PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

FERNANDO TAVARES DA SILVA

Análise do processo de argumentação e prova em relação ao tópico "logaritmos", numa coleção de livros didáticos e numa seqüência de ensino

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

FERNANDO TAVARES DA SILVA

Análise do processo de argumentação e prova em relação ao tópico "logaritmos", numa coleção de livros didáticos e numa seqüência de ensino

*Trabalho Final apresentado à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** sob orientação do **Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni.***

São Paulo

2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente, para fins acadêmicos e científicos a reprodução total ou parcial deste Trabalho Final por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:________________________________ Local e Data:________________

Agradecimentos

A Deus por iluminar meus pensamentos e tornar possível a realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Vincenzo Bongiovanni, pela orientação, dedicação, amizade, compreensão e estimulo durante toda a realização deste trabalho.

Aos Professores Doutores Marcos Antonio de Jesus e Ruy César Pietropaulo pelas sugestões dadas na qualificação.

Aos Professores do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP , por tudo que ensinaram.

Aos meus colegas de mestrado pela convivência a amizade em todos os momentos do curso

Aos diretores do Colégio Jardim São Paulo, por abrir o espaço para realização desta pesquisa.

Aos meus amigos professores Feliz, Gustavo, Klauss, André, Fabrício, Nóbrega e Renato pelo incentivo durante a realização do mestrado.

A professora Cristina pela colaboração e sugestões dadas no abstract

A minha grande amiga Simone Pittner, por toda ajuda, colaboração e dedicação durante toda a realização deste trabalho.

Aos meus pais Onofre Custódio e Sebastiana Tavares e meu filho Rafael pela compreensão da minha ausência durante o mestrado.

Resumo

O objetivo desta pesquisa é investigar a abordagem conferida a provas e demonstrações do objeto matemático logaritmo, numa coleção de livros didáticos para o Ensino Médio, bem como conceber e aplicar uma seqüência didática para introduzir o aluno da primeira série do Ensino Médio ao pensamento matemático dedutivo.

A pesquisa procura responder às seguintes questões de pesquisa:

(1) Como o autor de livros didáticos aborda o processo de prova em relação ao tema "logaritmo" na sua coleção? Os alunos leitores são estimulados a realizar provas em atividades propostas?

(2) Quais dificuldades os alunos da primeira série do Ensino Médio apresentam durante um processo de produção de provas?

Para responder à primeira questão analisamos a coleção *Matemática* do Ensino Médio de autoria de Luiz Roberto Dante utilizando para isso os critérios do Catálogo Nacional do livro para o Ensino Médio (CNLEM).

Para a segunda questão, adotamos alguns elementos da metodologia engenharia didática. Empregamos para essa análise a tipologia de provas de Balacheff.

Os resultados das nossas análises aduzem que o autor da coleção se preocupa em oferecer sempre algum tipo de justificativa ou demonstração para cada elemento novo apresentado. Entretanto, há poucas atividades que estimulam o leitor a produzir provas.

No tocante à seqüência didática, a pesquisa aponta algumas dificuldades verificadas no processo de produção de provas e mostra que apesar disso, a seqüência permitiu um avanço por parte dos alunos de validações empíricas para as validações dedutivas.

Palavras-chave: Provas, demonstração, logaritmos, livro didático, Ensino Médio

Abstract

The objective of this research is to investigate the approach used in proofs and demonstrations of the logarithmic mathematical object, in a collection of textbooks adopted in the Brazilian Secondary School; as well as to conceive and apply a didactic sequence to introduce the student into the deductive mathematical thought.

The research intends to answer the following questions:

(1) How does the author of the textbooks approach the process of proving, regarding the subject logarithms in his work? Are the readers stimulated to find out proofs in the suggested activities?

(2) Which difficulties do first grade students of the Brazilian Secondary School present during a process of proving?

In order to answer the first question, we have analysed the collection *Matemática* for Secondary School by Luiz Roberto Dante, making use of the criteria of the National Book Catalogue for Secondary School (CNLEM).

For the second question, we have used some elements of the didactic engineering methodology , making use of the types of proofs by Balacheff.

The results of our analysis bring forward that the author of the collection is always concerned about presenting some kind of justification or demonstration for each element introduced. However, there are few activities that stimulate the reader to produce proofs.

Regarding the didactic sequence, the research presents some difficulties observed in the process of production of proofs. Furthermore, it shows that the sequence provided the students' development from empiric validations to deductive validations.

Key words: proofs, demonstration, logarithms, textbook, Brazilian Secondary School

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O objetivo deste trabalho é investigar a abordagem conferida a provas e demonstrações do objeto matemático logaritmos, numa coleção de livros didáticos para o Ensino Médio e conceber e aplicar uma seqüência didática para introduzir o aluno ao pensamento matemático dedutivo. Interessa-nos particularmente verificar a forma como as provas são realizadas, se existe atividades com teor de prova e como os alunos produzem provas.

Para a análise de livros didáticos, foi escolhida a coleção "Matemática" do autor Luiz Roberto Dante 1˚ edição 2005, volumes 1, 2 e 3 para Ensino Médio, Editora Ática. Essa obra faz parte do plano nacional do livro para Ensino Médio (PNLEM) e sua escolha se guiou pelos critérios do Catálogo Nacional do Livro para Ensino Médio (CNLEM). Entre os diferentes tópicos da coleção, escolhemos como objeto de pesquisa o tema logaritmos por ser considerado difícil pelos alunos e por favorecer a análise do processo de prova. Será concebida e aplicada uma seqüência de ensino cujo estudo se apoiará na tipologia de provas de Balacheff.

CAPÍTULO 1
PROBLEMÁTICA

1.1 Introdução

Iniciei meus estudos em nível superior no ano de 1994 cursando engenharia química na Unicamp, pois sempre tive muita afinidade por Matemática, Física, Química e Ciências. Acreditava que não teria nenhuma dificuldade quando comecei o curso, porém, após fazer a primeira prova de álgebra linear, percebi que sabia muito pouco de Matemática, pois esperava questões em que simplesmente iria aplicar fórmulas e algoritmos, como no Ensino Médio, mas todo o teor da prova era sobre demonstrações e provas.

O primeiro questionamento que surgiu foi: por que preciso saber provar e demonstrar teoremas?

Para essa questão, não consegui encontrar uma resposta satisfatória e concluí que o curso de Engenharia não seria o melhor ambiente para entender mais sobre essa interrogação. Retornei a São Paulo e ingressei no curso de Matemática da Universidade de São Paulo no ano de 1997.

Em todas as disciplinas, as demonstrações e provas estavam sempre presentes. Comecei a perceber a importância da validação dos teoremas, pois somente acreditaria na veracidade de afirmações que não fossem de conhecimento prévio.

Nesse mesmo ano, iniciei minha carreira como professor de Matemática na rede estadual de São Paulo e no ano seguinte fui trabalhar também em escolas particulares.

Desde o início, percebi que os alunos aceitavam passivamente todos os teoremas e regras que os professores apresentavam, não apresentando nenhum tipo de questionamento sobre a veracidade dos teoremas. Em 2004, iniciei o curso Mestrado Profissional em Ensino de Matemática na PUC/SP.

O tema provas e demonstrações permanecia no meu dia-a-dia. A primeira disciplina a ser cursada foi Tópicos de Geometria com o Professor Vincenzo Bongiovani, que se tornaria meu orientador. Novamente, provas e demonstrações era o grande ponto a ser analisado e ficou evidente o nível de dificuldade que os alunos apresentavam, mesmo já sendo graduados em Matemática.

O mesmo ocorreu na disciplina Tópicos de Álgebra, ministrada pela Professora Sônia Pitta.

Diante de tudo isso, decidi realizar meu trabalho final sobre provas e demonstrações. Neste mesmo período foi criado na PUC/SP o projeto AProvaME, cujo intuito é analisar as concepções que alunos do Ensino Básico têm sobre o tema. Resolvi fazer parte deste projeto, pois ia ao encontro dos meus anseios.

Ainda faltava escolher o tipo de pesquisa que realizaria sobre provas. Três opções me foram oferecidas pelos professores do projeto AProvaME:

– levantar concepções dos alunos sobre provas a partir de um questionário e fazer uma análise quantitativa das respostas;

– analisar atividades relacionadas a provas nos livros didáticos;

– elaborar situações de aprendizagem sobre a prova.

Resolvi trabalhar com as duas últimas propostas: analisar como uma coleção de livros didáticos aborda o processo de prova em relação a um tópico de Matemática e elaborar e aplicar uma seqüência de atividades a alunos do primeiro ano do Ensino Médio, visando examinar as suas dificuldades nesse processo.

O que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre o tema prova no ensino da Matemática?

O ensino de Matemática no Ensino Médioe tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo.

> É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (PCN,1999, p. 252).

Segundo os PCNs, o ensino de Matemática no Ensino Médio tem como objetivo levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam que ele desenvolva estudos posteriores e adquira uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, empregando ferramentas matemáticas para formar opinião própria que lhe permita expressar-

se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral,escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as **demonstrações** em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento da outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimento associado às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação as suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Como constatamos, as provas devem estar presentes no ensino de Matemática, e para muitos professores o livro didático é a única fonte de pesquisa, de forma que, se as provas forem estimuladas nas coleções, isto pode encorajar os docentes não apenas a realizá-las em sala de aula, mas também a propor atividades referentes a provas aos alunos.

Qual é a proposta do Projeto AProvaME?

Alguns estudos acadêmicos mostram que existe uma grande dificuldade no ensino e aprendizagem de prova (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

O projeto AProvaME foi concebido pela Professora Dra. Siobhan Victoria Healy (Lulu) do grupo de pesquisa Tecnologia e meios de Expressão em Matemática (TecMem) do programa de pós-graduação da PUC de São Paulo, com o intuito de analisar as concepções que os alunos têm sobre provas e, a partir destas análises, elaborar situações de aprendizagem. Participam desse projeto seis doutores pesquisadores do programa de pós-graduação em Educação Matemática da PUC/SP e 25 estudantes do curso Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP.

As situações de aprendizagem terão dois enfoques: alunos e professores.

No que se refere aos alunos, deseja-se compreender de que forma o uso de ambientes computacionais ajudará na construção de argumentos dedutivos e sua distinção com argumentos empíricos.

Em relação aos professores, deseja-se saber de que forma eles se adaptarão a uma nova abordagem na sala de aula, na qual eles são os agentes principais.

Os objetivos do projeto AProvaME são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes das escolas de São Paulo.

2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.

3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.

4. Avaliar situações de aprendizagem em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.

5. Investigar a implementação dessas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.

6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.

7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

O projeto está dividido em duas fases. A primeira se destina a levantar as concepções sobre provas de alunos de faixa etária 14 a 16 anos de escolas públicas e privadas de São Paulo, a partir de um questionário (denominado Q_1) que foi elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998).

A segunda fase consiste na análise desses questionários, e a partir dela a elaboração e avaliação de atividades sobre provas. Este projeto é financiado pelo CNPq.

Nosso trabalho está inserido na segunda fase do projeto. Examinaremos provas e demonstrações apresentadas numa coleção de livros didáticos de Matemática e a partir dessas análises proporemos e aplicaremos uma seqüência didática que se apoiará nos tipos de provas de Balacheff. Entre os diferentes temas matemáticos que poderiam ser analisados numa coleção, escolhemos o assunto logaritmo, pelo fato de ser um tópico estudado na primeira série do Ensino Médio e que favorece um trabalho envolvendo demonstração.

Como escolhemos a coleção de livro didático?

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) foi criado em 1985 e tem por objetivo oferecer a alunos e professores de escolas públicas do Ensino Fundamental, de forma gratuita, o livro didático de qualidade, para apoio ao processo ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

A fim de assegurar a qualidade dos livros a serem distribuídos, o Fundo de Desenvolvimento da Educação (FNDE) lança, a cada três anos, edital para que os detentores de direito autoral possam inscrever suas obras didáticas. O edital estabelece as regras para inscrição e apresenta os critérios pelos quais os livros serão avaliados.

A Secretaria de Educação Básica coordena o processo de avaliação pedagógica sistemática das obras inscritas no PNLD desde 1996. Esse processo é realizado em parceria com universidades públicas que se responsabilizam pela avaliação de livros didáticos nas seguintes áreas: Alfabetização, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História e Geografia e Dicionário da Língua Portuguesa.

Ao final de cada processo, é elaborado, por especialistas, o Guia Nacional de Livros Didáticos (GNLD). Nele são apresentados os critérios que nortearam a avaliação dos livros, bem como as resenhas das obras aprovadas, passíveis de escolha por parte dos professores. O Guia é, então, enviado às escolas como instrumento de apoio aos professores no momento da escolha dos livros didáticos.

Seguindo os mesmos moldes do PNLD, foi criado em 2003 o Programa Nacional do Livro para Ensino Médio (PNLEM), cujo objetivo é entregar, periodicamente, com reposição anual, livros didáticos de qualidade para todos os alunos matriculados no Ensino Médio das escolas públicas. Também foi elaborado o Catálogo Nacional do Livro para o Ensino Médio (CNLEM) como propósito de orientar os professores na escolha da coleção de livros.

A coleção de Matemática, que será objeto de nosso estudo, foi escolhida entre aquelas sugeridas pelo Catálogo Nacional do Livro para o Ensino Médio.

1.2 Estrutura do trabalho

Nosso trabalho de pesquisa foi dividido em seis capítulos.

No capítulo 1 abordamos nossa problemática, fazendo um estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, uma breve descrição do projeto AProvaME, no qual a dissertação está inserida, além de uma rápida apresentação do Plano Nacional do Livro Didático. Ademais, apresentamos um levantamento bibliográfico sobre o tema e a fundamentação teórica que sustenta nossas análises.

No capítulo 2, realizamos um estudo histórico do tópico escolhido. logaritmo.

No capítulo 3, o critério de escolha da coleção, bem como os critérios para a análise do tópico logaritmo na coleção de livros didáticos.

No capítulo 4, descrevemos nosso público-alvo, a questão de pesquisa, objetivo e metodologia, a concepção da seqüência didática e a análise *a priori* das atividades, deixando claros seus objetivos, prevendo as possíveis estratégias que o aluno poderá utilizar.

Por sua vez, no **capítulo 5** tratamos da organização e aplicação da seqüência didática e da análise *a posteriori* das atividades que a compõem, que consiste na interpretação dos resultados da experimentação, verificando quais objetivos foram atingidos, se as estratégias desenvolvidas pelos alunos foram às previstas e se superaram suas dificuldades.

No capítulo 6, expusemos nossas considerações finais, respondendo à nossa questão de pesquisa.

1.3 Levantamento bibliográfico

Existem poucas pesquisas acadêmicas sobre provas no ensino básico no Brasil.

Em um levantamento bibliográfico de trabalhos acadêmicos brasileiros concernentes ao tema identificamos uma tese de doutorado de Ruy César Pietropaolo (2005), (Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática, e duas dissertações de mestrado, Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do Ensino Fundamental (1998), de Filomena Aparecida Teixeira Gouvêa, e A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do estado de São Paulo para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, (2005), de Marisa Carlovich.

Na tese do Professor Ruy Pietropaolo são discutidos referenciais na literatura sobre o significado de demonstração e provas para matemáticos. Ele realizou uma breve análise a respeito dos termos diferentes usados para se referir às demonstrações, como demonstrações formais, demonstrações rigorosas ou simplesmente prova, muitas vezes cada termo apresentando significado distinto.

Ele comparou os termos utilizados na língua francesa e inglesa. Em francês, as palavras *preuve* e *démonstration* têm o mesmo significado; em inglês *proof* e *proving* apresentam significados distintos.

Entretanto, ele constatou que todos estes termos têm algo em comum: “a procura pela validação de afirmações por meio de argumentos”.

O autor analisou como a prova é vista pela Educação Matemática e de que forma ela está inserida nos currículos de educação básica e formação de professores. Para tanto, foi realizado um levantamento de pesquisas existentes sobre o tema, o qual, segundo o Professor Ruy, é freqüentemente objeto de análise e pesquisa por parte de países como França, Inglaterra e Itália, enquanto no Brasil existem poucos trabalhos referentes a provas e demonstrações no ensino básico.

Por sua vez, a dissertação da Professora Filomena teve como ponto de partida o resultado do Saresp de 1996, em que foi constatado que alunos da 7ª série do Ensino Fundamental apresentaram um desempenho insatisfatório em Matemática. A partir desses resultados, ela investigou as possíveis causas desse desempenho, e uma delas, de grande relevância, foi o modo como os professores ensinam a disciplina.

No seu trabalho foi proposto que o ensino de Geometria, a partir da 7ª série do Ensino Fundamental, deve iniciar o aluno na justificação, argumentação e prova, de modo que resultados aceitos nas séries anteriores, apenas com a manipulação de objetos e observação, sejam fundamentados aos alunos. A fundamentação teórica utilizada nessa dissertação foram os trabalhos de Chevallard, Arsac, Douady, Barbin, Balacheff, Duval.

O objetivo do trabalho de Marisa Carlovich foi analisar como a geometria dedutiva é tratada nos livros didáticos do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental mais utilizados nas escolas públicas de São Paulo, desde a década de 90 até 2005. Ela constatou uma grande disparidade entre os períodos de 1990 ao início do ano 2000, e entre 2000 até 2005. Essa diferença em parte é explicada pela implantação do Programa Nacional do Livro Didático, em que se constatou que no primeiro período as demonstrações são apresentadas aos alunos, mas as tarefas propostas são apenas de aplicação sem nenhuma relação com as provas realizadas. A partir do ano 2000, verifica-se um otimismo em relação ao ensino de provas, pois, além dos exercícios de aplicação, são solicitadas também validações empíricas e dedutivas.

1.4 Fundamentação teórica

Consideramos, em nossa pesquisa, as idéias de Balacheff sobre processos de validações de provas.

Segundo Balacheff (1982), explicação é um discurso que oferece uma ou várias razões para tornar compreensível uma afirmação. Prova é uma explicação aceita por uma comunidade num dado momento. Demonstração é uma prova aceita pela comunidade matemática.

Ainda de acordo com esse autor (1987), as provas em matemática produzidas por alunos podem ser divididas em duas categorias: provas pragmáticas e provas intelectuais.

Provas pragmáticas: são validações apoiadas sobre conhecimentos práticos, experimentais, uso de figuras, utilizando-se de recursos de ação.

Provas intelectuais: são provas que não utilizam casos particulares, objetos práticos, e sim formulações e relações entre as propriedades, com o intuito de uma generalização.

Balacheff identifica quatro níveis de formas de validação, sendo classificadas as três primeiras como provas pragmáticas e a última, como prova intelectual.

Para ele, a aprendizagem da prova passa por quatro etapas de desenvolvimento descritas a seguir:

Empirismo ingênuo: este tipo de validação ocorre quando a aluno conclui que uma afirmação é verdadeira observando alguns poucos casos.

Exemplo: para verificar que a soma de dois números pares é um número par, o aluno faz duas somas de números pares e constata que o resultado é par, 2+4=6, 4+6=10. Conclusão: a soma de dois números pares resulta sempre em número par.

Experiência crucial: este tipo de validação se dá quando o aluno testa um exemplo com certas características para verificar sua validade para um caso específico, e, se for confirmado, conclui-se seu caráter geral a partir de alguns casos verificados.

Exemplo: para constatar se a soma de dois números pares é um número par, o aluno soma números pares de um algarismo, dois algarismos e três algarismos e verifica que o resultado é sempre par 2+4=6, que é par 20+32= 52, que é par 124+142=266. Conclusão: a soma de dois números pares sempre será par.

Exemplo genérico: este tipo de validação ocorre quando são apresentadas as razões que validam uma propriedade, mesmo que seja em razão de alguns casos particulares.

Exemplo: para verificar que a soma de dois números pares é um número par, um aluno afirma: como os números pares terminam sempre em algarismos pares e as somas desses números também vão ter o último algarismo par, então esse número será par.

Experiência mental: consiste na explicação desprendida de concretização em representante particular; a argumentação flui por meio de pensamentos que controlam toda a generalidade da situação.

Exemplo: para provar que a soma de dois números pares é um número par, o aluno procede da seguinte maneira: todos os números pares são múltiplos de dois, então são da forma 2k, k Є Z, então, 2k e 2p são pares com (k Є Z e p Є Z), logo 2k+2p=2(k+p), que é múltiplo de dois e, portanto, é par.

CAPÍTULO 2
ESTUDO HISTÓRICO DO OBJETO MATEMÁTICO “LOGARITMOS”

> “Os poderes miraculosos dos cálculos modernos se devem a três invenções: a notação arábica, as frações decimais e os logaritmos.”
>
> (Florian Cajori)

Segundo Eves (1995), o século XVII teve importância fundamental na história da Matemática em virtude de acontecimentos que mudaram o rumo da Ciência e da Matemática.

> Galileu fundou a ciência da dinâmica, Kepler anunciou suas leis do movimento planetário. Mais tarde, Desargues e Pascal inauguraram um novo campo da geometria pura, Descartes lançou a geometria analítica moderna, Fermat estabeleceu os fundamentos da teoria dos números moderna, Huygens deu contribuições de monta à teoria das probabilidades (Eves, 1995, p. 340) [e John Napier inventou os logaritmos].

O comércio, a engenharia e a guerra exigiam que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e precisos. Três notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas, a notação indo-arábica, as frações decimais e os logaritmos.

Segundo Maor (2006), John Napier (1550-1617) viveu a maior parte da sua vida na propriedade de sua família, o castelo de Merchiston, perto de Edimburgo, Escócia.

Napier tinha muitas controvérsias políticas e religiosas e era anticatólico. Em 1593 publicou *A plaine discovery of the whole revelation of Saint Ionh*, no qual se propunha a provar que o papa era o anticristo e que o criador tencionava pôr fim ao mundo nos anos entre 1688 e 1700. O livro atingiu vinte e uma edições, pelo menos dez em vida.

> Napier também escreveu sobre várias máquinas de guerra infernais, acompanhando seus escritos de projetos e diagramas. Previu que no futuro desenvolver-se-ia uma peça de artilharia que poderia eliminar de um campo de quatro milhas de circunferência todas as criaturas vivas que excedessem um pé de altura, que se produziriam dispositivos para navegar debaixo d'água e que se criaria um carro de guerra com uma boca que se acenderia para espalhar a destruição por todas as partes. A metralhadora, o submarino e o tanque de guerra, respectivamente, vieram concretizar esses vaticínios na Primeira Guerra Mundial (Eves, 1995, p. 342).

Napier não era matemático profissional, "se interessava por certos aspectos da matemática, particularmente a trigonometria e computação" (Boyer, 1987, p. 213). Para se descontrair de suas polêmicas políticas e religiosas, Napier deleitava-se estudando Matemática e Ciência, o que resultou em quatro geniais produtos que entraram para a história da Matemática. São eles: os logaritmos; um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como regra das partes circulares, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro, conhecidas como analogias de Napier, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; um instrumento conhecido como barras de Napier, utilizado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números.

Os logaritmos surgiram inicialmente com a idéia de facilitar cálculos complicados, em que multiplicações e divisões são substituídas por adições e subtrações, tratando-se de operações mais fáceis. Não se sabe ao certo qual a idéia inicial de Napier.

Apresentaremos a seguir as idéias que provavelmente foram às precursoras da invenção dos logaritmos.

1ª idéia

No fim do século XVI surgiram identidades trigonométricas de vários tipos em todas as partes da Europa. Entre estas, havia um grupo de fórmulas conhecidas como fórmulas de prostaferese, que transformam produtos em somas ou diferenças. Ilustremos uma delas.

Sendo cos(a+b)= cosa.cosb - sena.senb e cos(a-b)= cosa.cosb+sena.senb; adicionando membro a membro as duas expressões teremos:

cos (a+b) + cos (a-b) =2.cosa.cosb.

Portanto, a igualdade cosa.cosb= ½ [cos (a+b) + cos (a-b)] transforma produtos em somas.

Essa fórmula também é chamada de fórmula de Werner (1468-1528), pois parece ter sido usada por este para simplificar cálculos astronômicos. Era também conhecida pelos árabes, mas apenas no fim do século XVI que o método passou a ser comumente usado.

Vamos obter o produto 0,9659 x 0,9063 com o auxílio da tabela abaixo:

Ângulo	5^o	10^o	15^o	20^o	25^o	30^o	35^o	40^o
Cosseno	0,9962	0,9848	0,9659	0,9397	0,9063	0,8660	0,8192	0,7660

0,9659 . 0,9063= cos 15^o . cos 25^o = ½ (cos 40^o +cos10^o)= ½ (0,7660+0,9848)= 0,8754

Observe que o produto foi encontrado sem que nenhuma multiplicação tenha sido efetuada. Esse artifício era adotado nos principais observatórios astronômicos, inclusive no de Tycho Brahe (1546-1601).

2.ª idéia

O uso da fórmula $a.b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ também transforma produtos em diferenças.

Vamos calcular o valor de 1617. 235 com o auxílio da tabela abaixo:

a	1380	1382	1384	.....	1850	1852	1854
(a/2)²	476100	477481	478864	......	855625	857476	859329

1617.235= $(\frac{1617+235}{2})^2 - (\frac{1617-235}{2})^2 = (\frac{1852}{2})^2 - (\frac{1382}{2})^2 = 857476 - 477481 = 379995$

3.ª idéia

Essa idéia foi provavelmente encontrada nos trabalhos de Stifel e Chuquet. Um produto é transformado em soma a partir de uma tabela de potências de 2.

Calculemos o valor de 128.32 a partir da tabela abaixo:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^x	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

128.32= $2^7.2^5=2^{7+5}= 2^{12}$= 4096

Mas como calcular um produto se um dos números não está na tabela? Há necessidade de fazer uma interpolação. A desvantagem de usar a base 2 é que na coluna 2^x não estão todos os números inteiros.

4.ª idéia

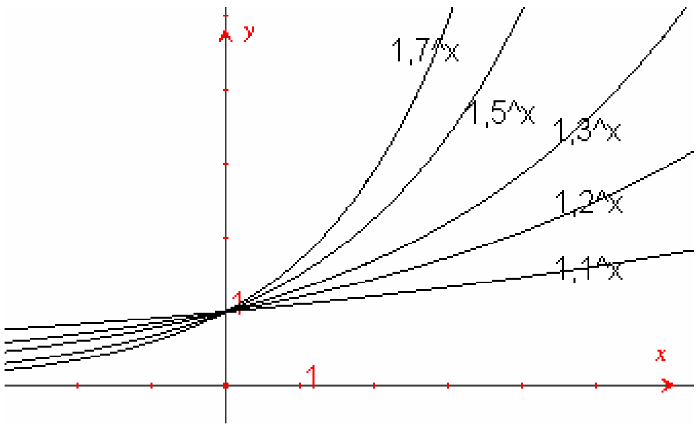
Uma outra idéia é diminuir a base.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$(1,5)^x$	1,5	2,25	3,375	5,0625	7,59375	11,3906	17,085	25,6289

Permanece o problema. Na tabela acima, na linha $(1,5)^x$, à medida que x cresce, os números $(1,5)^x$ começam a se distanciar bastante uns dos outros. O que acontece se reduzirmos mais a base?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$(1,1)^x$	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,6105	1,7715	1,9487	2,1435	2,3579	2,5937	2,8531

Nesse caso, os números $(1,1)^x$ continuam a se distanciar, porém com uma rapidez menor, conforme gráfico abaixo.



O escocês John Napier se debruçou sobre este problema durante 20 anos. Provavelmente, a informação de que os observatórios astronômicos usavam métodos mais eficazes para efetuar cálculos chegou até ele na Escócia. Percebendo a vantagem de trabalhar com potências próximas de 1, ele usou a base $1\text{-}10^{-7}$ (0,9999999). Publicou o seu trabalho em 1614.

x	0	1	2	3	4	5	6
$(0,9999999)^x$	1	0,9999999	0,9999998	0,9999997	0,9999996	0,9999995	0,9999994

Com essa escolha da base, os números acima ficaram próximos demais. Para chegar a um equilíbrio e evitar decimais, Napier multiplicou cada potência por 10^7.

x	0	1	2	....	11	12	13
$(0,9999999)^x.10^7$	10000000	9999999	9999998	....	9999989	9999988	9999987

Usando a tabela vamos calcular o valor de 9999998. 9999989

$9999998.9999989=(0,9999999)^2.10^7.(0,9999999)^{11}.10^7=(0,9999999)^{13}.10^7.10^7=$

$=9999987.10^7= 99999870000000$

Essas engenhosas tabelas construídas por Napier poderiam ser feitas nos dias de hoje com uso de um computador ou mesmo uma calculadora de bolso, mas Napier teve que realizar todos os cálculos com papel e pena. Tendo completado sua tarefa, restava-lhe dar nome à sua criação. Inicialmente, ele chamou o expoente de cada potência de “número artificial”, mas depois decidiu pelo termo logaritmo, que significa “número proporcional”. Em notação atual isto significa dizer que, se (na primeira tabela) $N= 10^7.(1-10^{-7})^L$, então o expoente L é o logaritmo neperiano de N.

A definição de logaritmos apresentada por Napier difere em vários aspectos da definição moderna (introduzida em 1728 por Leonhard Euler): se $N=b^L$, em que b é um numero positivo fixo, diferente de 1, então L é o logaritmo (de base b) de N. Assim, pelo sistema de Napier, L=0 corresponde a $N=10^7$, ou seja, $\log 10^7=0$, enquanto no sistema moderno L=0 corresponde a $N=1(\log_b 1=0)$.

Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos. Ele dedicou pelo menos vinte anos a essa teoria. Em 1614 publicou num tratado em latim, intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos), toda a descrição de seu trabalho.

Dificilmente existiu na história da Ciência uma idéia matemática abstrata que tenha sido recebida de modo mais entusiástico por toda a comunidade científica do que a invenção dos logaritmos. Um dos primeiros a utilizar os logaritmos com grande êxito em seus elaborados cálculos das órbitas planetárias foi Johannes Kepler.

O sucesso da invenção dos logaritmos foi tão imediato que Henry Briggs (1561-1631), um professor de Geometria do Gresham College de Londres e posteriormente professor de Oxford, ficou muito impressionado com a nova invenção a ponto de ir até a Escócia e se encontrar com o grande inventor pessoalmente. Este encontro ocorreu em 1615 na casa de Napier, quando os dois passaram em torno de quinze minutos se admirando sem dizer uma só palavra. Neste encontro, Briggs propôs duas modificações que tornariam as tabelas de Napier mais convenientes: fazer o logaritmo de 1 igual a zero no lugar de 10^7 e ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriada de 10. Depois de considerarem várias possibilidades, eles finalmente decidiram que log10=1=100. Em linguagem atual isto significa dizer que, se um número positivo N for escrito como N=10L, então L é o briggsiano ou logaritmo comum de N, escrito como log10N, ou simplesmente logN, nascendo assim o conceito de base. Napier concordou com tais sugestões, mas já estava com idade avançada e não tinha mais energia para computar as novas tabelas. Briggs fez esse trabalho e em 1624 publicou seus resultados sob o título *Arithmetica logarithmica*, que continha uma tábua de logaritmos comuns com quatorze casas decimais dos números 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. O espaço entre 20.000 e 90.000 foi mais tarde preenchido por Adriaan Vlacq (1600-

1667), um editor holandês, e seus acréscimos foram incluídos na segunda edição de *Arithmetica logarithmica* (1628).

Todos os méritos da invenção dos logaritmos foram atribuídos a Napier, mas Jobst Bürgi (1552-1632), um fabricante de relógios suíços, reclamou o título de inventor dos logaritmos. Ele criou uma tabela de logaritmos adotando o mesmo esquema geral de Napier, mas com uma diferença significativa: onde Napier havia usado a proporção $1\text{-}10^{7}$, que é ligeiramente menor que 1, Bürgi utilizou $1+10^{-4}$, um número um pouco maior que 1. Por isso os logaritmos de Bürgi aumentam à medida que os números aumentam, enquanto os de Napier diminuem. Como Napier, Bürgi estava preocupado em evitar as frações decimais, tornando sua definição dos logaritmos mais complicada do que o necessário. Se um inteiro positivo N for escrito como $N = 10^{8}(1+10^{-4})^{L}$, então Bürgi chamava o número 10L (em vez de L) de “número vermelho” correspondente ao “número negro” N (em sua tabela esses números eram realmente impressos em vermelho e preto, daí a nomenclatura). Ele colocava os números vermelhos, isto é, os logaritmos na margem e os números pretos no corpo da página, construindo, em essência, uma tabela de “antilogaritmos”. Ele só a publicou em 1620, seis anos após a publicação de Napier, atraso que fez Bürgi perder seu direito à prioridade em uma descoberta histórica. Hoje seu nome está quase esquecido, exceto entre os historiadores da Ciência.

CAPÍTULO 3
ANÁLISE DO TÓPICO "LOGARITMOS" NUMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS

A coleção escolhida para nossa análise foi *Matemática*, 1. ed., Editora Ática, 2005, v. 1, 2 e 3, de autoria de Luiz Roberto Dante.

3.1 Critérios de escolha da coleção

Adotamos essa coleção basicamente por dois motivos:

1. Esta obra faz parte do PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio), ou seja, já passou por análise de especialistas que a aprovaram.
2. Formação do autor: mestre em Matemática pela USP; doutor em Psicologia da Educação: Ensino de Matemática pela PUC/SP; pesquisador em Ensino de Matemática, pela Unesp (Rio Claro)

O autor, além da formação em Matemática, tem amplo conhecimento em Educação Matemática, o que nos possibilita analisar como ele fez a intersecção entre Matemática e Educação Matemática no que se refere a provas e demonstrações. Esse exame abrangerá teoria, exercícios resolvidos e exercícios propostos.

3.2 Critérios para análise

Nossos critérios de análises serão os mesmos do CNLEM. Para esses elaboradores, para cumprir adequadamente a função didático-pedagógica, o livro didático não pode ser recomendado para uso de sala em aula se:

A. Contiver erros conceituais ou colocações que possam induzir o estudante ao erro

B. Desfavorecer a construção da cidadania, veiculando preconceitos que levem a discriminações de qualquer tipo, ou funcionando como instrumento de propagandas de doutrinas religiosas, ou violando preceitos legais dos Estatutos da Criança e do Adolescente.

C. Se encontrar nele algum tipo de inadequação metodológica. O livro didático deve permitir o desenvolvimento equilibrado de várias habilidades e competências e deve ser coerente com a proposta pedagógica a que se propõe.

Estes critérios são comuns para qualquer disciplina. No que concerne especificamente à Matemática, o livro didático deve:

1. Apresentar adequadamente os conhecimentos relativos aos campos de conteúdos (aritmética, álgebra, geometria, estatística, probabilidades e combinatória) no que se refere à seleção apropriada de tópicos; ter uma distribuição adequada dos conteúdos, tanto internamente (em cada volume) como ao longo da coleção; articulação entre os campos; articulação entre conteúdos novos e já abordados; ter uma diversidade e articulação de enfoques; apresentar uma diversidade e articulação de representações; equilíbrio e articulação entre conceitos, algoritmos e procedimentos.

2. Conter também referências aos processos históricos de produção do conhecimento matemático que contribuam para a aprendizagem; favorecer a compreensão das relações da Matemática com outras práticas e necessidades sociais, além de apresentar articulações da Matemática com outras áreas do conhecimento.

3.3 Vocabulário utilizado pelos matemáticos num processo de prova

O processo da argumentação e prova normalmente se apóia em conceitos matemáticos, tais como postulado, axioma, teorema, hipótese, tese, prova direta, prova por contraposição e prova por absurdo. O uso adequado dessa terminologia será também levado em conta em nossa análise. Faremos a seguir uma pequena síntese desses termos.

O mais antigo texto matemático grego que se apresenta completo é a obra de Euclides: *Os elementos*. Essa obra, constituída de 13 livros, expõe vários conhecimentos matemáticos elementares desde a época de Tales, em ordem lógica. O que a distingue e faz sua grandeza é a sua estrutura axiomática. São deduzidos 465 teoremas a partir de 9 axiomas e 5 postulados.

Na Grécia Antiga, os axiomas (ou noções comuns) eram afirmações evidentes por si sós e os postulados eram proposições geométricas que se pediam que fossem aceitas sem demonstração. Hoje, na Matemática, axioma e postulado são sinônimos.

Teoremas são proposições que podem ser demonstradas a partir dos postulados ou axiomas e de resultados já demonstrados. Todo teorema pode ser escrito na forma: se p, então q. Nesse caso, p chama-se hipótese e q, tese. Proposições do tipo $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ são denominadas recíprocas: uma é recíproca da outra. Num teorema, a sua recíproca pode ser verdadeira ou falsa.

Um teorema pode ser provado por indução ou por dedução. O raciocínio indutivo é aquele que nos leva de uma lista de afirmações particulares para uma afirmação universal.

Por exemplo, a partir dos casos particulares $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$.

Podemos, por indução, conjecturar que $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$. Mas uma prova formal desse resultado deve utilizar o princípio de indução finita.

O raciocínio dedutivo é desenvolvido mediante técnicas, como: prova direta, em que se assume a hipótese e se deduz a tese; prova por contraposição, na qual se assume a negação da tese e se deduz a negação da hipótese; prova por absurdo, em que se assume a negação da tese, bem como também a hipótese, e se deduz uma contradição.

Nas análises que realizaremos a seguir atentaremos para a estrutura de uma demonstração. Segundo nossa concepção, demonstrar consiste em verificar a veracidade de um resultado de forma organizada, ou seja, evidenciando as hipóteses (argumentos) e o que será demonstrado, tese. Uma demonstração pode ser estruturada em quatro etapas: hipótese(s), tese, desenvolvimento e conclusão.

3.4 Análise do livro

Logaritmos é um tópico que teve uma importância fundamental em cálculos astronômicos, em que operações de multiplicação e divisão são substituídas por adições e subtrações facilitando esse trabalho. Com o avanço da tecnologia e facilidades em usar calculadoras eletrônicas, esta utilidade foi superada. A função logarítmica, juntamente de sua inversa, a função exponencial, permanece como uma das mais relevantes na Matemática em razão de suas propriedades funcionais em Análise Matemática e modelagem de alguns fenômenos com este tipo de função.

Na coleção, este tópico, introduzido no volume 2, capítulo 8, intitulado Logaritmo e função logarítmica, é apresentado na forma de um problema de crescimento populacional, cuja resolução chega numa equação exponencial de difícil resolução pelos métodos vistos anteriormente. Desse modo, o autor justifica a necessidade dos logaritmos para resolução da equação. Entretanto, o autor utilizou os logaritmos e suas propriedades (produto e quociente) no volume 1 da coleção, no capítulo 9 (Matemática financeira), na resolução dos exercícios, sem fazer nenhum tipo de apresentação do tema. A nosso ver, os conceitos devem ser apresentados e retomados para que sejam ampliados gradualmente, porém, da forma como ocorreu, pode-se gerar uma confusão no entendimento dos alunos.

Logo após, o autor define logaritmo, mostra a equivalência da forma logarítmica e forma exponencial e apresenta alguns exercícios resolvidos para manipulação da definição. O autor da coleção faz duas observações importantes: a primeira está relacionada aos logaritmos de base 10 ou logaritmos decimais ou de Briggs, deixando bem claro que esta base quase sempre será omitida. Além disso, sugere aos alunos que apliquem a definição para alguns casos ($\log_3(-81)$, $\log_{10}0$, $\log_{-2}8$ e $\log_1 6$) e analisem as conseqüências. Desta forma, o autor faz que o aluno compreenda as condições de existência de um logaritmo, fato que será utilizado na determinação do domínio da função logarítmica.

Na primeira seção de exercícios propostos, as atividades são de cálculos simples de alguns logaritmos. As condições de existência dos logaritmos são abordadas novamente na forma de exercícios resolvidos, e a seguir é proposta uma seção de exercícios, nos quais verificamos a retomada de funções do primeiro e segundo grau, como sugere o CNLEM, o que faz com que os alunos se apropriem cada vez mais deste tipo de função.

As clássicas conseqüências da definição são todas justificadas, sem uso de casos particulares. Segundo Balacheff, são exemplos genéricos, ou seja, um nível anterior à prova formal denominada experiência mental. Há também uma grande quantidade de exercícios propostos, quase todos de manipulação da definição e uso das suas conseqüências. No exercício 21 da página 135, de verdadeiro ou falso, por exemplo, seria interessante que o autor pedisse algum tipo de argumentação em cada um dos itens para que os alunos possam criar o hábito de justificar.

Propriedades de Logaritmos

As propriedades dos logaritmos – produto, quociente, potência e mudança de base – são introduzidas da mesma forma, utilizando um exemplo numérico com certas características para cada uma delas. Em seguida, o autor generaliza a propriedade. Segundo Balacheff, este tipo de validação é denominado experiência crucial.

Em seguida, é feita a prova, considerada experiência mental por Balacheff, de cada uma delas, conforme apresentamos a seguir:

1ª Propriedade: Logaritmo do produto

$log_a (M . N) = log_a M + log_a N$

Demonstração:

Consideramos $log_a (M . N) = p$; $log_a M = m$ *e* $log_a N = n$.

Dessas igualdades, tiramos $a^P = M . N$; $a^m = M$ *e* $a^n = N$. *Então:*

$a^P = M . N = a^m . a^n = a^{m+n}$

Se $a^P = a^{m+n}$, *então* $p = m + n$, *ou seja,* $log_a (M . N) = log_a M + log_a N$.

Conclusão: Numa mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é *igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.*

Observação: Essa propriedade de transformar produtos em somas foi à motivação original para a introdução dos logaritmos no século XVII, com o intuito de simplificar cálculos.

2ª propriedade: Logaritmo de um quociente

Vamos observar, por exemplo, que:

· $\log_2 (16/4) = \log_2 (2^4/2^2) = \log_2 2^{4-2} = 4 - 2 = 2$ (1)

· $\log_2 16 - \log_2 4 = \log_2 2^4 - \log_2 2^2 = 4 - 2 = 2$ (2)

De (1) e (2) tiramos que:

. $\log_2 (16/4) = \log_2 16 - \log_2 4$

Esse fato acontece para qualquer base e quaisquer dois números, desde que existam os Logaritmos envolvidos. Temos então mais uma propriedade dos logarítmos:

$$\log_a M/N = \log_a M - \log_a N$$

Demonstração:

Consideramos $\log_a M/N = q$; $\log_a M = m$ *e* $\log_a N = n$.

Daí tiramos $a^q = M/N$; $a^m = M$ *e* $a^n = N$. *Então:* $a^q = M/N = a^m / a^n = a^{m-n}$

Se $a^q = a^{m-n}$, *então* $q = m - n$, *ou seja,* $\log_a M/N = \log_a M - \log_a N$.

Conclusão: Numa mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

Caso particular: $\log_a 1/N = \log_a 1 - \log_a N = 0 - \log_a N = -\log_a N$, *ou seja,*

$\log_a 1/N = -\log_a N$

Observa-se nessa segunda propriedade o cuidado do autor em começar com um exemplo numérico para, em seguida, fazer a prova formal.

3ª propriedade: Logaritmo de uma potência

Observemos que:

$log_2 7^3 = log_2 (7 . 7 . 7) = log_2 7 + log_2 7 + log_2 7 = 3 . log_2 7$

3 parcelas

Então:

$log_2 7^3 = 3 . log_2 7$

Temos mais uma propriedade dos logaritmos, pois se trata de um fato que ocorre para qualquer base e qualquer potência sempre que existam os logaritmos envolvidos.

Demonstração:

Consideramos $log_a M^N = r$ *e* $log_a M = m$.

Daí tiramos: $a^r = M^N$ *e* $a^m = M$.

Então: $a^r = M^N = (a^m)^N = a^{Nm}$

Se $a^r = a^{Nm}$, *então* $r = Nm$, *ou seja,* $log_a M^N = N . log_a M$.

Conclusão: Numa mesma base, o logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

Podemos aplicar essa propriedade no logaritmo de uma raiz (quando existir):

$$\log_a \sqrt[N]{M} = \log_a M^{1/N} = \frac{1}{N}.\log_a M$$

4ª propriedade: mudança de base

Observe

log_4 64 = 3, pois 4^3 = 64;

log_2 64 = 6, pois 2^6 = 64;

log_2 4 = 2, pois 2^2 = 4

Como 3 = 6/2 podemos escrever log_4 64 = (log_2 64) / (log_2 4)

Neste caso dizemos que houve uma mudança de base nos logaritmos, bases 4 e 2, então vamos provar que a relação verificada acontece em geral, isto é, que se tem mais uma propriedade dos logaritmos.

$\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$ *para N > 0, b > 0, a > 0, b ≠ 1 e a ≠ 1.*

Demonstração

Consideramos log_b N = p; log_a N = q e log_a b = r

Daí tiramos: b^p = n; a^q =n e a^r =b; fazendo substituições:

N = a^q = b^p = $(a^r)^p$ = a^{rp}

Se a^q = a^{rp} então q = rp e daí p = q/r ou $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

Conclusão: Para escrever o log_b N usando logaritmos na base a, realizamos a mudança de base:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

As quatro demonstrações são similares, bem feitas, de fácil entendimento. O autor poderia ter deixado um pouco mais evidente a diferença entre hipótese e tese. Ao final das propriedades, o autor apresenta uma seção de exercícios resolvidos de aplicação das propriedades de logaritmos.

Num dos exercícios resolvidos (exercício 16 da página 139) é feita uma prova que em muitas coleções é apresentada como propriedade de logaritmos, como veremos a seguir:

16. Prove que, para a Є IR₊, b Є IR*₊, e b ≠ 1, temos* $\log_b a = \log_{b^n} a^n$ *para todo n Є IR. Dê alguns exemplos.*

Resolução:

Consideramos $\log_b a = x$ *e daí tiramos* $b^x = a$.

$b^x = a \rightarrow (b^x)^n = a^n \rightarrow (b^n)^x = a^n \rightarrow \log_b a = \log_{b^n} a^n = x$

$b^x = a \rightarrow (b^x)^n = a^n \rightarrow (b^n)^x = a^n \rightarrow \log_b a = \log_{b^n} a^n = x$

Esta prova é análoga às provas das propriedades e, por esse motivo, acreditamos que os alunos leitores não apresentarão dificuldade para entendê-la. Não concordamos com o uso apenas da tripla implicação, pois o símbolo → relaciona somente duas sentenças matemáticas (p→q). Quando o autor utiliza mais de uma vez a implicação, não sabemos quem é p e q em cada passagem. Esse abuso do uso do símbolo de implicação aparece na grande maioria dos livros brasileiros.

A partir das provas feitas, acreditamos que seria conveniente e oportuno abordar em exercícios propostos tarefas de provas, pois não faltaria inspiração aos alunos.

Na nossa concepção de não provar o óbvio e também de não demonstrar algo que seria incompreensível, os logaritmos são um dos temas em que, com o uso da definição e conhecimento da álgebra elementar, muito pode ser provado, justificado, mostrado, motivando os alunos a fazer outras provas. Na seqüência do nosso trabalho, apresentaremos uma seqüência de atividades relacionadas com os logaritmos, nos quais poderemos constatar este fato.

Na seqüência do capítulo, o autor apresenta algumas aplicações dos logaritmos em química, no cálculo de pH de soluções, e incentiva o uso de calculadoras dando uma pequena explicação de como proceder com este instrumento. Uma observação interessante feita pelo autor em relação ao emprego de calculadoras diz respeito à base que é utilizada. Ele menciona que existem calculadoras com a tecla **ln** que são logaritmos naturais, em que sua base é o número irracional **e**, que tem valor aproximado de 2,7182818284.

Na seção de exercícios propostos existe uma mescla entre exercícios de aplicações e exercícios com uso de calculadora.

O autor inicia o capítulo com um problema cuja resolução é feita por meio de uma equação exponencial de difícil solução, justificando, assim, a necessidade dos logaritmos. Ele retoma a aplicação dos logaritmos na resolução de equações exponenciais e em alguns problemas. Novamente os problemas de química são enfatizados, além de outras áreas, principalmente problemas financeiros.

Como foi constatado, o autor incentiva o uso de calculadoras no lugar das tabelas de logaritmos, que não fazem o menor sentido nos dias atuais pela facilidade que os alunos têm em utilizar essas máquinas de calcular, que podem ser muito úteis para fazer experimentações, conjecturar, ter algum tipo de argumento para validar um certo resultado.

Funções Logarítmicas

O autor inicia o estudo das funções logarítmicas fazendo uma breve recapitulação da função exponencial, argumentando que este tipo de função possui uma função inversa. O autor não prova que a função exponencial $f: IR \rightarrow IR^*_+$ $f(x)=a^x$ é bijetora, o que garante a existência de sua função inversa. A nosso ver, seria interessante fazer tal prova ou sugerir ao leitor que a fizesse, pois, como o tema funções já fora estudado no capítulo 3 do volume 1, seria uma boa oportunidade para os alunos retomarem esse tópico.

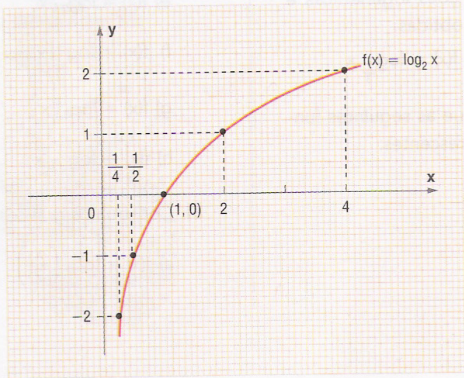
Na definição de função logarítmica o autor utiliza os mesmos argumentos usados para garantir que a função exponencial $f(x)=a^x$ possui uma função inversa, mostrando que sua inversa é a função $g(x)=\log_a x$. Por meio de tabelas é construído o gráfico da função $f(x)=\log_a x$, para uma base maior que um (ele usa a base dois) e para uma base entre zero e um (é utilizada a base meio). Após a construção desses gráficos, são apresentadas algumas conclusões, conforme seguem:

Gráfico da função logarítmica

Observe os seguintes gráficos de função logarítmica:

$f(x) = \log_2 x$

x	y = f(x)
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2

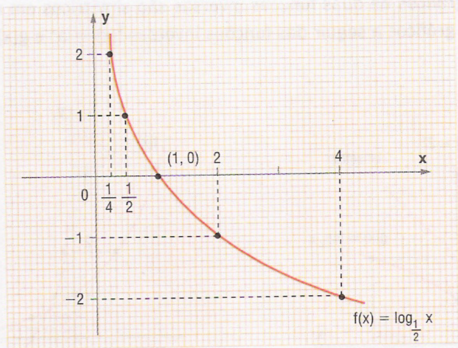


Para Refletir

Os gráficos de $y = \log_a x$ e $y = \log_b x$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer, têm o mesmo aspecto dos gráficos ao lado, respectivamente.

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	y = f(x)
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2



Como conseqüência da definição de função logarítmica e da análise dos gráficos, podemos concluir que:

- o gráfico da função logarítmica passa pelo ponto (1, 0), ou seja, $f(1) = 0$, ou, ainda, $\log_a 1 = 0$;
- o gráfico nunca toca o eixo **y** e não ocupa pontos dos quadrantes II e III;
- quando $a > 1$, a função logarítmica é crescente ($x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$);
- quando $0 < a < 1$, a função logarítmica é decrescente ($x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$);
- somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \to a^x$ assume somente valores positivos;
- se $a > 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo positivo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo;
- se $0 < a < 1$, os números maiores do que 1 têm logaritmo negativo e os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo positivo;
- a função logarítmica é ilimitada, superior e inferiormente.
  No caso de $a > 1$ ser ilimitada superiormente significa que se pode dar a $\log_a x$ um valor tão grande quanto se queira, desde que tomemos **x** suficientemente grande;
- ao contrário da função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 1$, que cresce rapidamente, a função logarítmica $\log_a x$ com $a > 1$ cresce muito lentamente. Veja, por exemplo, que, se $\log_{10} x = 1\,000$, então $x = 10^{1\,000}$. Assim, se quisermos que $\log_{10} x$ seja maior do que 1 000, será preciso tomar um número **x** que tenha pelo menos 1 001 algarismos;
- a função logarítmica é injetiva, pois números positivos diferentes têm logaritmos diferentes. Ela é também sobrejetiva, pois, dado qualquer número real **b**, existe sempre um único número real positivo **x** tal que $\log_a x = b$. Portanto, ela é bijetiva (há uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$).

Para Refletir

No caso de $a > 1$, o que significa ser ilimitada inferiormente?

No capítulo seguinte, o autor prova que duas funções logarítmicas quaisquer são sempre proporcionais. Analisemos esta prova:

Duas funções logarítmicas quaisquer são sempre proporcionais.

Demonstração:

Dadas as funções logarítmicas f(x) = $\log_a x$ e g(x) = $\log_b x$, temos que, $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\log_b x}{\log_a x} = \log_a b$ *, isto é, g(x) = $\log_a b$. f(x) → g(x) = k. f(x)*

↓
K

Logo, a constante de proporcionalidade é dada por k = $\log_a b$.

Observação: Essa propriedade explica por que, dados a e b positivos e diferentes de 1, os gráficos de $\log_a x$ e $\log_b x$ são obtidos, um a partir do outro, multiplicando todas as ordenadas por uma constante.

Novamente ocorre a falta de clareza entre hipótese e tese. Julgamos conveniente citar para os alunos leitores do livro que propriedade foi utilizada na passagem de $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\log_b x}{\log_a x} = \log_a b$. Pensamos que a falta de justificativa dessa passagem pode atrapalhar o entendimento da propriedade.

Equações Logarítmicas

O autor inicia as resoluções das equações logarítmicas com alguns exercícios resolvidos, tentando variar os tipos de equações. Em todas as resoluções do autor fica bem evidente a importância que é dada à condição de existência da equação e para a verificação da solução obtida. Nos exercícios propostos não constatamos nenhuma tarefa com teor de prova.

Inequações Logarítmicas

Da mesma forma que faz com as equações, o autor inicia este tópico com alguns exercícios resolvidos e uma breve revisão sobre função logarítmica crescente e decrescente. Nos exercícios propostos não há nenhum tipo de tarefa relacionada à prova.

Ressaltamos ainda que o número significativo de exercícios resolvidos e propostos de aplicações comprova a importância deste tema em várias ciências (Biologia, Química, Economia).

Lamentamos apenas a falta de exercícios resolvidos e propostos que exijam provas. A única atividade correlata foi um exercício na página 157, exercício 110, para mostrar um resultado.

Mostre que uma substância radioativa que decai exponencialmente de acordo com a fórmula $m(t)=m_0e^{-kt}$ *tem meia vida igual à (ln2)/k.*

No final do capítulo encontramos um breve texto sobre a história dos logaritmos, em que a idéia central é o desenvolvimento dos logaritmos para facilitar cálculos em astronomia e navegação. Outros textos concernentes aos logaritmos são apresentados aos alunos: a lei de Weber e as escalas de Fechner mostram aplicações dos logaritmos em fisiologia e na medida da intensidade de um terremoto (escala Richter). Verifica-se igualmente o uso dos logaritmos na informática e no cálculo da área a partir do gráfico da função f(x)=1/x.

No restante do livro, constatamos o uso dos logaritmos apenas no capítulo 12 do volume 2, em dois exercícios propostos de cálculos de determinantes (exercício 1, página 229, e exercício 8, página 230) .

Síntese de nossa análise

O autor apresentou toda a teoria de logaritmos em apenas um capítulo (capítulo 8 do volume 2), incluindo função logarítmica, a qual foi retomada raríssimas vezes ao longo do livro. Na edição anterior da mesma coleção esses tópicos eram introduzidos em dois capítulos. Somos amplamente favoráveis ao estudo de um tópico matemático em espiral. Acreditamos que essa repetição em diferentes níveis de profundidade garantirá uma aprendizagem genuína.

Apreciamos muito a introdução do autor ao tema, pois, a partir de um problema populacional, cuja resolução consiste em resolver uma equação exponencial de difícil solução, o autor mostra a necessidade dos logaritmos para transformar uma equação exponencial numa igualdade de potências de mesma base.

A distribuição do conteúdo no capítulo apresenta sempre a mesma forma, teoria, justificativa ou demonstração, exercícios resolvidos e exercícios propostos.

Dentro do próprio capítulo há uma boa articulação entre os tópicos, mas não encontramos articulações significativas no restante da coleção (apenas um exercício no capítulo de determinantes). Um ponto que merece destaque no livro é a presença de exercícios em diferentes áreas do conhecimento, tais como economia, química, biologia, mostrando aos alunos a importância desse tema nos dias atuais.

Em relação às provas, as propriedades de logaritmos foram todas demonstradas. Constatamos a falta de exercícios que levem os alunos a conjecturar e de exercícios que convidem os alunos a dar justificativas para os seus resultados. Julgamos que seria uma boa oportunidade de introduzir os alunos ao pensamento dedutivo.

A função logarítmica foi apresentada como a função inversa da função exponencial, denotando assim uma preocupação do autor em articular esse conhecimento com outros tópicos da Matemática. No final do capítulo, num tópico intitulado Leituras, o autor retoma a idéia de a função logarítmica ser a função inversa da função exponencial e mostra a importância dessa relação em Análise Matemática. No mesmo tópico Leituras, o autor faz referência ao processo histórico de desenvolvimento dos logaritmos por Napier, inserindo, assim, tópicos da história da Matemática na sala de aula.

CAPÍTULO 4
SUJEITOS, MÉTODO E MATERIAL

4.1 Introdução

A partir da análise da coleção analisada, elaboramos uma seqüência didática de atividades para verificar as dificuldades que os alunos apresentam quando submetidos a um processo de argumentação e prova.

4.2 Caracterização dos sujeitos

A seqüência didática foi aplicada a quatro alunos da primeira série do Ensino Médio, de uma escola privada localizada na zona norte da cidade de São Paulo. A idade destes alunos varia entre 14 e 15 anos e eles são de turmas diferentes. A carga horária de Matemática nesta escola é de cinco aulas semanais, sendo duas destinadas à geometria e três à álgebra, com professores distintos. A programação de álgebra consiste numa breve revisão de razão e proporção, regra de três simples e composta e porcentagem. Para abordar esses tópicos não se utiliza o livro didático, e sim listas de exercícios feitas pelos professores e coordenador de exatas do colégio. Os demais tópicos são: conjuntos numéricos; função; função afim; função quadrática; composição de funções; funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras; função inversa; função exponencial e logaritmos e função logarítmica, tópicos estes estudados com o livro didático. A escola adota como livro didático de Matemática a coleção *Matemática ciência e aplicações*, volumes 1, 2 e 3 do autor Gelson Iezzi e outros. No primeiro ano do Ensino Médio os alunos usam concomitantemente os volumes 1 (álgebra) e 2 (geometria). Os tópicos função exponencial, logaritmos e função logarítmica, estudados na primeira série, são apresentados no volume 1 da coleção.

A seqüência foi aplicada no dia 12 dezembro de 2006., Nessa data a escola já se encontrava em período de recuperação final, portanto esses alunos já haviam estudado logaritmos e dois deles fariam a recuperação de Matemática.

4.3 Procedimentos metodológicos

O objetivo principal desta pesquisa é investigar como as provas são abordadas numa coleção de livros didáticos e conceber e aplicar uma seqüência didática para introduzir o aluno ao pensamento matemático dedutivo.

A partir destes propósitos, procuraremos responder às seguintes questões:

1) Como o autor de livros didáticos aborda o processo de prova em relação ao tema "logaritmo" na sua coleção? Os alunos leitores são estimulados a realizar provas em atividades propostas?

2) Quais dificuldades os alunos do Ensino Médio apresentam durante um processo de produção de provas?

Para responder à primeira questão, procedemos a uma análise no capítulo 3 da abordagem conferida às provas na coleção de Matemática do Ensino Médio, do autor Luiz Roberto Dante. Para a segunda questão, elaboramos e aplicamos uma seqüência didática com a intenção de introduzir o aluno ao pensamento dedutivo. O estudo dessa parte experimental se apoiará em alguns elementos da metodologia de pesquisa denominada engenharia didática.

Segundo Artigue (1996), a engenharia didática se caracteriza por ser um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e análise de seqüências didáticas. Uma engenharia didática é constituída por quatros fases: análise preliminar, concepção das atividades, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Faremos uma breve descrição de cada uma das fases:

- Análise preliminar: Escolhido o objetivo de estudo e levando em conta as finalidades específicas de pesquisa, as análises preliminares se apóiam, entre outras coisas, no estudo de propostas curriculares, programas e livros didáticos, na verificação do funcionamento do ensino atual e de seus efeitos, e nas concepções dos alunos.
- Análise *a priori*: É uma análise matemática das atividades, com seus objetivos, estratégias dos alunos e possíveis dificuldades esperadas por estes.
- Experimentação: Trata-se do planejamento e da execução da seqüência de atividades e da observação das produções dos alunos.
- Análise *a posteriori*: É a interpretação das informações extraídas da experimentação e da seqüência de ensino, que levam a validar ou não as questões da pesquisa.

4.4 Material

Todas as etapas da organização da experimentação foram elaboradas e apresentadas aos alunos sob a forma de material impresso (Anexo). Os quatro alunos foram separados em duas duplas. A seqüência de atividades foi dividida em duas etapas: na primeira os alunos trabalharam em duplas e na segunda, individualmente.

Na primeira parte das atividades, a resolução dos exercícios da seqüência foi registrada por um aluno de cada dupla. Na segunda parte, cada aluno respondeu individualmente as questões propostas.

Desta forma, o material de que dispomos para a análise do trabalho dos alunos consiste em: material impresso de todas as atividades resolvidas e as anotações que realizamos durante a aplicação da seqüência.

4.5 Concepção e análise *a priori* das atividades

Esta seqüência didática tem como objetivo introduzir os alunos ao pensamento matemático dedutivo. Deseja-se verificar o tipo de validação desenvolvida em cada uma das atividades propostas. A primeira atividade consiste na manipulação da definição de logaritmo. Nosso objetivo é familiarizar os alunos com seu uso e também estabelecer relações entre informações e resultados obtidos, fato esse útil em futuras provas. Na segunda atividade, os alunos usam calculadora para verificar resultados. Neste caso, espera-se uma validação do tipo empirismo ingênuo e experiência crucial. A terceira atividade consiste na análise de uma seqüência de argumentos até sua conclusão. Essas três primeiras atividades são realizadas em duplas. Na quarta atividade, o aluno, individualmente, deve responder sobre a veracidade de uma afirmação, e nesse caso não terá nenhum tipo de auxílio. Na atividade quinta, os alunos devem mostrar que um resultado é verdadeiro, a partir de informações dadas. A atividade sexta consiste na prova de duas propriedades dos logaritmos, na qual se espera uma validação do tipo experiência mental.

A seqüência didática organizada e aplicada se apóia somente na definição de logaritmos e das propriedades de potências e raízes e no uso de calculadora.

Análise *a priori* da seqüência didática

A análise *a priori* é uma análise teórica independente de toda realização particular da situação proposta. Trata-se de esclarecer o que pode acontecer com os saberes em jogo quando a situação é posta em funcionamento. Alguns elementos de uma análise *a priori* são: objetivo da atividade, análise dos conhecimentos necessários para a resolução da atividade (o que o aluno precisa saber para resolver o problema?), conhecimentos suscetíveis de serem apropriados para posterior uso em outras atividades (o que o aluno precisa reter para utilizar em outras atividades?), possíveis estratégias esperadas dos alunos na resolução da atividade, possíveis dificuldades que os alunos terão na resolução da atividade, coerência das ligações entre cada uma das atividades, quadros matemáticos e registros de representação utilizados, tipos de ajuda que serão dadas ao aluno caso ele fique bloqueado na resolução. Que tipo de controle terá sobre a sua ação?

Apresentamos alguns elementos de uma análise *a priori* da seqüência de atividades.

Atividade 1: Sabendo que $\log_{10} 2 = a$ e $\log_{10} 3 = b$, obter, usando somente a definição de logaritmos:

a) $\log_{10} 4$ b) $\log_{10} 6$ c) $\log_{10} 5$

Análise da atividade

O objetivo desta atividade é fazer o aluno familiarizar-se com a definição de logaritmos. Constatamos que muitos exercícios de livros didáticos podem ser resolvidos apenas com o uso da definição e das propriedades de potenciação.

Vejamos as resoluções possíveis.

a) $\log_{10} 4 = x$, pela definição de logaritmos vem, $10^x = 4$ (1), usando a informação $\log_{10} 2 = a$, obtemos, $10^a = 2$, fatorando o 4 temos 4=2.2, portanto substituindo em (1) vem $10^x = 10^a.10^a$, pela propriedade de potência $a^m.a^n = a^{m+n}$, chegamos a $10^x = 10^{a+a}$, $10^x = 10^{2a}$ como a função exponencial f(x)=a^x é injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, logo x=2.a.

Nesta atividade acreditamos que a dificuldade do aluno será na comparação e relação que devem ser feitas entre os dados e o logaritmo que ele deve obter. Tal relação fica evidenciada apenas após o uso da definição de logaritmo.

b) $\log_{10} 6 = x$, pela definição de logaritmos vem, $10^x = 6$ (1), usando a informação $\log_{10} 3 = b$, obtemos, $10^b = 3$ e como visto no item anterior $10^a = 2$, fatorando o 6 temos 6=2.3, portanto substituindo em (1) vem $10^x = 10^a.10^b$, pela propriedade de potência $a^m.a^n = a^{m+n}$, chegamos a $10^x = 10^{a+b}$ como a função exponencial f(x)=a^x é injetora, podemos concluir que x= a+b.

Após o item (a) desta atividade, acreditamos que não será encontrada nenhuma dificuldade, pois a situação é análoga e facilmente será percebida a relação entre os dados e o logaritmo obtido depois do uso da definição.

c) $\log_{10} 5 = x$ pela definição de logaritmos vem, $10^x = 5$ (1), como $5 = \frac{10}{2}$, usando a informação $10^a = 2$, vamos substituir em (1), vem $10^x = \frac{10}{2}$, portanto $10^x = \frac{10}{10^a}$, pela propriedade de potência $a^m : a^n = a^{m-n}$, chegamos a $10^x = 10^{1-a}$ como a função exponencial f(x)=a^x é injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, logo x=1-a. Qualquer outro modo de escrever o 5 cairia no caso acima. A grande dificuldade nesse item é perceber a necessidade da substituição $5=\frac{10}{2}$. Acreditamos que a estratégia a ser usada pelos alunos nesta atividade será a mesma das anteriores. Os alunos poderão se deparar com a seguinte indagação:

Como $10^x = 5 = 2+3$, $10^a = 2$ e $10^b = 3$, então $10^x = 10^a + 10^b$. Qual propriedade de potência pode ser usada para agrupar estas potências?

Como não existe propriedade de potência para soma, supomos que haverá uma grande dificuldade até perceberem que o único caminho é escrever o 5 como quociente entre 10 e 2.

Atividade 2: Com o uso da calculadora, responda V(verdadeiro) ou F(falso) cada sentença:

a) $\log_{10}(3.4) = \log_{10} 3 + \log_{10} 4$

c) $\log_{10}\left(\frac{20}{10}\right) = \log_{10} 20 - \log_{10} 10$

b) $\log_{10} 5 . \log_{10} 5 = \log_{10} 5 + \log_{10} 5$

d) $\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 4} = \log_{10} 8 - \log_{10} 4$

Análise da atividade

O objetivo desta atividade consiste na validação de sentenças matemáticas usando como recurso a calculadora, um instrumento tecnológico comum ao cotidiano dos alunos para a realização de operações matemáticas. O uso de calculadoras no ambiente escolar encontra muitas restrições por parte dos professores, que julgam inibir o raciocínio dos educandos. A utilização adequada desse instrumento pode ser muito útil em preliminares de validações, fazendo com que os alunos levantem hipóteses sobre alguns resultados, encorajando-os a fazer conjecturas pela confiança nos resultados obtidos. Dessa forma, espera-se uma validação do tipo empirismo ingênuo ou experiência crucial. Para essa tarefa foram empregadas calculadoras científicas que possuíam a função log. Nesse tipo de calculadora aparecem logaritmos com dois tipos de bases, base 10 e base e (e=2,71828... número irracional). Optamos pela utilização dos logaritmos de base 10 em função da familiarização que os alunos têm com este número.

a) $\log_{10}(3.4) = \log_{10} 3 + \log_{10} 4$

$\log_{10}(3.4) = \log_{10} 12$ usando a calculadora obtemos o valor 1,079 (restringindo a três casas decimais). Optamos em usar três casas decimais, pois muitas atividades do cotidiano e também valores matemáticos (tabela trigonométrica, tabela de logaritmos, valor do "pi") utilizam números com três casas decimais.

Entretanto, sabemos que o uso de calculadoras está associado a processos aproximados e isso pode causar dúvida sobre os valores encontrados pelos alunos.

$\log_{10} 3 = 0{,}477$ e $\log_{10} 4 = 0{,}602$, portanto temos, 0,477+0,602=1,079

Conclusão: a sentença é verdadeira.

Este resultado poderá ser considerado verdadeiro para alguns alunos e falso para outros, em virtude das aproximações que as calculadoras fazem.

b) $\log_{10} 5 \,.\log_{10} 5 = \log_{10} 5 + \log_{10} 5$

Usando a calculadora obtemos $\log_{10} 5 = 0{,}698$, portanto temos 0,698.0,698=0,487 e 0,698+0,698=1,396.

Conclusão: a sentença é falsa.

Neste caso, mesmo com as aproximações feitas pelas calculadoras, o resultado obtido é falso e acreditamos que não haverá divergência.

c) $\log_{10}\left(\frac{20}{10}\right) = \log_{10} 20 - \log_{10} 10$

$\log_{10}\left(\frac{20}{10}\right) = \log_{10} 2$,usando a calculadora obtemos o valor 0,301

$\log_{10} 20$=1,301 e $\log_{10} 10$=1, então 1,301-1=0,301

Conclusão: a sentença é verdadeira.

Novamente este resultado pode ser duvidoso para alguns alunos em razão da aproximação que a calculadora realizou.

d) $\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 4} = \log_{10} 8 - \log_{10} 4$

Usando a calculadora obtemos, $\log_{10} 8$=0,903 e $\log_{10} 4$=0,602 então $\frac{0{,}903}{0{,}602} = 1{,}5$,

e 0,903-0,602=0,301

Conclusão: a sentença é falsa.

Acreditamos que nessa tarefa não haverá nenhuma dúvida sobre o resultado obtido.

Concordamos que as calculadoras são úteis para levantar hipóteses, investigar propriedades matemáticas, mas insuficientes para formalizar e concluir sobre a veracidade de um teorema.

Atividade 3: Um aluno do Ensino Médio, com o objetivo de obter propriedades de logaritmos, fez a seguinte análise:

1) $\log_{10} 100 . \log_{10} 100 = \log_{10} 100 + \log_{10} 100$

Pois, $\log_{10} 100 = x$, pela definição temos $10^x = 100$, então $10^x = 10^2$ portanto x=2

Como 2.2=2+2 , conclusão : $\log_b a . \log_b a = \log_b a + \log_b a$

2) $\dfrac{\log_2 16}{\log_2 4} = \log_2 16 - \log_2 4$

Pois, $\log_2 16 = x$, pela definição temos $2^x = 16$, então $2^x = 2^4$ portanto x=4

$\log_2 4 = y$, pela definição temos $2^y = 4$, então $2^y = 2^2$ portanto y=2

$\dfrac{4}{2} = 4 - 2$, conclusão : $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a x - \log_a y$

Responda:

As propriedades explicitadas pelo aluno são verdadeiras? Justifique.

Análise da atividade

Esta atividade consiste em analisar a veracidade de uma seqüência de afirmações e de uma conclusão.

Pensamos que nessa tarefa os alunos usarão dois tipos de argumentos: uso de contra-exemplo (pois existe uma inspiração da questão anterior) e tentativa algébrica com uso da definição de logaritmos.

Propriedade 1

Uso de contra-exemplo

A conclusão do aluno foi: $\log_b a . \log_b a = \log_b a + \log_b a$

$\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$, portanto, 3.3=3+3 concluímos que 9=6 logo a sentença é falsa.

Existe uma infinidade de contra-exemplos que indicam que a sentença concluída é falsa.

Justificativa algébrica:

$\log_b a \,.\, \log_b a = \log_b a + \log_b a$

$(\log_b a)^2 = 2.\log_b a$, fazendo $\log_b a = k$ temos $k^2 = 2k$, portanto $k^2 - 2k = 0$, encontrando como soluções desta equação k=0 ou k=2.

Então $\log_b a = 0$ pela definição temos $b^0 = a$, como $b^0 = 1$, então $a=1$, ou seja, a expressão será válida para $a=1$.

$\log_b a = 2$ pela definição temos $b^2 = a$ logo será verdadeira nos casos de a ser quadrado de b.

Em razão de existir a veracidade em apenas dois casos, esta propriedade não é válida, pois uma propriedade matemática tem validade para quaisquer valores do seu domínio de definição.

Propriedade 2

Uso de contra-exemplo

A conclusão do aluno foi:

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a x - \log_a y$$

$\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$ e $\log_2 16 = 4$ pois $2^4 = 16$, então 4:3=4-3, temos que 4:3=1.333... e 4-3=1 portanto a propriedade é falsa.

Existe uma infinita quantidade de contra-exemplos que mostram que a sentença concluída é falsa.

Justificativa algébrica:

$\log_a x = p$ e $\log_a y = q$, então temos $\frac{p}{q} = p - q$, ou seja, a sentença será válida somente nos casos em que a diferença entre dois números é igual ao quociente entre estes números, portanto a propriedade é falsa.

Em ambos os itens supomos que a estratégia que os alunos vão utilizar é um contra-exemplo, pois terão muitas dificuldades em justificar algebricamente.

2ª parte – Estas três atividades serão feitas individualmente, usando apenas a definição de logaritmo para responder às questões.

Atividade 4: A sentença $\log_{10} x \, . \, \log_{10} y = \log_{10}(x.y)$, com x >0 e y >0, é verdadeira ou falsa? Justifique.

Análise da atividade

Esta atividade foi apresentada individualmente e seu objetivo é verificar como cada aluno tira suas próprias conclusões diante de uma pergunta sobre a veracidade de uma sentença matemática. Na questão anterior, o aluno tinha todas as etapas da afirmação; nesta, ele precisa, sem nenhum tipo de auxílio, argumentar para fazer tal conclusão.

Consideramos que o caminho mais óbvio a ser seguido pelos estudantes deve ser o uso de contra-exemplo, pois, pela experiência das tarefas anteriores, sentenças falsas são mais passíveis de verificação utilizando esta técnica.

Contra-exemplo:

Consideremos X=10 e y=100, então temos $\log_{10}10.\log_{10}100 = \log_{10}100.10$.

Pela definição vem $\log_{10}10 = a$, portanto $10^a = 10$, conclusão a=1.

Analogamente $\log_{10}100 = b$, portanto $10^b = 10^2$, conclusão, b=2.

Por fim temos $\log_{10}100.10 = c$, portanto $10^c = 10^3$, conclusão c=3.

Então temos a.b=c, como vimos 1.2=3, logo a sentença é falsa.

Estratégia algébrica

Pela definição temos:

$\log_{10}x = a$, então $10^a = x$ (1)

$\log_{10}y = b$, então $10^b = y$ (2)

$\log_{10}x.y = c$, então $10^c = x.y$ (3)

Substituindo (1) e (2) em (3) temos $10^c = 10^a.10^b$, portanto $10^c = 10^{a+b}$, logo c=a+b.

Como a.b=c temos que a.b=a+b, logo a sentença terá validade somente em alguns casos em que o produto é igual à soma; então é falsa.

Consideramos que a justificativa algébrica é um caminho muito difícil para os alunos. Acreditamos que os alunos concluirão que a proposição é falsa, utilizando vários exemplos numéricos.

Atividade 5: Sabendo que $\log_{10}(2.a) = p$ e $\log_{10}(5.a) = q$, mostre que $\log_{10}(2a.5a) = p + q$, com a >0

Análise da atividade

Esta atividade consiste na construção de um argumento sem uso de contra-exemplos ou algum tipo de tentativa numérica, pois não será feito o julgamento da sentença entre verdadeira ou falsa, e sim dever-se-á mostrar sua veracidade.

Pela definição temos:

$\log_{10}(2a) = p$, então, $10^p = 2a$.

$\log_{10}(5a) = q$, então, $10^q = 5a$, multiplicando as potências temos $10^p.10^q = 2a.5a$ logo $10^{p+q} = (2a.5a)$. Portanto, p+q = $\log_{10}$ (2a.5a).

Atividade 6: Supondo que os logaritmos existem, prove que

a) $\log_{10}(a.b) = \log_{10}a + \log_{10}b$

b) $\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10}a - \log_{10}b$

Análise da atividade

Esta atividade consiste na realização de uma prova por meio de uma linguagem matemática, sem o uso de casos particulares, exemplos numéricos.

a) Fazendo $\log_{10}a = x$. $\log_{10}b = y$ e $\log_{10}(a.b) = z$, provemos que z=x+y.

Pela definição temos;

$\log_{10} a = x$, então $10^x = a$

$\log_{10} b = y$, então $10^y = b$

$\log_{10}(a.b) = z$, então $10^z = (a.b)$, portanto $10^z = 10^x.10^y$, pela propriedade de potência $a^m.a^n = a^{m+n}$, temos $10^z = 10^{x+y}$, conclusão z=x+y.

b) Fazendo $\log_{10} a = x$, $\log_{10} b = y$ e $\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = z$, mostremos que z=x-y.

Pela definição temos:

$\log_{10} a = x$, então $10^x = a$

$\log_{10} b = y$, então $10^y = b$

$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = z$, então $10^z = \left(\frac{a}{b}\right)$, portanto $10^z = \frac{10^x}{10^y}$, pela propriedade de potência

$a^m : a^n = a^{m-n}$, temos $10^z = 10^{x-y}$, conclusão z=x-y.

CAPÍTULO 5
EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE *A POSTERIORI*

5.1 Introdução

Neste capítulo descreveremos a experimentação das atividades e faremos a análise *a posteriori* delas. Essa análise nos dará elementos para responder à segunda questão de pesquisa: Quais dificuldades os alunos da primeira série do Ensino Médio apresentam durante um processo de produção de provas?

Apresentaremos a seguir como ocorreu à aplicação da seqüência didática, quais foram nossas expectativas no início da aplicação, como organizamos e coletamos todos os dados. Finalmente, interpretaremos os resultados da experimentação, confrontando com a nossa análise *a priori*, verificando quais objetivos foram alcançados e se as dificuldades com que os alunos se depararam foram superadas.

Atuamos como docente nesta escola, mas nas turmas de primeiro ano de Ensino Médio lecionamos Física (mecânica).

Fizemos o convite a todos os alunos de 1º ano, expondo qual a finalidade da atividade e informando que ela não teria nenhuma influência no aproveitamento escolar. Alguns alunos se interessaram, contudo apenas quatro confirmaram presença e compareceram no dia marcado.

Todos os alunos já haviam estudado logaritmos antes de álgebra no 3º bimestre do referido ano.

5.2 Organização da experimentação

Iniciamos a aplicação da seqüência didática às 14 horas, com uma previsão de duração de 3 horas. As atividades foram realizadas em salas de aulas regulares.

Os alunos foram divididos aleatoriamente em duas duplas para realizarem a primeira parte da seqüência (atividades 1, 2 e 3). Assumimos as funções de pesquisador e professor. Convidamos alguns professores para nos ajudar na observação da seqüência, mas, em virtude dos compromissos e também de o período ser de provas finais, não foi possível essa colaboração.

A dupla 1 foi formada pelos alunos que chamaremos de A e B e a dupla 2, pelos alunos C e D.

Inicialmente foi estipulada uma hora e meia para a realização da primeira parte, mas, se necessário, teriam mais tempo para fazer. Antes de iniciarem as atividades, ficou combinado que eles não poderiam entregá-las em branco; se preciso, algum tipo de ajuda seria dado para executarem as tarefas. Esse auxílio seria fornecido somente após a apresentação de uma estratégia de resolução. As duplas iniciaram efetivamente as atividades às 14 horas e 20 minutos.

A dupla 1 gastou 25 minutos e a dupla 2, 30 minutos, para realizarem a atividade 1. Para a atividade 2, foram distribuídas duas calculadoras científicas, uma para cada dupla. A dupla 1 levou 12 minutos e a dupla 2, 14 minutos, para a efetuação dessa atividade. Na atividade 3, a dupla 1 demorou 15 minutos e a dupla 2, 28 minutos. Após a realização da primeira parte da seqüência, foi feito um intervalo de 15 minutos.

Iniciamos a segunda parte da seqüência didática às 15 horas e 50 minutos, na qual os alunos foram distribuídos individualmente na sala de aula, separados em locais de boa visualização.

Na realização da atividade 4, o tempo gasto pelos alunos foi o seguinte:

ALUNO	TEMPO
A	8 minutos
B	10 minutos
C	10 minutos
D	18 minutos

Ademais, também ficou acertado que as outras atividades só começariam quando todos tivessem terminado.

Para executarem a atividade 5, os alunos levaram o seguinte tempo:

ALUNO	TEMPO
A	10 minutos
B	12 minutos
C	17 minutos
D	22 minutos

A atividade 6 foi realizada no seguintes tempo:

ALUNO	TEMPO
A	12 minutos
B	15 minutos
C	23 minutos
D	34 minutos

5.3 Coleta de dados

Todas as etapas da organização da experimentação foram elaboradas e apresentadas aos alunos sob a forma de material impresso (Anexo).

5.4 Análise *a posteriori* das atividades

A análise *a posteriori* é baseada nos protocolos de observação, em referência à análise *a priori,* e é feita para ligar os fatos observados com os objetos definidos *a priori*, a partir do referencial teórico considerado. Alguns elementos de uma análise *a posteriori* são: apresentação estruturada dos fatos observados, análise didática dos fenômenos observados, análise das dificuldades surgidas e análise da gestão da classe.

Nessa seção, apresentamos a análise *a posteriori* das resoluções dos alunos.

Atividade 1: Sabendo que $\log_{10}2=a$ e $\log_{10}3=b$, obter, usando somente a definição de logaritmos:		
a) $\log_{10}4$	b) $\log_{10}6$	c) $\log_{10}5$

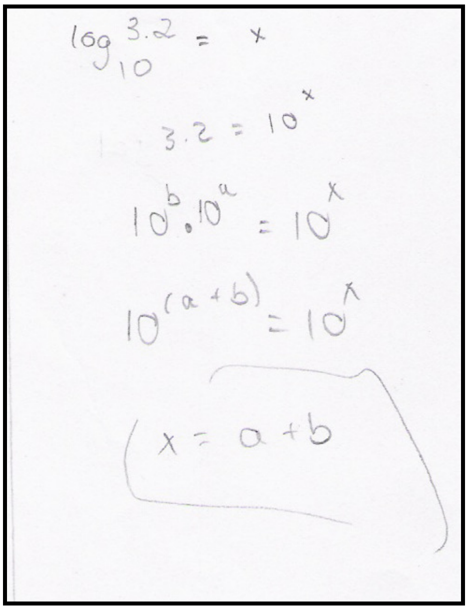
Ao propor esta atividade, nosso objetivo era fazer com que os alunos manipulassem a definição de logaritmos, pois as resoluções foram restritas ao seu uso, e fizessem comparações com alguns dados fornecidos.

Iniciamos a atividade separando as duplas e entregando a primeira folha das atividades.

Dupla 1:

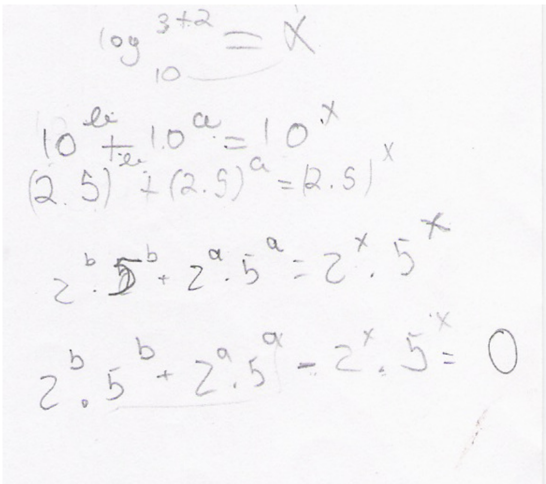
Item (a): A dificuldade inicial foi relacionar os dados com o cálculo pedido, pois eles já conheciam as propriedades de logaritmos, mas não podiam argumentar utilizando-as. O aluno A percebeu a relação existente entre o cálculo pedido e um dos dados ($2^2=4$). Após aplicar a definição de logaritmos em $\log_{10}2=a$ obteve o valor correto sem maiores dificuldades.

Item (b): Após a realização do item a, a dupla não encontrou obstáculos neste item, pois o raciocínio foi análogo ao anterior e os alunos concluíram de forma correta, como podemos constatar a seguir:



Item (c): A dupla utilizou a mesma estratégia dos itens anteriores e deparou-se com uma dificuldade: “qual propriedade de potência para somar potências de mesma base?”. Os alunos obtiveram o seguinte resultado: $\log_{10}5=x$, então $10^x=5$, e, como 5 =2+3, usando os outros dois valores dos logaritmos dados chegaram à conclusão que $10^b+10^a=10^x$.

Primeira estratégia



A dupla solicitou ajuda para saber qual propriedade poderia ser utilizada, e dica dada foi: verifiquem se existe essa propriedade.

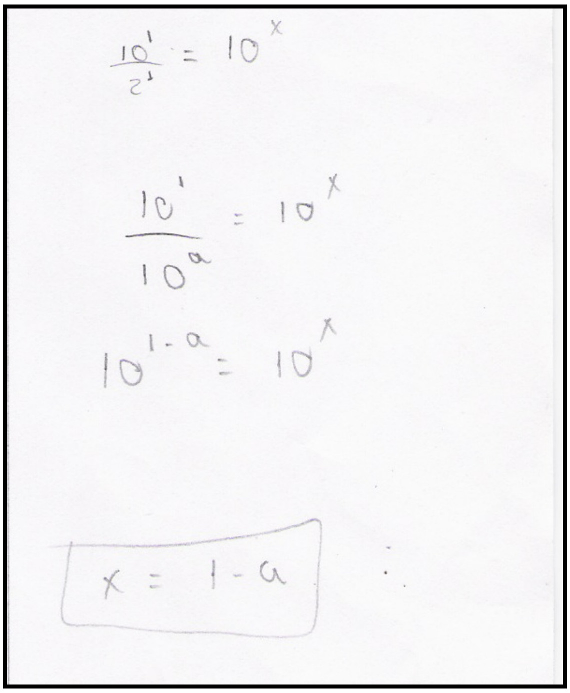
Em nossa análise *a priori* foi previsto que os alunos encontrariam esta dificuldade, o que se constatou. Com o uso de um contra-exemplo eles teriam a possibilidade de verificar se existia a propriedade “soma de potências de mesma base”, porém não pensaram nessa forma de argumentar para validar uma suposta propriedade.

A dupla indagou: “como fazer essa verificação?”.

Foi sugerido que testassem alguns valores numéricos. Segundo Balacheff, a experiência crucial é o nível de prova que, após testar alguns poucos casos, faz chegar a uma conclusão. A dupla fez a verificação com uso de valores numéricos (contra-exemplo) e concluiu que não existia propriedade para adicionar potências de mesma base. Logo, percebeu que teria que usar outra estratégia para obter o resultado pedido. Novamente, os alunos pediram ajuda, e foi sugerido que pensassem numa forma de escrever o número cinco usando apenas os valores dados e sem utilizar a adição. O aluno B indagou: “mas o número cinco é primo, não é possível escrever como produto”.

Ele mesmo percebeu que como produto não seria possível, mas como quociente entre 10 e 2. Após a dupla ter escrito o cinco como quociente entre 10 e 2, chegou-se ao resultado correto.

Segunda estratégia



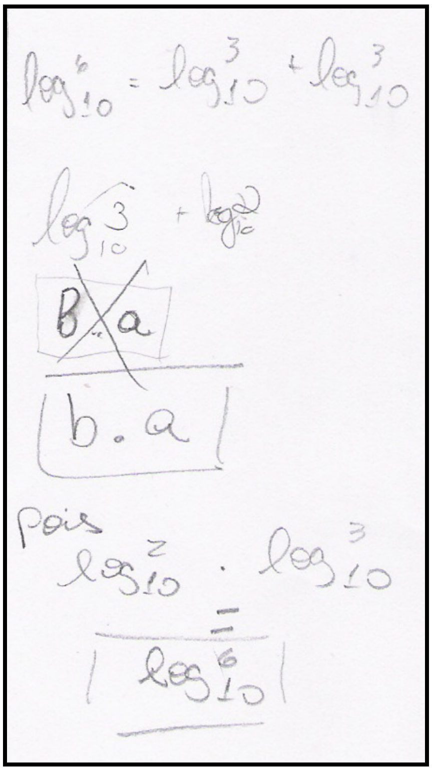
Dupla 2

Item (a): A dificuldade inicial foi a mesma da dupla 1, ou seja, como relacionar os dados com o cálculo pedido, pois inicialmente os alunos utilizaram a propriedade de potência dos logaritmos ($\log_b a^n = n.\log_b a$) e mostraram o resultado obtido. Foi dito aos alunos que não poderiam usar tal propriedade, somente a definição de logaritmos. Podemos constatar que existe uma grande dificuldade para fazer comparações e relacionar dados, habilidades essas fundamentais na construção de provas formais.

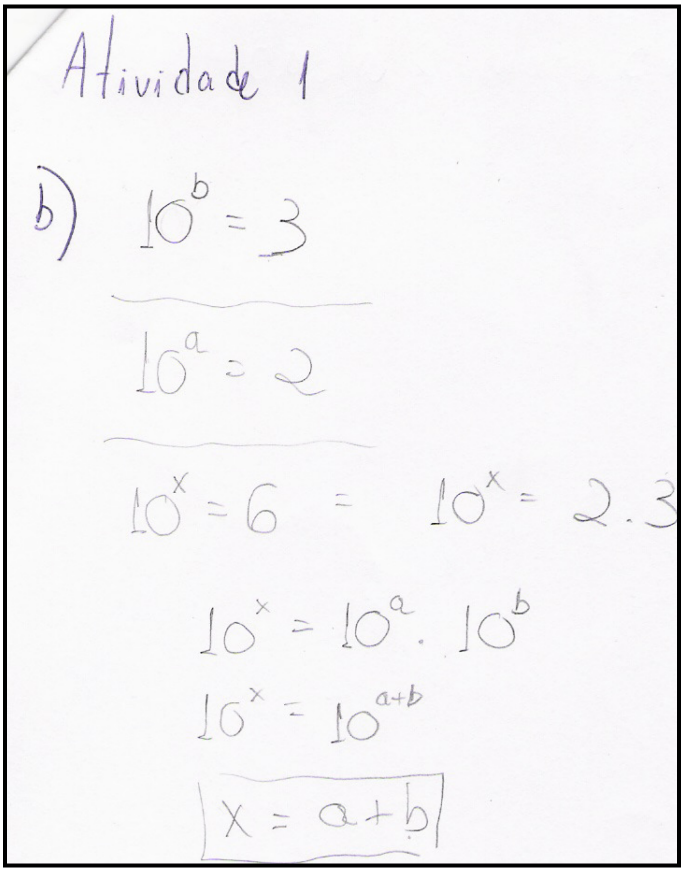
Uma outra sugestão foi dada à dupla: comparar e relacionar os resultados obtidos após aplicar a definição de logaritmos nos dados. Dessa forma, os alunos concluíram facilmente e chegaram ao resultado correto.

Item (b): Novamente a dupla tentou utilizar a propriedade de logaritmos (propriedade do produto), mas aplicaram-na de maneira incorreta, pois escreveram o seis na forma 6=3+3 e se complicaram no uso da propriedade.

Primeira estratégia



A dupla perguntou se a idéia era a mesma do item anterior. Foi sugerido aos alunos que relacionassem o cálculo pedido com os dados do problema. Na segunda tentativa obtiveram de maneira correta o valor pedido.



Atividade 1

b) $10^b = 3$

$10^a = 2$

$10^x = 6 = 10^x = 2.3$

$10^x = 10^a . 10^b$

$10^x = 10^{a+b}$

$\boxed{x = a+b}$

Segunda tentativa

Esta dupla apresentou algumas dificuldades para relacionar e comparar dados. Ela sempre iniciava as atividades tentando fazer uso dessas propriedades. Provavelmente tal dificuldade se deve ao fato de os alunos terem tido conhecimento das propriedades de logaritmos nos meses que precederam a aplicação da seqüência.

Item (c): A dupla utilizou a mesma estratégia do item anterior e encontrou a mesma dificuldade da dupla 1, pois obteve a expressão $10^x=10^a+10^b$.

Primeira estratégia

$$10^x = 5;$$
$$10^x = 3 + 2$$
$$10^x = 10^a + 10^b$$

A própria dupla observou que este não seria o caminho, pois os alunos afirmaram, mesmo sem fazer a verificação, que não existe propriedade para somar potências de mesma base. Essa dificuldade foi prevista em nossa análise *a priori*. Após dar uma sugestão, a dupla percebeu que poderia escrever o número cinco como quociente entre dez e dois e a partir disso fazer relações com os outros resultados obtidos anteriormente.

Segunda estratégia

$$5 = 10/2$$
$$10^x = \frac{10}{2}$$
$$10^x = \frac{10^1}{10^a}$$
$$10^x = 10^{1-a}$$
$$\boxed{x = 1 - a}$$

De um modo geral, as duas duplas atingiram as expectativas propostas nesta atividade, mas necessitaram de auxílio para tal.

Resumimos a participação das duplas na atividade 1 no quadro abaixo:

	ATIVIDADE 1a	ATIVIDADE 1b	ATIVIDADE 1c
Dupla 1	Precisou de ajuda	Não precisou de ajuda	Precisou de ajuda
Dupla 2	Precisou de ajuda	Precisou de ajuda	Precisou de ajuda

Observamos que diante de uma situação nova (situação de prova da atividade 1a) as duplas encontraram dificuldades em iniciar a atividade. Na atividade seguinte, 1b, que era uma repetição da atividade 1, esperávamos que essa dificuldade desaparecesse. No entanto, enquanto a dupla 1 repetiu o mesmo procedimento da atividade 1 com êxito, a dupla 2 continuou com a mesma dificuldade da atividade 1a. A atividade 1c necessitou de uma ajuda substancial para ser completada com êxito.

Atividade 2: Com o uso da calculadora, responda V (verdadeiro) ou F (falso) cada sentença:

a) $\log_{10}(3.4) = \log_{10} 3 + \log_{10} 4$

b) $\log_{10} 5 . \log_{10} 5 = \log_{10} 5 + \log_{10} 5$

c) $\log_{10}\left(\frac{20}{10}\right) = \log_{10} 20 - \log_{10} 10$

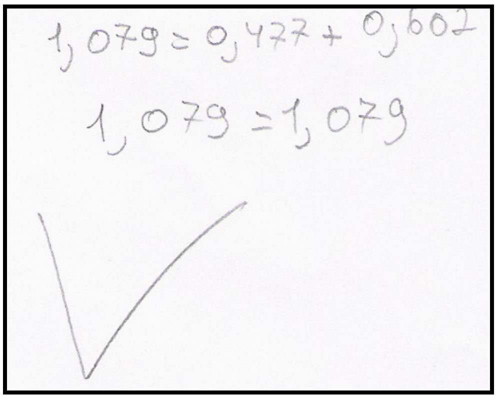
d) $\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 4} = \log_{10} 8 - \log_{10} 4$

O objetivo dessa atividade era validar sentenças matemáticas com uso de valores numéricos. Para isso utilizaram calculadoras que possuem a função “log”. A utilização das propriedades de logaritmos para a verificação não era permitida.

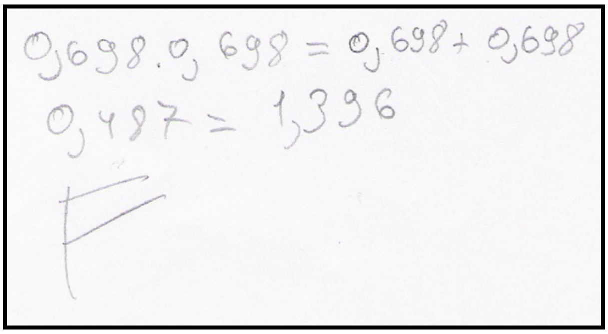
Nesse caso, o tipo de validação esperada era o empirismo ingênuo. Em nossa análise *a priori* previmos que a única dificuldade que os alunos poderiam encontrar seria em relação aos arredondamentos feitos pelas calculadoras.

Dupla 1

Item (a): a dupla não encontrou nenhum tipo de dificuldade, nem com possíveis arredondamentos, e concluiu que a sentença era verdadeira.

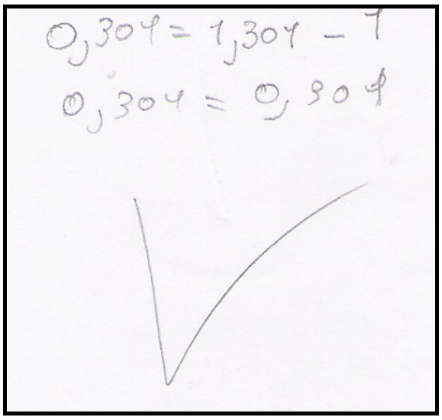


Item (b): novamente a dupla não encontrou dificuldade e concluiu que a sentença era falsa. Mas a dupla indagou sobre possíveis diferenças nos resultados encontrados com o uso da calculadora em relação ao número de casas decimais e concluíram que é mais fácil verificar quando o resultado é falso.

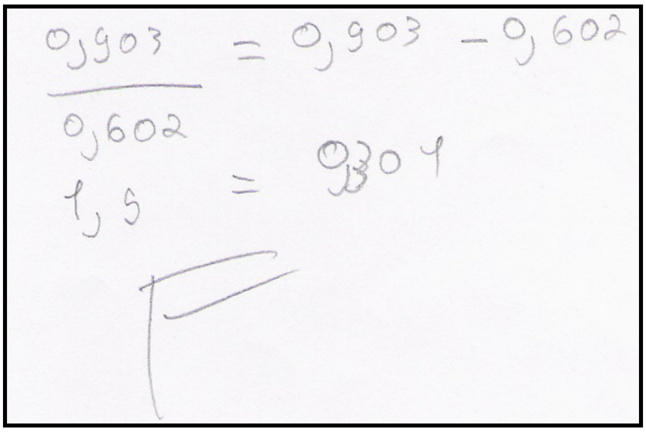


O uso de contra-exemplo não é considerado um tipo de prova, mas uma boa maneira de argumentar sobre a veracidade de um resultado. Muitas vezes este tipo de argumentação não é trabalhado com os alunos em sala de aula, por isso incluímos este tipo de atividade em nossa seqüência didática.

Item (c): a dupla não se deparou com nenhuma dificuldade e concluiu que a sentença era verdadeira.

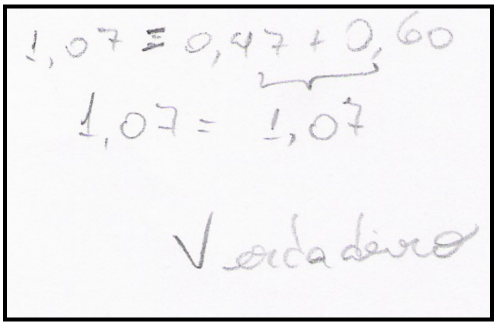


Item (d): novamente a dupla não teve dificuldade em concluir que a sentença era falsa.

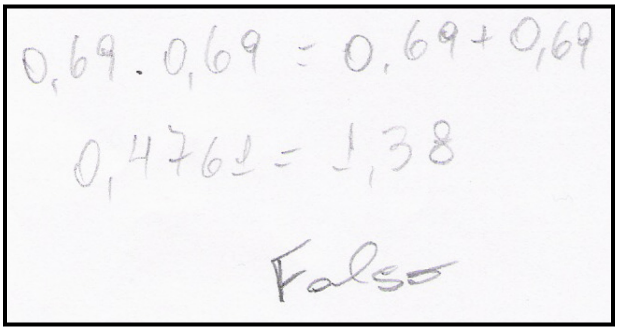


Dupla 2

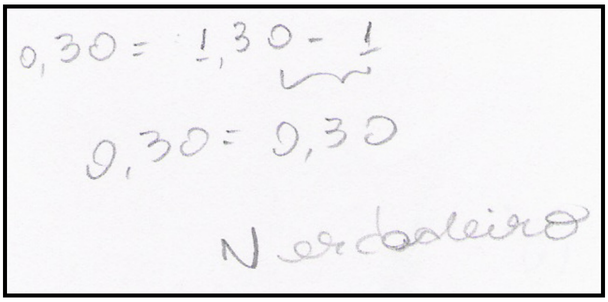
Item (a) a dupla concluiu facilmente que o resultado era verdadeiro sem nenhum tipo de questionamento.



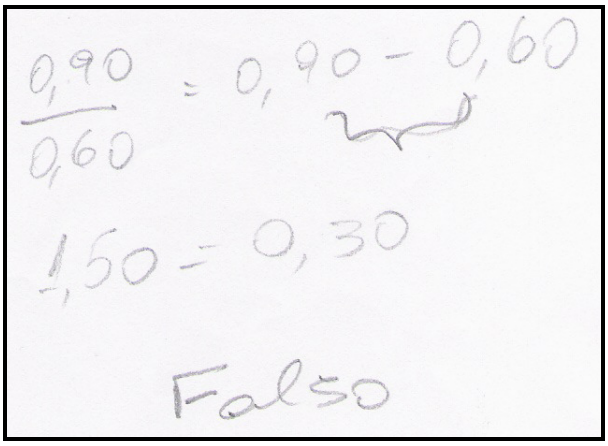
Item b



Item c



Item d



Concluímos que as duas duplas atingiram as expectativas da atividade, em todos os itens.

Atividade 3: Um aluno do Ensino Médio, com o objetivo de obter propriedades de logaritmos, fez a seguinte análise:

2) $\log_{10} 100 \, . \log_{10} 100 = \log_{10} 100 + \log_{10} 100$

Pois, $\log_{10} 100 = x$, pela definição temos $10^x = 100$, então $10^x = 10^2$ portanto x=2

Como 2.2=2+2 , conclusão : $\log_b a \, . \log_b a = \log_b a + \log_b a$

2) $\dfrac{\log_2 16}{\log_2 4} = \log_2 16 - \log_2 4$

Pois, $\log_2 16 = x$, pela definição temos $2^x = 16$, então $2^x = 2^4$ portanto x=4

$\log_2 4 = y$, pela definição temos $2^y = 4$, então $2^y = 2^2$ portanto y=2

$\dfrac{4}{2} = 4 - 2$, conclusão: $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a x - \log_a y$

Responda:

As propriedades explicitadas pelo aluno são verdadeiras? Justifique.

O objetivo desta atividade era fazer com que os alunos analisassem a veracidade de uma seqüência de afirmações e sua conclusão. Em nossa análise *a priori* consideramos que ambas as duplas utilizariam o uso de contra-exemplos. Nessa atividade foi permitido o uso da calculadora.

Dupla 1

A dupla não realizou facilmente essa atividade, pois utilizou um contra-exemplo e concluiu que as sentenças eram falsas.

Não

Prop 1 $\rightarrow \log_3^{27} \cdot \log_3^{27} = \log_3^{27} + \log_3^{27}$

$3 \cdot 3 = 3 + 3$

$9 = 6$ Falso

Prop.2 $\rightarrow \dfrac{\log^{24}}{\log^{11}} = \log^{24} + \log^{11}$

$\dfrac{1,38}{1,044} = 1,38 + 1,044$

$1,325 = 2,424$ Falso

A dupla usou um único contra-exemplo, que foi suficiente para chegar à conclusão. Entretanto, como para alguns valores numéricos poderia achar que uma sentença verdadeira, esse tipo de validação pode ser chamado de empirismo ingênuo e experiência crucial.

Dupla 2

A dupla iniciou a atividade com uma tentativa algébrica. Os alunos tentaram realizar algumas operações e usaram também valores numéricos, mas não chegaram a nenhum tipo de conclusão.

Primeira estratégia

1-) $b^x = a$: $b^2 = a$

$2.2 = 2+2$

$x . x = x + x$

$\log_b b^2$

2.1

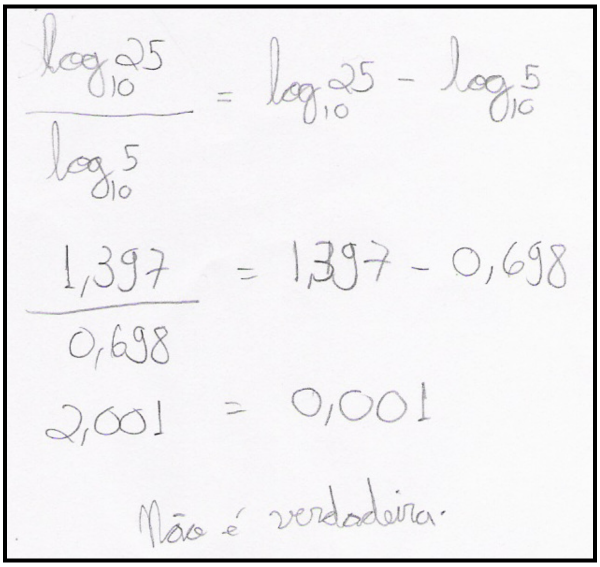
$\log_b a = x$ = $\log_b b^2$

$b^x = a$

$b^2 = a$

Em nossa análise *a priori* foi previsto que seria muito difícil que os alunos concluíssem sobre as sentenças por meio de argumentos algébricos. Eles demoraram a perceber que seria mais fácil usar um contra-exemplo e quais valores numéricos iriam utilizar. A dupla ainda estava de posse da calculadora. Foi sugerido aos alunos que a usassem nas suas experimentações. Após as dicas, calcularam os valores de alguns logaritmos e concluíram a atividade de forma correta.

Segunda Tentativa



$$\frac{\log_{10} 25}{\log_{10} 5} = \log_{10} 25 - \log_{10} 5$$

$$\frac{1,397}{0,698} = 1,397 - 0,698$$

$$2,001 = 0,001$$

Não é verdadeira.

As duplas atingiram os objetivos da atividade, mas a dupla 2 encontrou dificuldades em perceber que o uso de contra-exemplo seria a maneira mais fácil de fazer a conclusão.

Parte 2: Atividades individuais

A segunda parte das atividades foi realizada individualmente. Cada aluno utilizou como recurso as experiências obtidas das atividades anteriores e o conhecimento prévio que adquiriram em sala de aula. Para esse grupo de atividades os alunos podiam usar todo o conhecimento, sem nenhum tipo de restrição, incluindo o uso das calculadoras.

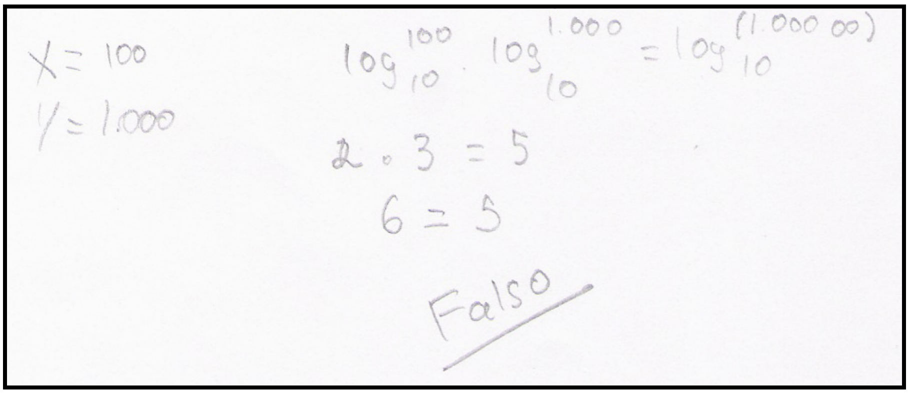
Os alunos estavam mais confiantes nesse bloco de atividades. Foi sugerido o uso de calculadoras para fazer algumas conjecturas.

Atividade 4: A sentença $\log_{10} x \,.\, \log_{10} y = \log_{10}(x.y)$, com x >0 e y >0, é verdadeira ou falsa?Justifique.

O objetivo desta atividade é estimular o aluno na utilização de contra-exemplos.

Aluno A

A estratégia do aluno foi verificar um exemplo numérico, atribuindo valores a x e y.



$X = 100$
$Y = 1.000$

$\log_{10} 100 \,.\, \log_{10} 1.000 = \log_{10} (1.000\,00)$

$2 \cdot 3 = 5$

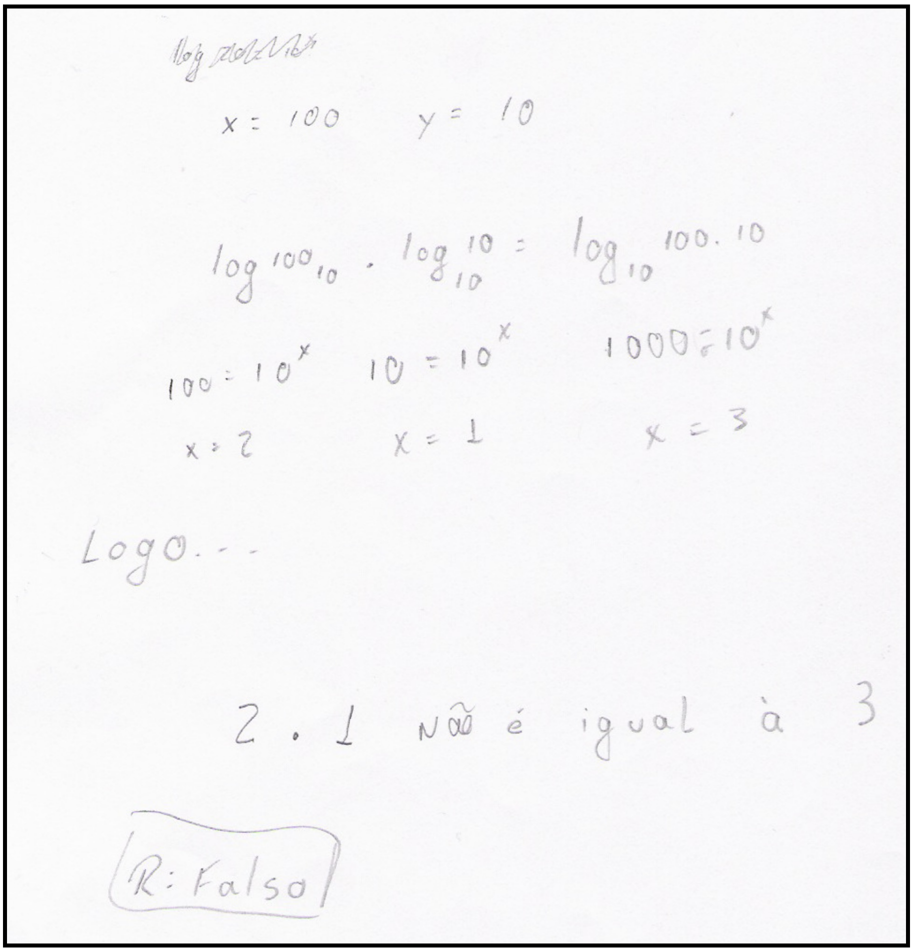
$6 = 5$

Falso

Segundo Balacheff, este tipo de validação é denominado empirismo ingênuo, pois usando apenas um exemplo foi possível chegar a uma conclusão.

Aluno B

A estratégia do aluno foi testar com um exemplo numérico. Acreditamos que a experiência adquirida das atividades anteriores fez com que ele percebesse que provar que uma sentença é falsa é mais fácil que provar que é verdadeira, pois um contra-exemplo já é suficiente para fazer tal conclusão.



Observa-se que a validação do aluno B é do tipo empirismo ingênuo, segundo a tipologia de provas de Balacheff.

Aluno C

A tentativa do aluno foi testar também a sentença com um exemplo numérico. Novamente classificamos este tipo de validação como empirismo ingênuo. Como era permitido o uso da calculadora e os logaritmos eram todos de base dez, a mesma que a calculadora utiliza, o aluno atribuiu valores a **x** e **y** e obteve os respectivos valores com a calculadora, concluindo que a sentença é falsa:

$x = 2$
$y = 4$

$$\log_{10}^{x} \cdot \log_{10}^{y} = \log_{10}^{(x \cdot y)}$$

$$\log_{10}^{2} \cdot \log_{10}^{4} = \log_{10}^{2 \cdot 4}$$

$$0,301 \cdot 0,602 = \log_{10}^{8}$$

$$0,181 = 0,903$$

$\boxed{\text{Falso!}}$

Aluno D

O recurso adotado pelo aluno foi também um exemplo numérico e sem maiores dificuldades concluiu que a sentença era falsa.

$$\log_{10}^{16} \cdot \log_{10}^{4} = \log_{10}^{(16.4)}$$

$$1,204 \,.\, 0,602 = 1,806$$

$$0,724 = 1,806$$

falsa

Conclusão das atividades

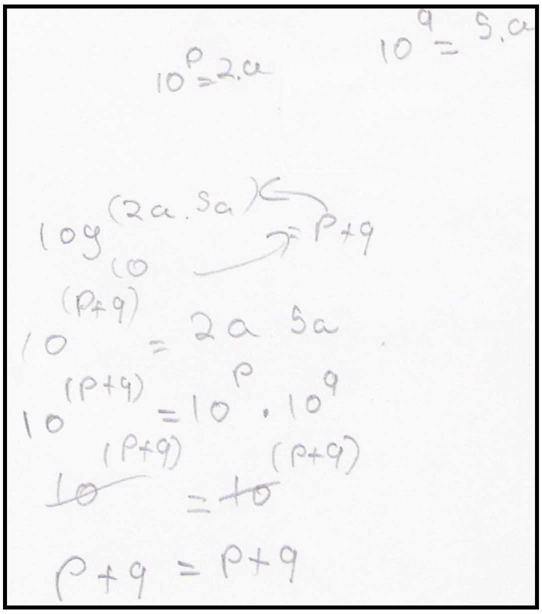
Os quatro alunos concluíram sem dificuldades que a sentença era falsa, como previsto na nossa análise *a priori*. Eles utilizaram como argumentação os exemplos numéricos (contra-exemplo). Esse nível de prova é insuficiente para concluir sobre a veracidade de uma sentença matemática. Entretanto, questões do tipo verdadeiro ou falso, em que é necessário dar algum tipo de justificativa, podem ser bem argumentadas com o uso de exemplos numéricos quando a sentença é falsa. No caso de sentença verdadeira, o próprio aluno perceberá que esse tipo de justificativa é insatisfatório. Segundo Balacheff, a passagem das provas pragmáticas (empirismo ingênuo, experiência crucial e exemplo genérico) a provas intelectuais (experiência mental) é marcada por uma evolução dos meios da linguagem.

Atividade 5: Sabendo que $\log_{10}(2.a) = p$ e $\log_{10}(5.a) = q$, mostre que $\log_{10}(2a.5a) = p + q$, com a >0

O objetivo desta atividade é forçar o aluno a uma solução no ambiente papel e lápis. Mesmo que ele substitua as letras por alguns números, é necessária uma prova para mostrar que a sentença matemática é verdadeira.

Aluno A

O aluno usou muito bem a definição de logaritmos em cada informação. No entanto, numa passagem ele utiliza a tese como hipótese. É um erro muito comum entre alunos. Ele não prova a tese, mas prova que p+q=p+q, o que é uma igualdade óbvia. Mesmo com esse descuido, consideramos que a prova atingiu um nível próximo da experiência mental, segundo a tipologia de Balacheff.


$10^{p} = 2.a$ $\quad 10^{q} = 5.a$

$\log_{10}(2a.5a) = p+q$

$10^{(p+q)} = 2a\ 5a$

$10^{(p+q)} = 10^{p} . 10^{q}$

$\cancel{10}^{(p+q)} = \cancel{10}^{(p+q)}$

$p+q = p+q$

Aluno B

O aluno iniciou a atividade aplicando a definição de logaritmos em cada dado e na sentença. Substituiu os valores encontrados de forma correta na expressão e concluiu satisfatoriamente que a igualdade é verdadeira. Para tanto, não foi solicitado nenhum tipo de ajuda e o aluno adotou sempre uma linguagem matemática sem uso de casos particulares. Classificamos esta validação como experiência mental, de acordo com Balacheff.

$2a = 10^p$ $\quad\quad$ $5a = 10^q$

$2a . 5a = 10^{p+q}$

$2a . 5a = 10^x$

$10^p . 10^q = 10^x$

$\boxed{x = p + q}$

$\boxed{\text{R: Verdadera}}$

Aluno C

O aluno começou a atividade aplicando a definição de logaritmos nos dois dados. Logo após, fez as substituições obtendo a expressão 10^{p+q}=10^p.10^q. O aluno cometeu o mesmo erro do aluno A utilizando a tese como hipótese e provando que p+q=p+q e não que $\log_{10}$(2a.5a)=p+q. Uma dúvida apresentada pelo aluno ao longo da atividade dizia respeito à propriedade de potências (ele não tinha certeza se somava ou multiplicava os expoentes), mesmo já tendo usado esta propriedade nas atividades anteriores.

$$10^p = 2a$$

$$10^q = 5a$$

$$10^{p+q} = 2a \cdot 5a$$

$$10^{p+q} = 10^p \cdot 10^q$$

$$\cancel{10}^{p+q} = \cancel{10}^{p+q}$$

$$\boxed{p+q = p+q}$$

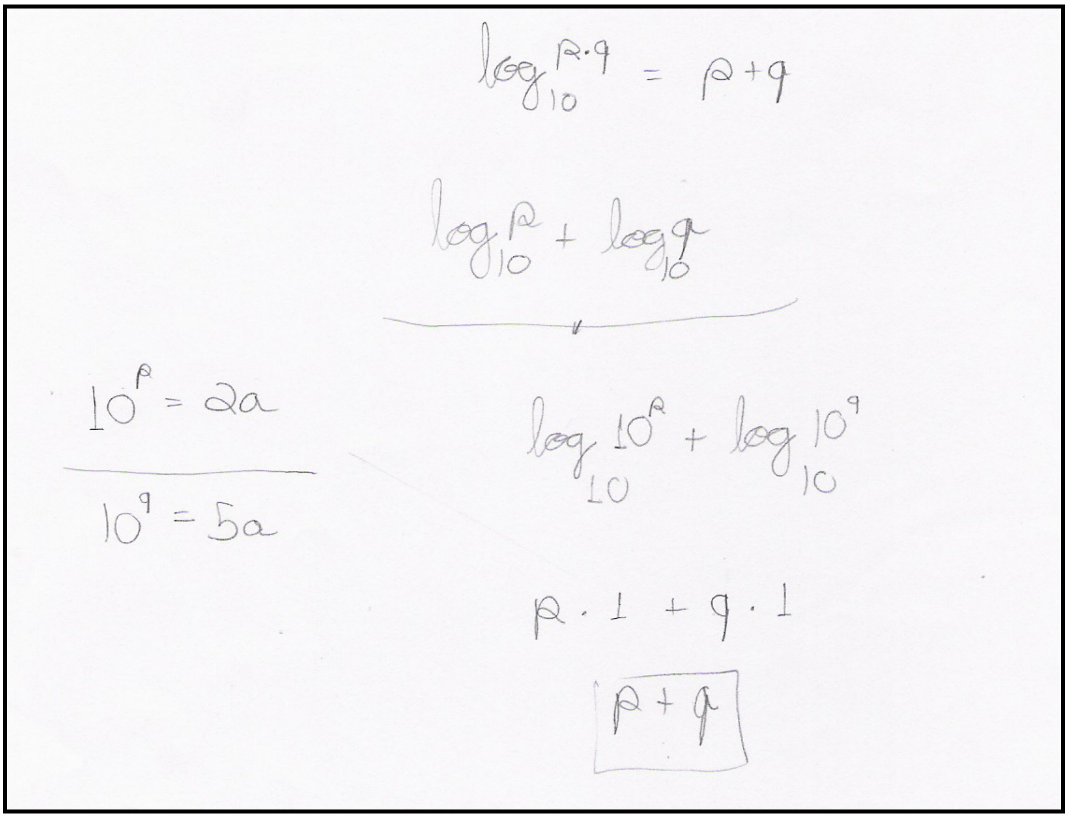
Verdadeiro

A sugestão dada foi dizer a ele que esta propriedade já havia sido utilizada nas atividades anteriores.

Aluno D

O aluno iniciou a atividade com algumas dificuldades, principalmente para relacionar as informações da atividade com a sentença, a qual ele devia mostrar ser verdadeira.

Primeira tentativa



$\log_{10} p \cdot q = p + q$

$\log_{10} p + \log_{10} q$

$10^p = 2a$

$10^q = 5a$

$\log_{10} 10^p + \log_{10} 10^q$

$p \cdot 1 + q \cdot 1$

$\boxed{p + q}$

O aluno precisou de um auxílio. A sugestão fornecida foi observar a sentença com os outros dados e perceber alguma relação existente. O aluno tentou usar propriedades de logaritmos (produto), mas não obteve uma conclusão satisfatória.

Na segunda tentativa ele substituiu 10^p= 2.a e 10^q= 5.a na sentença dada obtendo a expressão $\log_{10}10^{p+q}$= p+q. Aplicando a definição de logaritmos, concluiu que ambos os lados eram iguais; então a sentença é verdadeira.

$\log_{10} 10^p . 10^q$

$\log_{10} 10^{p+q} = p+q$

$10^{p+q} = 10^{p+q}$

$\boxed{p+q = p+q}$

Verdadeiro

Mesmo não obtendo a solução na primeira tentativa, o aluno utilizou uma boa linguagem. Em nenhum momento fez uso de exemplos numéricos. A confusão entre hipótese e tese persiste, mas pode-se afirmar que a validação realizada pelo aluno D é próxima de uma experiência mental.

Conclusão da atividade: três dos quatro alunos nessa atividade confundiram tese com hipótese. Isso denota que há necessidade de trabalhar esses conceitos numa iniciação à aprendizagem da prova.

Atividade 6: Supondo que os logaritmos existem, prove que

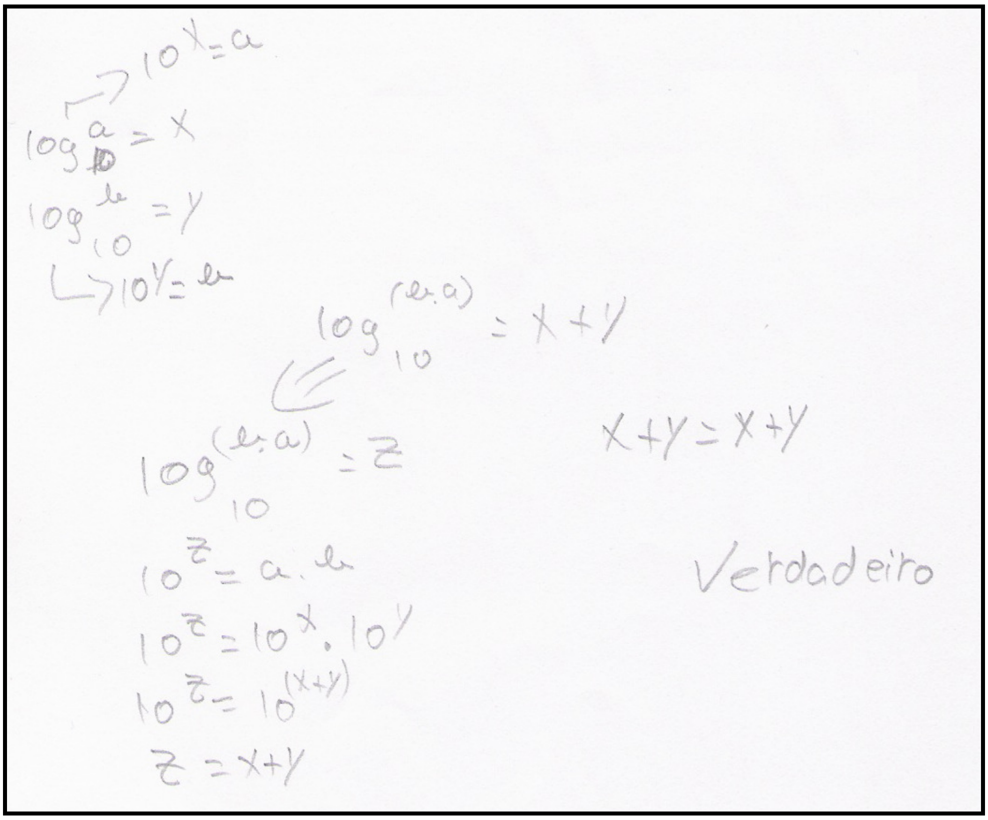
a) $\log_{10}(a.b) = \log_{10}a + \log_{10}b$

b) $\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10}a - \log_{10}b$

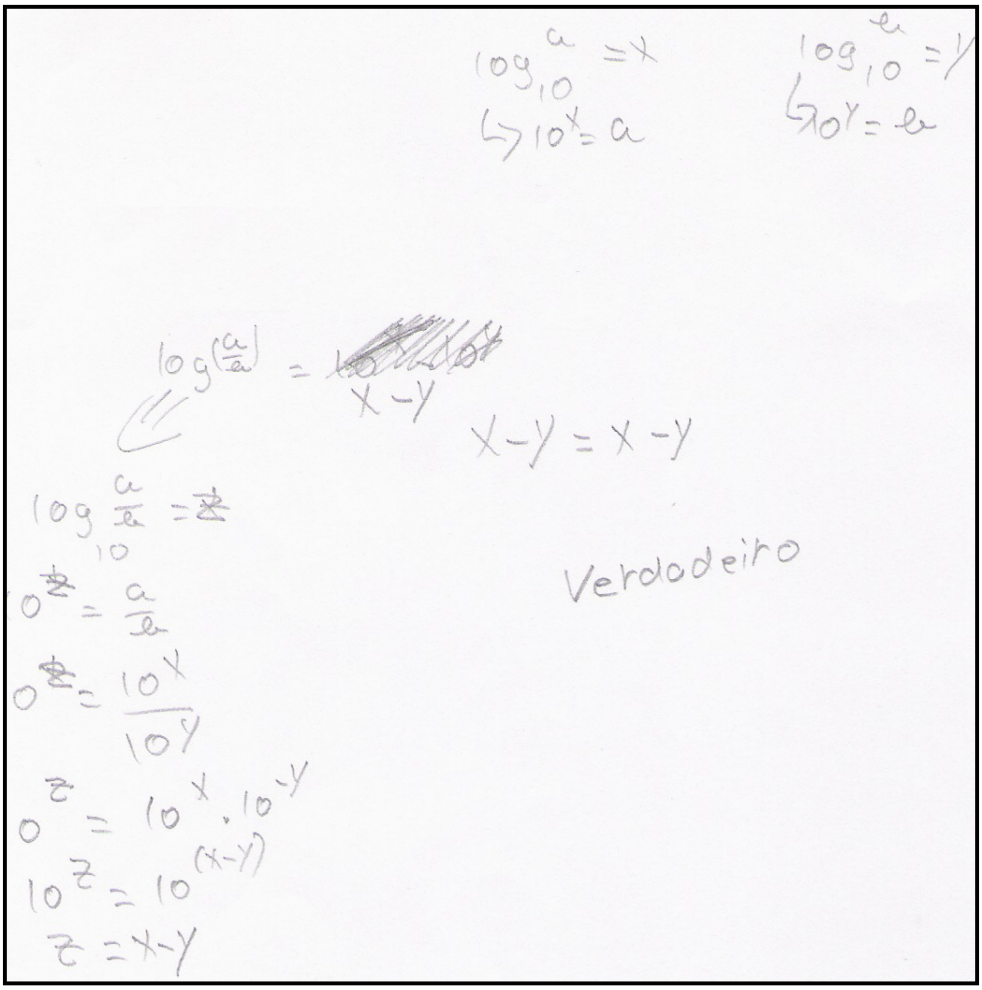
A atividade visa apresentar duas das principais propriedades dos logaritmos. Espera-se que, por ser a última atividade da seqüência, a validação seja próxima do que Balacheff chama de experiência mental.

Aluno A

O aluno não teve dificuldade na construção da prova; usou a prova direta, com todas as passagens de forma bem clara e simples; adotou uma linguagem matemática adequada para esse nível de prova. Reputamos que a validação do aluno pode ser considerada uma experiência mental.



Para o item b, o aluno usou o mesmo raciocínio da prova anterior, com todas as passagens bem claras, explicitando bem os argumentos utilizados e concluindo de forma correta que a sentença é verdadeira.



$\log_{10}^{a} = x$

$\hookrightarrow 10^{x} = a$

$\log_{10}^{b} = y$

$\hookrightarrow 10^{y} = b$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = x - y$

$x - y = x - y$

$\log_{10} \frac{a}{b} = z$

$10^{z} = \frac{a}{b}$

$10^{z} = \frac{10^{x}}{10^{y}}$

$10^{z} = 10^{x} \cdot 10^{-y}$

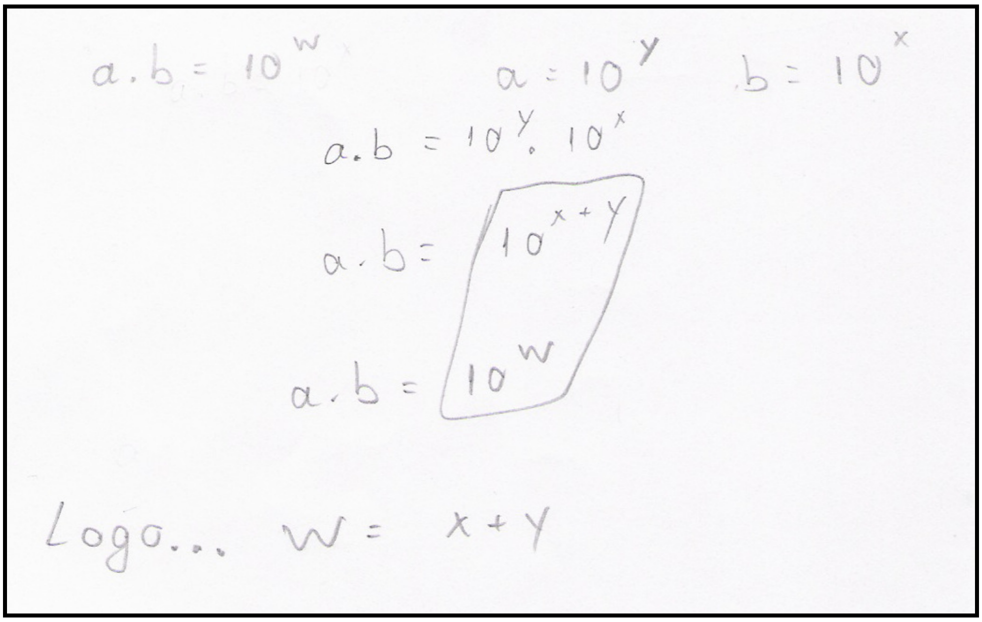
$10^{z} = 10^{(x-y)}$

$z = x - y$

Verdadeiro

Aluno B

Apresentamos a seguir a solução do aluno para o item a.



$a.b = 10^w \qquad a = 10^y \qquad b = 10^x$

$a.b = 10^y . 10^x$

$a.b = 10^{x+y}$

$a.b = 10^w$

Logo... $w = x + y$

O aluno B não teve nenhum tipo de dificuldade para fazer a prova. Não fez uso de casos particulares e adotou uma linguagem matemática adequada para o nível da prova.

Quanto ao item b, o aluno utilizou a mesma estratégia da atividade anterior e concluiu a prova de forma correta.

$a = 10^x \quad b = 10^y$

$\frac{a}{b} = 10^z$

$10^z = \frac{10^x}{10^y}$

$10^z = 10^{x-y}$

Logo... $z = x - y$

Aluno C

O aluno iniciou a prova com valores numéricos, atribuindo valores para as letras a e b ,chegando à conclusão de que a igualdade estava correta. Temos aqui exemplo de uma validação empírica, uma vez que com um caso particular ele concluiu a tese.

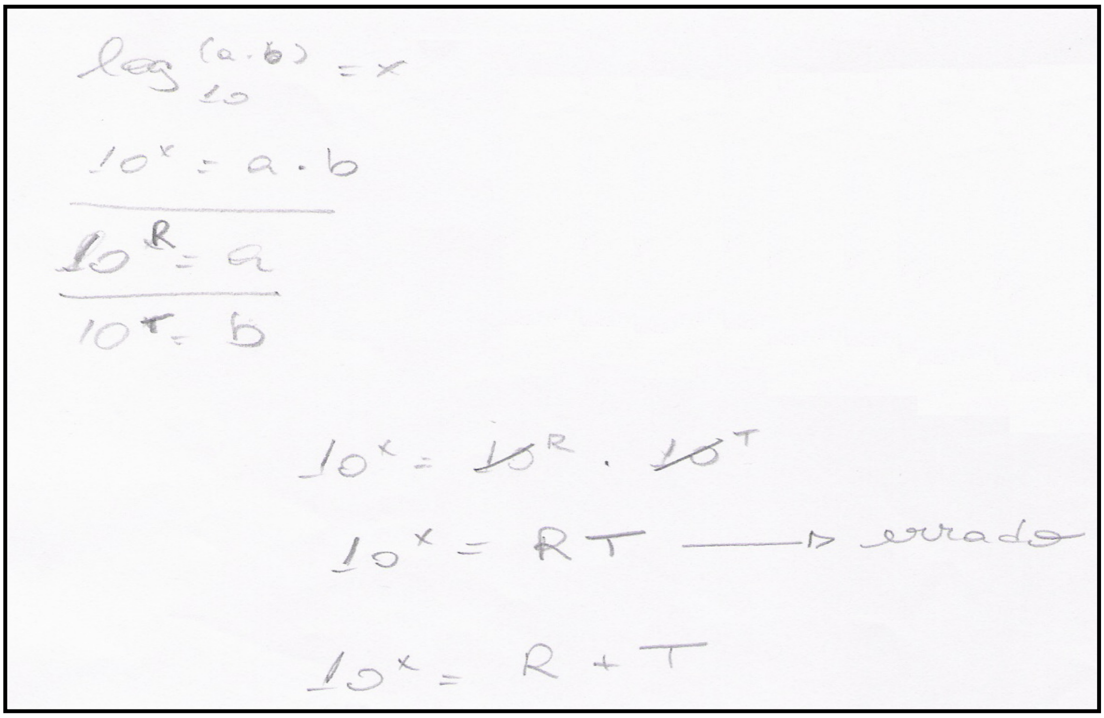
Primeira estratégia

$\log_{10}^{(10.10)} = \log_{10}^{10} + \log_{10}^{10}$

$\log_{10}^{100} = 1 + 1$

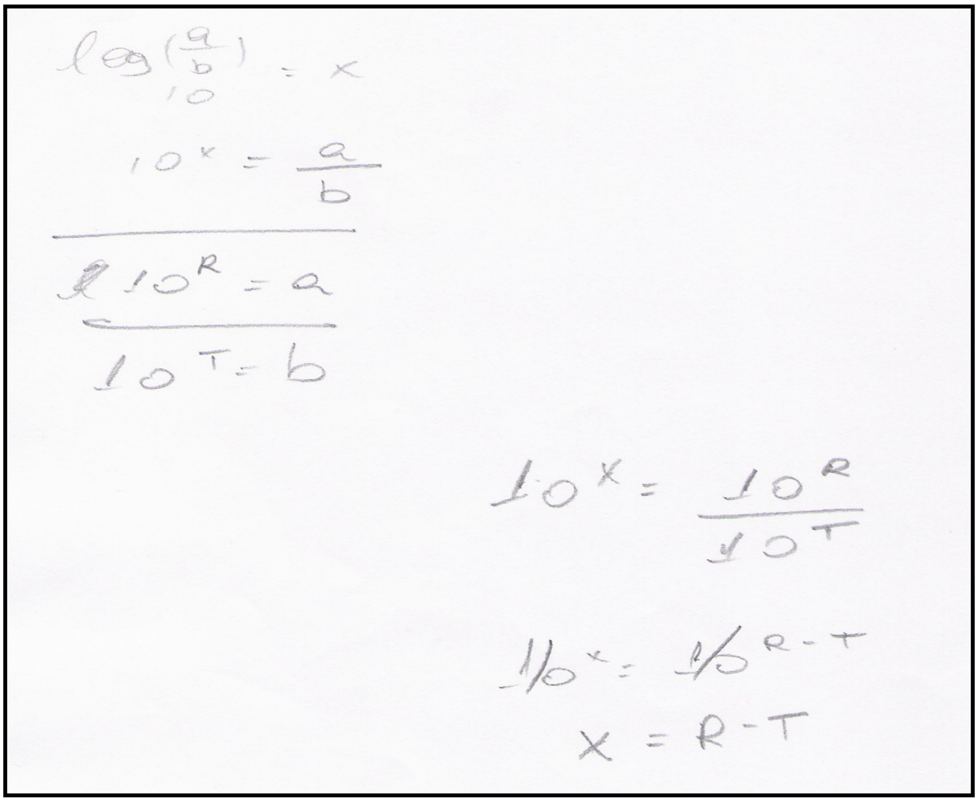
$\log_{10}^{100} = 2$

Foi dito ao aluno que essa prova é insatisfatória, pois ele mostrou que a expressão é verdadeira para um caso particular e isso não pode garantir sempre a validade. Foi sugerido refazer a prova, porém sem uso de casos particulares. O aluno não sabia como proceder, então foi proposto que ele tentasse mostrar que os dois lados eram iguais, mas mesmo assim ele continuava sem saber o que fazer. Novamente sugeriu-se usar estratégias de atividades anteriores e a definição de logaritmos. Ainda assim ele não sabia como proceder. Finalmente, foi oferecido como opção chamar cada logaritmo com uma letra e em seguida aplicar a definição. Outra dificuldade apresentada estava ligada ao uso da propriedade de potência, uma vez que ele não sabia se somava ou multiplicava os expoentes, e a primeira tentativa foi multiplicar. Ele foi informado de que essa propriedade havia sido utilizada nas atividades anteriores, contudo a dúvida permaneceu. Podemos observar uma grande confusão do aluno em relação às propriedades de potências.



Resumindo, o aluno se deparou com muitas dificuldades nessa prova. Tanto no uso das propriedades de potências quanto na forma de relacionar e como argumentar usando apenas a definição de logaritmos.

No tocante ao item b, o aluno iniciou a atividade perguntando se a maneira de fazer era parecida com a do item anterior. Ele seguiu os mesmos passos do item precedente e novamente teve dúvidas ao usar a propriedade de potências, porém desta vez concluiu que para divisão de potências de mesma base deveriam ser subtraídos os expoentes. Apenas com várias ajudas bem direcionadas o aluno chegou ao resultado esperado.



$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = x$

$10^x = \frac{a}{b}$

$10^R = a$

$10^T = b$

$10^x = \frac{10^R}{10^T}$

$\cancel{10}^x = \cancel{10}^{R-T}$

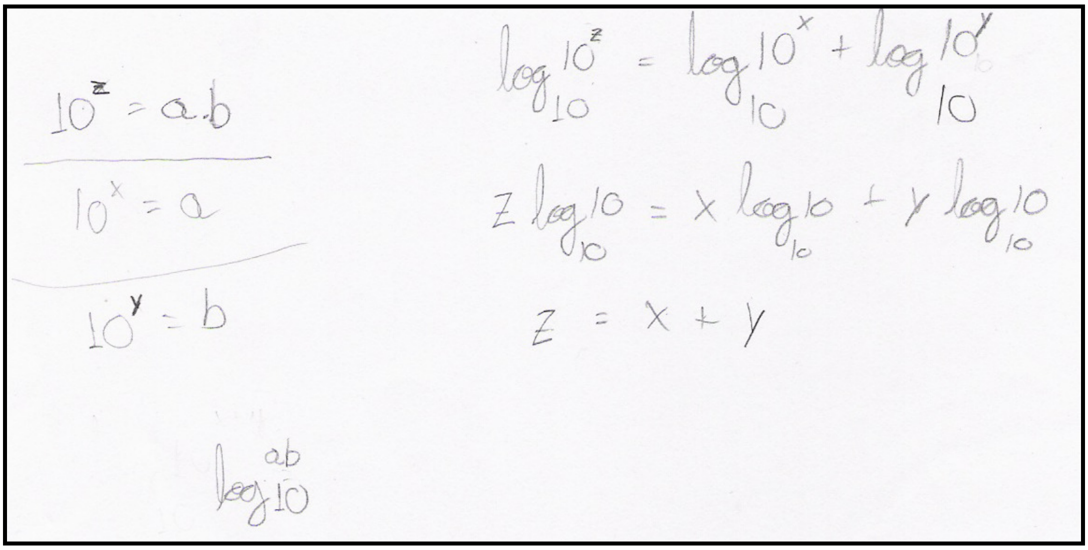
$x = R - T$

Em resumo, podemos dizer que a atividade demonstra que a falta de conhecimento das propriedades das potências impediu o aluno de progredir na construção de uma prova formal. O problema do pré-requisito deve ser levado em conta numa iniciação à aprendizagem da prova. Pedir ao aluno uma prova sem antes lhe dar condições mínimas pode desencorajá-lo na exploração do mundo dedutivo.

Aluno D

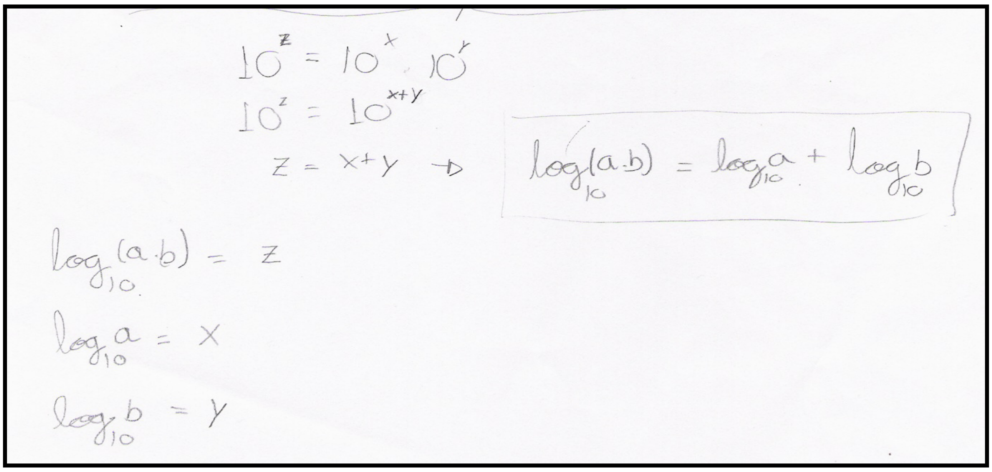
O aluno iniciou a atividade aplicando a definição de logaritmos para cada termo da sentença de forma correta, conforme protocolo abaixo.

Primeira estratégia



O aluno usou uma boa linguagem e não utilizou casos particulares. Entretanto, fez uso de uma das propriedades de logaritmos. O professor sugeriu empregar propriedades conhecidas de logaritmos, mas apenas a definição.

Segunda estratégia



$$10^z = 10^x \cdot 10^y$$
$$10^z = 10^{x+y}$$
$$z = x + y \rightarrow \boxed{\log_{10}(a \cdot b) = \log_{10} a + \log_{10} b}$$
$$\log_{10}(a \cdot b) = z$$
$$\log_{10} a = x$$
$$\log_{10} b = y$$

Na segunda tentativa, o aluno novamente não fez uso de casos particulares. Usou uma linguagem matemática formal adequada para o nível da prova e mostrou de forma bem explícita sua conclusão. Consideramos que a prova realizada pelo aluno D foi a melhor estruturada, pois, além da clareza de todas as passagens, deixou bem clara a conclusão da propriedade que estava sendo provada.

Para o item b, o aluno adotou a mesma estratégia da segunda tentativa do item anterior e concluiu facilmente a prova. Consideramos que a validação do aluno é do tipo experiência mental, segundo Balacheff.

$$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = x \qquad \log_{10} a = y \qquad \log_{10} b = z$$

$$10^x = \frac{a}{b} \qquad 10^y = a \qquad 10^z = b$$

$$10^x = \frac{10^y}{10^z}$$

$$10^x = 10^{y-z}$$

$$x = y - z$$

$$\boxed{\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10} a - \log_{10} b}$$

De um modo geral, com exceção do aluno C, os outros atingiram os objetivos propostos nessa atividade.

Síntese da análise *a posteriori*

Nas atividades da primeira parte realizadas em duplas, pudemos constatar que os alunos já tinham um bom conhecimento da definição de logaritmos e uma razoável habilidade para fazer sua aplicação. Na atividade 1, ambas as duplas encontraram dificuldade na utilização das propriedades de potências e da validade de uma suposta propriedade. Observamos que existe uma grande dificuldade para argumentar sobre a veracidade de um resultado matemático, o que no item c podemos confirmar, ao verificar que eles não sabiam definir qual a propriedade de potência que poderiam utilizar para agrupar uma soma de potências de mesma base. Nesse caso, uma pequena experimentação com valores numéricos seria suficiente para responder. Na segunda atividade, as duas duplas não apresentaram dificuldades e todas as validações foram feitas no nível empirismo ingênuo. Na atividade 3, a dupla 1 não encontrou obstáculos, pois iniciaram a atividade com o uso de contra-exemplo para justificar que as sentenças eram falsas. A dupla 2 inicialmente não teve bom êxito uma vez que a primeira estratégia utilizada foi usar uma propriedade dos logaritmos já conhecida.

A segunda parte das atividades foi executada individualmente, em que observamos que os alunos estavam mais otimistas após a realização das atividades da primeira parte. Na atividade 4, todos os alunos utilizaram um contra-exemplo para justificar que a sentença matemática era falsa, pois com apenas uma verificação era possível fazer essa constatação. Na atividade 5 os alunos precisavam mostrar a veracidade de uma sentença matemática e, para tal, o uso de valores numéricos era insuficiente. O aluno A aplicou bem a definição de logaritmos, entretanto ele adotou a tese numa das passagens, concluindo que a igualdade era verdadeira. Mesmo com esse equívoco sua prova estava próxima do nível experiência mental. O aluno B realizou toda a prova de forma correta e atingiu o nível experiência mental. O aluno C cometeu o mesmo erro do aluno A: usou a tese em sua prova, teve dúvidas sobre propriedades de potências, mas concluiu satisfatoriamente a atividade. O aluno D encontrou algumas dificuldades e utilizou uma propriedade conhecida dos logaritmos na primeira tentativa. A atividade 6 consistia na realização de duas provas sem nenhuma ajuda, no ambiente papel e lápis. O aluno A, após as cinco atividades, conseguiu executar as duas provas da atividade 6 com uma validação que consideramos como experiência mental. O aluno B também obteve êxito na realização das duas provas, com o uso da linguagem matemática. O aluno C iniciou o item a usando valores numéricos e concluiu sua prova com apenas um caso particular. O aluno de deparou com algumas dificuldades na aplicação da definição de logaritmos, no uso das propriedades de potências e precisou de auxílio para concluir a prova. O aluno D fez uso uma boa linguagem, aplicou corretamente a definição de logaritmos, mas empregou uma propriedade conhecida de potências em sua prova.

CAPÍTULO 6
CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema demonstração é um dos pontos mais delicados do ensino. Alguns estudos acadêmicos mostram que existe uma grande dificuldade no ensino e aprendizagem de prova (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000). A aprendizagem do raciocínio dedutivo começa lentamente no Ensino Fundamental e repentinamente se transforma em uma prova intelectual, e ela acaba sendo considerada pelos alunos mais como um algoritmo do que um raciocínio que permite validar uma conjectura. É uma ruptura brusca que necessita de uma aprendizagem. O projeto AProvaME, no qual esta dissertação está inserida, procura investigar e dar uma contribuição a esse processo de argumentação e prova. O presente trabalho se concentrou em investigar as seguintes questões:

1) Como o autor de livros didáticos aborda o processo de prova em relação ao tema "logaritmo" na sua coleção? Os alunos leitores são estimulados a realizar provas em atividades propostas?

2) Quais dificuldades os alunos da primeira série do Ensino Médio apresentam durante um processo de produção de provas?

Para responder à primeira questão de pesquisa o trabalho investigou a abordagem conferida a provas e demonstrações do objeto matemática logaritmo na coleção *Matemática* do Ensino Médio, de autoria de Luiz Roberto Dante. Os critérios do CNLEM foram adotados para essa análise.

Para responder à segunda questão de pesquisa foi concebida e aplicada uma seqüência de atividades que seguiram algumas etapas da metodologia de pesquisa engenharia didática. A análise dos resultados se fundamentou na tipologia de provas de Balacheff, que classifica as validações dos alunos em quatro tipos: o empirismo ingênuo, o exemplo crucial, o exemplo genérico, considerados como provas pragmáticas, e a experiência mental, reputada como prova intelectual. Participaram da seqüência de ensino quatro alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola particular localizada na zona norte da cidade de São Paulo. A primeira parte da seqüência foi efetuada em duplas, enquanto a segunda parte foi desenvolvida individualmente. As duas partes das atividades foram realizadas no ambiente papel e lápis.

Síntese das análises do objeto matemático logaritmo na coleção de livros didáticos

O tema logaritmos foi apresentado de uma só vez no capítulo 8 do volume 2 da coleção. O autor não utilizou o método em espiral tão preconizado por educadores de Educação Matemática. O autor introduziu o conceito de logaritmo de uma maneira bastante interessante, principiando com uma situação-problema. O capítulo segue com a estrutura clássica: teoria, justificativa ou demonstração, exercícios resolvidos e exercícios propostos, na sua maioria de simples manipulação algébrica. O capítulo apresentou problemas variados de aplicação em várias áreas do conhecimento, como química, biologia e economia. A função logarítmica foi apresentada como a inversa da função exponencial, contribuindo para uma articulação entre tópicos distintos da Matemática.

Quanto ao aspecto argumentação e prova, o autor apresentou sempre algum tipo de justificativa ou demonstração para cada elemento novo. Houve uma grande preocupação do autor em provar todas as propriedades de logaritmos. Dessa forma, alunos interessados na Matemática podem se sentir estimulados a realizar provas. Quando a demonstração não era apresentada, o autor fazia algum tipo de justificativa, mesmo que fosse ao nível empirismo ingênuo, de acordo com a tipologia de Balacheff. Os exercícios resolvidos são em grande parte de manipulação e aplicação com pouquíssimos exercícios propostos com teor de prova e algum tipo de justificativa. Não verificamos erros conceituais. A distribuição dos tópicos é de fácil entendimento dos alunos, porém nas atividades propostas não encontramos estímulos para os alunos realizarem provas.

Concluímos dizendo que a aprendizagem da prova é um processo lento que necessita de um ensino. Não se percebe na obra uma preocupação do autor pelo ensino da demonstração. Ela surge no capítulo como se o aluno já estivesse familiarizado com esse processo. Acreditamos que os autores de livros didáticos deveriam propiciar atividades que levem em conta a aprendizagem da prova em sala de aula.

Síntese das principais dificuldades encontradas pelos alunos no processo de produção de provas

Lembramos que os quatro alunos já haviam trabalhado o tópico logaritmo nas aulas regulares. Para eles, a seqüência de ensino foi uma revisita ao tema abordado, mas sob um novo ponto de vista. Estávamos interessados não em exercícios manipulativos, e sim em exercícios em que houvesse conjecturas e produções de provas. A primeira dificuldade que encontramos nas análises foi provocada por nós quando dissemos aos alunos para não utilizar as propriedades que tinham sido estudadas no curso regular. De fato, é difícil para um aluno deixar de usar uma propriedade que ele conhece e já experimentou apenas porque o enunciado ou o professor assim o exige. Entender que o emprego de uma propriedade conhecida para justificar uma outra é um procedimento que pode provocar um círculo vicioso na demonstração é algo muito complexo para o aluno.

Iniciada a seqüência, um grande obstáculo deparado pelos alunos foi decidir pela estratégia que deveria ser adotada. Um hábito inerente nos nossos alunos é sempre perguntar ao professor como fazer, como iniciar. Se o professor não dá a solução, a postura do aluno é de acomodação. Um outro costume percebido na aplicação da seqüência é a utilização de números para provar alguma afirmação. Isso ficou evidente no aluno C durante a atividade 6. A validação denominada de empirismo ingênuo prevaleceu em muitas das questões, conforme protocolos apresentados no capítulo 5. Uma outra dificuldade observada é a não-produção de uma prova por falta de pré-requisito, como mostra o aluno C nas atividades 5 e 6. O desconhecimento das propriedades das potências foi um dos fatores que levaram o aluno C a pedir constante ajuda ao professor aplicador. Um outro problema constatado foi a utilização da tese como se fosse uma hipótese. Esse fato ficou muito evidente em três dos quatro alunos na atividade 5. Eles usaram a tese durante a produção das provas. Essa confusão entre o uso da tese e a hipótese é algo bastante comum na maioria dos alunos durante o processo de produção de provas. Uma outra dificuldade dos alunos era saber o que poderia ser utilizado na realização de uma prova. Dois alunos empregaram as propriedades que tratam do logaritmo do produto (aluno D na atividade 5) e do logaritmo de uma potência (aluno D na atividade 6) nas suas provas. A organização lógica dos conteúdos programáticos não está clara na mente dos alunos. Como pode um aluno saber que a utilização de uma propriedade é passível de causar um círculo vicioso? Outro ponto detectado foi o uso do contra-exemplo (dupla 2 na atividade 3) para justificar que uma proposição é falsa. É um procedimento muito pouco trabalhado no nosso ensino.

Apesar das dificuldades citadas, podemos concluir que a seqüência permitiu aos alunos avançar lentamente de validações empíricas para validações dedutivas. Para futuros trabalhos, julgamos importante um estudo comparativo entre alunos que revisitam um tópico de Matemática e alunos que não o tenham visto. Essa comparação poderá propiciar elementos novos para análises, que não foram contemplados neste trabalho. Além disso, julgamos fundamental que autores de livros didáticos comecem a se preocupar de maneira mais direta e objetiva com o ensino e a aprendizagem da prova em Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIQUE, Michéle. Ingénieri didactique. *Recherche em Didactique des Mathématiques*. Grenoble, France, v. 9, n. 3, 1988.

BALACHEFF, Nicolas. Preuve et démonstration au collège. *RDM*, 3(3), p. 261-304, 1982.

———. Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, v. 18, n. 2, p. 147-176, 1987.

BOYER, Carl B. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1987.

BRASIL. Ministério da Educação/Plano Nacional do Livro Didático. *Guia do Plano Nacional do Livro Didático.* Brasília: MEC/PNLD, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria da Educação Média e Tecnológica/Plano Nacional do Livro do Ensino Médio. *Catálogo do Plano Nacional do Livro do Ensino Médio.* Brasília: MEC/SEMTEC/PNLEM, 2005.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEF)*: 5ª a 8ª séries. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, MEC/SEF, 1998.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEF):* 5ª a 8ª séries. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, MEC/SEF, 1999.

CARLOVICH, Marisa. *A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do Estado de São Paulo para 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental*. 2005. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo.

CASTRUCCI, Benedito. *Dicionário de matemática*. São Paulo: Tese Editora, 1979. v. 5.

CHAZAN, D. *High School Geometry Students´Justification for Their views of empirical Evidence and Mathematical Proof.* Educational Studies in Mathematics,1993. p.359-387.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática.* Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2005. 3 v.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* São Paulo: Ed. Unicamp, 1995.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo dicionário da língua portuguesa.* São Paulo: Nova Fronteira, 1975.

GOUVÊA, Filomena Aparecida Teixeira. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração*: uma contribuição para a prática pedagógica para o professor de matemática do Ensino Fundamental. 1998. 264 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. 2. ed. São Paulo: LTC, 1987. v. 1.

HEALY, S.V. (L.) & HOYLES C. *A study of proof conception in algebra.* Journal for Research in Mathematics Education, 2000. p.396-428.

IEZZI, Gelson et al. *Fundamentos da matemática elementar*. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 1.

LIMA, Elon Lages. Conceituação, manipulação e aplicações. *Revista do Professor de Matemática*, n. 41, p. 1-6, 1999.

——— et al. *Exame de textos:* análise de livros de matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: Ed. SBM, 2001.

MAOR, Eli. *e:* a história de um número. Rio de Janeiro: Record, 2006.

PIETROPAOLO, Ruy César. *(Re) Significar a demonstração dos currículos da Educação Básica e da formação de professores de matemática.* 2005. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC, São Paulo.

RAMA, Aguinaldo José. *Números inteiros nos Ensinos Fundamental e Médio.* 2005. 179 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – PUC, São Paulo.

ANEXO

Definição:

$\log_b^a$ **=c se e somente se b^c= a , com a>0 , b>0 e b≠ 1**

Exemplo: $\log_2^8$ **=3 , pela definição temos 2^3=8**

1° parte- Estas 3 primeiras atividades serão feitas em dupla

Atividade 1: Sabendo que $\log_{10} 2 = a$ e $\log_{10} 3 = b$, obter, usando somente a definição de logaritmos:

a) $\log_{10} 4$ b) $\log_{10} 6$ c) $\log_{10} 5$

Atividade 2: Com o uso da calculadora, responda V(verdadeiro) ou F(falso) cada sentença:

a) $\log_{10}(3.4) = \log_{10} 3 + \log_{10} 4$

c) $\log_{10}\left(\frac{20}{10}\right) = \log_{10} 20 - \log_{10} 10$

b) $\log_{10} 5 . \log_{10} 5 = \log_{10} 5 + \log_{10} 5$

d) $\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 4} = \log_{10} 8 - \log_{10} 4$

Atividade 3: Um aluno do Ensino Médio, com o objetivo de obter propriedades de logaritmos, fez a seguinte análise:

1) $\log_{10} 100 . \log_{10} 100 = \log_{10} 100 + \log_{10} 100$

Pois, $\log_{10} 100 = x$, pela definição temos $10^x = 100$, então $10^x = 10^2$ portanto x=2

Como 2.2=2+2 , conclusão : $\log_b a . \log_b a = \log_b a + \log_b a$

2) $\dfrac{\log_2 16}{\log_2 4} = \log_2 16 - \log_2 4$

Pois, $\log_2 16 = x$, pela definição temos $2^x = 16$, então $2^x = 2^4$ portanto x=4

$\log_2 4 = y$, pela definição temos $2^y = 4$, então $2^y = 2^2$ portanto y=2

$\dfrac{4}{2} = 4 - 2$, conclusão : $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} = \log_a x - \log_a y$

Responda:

As propriedades explicitadas pelo aluno são verdadeiras? Justifique.

Atividade 4: A sentença $\log_{10} x . \log_{10} y = \log_{10}(x.y)$, com x >0 e y >0, é verdadeira ou falsa? Justifique.

Atividade 5: Sabendo que $\log_{10}(2.a) = p$ e $\log_{10}(5.a) = q$, mostre que $\log_{10}(2a.5a) = p + q$, com a >0

Atividade 6: Supondo que os logaritmos existem, prove que

a) $\log_{10}(a.b) = \log_{10}a + \log_{10}b$

b) $\log_{10}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_{10}a - \log_{10}b$