que o aluno tenha a oportunidade de vivenciar diversas etapas do processo de produção de uma prova? e "Que papel pode desempenhar uma ferramenta computacional nos processos de ensino e aprendizagem de provas?".

Buscando investigar a pertinência do ensino de provas na Educação Básica, optamos por observar os aspectos qualitativos que podem emergir de situações de aprendizagem envolvendo este tema.

Descrevemos, a seguir, os sujeitos envolvidos nesta investigação, o material utilizado na aplicação da seqüência de atividades, as condições e procedimentos de aplicação, bem como os instrumentos utilizados para a coleta de dados. Faremos também uma descrição dos desempenhos dos alunos envolvidos no experimento, quando responderam ao questionário sobre provas, na 1ª Fase do Projeto AProvaME.

Inicialmente, uma seqüência piloto foi aplicada a cinco alunos, visando aperfeiçoá-la a partir de uma sondagem no que diz respeito:

- à compreensão dos enunciados;
- ao envolvimento com a proposta da seqüência;

- à argumentação e expressão destes em linguagem escrita.

A partir dos comportamentos, das respostas e dos questionamentos apresentados pelos alunos no estudo piloto, procedemos a algumas alterações na versão inicial das atividades concebidas. No que diz respeito à proposta, não houve alterações significativas. Estas ficaram circunscritas à apresentação dos enunciados, buscando-se dar mais clareza e objetividade a cada etapa da seqüência.

Posteriormente, a seqüência já modificada foi analisada por uma das equipes de professores do projeto AProvaME, conforme exposto no Capítulo 1. As sugestões e observações desse grupo, nos *Fóruns de Discussão* do ambiente virtual *TelEduc*, foram revertidas em mais algumas modificações. Dessa forma, chegamos à versão descrita no Capítulo 3 e que será objeto de nosso estudo.

4.2 Perfil dos sujeitos

Para o estudo piloto, optamos por observar quatro estudantes trabalhando em duplas e um deles, individualmente. Escolhemos três alunos para os quais lecionávamos em um curso pré-vestibular, acreditando que poderiam participar desta elaboração de forma crítica, apontando eventuais "falhas" e sugerindo situações ou questões que pudéssemos incorporar à proposta. Esta suposição deveu-se ao fato de serem alunos com maior experiência escolar do que aqueles para os quais aplicaríamos a seqüência e por apresentarem uma postura participativa em nossas aulas. Ressaltamos que dois desses estudantes, além de nossos alunos em um curso pré-vestibular, cursavam a 3ª série do Ensino Médio em uma Escola Federal.

Além destes, julgamos conveniente aplicar a seqüência piloto a alunos da mesma faixa etária daqueles que participariam do estudo experimental. Dessa forma, convidamos uma aluna que cursava a 8ª série do Ensino Fundamental em uma escola particular. Esta, instruída por nós, escolheu uma colega de classe para formar sua dupla.

Ressaltamos que estes cinco alunos não participaram de atividades anteriores relacionadas ao projeto AProvaME. Em particular, não responderam ao questionário sobre prova, referente à 1ª Fase.

Ficamos, então, com o grupo indicado no quadro abaixo para o trabalho de aplicação-piloto.

Aluno(s)[15]	**Curso**
Isa e Jennifer	3ª série do E.M.
Lúcia	Pré-Vestibular
Luanda e Nívea	8ª série do E.F.

Quadro 4.1: Sujeitos participantes da aplicação-piloto.

No estudo experimental propriamente dito, contamos com a participação de seis alunos, que trabalharam em duplas para o desenvolvimento de todas as atividades. Estes alunos responderam ao questionário sobre provas da Fase 1 do projeto AProvaME realizada no 2º semestre de 2005. Naquele momento, todos cursavam a 8ª série do Ensino Fundamental em uma mesma escola da rede particular de Santos/SP, na qual lecionávamos, sendo que quatro deles eram nossos alunos quando da aplicação do questionário e os outros dois haviam sido no ano de 2003, quando cursavam a 6ª série do Ensino Fundamental.

Todos os onze alunos citados até aqui foram escolhidos por se mostrarem dispostos a realizar as atividades e aceitaram prontamente nosso convite para participar do experimento. Além disso, eram alunos com bom desempenho em Matemática e que, em sala de aula, apresentavam empenho em executar as atividades propostas pelo professor.

Por estes motivos e por demonstrarem desejo de participar dos experimentos, ainda que não conhecessem a proposta do trabalho, consideramos estes alunos, sob a perspectiva de Charlot (2000), como *sujeitos mobilizados*[16] para este tipo de situação.

Em outras palavras, optamos por estes alunos por mostrarem algumas características peculiares, ou seja, não foram escolhidos por algum critério de amostragem. Dessa forma, ao descrever os resultados, levaremos em conta essas características do grupo,

[15] Os nomes que constam deste quadro são fictícios.

[16] Charlot (2000) diferencia "*mobilização* (movimento do interior para o exterior do sujeito) de *motivação* (movimento do exterior para o interior do sujeito)" (MELO, 2003, p. 94).

procurando não generalizar os resultados, mas, adaptá-los à turmas mais numerosas e heterogêneas.

Faremos, no final deste capítulo, uma breve análise de suas respostas no questionário sobre prova. Além disso, estão previstas entrevistas com alguns destes alunos, cujas questões serão baseadas nesta análise e nos seus desempenhos ao longo da realização das atividades da seqüência.

4.3 Ambiente e dinâmica de aplicação da seqüência de atividades

Desde a aplicação da seqüência piloto, as atividades foram desenvolvidas em um laboratório de Informática de uma universidade particular[17] da cidade de Santos/SP, na qual atuamos como professor. Esta escolha se deu em razão de o laboratório fornecer condições que julgamos adequadas ao propósito desta pesquisa e por ser de fácil acesso.

Entre as condições oferecidas pelo laboratório, destacamos:

- Computadores em perfeitas condições de funcionamento;
- Possibilidade de agendamento para uso exclusivo do Projeto;
- Ausência de ruídos externos pela sua localização no prédio (andar exclusivo para laboratórios).

Por questões de conveniência dos sujeitos envolvidos, cada encontro foi realizado com apenas uma dupla de alunos, acompanhada pelo professor em atividade extraclasse.

Cada dupla esteve presente em dois encontros, de aproximadamente 1 hora e 30 minutos de duração cada, nos quais foi desenvolvida a seqüência de atividades. Nestes encontros, realizados em dezembro de 2006, a seqüência ficou dividida em Atividades 1 e 2 para o primeiro encontro e Atividades 3 e 4, para o segundo.

[17] Esta universidade e a escola onde estudam todos os alunos participantes do experimento fazem parte do mesmo complexo educacional.

Anteriormente a cada sessão, preparávamos o laboratório e os materiais que seriam utilizados. Colocávamos à disposição dos alunos a Ficha (já descrita no Capítulo 3) para os alunos registrarem suas respostas. Além disso, disponibilizávamos uma calculadora, já que na aplicação da seqüência piloto foi verificada a preferência de alguns alunos, em certos casos, por uma calculadora de mão à calculadora do computador ou, em alguns casos, à própria Planilha.

Para posterior análise, registramos as interações dos alunos por meio de um gravador de voz e por se tratar de uma proposta na qual os alunos deveriam manipular diversos casos, julgamos que, em vez de salvar as planilhas usadas pelos alunos, seria mais proveitoso registrar todas as inclusões e alterações feitas por eles durante a realização da atividade. Para tanto, utilizamo-nos do software *Windows Media Encoder* (W.M.E.).[18]

Contamos, então, com três instrumentos principais de coleta de dados: a Ficha dos alunos; as áudio-gravações, com as respectivas interações das duplas; e os arquivos de vídeo, gerados pelo software W.M.E.

4.4 Procedimentos metodológicos

Neste trabalho, delineamos nossos procedimentos, apropriando-nos das principais idéias da *Engenharia Didática*[19]. Desta forma, nossa pesquisa compreenderá um experimento e um processo de validação de nossas hipóteses ou questões de pesquisa, por meio da confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

A primeira fase do processo experimental de uma *engenharia didática* diz respeito às análises preliminares, ou seja, "considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão" (MACHADO, 2002, p. 201). As referidas considerações sobre os quadros teórico e didático relativos ao tema que motivaram este trabalho foram apresentadas nos Capítulos 1 e 2.

---

[18] Este *software* registra em vídeo as imagens apresentadas na tela do computador. Mais informações estão disponíveis em: <www.microsoft.com/windows/windowsmedia/pt/9series/encoder/default.aspx>.

[19] Adotaremos a caracterização de *engenharia didática* dada por Artigue (1988), "como um esquema experimental de 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino" (ARTIGUE, 1988, p. 285, apud MACHADO, 2002, p. 197).

As concepções dos alunos sobre provas foram tratadas, especificamente, no Capítulo 2, quando discutimos o trabalho de Healy e Hoyles (2000) e serão particularizadas para os sujeitos desta pesquisa mais adiante (p. 67), quando descrevemos o desempenho destes sujeitos no questionário sobre provas, aplicado na 1ª Fase do projeto AProvaME.

A etapa de concepção e análise *a priori* das situações de aprendizagem foi descrita no Capítulo 3 e os resultados da experimentação e demais elementos da análise *a posteriori* serão discutidos no Capítulo 5.

4.5 Papel do professor

Para as sessões de aplicação da seqüência de atividades, optamos por assumir o papel de professor-pesquisador, adotando a proposta de uma *engenharia didática*, na qual o professor-pesquisador se insere no *locus* da investigação (MACHADO, 2002). É importante ressaltar que, neste trabalho, o papel do professor restringiu-se ao que descreveremos neste item. Sendo assim, não demos ênfase ao processo de *devolução*[20], já que caracterizamos os alunos como *sujeitos mobilizados* (CHARLOT, 2000, apud MELO, 2003) para este tipo de tarefa.

Entretanto, para evitar influências ou provocar efeitos de contrato, assumimos um papel secundário nas *situações de ação, formulação e validação* – visando propiciar fases *a-didáticas*, já que o nosso foco era avaliar o potencial das atividades e como seriam vivenciadas pelos alunos.

Assim, durante a realização das tarefas pelos alunos, o professor-pesquisador permaneceu ao lado dos alunos, observando-os. Apenas quando solicitado, em eventuais questionamentos, procedeu aos esclarecimentos necessários. Além disso, não foram previstas *situações de institucionalização*.

Na aplicação piloto, os questionamentos mais comuns referiam-se a conceitos ou pré-requisitos (múltiplo, divisor, etc.), os quais procurávamos esclarecer. Já quando nos

---

[20] Ao longo deste trabalho, os termos *devolução*, *institucionalização, situações a-didáticas, situações de ação, situações de formulação e situações de validação* estão sendo tomados no sentido de Brousseau (1986).

deparávamos com perguntas do tipo: “Posso justificar desta maneira?” ou “Preciso escrever mais alguma coisa?”, preferíamos orientar os alunos a justificar da maneira que julgassem mais completa e convincente. Foi dessa forma que agimos também nas sessões de aplicação do estudo experimental.

4.6 Ferramentas de análise

Para análise das situações de aprendizagem nos apoiaremos na classificação de Balacheff (1988), avaliando os tipos de prova produzidos pelos alunos nas diferentes etapas da seqüência de atividades. Particularmente, interessa-nos identificar, dentre estas provas, aquelas que se caracterizam como *exemplos genéricos* por se tratar de um tipo de prova que se aproxima de uma *prova conceitual*, no que diz respeito ao nível de generalidade, podendo assim, favorecer a passagem de uma *prova pragmática* a uma *conceitual*.

No tocante aos papéis que uma prova pode assumir na Matemática Escolar, buscaremos inserir os alunos em situações nas quais a elaboração de justificativas tenha o propósito de convencer ou explicar ao colega de dupla ou a outro aluno sobre a veracidade de eventuais conjecturas levantadas, considerando que, assim, os alunos percebam a necessidade da prova com função de *explicação* e de *comunicação*.

4.7 As provas dos alunos: concepções e produções

Trataremos aqui de uma descrição, em linhas gerais, das concepções e dos tipos de prova apresentados pelos seis alunos envolvidos em nosso experimento, quando responderam ao questionário sobre provas[21] (1ª Fase do projeto AProvaME), particularmente nas questões de Álgebra. Iniciaremos com um panorama das respostas, enfocando algumas questões. Ao final, faremos um resumo por aluno, individualizando a análise.

[21] A versão integral do questionário encontra-se no Anexo II.

Denominaremos, daqui por diante, as duplas de alunos por Dupla I, Dupla II e Dupla III, compostas de acordo com o quadro abaixo:

Dupla	Alunos[22]
I	Léo e João
II	Carol e Paola
III	Manuela e Thaís

Quadro 4.2: Constituição das duplas do estudo experimental.

A observação destes dados implicou algumas de nossas escolhas quando da elaboração da seqüência de atividades. Além disso, tivemos condições de avaliar as concepções e tipos de prova que apresentaram estes alunos diante das situações propostas, o que nos permitiu entender os comportamentos destes na realização das tarefas da seqüência de atividade.

Ressaltamos que, além destas análises, realizamos entrevistas com uma dupla de alunos na última fase da coleta de dados, visando complementar a proposta da seqüência de atividades, ou seja, propor questionamentos que julgamos importantes e que não foram propostos durante a execução da seqüência.

Transcrevemos a seguir as questões, ou partes destas, analisando as escolhas e as respostas dos alunos.

[22] Os nomes dos seis alunos, que constam deste quadro e que serão utilizados no decorrer da análise, são fictícios.

4.7.1 *Questão A1*

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a+2b = 2\,(a+b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4 4 + 2 = 6
2 + 4 = 6 4 + 4 = 8
2 + 6 = 8 4 + 6 = 10

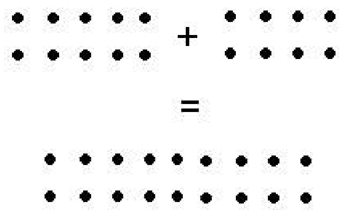
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Figura 4.1: Primeira parte da questão A1 do questionário de prova.

João, Manuela e Paola escolheram nesta questão a resposta de Beth como a mais parecida com a que eles dariam, mostrando preferência por um *argumento empírico*. Segundo a classificação de Balacheff (1988), esta prova é do tipo *empirismo ingênuo*. Acreditamos que esta preferência pode estar associada ao fato de realmente se convencerem a partir de casos particulares ou de não se sentirem aptos a dar um outro tipo de resposta, conforme também considerado por Healy e Hoyles (2000).

A resposta de Franklin, que também apresenta um *argumento empírico*, foi escolhida por Carol e Thaís. Apesar de tratar empiricamente de casos particulares de números pares, Franklin explicita a estrutura de número par, o que diferencia sua prova da de Beth, caracterizando-a como do tipo *exemplo genérico*.

É interessante notar que a escolha pela resposta de Franklin foi pouco comum entre os 1998 alunos que responderam ao questionário. Destes, apenas 72 (3,6%) a escolheram como a resposta que eles dariam. No questionário aplicado por Healy e Hoyles (2000), verifica-se o percentual de 16% para este argumento. Conforme apontado pelas pesquisadoras, houve predominância na escolha por *argumentos empíricos*, em detrimento dos *algébricos*, quando os alunos escolhiam a resposta mais parecida com a que eles dariam, o mesmo ocorrendo com nossos alunos. Acreditamos que isto justifica os baixos índices de escolha pela resposta de Franklin ou Yvonne[23], dado que este argumento caracteriza-se como um *exemplo genérico*, ou seja, o seu nível de generalidade é intermediário em relação aos outros aqui mencionados.

Apenas Léo escolheu um *argumento narrativo*: a resposta de Duda, que engloba todos os casos possíveis de soma de números pares. Esta prova pode ser classificada como uma *prova conceitual*, visto que se apóia em uma propriedade dos números pares.

Ao escolher a resposta que julgava que o seu professor daria melhor nota, Manuela optou pela resposta de Duda. Os demais optaram pelo *argumento algébrico* de Artur, que caracteriza uma *prova conceitual*. Acreditamos que o tratamento algébrico apresentado na resposta de Artur tenha sido decisivo na escolha dos alunos, ou seja, a forma parece influir na opção dos alunos, fazendo com que acreditem que este é o tipo de prova esperado pelo professor. Fazemos esta suposição baseados na pesquisa de Healy e Hoyles (2000), na qual se verificou que “os alunos achavam que seus professores recompensariam qualquer argumento fornecido que contivesse alguma álgebra” (p. 407).

[23] O argumento de Franklin na questão A1 do nosso questionário é idêntico ao de Yvonne na mesma questão do questionário de Healy e Hoyles (2000).

4.7.2 *Questão A2*

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

Figura 4.2: Questão A2 do questionário sobre prova.

Nesta questão todos optaram pela alternativa (A) mostrando que compreenderam, neste caso, a generalidade da prova.

4.7.3 *Questão A3*

Aqui, Léo e Manuela adaptaram o *argumento narrativo* empregado por Duda em A1. Como exemplo, reproduzimos a resposta de Manuela.

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

Verdadeira, porque números ímpares terminam em 1,3,5,7,9. Quando somados dois desses, a resposta, dará um número terminado em 0,2,4,6,8.

Figura 4.3: Resposta de Manuela para a questão A3.

Esta resposta pode ser classificada como uma *prova conceitual*, ainda que algumas premissas ou relações estejam implícitas. Por este motivo, atribuímos a pontuação 2b, referente à codificação descrita no Capítulo 1 (p. 23)

Paola explicitou a estrutura de número ímpar por meio de um *argumento narrativo* (fig. 4.4), apresentando uma *prova conceitual* e recebendo a pontuação 3.

Thaís utilizou o *argumento empírico* dado por Franklin em A1, mas, ao contrário deste, não explicitou, na representação figural, a característica dos números que estão sendo somados, neste caso, números ímpares. Em seguida justificou, com um *argumento narrativo*, de que maneira o seu exemplo se relaciona com a classe dos números ímpares (fig. 4.5), o que caracteriza sua prova – à qual atribuímos a pontuação 2b – como um *exemplo genérico*.

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

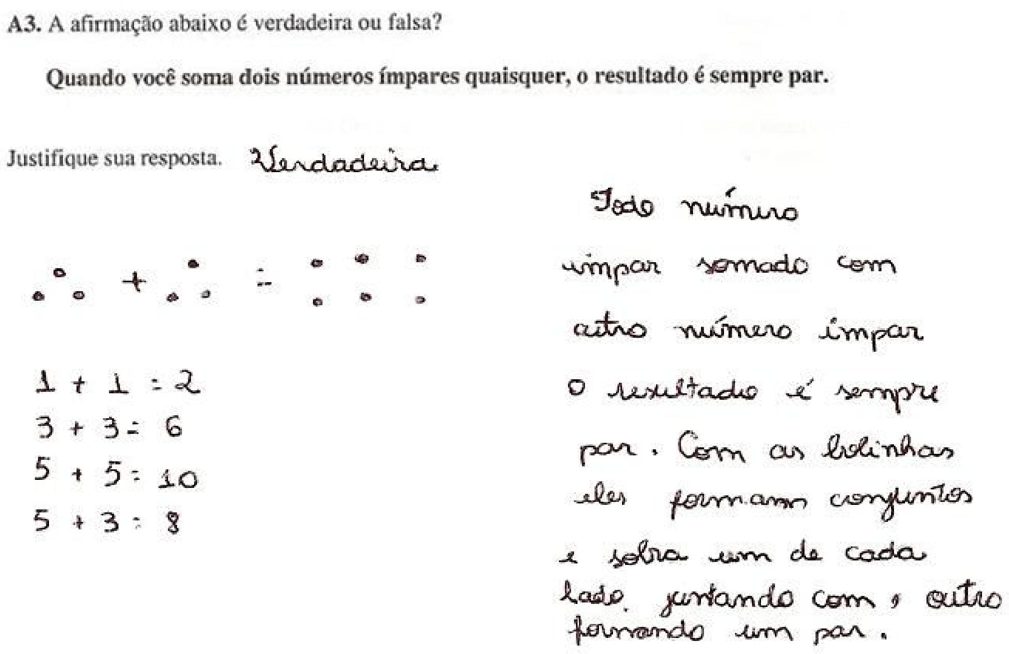
Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

É verdadeira pois um nº ímpar é um número par +
se juntarmos dois números ímpares estaremos juntando:

um número par + um número par + 1 + 1
ou seja
um número par + um número par + 2 (um nº par)
e juntando números pares teremos números pares.

Figura 4.4: Resposta de Paola para a questão A3.



A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

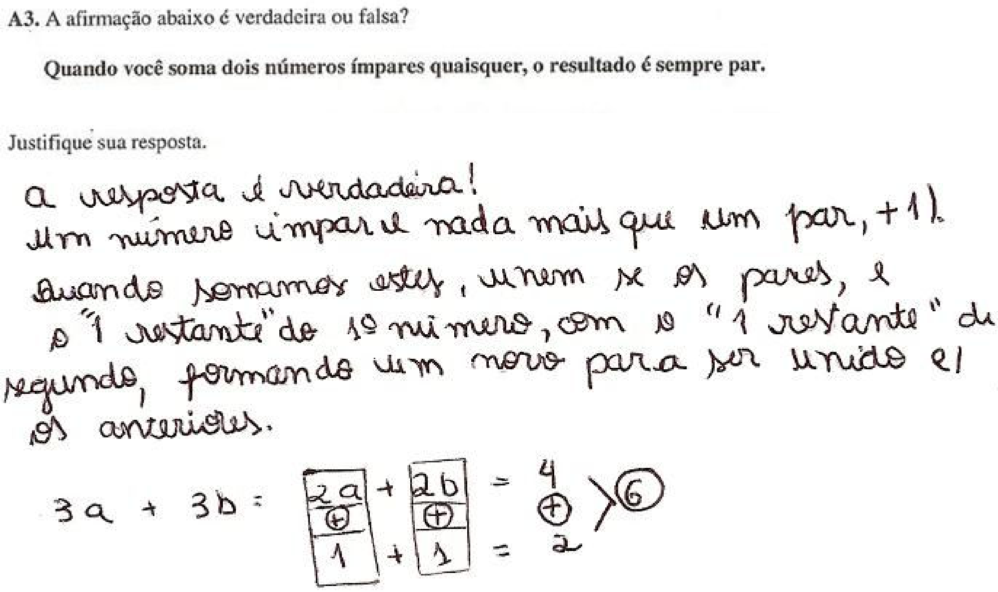
Justifique sua resposta. Verdadeira

1 + 1 = 2
3 + 3 = 6
5 + 5 = 10
5 + 3 = 8

Todo número ímpar somado com outro número ímpar o resultado é sempre par. Com as bolinhas eles formam conjuntos e sobra um de cada lado juntando com o outro formando um par.

Figura 4.5: Resposta de Thaís para a questão A3.

Carol, além de usar o mesmo *argumento narrativo* de Paola e Thaís, buscou formalizar sua resposta utilizando Álgebra. Entretanto, apesar de revelar domínio na representação algébrica de um número par, o tratamento neste registro foi feito de maneira equivocada. Ainda assim, consideramos completa sua justificativa, atribuindo-lhe pontuação 3. Segue a reprodução desta resposta.



A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

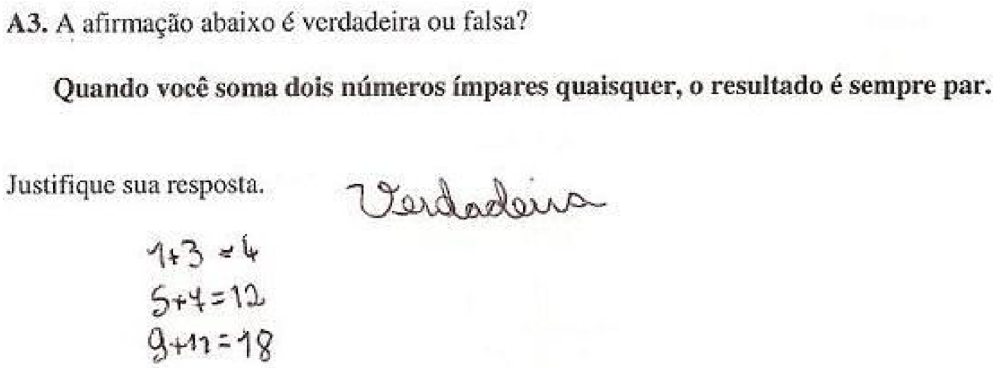
Justifique sua resposta.

a resposta é verdadeira!
um número ímpar é nada mais que um par, +1).
Quando somamos estes, unem se os pares, e
o "1 restante" do 1º número, com o "1 restante" do
segundo, formando um novo para ser unido e/
os anteriores.

3a + 3b = 2a + 2b = 4
⊕ ⊕ ⊕ > 6
1 + 1 = 2

Figura 4.6: Resposta de Carol para a questão A3.

Apenas João apresentou uma prova do tipo *empirismo ingênuo*, como o de Beth em A1. Atribuímos a esta prova a pontuação 1.



A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta. Verdadeira

1+3 = 4
5+7 = 12
9+11 = 18

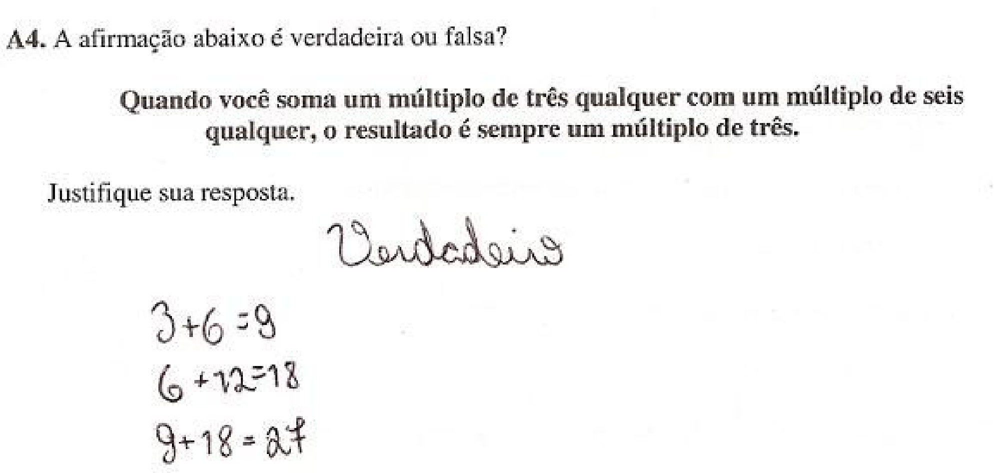
Figura 4.7: Resposta de João para a questão A3.

Nesta questão, verificamos um resultado semelhante ao de Healy e Hoyles (2000), quando apontam que é mais provável que os alunos apresentem raciocínios dedutivos por meio de *argumentos narrativos*. No nosso caso, todos os alunos que demonstraram raciocínios dedutivos o fizeram mediante este tipo de argumento.

4.7.4 *Questão A4*

Aqui verificamos que, apesar de cinco alunos terem feito alusão ao fato de 6 ser múltiplo de 3, apenas dois deles conseguiram explicitar com clareza seus argumentos e dar respostas que evidenciam a generalidade da questão.

João, assim como fizera em A3, foi o único a argumentar com casos particulares, caracterizando um *empirismo ingênuo* e recebendo, novamente, a pontuação 1. A seguir, reproduzimos sua resposta.


A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

Verdadeiro

3+6 =9
6 +12=18
9+18 = 27

Figura 4.8: Resposta de João para a questão A4.

Paola, Carol e Léo explicaram o porquê de os múltiplos de 6 serem também múltiplos de 3, mas não justificaram o fato de que a soma de múltiplos de 3 é também um múltiplo de 3. A título de ilustração, apresentamos a seguir a resposta de Paola, que recebeu a pontuação 2b.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

Sim, pois um múltiplo de 3 é 3x algo, 6 já é um múltipeo de 3 então um múltiplo de 6 na verdade é também um múltiplo de 3 já que 6xalgo é a mesma coisa que (2.3)x algo. E ao somar dois múltiplos de 3 teremos outro múltiplo de 3.

Figura 4.9: Resposta de Paola para a questão A4.

Manuela (fig. 4.10) e Thaís afirmaram que 6 é múltiplo de 3 e concluíram, a partir deste fato, que a soma é múltiplo de 3. Como exemplo, reproduzimos a seguir a resposta de Manuela, que apresentou um *argumento narrativo*, com elementos de uma *prova conceitual*, ou seja, relações entre propriedades dos objetos envolvidos. A esta resposta atribuímos a pontuação 2b.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

Verdadeira, porque seis é múltiplo do três (o dobro), então os múltiplos desses dois numéros somados, sempre apareceram os múltiplos do três.

Figura 4.10: Resposta de Manuela para a questão A4.

Assim como na questão A3, os *argumentos narrativos* predominaram entre as respostas que continham raciocínios dedutivos. Verificamos que este fato se repete também na questão A5, descrita a seguir.

4.7.5 Questão A5

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1. Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

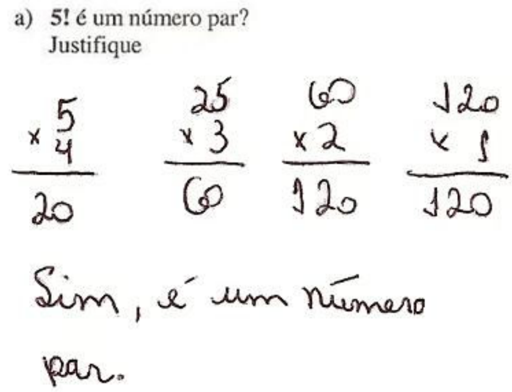
d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.
Justifique

Figura 4.11: Questão A5 do questionário sobre prova.

Nesta questão, o apelo aos cálculos se evidenciou nos itens (a) e (c). No caso dos itens (d) e (e), alguns alunos procuraram apresentar argumentos baseados na generalidade dos objetos em questão, ou seja, na estrutura do fatorial.

Com exceção de Léo e Manuela, que expuseram no item (a) um *argumento narrativo* apoiado em uma propriedade do fatorial, os demais utilizaram cálculos. A seguir, reproduzimos a resposta de Paola, que justificou por meio de cálculos, recebendo pontuação 3C e a de Léo, que apresentou uma *prova conceitual*, recebendo pontuação 3P.

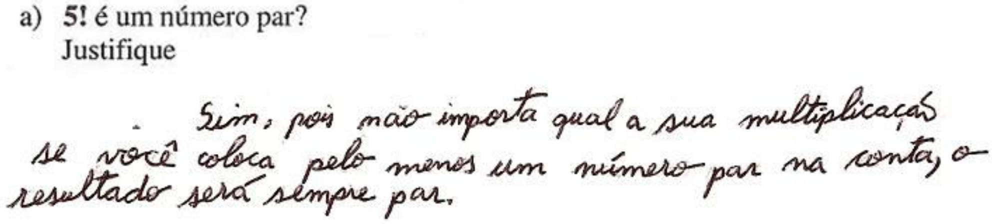


a) 5! é um número par?
Justifique

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 3 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ \times 2 \\ \hline 120 \end{array} \quad \begin{array}{r} 120 \\ \times 1 \\ \hline 120 \end{array}$$

Sim, é um número par.

Figura 4.12: Resposta de Paola para a questão A5, item (a).



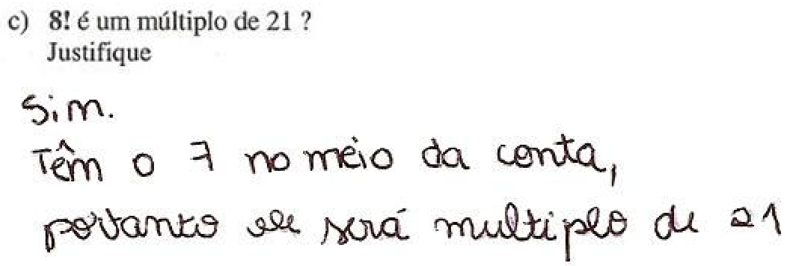
a) 5! é um número par?
Justifique

Sim, pois não importa qual a sua multiplicação se você coloca pelo menos um número par na conta, o resultado será sempre par.

Figura 4.13: Resposta de Léo para a questão A5, item (a).

Apesar da resposta dada no item (a), Léo não se apoiou nas propriedades do fatorial ao justificar no item (c), por meio de cálculos, o fato de 8! ser múltiplo de 21, sendo-lhe portanto atribuída a pontuação 3C. Os demais cinco alunos não conseguiram justificar ou cometeram erros de cálculo.

Carol, não obstante apresentar um argumento incompleto (fig. 4.14), foi a única que procurou ir além do empirismo, identificando uma característica do fatorial e, portanto, recebendo pontuação 2a.



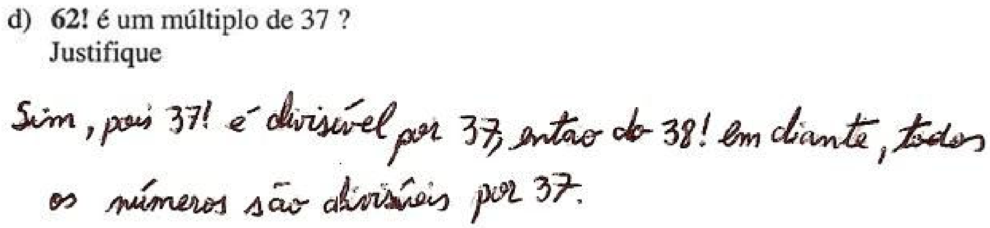
c) 8! é um múltiplo de 21 ?
Justifique

Sim.
Têm o 7 no meio da conta,
portanto ele será multiplo de 21

Figura 4.14: Resposta de Carol para a questão A5, item (c).

No item (d), apenas Léo e Paola conseguiram dar uma justificativa correta. Ambos utilizaram *argumentos narrativos* e explicitaram a generalidade da questão ao mostrarem que 37 é um dos fatores de 62!. Atribuímos às suas respostas a pontuação 3P.

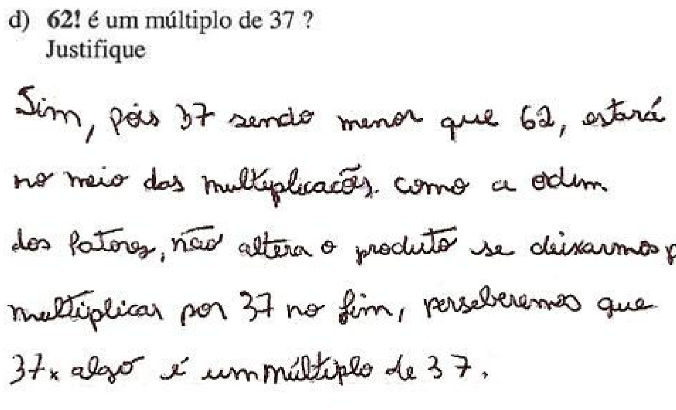
Léo argumentou que 37 é um fator de 37! e concluiu, a partir daí, que 37 também é um fator de 38!, 39!, etc., e que, portanto é um fator de 62!, conforme figura abaixo.


d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

Sim, pois 37! é divisível por 37, então do 38! em diante, todos os números são divisíveis por 37.

Figura 4.15: Resposta de Léo para a questão A5, item (d).

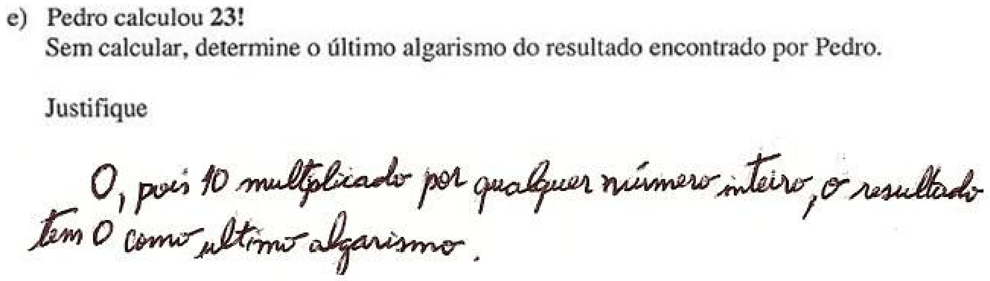
Enquanto Léo parte da seqüência 37!, 38!, ... para concluir que 37 é um fator de 62!, Paola justifica este fato, argumentando que 62 é maior que 37 e, portanto, 62! contém todos os fatores inteiros de 1 a 62, entre os quais, o fator 37. Reproduzimos abaixo a resposta de Paola.


d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

Sim, pois 37 sendo menor que 62, estará no meio das multiplicações. como a ordem dos fatores, não altera o produto se deixarmos p/ multiplicar por 37 no fim, perseberemos que 37 x algo é um múltiplo de 37.

Figura 4.16: Resposta de Paola para a questão A5, item (d).

O item (e) foi respondido corretamente por Carol e Léo, que, por meio de *argumentos narrativos*, justificaram o fato de que o último algarismo de 23! é zero, por ser um múltiplo de 10. Como exemplo, a resposta de Léo.



e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

0, pois 10 multiplicado por qualquer número inteiro, o resultado tem 0 como último algarismo.

Figura 4.17: Resposta de Léo para a questão A5, item (e).

Apesar de não explicitar que 10 é um dos fatores de 23!, Léo já havia dado um argumento semelhante no item (a), o que nos faz supor que este fato está subentendido na sua resposta. Assim, atribuímos à sua resposta a pontuação 2b.

Thaís e Manuela responderam corretamente, porém não conseguiram justificar. João e Paola não responderam este item, deixando-o em branco.

4.7.6 Conclusões

Para este grupo de alunos, verificamos a preferência por *provas pragmáticas* quando escolheram respostas que eles dariam e *provas conceituais* quando escolheram respostas às quais o professor daria maior nota. Este fato havia sido verificado e analisado por Healy & Hoyles (2000), conforme apontado no Capítulo 2.

Entretanto, notamos que houve empenho na busca por *provas conceituais*, em contraste ao resultado observado para a amostra dos 1998 alunos participantes da 1ª Fase do projeto AProvaME.

Conforme relatório do projeto, cerca de 92% dos alunos não conseguiram apresentar justificativas que fossem além do empirismo.

Tomemos como exemplo a questão A4, na qual os alunos deveriam provar que a soma de um múltiplo de 3 com um múltiplo de 6 é um múltiplo de 3. Conforme pesquisa realizada no âmbito do projeto AProvaME (SANTOS, 2007), apenas cerca de 9% dos alunos buscaram uma prova que fosse além do empirismo, e, destes, apenas cerca 5% (0,45% da amostra) tiveram êxito, apresentando uma *prova conceitual*. Cerca de 28% dos alunos apresentaram argumentos do tipo *empirismo ingênuo* e 63% deram uma resposta errada ou não responderam.

Outro exemplo de que a busca por argumentos que vão além do empirismo não é uma atitude comum entre os alunos é o resultado apresentado por Leandro (2006, p. 88), ao verificar que, "na medida em que o cálculo foi ficando inviável, os acertos diminuíram drasticamente".

As considerações feitas nos parágrafos anteriores evidenciam que as construções de prova dos seis alunos envolvidos em nosso experimento são, em geral, mais completas e mais conceituais em relação às construções dos demais 1992 alunos. Caracterizamos, a seguir, cada um destes seis alunos, segundo as respostas apresentadas no questionário sobre provas.

Com exceção de João, que utilizou apenas *argumentos empíricos* nas suas construções de prova, os demais procuraram dar argumentos que caracterizaríamos ou como *exemplos genéricos* ou *experimentos de pensamentos*.

Carol escolheu, em A1, um *exemplo genérico* como a resposta que ela daria. Apesar disso, procurou apresentar argumentos conceituais nas suas construções de prova, embora não tenha obtido sucesso em todas as tentativas.

Em suas justificativas para as questões A3 e A5, Léo buscou argumentos gerais em concordância com suas escolhas em A1, quais sejam, argumentos caracterizados como *provas conceituais*.

Não obstante escolherem, em A1, uma resposta que caracteriza uma prova do tipo *empirismo ingênuo* como a resposta que elas dariam, Manuela e Paola explicitam propriedades e características gerais em suas construções de prova nas demais questões.

Thaís escolheu, em A1, uma prova do tipo *exemplo genérico* como a resposta que ela daria e uma do tipo *experimento de pensamento* à qual o professor, segundo ela, daria a melhor nota. Nas suas construções de prova, vemos uma predominância por provas do tipo *exemplo genérico*.

Descreveremos e analisaremos, no capítulo seguinte, os resultados obtidos com a aplicação da seqüência de atividades. Particularmente, discutiremos alguns episódios selecionados a partir das áudio-gravações das interações da Dupla II (Carol e Paola), que, no nosso entender, evidenciam etapas do processo nos quais os objetivos foram globalmente atingidos.

CAPÍTULO 5
EXPERIMENTAÇÃO DAS SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM

Há muitas razões para duvidar e uma só para crer.

(Carlos Drummond de Andrade)

5.1 Introdução

Para a análise dos dados coletados no desenvolvimento da seqüência optamos por acompanhar uma dupla, apresentando um exame mais detalhado. Das demais, faremos algumas considerações globais dos resultados e produções. Assim, tomaremos aqui as interações da Dupla II (Carol e Paola) como objeto de análise. Fizemos esta escolha por esta dupla se destacar no trabalho de busca por provas e justificativas, quando, individualmente, respondeu o questionário sobre provas e manter essa postura ao longo da seqüência.

Transcreveremos, a seguir, os momentos que julgamos relevantes dos seus diálogos durante a execução das tarefas das situações de aprendizagem, no intuito de detalhar os procedimentos desta dupla e discutir suas respostas. A íntegra dos diálogos encontra-se no Anexo V.

5.2 Atividade 1

5.2.1 Atividade 1 - Parte A

A proposta desta etapa foi cumprida, ou seja, os alunos obtiveram exemplos tanto de frações que geravam dízimas periódicas quanto de frações que geravam decimais exatos. Assim, todos os alunos compreenderam a proposta e, como previsto, nenhuma das duplas apresentou dificuldade, já que a tarefa era simplesmente completar os três numeradores de cada grupo de frações, de modo que a soma destes totalizasse 50. Concluída essa parte, a Dupla II ficou com os dados da Planilha a seguir (fig. 5.1), passando à Parte B.

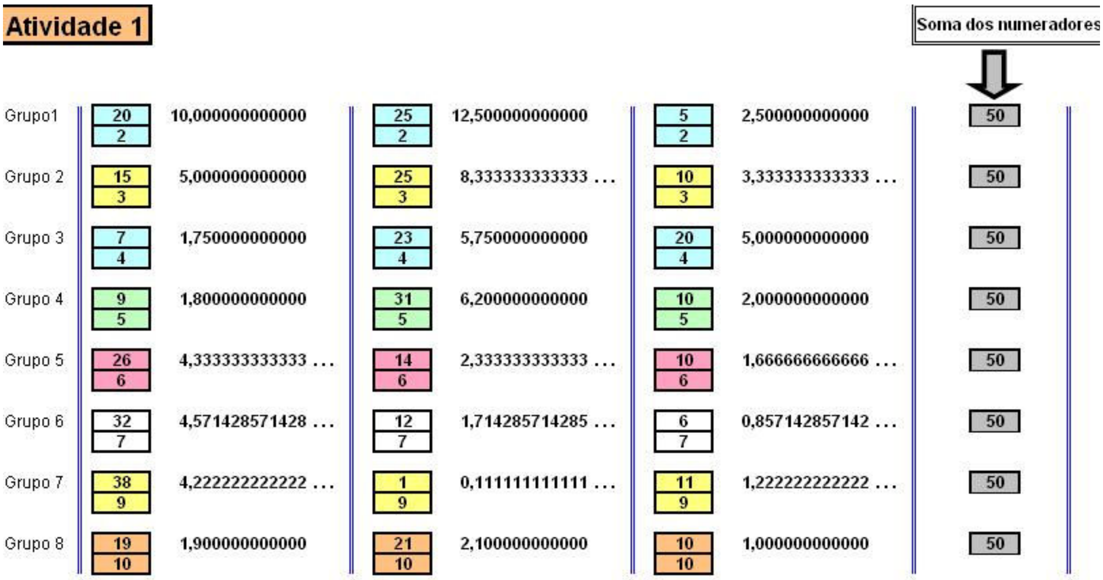


Figura 5.1: Planilha "Atividade 1" (Parte A).

5.2.2 Atividade 1 - Parte B

Nesta atividade, a condição é obter em cada grupo, se possível, três frações que possam ser representadas por números decimais exatos e cuja soma dos numeradores seja 50.

Esta situação foi criada visando engajar os alunos no processo de investigação, previsto para toda a seqüência, o que, efetivamente, ocorreu. Os alunos e, em particular, as alunas da Dupla II – cujas interações nesta tarefa serão analisadas adiante – mostraram-se empenhados em investigar a possibilidade de obter os numeradores.

> (1) Carol: Temos que colocar múltiplos de 3 em cima, senão dá dízima. [Referindo-se às frações com denominador 3.][24]
>
> (2) Paola: Ah, mas aqui deu certo. [Apontando para o grupo das frações com denominador 2.]
>
> (3) C: Mas aqui [referindo-se às frações com denominador 3] você tem que colocar múltiplo de 3 pra não dar dízima. Quer ver? Coloca o 18.

[24] No decorrer desta análise, apresentaremos, entre colchetes, os comentários que se fizerem necessários.

Aqui já é possível verificar que a Planilha favoreceu o trabalho empírico, fornecendo resultados imediatos e simultâneos, permitindo aos alunos estabelecerem relações entre eles.

Carol fez uma conjectura sobre frações com denominador 3 (linha 1) e Paola observou que o mesmo não ocorre com o denominador 2 (linha 2). Para validar a sua hipótese, Carol recorreu à Planilha (linha 3). Têm-se aqui contemplados dois dos objetivos previstos para esta atividade: a produção de conjecturas e a busca de justificativas. Ainda que Carol associe a veracidade da conjectura a um caso particular, é importante observar o papel da Planilha, como instrumento de validação experimental.

Em seguida, hesitaram, pensando em um numerador para a primeira fração. Carol insistiu em sua conjectura.

> (4) C: Viu? Agora coloca 3 vezes 9, 27. Tem que ser 3, múltiplos de 3 que somados dê 50. Entendeu?

Após a escolha dos numeradores 18 e 27 para duas das três frações (linhas 3 e 4), optaram pelo numerador 5 na outra, obtendo a soma de 50 para os numeradores, conforme destacado na figura abaixo.

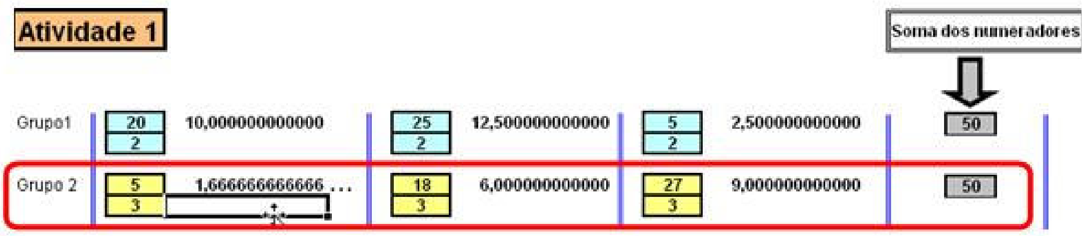


Figura 5.2: Planilha "Atividade_1" (Parte A, grupo 2).

A Planilha retorna uma dízima periódica neste caso e Carol trocou o numerador 5 por um múltiplo de 3, o 9, em concordância com sua observação (linha 5), alterando, assim, a soma dos numeradores, de 50 para 54. Para compensar este excesso, as alunas subtraíram 4 do numerador da última fração, substituindo o 27 por 23, obtendo outra dízima periódica, conforme destacado na figura abaixo.

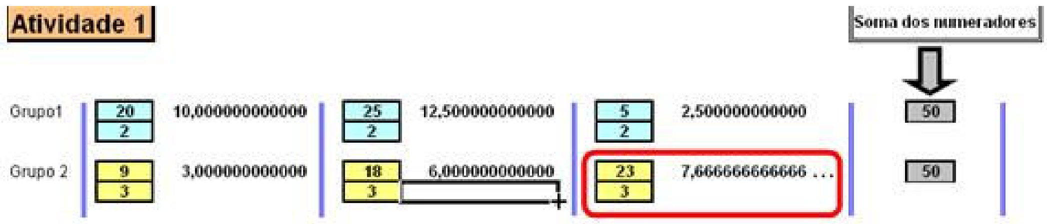


Figura 5.3: Planilha "Atividade_1" (Parte A, grupo 2).

Novamente, na tentativa de resolver o "problema" da dízima periódica, trocaram o 23 por 21, mas, ao compensar, trocando o 18 por 20, obtiveram outra dízima periódica.

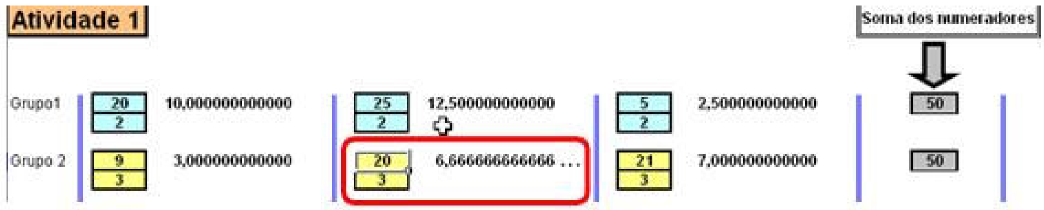


Figura 5.4: Planilha "Atividade_1" (Parte A, grupo 2).

Carol justificou o fato de terem obtido uma dízima periódica (linha 7) e Paola sugeriu que passassem para o grupo das frações com denominador 4.

(7) C: Não é múltiplo de 3. [Referindo-se ao numerador 20.]

(8) P: Vamos fazer o do 4. O 4 é bem fácil. [Referindo-se ao item de denominador 4.]

(9) P: Ah, o 4 já está certo.

(10) C: Mas deu 2 casas decimais.

(11) P: Sim, mas só tem decimal exato.

Ao verificarem que para o grupo 3 (frações com denominador 4) a condição solicitada já estava satisfeita, não alteraram os numeradores e passaram para o grupo 5 (frações com denominador 6), inserindo, a princípio, os numeradores 18, 30 e 2, conforme figura.

Trocaram, então, o numerador 2 por 3 e o 30 por 24, o que resultou em uma soma de 45, para os numeradores, conforme figura a seguir.

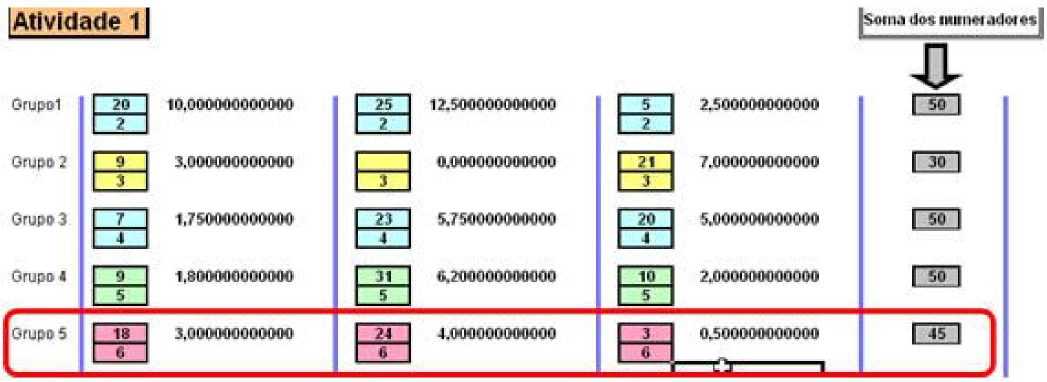


Figura 5.5: Planilha "Atividade_1" (Parte A, grupo 5).

A partir de então, efetuaram alterações semelhantes àquelas que fizeram para o grupo 2 (frações com denominador 3), ou seja, resolvendo o "problema" da dízima recaem no "problema" de a soma dos numeradores não totalizar 50 e vice-versa.

Ressaltamos que, no caso das frações com denominador 6, as alunas trataram a condição de o numerador ser múltiplo do denominador como necessária para que uma fração possa ser representada por um decimal exato. Na verdade, esta é uma condição suficiente. Conseqüentemente, quando surgiu a necessidade de obter um decimal exato, utilizaram, invariavelmente, a estratégia de inserir no numerador um múltiplo do denominador.

Verificamos este comportamento quando a dupla realizou a mesma tarefa para o grupo 7 (frações com denominador 9). É interessante observar o comportamento de Paola nesta etapa, reagindo com risos às tentativas de Carol. Esta, por sua vez, comentou: "É que temos que achar uma regra mais rápida". Carol parece ter percebido que o trabalho empírico poderia levá-la ao reconhecimento de algum padrão ou ao estabelecimento de relações, pois testou vários casos em busca de uma “regra”, ou seja, procurou generalizar a partir de casos particulares. Dessa forma, confirmamos a hipótese de que a experiência de trabalhar com a Planilha propicia aos alunos o desenvolvimento desse tipo de estratégia e o conseqüente aparecimento de *exemplos genéricos*, conforme discutimos na seqüência desta análise.

Nas frações com denominador 7, a dupla adotou a mesma estratégia. Em seguida, retornaram para o grupo das frações com denominador 6.

Como o objetivo era conseguir decimais exatos, elas novamente utilizaram numeradores múltiplos do denominador (condição suficiente) e inseriram os numeradores 6 e 12 nas duas primeiras frações, obtendo soma parcial de 18 para os numeradores. Complementaram, então, com o numerador 32 na terceira fração, perfazendo a soma de 50, conforme figura abaixo.

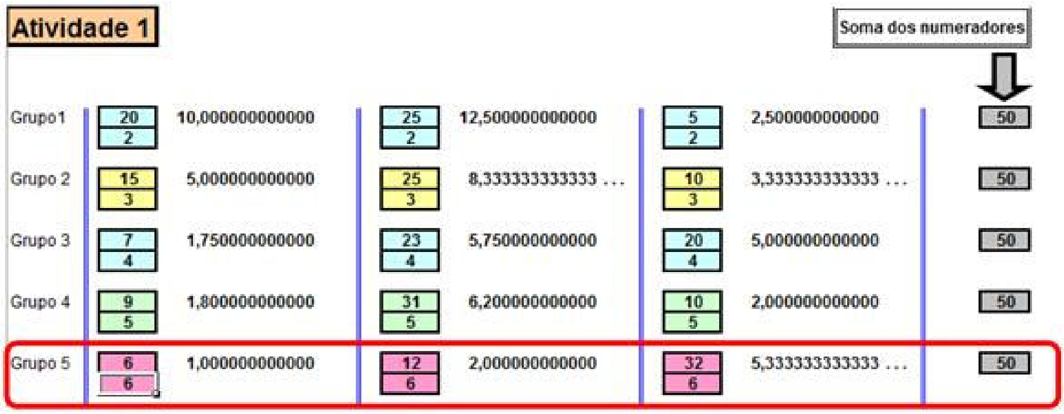


Figura 5.6: Planilha “Atividade_1” (Parte A, grupo 5).

Ao obterem uma dízima na terceira fração, seguiram efetuando diversas trocas de numeradores, mantendo a mesma estratégia utilizada até então, ou seja, usar numeradores que sejam múltiplos dos respectivos denominadores.

Assim, quando a soma dos numeradores não totalizava 50, ajustavam algum numerador e, como conseqüência, evidentemente, obtinham uma dízima periódica.

Voltaram, então, para um numerador que gera um decimal exato, fazendo com que a soma dos numeradores não mais totalizasse 50 e assim por diante, num comportamento cíclico. Em seguida, retornaram para o grupo das frações com denominador 3 e Paola buscou uma nova estratégia para resolver este problema demonstrando acreditar que seria possível encontrar tais numeradores (linha 26).

> (26) P: Será que pode pôr 4,5 no numerador?
>
> (27) C [para o professor]: Pode colocar número com vírgula?
>
> (28) Professor: Não pode. Tem que ser número natural.
>
> (29) P: Ah, é verdade, só pode número natural.

Paola não percebeu que, ainda que fosse permitido o uso de números não-inteiros, não seria possível obter os numeradores nas condições exigidas.

Até aqui, as alunas demonstraram acreditar que seria possível encontrar tais numeradores. Vemos, a seguir, o momento em que passam a admitir que, em alguns casos, isto pode não ser possível (linha 30). Além disso, Carol questionou o porquê desta impossibilidade e fez uma tentativa de identificar os denominadores para os quais isso ocorre. Dessa forma, temos a prova assumindo o papel de *explicação*.

> (30) C: Deve ter uma regra para alguns denominadores não darem certo. Por que exatamente para esses não deu certo? O 5 é primo, não é?
>
> (31) P: Sim.
>
> (32) C: Então não tem a ver com primo.
>
> (33) P: O 2 é primo, o 3 também. O 2 deu e o 3, não.
>
> (34) C: O 2 é primo?
>
> (35) P: É. Só é divisível por 2 e 1!
>
> (36) C: É 2, 3, 5, 7, 9, etc.
>
> (37) P: O 9 não. 9 é divisível por 3.

É interessante notar a atitude investigativa de Carol – um dos comportamentos esperados nesta seqüência de atividades. Ela não só questionou, mas começou a buscar um padrão, ou seja, a perceber que certos fatos podem ocorrer com alguns números, e não com outros. Buscou, então, uma regra, uma maneira de relacioná-los.

Acreditamos que essa percepção e, conseqüentemente, a busca de justificativa se deram pelo fato de terem testado e visualizado vários casos, com o auxílio da Planilha. O interesse por uma regra, ou seja, a associação dos casos particulares a uma classe, mostra que a aluna não se satisfaz com as evidências empíricas, procurando justificar e entender conceitualmente a questão em jogo. Nossa interpretação é de que o conjunto de dados auxilia na constituição de um *exemplo genérico*.

Carol fez a suposição de que os denominadores para os quais não é possível satisfazer as condições propostas seriam os números primos (linha 30). Na interação com Paola, chegou facilmente à conclusão de que esta hipótese é falsa, por meio de um contra-exemplo, o denominador 5 que, apesar de ser primo, nunca gera dízima periódica. Paola ainda reforçou esta idéia (linha 33), mostrando que dois números primos distintos podem não se comportar da mesma maneira, em relação a esta questão.

Novamente, as alunas atingiram os objetivos esperados para esta atividade, ou seja, produziram conjecturas e tentaram validá-las, elaborando justificativas que não se limitam à simples observação dos resultados em cada caso isolado, mas, sim, relacionando-os e indicando propriedades ou características destes.

Nesta discussão, para refutarem a idéia de que são os denominadores primos que geram dízimas periódicas, utilizaram o 2 e o 5 como contra-exemplos. Deve-se observar que estes são, efetivamente, os únicos denominadores primos que nunca geram dízima periódica. Dessa forma, Paola explicitou, ainda que parcialmente, a classe de denominadores que nunca geram uma dízima. Ela nomeou esta classe, chamando os seus elementos de "números fáceis", numa tentativa de justificar este fato (linha 38). Carol, por sua vez, buscou um argumento mais consistente (linha 39).

Verifica-se que, a partir da linha (38), as alunas procuraram identificar, dentre os denominadores apresentados, aqueles que poderiam ou não gerar dízimas periódicas.

(38) P: Para o 2, o 5, o 10, qualquer coisa que dividir dá exato. Porque eles são números fáceis.

(39) C: O 10, com certeza, dá exato, porque só mexe na vírgula. O 2 também, no máximo ia dar quebrado com vírgula 5. O 3 é louco pra dar dízima. O 4, não.

(40) P: Ah, o 2 e o 4 nunca dão dízima, nem o 10, nem o 5.

(41) C: É. Mas o 3 pra dar dízima é ótimo.

(42) P: Mas tenta dividir por 6.

(43) C: Ah, o 6 é igual ao 3.

(44) P: É verdade. E o 7?

(45) C: Ah, o 7 não tem porque não dar dízima. Quem é que pode gerar dízima?

(46) P: O 3, o 6, o 9...

(47) C: O 7.

(48) P: Isso.

Ao dizer que "o 6 é igual ao 3" (linha 43), Carol pareceu afirmar que o critério para decidir se uma fração gera um decimal exato é o mesmo, tanto para uma fração com denominador 3 como para denominador 6. Na verdade, isto depende da maneira como se enuncia este critério para frações com denominador 3.

De fato, se o enunciado for "o numerador deve ser múltiplo de 3", teremos o mesmo para frações com denominador 6. No entanto, se o critério for "o numerador deve ser múltiplo do denominador", o mesmo não ocorre para o denominador 6. Com efeito, para estas frações, podem-se obter decimais exatos com numeradores múltiplos de 3, que não são, necessariamente, múltiplos de 6.

Acreditamos que Carol, até então, considerava o segundo caso citado, ou seja, para uma fração gerar um decimal exato é necessário que o numerador seja múltiplo do denominador.

A importância desta discussão reside no fato de que os números 3 e 6 diferem pelo fator 2. Consideramos que, atentando-se a este fato, os alunos podem encontrar uma nova maneira de concluir que o fator 2 é um dos que nunca geram dízimas periódicas.

Observando estas interações, verifica-se que as alunas concentraram-se nas discussões, já que a Planilha forneceu os resultados, isentando-as dos cálculos e favorecendo a verificação de diversos resultados em uma mesma tela, de forma rápida e econômica, o que possibilitou estabelecer relações entre eles e, conseqüentemente, ampliar o campo de experimentações, propício para a elaboração de conjecturas.

Verificamos que o mesmo ocorreu com as demais duplas e constatamos que os momentos mais significativos no que tange à produção de argumentos estão associados às discussões dos aprendizes sobre as conjecturas elaboradas por eles mesmos. A interação com o colega de dupla parece motivar o aprendiz a justificar, a repensar sua resposta, a buscar mais exemplos, dando, assim, consistência às suas afirmações.

Passamos, então, a observar as interações e as produções das duplas na parte C desta atividade, na qual a tarefa é registrar as justificativas.

5.2.3 Atividade 1 – Parte C

Conforme destacado no Capítulo 3, não esperávamos, nesta atividade, argumentos consistentes nem definitivos. Pretendíamos dar aos alunos a oportunidade de expressarem o que foi observado na etapa anterior, ainda que com argumentos no nível empírico.

As respostas da Dupla III, consoante observamos adiante, condizem com o que esperávamos: as alunas desta dupla produziram justificativas baseadas na manipulação dos objetos em jogo. Entretanto, o fato de terem que registrar as justificativas parece ter levado os alunos das Duplas I e II a uma maior preocupação com a redação das respostas em relação à

Dupla III. De fato, as Duplas I e II buscaram, em geral, justificativas mais completas e rigorosas, obtendo êxito em algumas delas, conforme veremos no que segue.

5.2.3.1 C1 – Frações com denominador 2

Inicialmente, destacamos o comportamento de Carol (Dupla II), que atentou para a importância de definir um objeto matemático, sobre o qual se quer justificar algo (linha 49). A dupla buscou, então, uma definição para dízima periódica e, a partir desta definição (linhas 50 e 51), concluiu que frações com denominador 2 nunca geram dízimas periódicas.

> (49) C: Espera. O que é uma dízima periódica? Se a gente definir o que é, a gente pode justificar. Por que acontece uma dízima periódica? Entendeu?
>
> (50) P: Dízima é quando você divide e sempre sobra resto.
>
> (51) C: Sim, quando sobrar geralmente a mesma seqüência ou o mesmo número, não é?
>
> (52) P: É. Então, por 2 nunca sobra.
>
> (53) C: Por quê?
>
> (54) P: Por quê!?
>
> (55) C: Por que nunca vai acontecer uma dízima periódica quando for 2? Tudo dá pra dividir por 2.
>
> (56) P: Por quê? Se sobrar 1, dá 0,5, se sobrar 2, dá 1.
>
> (57) C: Qualquer número é divisível por 2, é isso!

Carol (linha 57) utilizou, erroneamente, a palavra "divisível" para explicar que a divisão por 2 sempre resulta em um decimal exato. Mais adiante (linha 100), veremos que Paola também usou o termo "divisível" neste sentido, ao afirmar que 6 "é divisível por 4 e não dá dízima".

Em seguida, Carol formulou um novo argumento para justificar o fato de que frações com denominador 2 sempre geram um decimal exato (linha 61).

(59) C: Só vai aumentar, no máximo, o número de casas decimais.

(60) P: Na verdade só pode aparecer 0,5.

(61) C: Não, é que você tá falando de números naturais. É que se fosse um número decimal dividido por 2 e tivéssemos que encontrar a "regra", por exemplo, 0,75, se você for dividindo, o máximo que vai acontecer é aumentar o número de casas decimais.

(62) P: Ah, tá. Entendi. Mas aqui não vai ter número decimal em cima, porque é uma fração. Então, só vai acontecer de sair uma casa decimal.

(63) C: Bom, se for par vai dar um número par, se for ímpar vai dar um número par mais um número quebrado.

(64) P: Mais 0,5 [referindo-se ao "quebrado"]. Tem que ser 0,5, porque um número ímpar é um número par mais 1.

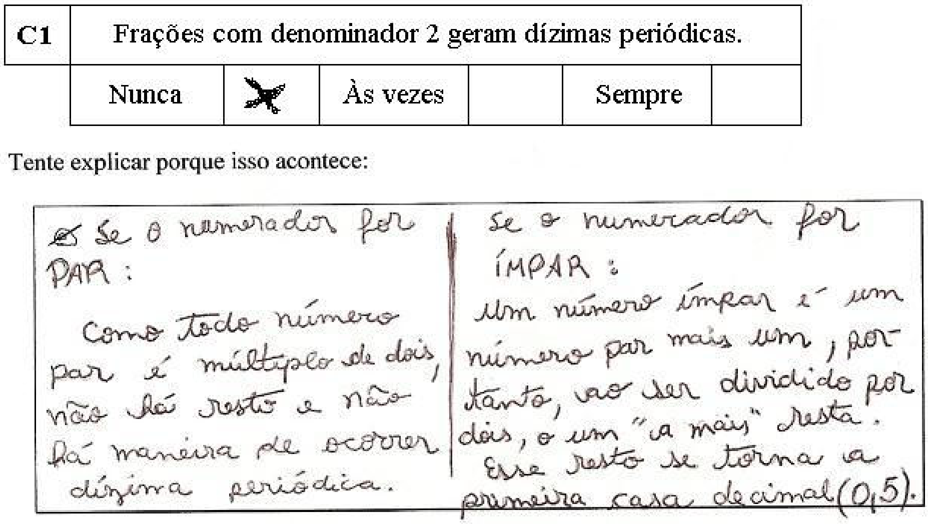
(65) C: É.

(66) P: E o 1 dividido por 2 dá 0,5.

Carol justificou o fato de nunca obter dízima periódica em frações com denominador 2 (linhas 59 e 61). Ela explicitou, em termos gerais, o que ocorre quando dividimos um número natural por 2.

Em seguida, Paola particularizou o argumento para números naturais e Carol o reformulou, expressando-o em língua natural (linha 63).

Na seqüência, anotaram suas observações na Ficha, conforme figura a seguir.



C1	Frações com denominador 2 geram dízimas periódicas.					
	Nunca	X	Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

Se o numerador for PAR:
Como todo número par é múltiplo de dois, não há resto e não há maneira de ocorrer dízima periódica.

Se o numerador for ÍMPAR:
Um número ímpar é um número par mais um, portanto, ao ser dividido por dois, o um "a mais" resta. Esse resto se torna a primeira casa decimal (0,5).

Figura 5.7: Resposta da Dupla II para a questão C1.

Dessa forma, as alunas da Dupla II provaram que um número natural dividido por 2 nunca gera uma dízima periódica, utilizando argumentos válidos para toda a classe dos números naturais, separando-os em pares e ímpares e caracterizando número ímpar como número par mais 1. Classificamos esta prova como um *experimento de pensamento*, ou seja, uma *prova conceitual* na qual se focam as propriedades dos objetos e se obtêm, assim, resultados gerais.

A Dupla I (Léo e João) deu uma resposta similar à da Dupla II, podendo ser caracterizada também como um *experimento de pensamento*.

A Dupla III apresentou uma resposta incompleta, apenas afirmando que “todo número natural tem uma metade, e esta não é periódica”. Houve uma tentativa de produzir uma *prova conceitual*, já que não utilizaram casos particulares e trataram de uma propriedade comum a toda classe de números naturais. Entretanto, a resposta apenas enuncia a propriedade, sem apresentar qualquer justificativa.

5.2.3.2 C2 – Frações com denominador 3

Podemos observar aqui a Planilha exercendo novamente um importante papel: o de trazer evidências empíricas. Assim, as alunas da Dupla II se convenceram de que frações com denominador 3 só geram decimais exatos quando o numerador é múltiplo de 3. No entanto, Carol questionou este fato (linha 68) e a dupla passou a buscar uma justificativa mais geral.

> (68) C: Não, às vezes. Por quê? Isso acontece quando o de cima não é múltiplo do de baixo. [Após esta afirmação, ela testa, na Planilha, os numeradores 4, 5, 6, 7, 8 e 9.]
>
> (69) P: Bom, 4 dividido por 3, sobra 1. Ah, porque 1 dividido por 3 não dá exato. Nem 2. Quando divide por 3, ou sobra 1 ou sobra 2. Se sobrar 3, divide de novo, entendeu?
>
> (70) C: E se sobrar 4?
>
> (71) P: Se sobrar 4, é 3 + 1. Então ou sobra 1 ou sobra 2. 1 dividido por 3 não dá exato, vai dar 0,333...
>
> (72) C (para o professor): Eu tenho que explicar por que quando dividimos por 3 só pode sobrar 1 ou 2?
>
> (73) Professor: Você tem que explicar aquilo que achar necessário para ser convincente e justificar as afirmações.
>
> (74) P: Mas dividindo por 3 só pode sobrar 1 ou 2.
>
> (75) C: Tem certeza?
>
> (76) P: Absoluta. Dá outro exemplo que não dá isso. A não ser que você pegue um número não natural.

Carol retomou o critério discutido por elas na Parte B (linha 68), para decidir se uma fração com denominador 3 gera um decimal exato e Paola buscou uma prova (linha 69). Carol questionou sobre o resto 4 (linha 70) e Paola decompôs o 4 em 3 + 1, ou seja, um múltiplo de 3, mais 1. Dessa forma, Paola considerou que, em uma divisão por 3, há uma relação entre o 1 e o 4, no que diz respeito ao resto, ou seja, raciocinou em termos de aritmética modular ($1 \equiv 4 \text{ mod}(3)$). Assim, incluiu o 1 e o 4 na classe dos números naturais que, divididos por 3, apresentam resto 1. Paola focou seu argumento no resto 1, já que a questão em jogo era justificar o fato de que frações com denominador 3 às vezes geram dízimas periódicas.

Passaram, então, a escrever a resposta na Ficha, conforme figura abaixo.

C2	Frações com denominador 3 geram dízimas periódicas.				
	Nunca		Às vezes	X	Sempre

Tente explicar porque isso acontece:

a não ser os múltiplos de 3, todos os outros números colocados como numeradores vão gerar dízima.
ao dividir por 3 os restos são sempre ou 1 ou 2, 1 dividido por 3 dará SEMPRE 0,333... 2 dividido por 3, dará sempre 0,666...

Figura 5.8: Resposta da Dupla II para a questão C2.

Classificamos esta prova como um *experimento de pensamento*, visto que está baseada em uma propriedade da divisão de um número natural qualquer por 3, qual seja a de que os possíveis restos são 1 e 2. Como o intuito das alunas era justificar o fato de que frações com denominador 3 às vezes geram dízimas, elas não incluíram o zero como um possível resto, uma vez que, neste caso, o resultado é um número natural, conseqüentemente, um decimal exato. Portanto, conforme verificado no diálogo anterior, as alunas agruparam todos os números naturais em duas classes de números naturais: a classe daqueles que, divididos por 3, apresentam resto 1 e daqueles que apresentam resto 2.

As demais duplas não apresentaram justificativas, apenas responderam, corretamente, que frações com denominador 3 às vezes geram uma dízima periódica.

5.2.3.3 C3 – Frações com denominador 4

Verificamos que, não só nesta atividade, mas ao longo de todo o desenvolvimento da seqüência, Carol se mostrou desconfiada perante evidências empíricas e a busca por uma regra geral foi uma atitude constante em seu comportamento. Entretanto, em alguns casos, como veremos adiante, ela usou argumentos inconsistentes na busca por estas regras.

(77) C: Nunca dá dízima, não é?

(78) P: Não, pois o 4 é igual ao 2.

(79) C: Sim, é múltiplo de 2.

(80) P: Isso. Então, ao invés de dar 0,5, vai dar 0,25.

(81) C: Então vamos copiar nosso argumento para denominador 2. O 4 é múltiplo de 2. Deve ser uma regra.

Paola confirmou a hipótese de Carol (linha 77), argumentando que 4 é igual a 2 (linha 78). Carol, por sua vez, justificou que "4 é igual a 2", afirmando que isso ocorre pelo fato de serem múltiplos (linha 79). Mais adiante (linhas 91, 93 e 105), veremos que ela utilizou a palavra "múltiplo" no sentido de dobro, ou seja, argumentou que o fato de o 4 ser o dobro de 2 é suficiente para que frações com denominador 4 nunca gerem dízimas periódicas (linha 85).

(82) P: Não. Olha só: se o número for par, tipo 8, ok. Mas se for par, tipo 6, 6 dividido por 4, quanto dá?

(83) C: Dá 1,25.

(84) P: Viu? Apareceu 0,25.

(85) C: Vai aumentar só o número de casas decimais.

(86) P: E um número ímpar, dividido por 4, vai dar quanto? Por exemplo, 7 dividido por 4, dá quanto?

A partir destas discussões, Paola procurou organizar suas observações e concluir a questão. Elas verificaram, separadamente, o que ocorre com numeradores pares e ímpares. Esta separação se deu de maneira natural quando analisaram frações com denominador 2. Mais adiante, perceberão que, dependendo do denominador, este procedimento não é o mais adequado.

(90) P: Ah, então é isso: número par vai dar 1 ou 0,5.

(91) C: Então, é o mesmo que funciona para o 2.

(92) P: Mas não é exatamente igual.

(93) C: Vai aumentar uma casa decimal!

(94) P: E o número ímpar, vai dar 1,25...

(95) C: Aumenta uma casa decimal. Não tinha falado desde o começo que vai aumentar uma casa decimal? É a mesma coisa que o 2, só vai aumentar uma casa decimal.

(96) P: Não é a mesma coisa, é um pouco diferente.

(97) C: Ah, é um pouco parecido! Tinha que ter algum nexo. É múltiplo!

Poderíamos supor que a aluna pensou apenas nos numeradores 2 e 4 (linha 90), que gerariam, respectivamente, os resultados 1 e 0,5, ao serem divididos por 4. Entretanto, Paola já havia sinalizado para um entendimento, ainda que intuitivo, de que todos os números naturais que, ao serem divididos por um determinado número natural, apresentam um mesmo resto, compõem uma mesma classe de números. Por este motivo, acreditamos que Paola tratou o número 1 como sinônimo de número inteiro (linha 90) e o 0,5, como um número inteiro, mais 0,5.

Carol observou que o mesmo ocorre para o denominador 2 (linha 91), mas não atentou para o fato de que Paola só utilizou, até então, numeradores pares. Paola chamou a atenção de Carol para essa questão (linha 94), motivando-a a refinar sua afirmação. Apesar disso, Carol continuou utilizando o termo *múltiplos* (linha 97).

Em seguida, discutiram a forma de organização e apresentação dos argumentos.

(98) P: Ah, é! Vamos escrever a resposta começando pelos numeradores pares.

(99) C: Número par é múltiplo de 2. Logo, é múltiplo de 4.

(100) P: Não. Porque não é múltiplo de 4. Exemplo: 6 não é múltiplo de 4, mas é divisível por 4 e não dá dízima. É isso que temos que falar.

(101) C: É múltiplo de 2.

(102) P: Então, mas não é múltiplo de 4. Ah, se um número é múltiplo de 2, então é múltiplo de 4? Não exatamente, mas pode ser dividido por 4 sem dar dízima.

(103) C: Mas pega 6 dividido por 4. Não vai dar dízima, porque é múltiplo de 2. Vai dar 1,...

(104) P: Tá aqui, já tinha feito dá 1,5. [Referindo-se aos cálculos no papel.]

(105) C: Quando dividimos por 4 dá metade do que dividindo por 2, entendeu? Faz 10 dividido por 2 e 10 dividido por 4. 10 dividido por 2 é 5 e 10 dividido por 4 é 2,5, a metade. Ou seja, sempre teremos uma casa decimal a mais.

(106) P: Não entendi, pois 1,25 e 1,75 têm o mesmo número de casas decimais.

(107) C: Mas estes foram divididos por 4. Se fosse por 2, daria apenas uma.

Paola procurou mostrar que frações com denominador 4 nunca geram dízima periódica tomando todos os casos possíveis, ou seja, numeradores pares e os ímpares.

Carol, por sua vez, buscou uma relação entre os denominadores 2 e 4, na tentativa de estabelecer uma regra geral sobre a representação decimal das respectivas frações. A partir de então, elaborou um argumento correto e geral (linhas 105 e 107), que classificamos como um *experimento de pensamento*, pois se baseia na propriedade de que, quando dividimos um número decimal (inteiro ou não) por 2, o número de casas decimais aumenta em, no máximo, uma unidade.

Paola afirmou ter entendido o argumento de Carol, mas voltou a agrupar os numeradores em pares e ímpares (linha 108). A dupla seguiu neste raciocínio, mas Carol ainda buscou uma relação entre os denominadores 2 e 4 (linha 109).

(108) P: Acho que entendi. Número par dividido por 4, ou vai dar 1 ou 1,5. Número ímpar dá 1,25 ou 1,75. Mas como se escreve isso?

(109) C: Todo número par é múltiplo de 2. A gente tem que ligar isso com múltiplo de 4, só isso.

(110) P: Não são múltiplos! Não tem nada a ver com múltiplos.

[...]

(114) P: Mas o 6 é múltiplo de 2 e com denominador 6, olha só como dá uma bagunça. A única coisa especial do 4 é que 4 é 2x2 e 6 é 2x3. O 3 complica tudo.

[...]

(134) C: É a mesma coisa que eu falei pra você sobre o 4.

(135) P: Sim, dividir por 4 é o mesmo que dividir por 2 e por 2 de novo.

Verifica-se (linhas 109 e 110) que Carol procurou argumentar de forma geral, ou seja, buscou uma regra, a partir das conclusões que obteve com o denominador 2, enquanto Paola se concentrou no denominador 4, descrevendo todos os casos possíveis de resultados, tentando apresentar também um argumento geral.

Nota-se então que as duas alunas procuraram argumentos gerais, porém de naturezas distintas. Da linha (108) até a linha (122) vemos, em vez de uma discussão sobre um argumento ou uma justificativa, conforme ocorreu até então, cada aluna buscando defender o seu argumento e, conseqüentemente, desqualificar o da colega.

Este embate se inicia quando Paola mostrou o que ocorre no caso dos numeradores pares e no caso dos ímpares, para frações com denominador 4, ou seja, contemplou todos os casos possíveis e exibiu resultados que são sempre decimais exatos (linha 108).

Observa-se um impasse na discussão da dupla. Carol continuou usando a palavra *múltiplo* quando deveria dizer *dobro* (linha 109), ao que Paola apresentou um contra-exemplo (linha 114), mostrando que o fato de um denominador ser múltiplo do outro não implica dizer que se comportam da mesma maneira e, em seguida, explicitou os fatores primos dos números 4 e 6, destacando o papel dos fatores.

De fato, Paola tinha razão ao afirmar que a relação entre os denominadores 2 e 4 não reside simplesmente no fato de serem múltiplos, e sim no fato de que 4 é o dobro de 2 (linha 135). Entretanto, Carol, apesar de se utilizar, equivocadamente, da palavra *múltiplo*, também tinha razão quando afirmou que o que ocorre com frações de denominador 2 acontece da mesma forma com frações de denominador 4 e, inclusive, justificou, citando o aumento de casas decimais.

Procuramos, ao elaborar a seqüência, criar situações que levassem os alunos a apresentar raciocínios baseados na decomposição do denominador em fatores primos. Posteriormente, esperávamos que verificassem que os fatores 2 e 5 são os únicos que não fazem com que a fração gere uma dízima periódica. Em outras palavras, são os fatores diferentes de 2 e 5 que podem fazer com que a fração gere uma dízima periódica. Conforme veremos a seguir, Paola atentou para este fato, no caso do fator 2.

Paola (linha 114) explicitou a diferença entre o denominador 4 e o 6 em termos da decomposição. Ela sinalizou para o fato de que o 2 não influencia na geração de dízima, mas o seu foco estava no fator 3, que pode gerar uma dízima.

> (115) C: O 3. Mas a gente está falando do 4, não do 6.
>
> (116) P: Eu sei, mas o que você disse sobre o 4 ser múltiplo de 2 não prova nada.
>
> (117) C: Prova sim!
>
> (118) P: Prova o quê?
>
> (119) C: Porque o 4 é múltiplo de 2.
>
> (120) P: E o 6 também. E o 8...
>
> (121) C: Mas estamos falando em dividir por 4, não por 6.
>
> (122) P: Eu sei, mas se isso não vale para todos os múltiplos de 2, pra que vou dizer que 4 é múltiplo de 2? De que adianta? É só pensar na divisão por 4. É nisso que a gente tem que se concentrar.
>
> (123) C: Tá, se for par, o resultado dá...
>
> (124) P: Ou número inteiro ou número inteiro com 0,5.
>
> (125) C: Por quê?

(126) P: Porque ou não sobra nada ou sobra 2, e 2 : 4 dá 0,5.

(127) C: Tá bom, então vamos explicar isso.

Seguiram respondendo conforme figura abaixo.

C3	Frações com denominador 4 geram dízimas periódicas.					
	Nunca	X	Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

Se o numerador for PAR:
Os números pares divididos por 4 ou não dão resto ou dão resto 2.
2 dividido por 4 é 0,5.

Se o numerador for ÍMPAR:
Os números ímpares divididos por 4 dão resto 1 ou 3. 1 dividido por 4 é 0,25 e 3 dividido por 4 é 0,75.

Nos dois casos não há dízima.

Figura 5.9: Resposta da Dupla II para a questão C3.

Esta resposta foca a discussão sobre os possíveis restos, verificando caso a caso, exaustivamente. Pode ser considerada uma *prova conceitual,* pois, ao fazer uma afirmação sobre um determinado resto, trataram de propriedades gerais de uma classe de números, conforme destacamos em 5.2.3.2. (p. 95).

A nosso ver, esta resposta se assemelha à resposta de Duda na questão A1 do questionário sobre provas. Tanto nessa resposta quanto na da Dupla II nota-se um raciocínio exaustivo, ou seja, busca-se dar conta da generalidade da questão, tratando todos os casos possíveis. Além disso, enquanto o argumento de Duda não justifica o fato de que a soma de dois números com terminação 0, 2, 4, 6 ou 8 corresponde a um número com a mesma terminação, a Dupla II não justificou, por exemplo, o fato de que um número par, ao ser dividido por 4, apresenta resto 0 ou 2. Por esta razão, a resposta da Dupla II não foi considerada por nós uma prova completa, à qual atribuiríamos a pontuação 2b, segundo a codificação apresentada no Capítulo 1 (p. 23)

As Duplas I e III argumentaram que o denominador 4 nunca gera dízima periódica, respectivamente, “porque o 4 é potência de 2” e “porque a quarta parte é a metade da metade”. Estas justificativas também apresentam características de uma *prova conceitual*, já que tratam genericamente de uma classe de frações, neste caso, das frações com denominador 4. Apesar disso, as provas não estão completas, pois deveriam incluir uma justificativa para o fato de que a metade de qualquer decimal exato é, ainda, um decimal exato. Estes dois argumentos se assemelham no que diz respeito ao conteúdo, entretanto a forma do argumento da Dupla I é mais geral, se aproximando de uma regra focada nos fatores primos do denominador, bem perto daquilo que julgamos ser uma “estratégia ótima”, permitindo tratar os diferentes casos.

5.2.3.4 C4 – Frações com denominador 5

Aqui, é interessante notar que Carol relacionou o denominador 5 (que nunca gera uma dízima periódica) com o denominador 10 (linha 129), como fizera anteriormente com os denominadores 2 e 4. Dessa vez, porém, expressou corretamente a idéia de que dobrar o denominador corresponde a dividir o resultado pela metade (linha 131).

> (128) P: Nunca?

Nesse momento Paola testou, na Planilha, os numeradores 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

> (129) C: Sim, nunca, pois é igual ao 10, não é? Tem alguma ligação. Eu aposto que tem. O 2 e o 4 são praticamente a mesma coisa, só muda o número de casas decimais. Logo, o 5 e o 10 também. Põe 5 aqui. Agora põe 5 aqui no 10. Agora vê a diferença que deu.

> (130) P: Hum! Entendi.

> (131) C: Por quê? Ah! É só você pensar: dobrou o denominador, cai pela metade o resultado.

> (132) P: Certo, mas vamos pensar no 5 agora.

Em seguida, decidiram separar os numeradores em pares e ímpares (linha 133), verificando que este procedimento não é adequado ao caso deste denominador 5 (linha 143).

(133) C: Bom, se for par, vai sobrar quanto? 2 ou 4, certo? 2:5=0,2. É só separar pares e ímpares.

[...]

(143) P: Não precisa separar pares e ímpares, só coloca o geral, o geralzão.

(144) C: Ah, põe. Se for par, vai sobrar...

(145) P: Não. Qualquer número dividido por 5, ou não resta nada, ou 1, ou 2, ou 3, ou 4. E 1:5 dá 0,2, 2:5 dá 0,4, 3:5 dá...? Quanto é 3:5?

(146) C: Você pega o 3 e divide por 10, dá 0,3. Daí você multiplica por 2. Dá 0,6.

(147) P: E 2:5?

(148) C: Dá 0,4.

(149) P: Ah, é. 2, 4, 6, 8.

É interessante notar o resultado apresentado por Paola (linha 149). Ela afirmou que, ao dividir um número natural por 5, obtemos um dos algarismos citados (2, 4, 6 ou 8) na primeira casa decimal. Este fato não foi de interesse particular das alunas, pois estavam concentradas na análise de outra questão. Entretanto, caso a justificativa fosse solicitada, acreditamos que a dupla não encontraria dificuldades em elaborá-la, já que na fala de Carol (linha 146) ela nos apresentou o que seria uma prova. Neste caso, interpretamos tratar-se de uma *prova conceitual*, pois a aluna tomou um número natural particular como objeto para sua justificativa, que está baseada no fato de que dividir por 5 é o mesmo que dividir por 10 e multiplicar por 2, o que denota a generalidade de seu argumento. Verifica-se, ainda, a prova assumindo um papel de *descoberta*, ou seja, o processo de busca de justificativas para um determinado fato pode, eventualmente, fazer com que os alunos se deparem com resultados novos ou "inesperados" para eles, como supomos ter sido o caso com a Dupla II.

Verifica-se que Paola argumentou tomando todos os possíveis restos, o que, apesar de não conduzir a uma "regra prática", no sentido de necessitar a determinação do resto, efetivamente dá conta da generalidade da questão (linhas 145). Acreditamos que a progressão da seqüência pode levar a retomar essa discussão, não necessariamente enfatizando os possíveis restos, mas identificando os fatores primos dos números envolvidos (numeradores e denominadores ou dividendos e divisores).

As alunas registraram, então, a resposta na Ficha, conforme reproduzida abaixo.

C4	Frações com denominador 5 geram dízimas periódicas.					
	Nunca	X	Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

Todos os números divididos por 5, ou não dão resto, ou dão restos iguais a: 1, 2, 3 e 4.

1 dividido por 5 é 0,2
2 dividido por 5 é 0,4
3 dividido por 5 é 0,6
4 dividido por 5 é 0,8

as divisões nunca darão dízima

Figura 5.10: Resposta da Dupla II para a questão C4.

A Dupla I afirmou que o denominador 5 não gera dízimas periódicas "porque 10 é múltiplo de 5" e a Dupla III argumentou que isto ocorre "porque 5 é a metade de 10, ou seja, todo número dividido por 5 é o dobro do mesmo número dividido por 10". Estas duplas fizeram alusão ao fato de 5 ser divisor de 10, porém com argumentos incompletos.

Poderíamos classificar estas provas como *provas conceituais*, embora algumas premissas tenham sido omitidas, o que faz com que as justificativas incluam passagens implícitas.

As premissas omitidas pela Dupla I foram: é possível obter um denominador 10 a partir de um denominador que seja divisor de 10 e nenhuma fração com denominador 10 gera dízima periódica.

A Dupla II não explicitou o fato de que o dobro de um decimal exato é, ainda, um decimal exato. Estes aspectos deixariam claro o processo dedutivo necessário à conclusão em jogo.

5.2.3.5 C5 – Frações com denominador 6

Na discussão que se segue, a Dupla II buscou, novamente, focar o raciocínio nos possíveis restos e percebeu que há uma relação entre os denominadores 3 e 6 (linha 157).

> (150) P: Às vezes. Tá, tem que explicar por que isso ocorre.
>
> [...]
>
> (155) C: Bom, porque um número dividido por 6 vai sobrar...
>
> (156) P: 5, 4, 3, 2 ou 1. Quando sobra 1, 1:6 dá dízima! Por quê?
>
> (157) C: Quando a gente fez com o 3, não dava a mesma coisa? Então tem uma ligação quando é múltiplo.
>
> (158) P: Tem uma ligação, mas não é a explicação. Tá, então tá. 1 dividido por 6 dá quanto? Põe aí.
>
> (159) C: Vai dar 0,1666...
>
> (160) P: 2:6 dá quanto? Dá dízima também? [olhando o resultado na Planilha]:Vai dar 0,666...Não. Não tem uma ligação! Tem algo a ver, mas não é a resposta. Quanto é 2 dividido por 6?
>
> (161) P/C: 0,333...

Paola admitiu que há uma "ligação" entre denominadores 3 e 6, e, ainda que parcialmente, concordou com Carol (linhas 160 e 164). Em seguida, afirmou corretamente que "a não ser os múltiplos de 3, todos os outros vão gerar dízima". Aqui, Paola não justificou, apenas constatou a partir de sua observação na Planilha (linha 164).

> (164) P: E 3:6 dá 0,5? Está acontecendo igual ao 3. Vamos escrever assim: "a não ser os múltiplos de 3, todos os outros vão gerar dízima".

[...]

(168) P: Assim, quer ver? Coloca 12+3, coloca 15 ali, não vai dar dízima.

(169) C: Mas 15 não é múltiplo de 6.

(170) P: Então, mas não vai dar dízima.

(171) P (observando o resultado na Planilha): Viu? Porque é um múltiplo de 6, mais 3.

(172) C: Quanto é 3 dividido por 6?

(173) P: Vai dar 0,5, não é dízima.

(174) C: Então, por isso. É o que eu estava falando. E, queira ou não, é a metade.

[...]

(177) P: E não são só os múltiplos de 6, são os múltiplos e os múltiplos mais 3, também.

Paola partiu do fato de que, no caso das frações com denominador 6, os numeradores múltiplos de 3 não geram dízima periódica e procurou estabelecer a classe dos numeradores que se comportam desta maneira (linha 168). Ela não atentou para o fato de que, como os múltiplos de 6 são, necessariamente, múltiplos de 3, basta que o numerador seja múltiplo de 3 para termos um decimal exato. Isto só ocorre quando estão na Atividade 2, especificamente na linha (220) do diálogo. Ainda assim, seu argumento é válido para quaisquer numeradores.

Apesar de estabelecer os numeradores que não geram dízimas, Paola questionou sobre aqueles que geram (linha 192). Acreditamos que este comportamento se deu em virtude de focarmos, em nossa proposta, a geração de dízimas periódicas, e não de decimais exatos. Os enunciados das questões C1 a C8 ilustram este fato. Desta forma, as alunas retomaram o procedimento de analisar as frações (divisões) segundo os possíveis restos (linha 193), respondendo conforme figura 5.11.

(192) P: Só que daí a gente não tem que explicar esses números que dão dízima? Por exemplo, vai...

(193) C: A gente pode justificar assim: pois o resto será...

(194) P: É, então, os restos. Vai dar resto 5, 4, 3, 2 ou 1. 1 dividido por 6 dá quanto?

(195) C: 0,1666...

C5	**Frações com denominador 6 geram dízimas periódicas.**					
	Nunca		Às vezes	X	Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

Se o numerador não for 3, ou múltiplo de 6 ou um múltiplo de 6 mais 3, todos os outros números darão dízima.
Os números divididos por 6 dão resto:
1, 2, 3, 4 ou 5.
1 dividido por 6 dá 0,16666... (dízima)
2 dividido por 6 dá 0,33333... (dízima)
3 dividido por 6 dá 0,5 (não dízima)
4 dividido por 6 dá 0,6666... (dízima)
5 dividido por 6 dá 0,83333... (dízima)

Figura 5.11: Resposta da Dupla II para a questão C5.

Assim como em C3, a estratégia foi de natureza exaustiva e trata-se de uma *prova conceitual*, pois associaram cada possível resto a uma classe de números naturais. Tratando de cada um dos possíveis restos, estavam, portanto, considerando todas as possíveis divisões de um número natural por 6.

A Dupla I apresentou um argumento baseado nas suas verificações, ou seja, afirmou que *toda fração com denominador 6 cujo numerador não seja múltiplo de 3 gera* *dízima.* Essa é uma resposta “circular”, com repetição da proposição que se pretende justificar.

A Dupla III deu o mesmo tratamento aos denominadores 3 e 6, afirmando que *quando o numerador não é divisor de 6 dá dízima periódica.* Esse tipo de resposta era previsto e a Atividade 2 (em particular a parte C) dará a oportunidade de retomá-la, a partir da verificação de sua não-validade para determinados casos.

5.2.3.6 C6 – Frações com denominador 7

Aqui, Paola fez alusão ao fato de que, se o numerador é metade do denominador, teremos um número decimal exato como representação da respectiva fração. Apesar de ser um caso particular, e não justificar de forma completa o porquê de o denominador 7 às vezes gerar dízima periódica, a aluna buscou uma explicação que foi além das evidências empíricas apresentando uma justificativa que, a nosso ver, pode caracterizar um *experimento crucial*. Dizemos isso pois, ao afirmar que “a metade do 7 é 3,5, que não pode pôr como numerador” (linha 197), a aluna parecia acreditar que o fato de o denominador 7 não conter o fator 2 em sua decomposição faz com que frações de denominador 7 só gerem decimais exatos quando o numerador é múltiplo de 7. Na verdade, isto ocorre porque o denominador 7 não apresenta, além do fator 2, o fator 5. Acreditamos que Paola tenha tratado o caso do fator 2 como crucial para sua conclusão.

Em termos de interações, produziram apenas os diálogos transcritos abaixo e apresentaram a resposta reproduzida na figura 5.12.

> (196) C: O 7 não tem ligação com os outros, não é?
>
> (197) P: É. O 7 é loucão. O 7 são só os múltiplos, porque a metade do 7 é 3,5, que não pode pôr como numerador. Então, a não ser os múltiplos de 7... [Aqui elas testam os numeradores de 1 a 7, na Planilha.]

C6	Frações com denominador 7 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes	X	Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

a não ser os múltiplos de 7 todos os outros números colocados como numerador darão dízi-
ma.
Esses números ao serem divididos por 7 vão dando resto infinitamente (dízima)

Figura 5.12: Resposta da Dupla II para a questão C6.

As demais duplas apenas deram respostas similares à reproduzida acima, que classificamos como um *empirismo ingênuo*, uma vez que se baseiam nos casos observados, sem apresentar relação destes com a respectiva classe.

5.2.3.7 C7 – Frações com denominador 9

Nesta atividade, verificamos que a Dupla II julgou semelhantes os critérios dos denominadores 6 e 9 (linha 200), mas não seguiu adiante com essa discussão, o que, a nosso ver, poderia levar as alunas a perceberem a importância da decomposição em fatores primos, nesta questão.

(198) P: Às vezes.

(199) C: Quando não é múltiplo...

(200) P: E quando não é 3, não é?

(201) C: Acho que não.

(202) P: O 9 é exatamente a mesma coisa que o 7.

(203) C: Ah, põe aí: o mesmo que o 7. Por que o mesmo que o 7 se o 7... Tem que ter alguma coisa mais concreta.

(204) P: É a divisão. Divisão pura. É isso. Matemática não é algo real, os números não existem, eles são inventados por nós. Não existe número real, é algo inconcreto.

Segue a resposta apresentada pela dupla:

C7	Frações com denominador 9 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes	X	Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

a não ser os múltiplos de 9, todos os outros números colocados como numeradores darão dízima.

Mesma situação do 7.

Figura 5.13: Resposta da Dupla II para a questão C7.

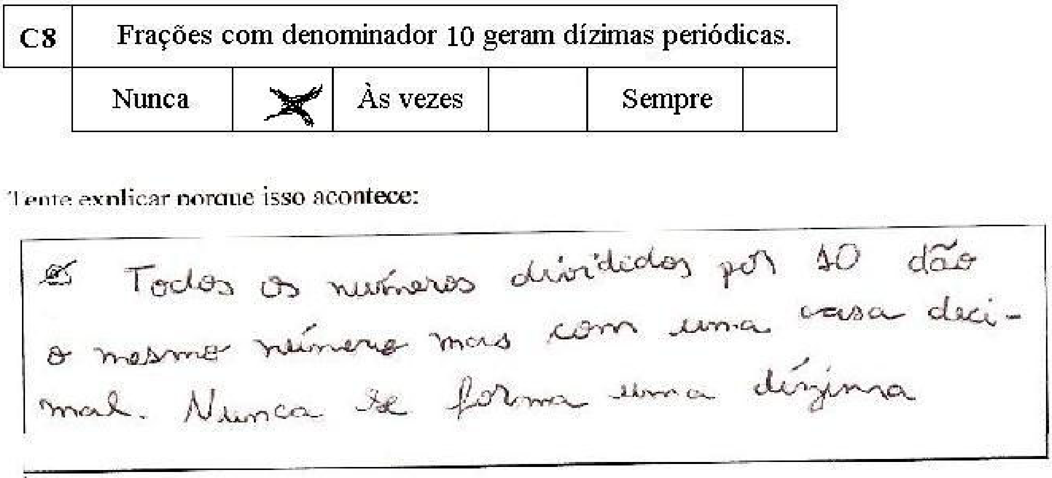
Assim como Carol e Paola, os demais alunos fizeram poucos testes na Planilha e apresentaram respostas similares à destas alunas. Consideramos que essa ausência de apelo ao trabalho empírico se deu em razão de já terem testado vários casos e percebido os comportamentos de alguns objetos (denominadores) e, conseqüentemente, levantado e validado algumas conjecturas, incorporando-as aos seus resultados. A conclusão de Paola (linha 202), comparando os casos dos denominadores 7 e 9, exemplifica essa afirmação.

5.2.3.8 C8 – Frações com denominador 10

Para o denominador 10, argumentaram que, no máximo, gera uma casa decimal, quando o numerador não é um múltiplo de 10 e responderam conforme figura 5.14.

(205) P: Nunca.

(206) C: Nunca. Porque é só mexer com a vírgula. Dividir por 10 é o mesmo que mexer com a vírgula, não há o que fazer, nunca vai dar resto. Porque nosso sistema é decimal.



C8	Frações com denominador 10 geram dízimas periódicas.					
	Nunca	X	Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

Todos os números divididos por 10 dão o mesmo número mas com uma casa decimal. Nunca se forma uma dízima

Figura 5.14: Resposta da Dupla II para a questão C8.

As Duplas I e III afirmaram, respectivamente, que frações com denominador 10 não geram dízimas periódicas "porque é uma fração decimal e porque dividir por 10 é o mesmo que dividir por 1". Apesar da imprecisão apresentada, não fazendo referência ao deslocamento da vírgula, nota-se uma tentativa de justificar conceitualmente.

Nesta atividade, os alunos deveriam produzir conjecturas e algumas conclusões preliminares. Desta forma, ainda não esperávamos argumentos consistentes ou definitivos.

Entretanto, pudemos verificar que as alunas da Dupla II produziram, em vários momentos, argumentos que se caracterizam como *provas conceituais*. As demais duplas também apresentaram, ainda que em menor escala, provas que vão além do empirismo. Isso confirma nossa hipótese inicial da importância do suporte que o trabalho empírico oferece.

5.3 Atividade 2

Conforme previsto no Capítulo 3, esta atividade foi elaborada para que os alunos tivessem a oportunidade de estabelecer critérios para frações com denominador 3 e denominador 6, no que diz respeito à representação decimal ser uma dízima periódica ou um número decimal exato. A ênfase aqui está no fator 2 que diferencia o denominador 3 do 6. Pretendíamos, com isso, que os alunos atentassem para o interesse na decomposição dos componentes da fração (numerador e denominador) em fatores primos. Ainda nesta atividade, propomos uma situação similar (partes D, E e F), desta vez focando o fator 5.

Como verificamos nas interações da Dupla II, referentes à Atividade 1, os casos envolvendo frações com denominadores 3 ou 6 foram amplamente discutidos. Assim, esta atividade não trouxe elementos relevantes para a discussão da dupla, que apenas complementou corretamente as respostas, o mesmo ocorrendo com a Dupla I. Daremos ênfase, então, aos resultados apresentados pela Dupla III (Manuela e Thaís).

Na Ficha, o enunciado da Atividade 2 – Parte A solicitava aos alunos que completassem a planilha Atividade 2_A e, em seguida, respondessem às questões, conforme figuras a seguir.

Atividade 2 – Parte A | Frações com denominador 3

Selecione a planilha "Atividade 2_A". Preencha os numeradores das frações de maneira a obter dízimas periódicas na **primeira coluna** e decimais exatos **na segunda.**

1) O que há de comum entre os numeradores das frações **da primeira coluna**?

2) O que há de comum entre os numeradores das frações **da segunda coluna**?

Figura 5.15: Enunciado da Atividade 2 – Parte A.

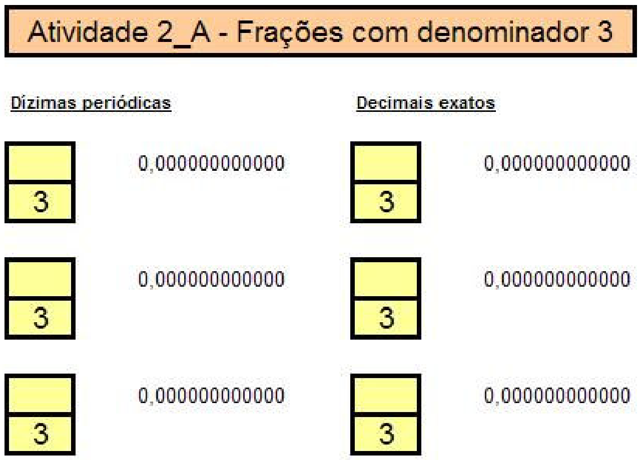


Figura 5.16: Planilha "Atividade 2_A".

Como já haviam respondido corretamente a questão C2 (Atividade 1 – Parte C), que diz respeito a frações com denominador 3, os alunos da Dupla III completaram corretamente os numeradores na Planilha. Conseqüentemente, responderam corretamente as questões (1) e (2) na Ficha.

Reproduzimos a seguir (fig. 5.17) as respostas dadas na Parte B.

Atividade 2 – Parte B

Frações com denominador 6

Selecione a planilha "Atividade 2_B". Preencha os numeradores das frações de maneira a obter dízimas periódicas na primeira coluna e decimais exatos na segunda.

Responda:

1) O que há de comum entre os numeradores das frações **da primeira coluna**?

são números não divisíveis pelo 6

2) O que há de comum entre os numeradores das frações **da segunda coluna**?

são números divisíveis pelo 6

Figura 5.17: Primeira reposta da Dupla III às questões da Atividade 2 – Parte B.

Verifica-se, então, que as alunas repetiram o raciocínio que as conduziu a um erro na Atividade 1 – Parte C (C5), ou seja, não levaram em conta que um múltiplo de 3 no numerador também geraria um decimal exato nas frações com denominador 6. Isto se evidencia quando responderam as questões da Parte C (fig. 5.18), especificamente nos itens (b) e (c).

Atividade 2 – Parte C

Baseado nas suas conclusões das partes A e B e **SEM EFETUAR CÁLCULOS**, classifique as representações decimais das frações abaixo em **decimais exatos (DE)** ou **dízimas periódicas (DP)**. Marque um "X" na sua opção:

a) $\frac{5}{6}$

D.E.	
D.P.	

b) $\frac{15}{6}$

D.E.	
D.P.	

c) $\frac{21}{6}$

D.E.	
D.P.	

d) $\frac{18}{6}$

D.E.	
D.P.	

e) $\frac{14}{6}$

D.E.	
D.P.	

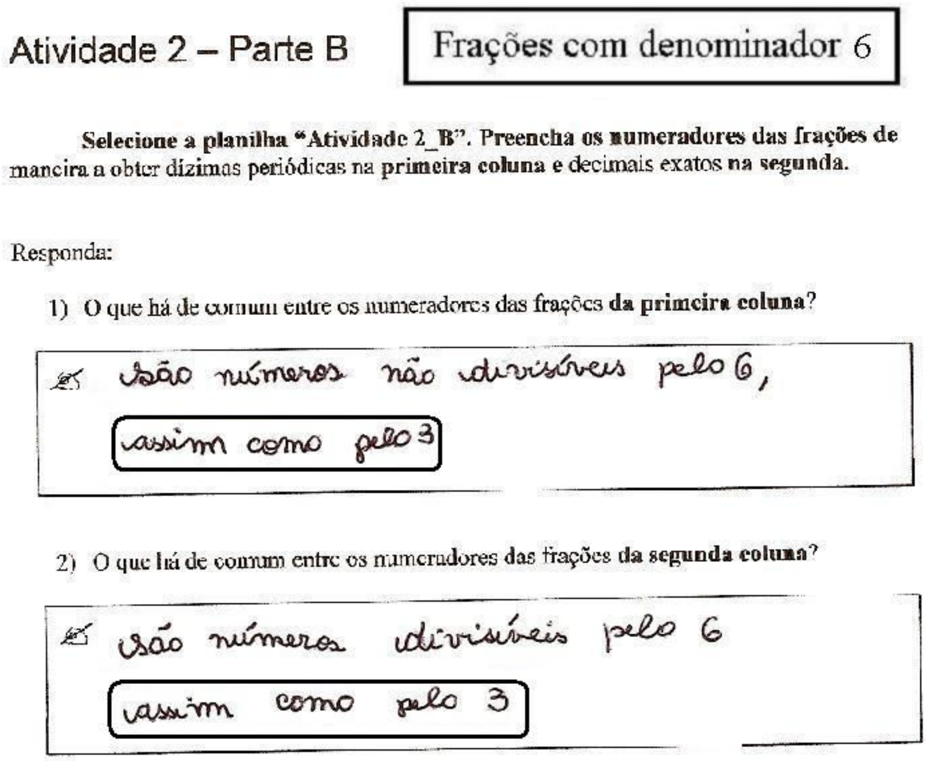
Agora utilize a planilha "Atividade 2_B" e verifique se você acertou. Caso não tenha acertado todas, reformule as respostas das partes A e B.

Figura 5.18: Enunciado da Atividade 2 – Parte C.

No item (b), por exemplo, classificaram a representação decimal da fração $\frac{15}{6}$ como dízima periódica, quando o correto seria classificá-la como um número decimal exato. Esta situação e a previsão deste erro foram descritas no Capítulo 3. Para que os alunos tivessem a oportunidade de rever suas hipóteses ou conjecturas, corrigir eventuais erros e, conseqüentemente, constatar o risco de generalizar ou estender resultados verificados para casos particulares, propusemos, ao final das questões, que utilizassem a planilha Atividade 2_B para verificar seus resultados e reformulá-los, conforme enunciado (fig. 5.18).

A Dupla III utilizou a Planilha a fim de "encontrar" o erro e, após algumas verificações empíricas, concluiu que os numeradores que geram decimais exatos, neste caso, são todos os múltiplos de 3, e não apenas os múltiplos de 6 como havia considerado inicialmente. As alunas reformularam, então, suas respostas e nas partes D, E e F desta atividade responderam corretamente todos os itens, assim como o fizeram as demais duplas.

Reproduzimos a seguir (fig. 5.19) a resposta dada por esta dupla nas questões da Atividade 2 – Parte B, destacando o acréscimo efetuado pelas alunas após a reformulação.


Atividade 2 – Parte B

Frações com denominador 6

Selecione a planilha "Atividade 2_B". Preencha os numeradores das frações de maneira a obter dízimas periódicas na primeira coluna e decimais exatos na segunda.

Responda:

1) O que há de comum entre os numeradores das frações **da primeira coluna**?

São números não divisíveis pelo 6, assim como pelo 3

2) O que há de comum entre os numeradores das frações **da segunda coluna**?

São números divisíveis pelo 6 assim como pelo 3

Figura 5.19: Segunda reposta da Dupla III às questões da Atividade 2 – Parte B.

Assim, o objetivo desta etapa foi atingido e a atividade cumpriu plenamente seu papel, fornecendo condições de validação, pelas alunas, de suas conjecturas anteriores. Com efeito, é somente nesta Parte C que as alunas percebem que o fato de o numerador de uma fração com denominador 6 ser múltiplo de 6 é uma condição suficiente, mas não necessária, para que a representação decimal desta fração seja um decimal exato. Conforme mencionado anteriormente, para as demais duplas esta atividade não trouxe novos elementos, pois já haviam respondido corretamente todos os itens da Atividade 1.

5.4 Atividade 3

Conforme apontamos no Capítulo 3, o objetivo desta atividade é levar os alunos a classificar representações decimais de frações, colocando em prática e estendendo as conclusões obtidas, até então, para outros denominadores.

Os alunos deveriam, então, preencher a Ficha conforme enunciado reproduzido na figura abaixo.

Atividade 3

Sem usar a planilha, classifique as representações das frações abaixo em **decimais exatos (DE)** ou **dízimas periódicas (DP)**. Justifique sua resposta.

a) $\frac{785}{2}$ b) $\frac{15}{3}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{495}{5}$ e) $\frac{59}{5}$

f) $\frac{33}{6}$ g) $\frac{14}{6}$ h) $\frac{40}{14}$ i) $\frac{35}{14}$ j) $\frac{17}{40}$

Figura 5.20: Enunciado da Atividade 3.

No trecho abaixo, a Dupla II (Carol e Paola) discute sobre os itens (h) e (j). Nos demais itens apenas responderam, sem fazer comentários.

(241) P: 40 sobre 14.

(242) C: Tem que ser múltiplo de 7. 40 não é. É dízima periódica.

(243) P: É mesmo? Deixa eu ver a regra do 7. *A não ser os múltiplos de 7, todos os outros numeradores dão dízima.*

(244) C: Olha: 17 sobre 10 é 1,7.

(245) P: Eu sei, mas é 40.

(246) C: Mas dividindo por 4 não vai dar o mesmo resultado?

(247) P: De 10, tudo bem. Precisa ver a regra do 4. Nunca, porque...

(248) C: É. E do 10 também, nunca.

(249) P: O 10 eu já sabia que era nunca.

(250) C: Então, pronto! Quando dá 1,7 dividido por 4?

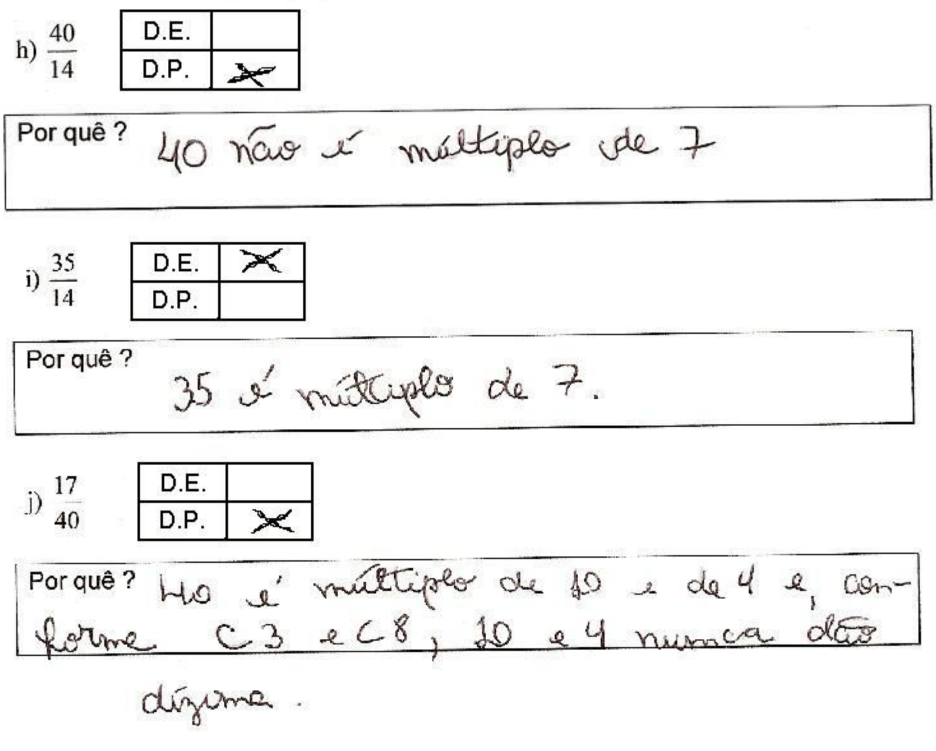
(251) P: Vai dar 4 vírgula alguma coisa. Dá 4 e sobra 1. 1 dividido por 4, vai dar...deu 4,25.

(252) C: Ah, tá falando do 17?

(253) P: É. Vai dar 0,425. Então, dá decimal exato.

Verifica-se aqui que as alunas utilizaram corretamente os resultados obtidos nas Atividades 1 e 2, inclusive estendendo para denominador 40 (linhas 246 até 253) as regras estabelecidas para os denominadores 4 e 10. A generalização deste fato pode conduzir à determinação da classe dos denominadores que nunca geram dízimas. Veremos adiante que as alunas da Dupla II fazem esta generalização, ainda que isto não ocorra de forma espontânea.

Reproduzimos abaixo as respostas apresentadas nos itens cujos denominadores são diferentes daqueles abordados até então.


h) $\frac{40}{14}$

D.E.	
D.P.	X

Por quê ? 40 não é múltiplo de 7

i) $\frac{35}{14}$

D.E.	X
D.P.	

Por quê ? 35 é múltiplo de 7.

j) $\frac{17}{40}$

D.E.	
D.P.	X

Por quê ? 40 é múltiplo de 10 e de 4 e, conforme C3 e C8, 10 e 4 nunca dão dízima.

Figura 5.21: Repostas da Dupla II na Atividade 3.

Nos itens (h) e (i), o foco da argumentação foi o fator 7. Isso confirma o que verificamos nas atividades anteriores: as alunas perceberam que o fator 2 não é um “gerador” de dízimas periódicas, e, embora implicitamente, raciocinam em termos dos fatores primos do denominador.

É interessante notar a resposta dada no item (j). Elas apontaram para o fato de que um denominador composto somente por fatores que nunca geram dízimas periódicas (neste caso, os fatores 4 e 10) faz com que a representação decimal da respectiva fração seja um decimal exato. Na Atividade 2, já haviam apresentado um argumento semelhante, quando afirmaram que o denominador 4 não é um “gerador” de dízimas, pois dividir por 4 é o mesmo que “dividir por 2 e por 2 de novo” (linha 135).

Assim, conforme pretendíamos, as alunas da Dupla II buscaram argumentos baseados em propriedades ou critérios de divisibilidade, já que não faziam uso da Planilha e colocaram em prática as conclusões obtidas em atividades anteriores.

A Dupla I apresentou argumentos próximos do que era esperado, no sentido de focar os fatores primos que compõem o denominador. A título de exemplo, comentamos a seguir as respostas dadas por esta dupla nos itens (d) e (e).

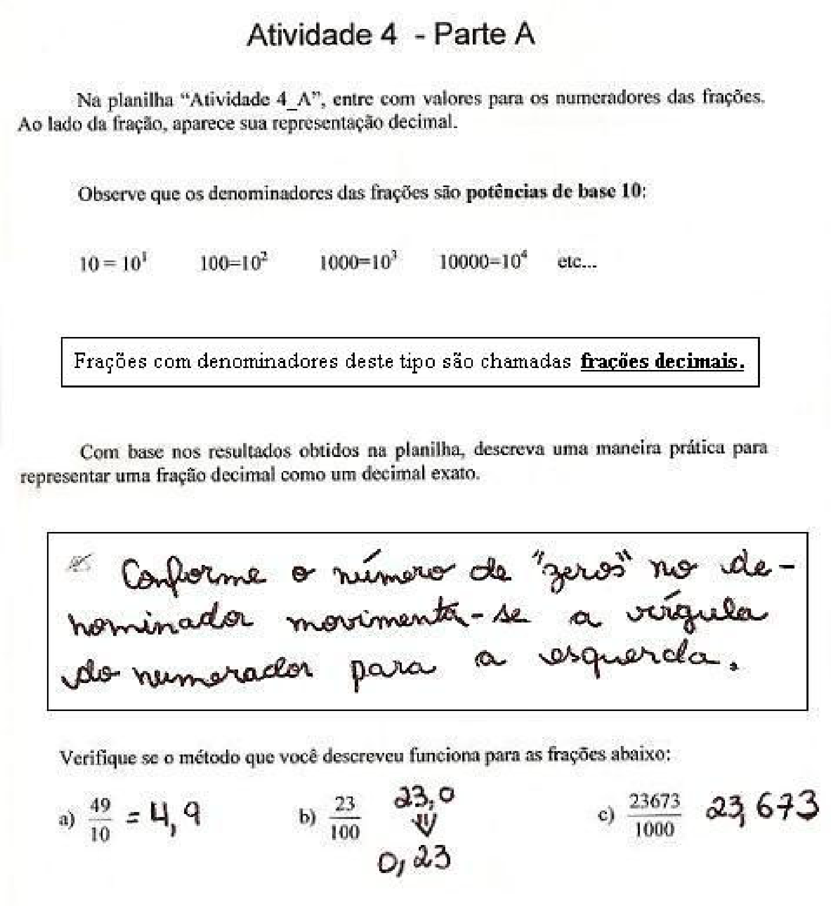
No item (d), enquanto a Dupla III classificou a representação decimal da fração $\frac{495}{5}$ como um decimal exato e justificou baseada no fato de que 495 é múltiplo de 5, a Dupla I classificou-a da mesma maneira, justificando que *qualquer número dividido por 5 gera decimal exato*. De fato, ambas as justificativas são corretas, entretanto a da Dupla I é válida para qualquer fração com denominador 5, ao passo que a da Dupla III só se refere a frações cujo numerador é múltiplo de 5. Esta mesma dupla utilizou um argumento análogo no item (e), cometendo um abuso de linguagem quando afirmou que 59 “é divisível” por 5. Na verdade, quis dizer que 59 dividido por 5 resulta um número decimal exato, usando equivocadamente a expressão “ser divisível” no lugar de “gera número decimal exato”.

5.5 Atividade 4

Aqui, o intuito era o de que os alunos identificassem, por meio da decomposição do denominador em fatores primos, as frações que podem ser escritas como frações decimais, concluindo que estas, e somente estas, geram decimais exatos.

Para isto, na Parte A, solicitamos aos alunos que descrevessem uma maneira prática para representar uma fração decimal como número decimal exato. Ainda nesta parte, os alunos deveriam aplicar esta regra e representar três frações dadas como números decimais exatos.

Nenhuma das duplas apresentou dificuldade nesta tarefa. Como exemplo, a resposta da Dupla II (Carol e Paola) foi reproduzida na figura abaixo.



Atividade 4 - Parte A

Na planilha "Atividade 4_A", entre com valores para os numeradores das frações. Ao lado da fração, aparece sua representação decimal.

Observe que os denominadores das frações são **potências de base 10**:

$10 = 10^1$ $100=10^2$ $1000=10^3$ $10000=10^4$ etc...

Frações com denominadores deste tipo são chamadas **frações decimais.**

Com base nos resultados obtidos na planilha, descreva uma maneira prática para representar uma fração decimal como um decimal exato.

Conforme o número de "zeros" no denominador movimenta-se a vírgula do numerador para a esquerda.

Verifique se o método que você descreveu funciona para as frações abaixo:

a) $\frac{49}{10} = 4,9$ b) $\frac{23}{100}$ 23,0 ⇓ 0,23 c) $\frac{23673}{1000}$ 23,673

Figura 5.22: Reposta da Dupla II na Atividade 4 – Parte A.

Na Parte B, apresentamos uma situação na qual os alunos devem, se possível, obter uma fração decimal a partir da fração $\frac{7}{2}$, conforme figura abaixo.

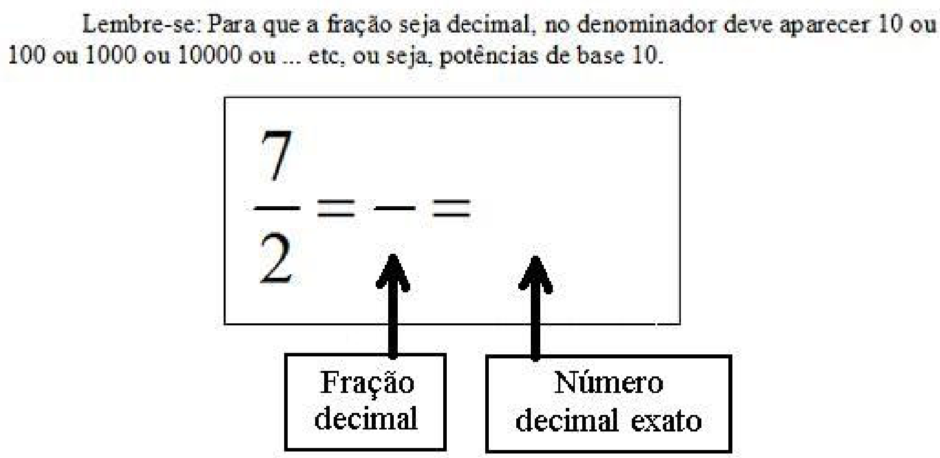


Figura 5.23: Primeiro enunciado da Atividade 4 – Parte B.

As três duplas resolveram esta tarefa multiplicando o numerador e o denominador da fração por 5, obtendo a fração $\frac{35}{10}$ e, conseqüentemente, a sua representação decimal 3,5.

Em seguida, apresentamos uma lista de frações (itens *a* a *f*) e perguntamos se seria possível representar cada uma delas como fração decimal e, conseqüentemente, como decimal exato (fig. 5.24). Para cada fração, os alunos deveriam justificar as respostas.

Agora, analise os casos abaixo e responda:

a) É possível fazer o mesmo para a fração $\frac{3}{5}$ e escrevê-la como fração decimal? Por quê? Justifique sua resposta.

b) E para a fração $\frac{8}{3}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

c) E para a fração $\frac{3}{4}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

d) E para a fração $\frac{14}{6}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

e) E para a fração $\frac{15}{6}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

f) E para a fração $\frac{9}{12}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

Figura 5.24: Segundo enunciado da Atividade 4 – Parte B.

A seguir, analisamos as interações da Dupla II, quando respondeu estas questões. É interessante verificar que, conforme esperávamos, as alunas apresentam respostas baseadas nas conclusões obtidas anteriormente, ao longo da seqüência.

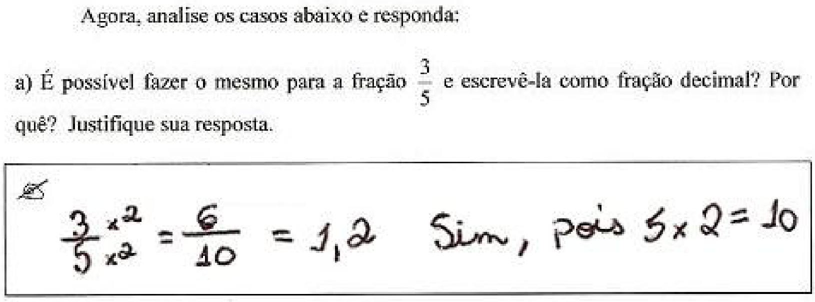
No item (a), não encontraram dificuldade em determinar o fator conveniente pelo qual deveriam multiplicar o numerador e o denominador da fração, além disso, explicaram o porquê da escolha, conforme vemos na figura 5.25.

(266) C: Multiplica por 2.

(267) P: Sim.

(268) C: Então, embaixo sempre tem que ter um número...

(269) P: Que dê pra multiplicar pra virar 10.



Agora, analise os casos abaixo e responda:

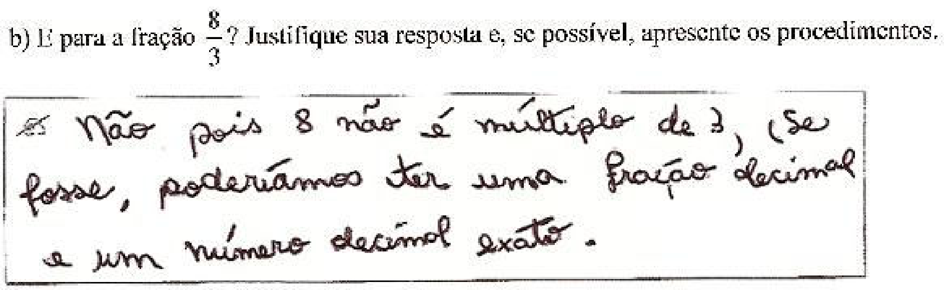
a) É possível fazer o mesmo para a fração $\frac{3}{5}$ e escrevê-la como fração decimal? Por quê? Justifique sua resposta.

$\frac{3^{\times 2}}{5_{\times 2}} = \frac{6}{10} = 1{,}2$ Sim, pois $5 \times 2 = 10$

Figura 5.25: Resposta da Dupla II para a Atividade 4 – Parte B, item (a).

Apesar do erro de cálculo, esta dupla explicitou o fato de que 5x2=10, que é condição suficiente para que seja possível representar a fração dada como fração decimal. Paola atentou para o fato de que basta existir um número que, multiplicado pelo denominador, resulte em 10, para que a fração possa ser transformada em fração decimal (linha 269). Na verdade, poderíamos substituir 10 por qualquer potência de base 10, e este resultado ainda se verifica.

No item (b), verificaram a impossibilidade de se obter uma fração decimal e perceberam que seria possível, caso o numerador fosse múltiplo de 3, conforme observamos na figura abaixo.



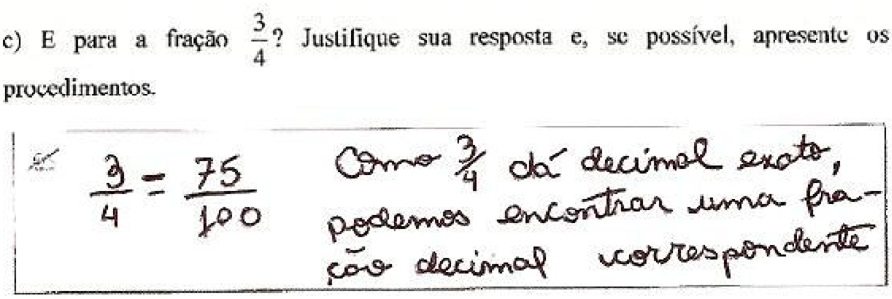
b) E para a fração $\frac{8}{3}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

Não pois 8 não é múltiplo de 3, (Se fosse, poderíamos ter uma fração decimal e um número decimal exato.

Figura 5.26: Resposta da Dupla II para a Atividade 4 – Parte B, item (b).

Aqui, as alunas utilizaram um argumento fundamentado em observações anteriores (Atividades 1 e 2), fazendo referência a propriedades genéricas estabelecidas nas etapas precedentes.

No item (c), fizeram uma afirmação verdadeira, mas o argumento correto para esta questão seria, na verdade, a recíproca daquele apresentado. É possível que não tenham observado isso, dada a familiaridade com a fração $\frac{3}{4}$ como equivalente a $\frac{75}{100}$, como vemos na resposta a seguir (fig. 5.27).

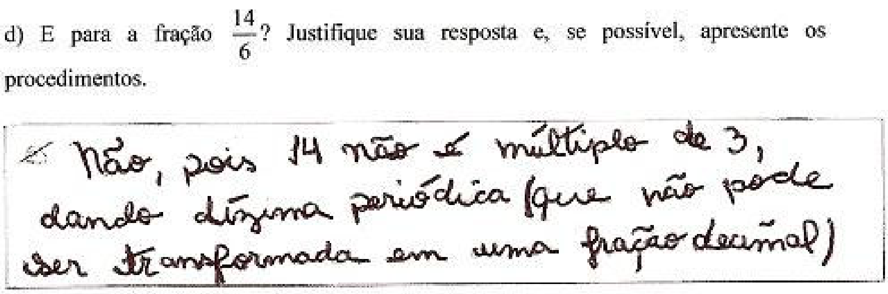


c) E para a fração $\frac{3}{4}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

$\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ Como $3/4$ dá decimal exato, podemos encontrar uma fração decimal correspondente

Figura 5.27: Resposta da Dupla II para a Atividade 4 – Parte B, item (c).

Nos casos em que não era possível obter decimais exatos como representação da fração dada, a dupla também utilizou os resultados da Atividade 1 – Parte C, como a resposta dada no item (d).

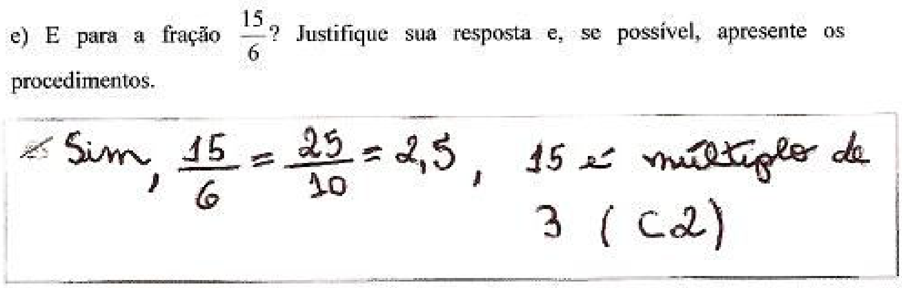


d) E para a fração $\frac{14}{6}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

Não, pois 14 não é múltiplo de 3, dando dízima periódica (que não pode ser transformada em uma fração decimal)

Figura 5.28: Resposta da Dupla II para a Atividade 4 – Parte B, item (d).

No próximo item, a dupla justificou utilizando corretamente o resultado da Atividade 1 – Parte C, ou seja, que é necessário que o numerador de uma fração com denominador 6 seja múltiplo de 3 para que sua representação decimal seja dada por um decimal exato.



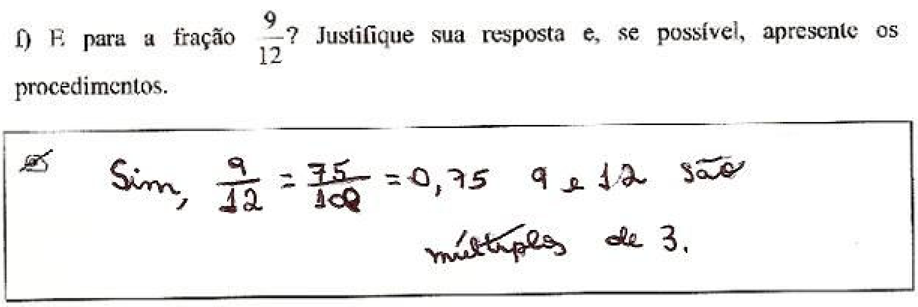
e) E para a fração $\frac{15}{6}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

Sim, $\frac{15}{6} = \frac{25}{10} = 2{,}5$, 15 é múltiplo de 3 (C2)

Figura 5.29: Resposta da Dupla II para a Atividade 4 – Parte B, item (e).

O foco desta dupla continuava sendo o fator 3 no denominador e sua relação com o numerador (se é múltiplo ou não). A partir de nossas observações, verificamos que a resposta das alunas foi assim elaborada: elas primeiramente identificaram que a fração $\frac{15}{6}$ corresponde a um número decimal exato, utilizando a regra enunciada na Atividade 1. Valendo-se da Planilha, verificam que este número é 2,5. Em seguida, converteram-no para a fração decimal $\frac{25}{10}$. Desta forma, não utilizaram a estratégia clássica de obter frações equivalentes, multiplicando ou dividindo os termos por um mesmo número até chegarem à fração $\frac{25}{10}$.

No item (f), procederam como no item (c), conforme figura.



f) E para a fração $\frac{9}{12}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

Sim, $\frac{9}{12} = \frac{75}{100} = 0{,}75$ 9 e 12 são múltiplos de 3.

Figura 5.30: Resposta da Dupla II para a Atividade 4 – Parte B, item (f).

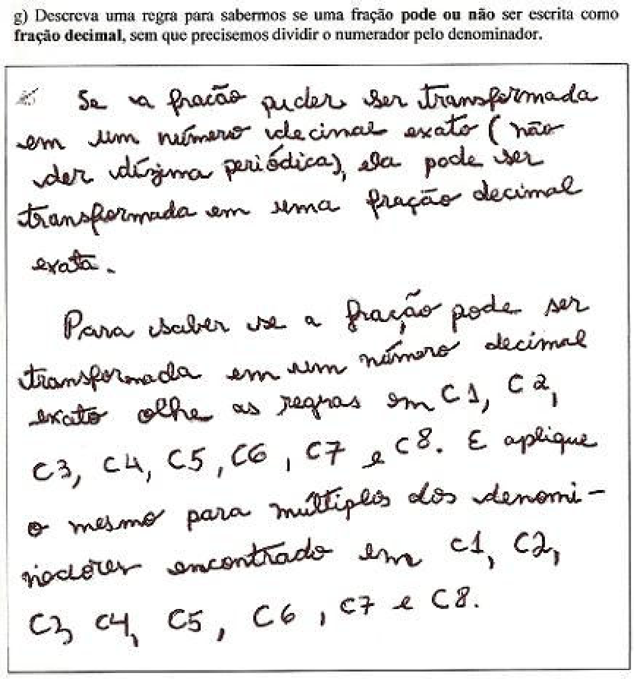
As Duplas I e III responderam corretamente os itens de (a) a (f).

As justificativas da Dupla I foram todas baseadas em cálculos, ou seja, verificaram o resultado de cada divisão (numerador pelo denominador) com o auxílio da Planilha, respondendo corretamente, sem apresentar qualquer justificativa. Quando era possível obter uma fração decimal, determinavam e apresentavam esta fração. Caso contrário, apenas reproduziam a representação decimal, ou seja, a dízima periódica correspondente.

A Dupla III argumentou em linguagem natural afirmando que era possível ou não, respectivamente, "porque conseguimos transformar o denominador em 10 ou porque não conseguimos transformar o denominador em 10", sem apresentar qualquer justificativa.

Concluindo esta parte, os alunos deveriam apresentar, no item (g), um método para decidir se uma fração pode ou não ser representada como um decimal exato, sem efetuar a divisão do numerador pelo denominador.

A Dupla II, apesar de sinalizar para esta regra em alguns momentos da execução das tarefas, não conseguiu sintetizar estes resultados, respondendo conforme figura abaixo.


g) Descreva uma regra para sabermos se uma fração **pode ou não** ser escrita como **fração decimal**, sem que precisemos dividir o numerador pelo denominador.

Se a fração puder ser transformada em um número decimal exato (não der dízima periódica), ela pode ser transformada em uma fração decimal exata.

Para saber se a fração pode ser transformada em um número decimal exato olhe as regras em C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 e C8. E aplique o mesmo para múltiplos dos denominadores encontrado em C1, C2, C3 C4, C5, C6, C7 e C8.

Figura 5.31: Resposta da Dupla II para a Atividade 4 – Parte B, item (g).

A Dupla I não respondeu este item e a Dupla III não apresentou nenhuma dedução, apenas repetindo um resultado já exposto na Planilha, sem justificá-lo, conforme figura 5.32.

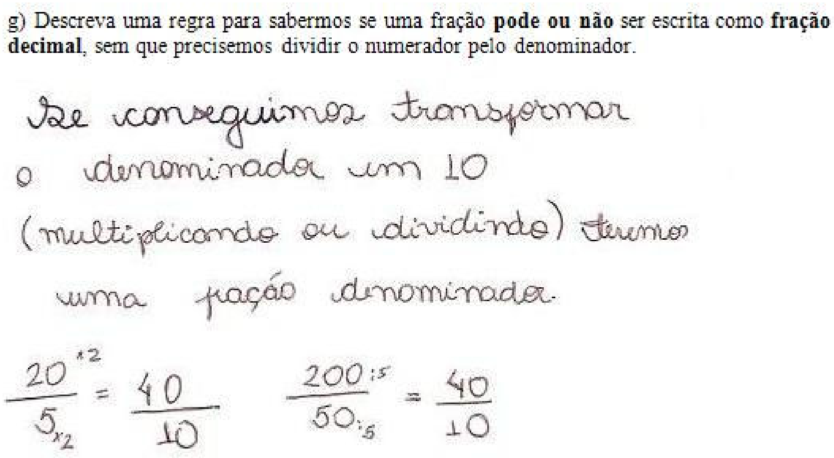


Figura 5.32: Resposta da Dupla III para a Atividade 4 – Parte B, item (g).

Neste momento, optamos por não interferir no trabalho de nenhuma das duplas, pois havíamos previsto uma entrevista com uma delas, a fim de retomar algumas respostas e discutir o que era considerado pelos alunos como justificativa.

A seguir, descrevemos as entrevistas com as alunas da Dupla II.

5.6 Entrevistas

De acordo com a proposta do projeto AProvaME, após a aplicação das seqüências de atividades, elaboradas pelos professores-colaboradores, seria apresentado o questionário sobre provas aos alunos envolvidos nessas experimentações, complementando, assim, a coleta de dados prevista.

No caso dos nossos sujeitos, optamos, em conjunto com os coordenadores do projeto, por uma ou mais entrevistas com a Dupla II (Carol e Paola), pois estes sujeitos já haviam respondido o questionário sobre provas na 1ª fase do projeto AProvaME.

Assim, as entrevistas visavam à complementação da coleta de dados prevista no Capítulo 4 (p. 62). Pretendíamos entender como as alunas avaliavam as provas ou respostas que apresentaram na realização da seqüência de atividades e no questionário sobre provas alterando ou complementando algumas delas, bem como verificar se com a intervenção do professor seriam capazes de sintetizar seus resultados e concluir a resposta dada no item (g) da Atividade 4 – Parte B.

As entrevistas, com duração total de, aproximadamente, duas horas, foram articuladas de modo a ocorrerem em um único encontro com as alunas. Dessa forma, entrevistamos individualmente cada uma das alunas e, em seguida, trabalhamos com perguntas direcionadas à dupla. Estas entrevistas foram gravadas em áudio e as alunas utilizaram uma folha de respostas, que designamos por Ficha complementar.

5.6.1 Entrevistas individuais

Ao analisar as respostas dadas por estas alunas no questionário sobre provas e na seqüência de atividades, verificamos algumas omissões e imprecisões em seus argumentos. Com o intuito de compreender com mais clareza estes dados, julgamos necessário saber se as alunas eram capazes de reavaliar essas respostas, identificando os "passos" omitidos ou corrigindo eventuais imprecisões.

Na questão A4 do questionário, na qual deveriam provar que a soma de um múltiplo de 3 com um múltiplo de 6 é um múltiplo de 3, ambas justificaram que um múltiplo de 6 é também um múltiplo de 3 e, que, conseqüentemente, esta soma resume-se à soma de dois múltiplos de 3, concluindo que o resultado é um múltiplo de 3.

Considerando incompleta esta resposta, por não justificarem o fato de que a soma de dois múltiplos de 3 é um múltiplo de 3, fizemos alguns questionamentos, conforme ilustrado nos diálogos a seguir.

> (1) Professor: Leia e avalie sua resposta. Você a considerada completa, ou seja, acha que justificou tudo o que era necessário?
>
> (2) Carol [após leitura e reflexão]: Acredito que sim. Para mim, está completa.

(3) P: Você não acha que faltou provar que a soma de dois múltiplos de 3 é, ainda, um múltiplo de 3?

(4) C: Achei que não precisava. Já tinha provado que a soma de pares é par! Mas, pensando bem, pares são pares e múltiplos de 3 são outra coisa.

Propusemos, então, que Carol elaborasse uma prova para a proposição citada e a aluna apresentou a resposta reproduzida na figura.

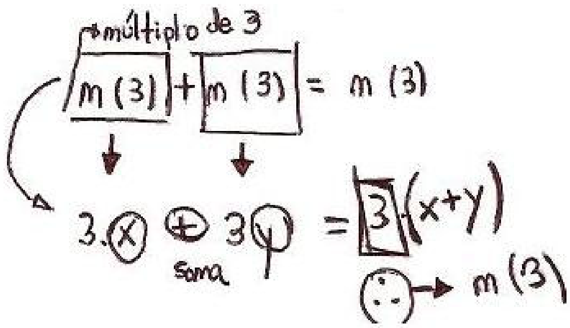


Figura 5.33: Resposta complementar de Carol à questão A4 do questionário sobre provas.

Esta resposta, que classificamos como um *experimento de pensamento*, evidencia que a omissão deste argumento, verificada no questionário, não reflete falta de habilidade da aluna em elaborar este tipo de justificativa, mas, sim, confirma o exposto na linha (2), ou seja, segundo sua concepção, sua prova estava completa. Esta situação, a nosso ver, poderia ser contornada por uma intervenção do professor, semelhante a esta, feita na entrevista.

Ainda com relação a esta questão, transcrevemos as respostas dadas por Paola, tanto na entrevista como na ficha complementar.

(5) Professor: Leia e avalie sua resposta. Você a considerada completa, ou seja, acha que justificou tudo o que era necessário?

(6) Paola [após leitura e reflexão]: Sim, está completa!

(7) Professor: Você não acha que faltou provar que a soma de dois múltiplos de 3 é, ainda, um múltiplo de 3?

(8) Paola: Depende de quem vai ler. Eu achei que isso era óbvio.

Consideramos que a resposta dada por Paola (linha 8) reforça nossa hipótese anterior de que, neste tipo de situação, algumas premissas ou propriedades são consideradas evidentes e utilizadas sem que o aluno sinta necessidade de explicitação.

Fizemos uma nova intervenção, a fim de propor que a resposta seria apresentada a um colega que não respondeu a questão e que Paola respondesse da forma mais completa possível. Reproduzimos, a seguir, a resposta apresentada pela aluna.

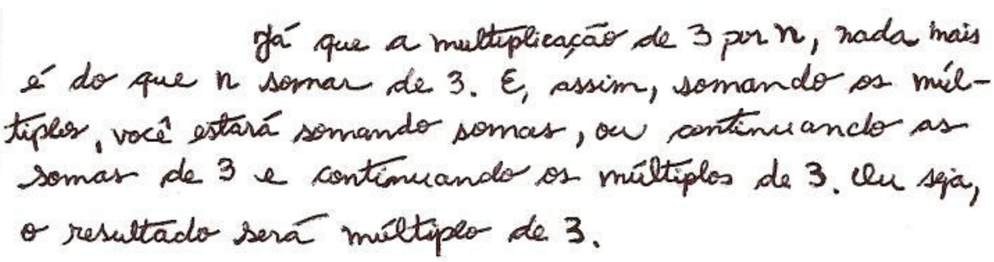

Já que a multiplicação de 3 por n, nada mais é do que n somas de 3. E, assim, somando os múltiplos, você estará somando somas, ou continuando as somas de 3 e continuando os múltiplos de 3. Ou seja, o resultado será múltiplo de 3.

Figura 5.34: Resposta complementar de Paola à questão A4 do questionário sobre provas.

O raciocínio utilizado por Paola nesta resposta se assemelha ao de Carol. Assim, caracterizamos esta prova como do tipo *experimento de pensamento*.

Conforme verificou-se no Capítulo 4 (p. 79), no item (c) da questão A5, cujo enunciado era: “8! É múltiplo de 21? Justifique”, Carol apresentou um argumento incompleto e Paola não havia respondido esta questão. As respostas dadas na entrevista estão reproduzidas a seguir.

> (9) Professor: Você afirmou que 8! é múltiplo de 21,justificando com o fato de este número apresentar o fator 7 em sua decomposição. Você considera suficiente este argumento?
>
> (10) Carol: Claro que não! Tem que ter o 3 também. Não sei como dei uma resposta absurda dessa!

Nesta fala de Carol, em oposição ao que verificamos na questão A4, a aluna não explicitou o porquê da referida omissão, já que se mostrou surpresa diante do seu erro. Em seguida, reformulou sua resposta, conforme figura abaixo.

Sim. $8! = 8.\boxed{7}.6.5.4.\boxed{3}\times 2.1$

$\underbrace{7 \ldots 3}_{21}$

$21 \times \underbrace{8.6.5.4.2.1}_{x}$

$21x$ = múltiplo de 21

Figura 5.35: Resposta complementar de Carol à questão A5(c) do questionário sobre provas.

Novamente consideramos que a imprecisão do argumento pode ter se originado das concepções de prova da aluna ou ainda de uma distração momentânea, já que esta identificou prontamente o equívoco. Caracterizamos esta "nova" prova como um *experimento de pensamento*, contendo um argumento se baseia em estrutura do fatorial, ou seja, uma propriedade ou condição, comum a todos os múltiplos de 21, qual seja apresentar os fatores 3 e 7 em sua decomposição.

Paola, que na entrevista não soube explicar o motivo pelo qual deixou esta questão em branco, apresentou (fig. 5.36) uma resposta similar à de Carol, caracterizando, assim, um *experimento de pensamento*.

Sim. $8! = 8.7.6.5.4.3.2.1$

$\underbrace{7 \times 3}_{21}$

$21 \times \underbrace{8.6.5.4.2.1}_{n}$ = um múltiplo de 21

Figura 5.36: Resposta complementar de Paola à questão A5(c) do questionário sobre provas.

Além destas discussões, procuramos levantar, nestas entrevistas, algumas impressões das alunas concernentes à proposta de nossa seqüência experimental e suas concepções relacionadas à prova em Matemática, bem como complementar a proposta da Atividade 4 – Parte B, especificamente no item (g), conforme descrito no item seguinte.

5.6.2 Entrevista com a Dupla II

Relativamente às tarefas da seqüência de atividades, apenas retomamos o item (g) da Atividade 4 – Parte B, já que nas outras etapas os objetivos foram atingidos.

Neste item, os alunos deveriam estabelecer uma regra para decidir se a representação decimal de uma fração qualquer caracteriza um decimal exato ou dízima periódica, sem efetuar o cálculo (divisão do numerador pelo denominador).

Constatamos que os resultados apresentados pela Dupla II ao longo da seqüência de atividades seriam suficientes para estabelecer esta regra. Entretanto, as alunas não conseguiram efetuar esta síntese dos resultados da maneira como pretendíamos.

Diante disso, procuramos resgatar estes resultados dos alunos e levá-los a atingir o objetivo proposto para esta etapa por meio das questões que descrevemos a seguir. Consideramos que esta intervenção do professor possa ser realizada no momento da aplicação da seqüência de atividades, que não foi o nosso caso, conforme já exposto.

Consoante verificamos na análise apresentada neste Capítulo, as alunas da Dupla II perceberam quais os denominadores que nunca geram uma dízima periódica e inclusive verificaram, na Atividade 3 – item (j), que um denominador composto de fatores que nunca geram dízima periódica é, por sua vez, também um denominador com esta característica. Diante disso, iniciamos com uma pergunta que retoma este resultado.

(11) Professor: Quais são os denominadores que nunca geram dízimas periódicas?

(12) Paola: O 2, o 4, o 5 e o 10?

(13) Professor: Apenas esses?

(14) Carol: Não, os seus múltiplos também.

Aqui Carol fez uma suposição falsa. Como a proposta da nossa intervenção não é a de fornecer qualquer resposta ou corrigir erros dos alunos, optamos, neste caso, por criar situações de contradição, dando oportunidade às alunas de identificar e corrigir o seu erro.

> (15) Professor: O 6 é múltiplo de 2. Logo, frações com denominador 6 nunca geram dízimas, certo?

> (16) Carol: Não! Tem coisa errada. Não é isso.

Como mencionamos no parágrafo anterior, Carol percebeu que seu raciocínio conduziu a uma contradição. Na linha (18), Paola reformulou a afirmação falsa que Carol havia dado na linha (14).

> (17) Professor: Vocês responderam na Atividade 3 que o denominador 40 não gera dízima porque 40 é 4 vezes 10. Isso tem relação com a afirmação que você [Carol] fez sobre múltiplos?

> (18) Paola: Ah, tá! Já sei. É diferente. 40 é 4 vezes 10. Nem o 4, nem o 10 geram dízima. Então, o 40 também não gera.

> (19) Professor: Por quê?

> (20) Paola: Porque dividir por 40 é o mesmo que dividir por 4 e por 10. Se dividindo por 4 só aumenta o número de casas decimais, ainda teremos um decimal exato. E um decimal exato dividido por 10 é um outro decimal exato com uma casa decimal a mais, entendeu?

Diante dos resultados apresentados, procuramos criar uma *situação de institucionalização*, conforme segue.

> (21) Professor: Certo. Então quais são os denominadores que nunca geram dízima periódica?

> (22) Carol: São aqueles que só têm fatores 2, 4, 5 ou 10. Opa, o 4 tem o fator 2 e o 10 tem o 2 e o 5. Então são aqueles que só têm fator 2 ou 5.

Aqui, para nos certificar de que a condição estabelecida por Carol (linha 22) estava sendo tratada como suficiente (o que é correto) e não como necessária para que uma fração seja representa por um decimal exato (o que seria falso), fizemos um questionamento a respeito da sua recíproca.

> (23) Professor: Então, se o denominador apresentar algum fator diferente de 2 ou 5, teremos uma dízima?

(24) Paola: Não necessariamente. $\frac{3}{6}$ não dá dízima!

(25) Professor: Mas não deveria? Afinal tem o fator 3 no denominador.

(26) Carol: Ah, mas corta com o de cima. É isso! Se a gente simplificar, é só olhar pro denominador.

Com isso, pudemos nos certificar de que as alunas não confundiram condição necessária com suficiente. Seguimos, então, procedendo à devida *institucionalização*.

(27) Professor: Então vamos resumir: se o denominador só apresentar fatores 2 e 5 na sua decomposição, o que vocês concluem?

(28) Carol/Paola: Dá decimal exato.

(29) Professor: E não precisa decompor o numerador?

(30) Carol: Não, porque tudo dividido por 2 ou 5 dá sempre decimal exato, só vai aumentando o número de casas decimais.

(31) Professor: E se aparecer algum fator diferente de 2 ou 5 no denominador, o que vocês concluem?

(32) Paola: Aí a gente tem que procurar este fator lá em cima. Se ele aparecer, a gente cancela e vira um decimal exato. Se ele não aparecer, vai dar dízima.

(33) Carol: Resumindo: neste caso a gente simplifica a fração e vê o que sobra embaixo. Se for só fatores 2 ou 5, beleza, é decimal exato. Senão, é dízima.

Aqui, verificamos que a intervenção do professor propiciou aos alunos organizar e sintetizar os resultados obtidos por eles, atingindo o objetivo proposto para esta etapa da seqüência de atividades. Acreditamos que algumas destas questões que propusemos poderiam constar dos enunciados da seqüência. Entretanto, consideramos que a intervenção do professor seja mais eficaz, já que nem todas as questões foram previamente elaboradas, ou seja, surgiram a partir das respostas dos alunos, na interação com o professor.

Em seguida, fizemos algumas perguntas para a dupla, sem estipular uma ordem para quem responderia primeiro, inclusive deixando-as à vontade para decidirem quais as questões que cada uma gostaria ou não de responder. Por este motivo, apresentamos, em alguns casos, a resposta de apenas uma das alunas.

> (34) Professor: O que vocês acharam de responder ao questionário e o que consideram que estávamos avaliando com este instrumento?
>
> (35) Paola: Ele avaliou nosso jeito de escrever, o "como" você passa para o papel o que quer provar. Eu acho que a escrita influi no nosso raciocínio.

Aqui, Paola reconheceu uma prova como uma descrição do seu raciocínio, tratando-a como um registro de suas idéias. Esta parece uma interpretação possível para alunos desse nível de ensino e que, a nosso ver, pode ajudar a dar significado a uma prova no contexto escolar.

> (36) Professor: Na execução das tarefas da seqüência de atividades, em que pontos vocês consideram que a Planilha contribuiu?
>
> (37) Carol: O computador ajudou só nas contas, mas eu acho que não conseguiria dar as mesmas respostas sem ele.
>
> (38) Professor: Por que acha isso?
>
> (39) Carol: Porque pra perceber os padrões eu teria que fazer muitas contas e mesmo assim não é a mesma coisa.

Carol (linhas 37 e 39) percebeu o potencial da Planilha na geração de um amplo campo de verificação, validando nossa hipótese inicial quanto ao papel deste recurso.

> (40) Professor: Que outras situações de prova vocês já vivenciaram?
>
> (41) Paola: Nunca tivemos que provar. O professor é que mostra, às vezes.

Este comentário de Paola ilustra as considerações que fizemos na Introdução acerca da abordagem clássica de ensino: o professor é quem apresenta as provas ou demonstrações formais, pois os alunos não são capazes de produzi-las dessa forma.

> (42) Professor: E sobre a seqüência de atividades, o que acharam da proposta? Já fizeram algo parecido? Acham que foi proveitoso? O que vocês consideram que estava sendo avaliado?

> (43) Paola: Nunca fiz nada parecido; geralmente o professor explica e a gente faz. E foi boa, porque fez a gente pensar em coisas que eu jamais pensaria e acho que você estava querendo avaliar o nosso raciocínio.

Com este comentário, Paola explicita o seu entendimento em relação à proposta: apresentar seus raciocínios. Acreditamos que essa compreensão confere um papel significativo para a prova, qual seja, o de registro do raciocínio desenvolvido.

> (44) Professor: Para vocês, o que é prova e quando se deve usá-la?

> (45) Carol: Com a prova você tem um atalho. Você observa e testa até encontrar um padrão. Se você conseguir explicar por que chegou naquilo, é uma prova. Para chegar no geral é preciso provar usando incógnitas, na linguagem padrão da Matemática.

Esperávamos que a proposta deste trabalho levasse os alunos a considerar outras funções da prova, além da função de *verificação*. Esta consideração de Carol (linha 45) revela que ela enfatiza o papel de *explicação* de uma prova. Além disso, afirma que é preciso usar "incógnitas", ou seja, ela valoriza a linguagem algébrica na expressão do raciocínio dedutivo, talvez como elemento para dar generalidade à prova.

> (46) Paola: Provar é fazer o processo inverso. Quando você prova, você mostra como a pessoa chegou lá. E uma resposta completa tem que ter escrita correta. Não precisa usar letras para especificar o que é geral.

Novamente, Paola fez alusão à prova como o texto de um raciocínio, ou seja, a explicitação detalhada, mas não necessariamente formal, de como se pensou, visando explicar ou validar um resultado do qual já se havia constatado a veracidade.

> (47) Paola: O "quando" se deve provar, depende do conhecimento da pessoa. Se eu sei que algo está óbvio para uma pessoa, eu não provo. Por exemplo, aquela prova que tinha no questionário de que a soma dois pares é par. Teve um aluno que falou que par termina em 0, 2, 4, 6, ou 8 e, por isso, a soma de dois pares também é par porque também termina assim. Eu faria o mesmo e não provaria que 0 + 0 é zero, que 0 + 2 é 2, etc. Porque é óbvio.

Aqui Paola não se prendeu à crença de que uma resposta dada a uma autoridade (no caso, um professor) deva ser mais completa do que uma outra apresentada a um colega de classe, por exemplo. Pelo contrário, afirmou que não há necessidade de provar o que é, para ela, óbvio. Consideramos que a aluna, sob esta perspectiva, não tratou a prova como um discurso formal e passível de nota, mas como um meio de esclarecer ou explicar raciocínios que não estão claros para alguém. Neste sentido, acreditamos que Paola, assim como Carol, valorizaram a prova com a função de *explicação* e de *comunicação*.

CONCLUSÃO

> *Fala-se e propõe-se [...] utilizações de tecnologia na educação. [...] o professor incapaz de se utilizar desses meios não terá espaço na educação. O professor que insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral. O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos [...].*
>
> (Ubiratan D'Ambrosio, *Educação Matemática*: *da teoria à prática*)

1. A proposta do estudo

O objetivo deste trabalho, conforme descrito no Capítulo 1, foi a concepção, aplicação e análise de situações de aprendizagem em ambiente informatizado visando promover um trabalho com argumentação e provas, principalmente no que diz respeito a potencializar a produção de justificativas baseadas em conceitos e propriedades matemáticas, a partir da manipulação empírica. Neste sentido, utilizamo-nos de uma seqüência de atividades com o intuito de dar aos alunos a oportunidade de vivenciarem várias etapas do processo de prova e, em especial, a fase de elaboração e verificação de conjecturas.

Para a concepção das atividades, apoiamo-nos em estudos que abordam este tema sob diversos aspectos: tipos de prova (BALACHEFF, 1988), concepções de prova dos alunos (HEALY e HOYLES, 2000) e funções da prova (DE VILLIERS, 2001). Além disso, fizemos algumas hipóteses e considerações a partir de trabalhos atuais em Educação Matemática que investigam o ensino de provas (BRASIL, 1998; CARLOVICH, 2005; GRAVINA, 2001; NASSER; TINOCO, 2001; PIETROPAOLO, 2005).

As principais idéias advindas destas pesquisas, das quais nos apropriamos ao longo deste estudo, dizem respeito às possibilidades de trabalhar com provas na Educação Básica, desde que estas não sejam tratadas sob um ponto de vista puramente formal. As orientações destas pesquisas apontam para a inserção das provas em um processo de ensino mais amplo, no qual se considerem as várias fases do processo de construção de uma prova, os diversos papéis que uma prova pode assumir, bem como as concepções de professores e alunos sobre provas matemáticas no contexto escolar. Assim, levamos em conta neste trabalho que muitos alunos consideram a verificação de casos particulares como suficiente para validar uma afirmação matemática, o que nos aponta uma necessidade de compreender as concepções de alunos acerca do significado e das funções de uma prova.

Quanto à importância de se trabalhar com este tema, parece haver um consenso entre professores de Matemática de que o ensino de provas deva fazer parte das aulas de Matemática desde o Ensino Fundamental (PIETROPAOLO, 2005).

No que diz respeito aos papéis que uma prova pode assumir tanto na Matemática como na Educação Matemática, buscamos apoio nas idéias de De Villiers (2001). Segundo este pesquisador, o papel de verificação, muito enfatizado no ensino, é, muitas vezes, menos relevante do que outros, como o de explicação e de comunicação. A perspectiva desse autor é observar e valorizar as motivações que podem levar à busca de uma prova no contexto matemático e trazer estas motivações para o âmbito da Matemática Escolar, admitindo-se assim outras funções para a prova.

Para avaliar as construções de prova dos alunos, utilizamos a classificação dada por Balacheff (1988) que as divide em duas categorias: as pragmáticas, subdivididas em *empirismo ingênuo*, *experimento crucial* e *exemplo genérico*, e as conceituais, subdivididas em *experimento de pensamento* e cálculo nas afirmações. As *provas pragmáticas* são aquelas que se baseiam em ações do sujeito sobre os objetos matemáticos, levando a uma determinada conclusão, geralmente obtida por meio de um raciocínio indutivo. As *conceituais* caracterizam-se pela formulação de propriedades e relações entre estas, que conduz a uma conclusão por meio de um raciocínio dedutivo.

A metodologia adotada nesta investigação inspira-se nas etapas de uma *engenharia didática*, com foco na seqüência de ensino. Desta forma, nem todas as etapas são contempladas, e alguns procedimentos diferem daqueles normalmente utilizados nesta metodologia. Podemos apontar, em particular, o fato de o professor assumir um papel de observador, interagindo com os alunos em momentos bastante específicos, em geral, quando solicitado. Além disso, não foram previstas *situações de institucionalização* na concepção da seqüência de atividades.

A fase experimental diz respeito, então, à aplicação desta seqüência, subdividida em quatro atividades, elaboradas com a cooperação de professores-colaboradores, participantes do projeto AProvaME.

A primeira destas atividades objetivava inserir os alunos em um ambiente investigativo, com situações que lhes permitissem trabalhar empiricamente, levantar conjecturas, verificá-las e observar propriedades em jogo. Com a segunda atividade visávamos levar os alunos a atentar para o risco de se estenderem resultados válidos para um determinado conjunto de objetos matemáticos a um outro conjunto. O propósito da terceira atividade era fazer com que os alunos aplicassem os resultados obtidos até então, para um conjunto mais amplo de casos, levando-os a refletir e reformular seus resultados, em caso de erro ou falsas conjecturas. Finalmente, com a quarta atividade, esperávamos que os alunos sintetizassem suas observações e conclusões, apresentando uma regra prática para o problema em questão, qual seja, apresentar um critério geral para determinar se a representação decimal de uma dada fração corresponde a um decimal exato ou a uma dízima periódica.

2. Principais resultados

Os resultados obtidos na 1ª fase do projeto AProvaME com estudantes brasileiros no que diz respeito às concepções de provas denotam uma semelhança com aqueles apontados por Healy e Hoyles (2000) em pesquisa realizada com estudantes ingleses.

A escolha por um *argumento empírico* (HEALY, HOYLES, 2000) como a resposta que os próprios alunos dariam foi verificada para 52% dos nossos alunos. Este tipo de argumento constituiu 24% das escolhas dos alunos ingleses (ibid., 2000), o que indica a dificuldade de grande parte dos nossos alunos em apresentar provas com algum grau de generalidade. Este pressuposto é reforçado ao verificarmos que apenas 9% de nossos alunos escolheram o argumento algébrico de Arthur, nesta mesma questão.

Tal constatação nos levou, nesta pesquisa, a adotar uma abordagem focada na valorização de situações nas quais os alunos possam enunciar suas próprias proposições. Desta forma, consideramos importante isentar os alunos de um precoce tratamento algébrico, no trabalho com provas.

Por outro lado, as *provas algébricas* são consideradas pelos alunos como corretas, correspondendo àquelas esperadas pelos seus professores. Na questão A1 de ambos os questionário sobre provas, por exemplo, 39% de nossos alunos, assim como 64% dos alunos ingleses, apontam para as *provas algébricas* como a que o professor deve atribuir a maior nota. Consideramos que se deve abordar o ensino de provas sem enfatizar a linguagem formal. Acreditamos, assim, que os alunos devam ser encorajados a desenvolver e apresentar raciocínios dedutivos com argumentos narrativos, dando-lhes oportunidade de priorizar este tipo de raciocínio, fundamental para a apresentação de uma prova.

Os dados do nosso questionário nos apontam, ainda, que as concepções dos alunos sobre provas são, em geral, relacionadas a evidências empíricas e poucos mostram alguma necessidade em relacionar casos particulares a fatos gerais, por meio de propriedades. Nas construções de provas dos 1998 alunos da amostra, apenas cerca de 8% obtiveram sucesso em argumentos que vão além do *empirismo ingênuo* (BALACHEFF, 1988). Como exemplo, na questão A3, somente 4% dos alunos receberam pontuação 2a[25], 2% receberam 2b e apenas 0,5% conseguiu apresentar uma resposta completa, totalmente justificada, recebendo pontuação 3. Este quadro ilustra a necessidade de investigar as condições do ensino de provas no Ensino Fundamental.

Apesar das semelhanças apresentadas, verifica-se uma diferença importante entre alunos brasileiros e ingleses no que concerne à atitude tomada diante de situações de prova. Os brasileiros apresentam um índice de respostas em branco em torno de 40%, enquanto para os alunos ingleses este índice está abaixo dos 10%.

Relativamente à seqüência de atividades, pudemos verificar, na aplicação-piloto, que os alunos que trabalharam em duplas apresentaram comportamentos favoráveis ao desenvolvimento da nossa proposta, ou seja, efetivamente interagiram com o colega de dupla, gerando situações de levantamento de conjecturas e, principalmente, de busca por provas com funções de explicação e de comunicação. Além disso, estas interações permitiram aos alunos discutir, confrontar e reformular suas hipóteses, quando necessário, refinando seus

[25] Estas pontuações referem-se à codificação elaborada pela equipe do projeto na 1ª fase do projeto AProvaME e apresentada no Capítulo 1 (p. 23).

argumentos ao longo das discussões. Por estes motivos, mantivemos nossa opção inicial por um trabalho exclusivamente com duplas de alunos na experimentação.

Esta opção nos trouxe relevantes elementos para análise, na medida em que as interações propiciaram aos alunos a discussão e reformulação de hipóteses. Desta forma, em alguns momentos, as provas dos alunos passaram a assumir, além do papel de verificação, os de *explicação* e de *comunicação*.

Na primeira atividade da seqüência, os alunos engajaram-se na proposta, fazendo diversas manipulações empíricas, levantando suas próprias conjecturas e observando algumas propriedades dos objetos manipulados, chegando, já nesta etapa, a produzir algumas *provas conceituais,* em particular, a Dupla II. É importante notar que a Planilha cumpriu o papel desejado, ao proporcionar aos alunos a verificação e manipulação de vários casos, o que potencializou o trabalho empírico.

O objetivo da segunda atividade foi atingido, ou seja, duas duplas estabeleceram corretamente os critérios para geração de dízimas periódicas em frações com denominadores 3 e 6 e, para a dupla que o fez de maneira equivocada, a Parte C desta atividade forneceu condições e meios para a produção de contra-exemplos, levando os alunos a rediscutirem e refutarem a falsa conjectura.

De posse dos resultados e conclusões obtidos nas atividades 1 e 2, os alunos atingiram o objetivo da terceira atividade, ou seja, aplicaram estes resultados para um conjunto mais abrangente de casos.

A Dupla II foi a que mais se aproximou do que esperávamos na quarta atividade, ou seja, suas observações e conclusões mostraram-se relevantes no estabelecimento de uma regra geral para o problema em questão, embora estes dados tenham sido obtidos, principalmente, nas duas primeiras atividades. Por este motivo, escolhemos esta dupla para realizar a entrevista e complementar estes dados.

Além disso, na perspectiva de avaliação das atividades e propostas da seqüência, acreditamos que estas informações possam contribuir e ser incorporadas à seqüência de atividades, trazendo questões ou enunciados mais precisos e que dêem oportunidade aos alunos de melhor sintetizarem suas conclusões para o estabelecimento desta regra.

Consideramos que no ensino de provas o foco deve estar em tarefas de levantamento de conjecturas sobre proposições não-familiares aos alunos. Acreditamos que os alunos possam sentir mais necessidade em provar este tipo de proposição do que aquelas cujos enunciados já são conhecidos por eles. Em nosso estudo experimental, verificamos que a atitude de desconfiança dos alunos é comum perante conjecturas levantadas por eles mesmos ou pelo colega, o que não é esperado para proposições apresentadas pelo professor ou livro didático, dado que é sabido que estas são, necessariamente, verdadeiras. Estas desconfianças favoreceram a busca por provas que, desta forma, podem assumir o papel de explicação e comunicação (DE VILLIERS, 2001), conforme verificamos em nosso estudo.

Como mencionado anteriormente, acreditamos que o levantamento de conjecturas por parte dos alunos seja essencial no ensino de provas. Nesta investigação, constatamos que o trabalho empírico proporcionou o levantamento de conjecturas, favorecendo a busca por padrões, ou seja, características gerais observadas nos objetos manipulados, que são, a nosso ver, essenciais para a formulação de provas do tipo *exemplo genérico* e, conseqüentemente, *experimentos de pensamento*.

Este trabalho empírico foi realizado pelos alunos fazendo uso do *Microsoft Excel*, que lhes apresentava resultados imediatos e simultâneos, ou seja, podiam testar e observar vários casos ao mesmo tempo, levantando conjecturas e buscando validações ou contra-exemplos.

Portanto, como previsto, as *Planilhas Excel* assumiram, neste trabalho, o papel de gerar e apresentar diversos exemplos, proporcionando um amplo campo de investigação para os alunos, bem como o de ferramenta de validação das conjecturas levantadas pelos alunos.

Ainda que, em nossa proposta, não tenhamos previsto a interação professor-aluno, e mesmo julgando necessário efetuar algumas alterações na forma de apresentação das questões, verificamos que este grupo de seis alunos apresentou respostas e comportamentos além das expectativas desta investigação. Isto nos leva a considerar que este tipo de atividade, desde que devidamente adaptada, possa ser desenvolvido com um grupo maior e mais heterogêneo de alunos.

Particularmente, acreditamos que, para aplicar estas atividades em sala de aula, o professor deva proceder, quando necessário, às devidas intervenções no trabalho dos alunos, sendo responsável pela gestão da classe e pela discussão e confrontação das respostas dos alunos, bem como pela fase de institucionalização de saberes constituídos pelo grupo e,sobretudo, pela proposta de atividades que contemplem as zonas de dificuldades dos alunos. Discutimos, a seguir, algumas das possíveis alterações comentadas acima.

3. Sugestões para as atividades

Visando complementar e otimizar a proposta da seqüência de atividades descrita no Capítulo 3, apontaremos algumas sugestões no que diz respeito à apresentação dos enunciados das questões e às intervenções do professor no trabalho dos alunos.

Durante a realização das atividades, evidentemente, surgiram alguns questionamentos e dúvidas dos alunos. A nossa proposta, ao idealizar esta seqüência de atividades, era analisar o seu potencial, ou seja, elaboramos a seqüência de maneira que as situações de possíveis erros ou conflitos em determinadas atividades pudessem ser resolvidas ou verificadas pelos próprios alunos. Isto ocorreu em grande parte das situações, conforme descrevemos no Capítulo 5. Ainda assim, fez-se necessária uma entrevista para complementar os dados obtidos na aplicação da seqüência de atividades.

Considerando que nossos sujeitos se caracterizam como alunos com bom desempenho em Matemática, acreditamos que em uma sala de aula muitos alunos apresentem dúvidas ou dificuldades que comprometam a realização das tarefas propostas. Sugerimos, então, a atuação do professor em situações de devolução e institucionalização (BROUSSEAU, 1986), conforme descrevemos a seguir, a partir dos episódios vivenciados na experimentação com nossos sujeitos, e se espera que ocorram, em classes ordinárias.

Na Atividade 1 – Parte B, a expressão *se possível* apresentada no enunciado não se mostrou suficiente, ou seja, os alunos, em geral, demonstraram certa insistência em satisfazer a condição desta tarefa que, neste caso, era impossível. Esta busca por uma solução, a princípio, foi uma das atitudes favoráveis que esperávamos dos alunos, pois prescindia da verificação empírica de muitos casos, bem como do levantamento e refutação ou validação de hipóteses. Entretanto, alguns alunos permaneceram por muito tempo nesta etapa e, conforme previsto, interviemos, chamando a atenção destes para a expressão *se possível*, já que a impossibilidade da condição imposta na atividade não foi concebida como objeto de discussão, caracterizando apenas um meio de expandir o campo de experimentação dos alunos, conforme exposto na descrição desta atividade, no Capítulo 3 (p. 49).

Em uma turma convencional de alunos, consideramos que esta intervenção do professor pode abranger, inclusive, esta discussão. Dessa maneira, tem-se mais uma questão a ser justificada pelos alunos, além de evitar que esta etapa comprometa o trabalho dos alunos nas demais, por um desnecessário gasto de tempo.

Um questionamento comum dos nossos alunos diz respeito ao tipo de justificativa que deveriam apresentar, ou seja, o que deveriam escrever. Parece-nos natural que este comportamento se repita para outros grupos de alunos e consideramos que a intervenção do professor deve ocorrer de modo a gerar situações de devolução. No caso do nosso experimento, limitamos estas situações, sugerindo aos alunos que escrevessem o que julgavam necessário para convencer a si próprios e/ou a outra pessoa. A nosso ver, esta situação pode ser potencializada se o professor, além deste tipo de sugestão, observar os argumentos dos alunos e questionar a validade ou generalidade destes, de forma semelhante ao que fizemos na entrevista descrita no Capítulo 5 (p. 134).

Na Atividade 2, julgamos que não deva haver intervenção do professor, visto que a parte C desta caracteriza-se como um instrumento de verificação das hipóteses levantadas nas partes A e B, conforme descrito no Capítulo 3.

Na Atividade 3, a ação do professor deve se assemelhar àquela apontada para a Atividade 1 – Parte C, dado que em ambas a dificuldade esperada está relacionada à apresentação, por parte dos alunos, de seus raciocínios.

Reputamos que na Atividade 4 a intervenção do professor deve favorecer aos alunos a síntese dos resultados observados no decorrer da execução das tarefas desta seqüência de atividades. A interação com as alunas da Dupla II, na entrevista descrita no

Capítulo 5 (p. 134), é um exemplo de um questionamento possível encaminhando nessa direção.

Dessa forma, acreditamos que o professor deve procurar uma interação mais efetiva com os alunos, observando e discutindo as suas produções.

No que concerne a *situações de institucionalização*, consideramos que devam ocorrer ao final da aplicação de cada uma das quatro atividades que compõem a seqüência e sugerimos que sejam aplicadas em aulas consecutivas (duas aulas para cada atividade, exceto a Atividade 3, para a qual uma aula é suficiente).

4. Considerações finais

O curso de Mestrado teve, certamente, grande influência em nossa prática docente nestes últimos três anos. A essência destas mudanças está na atitude crítica e reflexiva que desenvolvemos, a partir do contato e da apropriação de diversas idéias e resultados de pesquisas em Educação Matemática.

Em particular, a elaboração desta dissertação, paralelamente ao trabalho com o grupo de pesquisa do projeto AProvaME, trouxe-nos questões e resultados que nos permitem, hoje, abordar o ensino de provas em nossas aulas. Antes não vislumbrávamos essa possibilidade, pois, além de não conhecermos as ferramentas didáticas adequadas, não tínhamos experiências anteriores com o ensino de prova e não imaginávamos que este fosse viável na Educação Básica.

Apesar de já estarmos trabalhando no projeto AProvaME desde a elaboração e aplicação dos questionários sobre prova, a concepção da seqüência de atividades se mostrou desafiadora. Gradativamente, por conta das reflexões acerca desta temática, as dificuldades foram dando lugar a idéias cada vez mais sólidas, que subsidiaram nossas escolhas neste processo de elaboração.

Em síntese, tivemos a oportunidade de vivenciar este processo, o que nos encorajou a buscar novas estratégias e abordagens para o ensino de Matemática e, em particular, acreditando na viabilidade do ensino de provas.

Entretanto, apesar de vislumbrarmos esta possibilidade, pudemos verificar, por meio do questionário sobre provas (1ª Fase do projeto AProvaME), que tipo de resposta apresentam os alunos diante de situações de prova, constatando as suas dificuldades. Ao longo deste trabalho, tivemos a oportunidade de confirmar a importância e o papel do professor na superação destas dificuldades.

Ainda que tenhamos apenas iniciado nossa trajetória na busca por uma valorização ao ensino de provas na Educação Básica, sentimo-nos motivados a abordar e tratar esse tema em aula, aproveitando alguns instrumentos que elaboramos ao longo do projeto: o questionário e as atividades da seqüência, por exemplo. Para tanto, na condição de professor-pesquisador, pretendemos ampliar e aplicar atividades como as que foram objeto de estudo nesta pesquisa, avaliando-as e buscando uma articulação entre teoria e prática que nos permita uma apropriação cada vez mais consistente dos elementos que constituem o complexo estudo das situações de ensino e de aprendizagem da prova na Matemática Escolar.

BIBLIOGRAFIA

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). *Mathematics, teachers and children*. London: Hodder and Stoughton, 1988. p. 216-235.

———. Is argumentation an obstacle? *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, Grenoble, n. 1, may-jun. 1999.

BARBOSA, E. S. S. *Argumentação e prova no Ensino Médio*. 2007. 119 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BEHR, M. et al. *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

———. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2000.

CARLOVICH, M. *A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do Estado de São Paulo para o 3° e 4° ciclos do Ensino Fundamental*. 2005. 150 p. Dissertação (Mestrado) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CHARLOT, B. *Da relação com o saber*: elementos para uma teoria. Tradução de Bruno Magne. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

DE VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração nos trabalhos com o *Sketchpad*. *Educação e Matemática*, n. 63, p. 31-36, jun. 2001.

———. *Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica*. University of Durban, Westville, 2002. 13 p.

DUVAL, R. L'organisation deductive du discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. *Annales de Ditactique el de Sciences Cognitives* 2, IREM de Strasbourg, p. 25-40. 1989.

FREITAS, J. L. M. Situações didáticas. *Educação Matemática*: uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 65-87.

GOUVÊA, F. T. *Aprendendo e ensinando geometria com demonstração*: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do Ensino Fundamental. 1998. 256 p. Dissertação (Mestrado) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

GRAVINA, M. A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo*. 2001. 274 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

HEALY, S. V.; HOYLES, C. A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 31, n. 4, p. 396-428, 2000.

JAMELLI, S. M. *Abordagens no ensino da prova a argumentação na Matemática Escolar*: análise de uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental. 2007. 87 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

LEANDRO, E. J. *Um panorama de argumentação de alunos da educação básica*: o caso do fatorial. 2006. 93 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. *Educação Matemática*: uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 197-208.

MELLO, E. G. T. *Demonstração*: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino de geometria. 1999. 179 p. Dissertação (Mestrado) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MELO, G. F. A. *A formação inicial a e iniciação científica*: investigar e produzir saberes docentes no ensino de álgebra elementar. 2003. 203 p. Tese (Doutorado) – Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

NACARATO, A. M. et al. Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. *Horizontes*, Bragança Paulista: Edusf, v. 22, n. 1, p. 53-64, jan-jun. 2004.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. A. (Coord.). *Argumentação e provas no ensino de Matemática.* Rio de Janeiro: Instituo de Matemática/UFRJ – Projeto Fundão, 2001.

PIETROPAOLO, R. C. *(Re)significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática*. 2005. 388 p. Tese (Doutorado) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, J. B. S. *Argumentação e prova*: análise de argumentos algébricos de alunos da Educação Básica. 2007. 135 p. Dissertação (Mestrado Profissional) – Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, B. A. Contrato Didático. *Educação Matemática*: uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 43-64.

Anexo I - Projeto AProvaME

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico

Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME)

Siobhan Victoria Healy (coord.)
Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM)
Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática
PUC/SP

1. Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validar conhecimento que contrasta com indução natural de processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, pode-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país. A título de ilustração, enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência para argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento (Healy e Hoyles, 2000; Lin, 2000). Ainda que tais estudos possam inspirar conjecturas referentes às concepções de prova de alunos brasileiros, esse contexto carece de um mapeamento preciso de tais concepções, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados: O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem. Neste enfoque, pretendemos investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições. Uma questão que se coloca é, então, como esta experiência com o computador influencia na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma outra questão recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação da inovação pelo professor.

2. Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.
3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de

aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.

4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

3. Metodologia e Estratégia de Ação

O projeto será organizado em duas fases, a primeira envolve um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiarão a segunda fase, na qual o foco será na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Além da equipe de pesquisadores, 15 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP (com população atual de 86 mestrandos) integrarão a equipe como *professores-colaboradores*, devendo participar de ambas as fases.

FASE 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos será um questionário a ser aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do estado da São Paulo. Inicialmente, cada professor-colaborador participante terá a incumbência de indicar de 6 a 10 turmas, e a partir daí, a amostra será determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual será criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto, o que será de responsabilidade de um dos pesquisadores. Além disso, ao longo da Fase 1, serão realizados encontros de trabalho presencial, com freqüência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores.

O questionário acima citado (denominado Q1) será elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreenderia itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplarão dois domínios matemáticos – Geometria e Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. Cabe destacar que o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988) fundamenta a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário. Concomitante à aplicação do questionário junto aos alunos, os professores de Matemática de cada turma responderão a um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de Q1, compreenderá questões sobre a Escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados serão organizados e classificados pela equipe de professores-colaboradores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.). Esse conjunto de dados terá uma estrutura hierárquica – alunos em turmas, em escolas e em regiões – e serão analisados segundo a construção de um modelo multi-nível (*Multi-level Modelling*) para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Goldstein, 1987). Os resultados dessas análises fornecerão um mapa das concepções dos alunos e como estas variam em relação a fatores individuais e escolares, baseados nos dados obtidos em Q2. Essa análise permitirá uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos, tanto aquelas que são contempladas no ensino atual, quanto aquelas que merecem maior atenção. A identificação desse segundo grupo servirá como base para o trabalho na fase 2, descrito na seqüência.

<u>FASE 2</u>

Esta fase contemplará dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem, o objetivo principal é a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltará ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que essas situações serão propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia nesta fase caracteriza-se como *design-based research* (Cobb et al., 2003). Segundo esses autores, os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia planejada para essa fase compreenderá um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores (cf. amostra da Fase 1). Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguirá um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo deverá desenvolver situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Estes dois ambientes foram selecionados por serem familiares ao grupo de professores-colaboradores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Ao longo dessa fase, os grupos estarão reunindo-se semanalmente, alternando encontros presenciais e a distância, esta última modalidade possibilitada pelo espaço virtual criado na Fase 1.

1ª Etapa

Na primeira etapa do *design* (etapa intra-grupos), as situações serão elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Essas discussões e adaptações serão realizadas com base na análise das interações alunos/computadores, considerando quais aspectos de prova são favorecidos, ou ainda, a quais concepções estes aspectos estão relacionados. Para essa análise, serão coletados os seguintes dados: áudio-gravação dos diálogos entre os sujeitos envolvidos (professores, pesquisadores e alunos) e produções escritas e computacionais dos alunos. Além disso, em relação ao eixo de ensino, cada professor-colaborador construirá seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações no grupo. Essa documentação elaborada pelos professores fornecerá os dados referentes aos seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo (Shulman, 1987), no caso sobre a prova em Matemática, cuja análise buscará identificar transformações nesses conhecimentos.

2ª Etapa

Dando seqüência a esse processo de elaboração das situações, em uma segunda etapa (inter-grupos), as produções de cada grupo serão disponibilizadas no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador possa desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em Geometria e outra em Álgebra), em uma de suas turmas. A aplicação dessa atividade em classe será acompanhada e observada pelos pesquisadores e a sessão será vídeo-gravada para posterior análise. Novamente, as produções (escritas e computacionais) dos alunos serão coletadas. Além de categorizar os aspectos de prova que emergem nas interações alunos/computadores durante essas aplicações, o vídeo permitirá destacar as ações do professor e, em particular, os aspectos de prova privilegiados em suas intervenções. Após cada aplicação, professores-colaboradores e pesquisadores serão incumbidos de um relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre os resultados, os objetivos atingidos e as dificuldades ou problemas enfrentados. Esses relatórios serão também disponibilizados no espaço virtual do projeto visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações, complementações etc. das situações de aprendizagem.

3ª Etapa

Na terceira e última etapa de *design*, os dados a serem coletados em relação ao eixo de aprendizagem referem-se às respostas dos alunos participantes na Fase 2 ao questionário elaborado na Fase 1 (Q1). Essas respostas serão organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, será comparado àquele resultante da Fase 1. Para tanto, os encontros dos grupos colaborativos nessa etapa serão dedicados à avaliação das situações de aprendizagem tratadas, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes na Fase 2; quais características de prova que ainda necessitam de investimentos numa perspectiva de progressão.

4. Outros Projetos Financiados Atualmente

A pesquisadora que coordenará esse projeto, assim como os demais pesquisadores do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados não cotam, no momento, com projetos financiados por agências de fomento.

5. Principais Referências Bibliográficas

ALEKSANDROV, A. (1963). A General View of mathematics. In A. Aleksandrov, A. Kolmogorov, & M. Lavrent'ev (Eds.) *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (pp. 1-64). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (Eds.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais.*: *Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER , R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 9-13.

GARNICA, A. V. M. (1997). Da literatura sobre a prova rigorosa na Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*. APM-Portugal: 5(1), pp. 29 – 60.

GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática Bolema*. Rio Claro (SP): 15(18), pp.91 – 99.

GOLDSTEIN, H. (1987). *Multilevel models in educational and social research*. London: Griffin.

HEALY, S. V. (L.) (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri construction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima: Hiroshima University.

HEALY, S. V. (L.)., & HOYLES, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report , University of London, Institute of Education.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES, C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235-256.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

LIGHT, P., GIROTTO, V., & LEGRENZI, P. (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, 5, pp. 369-383.

LIN, F.-L. (2000). An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. . In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 84-89. Hiroshima: Hiroshima University.

MARIOTTI; M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), pp. 283-317.

TALL, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

THURSTON, W. H. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Monthly*, 30 (2, April), pp. 161-177.

VAZ, R e HEALY, L. (2003) Transformações geométricas do Cabri-géomètre: uma abordagem alternativa para prova? *II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos: SBEM.

WASON, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth, UK: Penguin Books.

WU, H. (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1).

Anexo II – Questionários sobre prova

I.1 – Caderno de Álgebra

AProvaME

Questionário sobre Prova

Nome: ....

Masculino ou Feminino: ....

Escola: ....

Turma:..

Data de nascimento: ....

Data de hoje:...............................

Você tem *50 minutos para responder estas questões.*

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na *maioria das questões, você deve apresentar uma* justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2\ (a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4 \quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6 \quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8 \quad 4 + 6 = 10$

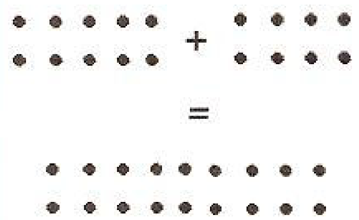
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

I.2 – Caderno de Geometria

AProvaMe

Questionário sobre Prova

Nome: ....

Masculino ou Feminino: ....

Escola: ....

Turma:..

Data de nascimento: ....

Data de hoje:...............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

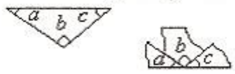
aluno id:

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

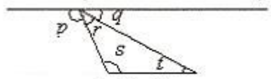
Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

$(90° - 28°) + 28° + 42° + (90° - 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações	Justificativa
$p = s$..........................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$..........................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$.........	Ângulos numa linha reta.
Logo $s + t + r = 180°$	

Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. $540° - 360° = 180°$.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns triângulos.		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

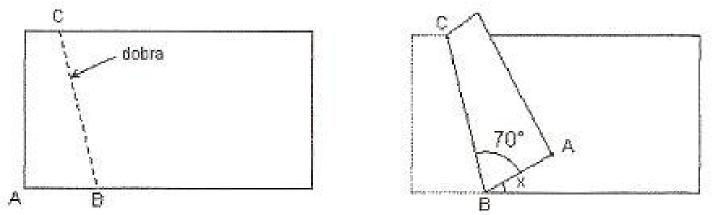
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360°.

Justifique sua resposta:

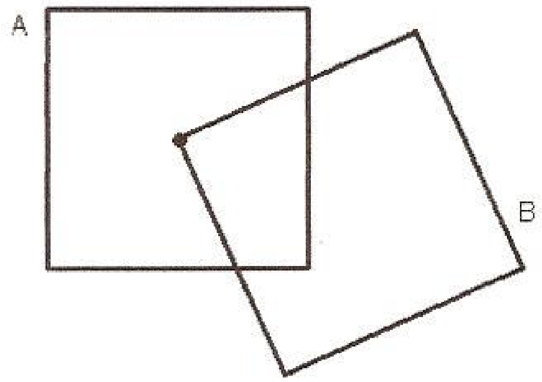
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

Anexo III - Ficha da seqüência de atividades

Atividade 1 – Parte A

No arquivo Fraçoes_Decimais, selecione a planilha "Atividade 1". Para cada grupo de frações, preencha os numeradores com números naturais, tais que a soma deles seja 50, conforme o exemplo:

* Para preencher o numerador, selecione-o com o mouse, digite o número e tecle "Enter".

Veja:

$$\underbrace{20 + 25 + 5}_{\frac{20}{2} \quad \frac{25}{2} \quad \frac{5}{2}} = 50 \Rightarrow 50$$

Atividade 1 – Parte B

Ao lado de cada fração, aparece sua representação decimal. Observe estes números e "ajuste" os **numeradores** para que, ***SE POSSÍVEL***, estes decimais sejam todos ***exatos***.

Consideraremos **decimais exatos** os números que, a partir de uma determinada casa decimal, apresentam **apenas** algarismos **zero**.

Exemplos: 2,5000000000 3,7500000000 6,0000000000

Veja:

Dízima Periódica	Dízima Periódica	Decimal Exato
$\frac{10}{6}$ 1,66666666666 ...	$\frac{19}{6}$ 3,166666666666...	$\frac{21}{6}$ 3,500000000000

Neste exemplo, deve-se ajustar os 2 primeiros numeradores para que as *dízimas periódicas* **tornem-se** *decimais exatos.*

Obs.: A soma dos numeradores deve continuar a mesma (50).

Atividade 1 – Parte C

A partir do que você observou, assinale uma das alternativas e justifique sua resposta:

C1	Frações com denominador 2 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

✍

C2	Frações com denominador 3 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

✍

C3	Frações com denominador 4 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

✍

C4	Frações com denominador 5 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

✍

C5	Frações com denominador 6 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

✍

C6	Frações com denominador 7 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

✍

C7	Frações com denominador 9 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

✍

C8	Frações com denominador 10 geram dízimas periódicas.					
	Nunca		Às vezes		Sempre	

Tente explicar porque isso acontece:

✍

Atividade 2 – Parte A

Frações com denominador 3

Selecione a planilha “Atividade 2_A”. Preencha os numeradores das frações de maneira a obter dízimas periódicas na **primeira coluna e** decimais exatos **na segunda.**

Responda:

1) O que há de comum entre os numeradores das frações **da primeira coluna**?

✍

2) O que há de comum entre os numeradores das frações **da segunda coluna**?

✍

Atividade 2 – Parte B

Frações com denominador 6

Selecione a planilha "Atividade 2_B". Preencha os numeradores das frações de maneira a obter dízimas periódicas na **primeira coluna e** decimais exatos **na segunda.**

Responda:

1) O que há de comum entre os numeradores das frações **da primeira coluna**?

✍

2) O que há de comum entre os numeradores das frações **da segunda coluna**?

✍

Atividade 2 – Parte C

Baseado nas suas conclusões das partes A e B e **SEM EFETUAR CÁLCULOS**, classifique as representações decimais das frações abaixo em **decimais exatos (DE)** ou **dízimas periódicas (DP)**. Marque um "**X"** na sua opção:

a) $\frac{5}{6}$

D.E.	
D.P.	

b) $\frac{15}{6}$

D.E.	
D.P.	

c) $\frac{21}{6}$

D.E.	
D.P.	

d) $\frac{18}{6}$

D.E.	
D.P.	

e) $\frac{14}{6}$

D.E.	
D.P.	

Agora utilize a planilha "Atividade 2_B" e verifique se você acertou. Caso não tenha acertado todas, reformule as respostas das partes A e B.

Atividade 2 – Parte D

Frações com denominador 7

Selecione a planilha "Atividade 2_D". Preencha os numeradores das frações de maneira a obter dízimas periódicas na **primeira coluna e** decimais exatos **na segunda.**

Responda:

1) O que há de comum entre os numeradores das frações **da primeira coluna**?

✍

2) O que há de comum entre os numeradores das frações **da segunda coluna**?

✍

Atividade 2 – Parte E

Frações com denominador 35

Selecione a planilha "Atividade 2_E". Preencha os numeradores das frações de maneira a obter dízimas periódicas na **primeira coluna e** decimais exatos **na segunda.**

Responda:

1) O que há de comum entre os numeradores das frações **da primeira coluna**?

✍

2) O que há de comum entre os numeradores das frações **da segunda coluna**?

✍

Atividade 2 – Parte F

Baseado nas suas conclusões das partes D e E e **SEM EFETUAR CÁLCULOS**, classifique as representações decimais das frações abaixo em **decimais exatos (DE)** ou **dízimas periódicas (DP)**. Marque um “**X”** na sua opção:

a) $\frac{11}{35}$

D.E.	
D.P.	

b) $\frac{14}{35}$

D.E.	
D.P.	

c) $\frac{21}{35}$

D.E.	
D.P.	

d) $\frac{70}{35}$

D.E.	
D.P.	

e) $\frac{10}{35}$

D.E.	
D.P.	

Agora utilize a planilha “Atividade 2_E” e verifique se você acertou. Caso não tenha acertado todas, reformule as respostas das partes D e E.

Atividade 3

Sem usar a planilha, classifique as representações das frações abaixo em **decimais exatos (DE)** ou **dízimas periódicas (DP)**. Justifique sua resposta.

a) $\frac{785}{2}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

b) $\frac{15}{3}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

c) $\frac{7}{3}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

d) $\frac{495}{5}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

e) $\frac{59}{5}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

f) $\frac{33}{6}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

g) $\frac{14}{6}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

h) $\frac{40}{14}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

i) $\frac{35}{14}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

j) $\frac{17}{40}$

D.E.	
D.P.	

Por quê ?

Agora, se desejar, teste os resultados na planilha “Atividade 3”

Atividade 4 - Parte A

Na planilha “Atividade 4_A”, entre com valores para os numeradores das frações. Ao lado da fração, aparece sua representação decimal.

Observe que os denominadores das frações são potências de base 10**:**

$10 = 10^1$ $100=10^2$ $1000=10^3$ $10000=10^4$ etc...

Frações com denominadores deste tipo são chamadas **frações decimais**.

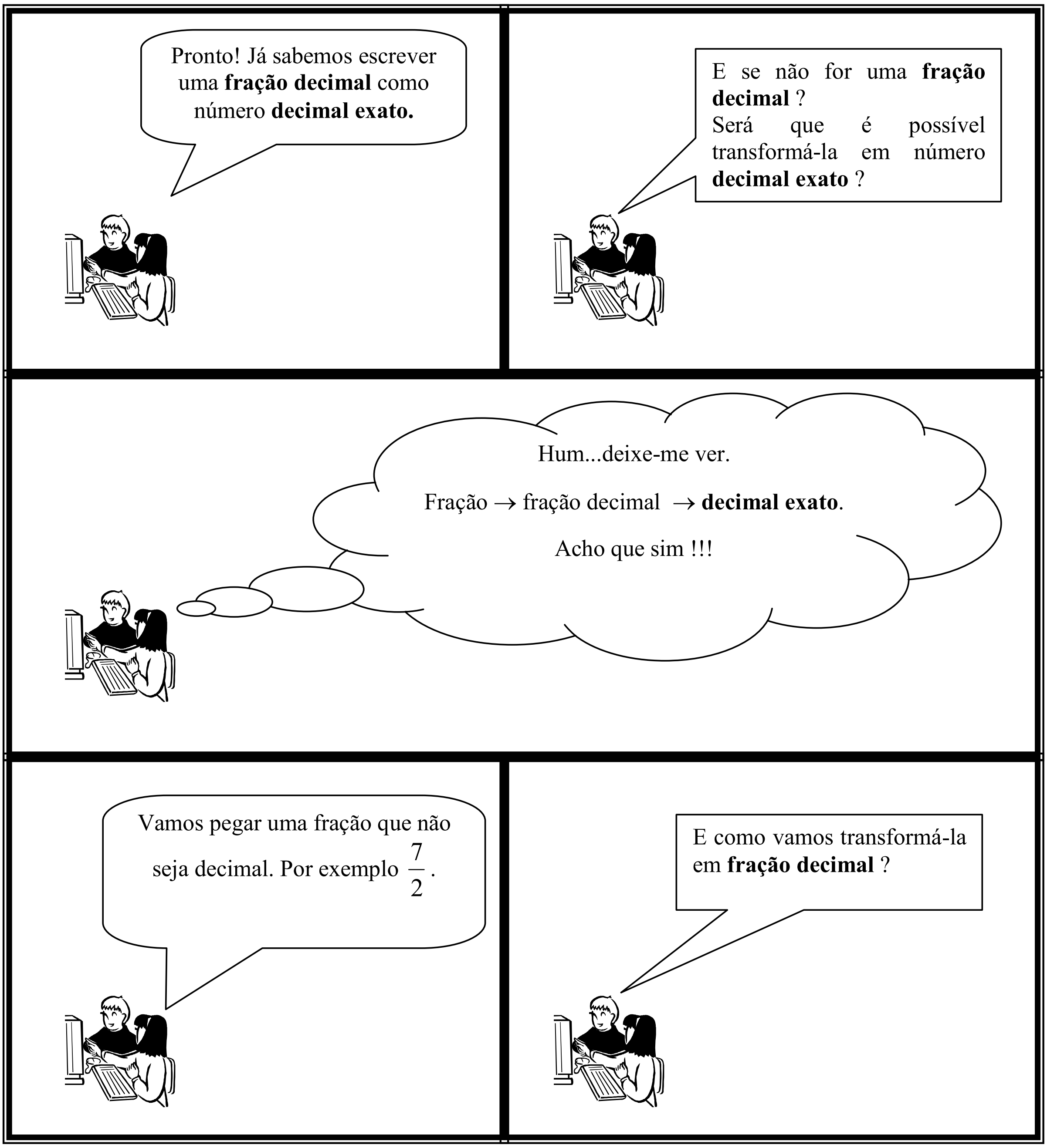
Com base nos resultados obtidos na planilha, descreva uma maneira prática para representar uma fração decimal como um decimal exato.

✍

Verifique se o método que você descreveu funciona para as frações abaixo:

a) $\frac{49}{10}$ **b)** $\frac{23}{100}$ **c)** $\frac{23673}{1000}$

Atividade 4 - Parte B



Ajude-os a encontrar um fração decimal que seja equivalente a $\frac{7}{2}$ completando o quadro abaixo.

Lembre-se: Para que a fração seja decimal, no denominador deve aparecer 10 ou 100 ou 1000 ou 10000 ou ... etc, ou seja, potências de base 10.

$$\frac{7}{2} = \frac{}{} =$$

Fração decimal

Número decimal exato

Agora, analise os casos abaixo e responda:

a) É possível fazer o mesmo para a fração $\frac{3}{5}$ e escrevê-la como fração decimal? Por quê? Justifique sua resposta.

b) E para a fração $\frac{8}{3}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

✍

c) E para a fração $\frac{3}{4}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

✍

d) E para a fração $\frac{14}{6}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

✍

e) E para a fração $\frac{15}{6}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

✍

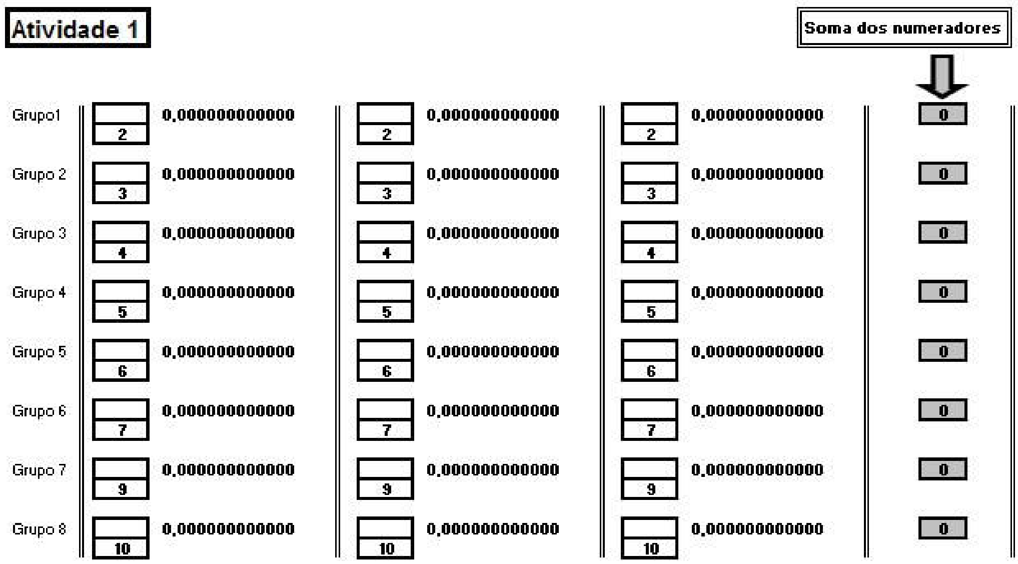
f) E para a fração $\frac{9}{12}$? Justifique sua resposta e, se possível, apresente os procedimentos.

✍

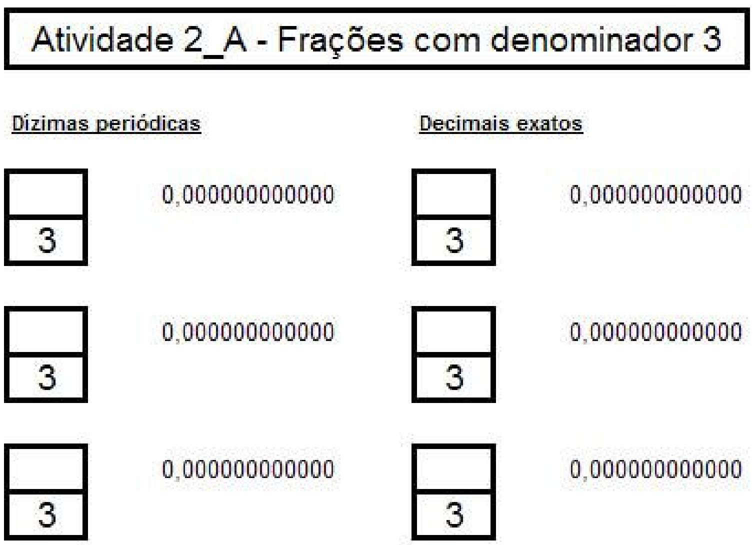
g) Descreva uma regra para sabermos se uma fração **pode ou não** ser escrita como **fração decimal**, sem que precisemos dividir o numerador pelo denominador.

✍

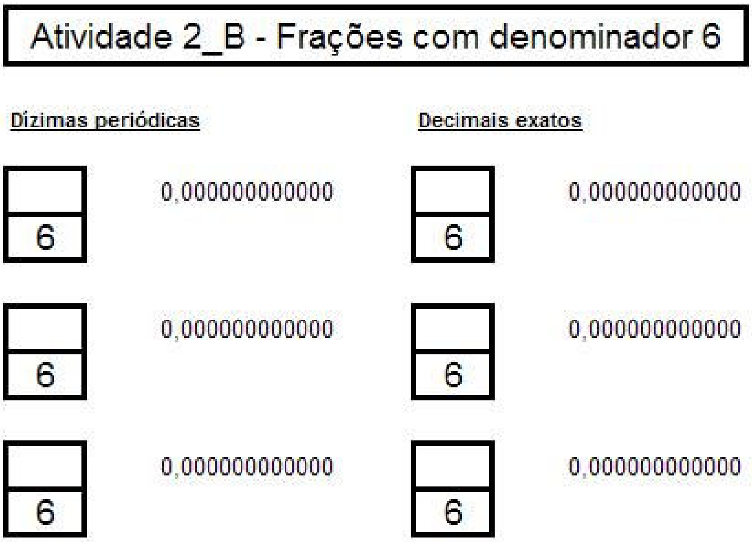
Anexo IV - Planilhas da seqüência de atividades



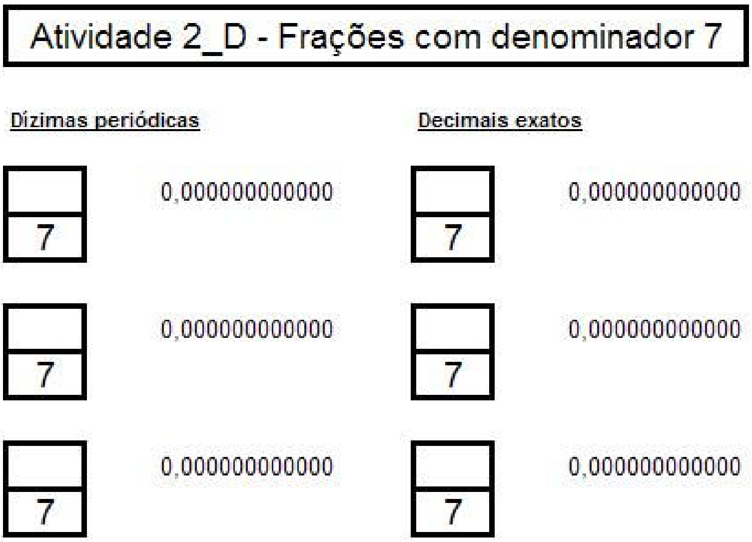
Planilha Atividade 1



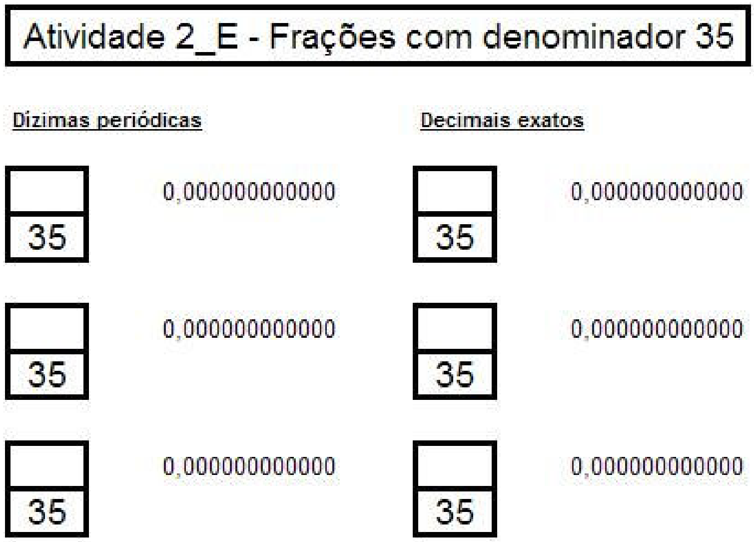
Planilha Atividade 2_A



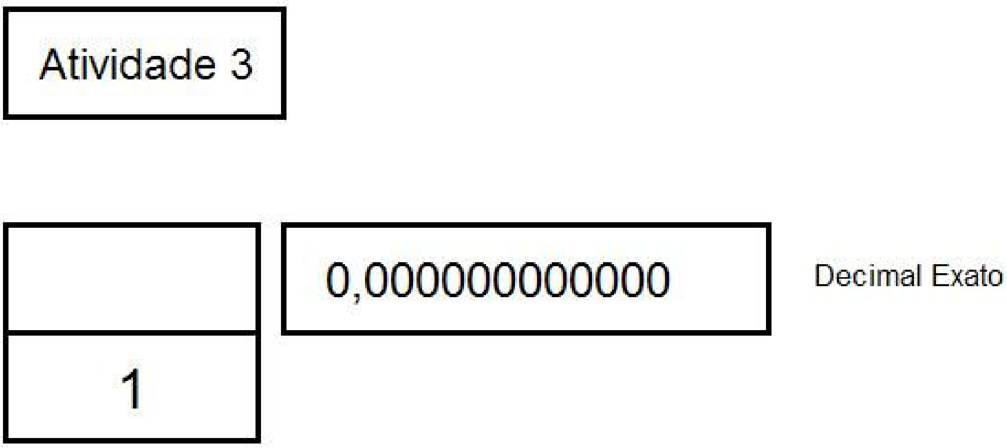
Planilha Atividade 2_B



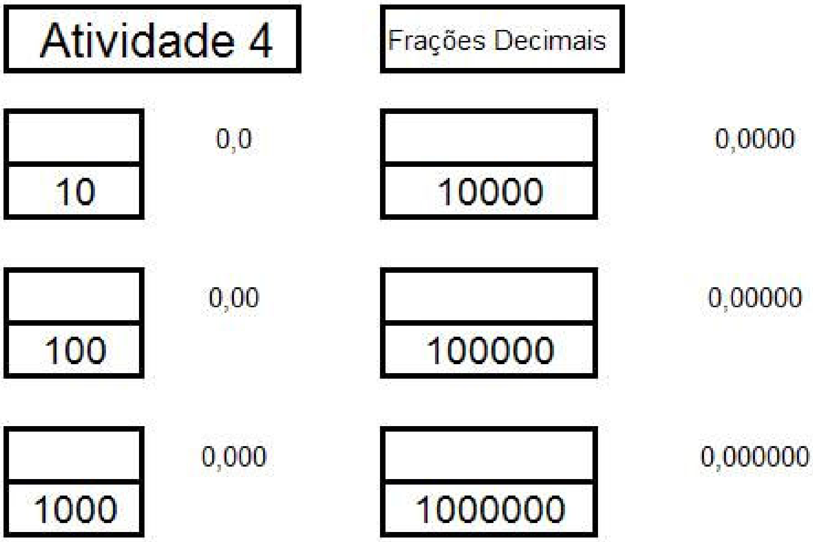
Planilha Atividade 2_D



Planilha Atividade 2_E



Planilha Atividade 3



Planilha Atividade 4_A

Anexo V – Interações da Dupla II na realização das tarefas da seqüência de atividades.

Atividade 1 – Parte B

(1) Carol: Temos que colocar múltiplos de 3 em cima, senão dá dízima.

(2) Paola: Ah, mas aqui deu certo.

(3) C: Mas aqui você tem que colocar múltiplo de 3 pra não dar dízima. Quer ver? Coloca o 18.

(4) C: Viu? Agora coloca 3 vezes 9, 27. Tem que ser 3, múltiplos de 3 que somados dê 50. Entendeu?

(5) C: Tem que ser 3 múltiplos de 3 que somados dê 50. Entendeu?

(6) P: Entendi.

(7) C: Não é múltiplo de 3.

(8) P: Vamos fazer o do 4. O 4 é bem fácil.

(9) P: Ah, o 4 já está certo.

(10) C: Mas deu 2 casas decimais.

(11) P: Sim, mas só tem decimal exato.

(12) P: Vamos fazer o do 4. O 4 é bem fácil.

(13) P: Ah, o 4 já está certo.

(14) C: Mas deu 2 casas decimais.

(15) P: Sim, mas só tem decimal exato.

(16) C: É verdade. Põe 18. C: Põe 2.

(17) C: Vamos tentar alguma coisa. Põe 6.

(18) C: Põe 36.

(19) P: Vamos por um 6 aqui.

(20) C: Agora tem que ser 8.

(21) C: Põe um número menor, tipo 3 sobre 6.

(22) C: Vamos tirar o 2 daqui e trocar por 1.

(23) P: O 1 não dá.

(24) C: Ah, é verdade.

(25) C: É que nós temos que achar uma regra mais rápida.

(26) P: Será que pode pôr 4,5 no numerador?

(27) C: Pode colocar número com vírgula?

(28) Professor: Não pode. Tem que ser número natural.

(29) P: Ah, é verdade, só pode número natural.

(30) C: Deve ter uma regra para alguns denominadores não darem certo. Por que exatamente para esses não deu certo? O 5 é primo, não é?

(31) P: Sim.

(32) C: Então não tem a ver com primo.

(33) P: O 2 é primo, o 3 também. O 2 deu e o 3, não.

(34) C: O 2 é primo?

(35) P: É. Só é divisível por 2 e 1!

(36) C: É 2, 3, 5, 7, 9, etc.

(37) P: O 9 não. 9 é divisível por 3.

(38) P: Para o 2, o 5, o 10, qualquer coisa que dividir dá exato. Porque eles são números fáceis.

(39) C: O 10, com certeza, dá exato, porque só mexe na vírgula. O 2 também, no máximo ia dar quebrado com vírgula 5. O 3 é louco pra dar dízima. O 4, não.

(40) P: Ah, o 2 e o 4 nunca dão dízima, nem o 10, nem o 5.

(41) C: É. Mas o 3 pra dar dízima é ótimo.

(42) P: Mas tenta dividir por 6.

(43) C: Ah, o 6 é igual ao 3.

(44) P: É verdade. E o 7?

(45) C: Ah, o 7 não tem porque não dar dízima. Quem é que pode gerar dízima?

(46) P: O 3, o 6, o 9...

(47) C: O 7.

(48) P: Isso.

Atividade 1 – Parte C

(49) C: Espera. O que é uma dízima periódica? Se a gente definir o que é, a gente pode justificar. Por que acontece uma dízima periódica? Entendeu?

(50) P: Dízima é quando você divide e sempre sobra resto.

(51) C: Sim, quando sobrar geralmente a mesma seqüência ou o mesmo número, não é?

(52) P: É. Então, por 2 nunca sobra.

(53) C: Por quê?

(54) P: Por quê!?

(55) C: Por que nunca vai acontecer uma dízima periódica quando for 2? Tudo dá pra dividir por 2.

(56) P: Por quê? Se sobrar 1, dá 0,5, se sobrar 2, dá 1.

(57) C: Qualquer número é divisível por 2, é isso!

(58) P: É.

(59) C: Só vai aumentar, no máximo, o número de casas decimais.

(60) P: Na verdade só pode aparecer 0,5.

(61) C: Não, é que você tá falando de números naturais. É que se fosse um número decimal dividido por 2 e tivéssemos que encontrar a "regra", por exemplo, 0,75, se você for dividindo, o máximo que vai acontecer é aumentar o número de casas decimais.

(62) P: Ah, tá. Entendi. Mas aqui não vai ter número decimal em cima, porque é uma fração. Então, só vai acontecer de sair uma casa decimal.

(63) C: Bom, se for par vai dar um número par, se for ímpar vai dar um número par mais um número quebrado.

(64) P: Mais 0,5 [referindo-se ao "quebrado"]. Tem que ser 0,5, porque um número ímpar é um número par mais 1.

(65) C: É.

(66) P: E o 1 dividido por 2 dá 0,5.

(67) Frações com denominador 3 geram dízimas periódicas. Nunca!

(68) C: Não, às vezes. Por quê? Isso acontece quando o de cima não é múltiplo do de baixo.

(69) P: Bom, 4 dividido por 3, sobra 1. Ah, porque 1 dividido por 3 não dá exato. Nem 2. Quando divide por 3, ou sobra 1 ou sobra 2. Se sobrar 3, divide de novo, entendeu?

(70) C: E se sobrar 4?

(71) P: Se sobrar 4, é 3 + 1. Então ou sobra 1 ou sobra 2. 1 dividido por 3 não dá exato, vai dar 0,333...

(72) C (para o professor): Eu tenho que explicar por que quando dividimos por 3 só pode sobrar 1 ou 2?

(73) Professor: Você tem que explicar aquilo que achar necessário para ser convincente e justificar as afirmações.

(74) P: Mas dividindo por 3 só pode sobrar 1 ou 2.

(75) C: Tem certeza?

(76) P: Absoluta. Dá outro exemplo que não dá isso. A não ser que você pegue um número não natural.

(77) C: Nunca dá dízima, não é?

(78) P: Não, pois o 4 é igual ao 2.

(79) C: Sim, é múltiplo de 2.

(80) P: Isso. Então, ao invés de dar 0,5, vai dar 0,25.

(81) C: Então vamos copiar nosso argumento para denominador 2. O 4 é múltiplo de 2. Deve ser uma regra.

(82) P: Não. Olha só: se o número for par, tipo 8, ok. Mas se for par, tipo 6, 6 dividido por 4, quanto dá?

(83) C: Dá 1,25.

(84) P: Viu? Apareceu 0,25.

(85) C: Vai aumentar só o número de casas decimais.

(86) P: E um número ímpar, dividido por 4, vai dar quanto? Por exemplo, 7 dividido por 4, dá quanto?

(87) P: Dá 1,5?

(88) C: Não, ta doida?

(89) P: 1,75 vai dar certo?

(90) P: Ah, então é isso: número par vai dar 1 ou 0,5.

(91) C: Então, é o mesmo que funciona para o 2.

(92) P: Mas não é exatamente igual.

(93) C: Vai aumentar uma casa decimal!

(94) P: E o número ímpar, vai dar 1,25...

(95) C: Aumenta uma casa decimal. Não tinha falado desde o começo que vai aumentar uma casa decimal? É a mesma coisa que o 2, só vai aumentar uma casa decimal.

(96) P: Não é a mesma coisa, é um pouco diferente.

(97) C: Ah, é um pouco parecido! Tinha que ter algum nexo. É múltiplo!

(98) P: Ah, é! Vamos escrever a resposta começando pelos numeradores pares.

(99) C: Número par é múltiplo de 2. Logo, é múltiplo de 4.

(100) P: Não. Porque não é múltiplo de 4. Exemplo: 6 não é múltiplo de 4, mas é divisível por 4 e não dá dízima. É isso que temos que falar.

(101) C: É múltiplo de 2.

(102) P: Então, mas não é múltiplo de 4. Ah, se um número é múltiplo de 2, então é múltiplo de 4? Não exatamente, mas pode ser dividido por 4 sem dar dízima.

(103) C: Mas pega 6 dividido por 4. Não vai dar dízima, porque é múltiplo de 2. Vai dar 1,...

(104) P: Tá aqui, já tinha feito dá 1,5. [Referindo-se aos cálculos no papel.]

(105) C: Quando dividimos por 4 dá metade do que dividindo por 2, entendeu? Faz 10 dividido por 2 e 10 dividido por 4. 10 dividido por 2 é 5 e 10 dividido por 4 é 2,5, a metade. Ou seja, sempre teremos uma casa decimal a mais.

(106) P: Não entendi, pois 1,25 e 1,75 têm o mesmo número de casas decimais.

(107) C: Mas estes foram divididos por 4. Se fosse por 2, daria apenas uma.

(108) P: Acho que entendi. Número par dividido por 4, ou vai dar 1 ou 1,5. Número ímpar dá 1,25 ou 1,75. Mas como se escreve isso?

(109) C: Todo número par é múltiplo de 2. A gente tem que ligar isso com múltiplo de 4, só isso.

(110) P: Não são múltiplos! Não tem nada a ver com múltiplos.

(111) C: Porque 4 é múltiplo de 2.

(112) P: E o quê que tem a ver?

(113) C: Lógico que tem a ver.

(114) P: Mas o 6 é múltiplo de 2 e com denominador 6, olha só como dá uma bagunça. A única coisa especial do 4 é que 4 é 2x2 e 6 é 2x3. O 3 complica tudo.

(115) C: O 3. Mas a gente está falando do 4, não do 6.

(116) P: Eu sei, mas o que você disse sobre o 4 ser múltiplo de 2 não prova nada.

(117) C: Prova sim!

(118) P: Prova o quê?

(119) C: Porque o 4 é múltiplo de 2.

(120) P: E o 6 também. E o 8...

(121) C: Mas estamos falando em dividir por 4, não por 6.

(122) P: Eu sei, mas se isso não vale para todos os múltiplos de 2, pra que vou dizer que 4 é múltiplo de 2? De que adianta? É só pensar na divisão por 4. É nisso que a gente tem que se concentrar.

(123) C: Tá, se for par, o resultado dá...

(124) P: Ou número inteiro ou número inteiro com 0,5.

(125) C: Por quê?

(126) P: Porque ou não sobra nada ou sobra 2, e 2 : 4 dá 0,5.

(127) C: Tá bom, então vamos explicar isso.

(128) P: Nunca?

(129) C: Sim, nunca, pois é igual ao 10, não é? Tem alguma ligação. Eu aposto que tem. O 2 e o 4 são praticamente a mesma coisa, só muda o número de casas decimais. Logo, o 5 e o 10 também. Põe 5 aqui. Agora põe 5 aqui no 10. Agora vê a diferença que deu.

(130) P: Hum! Entendi.

(131) C: Por quê? Ah! É só você pensar: dobrou o denominador, cai pela metade o resultado.

(132) P: Certo, mas vamos pensar no 5 agora.

(133) C: Bom, se for par, vai sobrar quanto? 2 ou 4, certo? 2:5=0,2. É só separar pares e ímpares.

(134) C: É a mesma coisa que eu falei pra você sobre o 4.

(135) P: Sim, dividir por 4 é o mesmo que dividir por 2 e por 2 de novo.

(136) C: Isso que eu falei! Porque é múltiplo.

(137) P: Eu sei que você falou isso.

(138) C: Mas você falou que estava errado.

(139) P: Não, eu falei que não era para colocar: “4, como é múltiplo de 2...”.

(140) C: Não, a gente poderia fazer uma ligação com isso, mas tudo bem. Enfim, coloca aí par e ímpar.

(141) P: Vamos lá.

(142) C: Nunca, tenho certeza.

(143) P: Não precisa separar pares e ímpares, só coloca o geral, o geralzão.

(144) C: Ah, põe. Se for par, vai sobrar...

(145) P: Não. Qualquer número dividido por 5, ou não resta nada, ou 1, ou 2, ou 3, ou 4. E 1:5 dá 0,2, 2:5 dá 0,4, 3:5 dá...? Quanto é 3:5?

(146) C: Você pega o 3 e divide por 10, dá 0,3. Daí você multiplica por 2. Dá 0,6.

(147) P: E 2:5?

(148) C: Dá 0,4.

(149) P: Ah, é. 2, 4, 6, 8.

(150) P: Às vezes. Tá, tem que explicar por que isso ocorre.

(151) C: Deve ser o 9. Não!

(152) P: Não, nenhum gera sempre porque você sempre pode colocar o próprio número em cima.

(153) C: Pode colocar um múltiplo.

(154) P: É, então. Ou o próprio número ou um múltiplo. Tá, tem que explicar porque isso ocorre.

(155) C: Bom, porque um número dividido por 6 vai sobrar...

(156) P: 5, 4, 3, 2 ou 1. Quando sobra 1, 1:6 dá dízima! Por quê?

(157) C: Quando a gente fez com o 3, não dava a mesma coisa? Então tem uma ligação quando é múltiplo.

(158) P: Tem uma ligação, mas não é a explicação. Tá, então tá. 1 dividido por 6 dá quanto? Põe aí.

(159) C: Vai dar 0,1666...

(160) P: 2:6 dá quanto? Dá dízima também? Vai dar 0,666...Não. Não tem uma ligação! Tem algo a ver, mas não é a resposta. Quanto é 2 dividido por 6?

(161) C: 0,333...

(162) P: É. 0,333...

(163) C: Hum.

(164) P: E 3:6 dá 0,5? Está acontecendo igual ao 3. Vamos escrever assim: “a não ser os múltiplos de 3, todos os outros vão gerar dízima”, ou então, “a não ser os divisores de 6...”. Espera! Mas 2 não é divisor de 6?

(165) C: 6:2=3. É um número inteiro.

(166) P: Ah, então não é o que eu queria.

(167) C: Também, você está querendo uma coisa meio estranha. O que é que você está querendo dizer?

(168) P: Assim, quer ver? Coloca 12+3, coloca 15 ali, não vai dar dízima.

(169) C: Mas 15 não é múltiplo de 6.

(170) P: Então, mas não vai dar dízima.

(171) P: Viu? Porque é um múltiplo de 6, mais 3.

(172) C: Quanto é 3 dividido por 6?

(173) P: Vai dar 0,5, não é dízima.

(174) C: Então, por isso. É o que eu estava falando. E, queira ou não, é a metade.

(175) P: Mas 2 é divisor de 6 e se colocar 2 sobre 6 não dá certo.

(176) C: Então o divisor não vai ter padrão.

(177) P: E não são só os múltiplos de 6, são os múltiplos e os múltiplos mais 3, também.

(178) C: Ah, os divisores pares não vão dar certo. Se for divisor ímpar, dá certo.

(179) P: Mas 4 não é divisor de 6. São só os múltiplos de 6 ou múltiplos de 6, mais 3, ou 3.

(180) C: Ficou confuso.

(181) P: É. Mas é isso.

(182) C: Isso está meio vago. Múltiplos de que? 6 mais 3?

(183) P: É.

(184) C: Ou seja, de 9.

(185) P: Espera. Não! 15 é múltiplo de 9?

(186) C: Não.

(187) P: Então!

(188) C: Mas 18 é. Porque é 15 mais 3, não é?

(189) P: Não, mas 18 é múltiplo de 6. 18 mais 3?

(190) C: Ah, entendi.

(191) P: 21, que não é um múltiplo de 9.

(192) P: Só que daí a gente não tem que explicar esses números que dão dízima? Por exemplo, vai...

(193) C: A gente pode justificar assim: pois o resto será...

(194) P: É, então, os restos. Vai dar resto 5, 4, 3, 2 ou 1. 1 dividido por 6 dá quanto?

(195) C: 0,1666...

(196) C: O 7 não tem ligação com os outros, não é?

(197) P: É. O 7 é loucão. O 7 são só os múltiplos, porque a metade do 7 é 3,5, que não pode pôr como numerador. Então, a não ser os múltiplos de 7...

(198) P: Às vezes.

(199) C: Quando não é múltiplo...

(200) P: E quando não é 3, não é?

(201) C: Acho que não.

(202) P: O 9 é exatamente a mesma coisa que o 7.

(203) C: Ah, põe aí: o mesmo que o 7. Por que o mesmo que o 7 se o 7... Tem que ter alguma coisa mais concreta.

(204) P: É a divisão. Divisão pura. É isso. Matemática não é algo real, os números não existem, eles são inventados por nós. Não existe número real, é algo inconcreto.

(205) P: Nunca.

(206) C: Nunca. Porque é só mexer com a vírgula. Dividir por 10 é o mesmo que mexer com a vírgula, não há o que fazer, nunca vai dar resto. Porque nosso sistema é decimal.

Atividade 2 – Parte A

(207) P: Deixa eu ver qual é a explicação do 3. Tem que dar resto 1 ou resto 2: 4, 5 e 7.

(208) C: 6, 18 e 9.

(209) P: Pronto, acabou!

Atividade 2 – Parte B

(210) P: Qualquer número, não sendo 6, múltiplo de 6 ou múltiplo de 6, mais 3. 15 é múltiplo de 6, mais 3. Põe 16.

(211) P: E aí põe...

(212) C: 34.

(213) P: 39!

(214) C: Não é múltiplo de 6!

(215) P: Mas é múltiplo de 6, mais 3.
(216) C: Por que será que acontece isso com múltiplo de 6, mais 3?

(217) P: É porque 3 dividido por 6 dá 0,5. Então vai dar um número exato mais 0,5.

(218) P: *O que há de comum entre os numeradores das frações da primeira coluna*?

(219) C/P: Não são múltiplos de 6 nem de 6, mais 3.

(220) P: Ah, não são múltiplos de 3! Ponto. Porque todos os múltiplos de 3 são múltiplos de 6, mais 3 ou múltiplos de 6.

Atividade 2 – Parte C

(221) P: Ah. 5 sobre 6 vai dar dízima periódica.

(222) C: Porque não é múltiplo de 3.

(223) P: 15 sobre 6 é...decimal exato, porque é 12 mais 3. 21 é múltiplo de 3

(224) C: É.

(225) P: 18...14 não.

(226) P: Põe 3.

(227) C: 25, 46.

Atividade 2 – Parte D

(228) P: 14.

(229) C: 49, 70.

Atividade 2 – Parte E

(230) C: 35 é múltiplo de 7.

(231) P: É?

(232) C: 7 vezes 5, 35.

(233) P: É verdade . Será que é a mesma coisa que o 3 e o 6?

(234) C: Se a gente colocar um divisor, vai dar dízima. Olha!

(235) P: Põe 10...30.

(236) P: Agora põe múltiplos de 7, põe 7. Põe 14.

(237) C: 56.

(238) C: 35 é múltiplo de 7.

(239) P: É o mesmo que o 3 e o 6.

(240) C: É.

Atividade 3

(241) P: 40 sobre 14.

(242) C: Tem que ser múltiplo de 7. 40 não é. É dízima periódica.

(243) P: É mesmo? Deixa eu ver a regra do 7. *A não ser os múltiplos de 7, todos os outros numeradores dão dízima.*

(244) C: Olha: 17 sobre 10 é 1,7.

(245) P: Eu sei, mas é 40.

(246) C: Mas dividindo por 4 não vai dar o mesmo resultado?

(247) P: De 10, tudo bem. Precisa ver a regra do 4. Nunca, porque...

(248) C: É. E do 10 também, nunca.

(249) P: O 10 eu já sabia que era nunca.

(250) C: Então, pronto! Quando dá 1,7 dividido por 4?

(251) P: Vai dar 4 vírgula alguma coisa. Dá 4 e sobra 1. 1 dividido por 4, vai dar...deu 4,25.

(252) C: Ah, tá falando do 17?

(253) P: É. Vai dar 0,425. Então, dá decimal exato.

Atividade 4 – Parte A

(254) P: Tá. Vamos entrar com valores. Fala os valores.

(255) C: Ah, tá. É só andar com a vírgula de acordo com o número de zeros.

(256) P: Mas eu não entendi o que é pra gente fazer.

(257) C: A gente tem que escrever uma regra. Não para a pessoa ficar pensando, tipo: quanto será 50 sobre 10? Cortar, sabe? Entendeu?

(258) P: Hum.

(259) C: Uma maneira prática: mexe com a vírgula.

Atividade 4 – Parte B

(260) P: Eu acho que ele está pedindo pra transformar a fração em uma fração decimal.

(261) C: Ah, é?

(262) P: Multiplicando por...

(263) C: Multiplica pelo mesmo, em cima e embaixo.

(264) P: Ah, então, multiplica por 5.

(265) C: Vai dar 75 sobre 10.

(266) C: Multiplica por 2.

(267) P: Sim.

(268) C: Então, embaixo sempre tem que ter um número...

(269) P: Que dê pra multiplicar pra virar 10.

(270) C: Então, tem que ser múltiplo ou divisor de 10.

(271) P: É?
(272) C: Não é?

(273) C: 3 vai multiplica pelo quê?

(274) P: Verdade. Não dá.

(275) C: E se a gente primeiro multiplicar por 10 e depois dividir por 3? Se multiplicar por 10, vai dar 80 sobre 30. Divide por 3...ah, não! Não vai dar. Mas se o de cima fosse múltiplo de 3, daria. Não é só por causa do 3 embaixo.

(276) P: Carol, é por causa da regra: o que não é múltiplo de 3, não pode dar.

(277) C: Eu sei, mas se o de cima fosse múltiplo de 3, dava para fazer isso, multiplicar por 10 e dividir por 3, que daria um exato.

(278) P: Mas se o de cima já fosse múltiplo de 3, dava pra fazer direto. Bom, esse aqui não é possível.

(279) C: ¾ é 0,75. Não é?

(280) P: Mas tem que transformar numa fração decimal.

(281) C: Como assim? Você quer multiplicar pra transformar na decimal, é isso? Ah, multiplica por 25!

(282) P: Não, pois 14 não é múltiplo de 3.

(283) C: Pode, porque é múltiplo de 3. Dividindo por 3, vai dar 5 sobre 2, ou 2,5.

(284) P: Então é 25 sobre 10?

(285) C: 9 dividido por 3, vai dar 3. 12 dividido por 3 vai dar 4. Vai dar 0,75 ou 75 sobre 100. Põe aí, porque 9 é múltiplo de 3.