PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Cláudia Cristina Soares de Carvalho

Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP
2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Cláudia Cristina Soares de Carvalho

Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP
2007

Banca Examinadora

____

____

____

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todos que, de alguma maneira, ajudaram a tornar este sonho possível.

Agradeço, primeiramente, a ***Deus*** pela vida.

Agradeço aos meus pais, ***Lilia e Uilton***, pela minha existência e por todo apoio dado a mim desde que nasci.

Agradeço ao meu marido, ***Thiago***, pela paciência, cumplicidade e tolerância dedicadas a mim durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao ***Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud*** por toda atenção, incentivo, paciência e sapiência demonstradas na orientação desta pesquisa.

Agradeço à banca examinadora, composta por ***Dra. Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão*** e ***Dr. Marcos Antônio S. de Jesus***, pelas contribuições dadas e pela extrema competência na avaliação deste trabalho.

Agradeço a ***todos os amigos*** que fiz neste curso de Mestrado. Sem eles, com certeza, os momentos que passei seriam menos interessantes e divertidos.

Agradeço ao ***Francisco***, secretário do programa, por cuidar da parte burocrática desta caminhada.

Agradeço a todos os ***professores*** do programa de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP por tudo que aprendi neste curso.

Finalmente, agradeço a ***CAPES*** pela bolsa que propiciou a conclusão desta jornada.

RESUMO

A proposta geral desta pesquisa é promover uma reflexão sobre o uso de provas e demonstrações no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* abordado em livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio brasileiro.

A fim de propormos essa reflexão, analisamos o primeiro volume de três das onze coleções de livros didáticos selecionadas pelo ministério da educação brasileiro no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – PNLEM/2006.

A análise dos livros selecionados foi feita a partir das tarefas relacionadas ao uso de provas e demonstrações existentes na abordagem do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*. Para a análise dessas tarefas usamos a noção de praxeologia (CHEVALLARD, 1999) e de níveis de prova (BALACHEFF, 1988). Em cada tarefa analisada, destacamos, também, a possibilidade do trabalho com as concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995).

Com esta pesquisa pretendemos responder a seguinte questão: De que maneira os livros didáticos analisados propõem aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio provas e demonstrações às propriedades enunciadas ao longo da exposição do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*?

A análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração existentes na abordagem do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* nos permitiu responder a questão de pesquisa enunciada anteriormente, bem como trazer contribuições para a área de Educação Matemática.

Palavras-Chave: Prova, Demonstração, Conjuntos, Ensino de Álgebra, Livros didáticos.

ABSTRACT

The central objective of this research is to consider a reflection on the use of proofs and demonstrations in the content algebraic *Sets and Numerical Sets* studied in the first grade of Brazilian High School.

To reach our objective, we analyze the first volume of three of the eleven course book selections selected by the Brazilian Education Ministry in the National Program of the Didactic Book for High School.

The analysis of selected books was made from the proofs and demonstrations tasks contained in content algebraic *Sets and Numerical Sets*. For the analysis of these tasks we use the notion of praxeology (CHEVALLARD, 1999) and of levels of proof (BALACHEFF, 1988). In each analyzed task, we also detach the possibility of working with the conceptions of algebra proposals by Usiskin (1995).

With this research we intend to answer the following question: How the analyzed course books consider to the pupils of the first year of High School proofs and demonstrations to the properties enunciated throughout exposition of the algebraic content *Sets and Numerical Sets*?

The praxeology analysis of the proof and demonstration tasks contained in the algebraic content *Sets and Numerical Sets* allowed us to answer the research question declared previously, as well as bringing contributions for the area of Mathematical Education.

Keywords: Proof, Demonstration, Sets, Algebra’s teaching, Course book**.**

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O motivo inicial que nos levou a realizar este trabalho teve origem nas discussões sobre o abandono do ensino de provas e demonstrações realizadas nos encontros do grupo de pesquisa do qual fazemos parte na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Ao ingressarmos no Mestrado Acadêmico da PUC-SP começamos a fazer parte do grupo de pesquisa intitulado "Conceitos: Formação e Evolução", mais conhecido como G4. No momento de nosso ingresso, o grupo de pesquisa iniciava um projeto com o tema "O pensamento matemático: formação de um núcleo de ensino-aprendizagem e de pesquisa". Devido a esse projeto, as discussões do grupo voltaram-se para questões envolvendo as noções de argumentação, prova, demonstração e raciocínio dedutivo. Essas discussões fomentaram nosso interesse pelo tema desta pesquisa.

Alguns questionamentos sobre a problemática do ensino de provas e demonstrações surgiram a partir de leituras efetuadas junto ao grupo de pesquisa. Um deles diz respeito ao fato algumas pesquisas brasileiras na área de Educação Matemática (GOUVÊA, 1998; MELLO, 1999; CARLOVICH, 2005) focarem a problemática das provas e demonstrações somente no ensino de geometria e no Ensino Fundamental. Pouco se discute sobre essas mesmas questões no ensino de álgebra e no Ensino Médio. Esses questionamentos foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa, pois foi a partir deles que surgiu nosso interesse: estudar a problemática das provas e demonstrações no ensino de álgebra no Ensino Médio.

No início de nosso trabalho estudávamos essa problemática de uma maneira geral, ou seja, contemplando todos os conteúdos de álgebra de todos os anos do Ensino Médio. Nossa intenção era ter uma visão geral sobre o tema, sem necessariamente aprofundarmo-nos em um aspecto. Entretanto, fez-se necessário um estreitamento deste estudo no intuito de fazer uma pesquisa concisa, profunda e dentro do tempo destinado para conclusão do Mestrado.

Na busca por uma questão de estudo estreita e delineada, optamos por analisar a problemática escolhida em livros didáticos, pois acreditamos que este é para as escolas e para os professores um importante instrumento de apoio ao ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos e apresenta de maneira organizada os conteúdos matemáticos básicos. Além disso, o livro didático é um recurso utilizado em várias escolas do país, públicas ou privadas.

Mesmo focando nossa pesquisa na análise de livros didáticos, ainda fez-se necessário efetuarmos outras escolhas de modo a estreitarmos ainda mais este estudo. Tivemos, por exemplo, que delimitar os livros didáticos a serem analisados, bem como o conteúdo de álgebra do Ensino Médio e os critérios utilizados na análise desse conteúdo nos livros.

No que tange às coleções de livros didáticos, analisaremos três das onze coleções de livros didáticos selecionadas pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM/2006). Com relação ao conteúdo algébrico, analisaremos *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* abordado no primeiro ano do Ensino Médio. A análise desse conteúdo nos livros selecionados será feita com base na noção de praxeologia (CHEVALLARD, 1999) e de níveis de prova (BALACHEFF, 1988). As justificativas para estas escolhas serão discutidas ao longo do trabalho.

A partir destas delimitações, a proposta desta pesquisa é elaborar uma reflexão sobre o uso de provas e demonstrações no ensino e aprendizagem do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* abordado em livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio. Faremos isso a partir da análise de coleções atuais de livros didáticos selecionadas pelo PNLEM/2006 e a luz do quadro teórico proposto por Chevallard (1999) e Balacheff (1988).

Iniciaremos, efetivamente, esta pesquisa apresentando alguns estudos preliminares. Primeiramente, trataremos da álgebra e das demonstrações de um ponto de vista histórico. Teceremos, também, considerações sobre pesquisas acadêmicas que abordam o ensino e a aprendizagem desses mesmos temas. Para finalizar esta seção, apresentaremos uma análise de alguns documentos oficiais da educação brasileira, no que tange o ensino de álgebra e demonstrações, e um estudo sobre as noções de demonstração e conjuntos.

O capítulo 02 é destinado à apresentação do referencial teórico e das concepções sobre álgebra e demonstração usadas neste trabalho. Além disso, apresentaremos o problema de pesquisa e discutiremos os aspectos metodológicos usados na escolha e análise dos livros didáticos, com as devidas justificativas.

No capítulo 03, apresentaremos a análise dos livros didáticos selecionados, feita com base na noção de praxeologia proposta por Chevallard (1999) e nos níveis de prova propostos por Balacheff (1988). Nesse capítulo também faremos a discussão dos resultados obtidos com a análise.

Nas considerações finais faremos uma síntese dos resultados obtidos e uma discussão sobre o uso de provas e demonstrações como recurso para tornar significativo o ensino de álgebra no Ensino Médio. Além disso, apontaremos questões de pesquisa que possam complementar este estudo.

1. ESTUDOS PRELIMINARES

Um dos principais interesses desta pesquisa é verificar, por meio da análise de livros didáticos, como se dá o ensino das provas e demonstrações[1] no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* abordado no primeiro ano do Ensino Médio brasileiro. Como já dissemos, tal interesse surgiu devido a um questionamento feito por nós a partir da leitura de textos correlatos ao tema deste trabalho no grupo de pesquisa que fazemos parte na PUC-SP. Esse questionamento gira em torno do interesse de saber "por que a maior parte das pesquisas que lemos não aborda a questão das provas e demonstrações em conteúdos de álgebra e no Ensino Médio?"

Deste questionamento extraímos duas noções importantes para a matemática: a noção de demonstração e a noção de Álgebra. Na intenção de delimitar nosso interesse, selecionamos da álgebra o conteúdo *Conjuntos e Conjuntos Numéricos.*

Neste tópico da pesquisa, escolhemos tratar da Álgebra e não especificamente de conjuntos, pois acreditamos que uma visão mais ampla permite-nos entender o processo de construção de um conteúdo algébrico, como, no caso, *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*. Portanto, nesta seção, nos dedicaremos ao estudo da noção de álgebra e de demonstração do ponto de vista histórico-matemático e das pesquisas em educação matemática. Primeiramente, veremos de maneira sucinta como essas duas noções foram construídas ao longo dos tempos e quais são as implicações destas trajetórias nos dias de hoje. Em seguida, apresentaremos algumas pesquisas em educação matemática que tratam do ensino e aprendizagem de álgebra e demonstrações.

Ao apresentarmos pesquisas recentes correlatas ao nosso tema pretendemos expor ao leitor a origem de alguns de nossos questionamentos e apontar diferenças que mostrem a relevância de uma nova abordagem nessa mesma temática. Por este motivo, após os resumos apresentados, faremos

[1] Neste momento do texto estamos usando as palavras prova e demonstração como sinônimas.

considerações a respeito das contribuições que nos foram dadas a partir da leitura dessas pesquisas.

Para finalizar a seção, veremos como alguns documentos oficiais da educação brasileira abordam a problemática do ensino de álgebra e de demonstrações e faremos um estudo da noção de demonstração e de conjuntos.

1.1 A ÁLGEBRA AO LONGO DOS TEMPOS

A história da matemática é tão bonita e extensa quanto a própria história da humanidade e, por este motivo, é difícil escolher um critério para começar a relatá-la. Mesmo com um critério definido seria muito pretensioso de nossa parte dizer que relataremos toda a história álgebra ao longo dos tempos. Assim, neste texto, decidimos relatar de maneira sucinta a evolução da álgebra por meio de seu desenvolvimento em algumas civilizações importantes para a história da matemática até chegarmos à álgebra que é ensinada atualmente nas escolas.

A civilização Egípcia de aproximadamente 4000 a.C. é considerada uma das mais antigas no que diz respeito ao desenvolvimento da matemática. É uma das primeiras a possuir um sistema de numeração decimal e a representar quantidades a partir de símbolos. Muito sobre a matemática egípcia da antiguidade está registrado no Papiro Ahmes copiado pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. Apesar de este papiro conter em sua maioria problemas de origem aritmética, há alguns problemas que podem ser considerados de origem algébrica. Segundo Boyer (1974):

> Os problemas egípcios descritos até agora são de tipo digamos, aritmético, mas há outros que merecem a designação de algébricos. Não se referem a objetos concretos, específicos, como pães e cerveja, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido (BOYER, 1974, p. 12).

A civilização babilônica de 2000 até aproximadamente 600 a.C. teve sua importância nesse cenário: desenvolveu um sistema de escrita numérica de base sexagenal e registrou suas experiências em centenas de tabletas de barro, algumas delas encontradas em Uruk e datando cerca de 5000 anos atrás. Assim como os problemas egípcios, os problemas babilônicos também eram essencialmente aritméticos, porém também caminhavam para questões de origem algébrica. Segundo Eves (2004):

> Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro) (EVES, 2004, p. 61-2).

Os chineses também têm participação na história do desenvolvimento da álgebra. Esta civilização é tão antiga quanto as civilizações egípcias e babilônicas, porém datar documentos produzidos pelos chineses da antiguidade é muito difícil e as datas podem variar por cerca de 1000 anos. Apesar de não se ter certeza sobre a data de surgimento desta civilização e da escrita de seus documentos, 2750 a.C. parece, entre os historiadores, uma data razoável para seu surgimento. *Chou Pei Suang Ching*, um dos clássicos mais antigos da matemática chinesa, com data aproximada de 300 a.C., continha problemas ligados à aritmética, geometria e álgebra. Segundo Boyer (1974):

> O *Chou Pei* indica que na China, como Heródoto dizia do Egito, a geometria derivou da mensuração; e, como na Babilônia, a geometria chinesa era essencialmente um exercício de aritmética ou álgebra. Há, aparentemente, indicações no *Chou Pei* do teorema de Pitágoras, um teorema que os chineses tratavam algebricamente (BOYER, 1974, p. 143).

Os hindus e os árabes deram sua contribuição para o desenvolvimento da álgebra tanto quanto as outras civilizações. Bhaskara, por exemplo, viveu na Índia no século XII e escreveu duas obras importantes, *Lilavati e Vija-Ganita*, contendo numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternas pitagóricas e outros. Mohammed ibu-Musa al-Khowarismi, viveu em Bagdá no século VII e escreveu uma obra contendo informações sobre a numeração hindu e suas operações aritméticas. Seu livro mais importante é o *Al-jabr wa'l muqabalah*. Esta obra continha problemas de aritmética e álgebra e seu primeiro nome, *Al-jabr*, deu origem ao termo *álgebra*, usado até hoje.

Apesar das contribuições das civilizações egípcias, babilônicas, chinesas, hindus e árabes, foi a matemática da civilização grega, com registros a partir do século V a.C., que deu os primeiros passos para a álgebra como a conhecemos hoje. As primeiras escolas gregas, jônia e pitagórica, herdaram um pouco da álgebra aritmética dos babilônios, mas logo a transformam numa álgebra geométrica para tratar de problemas em que dados a soma e o produto de dois lados de um retângulo se pediam as dimensões. A obra *Elementos* de Euclides (século III a.C.) é considerada o cume da álgebra geométrica, pois sistematiza a geometria com uma estrutura pouco vista anteriormente. Mesmo com essa evolução, a álgebra ainda se apresentava de forma retórica onde todas as explicações eram escritas com palavras. Foi a partir da obra *Arithmetica* de Diofanto (aproximadamente século III d.C.) que a álgebra passou a ser escrita com símbolos para simplificar as explicações. A obra de Diofanto é basicamente uma coleção de 150 problemas tratados de forma aritmética. Considera-se Diofanto importante para a evolução da álgebra pelo fato deste ter inserido a notação algébrica que deu origem aquela que usamos hoje.

Segundo Eves (2004), o desenvolvimento da notação algébrica foi dividido em três estágios por Nesselmann em 1842. O primeiro estágio é classificado como álgebra retórica em que as argumentações nos problemas eram escritas com palavras. No segundo estágio, iniciado por Diofanto, temos a álgebra sincopada em que algumas quantidades e operações que se repetem com freqüência numa argumentação foram substituídas por símbolos. O último estágio é chamado de álgebra simbólica, iniciada por François Viète (1540-1603).

De acordo com Kieran (1992), nesse último estágio da evolução da álgebra tornou-se possível expressar soluções gerais e a álgebra começou a ser usada como ferramenta para fornecer regras que regem as relações numéricas.

Segundo Eves (2004), Viète em sua obra *In artem* introduziu a prática de se usar vogais para representar as incógnitas e consoantes para representar as constantes. Foi somente em 1637, com o matemático Descartes (1596-1650), que se começou a usar as últimas letras do alfabeto para representar incógnitas e as primeiras letras para representar constantes.

Esta pequena história do desenvolvimento da álgebra nas civilizações antigas sugere que esta noção matemática surgiu a partir de questões da aritmética tratadas na civilização egípcia e babilônica cerca de 4000 a.C. É interessante relatarmos aqui que os problemas de aritmética tinham origem em objetos concretos derivados, geralmente, das questões envolvendo a mensuração. Devido a esse fato, é comum encontrarmos registros de que a álgebra surgiu a partir da geometria.

De acordo com as evidências mostradas aqui, podemos dizer que a álgebra apareceu primeiramente quando a civilização egípcia e babilônica começou a trabalhar com problemas que possuíam um valor desconhecido que não se tratava necessariamente de um objeto concreto para eles, como indica Boyer (1974). Esse tratamento algébrico passou a ser utilizado também em geometria, o que podemos perceber principalmente na matemática produzida pelos gregos. Com os gregos, a álgebra, ainda em sua forma retórica, também era utilizada como um instrumento generalizador de propriedades geométricas. Mais tarde, com Diofanto, a notação começou a ficar sincopada. Para os hindus e os árabes, a álgebra já era uma ferramenta usada para a resolução de equações mais complexas. O esquema a seguir sintetiza essas idéias:

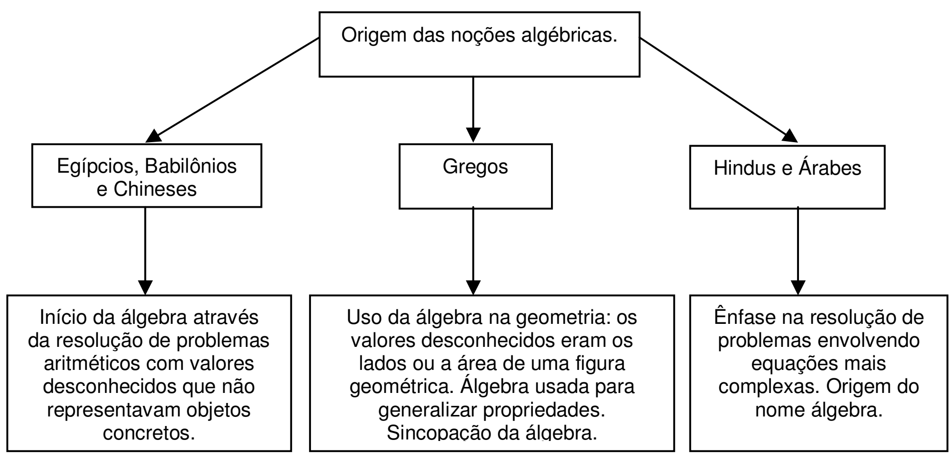


Figura 01: Origem das noções algébricas

Gostaríamos de terminar esta seção traçando um paralelo entre a origem das noções algébricas e o início do ensino de álgebra nas escolas brasileiras.

Pesquisas recentes, como a de Cruz (2005), nos revelam que atualmente há uma tendência de se iniciar o ensino de álgebra na 5ª série[2] com atividades de generalização de padrões numéricos e geométricos propostas pelos livros didáticos. Nessas atividades, nossos alunos utilizam letras para traduzir e generalizar padrões

[2] Em 2006, devido a mudanças na legislação brasileira, a 5ª série do ensino Fundamental passou a ser considerada o 6º ano do Ensino Fundamental. Em fase de adaptação, algumas escolas e alguns livros didáticos em 2007 consideram ainda o 6º ano como 5ª série. Em pesquisas anteriores a 2006 encontramos esta fase da escolaridade como 5ª série.

reconhecidos por eles numa seqüência de números ou de figuras. Na 6ª série, esse trabalho continua com a resolução de equações de primeiro grau. Nesse momento, o aluno percebe que as letras podem representar um valor desconhecido. Na 7ª série, a álgebra começa a ser vista como uma estrutura. Aqui, as letras são tratadas como sinais no papel, sem nenhuma referência numérica. Na 8ª série, a álgebra é abordada como estudo de relações entre grandezas. Nessa abordagem, as letras são usadas para indicar um valor que pode variar. A seguir temos um esquema que sintetiza o que acabamos de relatar:

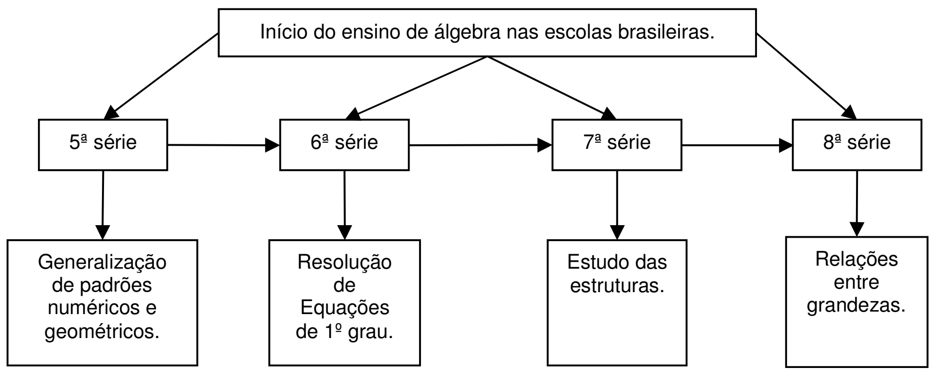


Figura 02: Início do ensino de álgebra nas escolas brasileiras.

Comparando a figura 01 com a figura 02 podemos perceber que atualmente o ensino de álgebra não evolui da mesma maneira que evoluiu historicamente. Hoje, nossos alunos iniciam a aprendizagem de álgebra generalizando padrões e não resolvendo equações como ocorreu historicamente. Apesar dessa diferença, a álgebra como estudo das estruturas e das relações entre grandezas só aparece posteriormente na história e no ensino fundamental são também os últimos enfoques dados a essa noção.

Percebemos que, tanto no relato histórico feito como na comparação com o ambiente escolar, o significado da álgebra está ligado à maneira como as letras são usadas no contexto matemático. Nossa percepção vai ao encontro de algumas idéias de Usiskin (1995) sobre álgebra.

Usiskin (1995) afirma que as concepções de álgebra já mudaram várias vezes nos últimos tempos. Para ele, a álgebra é uma área de estudo da matemática que trata dos significados das letras e das operações com elas. Segundo Usiskin (1995) há uma relação intrínseca entre as finalidades do ensino de álgebra, as concepções de álgebra e a utilização de variáveis. Em outras palavras, a maneira como uma pessoa entende o significado da noção de variável muda a concepção que ela tem sobre álgebra e direciona o ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento matemático. Com base nisso, Usiskin (1995) apresentou quatro concepções de álgebra, baseadas nos significados das variáveis em cada contexto:

Concepção da álgebra	**Uso das variáveis**
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

(USISKIN, 1995, p.20)

A álgebra está no cerne do interesse principal desta pesquisa. Porém, não nos dedicaremos a um estudo aberto, que considere a álgebra em vários conteúdos do Ensino Médio brasileiro. Um trabalho deste tipo, com qualidade, demandaria um tempo excessivo ao que temos para a conclusão do mestrado. Para delimitar nosso estudo, trabalharemos a problemática das provas e demonstrações no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*.

Apesar de toda polêmica envolvendo a teoria dos conjuntos no âmbito da matemática escolar, devido ao excessivo enfoque dado a esse conteúdo durante o Movimento da Matemática Moderna, acreditamos ser de grande valia abordar o uso de provas e demonstrações sob essa ótica. Primeiramente, a história da matemática nos mostra que a teoria dos conjuntos possibilitou avanços significativos em vários campos da matemática. Segundo Eves (2004):

> Em resumo, sob a influência da teoria dos conjuntos verificou-se uma unificação considerável da matemática tradicional e se criou muita matemática nova em ritmo acelerado (EVES, 2004, p. 659).

Além do valor histórico, a partir da análise[3] de coleções de livros didáticos, verificamos que *Conjuntos* é um conteúdo abordado no primeiro ano do Ensino Médio brasileiro. É escolhido por muitos autores como o primeiro conteúdo a ser

[3] Essa análise será descrita no Capítulo 03.

trabalhado nessa fase da escolarização. Há ainda, em tais livros didáticos, o uso de elementos da teoria dos conjuntos para tratar das relações entre números naturais, inteiros, racionais e irracionais, o que geralmente constitui-se um novo capítulo intitulado *Conjuntos Numéricos*. Essa abordagem feita pelos livros permite ao aluno entrar em contato com a força generalizadora que a álgebra possui. Afinal, um conjunto pode ter uma natureza qualquer. Pode ser de números, de funções, de figuras geométricas. Independente da característica dos elementos do conjunto, as regras mostradas na teoria sempre valem.

Se usarmos as várias facetas mostradas por Usiskin (1995) veremos que o conteúdo *Conjuntos* pode permitir ao aluno entrar em contato com a concepção de álgebra como aritmética generalizada, em que as letras são usadas como generalizadoras de modelos e com a concepção de álgebra como uma estrutura, em que as letras são como sinais arbitrários no papel.

1.2 AS DEMONSTRAÇÕES AO LONGO DOS TEMPOS

Nesta parte de nossa pesquisa usaremos, para tratar da história da demonstração ao longo dos tempos, o mesmo critério que usamos para relatar a história da álgebra ao longo dos tempos: o seu desenvolvimento em algumas civilizações importantes para a história da matemática até chegarmos à idéia de demonstração que é utilizada atualmente na matemática. Também faremos este relato de maneira sucinta.

De acordo com Boyer (1974), em geral, a maioria dos historiadores considera que a matemática egípcia e babilônica era composta de problemas numéricos (às vezes com um teor algébrico como vimos) e geométricos de ordem prática, ou seja, sobre questões de sua vida cotidiana e que representam casos específicos, desprovidos de qualquer idéia de generalidade. Por este motivo, é comum encontrarmos relatos da história da matemática que dizem que essas civilizações não tinham a noção de prova ou de demonstração em matemática. Tais afirmações sobre o uso de demonstrações pelas civilizações antigas geralmente são baseadas na idéia de que a demonstração é um discurso que tem sua origem no raciocínio dedutivo e na criação de uma estrutura axiomática.

Contudo, Boyer (1974) nos alerta para um fato importante:

> São evidentes muitas deficiências da matemática pré-helênica. Os papiros e tabletas encontrados contêm casos específicos e problemas apenas, sem formulações gerais, e pode-se perguntar se essas civilizações antigas realmente percebiam os princípios unificadores que estão no centro da matemática. Um estudo posterior é um pouco confortante, pois as centenas de problemas de tipos semelhante em tabletas cuneiformes parecem ser exercícios que os escolares deviam resolver de acordo com certos métodos ou regras aceitos. **Que não tenham sobrevivido enunciados dessas regras não significa necessariamente que a generalidade das regras ou princípios escapasse ao pensamento antigo** (grifo nosso) (BOYER, 1974, p. 30).

Com tais afirmações, o mais prudente é considerar que a matemática egípcia e babilônica era, na maior parte, constituída de problemas aritméticos e geométricos de ordem prática, porém, devido a uma série de problemas de mesmo tipo e resolvidos da mesma maneira, fica subentendido que essas civilizações poderiam considerar uma “suposta” generalidade nos problemas matemáticos e terem criado possíveis regras para resolvê-los. Extrapolando essas considerações, podemos até dizer que a idéia de generalidade e de demonstração começou a brotar na matemática a partir dessas civilizações.

Na China antiga, as obras matemáticas mais conhecidas – *Chou Pei Suang Ching* (300 a.C.) e *Chui-Chang Suan-Shu* (~250 a.C.) – se assemelhavam muito às obras babilônicas e egípcias, pois também eram, em sua maioria, compostas por diversos problemas aritméticos e geométricos de ordem prática. Por este motivo, consideraremos o uso de demonstrações na matemática da China antiga no mesmo patamar da Babilônia e do Egito antigo.

A matemática hindu e árabe era, em grande parte, voltada para a astronomia. Com isso, os hindus e os árabes eram considerados melhores em aritmética e em álgebra do que na geometria. Tanto nas obras hindus como nas obras árabes há indícios de demonstração. Bhaskara, por exemplo, apresenta uma demonstração para o teorema de Pitágoras, baseada na geometria, porém somente desenhou a figura e não apresentou nenhuma explicação. Eves (2004) considera que na civilização árabe:

> [...] foi dada uma demonstração (provavelmente defeituosa e hoje perdida) do teorema que afirma a impossibilidade de se encontrarem dois inteiros positivos cuja soma dos cubos é o cubo de outro inteiro positivo. Trata-se

> de um caso particular do famoso último “teorema” de Fermat [...] (EVES, 2004, p. 264).

Segundo os textos sobre a história da matemática (BOYER, 1974; EVES, 2004), apesar das contribuições das civilizações citadas anteriormente, parece ter sido na Grécia que a demonstração, no sentido que conhecemos hoje, surgiu.

Arsac (1987) acredita que a demonstração, como uma seqüência de enunciados organizada de acordo com regras determinadas, surgiu na Grécia no século V a.C. com o aparecimento do problema da irracionalidade e incomensurabilidade na escola Pitagórica e foi facilmente difundida, pois as cidades gregas estavam se desenvolvendo e precisavam de regras no jogo político. Ele considera seu ponto de vista uma fusão entre os pontos de vista externalista e internalista sobre a gênese da demonstração. Do ponto de vista externalista, a demonstração surgiu de fora para dentro da matemática, ou seja, surgiu como conseqüência do desenvolvimento das cidades e da necessidade de regras precisas e convincentes na política. Do ponto de vista internalista, a demonstração surgiu dentro da própria matemática com o problema da irracionalidade e incomensurabilidade a partir da escola Pitagórica.

Contudo, Arsac também acredita que níveis mais simples de demonstração (que mais tarde chamaremos de prova) aparecem na história antes da civilização grega:

> A história parece mostrar bem que houve "provas" antes da demonstração, ou seja, que a história do rigor, cujo se sabe não pára com os Gregos (I. Lakatos, 1984; IREM, 1982), também não começa com eles[4] (ARSAC, G. 1987, p. 307 – tradução nossa).

Sobre Pitágoras (séc. V a.C.) e os pitagóricos, pouco se tem registrado. O que sabemos de sua história está registrado no *Sumário Eudemiano* de Proclo (séc. V d.C.). Vale-nos citar os pitagóricos por terem contribuído para a matemática pura e teoria dos números e, pela qualidade de suas descobertas, serem citados por historiadores a respeito de um possível caráter dedutivo em suas realizações. Segundo Domingues (2002):

[4] L'histoire semble bien montrer qu'il y a eu des "preuves" avant la démonstration, c'est-à-dire que l'histoire de la rigueur, dont on sait qu'elle ne s'arrête pas aux Grecs (cL Lakatos, 1984; IREM, 1982), ne commence pas non plus avec eux.

> Muito provavelmente, o máximo que fizeram em seus trabalhos foi encadear raciocínios para estabelecer propriedades e encadear propriedades para deduzir outras propriedades de certa parte da geometria, que privilegiam em função de suas doutrinas, como por exemplo, o estudo dos polígonos e poliedros regulares (DOMINGUES, 2002, p. 58).

Segundo Eves (2004, p.94) foi Tales de Mileto (séc. VI a.C.) que deu a primeira contribuição para o que hoje conhecemos como demonstração. Para este historiador, Tales mediante os raciocínios lógicos e não a partir de intuição ou experiência, chegou aos seguintes resultados:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado;
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais;
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais;
5. Um ângulo inscrito num semi-círculo é reto.

Porém, Boyer (1974) discorda um pouco desta visão de que Tales foi o primeiro a dar um passo em direção à criação de um sistema axiomático dedutivo na matemática:

> Tais referências, no entanto, não trazem mais provas relativas à importante questão de saber se Tales arranjou de fato, ou não, um certo número de teoremas geométricos numa seqüência dedutiva (BOYER, 1974, p. 35).

Contudo, foi Euclides de Alexandria (séc. III a.C.) que deu o passo mais importante para o conceito de demonstração que usamos hoje. Foi ele quem escreveu a obra *Os Elementos* – "uma exposição em ordem lógica dos assuntos básicos da matemática elementar" (BOYER, 1974, p. 77). O que nos interessa ressaltar, é que a obra *Os Elementos* tem sua importância por ser em matemática a primeira obra organizada em definições, postulados, noções comuns (axiomas), teoremas e sua respectiva demonstração usando os postulados, noções comuns e, mais tarde, os teoremas já demonstrados. Esta organização, presente na obra de Euclides, é chamada hoje de axiomática material. A obra de Euclides passou por diversas análises ao longo dos tempos e sofreu muitas críticas, porém ainda é considerada um marco na evolução da matemática e na história das demonstrações. Essas análises e críticas ao trabalho de Euclides são consideradas fatores de desenvolvimento na matemática do século XX. A criação e o desenvolvimento da axiomática, ou seja, do estudo do conjunto dos postulados e suas propriedades deveu-se em parte às críticas e análises dos *Elementos* de Euclides. A maior parte dessas críticas deve-se a inconsistência de algumas propriedades e ao fato de Euclides basear sua obra em observações e fatores materiais.

O problema da inconsistência de uma teoria começou a ser estudado, como vimos anteriormente, e sua solução começou a ser pensada em termos de uma desvinculação de fatores materiais. Segundo Domingues (2002), ao se iniciar o século XIX, a geometria de Euclides ainda se diferenciava devido a sua organização lógica e até o final do mesmo século a demonstração tinha um caráter material e visava convencer a todos da veracidade de uma proposição. Porém, com os questionamentos feitos sobre a obra de Euclides, essa visão foi reformulada. Para Domingues, a partir do matemático G. Frege (1848-1925) e seu logicismo simbólico, passou-se a falar em demonstração cuja idéia pode ser sintetizada como a construção de uma seqüência de proposições tal que (i) primeira é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a procedem na seqüência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar. Domingues considera que houve muitas tentativas de uma nova axiomatização para a geometria euclidiana, desligada de fatores materiais. Dessas tentativas, a mais bem-sucedida foi a de D. Hilbert (1852- 1943) em sua obra *Fundamentos da Geometria*. Hilbert, nessa obra, tenta desvincular a geometria de qualquer conotação material e aceita três conceitos primitivos – ponto, reta e plano – para definir relações mútuas entre esses objetos somente por meio de axiomas. Hilbert foi um marco na história da demonstração, pois inicia uma fase formalista (desvinculada de idéias materiais) para o estabelecimento da verdade, como conhecemos hoje. O esquema a seguir ilustra a evolução da noção de demonstração ao longo dos tempos:

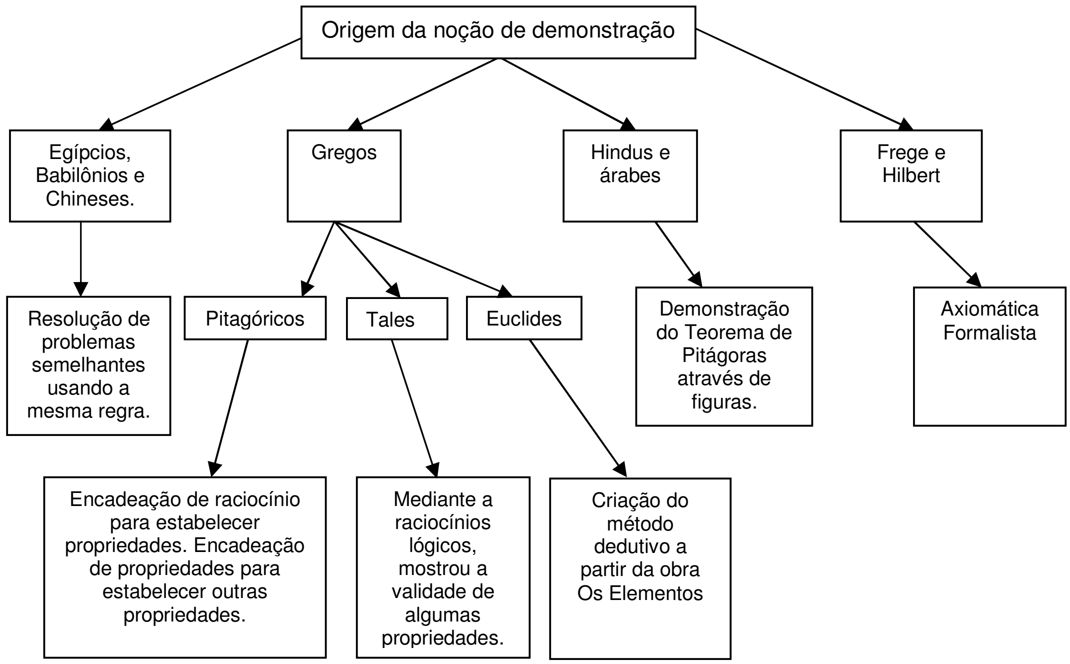


Figura 03: Origem da noção de demonstração

Para finalizar esta análise histórica sobre demonstrações, gostaríamos de abordar a questão da noção de demonstração na matemática escolar.

Acreditamos que a demonstração é uma atividade que caracteriza a matemática e que é interessante introduzi-la no contexto do ensino de matemática. Apesar disso, constatamos por meio da leitura de algumas pesquisas, que esse ensino tem sido extremamente complexo e, por vezes, abandonado.

Percebemos por meio dos trabalhos de Arsac (1987), sobre a história da matemática, que a noção de demonstração teve origem em justificativas mais simples, desprovidas do formalismo grego. A evolução para o que hoje entendemos por demonstração ocorreu de forma gradativa na história. Porém, notamos na história da educação matemática brasileira que o ensino das demonstrações, iniciado de uma maneira muito rigorosa e formalista, foi um dos fatores que fizeram com que o ensino dessa noção fosse abandonado nas escolas, fato que Gouvêa (1998) e Mello (1999) evidenciaram em suas pesquisas.

Balacheff (1982) fala sobre um nível mais simples de demonstração: a prova. Essa nova concepção abriu um novo leque de opções para o trabalho com as demonstrações. No contexto matemático não fazemos distinção entre as palavras prova e demonstração, porém no contexto do ensino da matemática, consideraremos diferenças entre essas duas palavras.

Trataremos dessas idéias mais adiante, porém gostaríamos de destacar que didaticamente consideramos necessário diferenciar prova de demonstração a fim de tentar desenvolver eficazmente na matemática escolar essa atividade tão importante que caracteriza a matemática.

1.3 ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA: PESQUISAS RECENTES

Nesta seção de nosso trabalho estamos interessados em apresentar algumas pesquisas sobre álgebra que, de alguma forma, nos auxiliaram na construção de nossa própria concepção a respeito deste tema e ajudaram na delimitação de nossa temática. A seguir, faremos uma exposição dos pontos principais das pesquisas de Jamal (2004), Cruz (2006) e Santos (2005). Na seção 1.5 teceremos comentários a respeito de como tal pesquisa influenciou a abordagem proposta em nosso trabalho.

1.3.1 JAMAL (2004)

Em sua pesquisa, Jamal (2004) tenta encontrar em documentos curriculares, exames vestibulares e no exame nacional do Ensino Médio (ENEM) indícios que revelem o que se espera que um aluno no final do Ensino Médio tenha aprendido de álgebra. Jamal (2004) analisa as recomendações para o ensino de álgebra na escola básica presentes nos PCN e, também, analisa as questões de álgebra presentes nos vestibulares da FUVEST, VUNESP, UNICAMP e no ENEM. O pesquisador apóia sua pesquisa na noção de pesquisa documental, nas concepções de álgebra de Usiskin (apud JAMAL, 2004) e nas concepções de ensino de Robert (ibidem).

Com a análise dos documentos curriculares e das questões de álgebra presentes nos vestibulares da FUVEST, VUNESP, UNICAMP e no ENEM, Jamal (2004) conclui que a álgebra ocupa um lugar de destaque nos currículos de matemática da educação básica, bem como na parte destinada à matemática nos exames vestibulares supracitados e no ENEM.

Com relação ao currículo de matemática do Ensino Médio sugerido pelos PCN+ (2002), o pesquisador afirma que apesar deste documento propor uma nova organização do ensino baseada no desenvolvimento de competências e habilidades pouco se modificou nos conteúdos a serem abordados nesta etapa da escolaridade.

Com relação ao tratamento dado às questões de álgebra dos exames supracitados, o pesquisador afirma que essas questões não possuem, em geral, uma natureza interdisciplinar. Jamal (2004) nos alerta para o fato de que as questões não procuram relacionar as idéias matemáticas com outras áreas do conhecimento (química, física ou biologia, por exemplo), fazendo articulações apenas entre temas da própria matemática. O pesquisador ainda ressalta que, exceto no ENEM, as questões de álgebra não são contextualizadas com situações do cotidiano.

Com relação aos conteúdos de álgebra presentes nas questões dos exames supracitados, Jamal (2004) afirma que parte deles é abordada no Ensino Fundamental e aparecem em torno de 30% das questões. Para este caso, o pesquisador cita equações do 1º e 2º grau, porcentagens e proporcionalidade (regra de três, mais especificamente) como conteúdos que são abordados nas questões desses exames. Porém, a maioria das questões de álgebra aborda somente conteúdos do Ensino Médio, com maior ênfase no assunto funções.

Jamal (2004) utiliza as concepções de álgebra de Usiskin (apud JAMAL, 2004) para caracterizar as questões dos exames supracitados. O pesquisador conclui que, em geral, as concepções de álgebra envolvidas nas questões desses exames são: a concepção de equação e a concepção funcional. Na primeira concepção as letras são tratadas como incógnitas e na segunda, as letras são usadas como variáveis para expressar relações.

Para tratar do desempenho dos alunos na resolução das questões propostas nos exames supracitados, o pesquisador utiliza as idéias de Robert (apud JAMAL, 2004) sobre nível técnico, mobilizável e disponível do funcionamento do conhecimento. Para Jamal (2004), o baixo desempenho dos alunos nas questões de álgebra nos exames supracitados não está totalmente ligado aos tipos de conteúdos abordados nas questões. Para ele, esse baixo desempenho deve-se ao fato dos alunos não saberem tratar de questões de nível mobilizável, presentes na maior parte do exame, em que os conhecimentos a serem utilizados estão bem identificados, bastando apenas uma adaptação ou reflexão para a resolução da questão.

1.3.2 CRUZ (2005)

Em sua pesquisa, Cruz (2005) investigou a abordagem dada à noção de variável nos livros didáticos do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental brasileiro sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard.

Metodologicamente, a pesquisa de Cruz (2005) é qualitativa e baseada na análise de documentos, que no caso, são 4 das 23 coleções indicadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Segundo Cruz (2005), as 04 coleções escolhidas foram as mais vendidas no estado de São Paulo.

A partir de uma revisão bibliográfica, Cruz (2005) estipulou três aspectos para analisar os livros didáticos:

- Aspecto 01: Os livros didáticos utilizam a história da matemática e a resolução de problemas como estratégia didática para o ensino de álgebra?
- Aspecto 02: Que tipo de abordagem é utilizado para introduzir e desenvolver a álgebra?
- Aspecto 03: Quais são os diferentes usos dados a idéia de variável?

Em sua análise, Cruz (2005) selecionou exercícios que atendessem a cada um dos aspectos citados acima. Em seguida, usando uma adaptação da noção de praxeologia de Chevallard, analisou o tipo de tarefa proposta, a maneira de cumprir essa tarefa e o discurso teórico por traz dela.

Cruz (2005) concluiu que em geral as 4 coleções analisadas utilizam a história da matemática e a resolução de problemas como recurso didático para ensinar álgebra, porém apenas uma delas utiliza a resolução de problemas para introduzir os conteúdos.

Segundo a pesquisadora, as 4 coleções utilizam todas as abordagens da álgebra citadas por Bednarz, Kieran e Lee (apud CRUZ, 2005, p. 36):

- Álgebra como generalização das leis que regem os números;
- Álgebra como regras de transformações e soluções de equações;
- Álgebra como solução de problemas específicos ou classes de problemas;
- Álgebra como introdução de conceitos de variável e função;
- Álgebra como estudo de estruturas algébricas.

Cruz (2004) admite também que as 4 coleções atribuem às variáveis os diversos significados propostos por Usiskin (apud CRUZ, 2005, p. 37):

- Variável como generalizadora de modelos;
- Variável como incógnita;
- Variável como parâmetro;
- Variáveis como sinais arbitrários no papel.

Para finalizar, Cruz (2005) admite que há a presença, em 2 das coleções, de um trabalho de pré-álgebra logo no primeiro livro da coleção. Esse trabalho aparece principalmente por meio do uso da generalização de padrões numéricos e geométricos. Porém faltou a presença de atividades em que o aluno dá sentido às letras a partir de um jogo de codificação-decodificação.

1.3.3 SANTOS (2005)

Santos (2005) investigou as concepções de professores de matemática de Ensino Fundamental e Médio a respeito do ensino de álgebra. A pesquisa de Santos (2005) visa comparar essas concepções com aquelas propostas por Usiskin (apud Santos, 2005, p.25), e com as abordagens de ensino de álgebra sugeridas por Bednarz, Kieran e Lee (apud SANTOS, 2005, p.16).

Concepções de álgebra propostas por Usiskin	Abordagens de ensino de álgebra sugeridas por Bednarz, Kieran e Lee
• Álgebra como aritmética generalizada;	• Generalização das leis que regem os números;
• Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas;	• Regras de transformações e soluções de equações; • Solução de problemas específicos ou classe de problemas;
• Álgebra como estudo de relações entre grandezas;	• Introdução ao conceito de variável e função;
• Álgebra como estudo das estruturas matemáticas.	• Estudo das estruturas algébricas.

A pesquisa de Santos (2005) é considerada descritiva, pois é elaborada a partir da análise qualitativa e quantitativa de questionários respondidos e mapas conceituais elaborados por 28 professores de matemática de Ensino Fundamental e Médio.

A partir da análise dos dados da pesquisa, Santos (2005) conclui que, para os professores entrevistados a álgebra é:

- Concebida como aritmética generalizada (segundo Usiskin) e abordada como generalização das leis que regem os números (segundo Bednarz, Kieran e Lee) para os 28 professores entrevistados;
- Concebida como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas (segundo Usiskin) e abordada como regras de transformações e soluções de equações (segundo Bednarz, Kieran e Lee) para 23 dos 28 professores entrevistados;
- Concebida como estudo das relações entre grandezas (segundo Usiskin) e abordada como introdução do conceito de variável (segundo Bednarz, Kieran e Lee) para 4 dos 28 professores.

Para Santos (2005), o fato dos professores entrevistados admitirem 3 formas diversificadas de concepção e abordagem da álgebra é uma situação promissora para o ensino. Porém, o fato da totalidade de professores tratarem a álgebra como aritmética generalizada e a minoria desses a tratarem como estudo das relações entre grandezas pode habituar o aluno a recorrer sempre a casos particulares deixando de generalizar, ou seja, deixando de desenvolver o pensamento hipotético-dedutivo, tão necessário à demonstração.

1.4 ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES: PESQUISAS RECENTES

Nesta seção de nosso trabalho, apresentamos algumas pesquisas sobre provas e demonstrações que, de alguma forma, nos auxiliaram na construção de nossa própria concepção a respeito deste tema e ajudaram na delimitação de nossa temática. A seguir, faremos uma exposição dos pontos principais das pesquisas de Gouvêa (1999), Mello (1999), Pedemonte (2003), Carlovich (2005) e Pietropaolo (2005). Na seção 1.5 teceremos comentários a respeito de como tal pesquisa influenciou a abordagem proposta em nosso trabalho.

1.4.1 GOUVÊA (1998)

Durante o desenvolvimento de sua pesquisa, Gouvêa se encontrava numa época em que a maioria das escolas públicas havia abandonado o ensino de geometria. Como o ensino da demonstração estava atrelado ao ensino da geometria, conseqüentemente, também havia abandonado o ensino das demonstrações.

Uma das hipóteses da pesquisadora era a de que os professores não ensinavam geometria e, conseqüentemente, as demonstrações devido à falta de habilidade no trato dessas questões em sala de aula. Por este motivo, Gouvêa (1998) elaborou um questionário – para saber quais eram as concepções dos professores sobre esse assunto – e uma seqüência didática envolvendo o ensino de geometria com demonstrações – para aplicar com professores do Ensino Fundamental na tentativa de mudar esse quadro.

A pesquisa de Gouvêa (1998) tinha o objetivo de propor uma reflexão aos professores sobre o ensino de geometria com demonstrações. Essa reflexão foi elaborada principalmente a partir da análise dos questionários e da seqüência didática desenvolvida, que visava a iniciação progressiva do raciocínio dedutivo, tendo em vista a aprendizagem posterior da demonstração para alunos a partir da 7ª série.

A partir da análise dos questionários respondidos pelos professores antes da aplicação da seqüência didática, Gouvêa (1998) concluiu que a maioria dos professores não ensinava geometria com demonstrações, pois subestimavam a capacidade do aluno de fazer conjecturas e elaborar justificativas lógicas. Muito disso se devia a concepção dos professores de que a matemática é uma ciência pronta, definida, acabada e longe da realidade do aluno. Outro fator que prejudicava o trabalho dos professores com a geometria dedutiva era o fato de eles possuírem pouca habilidade com o assunto e também ao fato dos livros didáticos não apresentarem um subsídio ao professor de como esse trabalho deveria ser encaminhado.

A seqüência didática criada pela pesquisadora em questão foi aplicada para um grupo de 12 professores da rede estadual em 5 sessões de 4 horas realizadas aos sábados.

Após a realização da seqüência didática, Gouvêa (1998) constatou que os professores começaram a refletir sobre seus conhecimentos referentes à geometria com demonstrações, fato que deu indícios de um pequeno sucesso com relação à aplicação da seqüência.

Gouvêa (1998) também percebeu, a partir da análise das respostas dadas pelos professores num pré-teste realizado, que antes do início da seqüência didática a metade dos professores verificava por meio de exemplos a veracidade de uma propriedade matemática. Quando houve a exibição de uma figura, os professores se deixavam levar por evidências falsas e não apelavam para demonstração para verificá-las.

Por meio da aplicação de um pós-teste, Gouvêa (1998) percebeu um progresso na visão dos professores sobre as questões da geometria dedutiva, porém ainda constatou certa resistência por parte dos professores em organizar suas respostas na forma de um texto com um desenvolvimento dedutivo baseado nas propriedades que já haviam sido demonstradas.

1.4.2 MELLO (1999)

O objetivo do trabalho de Mello (1999) era elaborar uma seqüência didática para trabalhar o ensino de geometria dedutiva com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Para isso, a pesquisadora elaborou um teste e aplicou com 80 alunos de uma escola pública e 89 alunos de uma escola privada. O objetivo desse teste era obter dados sobre a maneira como os alunos resolvem problemas de geometria e como apresentam suas justificativas. Além disso, o teste também serviu para que Mello (1999) tivesse informações relevantes para construir sua seqüência didática. A partir do teste aplicado Mello (1999) constatou que:

> - Os tipos de erros, entre alunos do colégio particular e estadual, são distintos; provavelmente as concepções sejam distintas.
> - Nenhum aluno das duas escolas conseguiu justificar corretamente o porquê de suas decisões.
> - A figura determinou a criação de hipóteses suplementares não dadas no enunciado.
> - Os alunos do colégio particular não deixaram exercícios sem fazer, com decisões verdadeiras ou falsas. Os alunos do colégio estadual deixaram aproximadamente 50% dos exercícios sem fazer, justificando que desconhecem o assunto (MELLO, 1999, p. 74).

Metodologicamente, a pesquisa de Mello (1999) é caracterizada como uma engenharia didática e é segmentada em fases de análise preliminar, análise *a priori* da seqüência didática, experimentação e análise *a posteriori* da seqüência.

A seqüência didática foi realizada com 14 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola privada. Esses alunos já haviam trabalhado com os conteúdos presentes nas atividades da seqüência em outro “cenário”, sem a exigência de justificativas formais.

O objetivo da seqüência didática era fazer com que o aluno compreendesse o estatuto da definição e do teorema e que ele soubesse utilizar as mudanças de registro de representação e se apropriasse do raciocínio lógico dedutivo das demonstrações.

Após a aplicação da seqüência didática, Mello (1999) constatou uma evolução no trabalho dos alunos com a elaboração de conjecturas e a respectiva justificativa formal. A partir das atividades realizadas os alunos passaram a identificar o estatuto do teorema (o que é hipótese e o que é tese), construir uma figura adequada às hipóteses dadas, organizar logicamente as informações dos problemas e redigir a demonstração (9 dos 12 alunos conseguiram).

A demonstração para Mello (1999) era concebida como uma técnica que permitia ao aluno compreender melhor os conceitos geométricos. O fato de a pesquisadora ter constatado inicialmente um abandono no ensino da geometria dedutiva fez com que ela desse início a sua pesquisa e mostrado, ao final dela, que há possibilidades de sucesso no trabalho dessas questões no Ensino Fundamental.

1.4.3 PEDEMONTE (2003)

O objetivo da pesquisa realizada por Pedemonte (2003) era analisar alguns aspectos existentes na relação entre argumentação e prova em geometria. Em particular, a pesquisadora queria mostrar que uma fenda cognitiva pode ser observada entre uma argumentação abdutiva[5] e a prova dedutiva.

Pedemonte (2003) realizou um projeto com alunos italianos do 12º ano em que um problema de geometria era proposto no *software* Cabri-Géomètre e requeria a produção de conjecturas e a prova relacionada. As produções dos estudantes foram analisadas pela pesquisadora de acordo com o modelo de Toulmin (apud PEDEMONTE, 2003, p. 01). Nesse modelo, Toulmin (apud PEDEMONTE, 2003, p. 03) descreve por intermédio de um esquema a estrutura de uma argumentação:

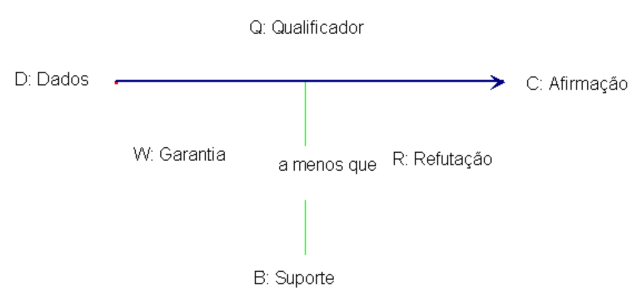


Figura 04: Modelo de argumentação de Toulmin (apud Pedemonte, 2003, p.03)

[5] Abdução refere-se a uma inferência que se inicia de um fato observado ou de uma regra dada. (PEIRCE, 1960 & POLYA, 1962 apud PEDEMEONTE, 2003).

Esse modelo considera que toda argumentação começa com uma afirmação (C), e segue com a produção de um dado para suportá-la. Durante a produção desse dado, é importante fornecer justificativas como uma forma de garantia (W). Aparentemente essa é a base de uma argumentação. Porém, em algumas argumentações podem aparecer mais três elementos, tais como, o qualificador (Q), a refutação (R) e o Suporte (B), iniciando-se um processo de réplica e tréplica em que exceções a regra dada como garantia podem ser encaradas como refutações; essas refutações podem ser qualificadas como falsas ou verdadeiras; e um suporte de maior autoridade é usado para sustentar a garantia e, conseqüentemente, a afirmação.

A pesquisadora admite inicialmente, como hipóteses, que há elementos comuns entre uma argumentação e uma prova, o que indica uma continuidade nos dois processos. Porém, assim como Duval (apud PEDEMONTE, 2003), ela também admite que a estrutura de uma argumentação difere da estrutura de uma prova ou demonstração[6].

Utilizando o modelo de Toulmin (apud PEDEMONTE, 2003), para analisar as produções feitas pelos alunos, Pedemonte (2003) conclui que observou nas transcrições uma possível fenda estrutural entre argumentação abdutiva e uma prova dedutiva, mas também observou uma possível continuidade entre as duas estruturas. Na verdade, a pesquisadora confirmou com sua pesquisa as duas hipóteses admitidas inicialmente em seu trabalho.

1.4.4 CARLOVICH (2005)

Carlovich (2005) em sua pesquisa analisa o uso da geometria dedutiva nos livros didáticos de 1990 e 2000, pois é um período que abrange momentos anteriores e posteriores ao Programa Nacional do Livro Didático – PNLD/1995. A pesquisadora apóia sua pesquisa na noção de pesquisa documental e nos autores Lakatos (apud CARLOVICH, 2005), Balacheff (ibidem), Arsac (ibidem) e Duval (ibidem).

[6] Pedemonte (2003) não diferencia as palavra provas e demonstração.

A pesquisadora diferencia o significado das palavras prova e demonstração segundo Balacheff (apud CARLOVICH, 2005), e utiliza o modelo de Parsysz (ibidem), apresentado a seguir, para categorizar os exercícios dos livros analisados em G1 ou em G2:

Geometrias não axiomáticas	G0 – Geometria concreta G1 – Geometria spatio gráfica	Físico perceptiva
Geometrias axiomáticas	G2 – Geometria proto axiomática G3 – Geometria Axiomática	Teórico dedutiva

Carlovich (2005) utiliza as noções de enfoque empírico, dedutivista e heurístico para categorizar os exercícios dos livros analisados. No enfoque empírico as propriedades são estudadas com observação de casos particulares. No enfoque dedutivista as propriedades são estudadas por meio da apresentação de sua demonstração seguida apenas de exercícios de aplicações. Neste enfoque usam-se propriedades anteriores para deduzir as propriedades novas. No enfoque heurístico as propriedades são estudadas envolvendo-se os alunos em suas demonstrações por meio da solicitação de exercícios.

Como conclusão a pesquisadora apresenta que, de modo geral, as coleções de 1990 tratam da geometria nos últimos capítulos do livro, enfocando dedutivamente (em G2) a maioria das propriedades e dando pouco valor ao enfoque empírico ou heurístico. Não há, de maneira geral, o uso adequado da palavra "demonstração" nem uma explicação adequada quando esta é usada. As coleções de 2000 tratam da geometria intercaladamente, relacionando-a a outros conteúdos. Há uma diminuição no enfoque dedutivo de propriedades geométricas e um aumento no enfoque empírico e heurístico. Tanto em 1990 quanto em 2000 utilizavam-se em sua maioria os registros figurais e discursivos e pouco o registro algébrico. A pesquisadora considera o enfoque empírico-heurístico o mais significativo para o estudo das propriedades geométricas.

1.4.5 PIETROPAOLO (2005)

Em sua pesquisa, Pietropaolo (2005) identifica e analisa pontos de vista diferentes sobre a implementação de provas e demonstrações na escola básica, bem como as mudanças que essa inovação traria aos currículos de formação de professores de matemática. O pesquisador apóia sua pesquisa na noção de pesquisa documental, em entrevistas, questionários e nos autores Balacheff (apud PIETROPAOLO, 2005), Healy e Hoyles (ibidem), Knuth (ibdem), Dreyfus (ibidem), Garnica (ibidem), Reid (ibidem), Godino e Récio (ibidem), Tarski (ibidem) dentre outros.

Pietropaolo (2005) não diferencia as palavras prova e demonstração, porém aponta que essa diferenciação é tomada por alguns autores. O pesquisador utiliza as palavras como sinônimas, porém admite um sentido mais amplo para elas.

Para estabelecer suas conclusões, Pietropaolo (2005) faz uma revisão bibliográfica interessante, buscando, inclusive, informações sobre a história do ensino de provas e demonstrações nos currículos da escola básica e do ensino superior. O pesquisador também utiliza questionários e entrevistas aplicados a dois grupos distintos: um formado por professores da escola básica e outro formado por pesquisadores e professores do ensino superior, obtendo, assim, a fala da “prática” e da “teoria”, respectivamente.

Em suas considerações finais, Pietropaolo (2005) observa que há um consenso entre os professores e os pesquisadores a respeito da relevância do ensino de provas e demonstrações na escola básica desde que se amplie o significado dessas palavras com a inclusão das verificações empíricas e a partir de um processo de questionamento, conjecturas, contra-exemplos, refutações, aplicações e comunicações.

Com relação às possíveis mudanças nos cursos de formação de professores, Pietropaolo (2005) observa um consenso entre os professores e pesquisadores com relação à necessidade dos conteúdos tradicionalmente abordados no Ensino Médio também serem abordados nos cursos de formação de professores de modo mais profundo e com a utilização de demonstrações. Outro consenso detectado pelo pesquisador diz respeito à forma como as demonstrações devem ser trabalhadas no ensino superior. Ambos os grupos, professores e pesquisadores, defendem que os alunos dos cursos de licenciatura em matemática devem vivenciar situações de demonstrações análogas àquelas que irão desenvolver com seus alunos, ou seja, num sentido mais amplo, considerando a formulação de conjecturas e verificações empíricas. Há também, para os dois grupos, a necessidade do professor construir no curso superior conhecimentos além daqueles que vai ensinar, como um “estoque complementar” [7].

1.5 LEITURAS DE TRABALHOS CORRELATOS: CONTRIBUIÇÕES DADAS A ESTA PESQUISA.

As pesquisas que lemos a respeito do ensino e aprendizagem de álgebra, e de provas e demonstrações na educação básica, contribuíram para nosso trabalho de diversas maneiras. Primeiramente, nos ajudaram a formar nossa própria concepção de álgebra, de provas e demonstrações a partir dos diversos pontos de vistas usados ao tratar das problemáticas referentes a este tema. Além disso, alguns de seus resultados nos permitiram o levantamento de questionamentos e o direcionamento do tema de nosso trabalho. Não podemos deixar de mencionar que tais resultados também serviram de sustentação a algumas inferências feitas por nós ao longo da análise proposta no capítulo 3. A seguir trataremos detalhadamente dos aspectos mencionados neste parágrafo.

No momento em que iniciamos este trabalho, tínhamos algumas idéias a respeito do que seria a álgebra, uma prova e uma demonstração. Tais idéias eram baseadas em nossa experiência como alunos na graduação e/ou como professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio. A vivência no curso de mestrado nos trouxe uma nova visão a respeito dos mesmos temas: uma visão acadêmica, científica, repleta de reflexões e questionamentos. Todas as leituras nessa temática que realizamos no curso de mestrado serviram de alguma maneira para complementar, delinear e até mesmo mudar algumas de nossas idéias a respeito da álgebra, das provas e demonstrações.

Com relação ao ensino e aprendizagem de álgebra, as pesquisas de Jamal (2004), Cruz (2005) e Santos (2005) trouxeram, respectivamente, contribuições no que tange a visão curricular e a influência dos exames vestibulares no ensino de

[7] Essa expressão foi utilizada por alguns professores e pesquisadores durante as entrevistas realizadas por Pietropaolo (2005).

álgebra, a visão de álgebra presente nos livros didáticos do ensino fundamental e, por fim, as concepções de álgebra presentes no discurso do professor.

Particularmente, a leitura de Jamal (2005) nos permitiu perceber que, em termos da influência de documentos oficiais e exames vestibulares, espera-se que o aluno, ao final do Ensino Médio, domine os seguintes conteúdos algébricos: equações do 1º e do 2º grau, porcentagem, proporcionalidade e funções. Tais conteúdos enfocam a concepção de equação e a concepção funcional proposta por Usiskin (1995).

A pesquisa de Cruz (2005) nos foi importante em dois aspectos. O primeiro diz respeito à metodologia. A pesquisadora utilizou a noção de praxeologia de Chevallard para analisar livros didáticos. Como em nossa pesquisa faremos o mesmo, a leitura foi útil no sentido de servir como exemplo de análise de livros didáticos usando o referencial teórico de Chevallard. Além disso, foi por meio do trabalho dessa pesquisadora que entramos em contato pela primeira vez com as concepções de Usiskin (1995) que usaremos em nossa análise.

A pesquisa de Santos (2005) foi importante para nós por mostrar como as concepções de álgebra de Usiskin (1995) estão presentes no discurso do professor de matemática. Percebemos com essa leitura que professores do Ensino Fundamental e Médio admitem três das quatro concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995), dando mais ênfase à concepção de álgebra como aritmética generalizada.

Com relação ao ensino e aprendizagem de provas e demonstrações, as pesquisas de Gouvêa (1998), Mello (1999), Pedemonte (2003), Carlovich (2005) e Pietropaolo (2005) trouxeram muitas contribuições, pois ou propuseram seqüências de atividades para professores e alunos, revelando as problemáticas desse ensino e aprendizagem, ou propiciaram um momento de reflexão a respeito da ampliação do significado das provas e demonstrações para o ensino e as conseqüências dessa ampliação para os currículos.

A pesquisa de Gouvêa (1998) nos foi de extrema valia. Primeiramente, a partir dela tivemos um primeiro contato com os principais pesquisadores na área do ensino de provas e demonstrações. Além disso, alguns de seus resultados mostraram para nós informações importantes sobre a visão do professor no que diz respeito às demonstrações em geometria. Um deles que consideramos de grande importância foi a constatação de que os professores não ensinavam provas e demonstrações, pois subestimavam a capacidade do aluno em entender tais noções. Esse fato nos fez questionar se o pouco uso de tarefas de provas e demonstrações nos livros didáticos do Ensino Médio pode se dever ao mesmo pensamento por parte dos autores. Gostaríamos de finalizar destacando que a pesquisa de Gouvêa (1998) também nos fez perceber a necessidade de estudar a problemática das provas e demonstrações do ponto de vista algébrico e dos livros didáticos, já que a pesquisadora em questão tratou do ensino de geometria com ênfase na visão do professor.

As contribuições de Mello (1999) foram significativas, pois nos mostraram que o trabalho com seqüências didáticas, que levam em consideração a formulação de conjecturas e as devidas justificativas, pode possibilitar a evolução do discurso do aluno frente a situações de prova ou demonstrações. Além disso, essa pesquisa reforçou nosso interesse em estudar a problemática das provas e demonstrações em conteúdos algébricos em livros didáticos, visto que Mello (1999) enfatiza a visão do aluno em geometria.

Por se tratar de uma pesquisa realizada em outro país, Pedemonte (2003) nos mostrou que a problemática das provas e demonstrações não é somente uma questão brasileira. Também nos mostrou de uma maneira estrutural como é o processo de produção de uma prova pelos alunos. Mais uma vez, por se tratar de um trabalho focado na geometria, reforçamos nosso apelo pelo estudo da problemática das provas e demonstrações em álgebra.

A pesquisa de Carlovich (2005), por ser focada na análise de livros didáticos, foi para nós um modelo de análise de conteúdos nas coleções. Por ser de um tema correlato ao nosso, nos trouxe informações sobre referenciais teóricos na área do ensino e aprendizagem de provas e demonstrações. Além disso, nos permitiu a elaboração de hipóteses para nossa pesquisa, visto que trata da mesma problemática do ponto de vista do livro didático, porém na geometria do Ensino Fundamental.

O trabalho de Pietropaolo (2005) nos trouxe informações sobre as provas e demonstrações sob dois pontos de vista diferentes: o dos professores e o do currículo da educação básica. O trabalho deste pesquisador nos revelou principalmente a necessidade da ampliação do significado da ação de provar no contexto educacional. Além disso, nos mostrou que tal ampliação deveria vir com possíveis mudanças curriculares nos cursos de graduação, visto que professores e pesquisadores mencionaram durante a pesquisa a importância de se vivenciar na graduação experiências de prova e demonstração similares àquelas que vão ensinar aos alunos.

1.6 DOCUMENTOS OFICIAIS DA EDUCAÇÃO BRASILEIRA

O ministério da Educação brasileiro elaborou, com o auxílio de profissionais de cada área do conhecimento, alguns documentos oficiais para nortearem a educação em nosso país. Tais documentos apresentam recomendações para o trabalho escolar no Ensino Fundamental e Médio. Em nosso trabalho, faremos uso desses documentos a fim de obtermos referências nacionais sobre o ensino de matemática, mais especificamente, sobre o ensino de álgebra, provas e demonstrações. Dentre os documentos oficiais, utilizaremos em nossa pesquisa os intitulados Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF) de 1998, Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) de 2002, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCN+) de 2002 e Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006.

Tentando buscar algumas informações sobre as raízes do ensino de provas e demonstrações na educação básica[8], fizemos uma leitura dos PCNEF (1998). Nesse documento encontramos uma referência ao ensino de provas e demonstrações como parte integrante de atividades empíricas de descoberta de conceitos:

> Apesar da força de convencimento para os alunos que possam ter esses experimentos com material concreto ou com a medição de um desenho, eles não se constituem provas matemáticas. Ainda que essas experiências

[8] Segundo o Ministério da Educação, a Educação Básica brasileira é composta pela Educação infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio (disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/index.php?option=com_content&task =view&id=715).

> possam ser aceitas como “provas” no terceiro ciclo, é necessário, no quarto ciclo, que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais (BRASIL, 1998, p. 86).

Com o foco voltado para o Ensino Médio, fizemos uma leitura dos PCNEM (2002), PCN+ (2002) e das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006).

Nos PCNEM (2002) encontramos indícios da valorização do raciocínio dedutivos ao se tratar de questões da matemática:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 2002, p. 40).

Também encontramos nos PCNEM (2002) elementos que mostram uma preocupação com o ensino de provas e demonstrações:

> Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 2002, p. 40).

Nos PCN+ (2002) encontramos elementos que reforçam a importância do ensino e aprendizagem de provas e demonstrações:

> Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no Ensino Médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática (BRASIL, 2002, p. 124).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) ratificam as idéias sobre o ensino de provas e demonstrações no Ensino Médio.

Apesar dos documentos analisados tratarem do ensino de provas e demonstrações no Ensino Fundamental e Médio, percebemos que há uma valorização desses temas quando os documentos tratam de conteúdos de geometria. Pouco é mencionado sobre as relações desses temas com os conteúdos de álgebra.

> O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. [...] Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática. Esse é o caso, por exemplo, da geometria clássica (BRASIL, 2002, p. 125).

Algumas das pesquisas que lemos e discutimos em tópicos anteriores abordaram a problemática das provas e demonstrações do ponto de vista da geometria. Esse foi, inclusive, um dos motivos que nos levou a utilizar a visão da álgebra. Para reforçar ainda mais essa necessidade, notamos nos documentos oficiais da educação brasileira que analisamos, uma valorização desta temática em geometria. Nós concordamos que a geometria seja um "terreno fértil" para o ensino de provas e demonstrações na matemática escolar, porém consideramos prejudicial a restrição desse ensino somente a conteúdos geométricos. Tal restrição poderia, por exemplo, fazer com que o aluno entenda que só existem teoremas geométricos ou que somente as propriedades geométricas devem ser justificadas com certo rigor matemático.

É fácil perceber porque a geometria é uma área da matemática boa para se trabalhar com as provas e demonstrações. É uma questão histórica. Um dos primeiros documentos a apresentar uma estrutura dedutiva, com postulados, axiomas, definições e demonstrações logicamente organizadas foram *Os Elementos* de Euclides no século III a.C. aproximadamente. Essa obra é uma sistematização dos conhecimentos matemáticos da época e contém o modelo de geometria admitido até hoje no ensino não só brasileiro, mas mundial. Contudo, a matemática se desenvolveu e a álgebra também. Hoje somos privilegiados por dispor de uma linguagem unificadora e universal para a apresentação de propriedades matemáticas. Sem contar, que até mesmo as demonstrações da geometria utilizam elementos da álgebra. É muito difícil dissociar a linguagem algébrica das demonstrações. Então, por que não ensinar nossos alunos provas e demonstrações também em conteúdos de álgebra? O que isso implicaria? Quais conhecimentos seriam necessários para os alunos e professores terem? Questões como essas merecem ser discutidas, visto que o ato de demonstrar é essencialmente importante para a matemática. Infelizmente nossa pesquisa não trará respostas para todas elas, mas vale como momento de reflexão.

Após a discussão sobre o tratamento dado às provas e demonstrações nos documentos oficiais da educação brasileira, verificaremos de que maneira o ensino de álgebra é abordado nesses mesmos documentos.

Para desenvolvermos uma noção de como esses documentos enxergam o ensino de álgebra, nós resolvemos iniciar nossa pesquisa pelos PCNEF (1998).

Percebemos que para os PCNEF (1998) o ensino de álgebra no Ensino Fundamental está ligado ao ensino das várias facetas que as letras podem assumir. Segundo os PCNEF (1998), a partir de atividades que envolvam generalização de padrões, resolução de equações, relações entre grandezas e a manipulação de símbolos abstratos, os alunos podem construir um significado mais amplo e conciso sobre o que é a álgebra. Vejamos o quadro proposto pelo documento:

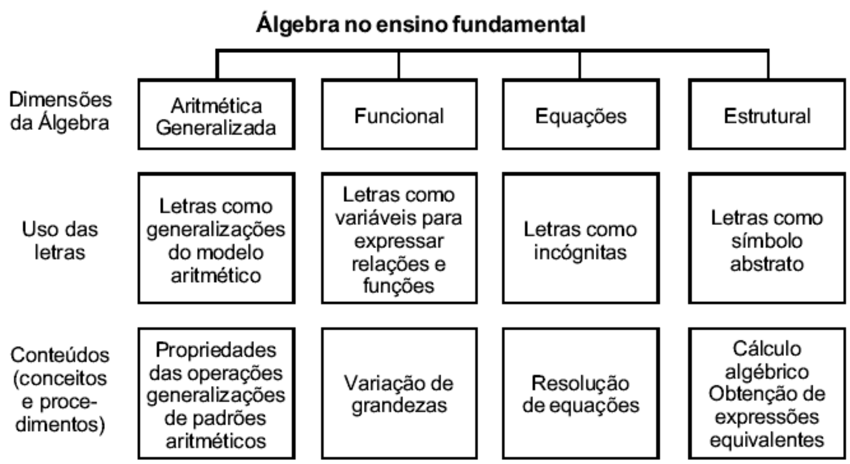


Figura 05: Quadro sobre a álgebra no Ensino Fundamental (Brasil, 1998, p. 116).

Nos PCNEF (1998), percebemos que a álgebra é encarada como um objeto da matemática que faz com que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de se constituir como uma ferramenta para resolver problemas. O documento enfatiza que o ensino de álgebra deve ser iniciado nas séries iniciais do 3º ciclo[9], com o que, intitulam de “pré-álgebra”. Nessa fase da

[9] 5ª e 6ª séries.

escolarização, os PCNEF (1998) indicam um trabalho algébrico ligado à aritmética generalizada. Esse trabalho deve prosseguir gradativamente até as séries finais do Ensino Fundamental, momento em que trabalharemos a álgebra sobre o enfoque funcional.

Como o foco de nossa pesquisa está voltado ao Ensino Médio, fizemos uma análise dos PCNEM (2002), dos PCN+ (2002) e das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) com o intuito de verificar como o ensino de álgebra é tratado nesses documentos.

Os PCNEM (2002) tratam do ensino de matemática de uma maneira geral, atendo-se mais aos objetivos da matemática como área de conhecimento para os alunos do Ensino Médio. Nesse documento aparece uma sugestão de divisão do ensino de matemática em áreas, visando o aprofundamento das questões tratadas no Ensino Fundamental e a formação do aluno como cidadão:

> Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações (BRASIL, 2002, p. 40).

Nos PCN+ (2002) encontramos maiores explicações a respeito da divisão do ensino de matemática em áreas temáticas, bem como uma sugestão da maneira como os conteúdos podem ser trabalhados.

Uma das áreas temáticas sugeridas pelos PCN+ (2002) intitula-se “Álgebra: números e funções”. Nessa área temática sugere-se o seguinte tratamento da álgebra:

> No ensino médio, esse tema trata de números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos, no sentido de serem completos. Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais (BRASIL, 2002, p. 120).

Os PCN+ (2002) valorizam demasiadamente o ensino de funções e consideram o ensino de trigonometria como parte integrante da área temática “Álgebra: números e funções”. Além disso, esse documento valoriza o ensino das seqüências vinculado ao ensino das funções e sugerem a extensão dos conhecimentos matemáticos do aluno por meio do incentivo ao ensino das equações polinomiais e sistemas lineares.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), último documento oficial publicado pelo governo, já oferece uma divisão diferente do ensino da matemática em relação aos PCN+ (2002). Essa nova divisão não tem como finalidade a decomposição da matemática em blocos desconectados e sim uma melhor organização dos conteúdos para o ensino:

> Neste documento, os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: *Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade.* Isso não significa que os conteúdos desses blocos devam ser trabalhados de forma estanque, mas, ao contrário, deve-se buscar constantemente a articulação entre eles (BRASIL, 2006, p. 70).

Apesar dessa nova divisão proposta nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), no que diz respeito à álgebra, o ensino das funções continua tendo maior destaque.

Com essa breve análise dos documentos oficiais, percebemos que no Ensino Médio a álgebra também é considerada uma área da matemática que possibilita o estudo das letras em suas várias facetas. Apesar disso, esses documentos sugerem para o Ensino Médio um excessivo trabalho com funções, o que faz a concepção funcional ter mais destaque do que as outras propostas por Usiskin (1995). A sugestão do trabalho com as outras facetas da álgebra – letra como generalizadora, letra como incógnita e letra como sinal no papel – ao longo do Ensino Médio aparece de maneira tímida em temas como Conjuntos Numéricos, Matrizes e Determinantes, Sistemas Lineares e Equações Polinomiais.

1.7 A NOÇÃO DE DEMONSTRAÇÃO E A NOÇÃO DE CONJUNTO

Gostaríamos de nos dedicar nesta seção ao estudo dos objetos matemáticos presentes no cerne desta pesquisa. Trataremos, pois, da noção de demonstração e da noção de conjunto.

Para iniciar esta discussão, nos remeteremos aos estudos de Chevallard (apud PAIS, 2002) sobre noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas.

Segundo Chevallard (apud PAIS, 2002), uma noção é matemática quando é caracterizada por um conceito matemático ensinado e avaliado explicitamente. Sendo assim, conjuntos, funções e matrizes são exemplos de noções matemáticas.

Já as noções paramatemáticas são:

> [...] idéias que se caracterizam como "ferramentas" auxiliares à atividade matemática, mas que normalmente não se constituem em objetos de um estudo específico (CHEVALLARD, apud PAIS, 2002, p. 33).

Deste modo, as noções de axioma, definição e demonstração são exemplos de noções paramatemáticas. Essas noções normalmente não são ensinadas explicitamente. Os alunos as internalizam no transcorrer da aprendizagem de uma noção matemática.

Outras noções importantes, que não derivam necessariamente do ensino da matemática, como ler ou formular uma questão, são chamadas de noções protomatemáticas.

> As noções protomatemáticas formam uma categoria de habilidades que não se referem diretamente às noções matemáticas em si, mas que são exigidas de uma forma implícita na sua aprendizagem escolar (CHEVALLARD, apud PAIS, 2002, P. 34).

Nesta pesquisa levamos em consideração que *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* são noções matemáticas que geralmente constituem um capítulo nos livros didáticos e são ensinadas de maneira explícita aos alunos. Já a demonstração consiste numa noção paramatemática, cujo ensino estaria vinculado ao ensino de uma noção matemática. Particularmente neste trabalho, trataremos a noção de demonstração vinculada ao ensino das noções de *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*, o que não significa que essa mesma noção não possa estar vinculada ao ensino de outras noções matemáticas.

Obter uma definição matemática para a noção de conjunto não é uma tarefa tão difícil. Encontramos uma em Courant e Robbins (2000):

> O conceito de classe ou conjunto de objetos é um dos mais fundamentais na Matemática. Um conjunto é definido por qualquer propriedade ou atributo $\mathcal{U}$ que cada objeto considerado deve ter ou não; aqueles objetos que têm a propriedade formam um conjunto A correspondente (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 130).

Atribui-se a Georg Cantor (1845-1918) o desenvolvimento, em 1874, da teoria dos conjuntos, fato que proporcionou avanços não antes sonhados em várias áreas da matemática. Além disso, essa teoria constituiu-se uma base sólida para a aritmética transfinita, proposta também por Georg Cantor. Boyer (1974) e Eves (2004) ressaltam:

> Os incríveis resultados de Cantor o levaram a estabelecer a teoria dos conjuntos como uma disciplina matemática completamente desenvolvida, chamada *Mengenlehre* (teoria das coleções) ou *Mannigfaltigkeitslenhre* (teoria das multiplicidades) ramo que em meados do século XX teria efeitos profundos sobre o ensino da matemática (BOYER, 1974, p. 394).
>
> [...] há a enorme importância que a teoria assumiu em praticamente todo corpo da matemática. Ela enriqueceu, tornou mais claros e generalizou muitos domínios da matemática, e seu papel no estudo dos fundamentos da matemática é essencial. E constituiu também um dos elos de ligação entre a matemática, de um lado, e a filosofia e a lógica de outro (EVES, 2004, p. 662).

O poder unificador da teoria dos conjuntos fez com que seu ensino chegasse rapidamente às escolas de todo o mundo. O grupo Bourbaki, a partir de 1939, foi o responsável pela disseminação dessa teoria no ambiente escolar. Nascia, então, o Movimento da Matemática Moderna. O que parecia ser a solução dos problemas do ensino de matemática se tornou um grande tormento. A teoria dos conjuntos começou a ser usada em sala de aula em situações em que não ajudava a simplificar e a tornar as coisas mais claras. O alto grau de abstração de alguns de seus conceitos fez com que para muitos ela se tornasse algo inalcançável. O Movimento da Matemática Moderna caiu e com ele surgiu uma ojeriza à teoria dos conjuntos no ambiente escolar. Atualmente, os livros didáticos trazem elementos dessa teoria apenas no início do Ensino Médio, quando trazem.

Para a noção de demonstração também encontramos uma definição matemática interessante em Sant'Anna (2003):

> Uma demonstração ou prova em uma teoria formal T é uma seqüência finita $B_1, B_2, \dots, B_n$ de fórmulas bem formadas de T tal que cada B_i dessa seqüência é um axioma ou uma conseqüência direta de pelo menos alguma(s) das fórmulas bem formadas que antecedem B_i, via uso de alguma regra de inferência da teoria (SANT'ANNA, 2003, p. 19).

Ainda em Sant'Anna (2003) encontramos uma ressalva a respeito do significado da demonstração:

> Além da noção aqui dada, a palavra demonstração admite pelo menos mais uma acepção em matemática. Pode se referir a uma seqüência finita de sentenças expressas em linguagem natural (por exemplo, português) e complementadas com termos técnicos próprios da linguagem Λ de uma teoria formal T e que visam oferecer algum tipo de argumento (em sentido intuitivo da expressão) para uma dada declaração ou fórmula da teoria T dita teorema em T (SANT'ANNA, 2003, p. 21).

Notemos que para Sant'Anna (2005) não há distinção entre as noções de demonstração e prova. De fato, sabemos que para alguns Matemáticos provar e demonstrar são ações equivalentes. Elas remetem a uma tentativa de validar uma proposição com base em outras proposições que são verdadeiras.

Dentro do contexto educacional, na tentativa de tornar mais abrangente a ação de provar, Balacheff (1982) diferencia as palavras prova e demonstração. Contudo, num trabalho posterior (BALACHEFF, 2004), admite que não há um consenso sobre o que é provar ou demonstrar no contexto da Educação Matemática:

> Nós usamos em nossa área de pesquisa um grande número de palavras chave, dentre as quais: prova, argumentação, justificação, validação... mas, para cada uma delas, nós temos em mente diferentes significados quando tomamos a matemática como uma referência (BALACHEFF, 2004, p. 12, tradução nossa[10]).

Ao expormos de maneira sucinta algumas considerações sobre as noções de demonstração e conjuntos, percebemos, que estas são para os matemáticos algo de extrema importância, mas são para os educadores matemáticos algo de extremo transtorno. Ao mesmo tempo em que a noção de conjunto é unificadora de conceitos matemáticos, ela é por vezes descartada no ensino devido a cicatrizes do traumático Movimento da Matemática Moderna. Ao mesmo tempo em que a demonstração é um meio de validação em matemática, seu significado é motivo de discórdia entre os educadores matemáticos.

---

[10] We use in our field of research a rather large number of key words, among which: proof, argumentation, justification, validation… but, for each of them, we have in mind slightly different meanings when taking mathematics as a reference.

No cerne de nossa pesquisa estão essas duas noções, uma matemática e outra paramatemática. A polêmica em torno dessas duas noções ressalta ainda mais a importância deste trabalho para a educação matemática, no sentido deste ser necessário para mostrar como é feita pelos livros didáticos a abordagem das provas e demonstrações num conteúdo algébrico como *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*.

2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS E PROBLEMÁTICA DE PESQUISA

Nesta seção da pesquisa apresentaremos os dois referenciais teóricos que sustentarão nossa análise, as concepções de álgebra, prova e demonstração que usaremos no trabalho, nosso problema de pesquisa, a escolha dos livros didáticos, o conteúdo analisado, os critérios de análise e as devidas justificativas.

No que tange a questão do referencial teórico, apresentaremos a noção de praxeologia de Chevallard (1999) que nos ajudará a analisar do ponto de vista matemático e didático as tarefas de prova e demonstração que aparecem nos livros durante a abordagem da noção de *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*. Analogamente, mostraremos a diferenciação entre prova e demonstração e os níveis de prova propostos por Balacheff (1982, 1988) que nos permitirão caracterizar as tarefas mostradas ou solicitadas ao aluno durante a abordagem do mesmo conteúdo algébrico.

Com relação às concepções, explicitaremos aquelas construídas a partir das leituras realizadas, referentes à álgebra e às demonstrações, que usaremos efetivamente em nossa pesquisa.

Apresentaremos nosso problema de pesquisa, nossas justificativas e os procedimentos e critérios utilizados na coleta e análise de dados.

2.1 CHEVALLARD (1999)

Yves Chevallard é um pesquisador francês que, dentre outros interesses, concentrou-se no desenvolvimento da Teoria Antropológica[11] do Didático (TAD). A teoria de Chevallard (1999) se apóia na idéia de que toda atividade humana, realizada regularmente, pode ser descrita a partir de um modelo único chamado de praxeologia. Segundo Chevallard, toda atividade humana pode ser categorizada em

[11] O pesquisador atribui a sua teoria o adjetivo “antropológico”, pois considera que esta ajuda a estudar o homem frente às situações didáticas.

quatro grupos: tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Esta organização das atividades humanas em tarefa, técnica, tecnologia e teoria, proposta por Chevallard (1999), é chamada de praxeologia ou organização praxeológica.

No que diz respeito às tarefas, Chevallard (1999) as considera como sendo tudo aquilo que é pedido para uma pessoa fazer. As tarefas são designadas por verbos como: **cantar** uma música, **correr** na praia, **calcular** o valor de x, etc. Toda tarefa faz parte de uma rede mais ampla chamada de tipo de tarefa. Da mesma forma, todo tipo de tarefa faz parte de uma rede mais ampla chamada de gênero de tarefa. Podemos exemplificar:

> **Tarefa:** Demonstre que, se (a_1, a_2, a_3,...) é uma Progressão Geométrica, com todos os termos diferentes de zero, então ($\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_3},...$) também é uma progressão geométrica.
>
> **Tipo de tarefa:** Demonstrar propriedades em álgebra.
>
> **Gênero de tarefa:** Demonstrar propriedades matemáticas.

Segundo Chevallard (1999), uma técnica é uma maneira de fazer uma tarefa, ou seja, é o saber fazer. Uma técnica não precisa ter necessariamente uma natureza algorítmica e pode ser superior ou inferior a outra técnica. Para o exemplo acima, a técnica consistiria em:

> 1. Considerar que o fato de (a_1, a_2, a_3,...) ser uma progressão geométrica com todos os termos diferentes de 0 é uma verdade admitida inicialmente, ou seja, uma hipótese.
> 2. Considerar como tese ou propriedade a demonstrar, o fato de $\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_3},...\right)$ também ser uma progressão geométrica.
> 3. Considerar que para demonstrar a propriedade em questão deve-se trabalhar com as hipóteses de modo a chegar à tese.
> 4. Considerar que o fato de (a_1, a_2, a_3,...) ser uma progressão geométrica com todos os termos diferentes de 0 significa que $\left(\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\right.$ ke k≠0.
> 5. Considerar que se $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}=k\right)$ então $\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{k}\right)$ para k≠0.

6. Considerar que o fato de $(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ...)$ também ser uma progressão geométrica significa que $\left(\frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1}} = \frac{\frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_2}} = \cdots = \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n-1}}} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{k}\right)$ e $k \neq 0$.

7. Considerar que o enunciado é verdadeiro e está demonstrado, pois o tratamento feito na hipótese possibilitou chegar à tese.

É muito comum em pesquisas utilizar as idéias de tarefa e técnica de Chevallard (1999) agrupadas num bloco prático-técnico. Consideraremos aqui, como bloco prático-técnico, aquele que contém um tipo de tarefa e uma determinada maneira de fazer tarefas deste tipo.

Segundo Chevallard (1999), uma tecnologia é todo discurso racional que justifica e esclarece uma técnica. Da mesma forma, Chevallard (1999) considera uma teoria todo discurso que justifica a tecnologia.

É também comum em pesquisas utilizar as idéias de tecnologia e teoria de Chevallard (1999) agrupadas num bloco tecnológico-teórico. Consideraremos aqui como bloco tecnológico-teórico aquele que contém uma teoria que justifica uma tecnologia. Para o exemplo acima o bloco tecnológico-teórico seria composto pela (o):

1. Noção de hipótese e tese de um teorema;
2. Noção de Demonstração;
3. Dedução: encadear propriedades já conhecidas para estabelecer a validade de uma nova propriedade;
4. Definição de Progressão Geométrica;
5. Tratamento algébrico.

Chevallard (1999) observa algumas problemáticas quando falamos de praxeologia: (i) uma praxeologia pode envelhecer, ou seja, seus componentes tecnológicos e teóricos podem perder o crédito e (ii) novas praxeologias podem surgir e se reproduzir de uma instituição para outra. Quando uma praxeologia se movimenta de uma instituição para outra, dizemos que houve uma transposição. Se essa instituição for uma escola ou uma sala de aula, dizemos que houve uma transposição didática.

A teoria de Chevallard, mais precisamente a idéia de praxeologia proposta por ele, nos interessa nesta pesquisa, pois oferece um quadro teórico para a análise de livros didáticos. Adiante, faremos uma adaptação dessas idéias a nossa pesquisa para que possamos utilizá-las de maneira coerente e precisa na análise dos livros didáticos.

2.2 BALACHEFF (1982; 1988)

Balacheff (1982) considera que as palavras *explicação, prova e demonstração* aparecem como sinônimos nos enunciados dos problemas em matemática, mas possuem significados diferentes. Para esse pesquisador, explicação é um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade de uma proposição ou de um resultado. Prova é uma explicação aceita por certa comunidade. Demonstração é uma prova particular, aceita pela comunidade matemática e constituída a partir de uma seqüência de enunciados, organizados com certas regras.

Segundo Balacheff (1982), a demonstração é um tipo privilegiado de prova que envolve uma prática que permite comunicação e evolução dentro da comunidade matemática.

Num trabalho posterior, Balacheff (1988) admite vários níveis de prova na matemática escolar e considera a demonstração uma prova de nível mais elevado que deve ser almejada durante o ensino da matemática. Segundo esse pesquisador, existem basicamente dois tipos de prova: a prova pragmática e a prova conceitual. São consideradas pragmáticas as provas que se apóiam em ações atuais ou “mostrações”. Ao contrário disso, as provas conceituais se apóiam em formulações de propriedades e as possíveis relações entre elas. Neste contexto, as demonstrações seriam um tipo de prova conceitual.

Balacheff (1988) admite que, o movimento das provas pragmáticas para as provas conceituais repousa inicialmente em tomar conhecimento da qualidade genérica das situações consideradas. Nesse contexto, o uso da língua natural pode auxiliar essa movimentação desde que usada num sentido mais amplo:

> [...] A língua diária, que é essencial, deve ser mais do que isto para produzir provas "formais". A língua deve se tornar uma ferramenta para deduções lógicas e não somente um meio de comunicação. (BALACHEFF, 1988, p. 217, tradução nossa)[12].

Segundo o pesquisador, o movimento em direção às provas conceituais exige uma *descontextualização*, *despersonalização* e *destemporalização* do objeto em questão. Balacheff (1988) considera que um objeto é descontextualizado quando passamos a pensar nele como um ente de uma classe de objetos. A despersonalização ocorre quando tornamos independente uma ação sobre o objeto, não considerando quem ou o que a realizou. Por fim, a destemporalização ocorre quando separamos as operações sobre o objeto de seu tempo e sua duração.

Balacheff (1988) admite vários níveis de provas pragmáticas e provas conceituais. São eles:

- *Empirismo ingênuo:* Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização.
- *Experimento Crucial:* Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar.
- *Exemplo Genérico:* Consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos.
- *Experimento de pensamento:* consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica após a internalização de ações realizadas sobre as proposições em questão. Nesse caso, o texto da prova indica generalidade e advém de uma tentativa de revelar uma classe de objetos.

Para o pesquisador, esses níveis de prova formam uma hierarquia em que um nível específico depende de quanta generalidade e conceitualização do conhecimento estão envolvidos.

Segundo Balacheff (1998), são consideradas pragmáticas as provas apresentadas no nível do *empirismo ingênuo* e do *experimento crucial*. As provas

[12] [...] The language of the everyday, whose main must be more than this to produce "formal" proofs. Language must become a tool for logical deductions and not just a means of communication (BALACHEFF, 1988, p. 217).

apresentadas ao nível do *exemplo genérico* representam um momento de transição entre as provas pragmáticas e as conceituais. O *experimento de pensamento* já representa, nesse contexto, uma prova conceitual. Neste mesmo trabalho, Balacheff (1988) acrescenta um nível de prova superior ao experimento de pensamento, denominado por ele de *cálculo nas afirmações*. Nesse nível, as provas conceituais se parecem muito com o que conhecemos como demonstração.

A partir dos resultados de um estudo realizado com 28 alunos de 13 e 14 anos, trabalhando em duplas a fim de descobrir a fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo, Balacheff (1988) concluiu que analisar a escrita de uma prova não é o suficiente para determinar em que nível está o autor da mesma. É preciso, além disso, conhecer o processo de produção dessa prova. Por meio das provas produzidas pelas duplas, o pesquisador também observou uma quebra entre os dois primeiros níveis e os dois últimos. Nos dois primeiros, as provas são baseadas na ação direta do aluno sobre as proposições. Nos dois últimos, há, por parte do aluno, uma tomada de consciência da generalidade da prova e uma tentativa de mostrar isso na escrita da mesma.

2.3 A CONCEPÇÃO DE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES USADA NESTA PESQUISA

A problemática das provas e demonstrações já vem sendo estudada há algum tempo por pesquisadores de outros países. No Brasil, este interesse começou a surgir a partir da segunda metade da década de noventa, porém de uma maneira bem tímida. Ainda não há entre os pesquisadores, por exemplo, um consenso a respeito do significado das palavras prova e demonstração. Nem há um consenso sobre de que maneira este tema deve ser trabalhado nas aulas de matemática da educação básica. Por este motivo, entramos em contato com diversas pesquisas sobre o tema e procuramos saber quais as concepções[13] e conclusões dos pesquisadores a esse respeito.

[13] Para nós, concepção é uma noção ou um conjunto de noções concisas sobre certo tema, formada a partir de nossas próprias idéias e/ou a partir das idéias propostas por outros pesquisadores.

Pelas observações feitas em seções anteriores, podemos perceber que alguns pesquisadores não diferenciam as palavras prova e demonstração, porém entendem que demonstrar (ou provar) é algo mais do que verificar a validade de uma propriedade matemática por meio de regras lógicas e sistematizadas. Como a intenção dessa pesquisa é tratar do uso de provas e demonstrações num conteúdo algébrico do Ensino Médio, gostaríamos de enfatizar a necessidade de, nesse contexto, diferenciarmos essas duas palavras. Para nós, a diferenciação entre essas e o entendimento das implicações dessa diferenciação é a chave para um ensino eficiente de provas e demonstrações na matemática do Ensino Médio.

Assim como Balacheff (1982), diferenciaremos as palavras prova e demonstração, de modo que, para nós, a idéia de demonstração remeterá a um discurso, aceito pela comunidade matemática e constituído a partir de uma seqüência de enunciados, organizados com certas regras, que tem como objetivo dar o caráter de verdade a uma proposição. A idéia de prova remeterá a uma explicação mais simples que pode ser apresentada em linguagem natural, pictográfica ou algébrica contendo elementos matemáticos.

Acreditamos que essa diferenciação é essencial no contexto da educação matemática, pois com ela explicações mais simples, porém coerentes, dadas pelos alunos da educação básica podem ser valorizadas e caracterizadas como provas. Com um trabalho adequado, segundo Balacheff (1988), essas explicações simples podem evoluir, ou seja, aumentar de nível, até chegar a uma demonstração. Essa diferenciação também daria à demonstração um estatuto mais sério, faria com que ela se tornasse algo a ser almejado pelos alunos durante a escolarização. Ao mesmo tempo, ampliaria o sentido desta atividade tão importante para a matemática, como sugere Pietropaolo (2005).

Apesar de diferenciarmos as palavras prova e demonstração e aceitarmos que uma prova pode evoluir e chegar ao nível de uma demonstração, acreditamos que essa evolução não ocorre naturalmente. Essa percepção vai ao encontro de algumas idéias propostas por Duval (1989).

Segundo Duval (1989), a demonstração é composta por dois tipos de estrutura: (i) **estrutura superficial:** se assemelha a estrutura de uma argumentação em que os enunciados são adicionados uns aos outros; (ii) **estrutura profunda:** que é diferente da estrutura de uma argumentação, pois os enunciados são substituídos levando em consideração seu estatuto. Segundo esse pesquisador, para aprender a demonstrar os alunos devem realizar tarefas específicas de organização dedutiva[14], que privilegiem o contato com a estrutura profunda da demonstração. Apenas as atividades de resolução de problemas e atividades que favoreçam a formulação de conjecturas não são suficientes para que o aluno desenvolva esse aprendizado.

Ao analisarmos algumas pesquisas brasileiras, tais como Gouvêa (1998), Mello (1999), Carlovich (2005) e Pietropaolo (2005), entramos em contato com diversos pontos de vista da problemática das provas e demonstrações. Tivemos a oportunidade de conhecer a visão do professor, do aluno, do currículo e dos livros didáticos. Com isso, percebemos que há uma preocupação crescente envolvendo a problemática das provas e demonstrações na educação básica. Contudo, apesar de ser positiva e fornecer idéias e reflexões sobre o ensino de provas e demonstrações, essa preocupação se restringe ao ensino de geometria no Ensino Fundamental. Pouco se fala sobre a problemática das provas e demonstrações no ensino de álgebra e no Ensino Médio. Acreditamos que uma das razões para a ênfase na geometria, quando se trata de provas e demonstrações, deve-se à histórica influência da obra "*Os Elementos*" de Euclides do séc. III a.C. Essa ênfase dada à geometria foi um dos motivos que nos levou a recorrer, neste estudo, a um conteúdo algébrico (*Conjuntos e Conjuntos Numéricos*) para tratarmos do ensino de provas e demonstrações.

2.4 A CONCEPÇÃO DE ÁLGEBRA USADA NESTA PESQUISA

A concepção de álgebra usada nesta pesquisa é baseada no trabalho de Usiskin (1995). Consideraremos a álgebra uma área de estudo da matemática que trata dos significados das letras e das operações com elas.

[14] Segundo Duval (1989) as tarefas de organização dedutiva são aquelas em que, dado um corpo de enunciados reunidos, o aluno deve ordená-los em função de seu estatuto através de um jogo de substituições. As tarefas heurísticas são aquelas em que, através de um problema, os alunos desenvolvem estratégias de resolução, fazem conjecturas e as demonstram.

Assim como Usiskin (1995), do ponto de vista didático, acreditamos que a maneira como uma pessoa entende o significado da noção de variável muda a concepção que ela tem sobre álgebra e direciona o ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento matemático. Para nós, as possíveis concepções de álgebra que uma pessoa pode ter são as mesmas propostas por Usiskin (1995):

- *Álgebra como aritmética generalizada:* Nessa concepção as variáveis são vistas como um meio de traduzir e generalizar modelos;
- *Álgebra como meio de resolução de problemas:* Nessa concepção as variáveis são incógnitas ou constantes usadas para simplificar e resolver um dado problema;
- *Álgebra como estudo de relações:* Aqui as letras são argumentos ou parâmetros usados para relacionar grandezas;
- *Álgebra como estrutura:* Nessa concepção as letras são sinais arbitrários no papel passíveis de manipulação.

O trabalho de Usiskin (1995) nos mostrou as possíveis maneiras de uma pessoa entender o significado da álgebra a partir do significado da variável. Apesar disso, o trabalho de Usiskin (1995) não nos mostrou que tipos de dificuldades os alunos podem ter durante a construção dessa concepção. Para um esclarecimento sobre este aspecto recorremos ao trabalho de Kieran (1992).

Kieran (1992) considera que uma das dificuldades dos alunos durante a aprendizagem de álgebra é a passagem da perspectiva processual para a perspectiva estrutural da álgebra. Na perspectiva processual, as informações são tratadas como generalizações das operações efetuadas na aritmética. Na perspectiva estrutural, as operações não têm relação com valores numéricos, são realizadas sobre expressões algébricas e resultam também em expressões algébricas. A pesquisadora considera que uma possível mudança na abordagem dos livros e dos professores ajudaria a mudar esse quadro, visto que há uma ênfase na abordagem da álgebra por meio da perspectiva estrutural por parte dos mesmos.

Ao analisarmos algumas pesquisas brasileiras, tais como Jamal (2004), Cruz (2005) e Santos (2005), percebemos que há uma preocupação crescente envolvendo o ensino e aprendizagem de álgebra na educação básica. Essas pesquisas analisam, em geral, as concepções dos professores de álgebra, o uso de variáveis nos livros didáticos e o currículo de álgebra na escola. A partir delas, pudemos perceber, por exemplo, que as concepções de álgebra dos professores e os exercícios propostos em livros didáticos do Ensino Fundamental se enquadram nas concepções que adotamos nesta pesquisa, propostas por Usiskin (1995). Também percebemos que os livros didáticos trabalham com diferentes significados das variáveis com um excesso de atividades de aplicação de técnicas.

Para nós a construção desta concepção de álgebra se fez necessária, pois o conteúdo em que analisaremos o uso de provas e demonstrações possui origem algébrica. Trata principalmente das generalizações que podemos fazer quando consideramos os números agrupados em conjuntos com características próprias.

2.5 O PROBLEMA DE PESQUISA

De acordo com Pires (2006), há algumas décadas, o ensino de matemática priorizava excessivamente o ensino das demonstrações e o fazia de uma forma que o aluno tinha dificuldades de atribuir sentido a elas:

> [...] podemos observar que antes do período da Matemática Moderna, e mesmo durante ele, predominava o modelo euclidianista, com ênfase no rigor, no formalismo e nas demonstrações, mesmo que totalmente fora da possibilidade de compreensão dos alunos (PIRES, 2006, p. 01).

Com o passar dos anos, essa forma de ensinar demonstrações foi abandonada devido à sua ineficiência e complexidade dando origem a outra fase em que se valorizava o trabalho empírico. Ainda nos estudos de Pires (2006) temos:

> Com as críticas a esse modelo, passou-se a preconizar um modelo que pode ser identificado como empirista, baseado em experimentações que os alunos fazem com o estímulo de materiais como origamis, tangrans, poliminós, geoplanos e mesmo com o apoio de sofisticados softwares que permitem o trabalho com uma geometria dinâmica (PIRES, 2006, p. 01).

Nessa nova fase, as atividades empíricas para a descoberta de propriedades matemáticas foram valorizadas para que o aluno pudesse atribuir algum sentido a elas, porém as demonstrações dessas propriedades foram praticamente abandonadas. Podemos considerar essa nova postura tão prejudicial ao aluno quanto à postura anterior, visto que o aluno não compartilha por completo de uma atividade característica da matemática.

Atualmente, vivemos num período de transição quando tratamos das demonstrações em matemática. A publicação dos PCN abriu possibilidades para uma abordagem construtivista dos conceitos, em que "os objetos matemáticos são extraídos das ações do sujeito, especialmente em contextos de resolução de problemas e de modelizações" (PIRES, 2006, p. 01). Porém, apesar dessa abertura construtivista proposta pelos PCN, o empirismo ainda é dominante nos livros didáticos atuais.

A preocupação dos pesquisadores com os efeitos do abandono do ensino das provas e demonstrações nas escolas brasileiras fez com que as pesquisas nessa área se intensificassem nos últimos anos. Pesquisas brasileiras recentes como as de Gouvêa (1998), Mello (1999), Carlovich (2005) e Pietropaolo (2005), por exemplo, abordam alguns aspectos didáticos da demonstração na educação básica. Há ainda pesquisadores de outros países que se interessam pela problemática das provas e demonstrações na sala de aula, como Arsac, Balacheff, Duval, Pedemonte, entre outros.

Pudemos perceber, a partir das leituras sobre essa problemática, que o ensino e aprendizagem das demonstrações é uma preocupação dos pesquisadores atuais, porém suas pesquisas têm se concentrado no ensino e aprendizagem das demonstrações envolvidas em conceitos geométricos do Ensino Fundamental. Pouco é pesquisado sobre estas mesmas questões em álgebra e/ou no Ensino Médio. Até mesmo os PCN incentivam claramente o uso de provas e demonstrações especificamente em conteúdos geométricos.

A falta de propostas de trabalho com as provas e demonstrações além da geometria também foi percebida por Pietropaolo (2005):

> Nos PCN, tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio, não há referências claras no que concerne as provas e demonstrações em outras áreas da Matemática que não a Geometria (PIETROPAOLO, 2005, p. 113)

O fato das pesquisas sobre provas e demonstrações e dos documentos oficiais que norteiam a educação básica brasileira se concentrarem em geometria e no Ensino Fundamental, nos levou a idealizar uma pesquisa que abordasse o uso de provas e demonstrações no ensino e aprendizagem de álgebra no Ensino Médio.

Pelo fato de existirem muitos conteúdos algébricos abordados, no Ensino Médio, nossa pesquisa será restringida à análise do uso de provas e demonstrações no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* abordado no primeiro ano do Ensino Médio.

Para abordar esse tema, analisaremos algumas coleções atuais de livros didáticos do Ensino Médio. Com essa análise, pretendemos responder a seguinte questão:

De que maneira os livros didáticos analisados propõem aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio provas e demonstrações às propriedades enunciadas ao longo da exposição do conteúdo *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*?

Para responder nossa questão de pesquisa de maneira concisa, traçamos alguns objetivos a serem seguidos durante a análise do conteúdo algébrico em questão em cada coleção:

- **Objetivo 01:** Verificar de que maneira os livros didáticos analisados oferecem provas empíricas às propriedades algébricas enunciadas, dando ao aluno um modelo de validação baseado em exemplos;
- **Objetivo 02:** Verificar de que maneira os livros didáticos analisados oferecem demonstrações às propriedades algébricas enunciadas, dando ao aluno um modelo de validação formal em matemática;
- **Objetivo 03:** Verificar de que maneira os livros didáticos analisados propõem aos alunos exercícios envolvendo a demonstração ou a prova de uma propriedade referente a um conteúdo algébrico.

Após as explanações anteriores, é importante evidenciar que nosso objetivo é estudar o uso de provas e demonstrações no conteúdo *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* abordado no primeiro ano do Ensino Médio, para saber de que maneira os livros didáticos utilizam este recurso para tornar significativo o ensino e a aprendizagem deste conteúdo.

Ao enunciarmos nossa questão de pesquisa, pensamos em uma possível resposta para ela, antes mesmo de uma análise mais refinada dos livros didáticos selecionados.

As considerações de Pires (2006), sobre o abandono das demonstrações e a valorização das provas empíricas por parte dos livros didáticos do Ensino Fundamental, nos levam a acreditar que esse mesmo movimento possa ter ocorrido no Ensino Médio. Uma de nossas hipóteses consiste em admitir que, em geral, as coleções analisadas apresentarão um número maior de provas empíricas, em relação às demonstrações, para as propriedades apresentadas durante a exposição do conteúdo *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*. Apesar disso, acreditamos que as propriedades provadas empiricamente ou demonstradas são utilizadas na resolução de problemas e como ponto de partida para outras provas e demonstrações durante o desenvolvimento deste conteúdo algébrico. Esta seria outra hipótese de pesquisa.

Mesmo acreditando que de alguma maneira as provas e demonstrações já efetuadas serão aproveitadas, temos dúvidas com relação ao desenvolvimento da noção de sistema dedutivo. Para nós, o desenvolvimento da noção de sistema dedutivo requer uma utilização explícita por parte do autor das palavras *teorema, prova e demonstração*, o que acreditamos não ocorrer nas coleções.

A última consideração que fazemos a respeito dos possíveis resultados da análise de livros didáticos, diz respeito às atividades propostas aos alunos. Acreditamos que os livros didáticos analisados pouco propõem aos alunos exercícios envolvendo a demonstração ou a prova de uma propriedade referente ao conteúdo em questão. Em outras palavras, a atividade de demonstrar ou provar seria realizada em sua maioria pelos autores das coleções, o que deixaria pouco espaço para os alunos construírem estas habilidades.

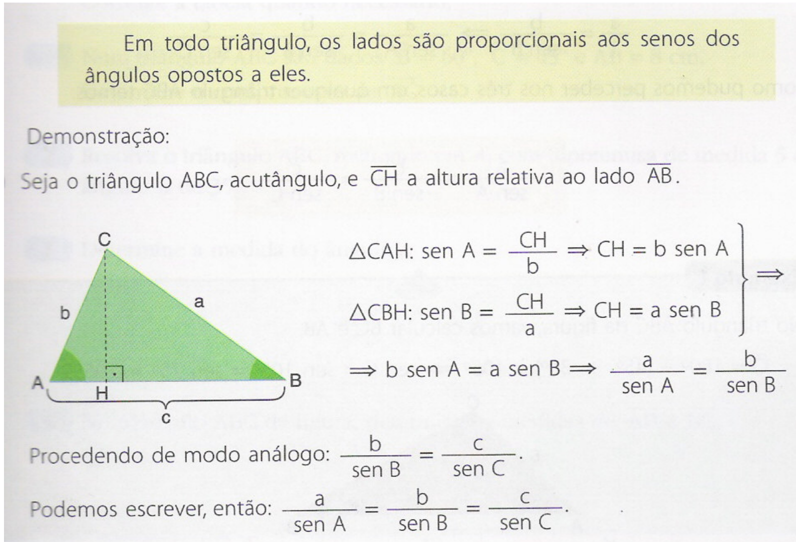
2.6 ASPECTOS METODOLÓGICOS

O objetivo desta seção da pesquisa é apresentar algumas considerações sobre o que são conteúdos algébricos pertinentes ao Ensino Médio e os motivos que nos levaram a escolher *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* dentre todos os outros conteúdos que destacaremos. Além disso, apresentaremos os livros didáticos que analisaremos, as justificativas desta escolha e os critérios de análise dos livros com base na noção de praxeologia de Chevallard (1999) e níveis de prova de Balacheff (1988).

2.6.1 OS CONTEÚDOS ALGÉBRICOS DO ENSINO MÉDIO

Antes de iniciarmos a análise dos livros didáticos do Ensino Médio, no que diz respeito ao uso de provas e demonstrações num conteúdo algébrico do Ensino Médio, precisamos definir o que, para nós, são conteúdos algébricos pertinentes ao Ensino Médio. Para isso, recorremos às concepções, pesquisas e documentos oficiais citados anteriormente nesta pesquisa.

Com base no que discutimos na seção 2.4, entendemos que a álgebra é uma área da matemática que trata do uso das letras e de seus significados (USISKIN, 1995). Essa visão também é encontrada nos PCNEF (1998), como mostrou a figura 05 na seção 1.5 (BRASIL, 1998, p.116). As pesquisas de Cruz (2005) e Santos (2005) nos dão evidências de que essa visão da álgebra também está presente nos livros didáticos de Ensino Fundamental e no discurso do professor. Tudo isso nos leva a acreditar que um aluno que esteja cursando o Ensino Médio já tenha, no Ensino Fundamental, entrado em contato com a álgebra por meio do uso de letras como *generalizadoras de padrões*, *incógnitas numa equação*, *parâmetros numa função* e apenas *como sinais no papel*. Por estas razões, acreditamos que no Ensino Médio a álgebra deva estar presente em quase todos os conteúdos, até mesmo naqueles que intitulamos de “geométricos” ou de “tratamento da informação”. Como exemplo disso, podemos mostrar parte de uma demonstração feita no livro 01 da coleção *Matemática: Ciência e Aplicações*:


Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles.

Demonstração:

Seja o triângulo ABC, acutângulo, e $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\triangle CAH\text{: sen } A = \dfrac{CH}{b} \Rightarrow CH = b \text{ sen } A \\ \triangle CBH\text{: sen } B = \dfrac{CH}{a} \Rightarrow CH = a \text{ sen } B\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \text{ sen } A = a \text{ sen } B \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

Procedendo de modo análogo: $\dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C}$.

Podemos escrever, então: $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C}$.

Figura 06: Parte da demonstração da Lei dos Senos (IEZZI, 2004, vol. 2, p.125).

O estudo das propriedades dos triângulos é considerado por nós de origem geométrica, porém, como vimos, utiliza-se a álgebra em alguns momentos para expressar a idéia de generalidade.

Em nossa pesquisa não pretendemos trabalhar com conteúdos de origem geométrica, embora em alguns momentos eles se utilizem da álgebra. Também não pretendemos trabalhar com conteúdos ligados ao “tratamento da informação”. Portanto, não abordaremos o uso de provas e demonstrações nos seguintes conteúdos: trigonometria, geometria plana, geometria espacial, geometria analítica, análise combinatória, probabilidade e estatística.

Entendemos que conteúdos como *Conjuntos, Conjuntos Numéricos*, *Funções*, *Progressões*, *Matrizes*, *Determinantes*, *Sistemas Lineares*, *Polinômios* e *Equações polinomiais* permitem ao aluno um contato com todos os significados que as letras podem assumir e, portanto, entender a álgebra em todos seus aspectos. Além disso, todos esses conteúdos não são de origem “geométrica” nem referem-se ao “tratamento da informação”. O esquema da figura 07 ilustra essa afirmação:

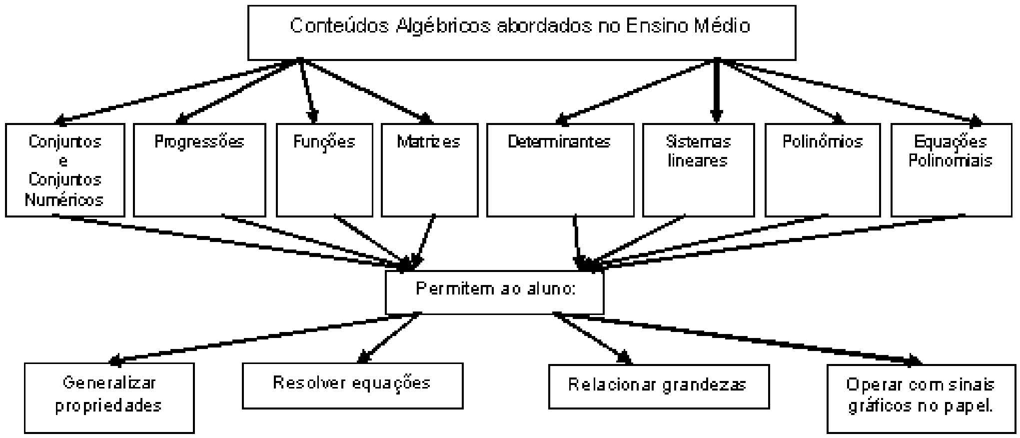


Figura 07: Conteúdos algébricos do Ensino Médio

Para que nosso estudo sobre os conteúdos algébricos do Ensino Médio fique mais completo, também abordaremos nesta seção o enfoque dado aos conteúdos algébricos nos PCN.

De acordo com os PCNEM (2002), o ensino de matemática no Ensino Médio deve desenvolver competências e habilidades que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias a sua formação. A resolução de problemas é central para o ensino de matemática. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução.

Segundo os PCN+ (2002), no novo Ensino Médio os conteúdos e idéias Matemáticas foram divididos em três temas estruturadores: (i) Álgebra: Números e Funções; (ii) Geometria e medidas; (iii) Análise de dados.

Como o objetivo de nossa pesquisa está relacionado ao ensino de álgebra, nos concentraremos em discutir apenas o primeiro tema estruturador: Álgebra: Números e Funções.

De acordo com os PCN+ (2002), dentro do primeiro tema estruturador temos como objeto de estudo os campos numéricos dos números reais, as funções e equações de variáveis e incógnitas reais. Este tema foi dividido em duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria. Segue abaixo um quadro que ilustra os objetos matemáticos que cada unidade temática deve abordar:

Unidades temáticas	**Objetos de estudo em cada unidade**
Variação de grandezas	Funções e Seqüências (ligada à idéia de função)
Trigonometria	No triângulo retângulo e na primeira volta.

De acordo com o documento, os conteúdos acima descritos devem ser priorizados em todo Ensino Médio. Outros conteúdos ligados a esta área temática, tais como, matrizes e determinantes, sistemas lineares, polinômios e números complexos, devem constituir uma parte flexível do currículo e serem abordados em caso de “sobra de tempo”.

Embora os PCN+ (2002) mostrem uma tendência à valorização do estudo de funções, seqüências e trigonometria, a maioria dos livros que estamos analisando coloca o estudo de conjuntos, conjuntos numéricos, sistemas lineares, matrizes e determinantes, polinômios e números complexos como parte integrante dos conteúdos a serem abordados no Ensino Médio. Além disso, na figura 07, vista anteriormente, consideramos tais conteúdos como algébricos. Outra questão importante a destacar diz respeito ao fato das noções de trigonometria serem consideradas algébricas pelos PCN+ (2002). Nós entendemos que a trigonometria é um conteúdo de natureza geométrica, apesar de usar a álgebra como uma linguagem para abordar suas problemáticas.

Analisando as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), percebemos que elas ratificam as recomendações apresentadas nos PCN+ (2002), porém com algumas modificações. Os conteúdos de matemática, por exemplo, não estão divididos em três áreas, mas em quatro: (i) Números e Operações, (ii) Funções, (iii) Geometria, (iv) Análise de Dados e Probabilidade. Apesar dessa nova distribuição de áreas, os conteúdos a serem enfatizados são os mesmos supracitados quando tratamos dos PCN+ (2002). O que é interessante para nós é que em ambos os documentos, o ensino de matemática está sendo encarado de uma forma mais humana em que se valoriza a essência do pensamento matemático e suas aplicações na vida cotidiana:

> Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 699).

Com base nas explanações acima, consideraremos como conteúdos de álgebra pertinentes ao Ensino Médio os seguintes itens: (i) Conjuntos e Conjuntos Numéricos (somente até o conjunto dos Números Reais), (ii) Funções, (iii) Progressões, (iv) Matrizes e Determinantes, (v) Sistemas Lineares, (vi) Polinômios e equações polinomiais e (vii) Números complexos.

Nesta pesquisa, trataremos do uso de provas e demonstrações somente no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*. A escolha deste conteúdo deveu-se a fatores que destacaremos a seguir.

O primeiro fator diz respeito à importância da teoria dos conjuntos no desenvolvimento da matemática devido ao caráter genérico e unificador de seus elementos. Percebemos, com isso, que o conteúdo Conjuntos nos permite trabalhar a álgebra em várias das facetas propostas por Usiskin (1995). Com uma abordagem específica voltada para os Conjuntos Numéricos é possível trabalhar principalmente com a concepção da álgebra como aritmética generalizada. Com o foco voltado para as operações entre conjuntos é possível trabalhar com a concepção da álgebra como estrutura e como instrumento de resolução de problemas. Há até mesmo a possibilidade do trabalho com a concepção funcional da álgebra, visto que uma função é um tipo específico de relação entre dois conjuntos.

Outro fator que delimitou esta escolha surgiu a partir da análise preliminar[15] realizada nas coleções de livros didáticos selecionadas por nós. Percebemos que na maioria dessas coleções (07 de 11 coleções), *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* são os primeiros conteúdos algébricos a serem abordados no primeiro ano do Ensino Médio. O fato de serem os primeiros fez com que também fossem os primeiros a analisarmos em termos de tarefas que envolvam provas e demonstrações. Por uma questão de tempo e na intenção de elaborarmos uma pesquisa concisa e profunda,

[15] A análise preliminar aqui citada será objeto de discussão nas seções a seguir.

optamos por não analisar outro conteúdo algébrico pertinente ao primeiro ano do Ensino Médio.

Gostaríamos de esclarecer que algumas das coleções (03 de 11) que analisaremos abordam em capítulos diferentes os conteúdos Conjuntos e Conjuntos Numéricos. Dentre elas, há uma que faz essa abordagem de maneira consecutiva, ou seja, capítulo 01 para Conjuntos e capítulo 02 para Conjuntos Numéricos, por exemplo. Nesta pesquisa estamos considerando Conjuntos Numéricos um subitem do conteúdo Conjuntos. Por este motivo, faremos referência a apenas um conteúdo algébrico denominado *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*.

2.6.2 A ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Como existe atualmente uma considerável gama de livros didáticos de matemática para o Ensino Médio, foi necessário um critério de seleção de livros para iniciarmos nossa análise. Nosso critério é bem simples: escolhemos analisar os livros didáticos de matemática do Ensino Médio selecionados pelo Ministério da Educação do Brasil no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – PNLEM/2006.

O Ministério da Educação já distribui, desde 1985, livros didáticos para os alunos das escolas públicas de Ensino Fundamental por meio do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD. A partir de 1995 o PNLD passou a contar com um grupo de especialistas em diversas áreas do conhecimento (matemática, ciências, língua portuguesa, geografia e história) para fazer uma análise criteriosa das obras antes que elas fossem escolhidas pelo professor e distribuídas aos alunos. Essa iniciativa foi positiva no sentido de que as obras passaram a ser mais bem elaboradas pelos autores e melhor selecionadas pelas editoras de todo país. Apesar de esta ser uma excelente iniciativa do governo brasileiro, ela só abrangia alunos do Ensino Fundamental. Pensando nesta questão, o Ministério da Educação, em 2004, criou o Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio – PNLEM. Em 2005, jovens do Ensino Médio das escolas públicas das regiões Norte e Nordeste receberam livros didáticos de matemática e língua portuguesa. Em 2006, esta iniciativa se estendeu a todas as regiões do Brasil.

Depois de uma análise de diversos livros didáticos de matemática do Ensino Médio, os especialistas em matemática do PNLEM/2006 divulgaram em 2004, por meio do Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (Catálogo do PNLEM), os nomes das 11 coleções de matemática que poderiam ser escolhidas pelo professor. Cada uma dessas obras é composta por três volumes: um volume para cada ano do Ensino Médio.

As obras selecionadas são:

1. LONGEN, A. **Matemática**. Editora Nova Didática.
2. BIANCHINI, E. R.; PACCOLA, H. **Matemática**. Editora Moderna.
3. DANTE, L. R. **Matemática**. Editora Ática.
4. PAIVA, M. R. **Matemática**. Editora Moderna.
5. ZAMPIROLO, M. J. C. V.; SCORDAMAGLIO, M. T.; CÂNDIDO, S. L. **Matemática**. Editora do Brasil.
6. GUELLI NETO, O. A. **Matemática**. Editora Ática.
7. SMOLE, K. C. S.; VIEIRA, M. I. S.; KIYUKAWA, R. **Matemática**. Editora Saraiva.
8. SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B. **Matemática Aula por Aula**. Editora FTD.
9. IEZZI, G.; et al. **Matemática Ciência e Aplicações**. Editora Saraiva.
10. GOULART, M. C. **Matemática no Ensino Médio.** Editora Scipione.
11. LONGEN, A. **Matemática: Uma Atividade Humana**. Base Editora.

Mesmo com um critério bem definido de escolha de livros didáticos, o número de coleções a serem analisadas por nós ainda é alto. Por isso, fizemos uma análise preliminar nas 11 coleções visando separá-las em grupos. Para cada grupo, elegemos apenas 1coleção representante.

Nessa análise preliminar, realizada nas 11 coleções, levamos em consideração os seguintes aspectos:

1. Como é feita a abordagem dos conteúdos algébricos?
2. Há, em algum momento, uma discussão sobre o que é um sistema dedutivo, um postulado, um teorema e uma demonstração?

3. Em geral, a coleção apresenta uma prova ou uma demonstração para as propriedades discutidas nos conteúdos algébricos?
4. Em geral, a coleção propõe aos alunos exercícios do tipo *mostre que...*, *prove que...* ou *demonstre que...*?
5. Em relação ao ensino de provas e demonstrações, qual é a avaliação da coleção feita pelos especialistas em matemática no Catálogo do PNLEM (2004)?

Apesar de estarmos interessados somente no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*, fizemos a análise preliminar nos conteúdos algébricos dos três volumes de cada coleção para que pudéssemos ter informações gerais relevantes sobre o ensino de provas e demonstrações na álgebra do Ensino Médio.

Na próxima seção de nossa pesquisa, trataremos dos resultados da análise preliminar realizada por nós nas 11 coleções selecionadas pelo PNLEM/2006 a luz dos 05 aspectos supracitados.

2.6.3 ANÁLISE PRELIMINAR DAS COLEÇÕES

Por uma questão de praticidade, nesta análise nos referiremos às 11 coleções supracitadas como C1, C2, ..., C11, respectivamente.

Com relação ao primeiro aspecto de nossa análise preliminar, verificamos que as 11 coleções dividem os conteúdos em capítulos, cada capítulo a respeito de um conteúdo matemático. Algumas das coleções fazem uma conexão entre esses conteúdos ao longo dos livros. Por exemplo, a coleção C7 relaciona uma seqüência a uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos. Ainda com relação à abordagem, percebemos que os conteúdos algébricos são introduzidos a partir de um exemplo contextualizado dentro ou fora da matemática. Percebemos uma diferença na abordagem feita pelas coleções C2 e C6, pois estas apresentam antes do exemplo uma parte histórica referente ao conteúdo a ser desenvolvido. Apesar de todas as coleções introduzirem os conteúdos por meio de um exemplo contextualizado, nenhuma delas utiliza esse exemplo como situação-problema para que o aluno resolva inicialmente e construa por si mesmo seu conhecimento a respeito do conteúdo.

No que tange o segundo aspecto, notamos que nem todas as coleções explicam aos alunos, em algum momento, as noções de sistema dedutivo, postulado, teorema e demonstração.

Verificamos, por exemplo, que as coleções C6 e C11 abordam claramente tais noções no primeiro livro da coleção. Vejamos abaixo alguns trechos que mostram essa abordagem:

Postulado

É uma propriedade aceita como verdadeira sem uma demonstração.

Exemplo:

Dois pontos distintos determinam uma única reta.

Teorema

É uma propriedade aceita como verdadeira mediante uma demonstração.

Exemplo:

Se α, β e γ são medidas dos ângulos internos de um triângulo, então $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Hipótese e tese

Num teorema, aquilo que é dado ou aceito como verdadeiro chamamos de hipótese e aquilo que temos que demonstrar denominamos tese.

Exemplo:

No exemplo dado para teorema temos:

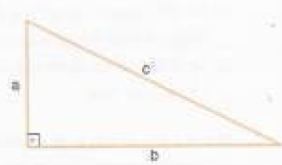
Hipótese: α, β e γ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Tese: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Figura 08: Trecho sobre as noções de postulado, teorema e demonstração da coleção C11 (LOGEN, 2003, v. 01, p. 115)

Mas algumas afirmações não são absolutamente óbvias. Por exemplo, o Teorema de Pitágoras:

"Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos dois catetos."



$c^2 = a^2 + b^2$; **a**, **b** e **c** expressos na mesma unidade de medida

Mesmo se comprovássemos o enunciado do teorema experimentalmente, de modo aproximado, com um número muito grande de triângulos retângulos, sempre poderíamos pensar que, num triângulo retângulo que não escolhemos para o grupo, o enunciado poderia não ser verificado.

Assim, uma pessoa somente estaria convencida de que o enunciado é verdadeiro em todas as situações se visse uma razão lógica por que ele tem de ser verdadeiro em todos os casos.

Se pensarmos na Matemática da Antiguidade, os egípcios eram excelentes nas técnicas de medições e fizeram muitas previsões inteligentes. Mas foram os gregos que descobriram ser verdadeiro o enunciado daquele teorema, criando um método muito mais poderoso que a simples medição: o raciocínio geométrico exato.

Como funciona esse método?

Enunciaremos algumas afirmações para expressar as idéias geométricas mais simples e fundamentais, sem demonstrá-las. Serão chamadas **postulados**.

Da mesma forma, usaremos os termos mais simples e fundamentais sem defini-los. Serão chamados **conceitos primitivos** ou **termos não definidos**.

Estabeleceremos os fatos da Geometria mediante demonstrações lógicas. As afirmações que demonstrarmos serão chamadas *teoremas*.

É razoável supor que é melhor demonstrar todas as afirmações que fizermos. Mas isso não pode ser feito. Em geral, demonstramos um teorema como um resultado lógico de teoremas já demonstrados. Mas para a primeira demonstração (ou primeiras) não haverá nenhum teorema que tenha já sido demonstrado. Assim, teremos de aceitar algumas afirmações sem demonstração, que são os postulados.

Do mesmo modo, quando definirmos um termo novo teremos necessidade de nos basear em outros termos que já tenham sido definidos. Em particular, o primeiro termo (ou primeiros) não pode ser definido dessa maneira.

Esses termos não definidos, os conceitos primitivos, serão o **ponto**, a **reta** e o **plano**.

Os conceitos primitivos sugerem objetos físicos.

Figura 09: Trecho sobre as noções de sistema dedutivo, postulado, teorema e demonstração da coleção C6 (GUELLI, 2004, v. 01, p. 09)

Porém as coleções C2, C4 e C5 não abordam tais noções em momento algum. As coleções C3 e C7 abordam claramente tais noções, porém no segundo livro da coleção quando trata da geometria espacial. Vejamos abaixo alguns trechos que mostram essa abordagem:

O que é um sistema dedutivo?

A Matemática, enquanto ciência, utiliza como recurso para provar fatos os chamados sistemas dedutivos.

A idéia é que, para provar de forma lógica alguma coisa, é preciso partir de alguns elementos que devem ser aceitos como a base de uma teoria e de alguns fatos verdadeiros que envolvam esses elementos. Todas as demonstrações devem ser feitas a partir desses dois itens.

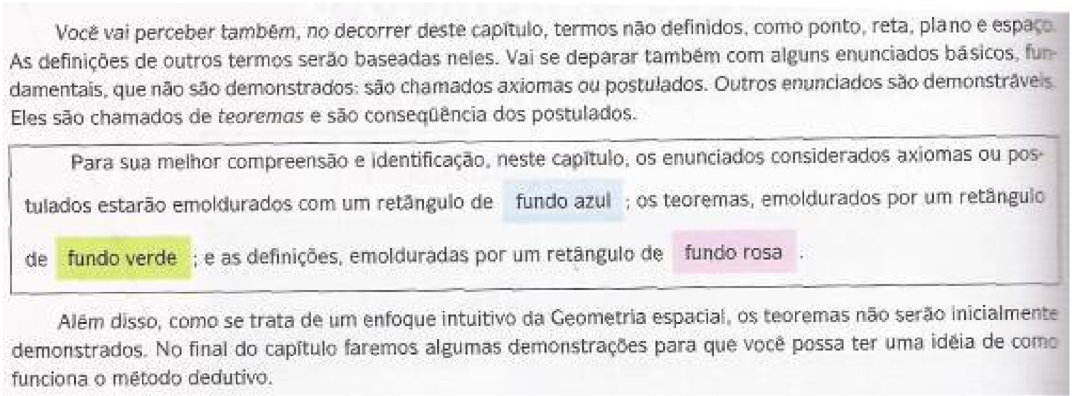
As características de um sistema dedutivo são as seguintes:

a) Algumas noções ou **conceitos**, chamados **primitivos**, são colocados sem definição e devem ser aceitos como existentes e verdadeiros. Em Geometria, os conceitos primitivos são: **ponto**, **reta** e **plano**.

b) São escolhidos alguns **postulados**, ou seja, fatos que relacionam os conceitos primitivos e que também devem ser aceitos como verdades.
A escolha dos postulados pode variar, dependendo de que teoria se quer desenvolver e do que se quer provar.

postulado [Do lat. *postulatu*] S.m. **1.** Filos. Proposição não evidente nem demonstrável, que se admite como princípio de um sistema dedutível, de uma operação lógica ou de um sistema de normas práticas. **2.** Fato ou preceito reconhecido sem prévia demonstração.

Figura 10: Trecho sobre as noções de sistema dedutivo, postulado, teorema e demonstração da coleção C7 (SMOLE, 2004, v. 02, p. 199)



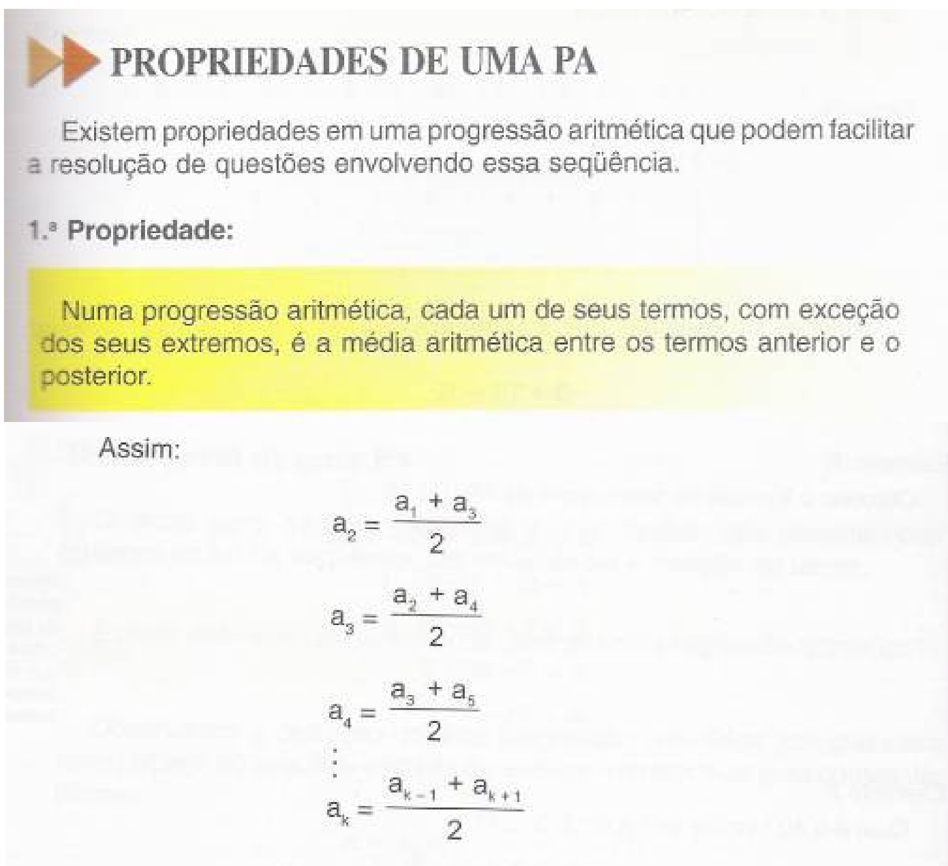
Você vai perceber também, no decorrer deste capítulo, termos não definidos, como ponto, reta, plano e espaço. As definições de outros termos serão baseadas neles. Vai se deparar também com alguns enunciados básicos, fundamentais, que não são demonstrados: são chamados *axiomas* ou *postulados*. Outros enunciados são demonstráveis. Eles são chamados de *teoremas* e são conseqüência dos postulados.

Para sua melhor compreensão e identificação, neste capítulo, os enunciados considerados axiomas ou postulados estarão emoldurados com um retângulo de fundo azul ; os teoremas, emoldurados por um retângulo de fundo verde ; e as definições, emolduradas por um retângulo de fundo rosa .

Além disso, como se trata de um enfoque intuitivo da Geometria espacial, os teoremas não serão inicialmente demonstrados. No final do capítulo faremos algumas demonstrações para que você possa ter uma idéia de como funciona o método dedutivo.

Figura 11: Trecho sobre as noções de sistema dedutivo, postulado, teorema e demonstração da coleção C3 (DANTE, 2003, v. 02, p. 162)

Percebemos que as coleções C6 e C11, apesar de apresentarem claramente ao aluno as noções de sistema dedutivo, postulado, teorema e demonstração, não utilizam ao longo da coleção as noções enunciadas. Notamos, por exemplo, que ao longo da coleção, algumas demonstrações não são intituladas dessa maneira:



PROPRIEDADES DE UMA PA

Existem propriedades em uma progressão aritmética que podem facilitar a resolução de questões envolvendo essa seqüência.

1.ª Propriedade:

Numa progressão aritmética, cada um de seus termos, com exceção dos seus extremos, é a média aritmética entre os termos anterior e o posterior.

Assim:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}$$

$$\vdots$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

Vamos verificar, usando apenas o fato de que um termo menos o seu antecedente resulta na razão r:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$$

$$2 \cdot a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$$

$$a_k + a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$$

$$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$$

$$r = r$$

Sendo (...; a; b; c; ...) uma progressão aritmética, então: $b = \frac{a + c}{2}$

Exemplo:

(–2; 0; 2; 4; 6; 8; 10; ...)

$$0 = \frac{2+2}{2};\ 2 = \frac{0+4}{2};\ 8 = \frac{6+10}{2}, \ldots$$

Figura 12: Teorema demonstrado na coleção C11 (LOGEN, 2003, v. 02, p. 23-24)

Em geral, as coleções analisadas pouco usam as palavras *teorema* e *demonstração* quando enunciam e justificam as propriedades referentes aos conteúdos algébricos, mesmo aquelas que se preocuparam em explicar o que significam esses termos. Apesar de considerarmos mais importante a presença de justificativas às propriedades enunciadas do que a presença dos respectivos termos que as intitulam, entendemos que o uso contínuo de tais termos poderia ajudar o aluno na compreensão da organização usada num sistema dedutivo. Consideramos que se essas nomenclaturas fossem usadas em vários tipos de conteúdo (algébricos ou geométricos), os alunos compreenderiam, por exemplo, a existência de teoremas em várias áreas da matemática, bem como a necessidade de suas demonstrações.

Com relação ao terceiro aspecto, notamos que os autores das coleções C3, C6, C7, C9, C10 e C11 se preocupam em justificar a maioria das propriedades enunciadas durante a exposição de um conteúdo algébrico, seja com uma prova ou com uma demonstração. Há um equilíbrio entre propriedades provadas e demonstradas. As provas, nesses casos, são consideradas do tipo “pragmáticas”, segundo a concepção de Balacheff (1988), ou seja, são baseadas na exploração de alguns exemplos. As demonstrações, por outro lado, são consideradas “provas conceituais”, ou seja, detém uma generalidade.

No entanto, não há um equilíbrio entre as propriedades provadas e demonstradas nas coleções C1, C2, C4, C5 e C8. Em geral, encontramos mais propriedades provadas do que demonstradas. Além disso, observamos a presença de muitas propriedades sem justificativa alguma.

Em relação ao quarto aspecto analisado, com exceção da coleção C3, todas as outras apresentam poucos exercícios do tipo *mostre que..., prove que...* ou *demonstre que....*

Para terminar nossa análise preliminar, consultamos o Catálogo do PNLEM (2004), o que possibilitou entrarmos em contado com a opinião dos especialistas em matemática que avaliaram as coleções. A partir dessa consulta, percebemos que os especialistas do PNLEM/2006 evidenciam em seus comentários quando uma coleção não trabalha com provas e demonstrações. Vejamos alguns comentários com relação às coleções C1, C2 e C5:

> A seção *Organizando as idéias* se encarrega de resumir, organizar e formalizar os conteúdos ao final de cada unidade. Porém, são poucas as vezes em que esse trabalho é feito com as devidas justificativas (BRASIL, 2004, p. 20, sobre a coleção C1)
>
> As seções *Em equipe*, *Desafio* e *Pesquise* propiciam o desenvolvimento das habilidades de explorar, estabelecer relações, generalizar, criticar e se expressar. No entanto, demonstrações, importantes nessa fase de ensino, são evitadas, mesmo algumas bem simples (BRASIL, 2004, p. 21, sobre a coleção C1).
>
> A **sistematização** dos conteúdos é feita, geralmente, por meio de exemplos numéricos e, na maioria das vezes, com apenas um exemplo. Assim, conceitos e procedimentos são, freqüentemente, detalhados sem justificativas ou indicações da existência de uma demonstração para o caso geral (BRASIL, 2004, p. 25, sobre a coleção C2).
>
> A coleção prioriza, ainda, a intuição, a visualização e a experimentação, o que é elogiável. No entanto, o uso quase exclusivo desses recursos faz com que os raciocínios dedutivos sejam pouco utilizados. O excesso de validações empíricas, sem provas matemáticas, pode induzir o aluno a tirar conclusões falsas (BRASIL, 2004, p. 40, com relação a coleção C5).

Por outro lado, esses mesmos especialistas valorizam o trabalho dos autores que utilizam as provas e demonstrações e fazem um encadeamento dedutivo das propriedades:

> Na **metodologia de ensino-aprendizagem** adotada, é atribuído papel central ao aluno, que é posto em interação permanente com o texto e solicitado a responder perguntas, a confrontar soluções, a verificar

> regularidades e a tirar conclusões. As atividades favorecem o desenvolvimento dos raciocínios indutivo e dedutivo, com pouca ênfase na memorização de fórmulas prontas (BRASIL, 2004, p. 30, com relação a coleção C3).
>
> O aluno encontra diversas **atividades** que o desafiam a pensar. Por serem de boa qualidade, elas contribuem para a formulação de questões e problemas; para a criação e o emprego de estratégias de resolução; para a verificação de processos e demonstrações e de validações empíricas e matemáticas (BRASIL, 2004, p. 49, com relação a coleção C7).

Após a análise das 11 coleções a luz dos 05 aspectos supracitados, pudemos formar 03 grupos de coleções baseados em características comuns:

▶ **Grupo 01:** Coleções C6 e C11.

As coleções C6 e C11 destinam um momento no primeiro livro, início do Ensino Médio, para explicar aos alunos o significado das noções de postulado, teorema, demonstração e sistema dedutivo, porém não exploram ao longo dos 03 volumes essas noções explicitadas. Há nessas coleções um equilíbrio entre propriedades provadas e demonstradas. Porém, as mesmas apresentam pouca quantidade de exercícios do tipo *mostre que..., prove que...* ou *demonstre que....*

▶ **Grupo 02:** Coleções C3, C7 e C9.

As coleções C3, C7, C8 e C9 explicam aos alunos o significado das noções de postulado, teorema, demonstração e sistema dedutivo somente no segundo volume, possuem essa explicação vinculada à abordagem de um conteúdo geométrico e não exploram ao longo dos 03 volumes as noções explicadas. Há nessas coleções um equilíbrio entre propriedades provadas e demonstradas. Porém, com exceção da coleção C3, há uma pequena quantidade de exercícios do tipo *mostre que..., prove que...* ou *demonstre que....*

▶ **Grupo 03:** Coleções C1, C2, C4, C5 e C8.

As coleções C1, C2, C4, C5 e C8 não explicam em momento algum aos alunos o significado das noções de postulado, teorema, demonstração e sistema dedutivo. Não há um equilíbrio entre as propriedades provadas e demonstradas aos alunos pelos autores. Há uma pequena quantidade de exercícios do tipo *mostre que..., prove que...* ou *demonstre que....*

Para uma análise mais criteriosa, a luz da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) e dos níveis de prova de Balacheff (1988), escolhemos 01 coleção de cada grupo. Procuramos em cada grupo a coleção que apresentava um número maior de propriedades provadas e demonstradas, para que nossa análise seja a mais esclarecedora possível. Do grupo 01, decidimos analisar a coleção C11. Do grupo 02, decidimos pela coleção C3. Por fim, do grupo 03, decidimos pela coleção C2.

O esquema a seguir sintetiza a escolha dos livros didáticos que serão analisados:

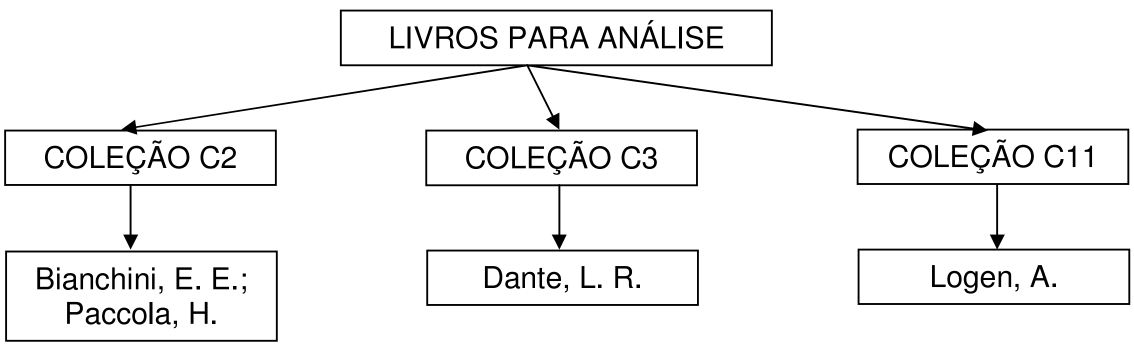


Figura 13: Livros didáticos escolhidos para análise.

Como estamos interessados em analisar o uso de provas e demonstrações no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*, que é abordado no início do primeiro ano do Ensino Médio, analisaremos apenas o primeiro volume de cada coleção.

2.6.4 OS CRITÉRIOS DE ANÁLISE DAS COLEÇÕES SELECIONADAS

Nesta parte de nossa pesquisa, evidenciaremos os critérios com os quais analisaremos o conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* nas coleções selecionadas na seção 2.6.2. Esses critérios são embasados na noção de praxeologia de Chevallard (1999) e níveis de prova de Balacheff (1988).

Usando a noção de praxeologia de Chevallard (1999), notamos, a partir da análise preliminar realizada na seção 2.6.3, que em cada coleção há a presença de tarefas realizadas pelos autores e tarefas propostas aos alunos.

Os autores de cada coleção realizam tarefas como introduzir um novo conteúdo matemático, provar ou demonstrar certa propriedade, propor aos alunos atividades que utilizem certas propriedades, etc.

Os alunos realizam tarefas como ler a apresentação de um novo conteúdo, resolver um problema aplicando certa propriedade, provar ou demonstrar certa propriedade, etc.

Das inúmeras tarefas que o autor e o aluno podem realizar, estamos interessados em analisar aquelas que envolvam a prova ou a demonstração de uma propriedade referente ao conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* ou que envolvam a utilização das mesmas, como é o caso dos exercícios de aplicação propostos aos alunos após a demonstração de uma propriedade realizada pelo autor.

O interesse nas tarefas relacionadas à prova ou à demonstração de uma propriedade nos permitiu a constatação de 03 gêneros de tarefas relativas a esta temática:

- **Gênero de tarefa 01 (GT1):** Demonstrar uma propriedade referente ao conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*.
- **Gênero de tarefa 02 (GT2):** Provar uma propriedade referente ao conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*.
- **Gênero de tarefa 03 (GT3):** Utilizar a prova ou a demonstração de uma propriedade referente ao conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* num exercício de aplicação ou na resolução de um problema.

Gostaríamos de destacar que as tarefas que pertencem aos gêneros descritos acima podem ser realizadas pelo autor ou propostas aos alunos. Particularmente, as tarefas pertencentes ao GT3 são realizadas pelo autor somente quando os mesmos possuem a intenção de apresentar aos alunos um modelo de resolução, o que geralmente aparece nas coleções com o título de “exercícios resolvidos”. Notamos que nem sempre os autores das coleções selecionadas realizam tarefas pertencentes a esses gêneros. Por esse motivo, poucas tarefas desses gêneros, realizadas pelos autores, aparecerão em nosso trabalho.

Podemos associar a cada um dos gêneros de tarefa descritos anteriormente uma série de tarefas. Por exemplo, demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ ou demonstrar que todo número natural é um número real são tarefas associadas ao GT1.

Apesar dessa diversidade de tarefas que podem ser associadas a um gênero, percebemos que há uma maneira comum de realizá-las e de justificar cada passo dado. Chamaremos de técnica a maneira de realizar uma tarefa pertencente a um dos gêneros. Chamaremos de bloco tecnológico-teórico o conjunto de justificativas que sustentam a técnica realizada.

A seguir, descreveremos a técnica usada na realização de tarefas pertencentes a cada gênero mencionado anteriormente. Após isso, evidenciaremos o bloco tecnológico-teórico que justificam tais técnicas.

Técnica usada para realizar tarefas pertencentes ao GT1.

As tarefas que envolvem a demonstração de uma propriedade geralmente requerem de quem a realiza a identificação dessa propriedade como uma implicação lógica, em que o que se admite como verdade é chamado de hipótese e o que se quer concluir é chamado de tese. Após esse passo, há a necessidade do uso das propriedades (teoremas, princípios e definições) já demonstradas por meio de um jogo de substituições, de modo a garantir a veracidade daquilo que se quer demonstrar. Em outras palavras, é preciso encadear as propriedades admitidas como hipótese para se concluir a tese. Durante esse encadeamento pode haver a necessidade de se fazer um tratamento algébrico em tais propriedades, ou seja, pode-se necessitar transformar uma representação algébrica em outra equivalente usando regras específicas da álgebra.

As tarefas pertencentes ao GT1 são classificadas por Balacheff (1998) como provas conceituais. Essa classificação deve-se ao fato da técnica usada em sua realização permitir que a propriedade demonstrada seja vista de modo genérico, representante de uma classe de objetos. Além disso, a técnica usada evidencia os conceitos matemáticos encadeados na tentativa de se obter essa generalidade.

A técnica envolvida em tarefas desse gênero permite-nos observar se quem a realizou entrou em contato com diferentes concepções da álgebra. O fato de se usar letras para trabalhar com casos gerais já é um indicativo do uso da álgebra como aritmética generalizada, em que as letras são usadas como generalizadoras de modelos. Se houve, por exemplo, a necessidade de um tratamento algébrico, há ainda o trabalho com a concepção da álgebra como uma estrutura, em que as letras são sinais gráficos que podem ser manipulados a partir de regras específicas.

Técnica usada para realizar tarefas pertencentes ao GT2.

As tarefas que envolvem a prova de uma propriedade, geralmente requerem de quem a realiza a escolha inicial de casos particulares, que serão substituídos na propriedade em questão a fim de se constatar se esta vale para tais casos. A partir dessa constatação para casos específicos, admiti-se que a propriedade é válida para todos os casos possíveis.

As tarefas pertencentes ao GT2 são classificadas por Balacheff (1998) como provas pragmáticas. Esses tipos de provas podem estar ao nível do empirismo ingênuo ou ao nível do experimento crucial. Podemos exemplificar para o caso de se pedir ao aluno a prova de que a soma de dois números pares é um número par.

Prova 01:	Prova 02:
4 e 6 são pares. 4+6=10. 10 é par; 8 e 12 são pares. 8+12=20. 20 é par;	25 352 e 10 556 são pares. 25 352 + 10 556 = 35 908. 35 908 é par.
Portanto a soma de dois números pares é par.	Portanto a soma de dois números pares é par.

Em ambas as provas, usaram-se como recurso, a escolha de casos específicos. Na primeira, essa escolha foi aleatória, o que caracteriza uma prova pragmática ao nível do empirismo ingênuo. Na segunda, tentou-se considerar números “grandes” numa tentativa de constatar que “se vale para números grandes, vale para qualquer um”. Essa atitude caracteriza uma prova pragmática ao nível do experimento crucial.

As provas pragmáticas podem evoluir para provas conceituais. Segundo Balacheff (1988) essa evolução depende da tomada de consciência da generalidade da situação em questão, por parte de quem realiza a tarefa. Notamos, nesse caso, que o contato com a concepção da álgebra como aritmética generalizada, em que as letras são consideradas generalizadoras de modelos, pode favorecer essa evolução.

Técnica usada para realizar tarefas do GT3.

As tarefas pertencentes ao GT3 envolvem o uso direto das propriedades provadas ou demonstradas e são chamadas muitas vezes de exercícios de fixação ou de problemas de aplicação. A técnica usada nessas tarefas envolve muitos passos. Geralmente, após a leitura do enunciado, identifica-se a propriedade que melhor se enquadra na questão e realiza-se um tratamento[16] em seus elementos. O que nos interessa neste tipo de tarefa é o fato de alguns passos realizados serem embasados por uma propriedade demonstrada ou provada anteriormente. Em outras palavras, no bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada há a presença das tarefas pertencentes ao GT1 ou GT2, que nesse momento já são consideradas propriedades válidas.

Essas tarefas são importantes para o nosso trabalho, pois a partir delas podemos constatar se os autores utilizam de alguma maneira as tarefas pertencentes ao GT1 e GT2, ou seja, se dão sentido para as provas e demonstrações realizadas ou solicitadas. Além disso, também podemos constatar se os autores aproveitam essas tarefas para trabalhar com as várias concepções de álgebra admitidas na seção 2.4.

Bloco tecnológico/teórico usado para justificar as técnicas usadas na realização de tarefas.

O bloco tecnológico/teórico relativo a uma técnica usada na realização de tarefas, independente de seu gênero, é formado por um conjunto de noções que

[16] Estamos usando a palavra tratamento no sentido de Duval (2003). Para Duval (2003) tratamento é a transformação de uma representação semiótica dentro de um mesmo registro. Por exemplo, transformar 2a+2b em 2(a+b) é um tratamento, pois é uma transformação realizada dentro do registro algébrico.

ajudam a justificar cada passo dado na realização dessa técnica. Essas noções podem ser matemáticas, paramatemáticas ou protomatemáticas[17].

Nesta pesquisa, as noções matemáticas usadas para justificar cada etapa de uma técnica referem-se principalmente aquelas pertencentes à teoria dos conjuntos e de parte da teoria dos números e da álgebra elementar. Estamos falando de noções como a de conjunto, subconjunto, intersecção e união de conjuntos, complementar de um conjunto, número natural, inteiro, racional, irracional, real, soma algébrica de números reais, redução de termos semelhantes, entre outras.

Para algumas das tarefas realizadas pelo autor ou propostas aos alunos há a necessidade de se conhecer o significado de certas noções paramatemáticas. Por exemplo, se é pedido para o aluno realizar uma demonstração por absurdo é imprescindível que ele conheça a noção de implicação, contra-positiva, demonstração, demonstração por absurdo, além de todas as noções matemáticas que possivelmente serão usadas na realização desta tarefa. Nesse sentido, quando falamos em noção paramatemática, nos referimos principalmente à noção de teorema, implicação lógica, hipótese, tese, dedução, prova, demonstração, entre outras.

Dentre as noções paramatemáticas citadas anteriormente, gostaríamos de destacar a noção de dedução. Quando já conhecemos algumas propriedades e desejamos, a partir delas, provar ou demonstrar outra, iniciamos um jogo de substituições de idéias, um encadeamento de propriedades que segue uma lógica específica. A esse jogo de substituições e de encadeamentos lógicos chamamos de dedução. Para a realização de algumas tarefas, principalmente as tarefas pertencentes ao GT1, essa noção é fundamental. Por exemplo, quando é pedido que o aluno demonstre que todo número natural é real, vêm à tona as propriedades "todo número natural é inteiro", "todo número inteiro é racional", "todo número racional é real". A partir dessas propriedades, usando um jogo de substituições e um encadeamento lógico, chega-se a conclusão de que "todo número natural é real". No caso desse exemplo, a dedução é realizada implicitamente, ou seja, esse jogo de substituições é feito mentalmente por quem realiza a tarefa. Está implícito,

[17] Definimos essas noções na seção 1.6.

principalmente, o uso da propriedade se A=B e B=C então A=C. Em termos de conjuntos, se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Com relação às noções protomatemáticas, nos referimos principalmente à noção de ler e de interpretar enunciados. Independente da natureza da tarefa apresentada é fundamental que o aluno saiba ler e entender o que está sendo pedido. No caso das tarefas propostas nos livros, o uso dessas noções é que vai desencadear o uso das outras.

Após a explicitação dos tipos de tarefas que pretendemos analisar vamos discutir a seguir como vamos fazer essa análise.

A princípio, analisaremos separadamente as tarefas realizadas pelos autores das tarefas propostas aos alunos. Essa escolha deveu-se a alguns fatores que discutiremos a seguir.

Durante a análise preliminar realizada na seção 2.6.3, percebemos a presença de tarefas comuns realizadas pelos autores das 03 coleções selecionadas. Para a análise não ficar repetitiva e enfadonha, agruparemos essas tarefas e faremos uma análise única. A análise das tarefas específicas a cada coleção será feita separadamente. Na intenção de deixarmos a análise a mais fidedigna possível, para cada tarefa desse tipo, apresentaremos uma cópia (recorte) da tarefa original realizada por cada autor.

No que diz respeito às tarefas propostas aos alunos, notamos a presença de poucas do *tipo prove que..., demonstre que...* Por este motivo, analisaremos todas as tarefas deste tipo solicitadas ao aluno em cada coleção. Em contrapartida, notamos a presença de muitas tarefas do tipo exercício de aplicação e resolução de problemas. Para esses tipos faremos a análise de apenas uma tarefa representante, quando houver.

Durante a análise de cada tarefa selecionada por nós, realizada pelos autores ou proposta ao aluno, indicaremos:

i. O gênero de tarefa a que pertencem;
ii. A descrição da técnica usada;

iii. O nível de prova em que se situa, segundo Balacheff (1988), para o caso de pertencerem ao GT1 ou GT2;

iv. As possíveis concepções de álgebra usadas durante a realização tarefa;

v. O bloco tecnológico/teórico usado;

vi. Comentários gerais que possam ser interessantes e significativos para determinado tipo de tarefa.

O esquema a seguir mostra de maneira resumida nossa organização metodológica:

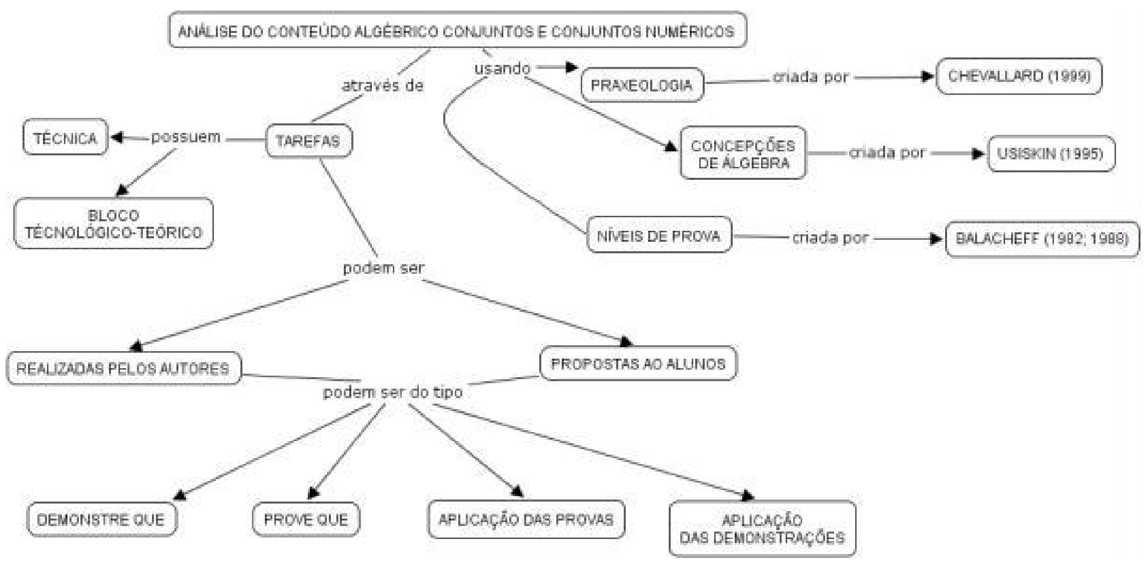


Figura 14: Síntese dos aspectos metodológicos.

A seguir, apresentaremos a análise das tarefas envolvendo provas e demonstrações no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*.

3. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta seção da pesquisa analisaremos as tarefas envolvendo provas e demonstrações no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* de cada uma das coleções selecionadas por nós. Essa análise será realizada em duas partes: (i) análise das tarefas realizadas pelos autores de cada coleção e (ii) análise das tarefas propostas aos alunos pelos autores das mesmas.

Como já dissemos, por uma questão de praticidade decidimos, na primeira parte da análise, separar as tarefas comuns das tarefas específicas de cada coleção. Para que a essa análise fique o mais fidedigna possível, decidimos "recortar" de cada coleção a prova ou a demonstração realizada pelos autores e em seguida comentá-las a luz de nosso referencial teórico.

Na segunda parte também faremos uma separação. Analisaremos as tarefas do tipo *mostre que... e demonstre que...* propostas aos alunos separadamente das tarefas propostas que utilizam uma propriedade provada ou demonstrada anteriormente. O esquema a seguir sintetiza a organização dessa análise:

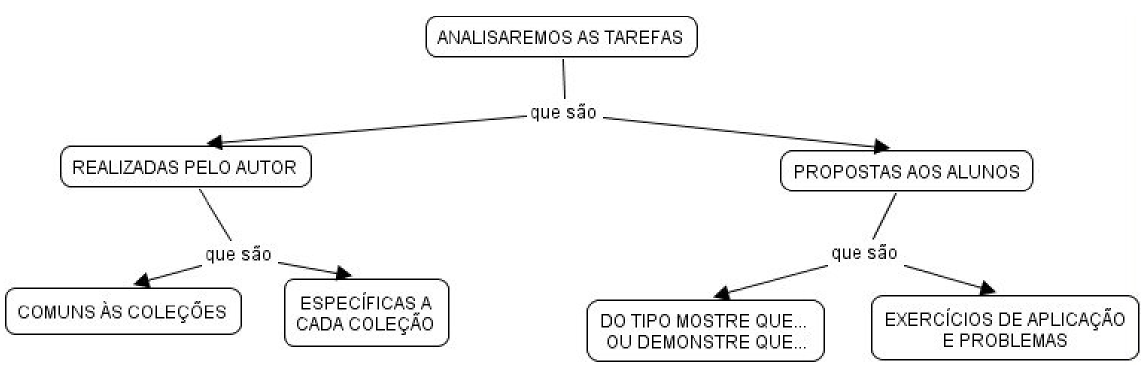


Figura 15: Análise das tarefas.

3.1 TAREFAS REALIZADAS PELOS AUTORES

Antes de iniciarmos a análise das tarefas realizadas pelos autores das coleções selecionadas por nós, apresentaremos um quadro resumo dessas tarefas. Nesse quadro, mostraremos quais propriedades referentes ao conteúdo algébrico

Conjuntos e Conjuntos Numéricos foram provadas ou demonstradas por cada um deles. Esse quadro ajudará a identificar mais facilmente as tarefas comuns às coleções e as específicas a cada uma delas.

Gostaríamos de esclarecer que a classificação das tarefas a seguir como "prova" ou "demonstração" foi feita por nós segundo Balacheff (1982). Para que o texto do quadro resumo ficasse bem claro, durante a construção do mesmo, fizemos pequenas modificações no enunciado das propriedades propostos pelos autores de cada coleção:

	GÊNEROS DE TAREFA	**TIPOS DE TAREFA**	**TAREFAS**
REALIZADAS PELO AUTOR DA COLEÇÃO C2	GT1	Demonstrar uma propriedade sobre os Conjuntos e/ou Conjuntos Numéricos	• Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.
	GT2	Provar uma propriedade sobre os Conjuntos e/ou Conjuntos Numéricos	• Provar que dados 2 conjuntos finitos A e B $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ • Provar que entre dois números racionais há infinitos racionais. • Provar que toda raiz cuja representação decimal não é exata assim como todo número cuja forma decimal não é exata nem periódica é um número irracional.
REALIZADAS PELO AUTOR DA COLEÇÃO C3	GT1	Demonstrar uma propriedade sobre os Conjuntos e/ou Conjuntos Numéricos	• Demonstrar que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto A. • Demonstrar que dados dois conjuntos A e B, $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$. • Demonstrar que dados 2 conjuntos finitos A e B $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. • Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.
	GT2	Provar uma propriedade sobre os Conjuntos e/ou Conjuntos Numéricos	• Provar que se um conjunto possui n elementos então o conjunto das partes desse conjunto possui 2^n elementos. • Provar que um número racional possui representação decimal finita ou infinita e periódica. • Provar que entre dois números inteiros nem sempre há um número inteiro. • Provar que entre dois

			números racionais sempre há um número racional.
REALIZADAS PELO AUTOR DA COLEÇÃO C11	GT1	Demonstrar uma propriedade sobre os Conjuntos e/ou Conjuntos Numéricos	• Demonstrar que todo número natural é racional. • Demonstrar que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto A. • Demonstrar que dados dois conjuntos A e B, $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$. • Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional. • Demonstrar que dados 2 conjuntos finitos A e B $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
	GT2	Provar uma propriedade sobre os Conjuntos e/ou Conjuntos Numéricos	• Provar que um número racional possui representação decimal finita ou infinita e periódica. • Provar que dados dois conjuntos A e B, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

Analisaremos a seguir as tarefas propostas pelos autores das coleções selecionadas a partir das informações contidas no quadro acima. Para isso, usaremos os critérios de análise discutidos na seção 2.6.4.

(i) TAREFAS COMUNS ÀS COLEÇÕES

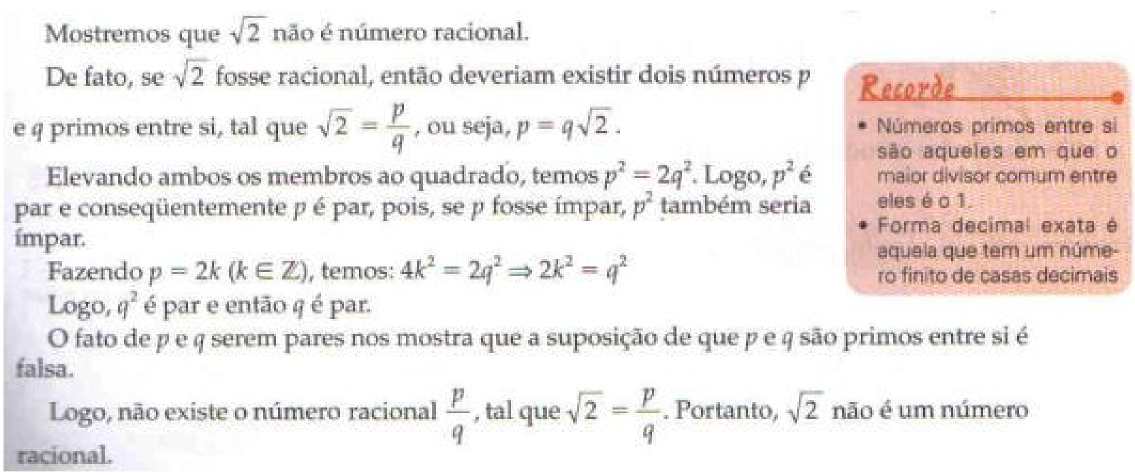
Das tarefas comuns realizadas pelos autores das coleções selecionadas há aquelas que pertencem ao GT1 e ao GT2. Antes de iniciarmos a análise dessas tarefas indicaremos a que gênero elas fazem parte e justificaremos nossa classificação.

Tarefas pertencentes ao GT1.

As tarefas TR1, TR2, TR3 e TR4 foram classificadas como pertencentes ao GT1, pois para sua realização é necessário conhecer as noções paramatemáticas de teorema, hipótese, tese, implicação, dedução, demonstração, entre outras. Além disso, são consideradas provas conceituais, segundo Balacheff (1988), e utilizam a linguagem algébrica para exprimir generalidade.

Tarefa 01 (TR1): Demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Essa propriedade é demonstrada pelos autores das três coleções. Porém, notamos interesses diferentes por parte deles nessa demonstração. Os autores das coleções C2 e C3 demonstram a irracionalidade de $\sqrt{2}$ com a intenção de mostrar ao aluno que esse número não possui a propriedade de um número racional, ou seja, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma p/q com p e q inteiros e q diferente de zero. Já o autor da coleção C11 demonstra a mesma propriedade com a intenção de mostrar ao aluno como se faz uma demonstração por absurdo usando a equivalência entre uma implicação e sua contra-positiva. Vejamos um “recorte” da demonstração realizada pelo autor da coleção C2. As demonstrações realizadas pelos autores das coleções C3 e C11 são análogas a esta.


Mostremos que $\sqrt{2}$ não é número racional.

De fato, se $\sqrt{2}$ fosse racional, então deveriam existir dois números p e q primos entre si, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ou seja, $p = q\sqrt{2}$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é par e conseqüentemente p é par, pois, se p fosse ímpar, p^2 também seria ímpar.

Fazendo $p = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$), temos: $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$

Logo, q^2 é par e então q é par.

O fato de p e q serem pares nos mostra que a suposição de que p e q são primos entre si é falsa.

Logo, não existe o número racional $\frac{p}{q}$, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Recorde

- Números primos entre si são aqueles em que o maior divisor comum entre eles é o 1.
- Forma decimal exata é aquela que tem um número finito de casas decimais

Figura 16: Demonstração da irracionalidade da $\sqrt{2}$ (BIANCHINI; PACCOLA, 2004, p.50).

Com relação à técnica usada, os autores tratam implicitamente a propriedade como um teorema a ser demonstrado. Em outras palavras, não falam abertamente ao aluno que após a demonstração essa propriedade poderá ser chamada de teorema. Outra observação importante é que os autores não separam a hipótese da tese de maneira explícita para o aluno. Porém, durante a demonstração, percebemos que eles usam essas noções já que o raciocínio por absurdo é usado: nega-se a tese, chega-se a negação da hipótese.

De modo geral, a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ é feita pelos três autores supondo-se inicialmente que $\sqrt{2}$ é um número racional. Com isso, é feita a simplificação das expressões (i) $\sqrt{2}$=p/q em p=q$\sqrt{2}$ e (ii) p=q$\sqrt{2}$ em $p^2=2q^2$ com p e q inteiros, primos entre si e q diferente de zero. Neste ponto da demonstração constata-se que p^2, p, q^2 e q são números pares e observa-se uma contradição entre o resultado obtido e a suposição inicial, demonstrando-se a propriedade por absurdo.

Por pertencer ao GT1, essa demonstração é uma prova conceitual. Com relação ao nível, segundo Balacheff (1988), trata-se de um *cálculo nas afirmações*, pois ela é feita de maneira genérica e sua escrita é dotada de rigor matemático, o que é percebido por meio do uso de variáveis.

Notamos que esta demonstração faz com que o aluno entre em contato com duas concepções de álgebra, propostas por Usiskin (1995). Quando se admite um número racional na forma p/q com p e q inteiros e q diferente de zero há um trabalho da álgebra como aritmética generalizada. Quando há o tratamento de $\sqrt{2}$=p/q em p=q$\sqrt{2}$ entra-se em contato com a álgebra como uma estrutura, em que as letras são sinais no papel passíveis de manipulação.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica é composto pela noção paramatemática de demonstração por absurdo e de dedução. O uso da dedução fica evidenciado em algumas passagens como aquela que diz "se q^2 é par então q é par". Além disso, há a necessidade de se conhecer as noções matemáticas de número racional, números pares e ímpares, adição e multiplicação algébrica de números racionais. Esta última é muito utilizada nos tratamentos algébricos feitos durante a demonstração.

Tarefa 02 (TR2): Demonstrar que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto A.

Esta propriedade é demonstrada pelos autores das coleções C3 e C11. Ambos a demonstram com a intenção de mostrar ao aluno algumas propriedades decorrentes da definição da relação de inclusão entre dois conjuntos. Há também o interesse de usar a propriedade durante a abordagem da noção de número de elementos do conjunto das partes de um conjunto.

A seguir, apresentamos um “recorte” das demonstrações realizadas pelos autores das coleções C3 e C11. Apresentaremos as duas demonstrações, pois, apesar de parecidas, há uma diferença na linguagem usada em cada uma delas. Analisando bem o texto dessas duas demonstrações percebemos que a apresentada pela coleção C11 (figura 18) apresenta uma falha na linguagem. O autor da coleção C11 tenta fazer uma demonstração por absurdo, porém, não indica durante o texto que para chegar à conclusão de que $\emptyset \subset A$ ele vai supor inicialmente que $\emptyset \not\subset A$. A prova em sua totalidade está baseada na negação da tese, porém o autor não deixa isso explícito. Já o autor da coleção C3 também usa a demonstração por absurdo, mas evidencia que para provar que $\emptyset \subset A$ ele vai supor inicialmente que $\emptyset \not\subset A$.

A relação $A \subset B$ chama-se *relação de inclusão*. São casos particulares extremos de inclusão:

- $A \subset A$, pois é claro que qualquer elemento de **A** pertence a **A**.
- $\emptyset \subset A$, qualquer que seja o conjunto A, pois, se admitíssemos que $\emptyset \not\subset A$, teríamos um elemento **x** tal que $x \in \emptyset$ e $x \notin A$. Mas $x \in \emptyset$ é impossível. Logo, $\emptyset \subset A$.

Figura 17: Demonstração da propriedade: $\forall A, \emptyset \subset A$ (DANTE, 2003, p. 10).

Uma justificativa:
Para mostrar que $\emptyset \subset A$ temos que obter um elemento x tal que $x \in \emptyset$, mas $x \notin A$. Como $x \in \emptyset$ é impossível, somos levados a concluir que $\emptyset \subset A$, isto é, que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto.

Figura 18: Demonstração da propriedade: $\forall A, \emptyset \subset A$ (LOGEN, 2003, p. 122).

Com relação à técnica utilizada, os dois autores supõem a existência de um elemento x no conjunto vazio e consideram que o conjunto vazio não estará contido no conjunto A se o elemento x não pertencer ao conjunto A. Em seguida, classifica-se o conjunto vazio como um conjunto sem elementos e verifica-se a impossibilidade do elemento x pertencer ao conjunto vazio. Por fim, constata-se que o conjunto vazio está contido no conjunto A.

Apesar de não se revelar ao aluno, a demonstração realizada por ambos os autores é feita usando o raciocínio por absurdo. Por este motivo, o bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica é composto pela noção paramatemática de hipótese, tese, demonstração por absurdo e dedução. Também é necessário conhecer a noção matemática de conjunto e de relação de inclusão entre dois conjuntos, ou seja, $A \subset B$ quando todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto B.

Por pertencer ao GT1, essa demonstração é uma prova conceitual. Com relação ao nível, segundo Balacheff (1988), trata-se de um *cálculo nas afirmações*, pois ela é feita de maneira genérica e sua escrita é dotada de rigor matemático, o que é percebido a partir do uso da simbologia característica da teoria dos conjuntos.

Acreditamos que esta demonstração faz com que o aluno entre em contato com a concepção de álgebra como aritmética generalizada e como estrutura já que a letra A representa um conjunto qualquer e é manipulada ao longo da demonstração.

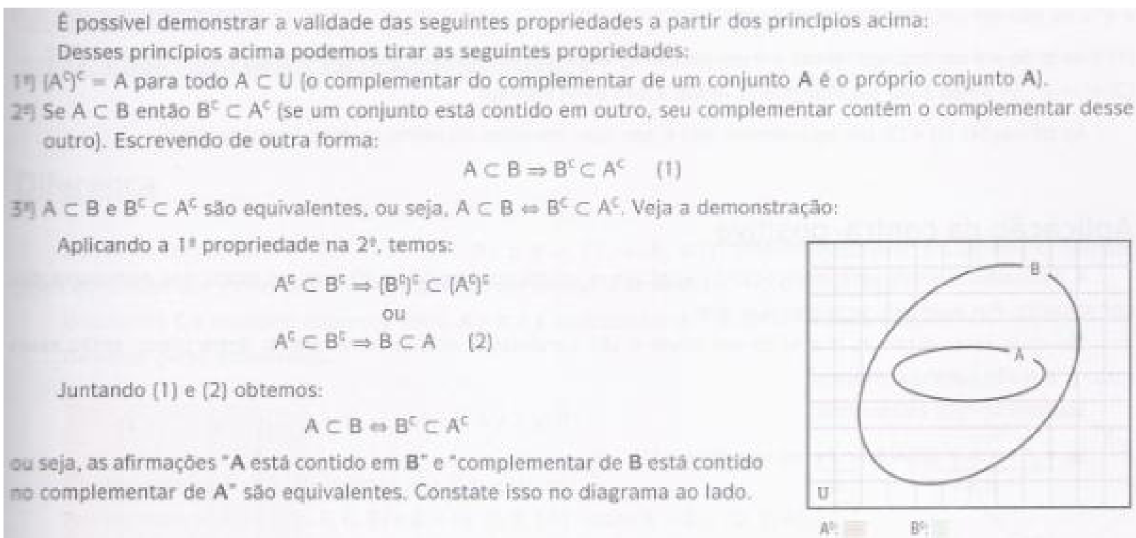
Para finalizarmos a análise dessa tarefa, gostaríamos de abordá-la segundo as idéias de De Villiers (2002). Esse pesquisador considera que é costume no ensino da matemática fazer uma abordagem em que as demonstrações aparecem como um recurso para eliminar as dúvidas. Apesar disso, admite um significado mais amplo para uma demonstração, classificando em seu trabalho 6 funções que ela pode ter:

- **Verificação**: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
- **Explicação**: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
- **Descoberta**: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;
- **Comunicação**: negociação do significado de objetos matemáticos;
- **Desafio intelectual**: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
- **Sistematização**: organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Dessas funções, a demonstração em questão possui a de verificação e de explicação. No que tange a função de verificação, ela consiste num meio de verificar a validade da propriedade $\forall A, \emptyset \subset A$ para nosso próprio convencimento ou de outrem. Além disso, essa demonstração é uma explicação lógica do por que essa propriedade é verdade.

Tarefa 03 (TR3): Demonstrar que dados dois conjuntos A e B, $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.

Esta propriedade é demonstrada pelos autores das coleções C3 e C11. Ambos os autores a demonstram com a intenção de explicar ao aluno o que é uma implicação e sua contra-positiva. Além disso, é intenção dos autores aproveitarem a demonstração para explicar o que é uma redução ao absurdo. A seguir, apresentamos um “recorte” da demonstração realizada pelo autor da coleção C3. A demonstração realizada pelo autor da coleção C11 é análoga a esta.



É possível demonstrar a validade das seguintes propriedades a partir dos princípios acima:

Desses princípios acima podemos tirar as seguintes propriedades:

1ª) $(A^C)^C = A$ para todo $A \subset U$ (o complementar do complementar de um conjunto **A** é o próprio conjunto **A**).

2ª) Se $A \subset B$ então $B^C \subset A^C$ (se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém o complementar desse outro). Escrevendo de outra forma:

$$A \subset B \Rightarrow B^C \subset A^C \quad (1)$$

3ª) $A \subset B$ e $B^C \subset A^C$ são equivalentes, ou seja, $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$. Veja a demonstração:

Aplicando a 1ª propriedade na 2ª, temos:

$$A^C \subset B^C \Rightarrow (B^C)^C \subset (A^C)^C$$

ou

$$A^C \subset B^C \Rightarrow B \subset A \quad (2)$$

Juntando (1) e (2) obtemos:

$$A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$$

ou seja, as afirmações "**A** está contido em **B**" e "complementar de **B** está contido no complementar de **A**" são equivalentes. Constate isso no diagrama ao lado.

Figura 19: Demonstração da propriedade: $\forall$ A e B, $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$ (DANTE, 2003, p. 13).

É interessante notar que, apesar de não chamar a propriedade de teorema, o autor da coleção C3 cita explicitamente a palavra “demonstrar” ao apresentar a tarefa no livro e escreve a propriedade a ser demonstrada na forma de implicação.

Com relação à técnica aplicada, os autores utilizam as propriedades (i) $A \subset B \Rightarrow B^C \subset A^C$ e (ii) $(A^C)^C = A \; e \; (B^C)^C = B$ e a partir delas, numa dedução, constatam que $B^C \subset A^C \Rightarrow A \subset B$.

Os autores das coleções C3 e C11 utilizam de forma explícita nesta demonstração o encadeamento de propriedades já trabalhadas anteriormente.

Consideramos este fato importante, pois esta demonstração pode fazer com que o aluno perceba claramente como é o processo de dedução.

Com relação ao bloco tecnológico/teórico, ele é composto pela noção paramatemática de implicação e de dedução. Além disso, está presente a noção matemática de conjunto e duas propriedades decorrentes da noção de complementar de um conjunto: (i) $B^C \subset A^C \Rightarrow A \subset B$ e (ii) $(A^C)^C = A\ e\ (B^C)^C = B$.

Essa demonstração é uma prova conceitual ao nível do *cálculo nas afirmações*, segundo Balacheff (1988). Seus elementos são colocados de maneira genérica e sua escrita é dotada de rigor matemático com o uso da simbologia característica da teoria dos conjuntos.

Acreditamos que esta demonstração faz com que o aluno entre em contato com a concepção de álgebra como aritmética generalizada e como estrutura já que as letras A e B representam conjuntos genéricos e são manipuladas ao longo da demonstração. Percebemos também que esta demonstração tem a função de verificação e de explicação da validade da propriedade em questão, segundo De Villiers (2002).

Tarefa 04 (TR4): Demonstrar que dados 2 conjuntos finitos A e B n(A∪B)=n(A)+n(B)-n(A∪B).

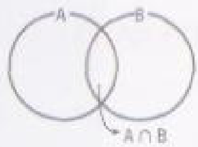
Esta propriedade está presente nas três coleções selecionadas por nós. Ela é demonstrada pelos autores das coleções C3 e C11 e provada pelo autor da coleção C2 com a exposição de um exemplo. Independente de como é feita a verificação da validade desta propriedade, os três autores têm a intenção de que os alunos a utilizem na resolução de problemas em que se necessita saber o número de elementos da união de dois ou mais conjuntos que possuem intersecção. Apresentaremos uma cópia da demonstração realizada pelo autor da coleção C3. A demonstração realizada pelo autor da coleção C11 é análoga a esta.

É possível provar que, de modo geral, quando **A** e **B** são conjuntos finitos, tem-se:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \text{ quando } A \cap B \neq \varnothing$$

Demonstração:

Observe que $n(A)$ inclui $n(A \cap B)$ e $n(B)$ também inclui $n(A \cap B)$:



$$n(A \cup B) = [n(A) - \cancel{n(A \cap B)}] + \cancel{n(A \cap B)} + [n(B) - n(A \cap B)]$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Observação:

No caso particular de $A \cap B = \varnothing$, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B), \text{ pois } n(A \cap B) = 0$$

Figura 20: Demonstração da propriedade: ∀ A e B finitos, n(A∪B)=n(A)+n(B)-n(A∪B) (DANTE, 2003, p. 19).

Observando este "recorte" percebemos que o autor da coleção C3 não faz questão de diferenciar o significado das palavras prova e demonstração. Inicialmente ele afirma que "é possível provar" de modo geral a propriedade. Porém intitula sua justificativa com a palavra demonstração.

Com relação à técnica usada pelas coleções, os autores enfatizam a partir de diagramas que, dados dois conjuntos A e B finitos, em n(A) e n(B) já está contido n(A∩B). Após isso, concluem a partir da observação anterior que para fazermos n(A∪B) devemos somar n(A) e n(B) e retirar n(A∩B).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica é composto pela noção paramatemática de demonstração e de dedução. Além disso, também é composto pela noção matemática de conjunto, de intersecção e união entre conjuntos e da propriedade (i) se A e B são conjuntos disjuntos então $n(A) + n(B) = n(A \cup B)$.

Essa demonstração é uma prova conceitual ao nível do *cálculo nas afirmações*, segundo Balacheff (1988). Seus elementos são colocados de maneira genérica e sua escrita é dotada de rigor matemático com o uso da simbologia característica da teoria dos conjuntos.

Acreditamos que esta demonstração faz com que o aluno entre em contato com a concepção de álgebra como aritmética generalizada e como estrutura já que as letras A e B representam conjuntos genéricos e são manipuladas ao longo da demonstração. Percebemos também que esta demonstração tem a função de verificação e de explicação da validade da propriedade em questão, segundo De Villiers (2002).

Considerações a respeito das tarefas comuns realizadas pelos autores e pertencentes ao GT1

A presença de 4 tarefas pertencentes ao GT1, comuns às coleções, é considerada por nós um fato promissor em relação ao ensino e aprendizagem de demonstrações, pois nos mostra que não há um abandono total desse trabalho por parte dos livros didáticos o que possivelmente pode ser refletido na prática do professor em realizar tarefas desse tipo com os alunos, já que muitos deles apóiam sua explicações naquelas apresentadas pelos livros. Apesar de promissora, acreditamos que o uso de tarefas desse tipo pelos livros didáticos está aquém daquilo que consideramos significativo para o ensino de demonstrações. A respeito disso, retomaremos alguns pontos dos trabalhos de Duval (1989) e De Villiers (2002).

Como já dissemos, Duval (1989) admite o aprendizado da demonstração vinculado ao trabalho do aluno com tarefas específicas de organização dedutiva. Tarefas desse tipo possibilitam a tomada de consciência do aluno a respeito da estrutura profunda da demonstração, bem como sua articulação com a estrutura superficial. Para Duval (1989), a estrutura profunda da demonstração é constituída da articulação dos enunciados em função de seu estatuto e progride a partir de substituições realizadas sobre esses enunciados, o que se assemelharia a atividade praticada num cálculo. Já a estrutura superficial é constituída pelos elementos de um texto comum. Nela os enunciados são acrescentados uns aos outros a fim de construir uma redação.

Duval (1989) acredita que as tarefas de organização dedutiva são aquelas que propõem ao aluno uma representação não-discursiva da estrutura profunda de uma demonstração e a articula com a o registro de representação em linguagem natural. Encontramos um exemplo desse tipo de tarefa em Almouloud (2003). Apesar de ser um exemplo geométrico, nos ajudará a entender o que é uma tarefa de organização dedutiva.

Problema

Sejam M, N, P e Q os pontos médios respectivos dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ de um quadrilátero convexo ABCD, demonstre que o quadrilátero MNPQ é um paralelogramo.

a) Complete o quadro abaixo:

	Hipóteses	Conclusão
Linguagem natural		
Linguagem algébrica		
Linguagem da figura		

Caixa das ferramentas que podem ser usadas na demonstração:

D – Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

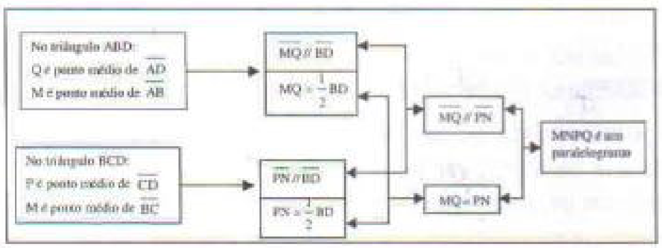
P1 – Se um quadrilátero convexo tem dois lados opostos paralelos e congruentes, então ele é um paralelogramo.

P2 – O segmento cujas extremidades são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual à metade do comprimento desse lado.

P3 – Se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.

P4 – Propriedade transitiva da igualdade: se a = b e b = c, então a = b.

b) Complete o esquema da demonstração usando D, P1, P2, P3 ou P4 nos lugares adequados:



c) Numere de 1 a 8 para obter a redação da demonstração:

( ) Demonstramos que $\overline{MQ} // \overline{BD}$ e $\overline{PN} // \overline{BD}$.

( ) Estamos, assim, satisfazendo as hipóteses da propriedade: Se $r \perp t$ e $s \perp t$, então $r // s$.

( ) Assim, $\overline{MQ}$ e $\overline{PN}$ são paralelas.

( ) Estamos, assim, satisfazendo a propriedade: "O segmento cujas extremidades são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual à metade do comprimento desse lado".

( ) Portanto, MQ = PN.

( ) Portanto, MNPQ é um paralelogramo.

( ) Estamos satisfazendo a propriedade transitiva da igualdade: se a = b e b = c, então a = b.

( ) Demonstramos que MQ = ½ BD e PN = ½ BD.
( ) Por hipótese, no triângulo ABD: Q é ponto médio de $\overline{AD}$ e M é ponto médio de $\overline{AB}$.
( ) Portanto, concluo que $\overline{PN}$ // $\overline{BD}$ e PN = ½ BD.
( ) Estamos satisfazendo a propriedade: "Se um quadrilátero convexo tem dois lados opostos paralelos e congruentes, então ele é um paralelogramo".
( ) Demonstramos que MQ = PN e que $\overline{MQ}$ e $\overline{PN}$ são paralelos.
( ) Portanto, $\overline{MQ}$ // $\overline{BD}$ e MQ = ½ BD.
( ) Estamos, assim, satisfazendo a propriedade: "O segmento cujas extremidades são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual à metade do comprimento desse lado".
( ) Por hipótese, no triângulo BCD: P é ponto médio de $\overline{CD}$ e M é ponto médio de $\overline{BC}$.

d) Faça a redação da demonstração.

Figura 21: Tarefa de organização dedutiva (ALMOULOUD, 2003, p. 137-138).

Apesar da realização de 4 tarefas, por parte dos autores, envolvendo a demonstração de uma propriedade do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos,* notamos que não houve em momento algum o uso da representação não-discursiva da estrutura profunda da demonstração de modo que possibilitasse ao aluno perceber de maneira explícita o jogo de substituições dos enunciados das propriedades em função de seu estatuto. A ausência de tarefas contendo esses elementos poderia dificultar o entendimento do aluno a respeito do funcionamento de uma demonstração.

Voltando ao trabalho de De Villiers (2002), notamos que algumas das 6 funções da demonstração propostas por ele não foram trabalhadas pelos autores durante a realização das tarefas pertencentes ao GT1 e GT2, comuns às coleções. É o caso da função de sistematização que se usada junto às tarefas realizadas poderia enriquecer o significado das provas e demonstrações e contribuir para a construção da noção de sistema dedutivo por parte dos alunos.

Por se tratar de um conteúdo algébrico, constatamos que as tarefas analisadas na seção anterior possibilitaram o trabalho com 2 das 4 concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995). A concepção de álgebra como aritmética generalizada ficou evidenciada devido ao uso de letras para se representar a forma algébrica de um número racional qualquer e para representar de maneira geral a característica de um conjunto. A concepção de álgebra como estrutura revelou-se principalmente nos tratamentos algébricos realizados a fim de se demonstrar uma propriedade.

Tarefas pertencentes ao GT2.

As tarefas TR5 e TR6 foram classificadas como pertencentes ao GT2, pois se afirma a validade de uma propriedade a partir de casos específicos. Em outras palavras, são consideradas provas pragmáticas, segundo Balacheff (1988).

Tarefa 05 (TR5): Provar que todo número racional pode ser representado na forma decimal com um número finito de casas decimais ou por meio de infinitas casas decimais, porém periódicas.

Esta propriedade é provada pelos autores das coleções C3 e C11 por meio da exposição de exemplos. Porém, as técnicas usadas na prova dessa propriedade são diferentes nas duas coleções. O autor da coleção C3 prova a propriedade usando seis casos numéricos específicos. O autor da coleção C11 usa apenas um exemplo pictográfico.

Os autores provam esta propriedade para que futuramente os alunos consigam distinguir um número racional de um número irracional observando apenas sua representação decimal.

Como as provas apresentadas nas coleções C3 e C11 não são análogas, mostraremos a seguir um “recorte” de cada uma delas:

Dado um número racional $\frac{a}{b}$, a representação decimal desse número é obtida dividindo-se **a** por **b**, podendo resultar em:

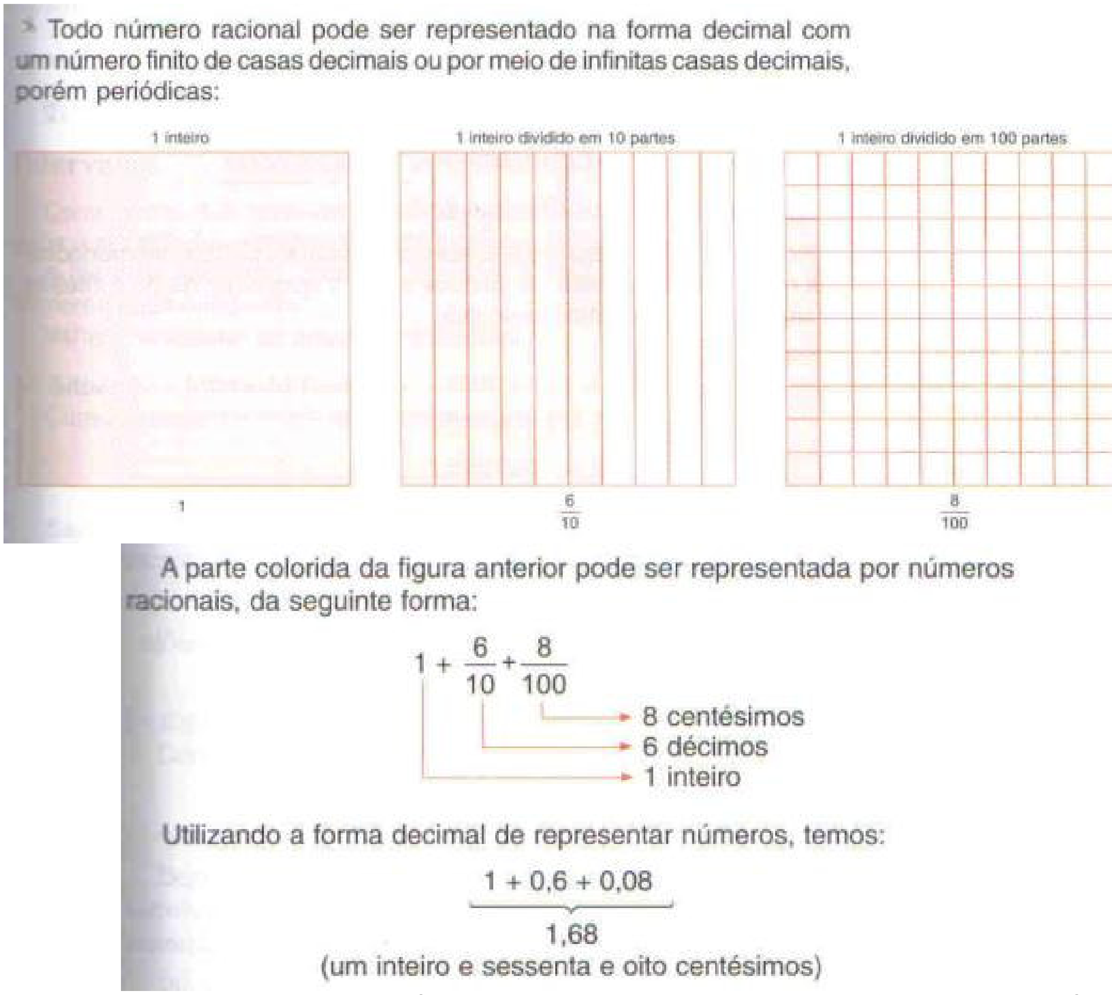
- decimais exatas, finitas:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad -\frac{5}{8} = -0{,}625 \qquad 6 = \frac{6}{1} = 6{,}0 \qquad \frac{4}{5} = 0{,}8$$

- decimais ou dízimas periódicas, infinitas:

$$\frac{2}{3} = 0{,}666... = 0{,}\overline{6} \qquad \frac{177}{990} = 0{,}1787878... = 0{,}1\overline{78}$$

Figura 22: Prova da propriedade: todo número racional possui representação decimal finita ou infinita periódica (DANTE, 2003, p. 24)



Todo número racional pode ser representado na forma decimal com um número finito de casas decimais ou por meio de infinitas casas decimais, porém periódicas:

1 inteiro | 1 inteiro dividido em 10 partes | 1 inteiro dividido em 100 partes

$1 \qquad \frac{6}{10} \qquad \frac{8}{100}$

A parte colorida da figura anterior pode ser representada por números racionais, da seguinte forma:

$$1 + \frac{6}{10} + \frac{8}{100}$$

8 centésimos

6 décimos

1 inteiro

Utilizando a forma decimal de representar números, temos:

$$\underbrace{1 + 0{,}6 + 0{,}08}_{1{,}68}$$

(um inteiro e sessenta e oito centésimos)

Figura 23: Prova da propriedade: todo número racional possui representação decimal finita ou infinita periódica (LOGEN, 2003, p. 11)

Com relação à técnica usada, para realizar a prova da propriedade em questão, o autor da coleção C3 escolhe seis números racionais na forma a/b com a e b inteiros e b diferente de zero e efetua a divisão de a por b. A partir da observação do quociente de tais divisões, o autor constata que a representação decimal é exata ou é infinita e periódica. Já o autor da coleção C11 apresenta um número racional na forma pictográfica e o representa na forma de adição de frações com denominadores contendo uma potência de 10. Em seguida, apresenta para o aluno como se lê corretamente cada uma dessas frações e, a partir dessa leitura, escreve o número racional na forma decimal.

Não podemos deixar de notar que na prova apresentada pelo autor da coleção C11 há o uso de um caso específico que justifica apenas a primeira parte da propriedade. Não há a utilização de casos que mostrem que a representação decimal de um número racional possa ser infinita e periódica.

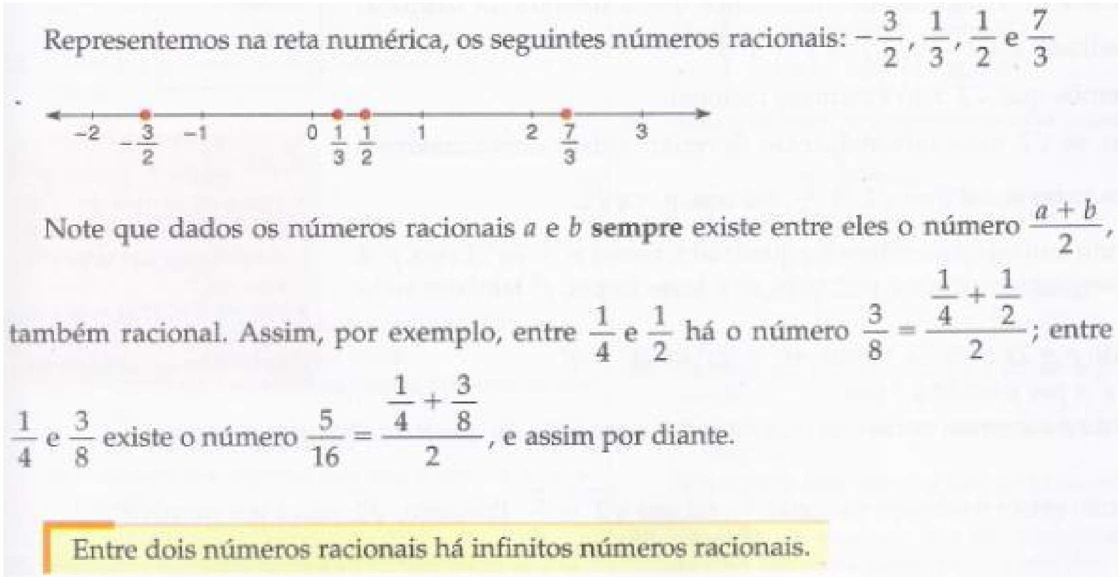
O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica é composto pela noção matemática de número racional e das propriedades da divisão no conjunto dos números racionais. O autor da coleção C11 utiliza também a propriedade: Seja r um número racional. A representação decimal de r é dada por: $r = a, a_1 a_2 \dots a_n = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots \frac{a_n}{10^n}$.

Por pertencer ao GT2, essa tarefa é classificada, segundo Balacheff (1988) como uma prova pragmática e está ao nível do empirismo ingênuo, pois casos aleatórios são usados para se constatar a veracidade da propriedade.

Os dois autores enunciam a propriedade em questão de forma genérica. Na coleção C3 isso é evidenciado pela expressão “Dado um número racional a/b...”. Na coleção C11, pela expressão “Todo número racional...”. Apesar disso, apresenta-se uma prova com uso de casos específicos e não com uma demonstração, com o uso de letras e rigor matemático. Por este motivo, consideramos que esta tarefa não permite ao aluno entrar em contato com alguma concepção de álgebra proposta por Usiskin (1995), visto que para sua realização não se utilizaram letras.

Tarefa 06 (TR6): Provar que entre dois números racionais sempre há um número racional.

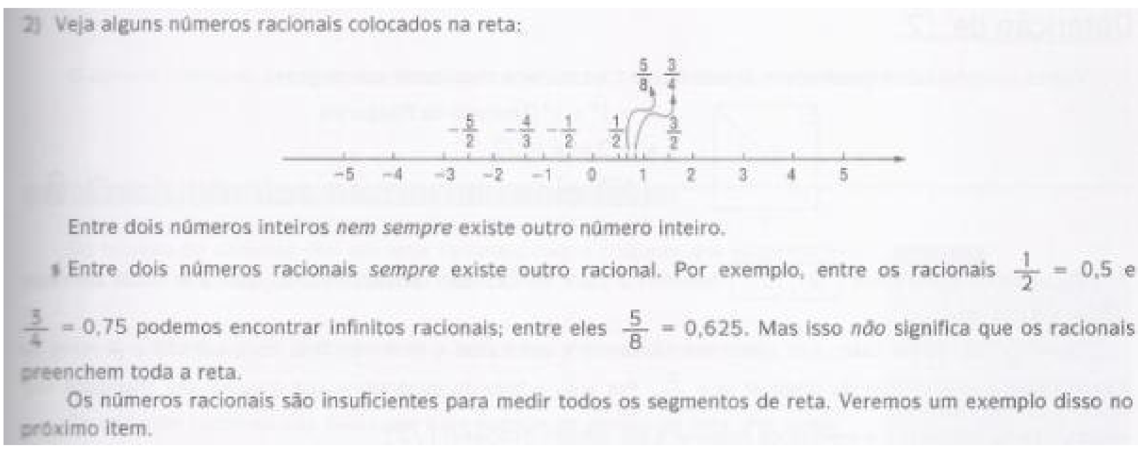
A propriedade em questão é provada pelos autores das coleções C2 e C3. Também notamos aqui uma diferença na técnica usada pelos autores. O autor da coleção C2 apresenta para os alunos dois casos em que há um número racional entre outros dois racionais. Já o autor da coleção C3 utiliza apenas um caso. Como as provas apresentadas nas coleções C2 e C3 não são análogas, mostraremos a seguir um “recorte” de cada uma delas:


Representemos na reta numérica, os seguintes números racionais: $-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ e $\frac{7}{3}$

Note que dados os números racionais a e b **sempre** existe entre eles o número $\frac{a+b}{2}$, também racional. Assim, por exemplo, entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ há o número $\frac{3}{8} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}$; entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{8}$ existe o número $\frac{5}{16} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}}{2}$, e assim por diante.

Entre dois números racionais há infinitos números racionais.

Figura 24: Prova da propriedade: entre dois números racionais sempre existe um número racional (BIANCHINI; PACCOLA, 2004, p. 49)


2) Veja alguns números racionais colocados na reta:

Entre dois números inteiros *nem sempre* existe outro número inteiro.

Entre dois números racionais *sempre* existe outro racional. Por exemplo, entre os racionais $\frac{1}{2} = 0,5$ e $\frac{3}{4} = 0,75$ podemos encontrar infinitos racionais; entre eles $\frac{5}{8} = 0,625$. Mas isso *não* significa que os racionais preenchem toda a reta.

Os números racionais são insuficientes para medir todos os segmentos de reta. Veremos um exemplo disso no próximo item.

Figura 25: Prova da propriedade: entre dois números racionais sempre existe um número racional (DANTE, 2003, p. 25)

Com relação à técnica usada, para realizar a prova em questão o autor da coleção C2 escolhe dois números racionais x e y na forma a/b com a e b inteiros e b diferente de zero. Em seguida, usando as operações com números racionais, mostra que o número racional $\frac{x+y}{2}$ está entre x e y. Há a repetição deste processo para mais um caso. Já o autor da coleção C3 escolhe dois números racionais x e y na forma a/b com a e b inteiros e b diferente de zero e representa-os na forma decimal dividindo a por b. A partir daí, ele escolhe um número decimal z entre x e y e mostra que esse número também é racional, pois pode ser escrito na forma a/b com a e b inteiros e b diferente de zero. Notamos que o número z escolhido pelo autor da coleção C3 corresponde à média aritmética dos números x e y, porém essa informação está implícita.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica de ambos é composto pela noção matemática de número racional e das propriedades da divisão no conjunto dos números racionais.

Antes de finalizar a análise desta tarefa, gostaríamos de retomar um dos níveis de prova propostos por Balacheff (1988): o exemplo genérico. Para o pesquisador, o exemplo genérico é um nível de prova entre as provas pragmáticas e conceituais. Ele representa o início da tomada de generalidade da propriedade que se deseja validar. Nesse nível de prova, os casos particulares selecionados são manipulados a fim de se revelar uma classe de objetos. Percebemos que a prova realizada pelo autor da coleção C11 se enquadra nesse nível, pois os casos particulares x e y escolhidos são manipulados a fim de que o aluno perceba que o número racional z entre eles faz parte de uma classe de objetos denominada média aritmética, ou seja, $z = \frac{x+y}{2}$. Esse nível de prova é importante, pois traz subsídios para a realização de uma possível demonstração. O autor poderia ter solicitado ao aluno, por exemplo, ao final desta prova, uma tarefa de demonstração, visto que o aluno já teria um suporte para isso. Percebemos, a partir do caso específico escolhido, que o autor da coleção C3 também teve a intenção de usar a média aritmética entre dois racionais como um número que está sempre entre eles. Apesar disso, essa intenção está implícita e nem todos os alunos podem percebê-la.

Consideramos que a prova realizada pelo autor da coleção C11 possibilita ao aluno um contato com a concepção de álgebra como aritmética generalizada, visto que o uso das letras na expressão "$\frac{a+b}{2}$" teve a intenção de revelar uma classe de objetos.

Considerações a respeito das tarefas realizadas pelos autores e pertencentes ao GT2

A primeira consideração que gostaríamos de fazer diz respeito ao conteúdo matemático presente nas tarefas analisadas na seção anterior. Notamos que as tarefas comuns realizadas pelos autores e que pertencem ao GT2 referem-se a propriedades específicas do conjunto dos números racionais. O fato dos autores "preferirem" provar e não demonstrar as propriedades relacionadas ao conjunto dos números racionais pode estar vinculado à natureza desse conteúdo algébrico exigir uma demonstração mais trabalhosa de se elaborar e de se entender em relação às outras referentes às noções elementares da teoria dos conjuntos, que foram demonstradas pelos autores.

Outra consideração diz respeito ao nível de prova de cada uma das tarefas analisadas. As técnicas usadas pelos autores da coleção C3 e C11 na realização da tarefa TR5 nos permitiram classificá-la como uma prova pragmática ao nível do empirismo ingênuo segundo Balacheff (1988). Por se basear em casos particulares escolhidos ao acaso, esse tipo de prova é considerado o nível mais elementar e mais natural de justificativa em matemática. Acreditamos que um trabalho que favoreça o aprendizado das provas e demonstrações deva começar com justificativas desse tipo. Porém, não consideramos que se deva parar por aí. Posteriormente ao trabalho com as provas, ao nível do empirismo ingênuo, deve haver um trabalho no sentido de mostrar ao aluno a pouca generalidade desse tipo de justificativa. Situações de interação social na sala de aula, que favoreçam a discussão da validade de uma propriedade, são consideradas por nós como um meio de se mostrar ao aluno a importância e a força de justificativas gerais baseadas em propriedades matemáticas validades em situações anteriores. O trabalho com esse tipo de interação pode ser sugerido ao professor pelos autores dos livros didáticos. Porém, naqueles que analisamos, não observamos essa preocupação.

A tarefa TR6 foi provada por dois autores e com duas técnicas distintas. A técnica apresentada pelo autor da coleção C3 nos permitiu classificá-la como uma prova pragmática ao nível do empirismo ingênuo. Já a apresentada pelo autor da coleção C11 foi classificada como uma prova pragmática ao nível do exemplo genérico. Esse tipo de prova assume um papel importante quando estamos interessados em buscar meios de se ensinar provas e demonstrações. O exemplo genérico é uma prova baseada em casos específicos manipulados a fim de se revelar uma classe de objetos. Ele representa, para quem o utiliza, o início da tomada de consciência da generalidade da situação que se quer provar.

Acreditamos que a tarefa TR6, por se tratar de um exemplo genérico, traz para o aluno um modelo de como tratar casos específicos a fim de torná-lo pertencente a uma classe de objetos. Já mencionamos durante a análise da tarefa TR6 que o autor da coleção C11 poderia aproveitá-la de duas maneiras. Inicialmente, poderia solicitar ao aluno uma demonstração a essa propriedade baseada no que foi proposto no exemplo genérico. Em seguida, poderia incentivar o aluno a utilizar variáveis para revelar a generalidade da situação, o que representaria um trabalho com a concepção de álgebra como aritmética generalizada, segundo Usiskin (1995).

Considerações a respeito das tarefas realizadas pelos autores e comuns às coleções

As tarefas comuns às coleções nos revelaram, dentre outras coisas, quais são as propriedades mais valorizadas pelos autores de livros didáticos quando tratam do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*. A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por exemplo, realizada pelos autores das 3 coleções analisadas, nos mostrou que essa é uma tarefa considerada importante pelo fato de apresentar ao aluno um novo tipo de número e um novo tipo de justificativa, baseada no raciocínio por absurdo. A tarefa TR4, também presente nas 3 coleções, nos permitiu perceber sua importância devido a fácil aplicação em problemas envolvendo o tratamento de dados em pesquisas estatísticas.

Além de evidenciar os pontos de vista comuns adotados pelos autores dessas três coleções, as técnicas usadas na realização dessas tarefas nos permitiu classificá-las como prova ou demonstração, segundo Balacheff (1988), e trazer a tona a possibilidade do trabalho com as várias facetas que álgebra pode assumir.

Tarefas comuns também serviram para evidenciar falhas comuns. Como vimos, nenhuma das tarefas analisadas nas seções anteriores puderam ser caracterizadas como tarefas de organização dedutiva, segundo Duval (1989). Além disso, serviram para evidenciar que as funções de validação e explicação que as provas e demonstrações podem assumir são muito utilizadas, enquanto a função de sistematização, que possibilita ao aluno o entendimento do que é um sistema dedutivo, sequer aparece.

(ii) TAREFAS ESPECÍFICAS PERESENTES EM CADA COLEÇÃO

Tarefa 07 (TR7): Demonstrar que todo número natural é real.

Esta propriedade é demonstrada somente pelo autor da coleção C11 com a intenção de mostrar ao aluno que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números reais. A seguir apresentamos cópia desta demonstração:

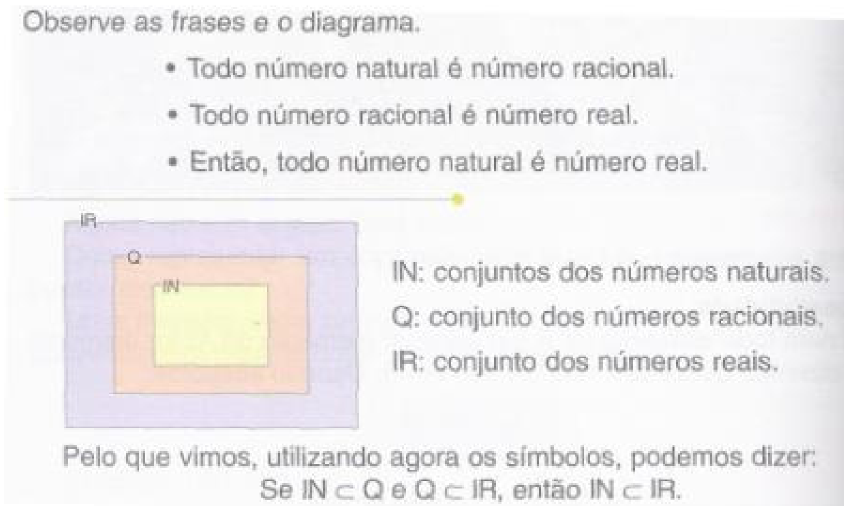


Figura 26: Demonstração da propriedade: todo número natural é racional (LOGEN, 2003, p. 122).

Com relação à técnica usada, o autor inicia a demonstração classificando: (i) um número natural como número inteiro positivo ou nulo, (ii) um número inteiro como número racional e (iii) um número racional como real. A partir do uso da propriedade transitiva da inclusão de conjuntos, ele conclui das observações anteriores que um número natural é um número real.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica é composto pela noção paramatemática de dedução e pelas noções matemáticas de conjunto, número natural, inteiro e racional.

Podemos classificar esta tarefa como pertencente ao GT1, pois há a realização de uma prova conceitual ao nível do cálculo nas afirmações, segundo Balacheff (1988). Essa prova exprime generalidade e contém certo rigor matemático, o que é evidenciado pelo uso da simbologia da teoria dos conjuntos.

Esta é uma tarefa que trabalha explicitamente a noção paramatemática de dedução. É possível, a partir dela, perceber o encadeamento que se faz com as propriedades que já se conhece a fim de se constatar algo novo. Apesar disso, notamos que as propriedades admitidas como premissas nessa demonstração não foram justificadas anteriormente da mesma maneira pelo autor da coleção C11. Esse fato poderia ser aproveitado, positivamente, pelo autor para uma discussão sobre o funcionamento da dedução mesmo sem se ter certeza da veracidade das premissas. Na linguagem formal da lógica, poderia ser discutido que premissas falsas podem gerar conclusões verdadeiras quando os argumentos são válidos.

Apesar da generalidade expressa nessa tarefa, percebemos que as letras foram usadas somente na nomenclatura dos conjuntos numéricos em questão. Elas não foram usadas para generalizar uma lei da aritmética, como meio para resolver um problema, como parâmetros ou como símbolos manipuláveis no papel. Por este motivo, consideramos que nenhuma concepção da álgebra proposta por Usiskin (1995) foi trabalhada.

Tarefa 08 (TR8): Provar que entre dois números inteiros nem sempre há um número inteiro.

Esta prova é realizada somente pelo autor da coleção C3 que utiliza alguns números inteiros sobre a reta numérica para provar que entre dois números inteiros nem sempre existe um número inteiro. Não apresentaremos uma cópia desta prova, pois é a mesma apresentada anteriormente na figura 24.

Com relação à técnica, o autor constrói a reta numérica e marca nela somente os números inteiros. A partir dessa construção, verifica que entre números inteiros consecutivos não há outros números inteiros.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada é composto pela noção matemática de número inteiro e de números inteiros consecutivos.

Podemos classificar esta tarefa como pertencente ao GT2, pois trata-se de uma validação baseada em casos específicos escolhidos aleatoriamente, ou seja, é uma prova pragmática ao nível do empirismo ingênuo, segundo Balacheff (1988).

Como não houve o uso de letras durante a realização da tarefa, consideramos que nenhuma concepção da álgebra proposta por Usiskin (1995) foi trabalhada.

Tarefa 09 (TR9): Provar que se um conjunto possui n elementos então o conjunto das partes desse conjunto possui 2^n elementos.

Esta propriedade é provada pelo autor da coleção C3 a partir de exemplos numéricos. Esse autor classifica a propriedade como uma conjectura e afirma que esta será demonstrada posteriormente no segundo volume da coleção.

Gostaríamos de destacar que apesar de não provar a propriedade em questão, o autor da coleção C11 propõe ao aluno a realização da respectiva prova. Segue um "recorte" da prova realizada pela coleção C3:

Dado o conjunto A = {a, e, i}, é possível escrever todos os subconjuntos (ou todas as partes) de **A**. Esse conjunto formado por todos os subconjuntos de **A** é chamado de *conjunto das partes de **A*** e é indicado por P(A). Assim, temos:

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$$

Observe que {a}, {a, e} e {a, e, i}, por exemplo, são *elementos* de P(A). Portanto, escrevemos $\{a\} \in P(A)$, $\{a, e\} \in P(A)$ e $\{a, e, i\} \in P(A)$, e *não* $\{a\} \subset P(A)$, $\{a, e\} \subset P(A)$ e $\{a, e, i\} \subset P(A)$. Veja que $\varnothing \subset P(A)$ e $\varnothing \in P(A)$.

Observe também que há uma relação entre o número de elementos de P(A) e o número de elementos de **A**:

- $\varnothing$ tem 0 elemento e $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$ tem 1 elemento.
- A = {a} tem 1 elemento e $P(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$ tem 2 elementos.
- A = {a, b} tem 2 elementos e $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ tem 4 elementos.
- A = {a, b, c} tem 3 elementos e $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ tem 8 elementos.

Lembre que $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$. É possível conjecturar então que, se **A** tem **n** elementos, P(A) tem 2^n elementos.

Essa conjectura é verdadeira e será demonstrada posteriormente.

Para Refletir

O que significa conjecturar? Dê um exemplo.

Figura 27: Prova da propriedade: $\forall$ A com n elementos temos P(A) com 2^n elementos (DANTE; 2003; p. 12).

Com relação à técnica usada, o autor da coleção C3 inicia a prova determinando quatro conjuntos finitos e destacando para cada um deles o número de elementos. Em seguida, ele escreve o conjunto das partes de cada conjunto e determina o número de elementos do conjunto das partes. Por fim, o autor compara o número de elementos de cada conjunto com o número de elementos do respectivo conjunto das partes por meio de uma potência de base 2 e constata a validade da propriedade.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada é composto da noção matemática de conjunto, subconjunto e das propriedades da relação de inclusão entre conjuntos.

Podemos classificar esta tarefa como pertencente ao GT2, pois trata-se de uma validação baseada em casos específicos escolhidos aleatoriamente, ou seja, é uma prova pragmática ao nível do empirismo ingênuo, segundo Balacheff (1988).

Notamos que, ao final da prova realizada, o autor manipula os resultados obtidos como número de elementos dos conjuntos selecionados, de modo a deixá-los na forma de uma potência de 2. Ao usar a letra *n* na potência 2^n, o autor revelou sua intenção de mostrar que a propriedade vale para uma classe de objetos. Nesse caso, a letra foi um meio de generalizar modelos e, por este motivo, acreditamos que nessa tarefa houve o trabalho com a concepção da álgebra como aritmética generalizada proposta por Usiskin (1995).

Tarefa 10 (TR10): Provar que dados dois conjunto A e B $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Esta propriedade é provada somente pelo autor das coleções C11. O autor realiza a prova em questão para que os alunos conheçam uma propriedade que relacione as noções de união, intersecção e complementar de conjuntos.

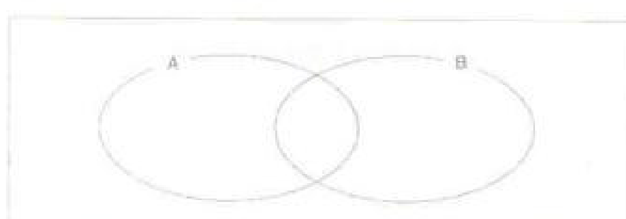
A seguir apresentamos um “recorte” desta prova:

1. O que significa o complementar de $A \cup B$ em relação a U?

O complementar de $A \cup B$ em relação a U pode ser representado por $(A \cup B)^C$ e é formado pelos elementos que pertencem a U e não pertencem a $A \cup B$, isto é:

$$(A \cup B)^C = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A \cup B\}$$

Observe a parte colorida na figura.



No exemplo das figuras geométricas planas, é o conjunto formado por todos os paralelogramos que não são losangos e não são retângulos.

Em símbolos:

$x \in (A \cup B)^c$
$x \in U$ e $x \notin (A \cup B)$
$x \in U$ e $(x \notin A$ e $x \notin B) \rightarrow$ Resultado 1

2. O que significa $A^c \cap B^c$, considerando como universo U?

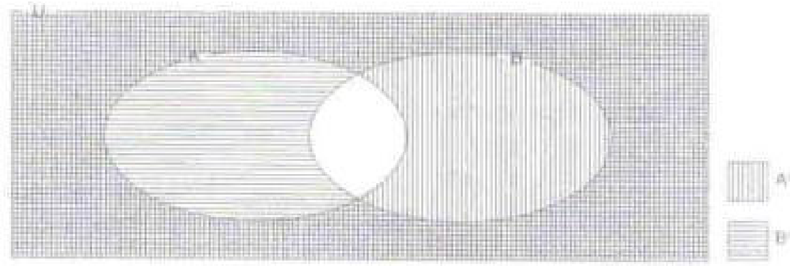
O complementar de A em relação a U é formado pelos elementos que pertencem a U e não pertencem a A, isto é

$$A^c = \{x \,/\, x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

O complementar de B em relação a U, analogamente, pode ser escrito por:

$$B^c = \{x \,/\, x \in U \text{ e } x \notin B\}$$

Agora, apenas para visualizar, vamos representar esses dois conjuntos no diagrama:



Observe que a intersecção desses dois conjuntos é formada pelos elementos que pertencem a U e não pertencem a A e os elementos que pertencem a U e não pertencem a B. Em relação às figuras geométricas, são os paralelogramos que não são losangos e os paralelogramos que não são retângulos.

Em símbolos:

$x \in (A^c \cap B^c)$
$(x \in A^c)$ e $(x \in B^c)$
$(x \in U$ e $x \notin A)$ e $(x \in U$ e $x \notin B) \rightarrow$ Resultado 2

Se, agora, compararmos o resultado 1 com o resultado 2 chegaremos à conclusão que:

$$\mathbf{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$$

Figura 28: Prova da propriedade: $\forall\, A \text{ e } B, (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (LOGEN, 2003, p. 138)

Com relação à técnica usada, o autor realiza a prova da propriedade a partir da exposição de um exemplo em que os elementos dos conjuntos são entes geométricos. De modo geral, há a determinação de um universo U, dois conjuntos A e B contidos em U, do complementar de A e do complementar de B. A partir daí, o autor realiza a união e a intersecção entre os conjuntos A e B e do complementar da união. Por observação dos resultados, constata que o complementar da união é igual à intersecção dos complementares de A e B.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada é composto pelas noções matemáticas de conjunto, interseção, união entre conjuntos e de complementar de um conjunto.

Notamos que durante a realização da prova, o autor representa cada parte dos exemplos usando a simbologia da teoria dos conjuntos. Acreditamos que essa seja uma tentativa do autor em mostrar de uma maneira genérica a idéia por trás do caso específico escolhido. O uso da simbologia da teoria dos conjuntos para dar um caráter geral à propriedade provada nos fez chegar a duas constatações: (i) Esta tarefa permite o contato do aluno com a concepção de álgebra como aritmética generalizada e como estrutura, segundo Usiskin (1995), pois as letras têm a função de dar um caráter genérico à situação e são manipuladas durante a realização da tarefa; (ii) Esta tarefa como pertence ao GT2 e é considerada uma prova pragmática ao nível do exemplo genérico, segundo Balacheff (1988), pois baseia-se em casos específicos que foram manipulados na tentativa de se revelar uma classe de objetos.

Tarefa 11 (TR11): Provar que toda raiz cuja representação decimal não é exata, assim como todo número cuja forma decimal não é exata nem periódica não são números racionais.

Esta propriedade é provada pelo autor da coleção C2 usando exemplos numéricos. Entendemos que esta propriedade é similar a apresentada na TR5. Mas estamos analisando separadamente, pois o autor enuncia e prova usando elementos diferentes. A seguir, temos um "recorte" da prova realizada:

De um modo geral, toda raiz cuja representação decimal não é exata assim como todo número cuja forma decimal não é exata nem periódica não são números racionais. A esse tipo de número chamamos de **números irracionais**.

Vejamos outros exemplos de números irracionais:

a) Escritos na forma decimal: 0,373373337...; 0,412413414...; 2,121221222...; $\pi = 3,14159...$

b) Escritos na forma de radical: $\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[6]{5}$, $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2^3}$

Figura 29: Prova da propriedade: toda raiz cuja representação decimal não é exata, assim como todo número cuja forma decimal não é exata nem periódica não são números racionais. (BIANCHINI; PACCOLA, 2004; p. 51).

Com relação à técnica usada, o autor da coleção C2 realiza a prova propondo alguns exemplos de números que possuem representação decimal infinita e não periódica, além de raízes que não são números decimais exatos.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica é composto pela noção matemática de número racional.

Podemos classificar esta tarefa como pertencente ao GT2, pois trata-se de uma validação baseada em casos específicos escolhidos aleatoriamente, ou seja, é uma prova pragmática ao nível do empirismo ingênuo, segundo Balacheff (1988).

Como não houve o uso de letras durante a realização da tarefa, consideramos que nenhuma concepção da álgebra proposta por Usiskin (1995) foi trabalhada.

Considerações a respeito das tarefas realizadas pelos autores e específicas a cada coleção

Notamos a presença de 5 tarefas específicas realizadas pelos autores de cada coleção. Dessas 5 tarefas, 1 foi proposta pela coleção C2, 2 pela coleção C3 e 2 pela coleção C11. Com relação às mesmas tarefas, apenas uma, realizada pela coleção C11, pôde ser classificada como pertencente ao GT1, ou seja, era uma demonstração. As outras 3 foram classificadas como provas pragmáticas, 2 ao nível do empirismo ingênuo e 1 ao nível do exemplo genérico.

Gostaríamos de salientar que as tarefas analisadas anteriormente nos permitiram perceber especificidades no tratamento dado às provas e demonstrações em cada coleção. O autor da coleção C11, por exemplo, apresenta especificamente uma tarefa de demonstração e uma tarefa de prova ao nível do exemplo genérico. Essa constatação nos indica que esse autor percebe a importância de apresentar ao aluno um modelo de validação que leva em conta a qualidade genérica das propriedades matemáticas.

Nós não notamos a presença de tarefas de organização dedutiva, segundo Duval (1989). Esse fato nos leva a uma conclusão desanimadora: as tarefas pertencentes ao GT1 e ao GT2, realizadas pelos autores, possivelmente não revelam ao aluno a estrutura profunda presente numa demonstração, visto que o registro de representação usado consiste de um texto similar aquele que um matemático apresentaria ao final de todo um processo de formulação de conjecturas e as devidas justificativas formais. Em outras palavras, por estar pronto e acabado, o registro de representação usado nas demonstrações realizadas pelos autores possivelmente não proporciona ao aluno a compreensão de todas as etapas da elaboração de uma demonstração.

(iii) Tarefas pertencentes ao GT3

As tarefas pertencentes ao GT3 são aquelas que utilizam como bloco tecnológico/teórico uma tarefa provada ou demonstrada anteriormente. Do ponto de vista dos alunos, essas tarefas correspondem aos exercícios e problemas de aplicação propostos pelos autores dos livros. Do ponto de vista dos autores, são os exercícios resolvidos, inseridos em cada capítulo e que podem constituir um modelo de resolução para alunos e professores.

Notamos a presença de muitas tarefas propostas aos alunos pertencentes ao GT3. Em contrapartida, notamos poucas dessas tarefas realizadas pelos autores.

Durante a abordagem do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*, há a presença de tarefas pertencentes ao GT3, realizadas pelos autores, que utilizam como bloco tecnológico/teórico somente as propriedades envolvidas nas tarefas TR4 e TR9.

A seguir apresentaremos uma dessas tarefas que foram realizadas pelos autores de cada coleção. Para cada tarefa destacaremos a praxeologia e a concepção de álgebra que ela possibilita trabalhar, segundo Usiskin (1995).

Tarefa 12 (TR12): Resolver um problema envolvendo a propriedade demonstrada na tarefa TR4.

Os três autores das coleções analisadas resolvem problemas a respeito da propriedade demonstrada em TR4. Durante uma análise preliminar desses problemas, notamos semelhanças na maneira de resolução proposta. Por este motivo, apresentaremos uma cópia de cada uma dessas tarefas e faremos uma análise praxeológica única. Gostaríamos de destacar que todos os autores apresentaram outros problemas envolvendo a mesma propriedade, porém, por serem parecidos, apresentaremos um representante de cada coleção.

Exemplos

1. Um professor recomendou a leitura de obras do escritor Machado de Assis a um grupo de 30 jovens.
Depois de algum tempo, o professor realizou um levantamento para saber quais livros foram lidos. Verificou-se, então, que 21 alunos tinham lido *Dom Casmurro*, 19 alunos leram *Quincas Borba* e 12 alunos leram essas duas obras.

Vamos verificar então:

- quantos leram apenas *Dom Casmurro*;
- quantos leram apenas *Quincas Borba*;
- quantos não leram quaisquer dessas obras.

Para obter essas informações, vamos recorrer a um diagrama. O conjunto *A* representa os alunos que leram *Dom Casmurro* e o conjunto *B*, os alunos que leram *Quincas Borba*.
Como o número 12 indica a quantidade de alunos que leram os dois livros, ele será colocado na intersecção (figura 1).

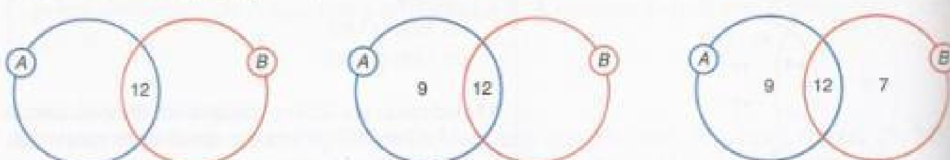


Figura 1 Figura 2 Figura 3

No conjunto *A*, já estão colocados 12 alunos. Como eles são em número de 21, para saber quantos alunos leram apenas *Dom Casmurro* devemos fazer 21 − 12 = 9 (figura 2).
No conjunto *B*, já estão colocados 12 alunos. Como eles são em número de 19, para saber quantos alunos leram apenas *Quincas Borba* devemos fazer 19 − 12 = 7 (figura 3).
Agora sabemos que 28 jovens desse grupo já leram alguma obra de Machado de Assis, pois 9 + 12 + 7 = 28.
Conseqüentemente, não leram quaisquer desses livros 2 jovens (30 − 28).

Figura 30: Exercício resolvido envolvendo a tarefa TR4 (BIANCHINI; PACCOLA, 2004; p.43-44).

Numa pesquisa com jovens, foram feitas as seguintes perguntas para que respondessem sim ou não: Gosta de música? Gosta de esportes? Responderam sim à primeira pergunta 90 jovens; 70 responderam sim à segunda; 25 responderam sim a ambas; e 40 responderam não a ambas. Quantos jovens foram entrevistados?

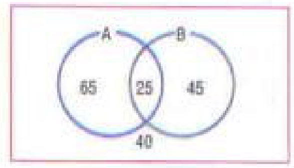
A: conjunto dos que gostam de música $\Rightarrow n(A) = 90$

B: conjunto dos que gostam de esporte $\Rightarrow n(B) = 70$

$A \cap B$: conjunto dos que gostam de ambos $\Rightarrow n(A \cap B) = 25$

$A - (A \cap B)$: conjunto dos que só gostam de música $\Rightarrow 90 - 25 = 65$

$B - (A \cap B)$: conjunto dos que só gostam de esporte $\Rightarrow 70 - 25 = 45$



Portanto, o número de entrevistados é:

$65 + 25 + 45 + 40 = 175$

ou:

$n(A \cup B) + 40 = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + 40 = 90 + 70 - 25 + 40 = 175$

Figura 31: Exercício resolvido envolvendo a tarefa TR4 (DANTE; 2003; p. 19).

Numa pesquisa com pessoas de uma comunidade, foram feitas as seguintes perguntas para que respondessem sim ou não: Gosta de assistir à TV? Gosta de ler livros? Responderam sim à primeira pergunta 110 pessoas; 90 responderam sim à segunda pergunta; 45 responderam sim a ambas; 60 responderam não a ambas. Qual o número de pessoas entrevistadas na pesquisa?

A: conjunto das pessoas que gostam de assistir à TV
$n(A) = 110$

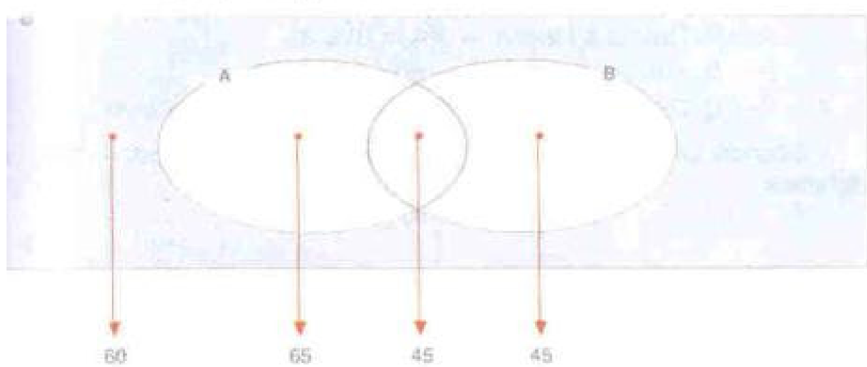
B: conjunto das pessoas que gostam de ler livros
$n(B) = 90$

$A \cap B$: conjunto das pessoas que gostam de assistir à TV e ler livros
$n(A \cap B) = 45$

$A - (A \cap B)$: conjunto das pessoas que gostam apenas de assistir à TV
$n[A - (A \cap B)] = 110 - 45 = 65$

$B - (A \cap B)$: conjunto das pessoas que gostam apenas de ler livros
$n[B - (A \cap B)] = 90 - 45 = 45$

$U - (A \cup B)$: conjunto das pessoas que não gostam de assistir à TV e também não gostam de ler
$n[U - (A \cup B)] = 60$



Assim, sendo n o número de pessoas entrevistadas, temos

$n = 60 + 65 + 45 + 45$

$n = 215$

Utilizando a relação

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

teremos:

$$
\begin{aligned}
60 &= n[U - (A \cup B)] \\
60 &= n(U) - n(A \cup B)] \\
60 &= n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] \\
60 &= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)] \\
60 &= n(U) - 110 - 90 + 45 \\
60 &= n(U) - 155 \\
215 &= n(U)
\end{aligned}
$$

Figura 32: Exercício resolvido envolvendo a tarefa TR4 (LOGEN, 2003, p. 140-141).

A primeira semelhança que notamos, nos três problemas propostos anteriormente, diz respeito ao contexto: todos eles tratam de dados obtidos em pequenas pesquisas estatísticas em que se deseja saber o número de pessoas entrevistadas.

Outra semelhança é encontrada quando observamos a técnica usada na resolução desses problemas. Todos os autores utilizam dois recursos para organizar os dados do problema. O primeiro recurso é a representação dos dados por meio de diagramas de conjuntos. O segundo, é a representação discursiva, em linguagem natural ou algébrica, usando alguns elementos da teoria dos conjuntos. De modo geral, os autores, a partir dos dados do problema, consideram dois conjuntos A e B dos quais já se conhece o número de elementos. Em seguida, subtraem de A e de B a número de elementos da intersecção desses conjuntos. Para finalizar, adicionam o número de elementos da intersecção com os resultados das subtrações realizadas anteriormente.

Notamos que, as resoluções propostas pelas coleções C3 e C11 utilizam explicitamente a propriedade demonstrada em TR4. Já na resolução proposta pela coleção C2 não ocorre o mesmo.

O bloco tecnológico/teórico, que justifica a técnica usada nas três resoluções, é composto pela noção matemática de conjunto, número de elementos de um conjunto, intersecção de conjuntos, a propriedade demonstrada em TR4 e pelas operações com números inteiros.

As tarefas que envolveram o uso da propriedade demonstrada em TR4, propiciam ao aluno um contato com a concepção de álgebra como estudo das relações, pois há a possibilidade do trabalho com a relação $n(A \cup B) = n(A) + n(B) -$

$n(A \cap B)$ e também com a concepção de álgebra como uma estrutura, visto que há a possibilidade de realização de diversos tratamentos algébricos.

Tarefa 13 (TR13): Resolver um problema envolvendo a propriedade demonstrada na tarefa TR9.

Esta tarefa foi realizada somente pelo autor da coleção C11. A intenção dele é mostrar como se determina os subconjuntos e o número de subconjuntos de um conjunto dado. Gostaríamos de ressaltar que o autor não utiliza explicitamente a relação n(P(A))=$2^{n(A)}$ para determinar o número de elementos do conjunto das partes de A, pois é sua intenção fazer com que o aluno perceba essa relação a partir desse e de outros exemplos correlatos.

Agora procure pensar a respeito de uma resposta para as questões:

- Quantos subconjuntos admitem um conjunto A?
- Como obter todos os conjuntos que são subconjuntos de um conjunto dado A?

Para auxiliar você na busca de respostas para essas questões, vamos considerar um conjunto A e, a partir dele, obter seus subconjuntos.

A = {1; 2; 3; 4}

Subconjuntos de A com:

0 elemento: ∅

1 elemento: {1}, {2}, {3}, {4}

2 elementos: {1; 2}, {1; 3}, {1; 4}, {2; 3}, {2; 4}, {3; 4}

3 elementos: {1; 2; 3}, {1; 2; 4}, {1; 3; 4}, {2; 3; 4}

4 elementos: A

São 16 subconjuntos!

Observação:

O conjunto formado por todos os subconjuntos (ou todas as partes de A) é chamado de conjunto das partes de A. Representamos por P(A). Assim, no exemplo temos:

P(A) = {∅, {1}, {2}, {3}, {4}, {1; 2}, {1; 3}, {1; 4}, {2; 3}, {2; 4}, {3; 4}, {1; 2; 3}, {1; 2; 4}, {1; 3; 4}, {2; 3; 4}, A}

Figura 33: Exercício resolvido envolvendo a tarefa TR4 (LOGEN, 2003, p.126).

Com relação à técnica usada, inicialmente considera-se um conjunto A com 04 elementos e escrevem-se todos os seus subconjuntos a partir das combinações entre seus elementos. Considera-se o conjunto vazio contido em A, devido à propriedade $\forall A, \emptyset \subset A$, demonstrada anteriormente. Para finalizar, conta-se o número de elementos do conjunto P(A).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada nessa resolução é composto pela noção matemática de conjunto, número de elementos de um conjunto e pela propriedade $\forall A, \emptyset \subset A$. Gostaríamos de ressaltar que o uso de outra técnica na resolução deste problema poderia permitir também o uso da propriedade n(P(A))=$2^{n(A)}$, sendo A um conjunto finito.

Por não envolver o uso de variáveis, acreditamos que não há um trabalho com as concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995). Porém, o uso explícito da relação n(P(A))=$2^{n(A)}$, quando feito na resolução de tarefas como esta, poderia permitir ao aluno um contato com a concepção de álgebra como estudo das relações, bem como com a concepção de álgebra como uma estrutura, visto que há a possibilidade de realização de diversos tratamentos algébricos.

Considerações a respeito das tarefas realizadas pelos autores e pertencentes ao GT3

Como já dissemos, as tarefas realizadas pelos autores pertencentes ao GT3 podem servir de modelo de resolução de tarefas propostas aos alunos e professores. Em outras palavras, essas tarefas podem influenciar a técnica usada por alunos e professores na resolução das tarefas propostas pelo livro.

Notamos que todos os autores das coleções que estamos analisando fizeram questão de apresentar um exercício resolvido que utilize a propriedade demonstrada na tarefa TR4. Acreditamos que esta escolha seja justificada pelo fato dessa propriedade ser muito utilizada na resolução de problemas envolvendo os dados de pesquisas estatísticas. Percebemos que as técnicas usadas nessa tarefa pelos autores das coleções C3 e C11 eram análogas e mostravam explicitamente ao aluno como a relação demonstrada em TR4 poderia ser usada. Porém na coleção C2, não percebemos isso. O autor resolveu a tarefa proposta sem fazer menção à relação provada. Acreditamos que esse uso implícito pode fazer com que o aluno não perceba a necessidade de se escrever relações gerais para propriedades, visto que é possível resolver problemas sem elas.

Outra observação diz respeito à concepção de álgebra usada na resolução dessas tarefas. Percebemos que elas propiciam ao aluno um contato com a concepção de álgebra como estudo das relações e também com a concepção de álgebra como uma estrutura, visto que há a possibilidade do trabalho com as relações demonstradas e a realização de diversos tratamentos algébricos.

3.2 TAREFAS PROPOSTAS AOS ALUNOS

Nesta seção da pesquisa explicitaremos as tarefas envolvendo provas e demonstração propostas aos alunos durante a abordagem do conteúdo *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*. Gostaríamos de ressaltar que as tarefas que requerem do aluno uma demonstração pertencem ao GT1, as tarefas que requerem do aluno uma prova pertencem ao GT2 e as tarefas que usam as provas e demonstrações como bloco tecnológico/teórico em exercícios de aplicação pertencem ao GT3.

Dividimos a análise dessas tarefas em duas partes. Na primeira parte, analisamos se os autores propunham aos alunos tarefas pertencentes ao GT1 e GT2. Na segunda parte, analisamos as tarefas propostas aos alunos pertencentes ao GT3.

Algumas das tarefas propostas aos alunos podem ser realizadas com o uso de diferentes técnicas. Daremos ênfase à técnica que está mais próxima ao que é pedido no enunciado da questão e que seja coerente com faixa etária de alunos do Ensino Médio. Porém, como uma forma de enriquecer nossa análise, faremos uma descrição especial para o caso de haver outra(s) técnica(s) na realização de cada tarefa.

(i) Tarefas do tipo *mostre que..., prove que..., demonstre que...*

Nesta seção da pesquisa apresentaremos as tarefas do tipo *mostre que...*, *prove que ...* ou *demonstre que...* propostas aos alunos pelos autores dos livros didáticos. Nossa intenção aqui é verificar que tipo(s) de técnica(s) os enunciados dessas tarefas sugerem aos alunos realizarem e que tipos de concepções de álgebra elas possibilitam trabalhar.

Gostaríamos de ressaltar que, durante a análise preliminar das coleções, percebemos que os autores não diferenciaram os significados das palavras prova e demonstração nas coleções. Além disso, não explicitaram aos alunos as diferenças entre justificar genericamente e com base em casos específicos quando abordavam alguma propriedade referente ao conteúdo *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*. Por estas razões acreditamos que as palavras “demonstre”, “prove” ou “mostre”, quando aparecem nos enunciados propostos, não direcionam o aluno a explicações diferenciadas. Em outras palavras, num enunciado em que a palavra “prove” apareça o aluno poderá justificar com base em casos específicos ou não, já que os autores não propuseram tais diferenças.

COLEÇÃO C2

Nenhuma tarefa do tipo *mostre que..., prove que..., demonstre que...* foi proposta ao aluno durante a exposição do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* pela coleção C2. Essa constatação permite-nos uma reflexão a respeito da importância da presença de tarefas do tipo *mostre que..., prove que..., demonstre que...* nos livros didáticos.

Primeiramente, a presença dessas tarefas em livros didáticos pode sinalizar que, entre outras coisas, a atividade de provar não ficou restrita somente aos autores e pode nos revelar a intenção desses em valorizar esse tipo de atividade entre os alunos em sala de aula. Em contrapartida, a ausência de tarefas desse tipo pode nos levar a fazer inferências similares às de Gouvêa (1998). Em outras palavras, é possível que essas tarefas não apareçam ao longo da exposição de um conteúdo algébrico, pois os autores dos livros didáticos subestimam a capacidade do aluno em realizá-las, ou até mesmo, consideram a atividade de provar significativa apenas no contexto matemático e não no contexto escolar.

Outra problemática que vemos, na ausência de tarefas desse tipo nos livros didáticos, diz respeito ao entendimento por parte do aluno de como é processo de descobertas e validação em matemática.

O fato de não realizar tarefas específicas de prova ou de demonstração, pode fazer com que o aluno não sinta a necessidade de justificar formalmente uma propriedade matemática ou até mesmo que não se sinta incentivado a elaborar conjecturas e validá-las de maneira formal. O aluno pode também fazer uma reflexão negativa sobre a necessidade de justificativas formais às propriedades enunciadas: “se o livro não pede para eu justificar as propriedades matemáticas é porque não há necessidade de justificá-las”.

Com relação ao ensino de provas e demonstrações, a ausência de tarefas desse tipo nos livros didáticos pode fazer com que o professor não sinta a necessidade de trabalhar essa atividade em sala de aula, o que faz com que o aluno não tenha acesso esse recurso nem por parte do livro que usa, nem por parte do professor.

COLEÇÃO C3

Tarefa 01 (TP1): *Escreva todas as maneiras de ler a implicação* $p \Rightarrow q$ *, sabendo que:*

p: n é um número natural par;
q: n é um número escrito na forma n=2m, com $m \in \mathbb{N}$*.*

Responda: a recíproca $q \Rightarrow p$ *é verdadeira? Em caso positivo, como se escreve a equivalência das duas propriedades?*

O autor da coleção C3 propõe esta tarefa com a intenção de fazer com que o aluno trabalhe com as implicações lógicas e sua recíproca. Esta é uma tarefa pertencente ao GT2, pois espera-se que o aluno realize uma *prova pragmática*, ao nível do *empirismo ingênuo*, segundo Balacheff (1988), utilizando apenas alguns casos específicos para verificar a validade da propriedade. Gostaríamos de ressaltar que, nesse caso, o empirismo ingênuo pode vir junto a um *experimento crucial*. Em outras palavras, o aluno pode escolher um número par “grande” para mostrar que este também está na forma 2m.

Em uma das possíveis técnicas que podem ser usadas, espera-se que o aluno inicie esta tarefa com a redação da implicação $p \Rightarrow q$ e de sua recíproca $q \Rightarrow p$ na forma Se “p” então “q e Se “q” então “p”. Em seguida, espera-se que o aluno escreva alguns exemplos de números pares na forma 2m e use o fato de um número natural par ser divisível por 2 para concluir que 2m é divisível por 2. Como já dissemos, pode acontecer do aluno utilizar um número par “grande” como exemplo. Apresentamos a seguir uma possível resolução:

Escrever como se lê $p \Rightarrow q$:	*Verificar se a implicação $q \Rightarrow p$ é verdadeira:*
• *Se n é um número par então n=2m com $m \in \mathbb{N}$.*	*Se n=2m com $m \in \mathbb{N}$, então n é par.*
• *O número par n está contido no conjunto dos números 2m com $m \in \mathbb{N}$.*	*É verdadeira, pois:*
	12=2x6 e 12 é par;
	30=2x15 e 30 é par;
	120000=2x60000 é 120000 é par.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada é composto pela noção paramatemática de implicação, recíproca de uma implicação e, também, pela noção matemática de número natural e das propriedades de divisibilidade no conjunto dos números naturais. Notamos que para a realização desta tarefa não foi necessário o uso de propriedades provadas ou demonstradas anteriormente nas coleções, o que pode dificultar o entendimento do aluno sobre o que é um sistema dedutivo.

Não descartamos totalmente a possibilidade de um aluno utilizar uma técnica em que fique evidenciada a construção de uma prova conceitual ao nível do *experimento de pensamento* ou ao *nível do cálculo nas afirmações.* Numa técnica desse tipo o aluno utilizaria propriedades matemáticas e/ou a linguagem algébrica para justificar a implicação. Apresentamos a seguir uma possível resolução desse tipo:

Experimento de pensamento:	Cálculo nas afirmações:
Verificar se a implicação $q \Rightarrow p$ é verdadeira: Se n=2m com $m \in \mathbb{N}$, então n é par.	*Verificar se a implicação $q \Rightarrow p$ é verdadeira: Se n=2m com $m \in \mathbb{N}$, então n é par.*
Percebi que dizer n=2m é o mesmo que dizer que a metade de n é m. Percebi que a metade de n está resultando num número natural m e isso significa que n é par.	*Se n=2m então $\frac{n}{2} = \frac{2m}{2}$ e $\frac{n}{2} = m$ com $m \in \mathbb{N}$ Portanto n é par.*

Percebemos que esta atividade propicia ao aluno o contato com a concepção da álgebra como estudo das relações. Isso fica evidente, pois a relação “n=2m, com $m \in \mathbb{N}$” proposta no enunciado permite que o aluno varie os valores de m encontrando assim um novo número natural n. Outra concepção que pode ser trabalhada é a da álgebra como aritmética generalizada, visto que n=2m é uma expressão que representa a “forma algébrica” de um número par. Se a tarefa for classificada como um *cálculo nas afirmações* será possível também o trabalho com a concepção de álgebra como estrutura, já que haverá um tratamento de $\frac{n}{2} = \frac{2m}{2}$ em $\frac{n}{2} = m$.

Tarefa 02 (TP2): *Use a contra-positiva e demonstre, por absurdo, a propriedade: Se duas retas distintas (r e s) de um plano α são perpendiculares a uma reta (t) desse plano, então elas (r e s) são paralelas.*

O autor da coleção C3 propõe esta tarefa com a intenção de fazer com que o aluno trabalhe com as demonstrações por absurdo usando as implicações lógicas e a respectiva contra-positiva. Apesar de explicar o que é a contra-positiva de uma implicação durante a exposição do conteúdo Conjuntos, o autor prefere trabalhar com uma tarefa de geometria para fazer com que o aluno trabalhe a noção de contra-positiva. Por se tratar de um caso específico de demonstração, acreditamos que o aluno não recorrerá a casos particulares e realizará uma *prova conceitual* ao nível do *cálculo nas afirmações*, segundo Balacheff (1988). Esse fato situa a tarefa em questão como pertencente ao GT1.

No que diz respeito à técnica usada, espera-se que o aluno inicie a demonstração desta propriedade a partir da redação de seu enunciado e de sua contra-positiva na forma de implicação $p \Rightarrow q$ e $\sim q \Rightarrow \sim p$, respectivamente. Em seguida, espera-se que o aluno utilize a contra-positiva supondo que as retas r e s não sejam paralelas e percebam que se r e s não forem paralelas então uma das retas não será perpendicular a reta t, o que representa ~p. Com isso, esperamos que o aluno constate a validade da propriedade já que ele demonstrou que $\sim q \Rightarrow \sim p$.

O bloco tecnológico teórico, usado para justificar a técnica, é composto pela noção paramatemática de implicação, contra-positiva e da noção matemática de retas paralelas e perpendiculares da geometria Euclidiana.

Como a técnica que sugerimos não envolveu o uso de variáveis, consideramos que nenhuma concepção da álgebra proposta por Usiskin (1995) foi trabalhada.

Tarefa 03 (TP3): *Escreva no seu caderno V ou F conforme a afirmação seja verdadeira ou falsa. Quando for falsa apresente um contra-exemplo (exemplo que contraria a afirmação):*

a) *Todo número inteiro tem um único sucessor;*
b) *Todo número inteiro tem um único antecessor;*
c) *Entre dois números inteiros há sempre um número inteiro;*
d) *A soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro;*
e) *A diferença de dois números inteiros é sempre um número inteiro;*
f) *O produto de dois números inteiros é sempre um número inteiro;*
g) *O quociente de dois números inteiros é sempre um número inteiro;*
h) *O simétrico do simétrico do número -3 é -3.*

O autor da coleção propõe esta tarefa com a intenção de fazer com que o aluno trabalhe com as propriedades operatórias do conjunto dos números inteiros. Esta é uma tarefa pertencente ao GT2, pois espera-se que o aluno realize uma *prova pragmática*, ao nível do *empirismo ingênuo*, segundo Balacheff (1988), utilizando apenas alguns casos específicos para verificar a validade das propriedades presentes em cada item. Notamos nesta tarefa, que o autor utiliza pela primeira vez a expressão "contra-exemplo" para se referir aos casos que fazem com que uma propriedade não seja válida.

Com relação à técnica que será usada, espera-se que o aluno escolha inicialmente 2 números inteiros x e y para analisar seus antecessores, sucessores, a adição, subtração, multiplicação e divisão. Em seguida, espera-se que o aluno verifique a validade das igualdades usando a observação dos resultados dos casos particulares. É possível que o aluno repita o procedimento para outros casos.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica é composto na noção matemática de número inteiro e das propriedades da adição, subtração, multiplicação e divisão nesse conjunto.

A técnica que sugerimos para essa tarefa não envolve o uso de variáveis. Por este motivo acreditamos que esta tarefa não propicia um trabalho com as concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995). Apesar disso, reconhecemos a possibilidade de, a partir de casos específicos, os alunos redigirem sua prova de uma forma genérica. É possível, por exemplo, que para a propriedade do item d, após a manipulação de casos específicos, o aluno escreva "é verdade que se a e b são números inteiros então a+b também é um número inteiro". Em outras palavras, é possível que o aluno utilize a álgebra como aritmética generalizada.

Tarefa 04 (TP4): *Leis de Morgan: Dados A e B de um universo U, tem-se: (i)* $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ *(O complementar da reunião é igual à interseção dos complementares) e (ii)* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ *(O complementar da intersecção é igual à reunião dos complementares). Você pode constatar a veracidade dessas propriedades de um modo geral, representando os conjuntos por diagramas, como foi feito com a 3ª e a 4ª propriedades*[18].

O autor da coleção propõe esta tarefa com a intenção de fazer com que o aluno faça sua própria verificação, usando diagramas, de algumas das propriedades da reunião e da intersecção de conjuntos. Esta é uma tarefa pertencente ao GT1,

[18] 3ª propriedade: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; 4ª propriedade: $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$, demonstradas pelo autor através de diagramas.

pois nos diagramas os conjuntos são considerados genéricos e a partir deles pode-se produzir uma *prova conceitual* ao nível do *experimento de pensamento*, segundo Balacheff (1988).

Com relação à técnica utilizada, para a propriedade (i), espera-se que o aluno construa dois diagramas iguais contendo os conjuntos A e B num universo U. Num dos diagramas, espera-se que o aluno hachure $(A \cup B)^C$ e no outro diagrama $A^C \cap B^C$. Após isso, espera-se que o aluno conclua que as áreas hachuradas no primeiro e no segundo diagrama são iguais, o que mostra a validade da igualdade $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$. De modo análogo, o procedimento se repetiria para propriedade (ii).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica é composto pelas noções matemáticas de conjunto, intersecção, união e complementar de conjuntos.

As letras são usadas nessa tarefa para nomear conjuntos quaisquer. Porém, quando se compõem duas ou mais dessas letras, como em $A^C \cap B^C$, indica-se ao aluno uma operação a ser realizada como os elementos dos conjuntos em questão. Por este motivo, acreditamos que essa tarefa possibilita o contato do aluno com a concepção de álgebra como aritmética generalizada e como uma estrutura, segundo Usiskin (1995).

Gostaríamos de ressaltar que, embora o autor tenha sugerido o uso de diagramas, um aluno também poderá resolver essa tarefa se considerar dois conjuntos numéricos finitos e aplicar a propriedade solicitada. Vejamos um exemplo:

Se A={0,1,2,3,4,5}, B=[3,4,5,6,7,8,} e A e B estão contido no conjunto $\mathbb{N}$ teremos:

A^C *= {6,7,8,9,10,11,12...}*

B^C *= {9,10,11,12,...}*

$\boldsymbol{A^C \cap B^C}$***= {9,10,11,12,...}***

$A \cup B$ *= {0,1,2,3,4,5,6,7,8}*

$\boldsymbol{(A \cup B)^C}$ ***= {9,10,11,12,...}***

Portanto:

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Se este tipo de técnica for utilizado pelo aluno podemos dizer que a propriedade foi justificada com uma prova pragmática ao nível do *empirismo ingênuo*, segundo Balacheff (1988).

COLEÇÃO C11

Tarefa 01 (TP1): *É possível provar que se α é um número irracional e β é um número racional, então os números resultantes de (i) $\alpha\beta$ $(\beta \neq 0)$, (ii) $\alpha + \beta$, (iii) $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$ e (iv) $\frac{\beta}{\alpha}$ $(\alpha\ e\ \beta \neq 0)$ são número irracionais. Em cada situação (de 1 a 4) indique um valor de α e um valor de β.*

Nesta tarefa, o autor solicita explicitamente ao aluno a substituição das variáveis α *e* β por valores específicos a fim de comprovar a veracidade da propriedade em questão. Por este motivo, consideramos esta tarefa como pertencente ao GT2 e acreditamos que o aluno realizará uma *prova pragmática*, ao nível do *empirismo ingênuo*, segundo Balacheff (1988).

No que diz respeito à técnica, espera-se que o aluno escolha um número irracional para α e um número racional para β e substitua-os nas expressões i, ii, iii e iv. Em seguida, espera-se que o aluno verifique a validade das propriedades por meio da observação de seus resultados. É possível que o aluno repita o procedimento para outros casos.

O bloco tecnológico/teórico que sustenta a técnica é composto pela noção matemática de número racional, número irracional e das propriedades da adição e multiplicação algébrica de números reais.

Acreditamos que a realização dessa tarefa propicia o contato do aluno com a concepção de álgebra como aritmética generalizada, já que houve o uso de letras gregas para expressar relações numéricas. Além disso, no momento em que o aluno substitui essas letras por valores específicos, acreditamos que haja um trabalho com a concepção funcional da álgebra, segundo Usiskin (1995).

Tarefa 02 (TP2): *Provar que se um conjunto possui n elementos então o conjunto das partes desse conjunto possui* 2^n *elementos.*

Após a apresentação de um exemplo e a proposição de alguns exercícios numéricos para serem resolvidos, a partir do exemplo dado, o autor solicita que o aluno responda a seguinte pergunta: Como saber quantos subconjuntos admite um conjunto com n elementos? Consideramos esta uma tarefa como pertencente ao GT2 pelo fato do autor ter apresentado um exemplo numérico e sugerido questões com exemplos numéricos ao aluno. Supomos aqui que o autor queria fazer com que o aluno chegasse à conclusão de que um conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos a partir dos exercícios realizados anteriormente por ele. Neste tipo de tarefa o aluno é levado a fazer uma *prova pragmática* ao nível do *empirismo ingênuo*, segundo Balacheff (1988), visto que ele utilizará casos particulares para afirmar a validade de uma propriedade.

Com relação à técnica, espera-se que o aluno observe os exemplos dados pelo autor da coleção sobre número de elementos do conjunto das partes de um conjunto para concluir que um conjunto de n elementos possui 2^n subconjuntos.

O bloco tecnológico/teórico que sustenta a técnica é composto pela noção matemática de conjunto, subconjunto e das propriedades da relação de inclusão entre conjuntos.

Acreditamos que seja possível, após a manipulação dos resultados obtidos com o uso de casos particulares, o aluno utilizar a variável n na potência 2^n para representar o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos. A variável, nesse caso, teria o papel de generalizadora de modelos, o que propicia o trabalho com a concepção da álgebra como aritmética generalizada.

Tarefa 03 (TP3): *Provar que num universo U,* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Após provar em TR10 que dados dois conjunto A e B $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ o autor solicita explicitamente que o aluno aproveite o modelo usado na prova realizada para provar que num universo U, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. Neste tipo de tarefa o aluno é levado a fazer uma *prova pragmática*, segundo Balacheff (1988). Por este motivo, consideramos a tarefa em questão como pertencente ao GT2.

Com relação à técnica, espera-se que o aluno observe o exemplo dado pelo autor da coleção na prova de uma propriedade similar a esta para concluir que num universo U, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. Em outras palavras, espera-se que o aluno determine, num universo U, dois conjuntos específicos A e B, o complementar de A e o complementar de B. A partir daí, determine a união e a intersecção entre os conjuntos A e B e o complementar da união. Por observação dos resultados, espera-se que o aluno constate que o complementar da união é igual à intersecção dos complementares de A e B.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica é composto pela noção matemática de conjunto, interseção, união entre conjuntos e de complementar de um conjunto.

É possível que, assim como no modelo sugerido pelo autor, o aluno reescreva a idéia contida em cada diagrama usando a simbologia da teoria dos conjuntos, numa tentativa de mostrar a generalidade da situação. Por este motivo acreditamos que esta tarefa permite o contato do aluno com a concepção de álgebra como aritmética generalizada, segundo Usiskin (1995).

No início desta análise, consideramos que o aluno realizaria uma prova pragmática nesta tarefa, mas não dissemos em que nível ela estaria. Podemos dizer que a prova realizada estará ao nível do *exemplo genérico* se, assim como o autor, o aluno manipular o diagrama e a reescrever suas idéias na forma simbólica na tentativa de representar a qualidade genérica da situação. Caso contrário, a prova estará ao nível do *empirismo ingênuo*.

Considerações a respeito das tarefas propostas aos alunos e pertencentes ao GT1 e ao GT2

Gostaríamos de iniciar essas consideração evidenciando que, das 3 coleções analisadas por nós, duas, C3 e C11, propuseram aos alunos tarefas do *tipo mostre que...* ou *demonstre que...* Consideramos positivo o fato de essas tarefas aparecerem nas coleções, pois mostra que a atividade de provar possivelmente não ficaria restrita aos autores. Contrariamente a isso, a ausência de tarefas desse tipo pode indicar uma desvalorização desse trabalho em sala de aula, bem como uma subestimação da capacidade dos alunos em resolvê-las.

Como os autores das coleções não diferenciam as palavras prova e demonstração em seu discurso, na abordagem do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*, fomos levados a considerar possíveis justificativas dos alunos às propriedades. No caso em que no enunciado havia a explicitação do procedimento a ser realizado, a classificação da tarefa como prova ou demonstração ficou mais evidente.

A coleção C3 propôs aos alunos 4 tarefas do *tipo mostre que...* ou *demonstre que...* Como havia indicações sobre a técnica a ser usada nos enunciados das tarefas TP2 e TP3, sua classificação como pertencente ao GT1 e GT2, respectivamente, foi mais direta. Porém nas tarefas TP1 e TP4, a falta de indicações no enunciado, nos permitiu evidenciar pelo menos duas técnicas diferentes, pertencentes ao GT1 ou ao GT2. De qualquer maneira, consideramos a possibilidade do trabalho com as provas pragmáticas e conceituais a partir dessas tarefas.

A coleção C11 propôs aos alunos 3 tarefas desse tipo. Em TP1 e TP2 houve indicações nos enunciados que permitiram classificar ambas mais facilmente como pertencentes ao GT2. A falta dessas indicações na tarefa TP3 nos permitiu também evidenciar pelo menos dois tipos de técnicas diferentes que possibilitaria a classificação da mesma como pertencente ao GT1 ou ao GT2.

Notamos que, apesar de 2 das 3 coleções apresentarem tarefas do tipo *mostre que...* ou *demonstre que...,* nenhuma delas propuseram aos alunos tarefas de organização dedutiva, segundo Duval (1989). Este fato poderia dificultar o entendimento dos alunos a respeito de como se constrói uma demonstração e fazer com que não haja uma evolução das justificativas empíricas para as justificativas formais dadas por eles.

No que tange o trabalho com as concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995), podemos considerar que em 6 das 7 tarefas propostas aos alunos houve a possibilidade do trabalho com as concepções de álgebra como aritmética generalizada, como estrutura ou como estudo das relações. Notamos que nenhuma das tarefas propostas possibilitou o contato do aluno com a concepção de álgebra como meio de resolver problemas em que as letras são incógnitas. Consideramos positiva a possibilidade de trabalho com 3 das 4 concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995), embora tenha se enfatizado o trabalho com a concepção de aritmética generalizada e não trabalhado com álgebra como meio de resolver problemas.

Para finalizar essa discussão, gostaríamos de salientar que quando se propõem aos alunos tarefas do tipo *mostre que..., demonstre que...,* abre-se a possibilidade de uma atividade de interação social em que o professor em sala de aula poderia instigar um debate científico a respeito da "força" de cada justificativa dada pelos alunos nas tarefas contidas no livro. Esse tipo de atitude possibilitaria o trabalho com as funções de comunicação e de desafio intelectual de uma demonstração, além das funções de verificação e descoberta, segundo De Villiers (2002).

(ii) Tarefas na forma de exercício de aplicação e na forma de problema que utilizam como bloco tecnológico-teórico as propriedades já demonstradas ou provadas anteriormente.

Neste tópico da pesquisa estamos interessados em mostrar algumas tarefas pertencentes ao GT3, que foram propostas aos alunos durante a abordagem do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*. Estas tarefas não são do tipo *mostre que... demonstre que...* Por este motivo, não serão analisadas segundo Balacheff (1988). A partir delas verificaremos se os autores incentivam os alunos a utilizarem, de alguma maneira, as propriedades provadas ou demonstradas e se elas propiciam aos alunos um contato com as diversas concepções da álgebra propostas por Usiskin (1995).

Decidimos analisar os exercícios de aplicação e os problemas propostos por tarefa demonstrada ou provada em cada coleção. Assim, por exemplo, se a coleção

C2 só realizou uma tarefa de demonstração, então apresentaremos somente exercícios e problemas referentes a este tipo de tarefa realizada pelo autor.

Quando começamos a analisar as tarefas pertencentes ao GT3, percebemos que os blocos tecnológico/teórico dos exercícios de aplicação e dos problemas propostos, referentes a uma propriedade provada ou demonstrada, eram muito parecidos. Para a análise não ficar repetitiva, decidimos apresentá-la da seguinte maneira: primeiramente comentaremos, separadamente, a técnica usada e a concepção de álgebra envolvida nos exercícios de aplicação e nos problemas propostos. Em seguida, comentaremos de uma única vez o bloco tecnológico/teórico.

A partir da análise preliminar realizada nas coleções, notamos a ausência de tarefas propostas aos alunos e pertencentes ao GT3 que utilizassem algumas das tarefas realizadas pelos autores e pertencentes ao GT1 ou ao GT2. Essa análise nos permitiu a construção do quadro a seguir:

	Realizou as tarefas	**Não usou em exercícios de aplicação**	**Não usou em problemas**
COLEÇÃO C2	TR1, TR4, TR6, TR11.	TR1.	TR1, TR6.
COLEÇÃO C3	TR1, TR2, TR3, TR4, TR5, TR6, TR8, TR9.	TR1, TR4, TR6 TR8.	TR3, TR6.
COLEÇÃO C11	TR1, TR2, TR3, TR4, TR5, TR7, TR10.	TR1, TR3, TR4, TR5, TR10.	TR1, TR2, TR3, TR5, TR10.

Devido à constatação que fizemos anteriormente, faremos a seguir apenas a análise de exercícios de aplicação e de problemas que constam em cada coleção e são relacionados a algumas das tarefas realizadas pelos autores pertencentes ao GT1 ou GT2.

COLEÇÃO 02

O autor desta coleção demonstra apenas a propriedade analisada em TR1 e prova as propriedades analisadas em TR4, TR6 e TR11. Porém, não propõe aos alunos nenhuma tarefa pertencente ao GT3 para a propriedade demonstrada em

TR1. Por este motivo, mostraremos a seguir tarefas na forma de exercício de aplicação e/ou na forma de resolução de problema, envolvendo apenas as propriedades provadas nas tarefas TR4, TR6 e TR11.

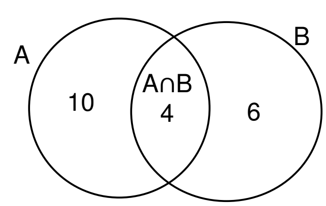
Tarefa 01 (TP1): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR4 realizada pelo autor.

Tarefa 1.1: *Sendo $n(A\cup B)=20$, $n(A)=14$ e $n(B)=10$, determine $n(A\cap B)$.*

Com relação à técnica, é necessário que o aluno aplique a propriedade provada pelo autor na tarefa TR4 por meio da substituição das variáveis pelos valores dados no enunciado.

Pelo fato do aluno utilizar nessa técnica a relação $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$, substituindo nela os valores dados e, a partir disso chegando numa equação, acreditamos que esta tarefa propicie o trabalho com a concepção da álgebra como estudo das relações e como meio de resolver problemas, segundo Usiskin (1995).

É possível também que nessa tarefa o aluno utilize diagramas em detrimento da relação $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$. Mostraremos a seguir um exemplo disso:



$$10 + 4 + 6 = 20$$

Como relatamos anteriormente, o autor da coleção C2 apresenta exercícios resolvidos[19] referentes a essa propriedade sem usar explicitamente a propriedade provada em TR4. Esses exercícios resolvidos costumam servir de modelo para os alunos, o que aumenta ainda mais a possibilidade do uso de diagramas na

[19] Mostramos um exemplo desses exercícios resolvidos quando tratamos das tarefas pertencentes ao GT3 realizadas pelos autores.

resolução dessa tarefa. Se essa última técnica for utilizada, não haverá o trabalho com as concepções de álgebra de Usiskin (1995), visto que letras não são usadas.

Tarefa 1.2: *A tabela abaixo mostra o resultado de uma pesquisa realizada entre os alunos de uma escola de ensino médio, referente às preferências deles em relação às revistas A ou B.*

Revistas	*A*	*B*	*A e B*	*Nenhuma*
Número de leitores	*180*	*150*	*60*	*40*

Com base no quadro, responda:

a) *Quantos alunos foram consultados?*
b) *Quantos alunos lêem apenas a revista A?*
c) *Quantos alunos não lêem a revista A?*
d) *Quantos alunos lêem a revista A ou a revista B?*

Com relação à técnica usada, é necessário que o aluno leia e interprete os dados apresentados na forma de tabela e substitua os valores indicados na relação provada pelo autor na tarefa TR4.

Pelo fato do aluno ter que utilizar a relação $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$, substituindo nela os valores dados no enunciado e, a partir disso, chegando numa equação, acreditamos que esta tarefa propicie o trabalho com a concepção da álgebra como estudo das relações e como meio de resolver problemas, segundo Usiskin (1995).

Porém, assim como na tarefa anterior, há a possibilidade do uso de diagramas para resolver essa tarefa. De forma análoga, acreditamos que se essa técnica for usada não haverá o contato do aluno com as concepções de álgebra Usiskin (1995).

O bloco tecnológico/ teórico que sustenta a técnica usada nas tarefas 1.1 e 1.2 é composto pela noção matemática de conjunto, de interseção e união entre conjuntos e de número de elementos de um conjunto. Além disso, é necessário que o aluno conheça a propriedade provada na tarefa TR4: Para dois conjuntos quaisquer A e B finitos temos $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$.

Tarefa 02 (TP2): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR6 realizada pelo autor.

Quantos números racionais existem entre 2,5 e 2,6? Cite três deles.

Com relação à técnica, para a realização desta tarefa é necessário que o aluno aplique, para o caso dos números 2,5 e 2,6, a propriedade provada pelo autor na tarefa TR6: entre dois números racionais há infinitos racionais.

Acreditamos que seja possível o aluno não utilizar diretamente a propriedade provada pelo autor e, ao tentar escolher alguns número entre 2,5 e 2,6, constate por ele mesmo a infinidade de números racionais entre eles.

Como não há o uso de variáveis, consideramos que esta tarefa não propicia o contato do aluno com as concepções de álgebra de Usiskin (1995).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada na tarefa é composto pela noção matemática de número racional, representação decimal de um número racional, comparação de números racionais e pela propriedade provada em TR6.

Tarefa 03 (TP3): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR11 realizada pelo autor.

Tarefa 3.1: *Considere cada sentença como verdadeira ou falsa, fazendo a correção das falsas.*

a) *1,8 é racional;*

b) *3,455... é irracional;*

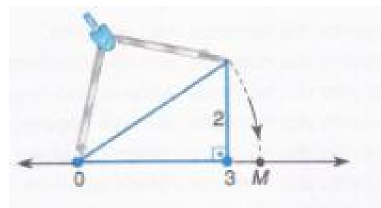
c) *1,88... é irracional;*

d) *-0,525354... é racional.*

Com relação à técnica, é necessário que o aluno aplique a propriedade provada pelo autor na tarefa TR11 para decidir se as afirmações são falsas ou verdadeiras.

Como não há o uso de variáveis, consideramos que esta tarefa não propicia o contato do aluno com as concepções de álgebra de Usiskin (1995).

Tarefa 3.2: *Associe ao ponto M o número irracional correspondente.*



Com relação à técnica, é necessário que o aluno perceba que o número irracional que representa o ponto M é o mesmo número irracional que representa a medida da hipotenusa do triângulo retângulo da figura. Em seguida, é necessário que o aluno utilize o teorema de Pitágoras para descobrir a medida da hipotenusa e conseqüentemente o número irracional que representa o ponto M.

O uso do teorema de Pitágoras propicia o contato do aluno com a concepção da álgebra como estudo das relações e como meio de resolver problemas e como estrutura, já que após a substituição das variáveis pelos valores dados haverá a necessidade um tratamento algébrico para a resolução de uma equação.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada nas tarefas 3.1 e 3.2 é composto pela noção matemática de número racional, representação decimal de um número racional e pela propriedade provada na tarefa TR11: Toda raiz cuja representação decimal não é exata assim como todo número cuja forma decimal não é exata nem periódica não são números racionais.

No caso específico da tarefa 3.2, também faz parte do bloco tecnológico/teórico o teorema de Pitágoras.

COLEÇÃO C3

O autor desta coleção demonstra as propriedades analisadas em TR1, TR2, TR3 e TR4 e prova as propriedades analisadas em TR5, TR6, TR8 e TR9. Porém não apresenta nenhuma tarefa pertencente ao GT3 para a propriedade provada em TR6. Por este motivo, mostraremos a seguir tarefas na forma de exercício de aplicação e/ou na forma de resolução de problema envolvendo as propriedades trabalhadas em TR1, TR2, TR3, TR4, TR5, TR8 e TR9.

Tarefa 01 (TP1): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR1 realizada pelo autor.

Dados A={-4,-1,0,1,2,6,9} e B ={x é $irracional/x = \sqrt{a}, com\ a \in A$}, quantos elementos têm o conjunto B?

Com relação à técnica, é necessário que o aluno use a calculadora para constatar a partir da representação decimal visualizada que:

- $\sqrt{6}$ é um número irracional;
- $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$ e $\sqrt{9}$ são números racionais;

É necessário também que ele use a propriedade provada na tarefa TR1 para verificar que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Também é necessário verificar que $\sqrt{-4}$ e $\sqrt{-1}$ não são números reais.

O uso da calculadora, não associado ao uso de outros teoremas, poderia levar o aluno a tirar conclusões erradas em alguns itens da tarefa. Por exemplo, considerando somente a representação decimal mostrada por uma calculadora simples de 8 dígitos, o aluno poderia classificar $\sqrt{6}$ como um número racional, já que possuiria representação decimal finita (com 7 casas decimais). Para que esse erro não ocorra, é necessário que o aluno utilize um teorema que não foi provado, nem demonstrado pelo autor da coleção em questão: *Sejam a e b dois números reais tais que $a \neq b^2$. Nessas condições, $\forall\ a, \sqrt{a}$ é um número irracional.*

Como não há o uso de variáveis, consideramos que esta tarefa não propicia o contato do aluno com as concepções de álgebra de Usiskin (1995).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada na tarefa é composto pela noção matemática de conjunto e pelos seguintes teoremas: (a) Todo número racional possui representação decimal finita ou infinita e periódica; (b) Todo número irracional possui representação decimal infinita e não periódica; (c) $\sqrt{2}$ é um número irracional e (d) Sejam a e b dois números reais tais que $a \neq b^2$. Nessas condições, $\forall\, a, \sqrt{a}$ é um número irracional. Gostaríamos de destacar que esta tarefa faz uso de alguns teoremas provados anteriormente pelo autor (teoremas a e b), fato que poderia ajudar o aluno a entender como funciona sistema dedutivo.

Tarefa 02 (TP2): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR2 realizada pelo autor.

Tarefa 2.1: *Dados os conjuntos A={1,2}, B={1,2,3,4,5}, C={3,4,5} e D={0,1,2,3,4,5}, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):*

i) $\emptyset \not\subset A$

j) $\emptyset \subset B$

Com relação à técnica, é necessário que o aluno aplique o teorema apresentado na tarefa TR2.

Como não há o uso de variáveis, consideramos que esta tarefa não propicia o contato do aluno com as concepções de álgebra de Usiskin (1995).

Tarefa 2.2: *Dados A={0,1} e B={1,3,5}, determine P(A) e P(B).*

Com relação à técnica, é necessário que o aluno escreva todos os subconjuntos dos conjuntos A e B fazendo as possíveis combinações entre seus elementos. Pelo fato do conjunto vazio não estar explícito como um elemento dos conjuntos A e B, o aluno deve aplicar o teorema apresentado na tarefa TR2.

Apesar das letras A e B indicarem apenas o nome de dois conjuntos dados, as combinações com a letra P em P(A) e P(B) indicam operações a serem realizadas com os elementos dos conjuntos. Entendemos que nessas combinações as letras representam um comando a ser seguido pelo aluno, por este motivo, consideramos que esta tarefa propicia o contato do aluno com a concepção de álgebra como estrutura, segundo Usiskin (1995).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada nas tarefas 2.1 e 2.2 é composto pela noção matemática de conjunto, subconjunto, conjunto das partes de um conjunto e pelo teorema demonstrado na tarefa TR2: $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto A.

Tarefa 03 (TP3): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR3 realizada pelo autor.

Verifique com um exemplo a equivalência já demonstrada: $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.

Com relação à técnica, o aluno deve escolher dois conjuntos A e B tais que $A \subset B$ e conseqüentemente obter $B^C e\ A^C$. A partir da observação do exemplo proposto, o aluno deve verificar a validade do teorema $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$. Acreditamos que os exemplos dados poderão aparecer tanto na forma numérica como na forma de diagramas.

Apesar das letras A e B indicarem apenas o nome de dois conjuntos genéricos, as combinações com a letra C em $B^C e\ A^C$ indicam operações a serem realizadas com os elementos dos conjuntos. Como já dissemos, nessas combinações as letras representam comandos a serem seguidos pelo aluno, por este motivo, consideramos que esta tarefa propicia o contato do aluno com a concepção de álgebra como estrutura, segundo Usiskin (1995).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada na tarefa é composto pela noção matemática de conjunto, de complementar de um conjunto, relações de inclusão entre conjuntos e pelo teorema demonstrado na tarefa TR3: $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$. Além disso, há também a necessidade de se conhecer a noção paramatemática de implicação e recíproca da implicação, visto que a respectiva simbologia aparece no enunciado da tarefa.

Tarefa 04 (TP4): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR4 realizada pelo autor.

Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. Dez alunos acertaram as duas questões, 25 acertaram a primeira questão e 20 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões?

Com relação à técnica, o aluno deve representar com um conjunto A aquele dos alunos que acertaram a primeira questão e como conjunto B aquele dos alunos que acertaram a segunda questão. A partir disso, deve considerar $n(A)=20$, $n(B)=25$ e $n(A\cap B)=10$. Por fim, deve utilizar o teorema demonstrado na tarefa TR4 para verificar que $n(A\cup B)$ é menor que o total de alunos e que por isso houve alunos que não acertaram nenhuma das questões.

Pelo fato do aluno ter que utilizar a relação $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$, substituindo nela os valores dados no enunciado e, a partir disso, chegarem a uma equação para ser resolvida, acreditamos que esta tarefa propicie o trabalho com a concepção da álgebra como estudo das relações e como meio de resolver problemas, segundo Usiskin (1995).

Gostaríamos de salientar que, também nessa tarefa, há a possibilidade do aluno usar uma técnica baseada em diagramas e não na relação $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$. Se essa técnica for utilizada, acreditamos que não haverá um contato com as concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada na tarefa é composto pela noção matemática de conjunto, de intersecção e união entre conjuntos, de conjunto complementar e pelo o teorema demonstrado na tarefa TR4: Para dois conjuntos quaisquer A e B finitos temos $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

Tarefa 05 (TP5): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR5 realizada pelo autor.

Tarefa 5.1: *O número 12,12345678911223344... é racional ou irracional?*

Com relação à técnica, é necessário que o aluno aplique a propriedade provada pelo autor na tarefa TR5: todo número racional tem representação decimal finita ou infinita e periódica.

Como não há o uso de variáveis, consideramos que esta tarefa não propicia o contato do aluno com as concepções de álgebra de Usiskin (1995).

Tarefa 5.2: *Classifique em verdadeiro (V) ou Falso (F):*

a) A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional;
b) O produto de um número irracional por um número racional diferente de zero é um número irracional;
c) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional;
d) *Se a é um número irracional, então 1/a também é.*

Com relação à técnica, é necessário que o aluno escolha três números a, b e c de modo que a e b sejam irracionais e c seja racional diferente de zero e substitua os valores escolhidos nas expressões: c+a, c.a, a+b e 1/a. Para concluir a tarefa, é necessária a utilização da propriedade provada pelo autor na tarefa TR5. Por fim, a constatação de que c+a é sempre irracional, c.a é sempre irracional, a+b não é sempre irracional e 1/a é sempre irracional.

Gostaríamos de ressaltar que o professor poderia utilizar esta tarefa para ensinar ao aluno a noção de contra-exemplo. No caso do item c, se aluno escolhesse especificamente dois números irracionais -x e x, constataria que a soma daria 0, ou seja, um número racional. Esse seria um contra-exemplo que invalidaria a propriedade do item c.

Acreditamos que esta tarefa propicia ao aluno o contato coma concepção da álgebra como aritmética generalizada, pois afirmar que “a soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional” é o mesmo que afirmar “Se a $\in \mathbb{Q}$ e b $\notin \mathbb{Q}$, então a+b $\notin \mathbb{Q}$ ”. Em outras palavras, há o uso de letras como generalizadoras de modelos.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada nas tarefas 5.1 e 5.2 é composto pela noção matemática de número racional, das propriedades das operações com números reais e pela propriedade provada na tarefa TR5: todo número racional pode ser representado na forma decimal com um número finito de casas decimais ou por meio de infinitas casas decimais, porém periódicas.

Tarefa 06 (TP6): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR8 realizada pelo autor.

Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq -5\}$ *e* $A = \{x \in \mathbb{Z} | x + 1 < 0\}$*. Quantos elementos têm o conjunto* $A \cap B$*?*

Com relação à técnica, é necessário que o aluno escreva os elementos do conjunto A e do conjunto B. Em seguida, determine intersecção dos conjuntos A e B e o número de elementos da intersecção dos conjuntos A e B.

Acreditamos que esta tarefa propicia ao aluno o contato com a concepção da álgebra como meio de resolver problemas, pois usa-se inequações para representar os elementos dos conjuntos A e B. Em outras palavras, é necessário que o aluno resolva inequações para determinar quais são os elementos dos conjuntos A e B.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada na tarefa é composto pela noção matemática de inequação, conjunto, de intersecção entre conjuntos e pela propriedade provada na tarefa TR8.

Tarefa 07 (TP7): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR9 realizada pelo autor.

Tarefa 7.1: *Dados A = {0,1} e B = {1,3,5}, determine:*

a) *P(A)*
b) *P(B)*
c) *O número de elementos de P(A)*
d) *O número de elementos de P(B)*

Com relação à técnica, é necessário que o aluno determine o conjunto das partes dos conjuntos A e B e aplique, para os valores dados no enunciado, a propriedade provada na tarefa TR9: Se A tem n elementos então P(A) tem 2^n elementos.

Apesar das letras A e B indicarem apenas o nome de dois conjuntos dados, as combinações com a letra P em P(A) e P(B) indicam operações a serem realizadas com os elementos dos conjuntos. Entendemos que nessas combinações as letras representam um comando a ser seguido pelo aluno, por este motivo, consideramos que esta tarefa propicia o contato do aluno com a concepção de álgebra como estrutura, segundo Usiskin (1995). Além disso, a técnica que mencionamos anteriormente propicia ao aluno o contato com a concepção da álgebra como estudo das relações, visto que a relação P(n)= 2^n é manipulada.

Não podemos deixar de considerar o uso de outra técnica na resolução dos itens c e d dessa tarefa. Ao invés do aluno utilizar a propriedade provada em TR9 ele poderia simplesmente contar o número de elementos dos conjuntos determinados por ele nos itens a e b da tarefa. Com isso haveria apenas o trabalho com a concepção de álgebra como estrutura, segundo Usiskin (1995).

Tarefa 7.2: *Escreva um subconjunto A dos números naturais tal que P(A) tenha 16 elementos.*

Para a realização desta tarefa é necessário que o aluno aplique, com os valores dados no enunciado, a propriedade provada na tarefa TR9. Esta atividade é interessante, pois exige do aluno um raciocínio contrário ao proposto na tarefa anterior. Em outras palavras, não se pede ao aluno o número de elementos do conjunto das partes, se pede o número de elementos do conjunto a partir do número de elementos das partes. Isso exige do aluno a resolução de uma equação exponencial: $2^n = 16$.

Acreditamos também que esta tarefa propicia ao aluno o contato com a concepção da álgebra como estudo das relações e como meio de resolver problemas, visto que a relação P(n)= 2^n é manipulada.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada nas tarefas 7.1 e 7.2 é composto pela noção matemática de equação exponencial, conjunto, subconjunto e pela propriedade provada na tarefa TR9.

COLEÇÃO C11

O autor desta coleção demonstra as propriedades analisadas em TR1, TR2, TR3, TR4 e TR7 e prova as propriedades analisadas em TR5 e TR10. Porém, não apresenta nenhuma tarefa pertencente ao GT3 para as propriedades trabalhadas em TR1, TR3, TR5 e TR10. Por este motivo, mostraremos a seguir tarefas na forma de exercício de aplicação e/ou na forma de resolução de problema envolvendo as propriedades abordadas em TR2, TR4 e TR7.

Tarefa 01 (TP1): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR2 realizada pelo autor.

Considere o conjunto A, onde A= {5;2;3}, e B um conjunto tal que $B \subset A$. *Descreva os elementos do conjunto B.*

Com relação à técnica, é necessário que o aluno considere que se $B \subset A$ então B é um subconjunto de A e aplique, em seguida, a propriedade demonstrada na tarefa TR2 para reconhecer que o conjunto vazio é um dos subconjuntos do conjunto A e, portanto, poderia representar o conjunto B.

Como as letras indicam apenas o nome dos conjuntos dados, consideramos que esta tarefa não propicia o contato do aluno com as concepções de álgebra de Usiskin (1995).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada na tarefa é composto pela noção matemática de conjunto, subconjunto e pela propriedade demonstrada na tarefa TR2.

Tarefa 02 (TP2): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR4 realizada pelo autor.

Numa escola há n alunos. Sabe-se que 56 alunos lêem a revista A, 21 lêem as revistas A e B, 106 lêem apenas uma das revistas e 66 não lêem a revista B. Qual é o valor de n?

Com relação à técnica, é necessário que o aluno considere que se $n(A \cap B)=21$ e 106 alunos lêem apenas uma das revistas, então $n(A)=35$ e $n(B)=92$. Em seguida, é necessário aplicar a propriedade demonstrada na tarefa TR4 para determinar $n(A \cup B)$. Por fim, o aluno deve considerar n igual a soma do número de elementos de $A \cup B$ e $(A \cup B)^c$.

Pelo fato do aluno ter que utilizar a relação $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$, substituindo nela os valores dados no enunciado e, a partir daí, chegar a uma equação, acreditamos que esta tarefa propicie o trabalho com a concepção da álgebra como estudo das relações e como meio de resolver problemas, segundo Usiskin (1995).

Gostaríamos de salientar que também nessa tarefa há a possibilidade do aluno usar uma técnica baseada em diagramas e não na relação $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$. Se essa técnica for utilizada, acreditamos que não haverá um contato com as concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995).

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada na tarefa é composto pela noção matemática de conjunto, subconjunto, intersecção e união entre conjuntos, conjunto complementar e pela propriedade demonstrada na tarefa TR4.

Tarefa 03 (TP3): Tarefas que utilizam como bloco tecnológico-teórico a tarefa TR5 realizada pelo autor.

Tarefa 3.1: *Escreva, na forma decimal, os números representados por (utilize calculadora):*

a) $\frac{2}{5}$ *b)* $\frac{7}{9}$ *c)* $\sqrt{5}$ *d)* $2-\sqrt{2}$

Com relação à técnica, é necessário que o aluno efetue a divisão do numerador pelo denominador de uma fração nos itens a e b e calcule a raiz quadrada de um número real usando a calculadora nos itens c e d.

Como não há o uso de variáveis, consideramos que esta tarefa não propicia o contato do aluno com as concepções de álgebra de Usiskin (1995).

Gostaríamos de esclarecer que esta tarefa foi associada à tarefa TR5, pois, devido ao uso da calculadora e sua limitação com relação à quantidade de dígitos, é necessário que o aluno perceba que o número racional $\frac{7}{9}$, por exemplo, possui infinitas casas decimais periódicas, mesmo que a calculadora não mostre isso. Além disso, devido à mesma limitação, é necessário que o aluno perceba que o número $\sqrt{5}$ não é racional e, por este motivo, possui uma representação decimal infinita e não periódica.

Tarefa 3.2: *Obtenha a medida em centímetros da diagonal de um retângulo de 5cm x 2cm. A medida da diagonal é representada por um número racional?*

Com relação à técnica, é necessário que o aluno aplique: (a) o teorema de Pitágoras para determinar a medida da diagonal do retângulo; (b) a propriedade provada na tarefa TR5 para classificar a medida da diagonal como sendo ou não um número racional.

O uso do teorema de Pitágoras propicia o contato do aluno com a concepção da álgebra como estudo das relações, como meio de resolver problemas e como estrutura, já que haverá a substituição de valores nas variáveis da relação $a^2 = b^2 + c^2$ e um tratamento algébrico para revolver a equação encontrada após a substituição.

O bloco tecnológico/teórico que justifica a técnica usada nas tarefas 3.1 e 3.2 é composto pela noção matemática número racional, operações no conjunto dos números racionais e pela propriedade provada na tarefa TR5. No caso específico da tarefa 3.2 o bloco tecnológico/teórico é composto também pelo teorema de Pitágoras.

Considerações a respeito das tarefas propostas aos alunos e pertencentes ao GT3

A primeira consideração que faremos diz respeito ao uso que se fez das tarefas pertencentes ao GT1 e GT2 realizadas pelos autores. A partir de nossa análise, notamos que muitas das provas e demonstrações realizadas pelos autores não foram usadas em nenhum exercício de aplicação nem em problemas propostos aos alunos. Acreditamos que a falta de uso dessas propriedades, de alguma maneira, possa contribuir para que o aluno não valorize as provas e demonstrações e as considere, quando aparecerem nos livros, como um formalismo desnecessário, visto que tais tarefas não teriam utilidade alguma.

Constatamos que as tarefas propostas aos alunos pertencentes ao GT3 geralmente possuem mais de uma maneira de fazer. Procuramos ressaltar essas diferentes técnicas sempre que apareceram. Notamos que, dependendo da técnica usada, as propriedades pertencentes ao GT1 ou GT2 poderiam ou não ser usadas. É o caso, por exemplo, das tarefas ligadas à propriedade demonstrada em TR4. Nestas tarefas os alunos poderiam ou não usar a relação $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$.

Selecionamos nesta pesquisa 19 tarefas dentre todas aquelas pertencentes ao GT3 e propostas aos alunos pelos autores das coleções analisadas. No que tange as concepções de álgebra propostas por Usiskin (1995), percebemos que algumas das tarefas que analisamos propiciaram o trabalho com mais de uma das concepções de álgebra de Usiskin (1995). Nesta amostra, notamos a presença de 5 tarefas com a possibilidade de se trabalhar a álgebra como uma estrutura; 8 tarefas com a possibilidade de se trabalhar a álgebra como estudo das relações; 8 tarefas com a possibilidade de se trabalhar a álgebra como meio de resolver problemas; 1 tarefa com a possibilidade de se trabalhar a álgebra como aritmética generalizada e 7 tarefas em que não houve a possibilidade de trabalho com alguma dessas concepções. A possibilidade do trabalho do aluno com as 4 concepções de álgebra por meio das tarefas pertencentes ao GT3 é considerada por nós uma situação promissora, visto que pode permitir aos alunos um entendimento amplo sobre o que é a álgebra, bem como pode propiciar a utilização da álgebra como ferramenta para se mostrar generalidade nas tarefas de prova e demonstração.

3.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA ANÁLISE

Nesta seção da pesquisa faremos uma discussão sobre a análise das tarefas relativas às provas e demonstrações no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*, realizadas pelos autores e propostas aos alunos. A intenção desta discussão é fazer um apanhado geral sobre o que discutimos na análise de cada tarefa.

Antes de tratar dos resultados da análise, gostaríamos de retomar algumas idéias sobre os trabalhos de Balacheff (1982, 1988). Primeiramente, destacaremos a diferenciação das palavras prova e demonstração feita por nós com base nos trabalhos desse pesquisador.

A palavra prova, nesta pesquisa, refere-se a uma explicação mais simples, muitas vezes baseadas em exemplos, usada para afirmar a veracidade de uma propriedade. A palavra demonstração refere-se a uma explicação mais rigorosa, dentro dos padrões matemáticos, usada também para afirmar a veracidade de uma propriedade. Com essa diferenciação acreditamos ampliar o significado da atividade matemática de verificar a validade de uma propriedade. Esta diferenciação não tem o objetivo de “diminuir” o rigor matemático exigido numa demonstração. Pelo contrário, ela é uma maneira de fazer com que essa atividade tão importante para os matemáticos seja ensinada aos nossos alunos de maneira gradativa e significativa, como propõe Balacheff (1988) ao classificar os níveis de prova em matemática.

Durante a análise das tarefas realizadas pelos autores na abordagem do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*, percebemos a presença de tarefas envolvendo provas, pertencentes ao GT2, e demonstrações, pertencentes ao GT1. Classificamos como demonstrações (ou provas conceituais) as tarefas TR1, TR2, TR3, TR4 e TR7, pois são dotadas de generalidade e rigor matemático. Classificamos como provas pragmáticas as tarefas TR5, TR6, TR8, TR9, TR10 e TR11, pois são baseadas em casos específicos. A maioria das tarefas envolvendo uma prova se enquadra no que Balacheff (1988) chama de *empirismo ingênuo*, em que os casos analisados são selecionados aleatoriamente por parte de quem está efetuando a prova. Apenas duas destas tarefas, a TR6 e a TR10, se enquadram no que Balacheff (1988) chama de *exemplo genérico*, em que o caso apresentado representa uma classe de objetos e traz subsídios para a realização da demonstração.

Apesar das três coleções apresentarem provas e demonstrações durante a abordagem do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*, nenhuma delas se preocupou em explicar a diferença entre os tipos de justificativa dados em cada propriedade. Isso pode fazer com que o aluno não entenda o porquê das explicações serem feitas de forma diferenciada e o desestimule a procurar maneiras mais rigorosas de explicar a validade de uma propriedade, visto que a prova pragmática é mais simples de ser efetuada.

As tarefas realizadas pelos autores das coleções envolveram, em sua maioria, apenas o trabalho com a concepção da álgebra como aritmética generalizada e como uma estrutura, principalmente aquelas pertencentes ao GT1.

A análise das tarefas propostas aos alunos pelas três coleções, durante a abordagem do conteúdo *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*, nos permitiu concluir que, de modo geral, as coleções de livros didáticos do Ensino Médio analisadas propõem poucas tarefas do tipo *mostre que*, *demonstre que* aos alunos. A coleção C1 não propôs nenhuma atividade desse tipo durante a abordagem do conteúdo em questão, fato que consideramos desestimulador. Notamos que a classificação destas tarefas como pertencentes ao GT1 ou ao GT2, depende da possível técnica usada pelos alunos em sua realização. Em algumas das tarefas os autores deram indicações do procedimento a ser usado pelos alunos. Em outras tarefas não. Acreditamos que essa classificação seria mais facilmente realizada por nós se os autores diferenciassem explicitamente aos alunos as palavras “prove” e “demonstre”, visto que ao ler a palavra “prove” o aluno percebesse a possibilidade de sua explicação ser mais simples. Em contrapartida, ao ler a palavra “demonstre”, sua explicação deveria ser a mais rigorosa possível.

Percebemos que a não diferenciação das palavras prova e demonstração pode fazer como que haja uma valorização das provas pragmáticas ao nível *empirismo ingênuo* por parte dos alunos, visto que esta justificativa é mais fácil de ser elaborada. De modo geral, na realização de tarefas que envolvam esse tipo de prova, os alunos não são estimulados a procurar um exemplo que se pareça com a forma genérica de se representar as propriedades matemáticas. Isso pode dificultar o caminho para as provas conceituais.

A análise das tarefas propostas aos alunos na forma de exercício de aplicação ou de problema nos permitiu construir o seguinte quadro. Já mostramos este quadro anteriormente, mas decidimos reapresentá-lo para que o leitor não se perca em nossas considerações a respeito dele.

	Realizou as tarefas	Não usou em exercícios de aplicação	Não usou em problemas
COLEÇÃO C2	TR1, TR4, TR6, TR11.	TR1.	TR1, TR6.
COLEÇÃO C3	TR1, TR2, TR3, TR4, TR5, TR6, TR8, TR9.	TR1, TR4, TR6 TR8.	TR3, TR6.
COLEÇÃO C11	TR1, TR2, TR3, TR4, TR5, TR7, TR10.	TR1, TR3, TR4, TR5, TR10.	TR1, TR2, TR3, TR5, TR10.

A partir deste quadro faremos algumas considerações.

Primeiramente, notamos que nem todas as tarefas realizadas pelos autores foram utilizadas como bloco tecnológico-teórico num exercício de aplicação ou num problema. A tarefa TR1, realizada pelos três autores, que consistia em demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, foi usada apenas por um dos autores num problema. Acreditamos que o pouco uso desta tarefa deveu-se ao fato dela ter sido realizada pelos autores na intenção de ilustrar ao aluno um novo tipo de número (irracional) ou um novo tipo de argumentação (por absurdo) e não como suporte na resolução de problemas. Em contrapartida, a tarefa TR4, realizada pelos três autores, que tratava do número de elementos da união de dois conjuntos finitos, foi utilizada por todos na resolução de problemas.

Fazendo uma comparação entre o número de tarefas realizadas e o número de tarefas não utilizadas, notamos na coleção C11, que das 7 tarefas realizadas 4 não foram utilizadas nem em exercícios de aplicação, nem na resolução de problemas. Isso mostra uma discrepância deste aspecto em relação às outras coleções.

Acreditamos que não utilizar posteriormente, como bloco tecnológico-teórico, uma tarefa de prova ou demonstração realizada pode provocar no aluno a sensação do conhecimento em questão não ter utilidade alguma, nem dentro nem fora da matemática. Além disso, pode fazer com que a atividade de justificar uma propriedade matemática não tenha valia no contexto educacional.

Com a análise das tarefas, percebemos que tanto as tarefas propostas aos alunos como as tarefas realizadas pelos autores podem propiciar o trabalho com as

4 concepções de álgebra de Usiskin (1995). Nas tarefas realizadas pelos autores, a concepção mais utilizada foi a de aritmética generalizada. Nas tarefas propostas aos alunos, foi a de estudo das relações.

Não consideramos como tarefa de organização dedutiva, segundo Duval (1989), nenhumas das tarefas realizadas pelos autores ou propostas aos alunos nas coleções analisadas. Acreditamos que essa ausência pode dificultar o caminho do aluno em direção à construção de suas próprias demonstrações, visto que tarefas desse tipo trazem à tona sua estrutura profunda.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta seção da pesquisa é dedicada à construção de uma reflexão sobre o uso de provas e demonstrações em tópicos relacionados à álgebra abordada no primeiro ano do Ensino Médio. Para isso, faremos uso das leituras de trabalhos correlatos ao nosso tema, da leitura de documentos oficiais da educação brasileira e da análise do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* das três coleções selecionadas por nós na seção 2.6.2.

Baseados nas leituras de trabalhos correlatos ao nosso tema de pesquisa, nós consideramos que há uma necessidade de se estender o significado da palavra prova no ensino de matemática (PIETROPAOLO, 2005). Uma das maneiras encontradas por nós, consiste em diferenciar o significado das palavras prova e demonstração segundo Balacheff (1982). Acreditamos que essa diferenciação seja positiva em dois aspectos. Primeiramente, ela permite ao professor considerar vários níveis de justificativas dadas pelos alunos às propriedades matemáticas. Além disso, abre a possibilidade, com um trabalho específico, de evolução dos alunos de um nível de justificativa a outro mais rigoroso.

Outra consideração que fazemos, diz respeito à ênfase dada ao estudo do uso de provas e demonstrações somente em conteúdos geométricos e do Ensino Fundamental. Percebemos que há algumas pesquisas como as de Gouvêa (1998), Mello (1999), De Villiers (2002), Pedemonte (2003) e Carlovich (2005) que tratam do uso de demonstrações em geometria, porém não encontramos nenhuma pesquisa que tratasse do mesmo tema em conteúdos algébricos. Além disso, os documentos oficiais da educação brasileira analisados por nós incentivam claramente o trabalho com as provas e demonstrações a partir do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, mas somente enfatizam a necessidade deste trabalho quando tratam do ensino de geometria.

Com relação ao ensino de álgebra, as leituras realizadas nos levaram a considerar que os livros didáticos e os documentos oficiais analisados incentivam o ensino de álgebra no Ensino Fundamental vinculado ao ensino das várias facetas que as letras podem assumir: *generalizadoras de padrões, incógnitas de equações,* *variáveis e símbolos abstratos*, como sugere a concepção de Usiskin (1995). No Ensino Médio, esse ensino estaria vinculado ao ensino de Números e Operações, Funções e Progressões (ligada à idéia de função).

A análise preliminar realizada nas 11 coleções de livros didáticos indicadas pelo PNLEM/2006 nos fez perceber que os conteúdos algébricos do Ensino Médio são em geral abordados a partir de um exemplo contextualizado dentro ou fora da matemática. Porém, nenhuma das 11 coleções inicia um conteúdo algébrico dando ao aluno um problema para ser resolvido por ele e que o leve a construir um novo conceito.

Percebemos também que poucas coleções (5 de 11) explicam aos alunos o significado das palavras postulado, teorema, hipótese, tese, demonstração e raciocínio dedutivo. As poucas coleções que se preocupam com isso não utilizam de uma forma plena o significado dessas palavras ao longo da exposição de um conteúdo algébrico. Por exemplo, não chamam de teorema uma propriedade demonstrada, apesar de ter explicado ao aluno o que é um teorema. Acreditamos que esse fato pode dificultar o entendimento do aluno a respeito do que é um sistema dedutivo.

Antes de tratarmos das conclusões obtidas a partir da análise das tarefas sobre *Conjuntos e Conjuntos Numéricos,* propostas pelas três coleções selecionadas, gostaríamos de retornar à nossa questão de pesquisa. Nossa pesquisa tem o objetivo de responder à seguinte questão:

De que maneira os livros didáticos analisados propõem aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio provas e demonstrações às propriedades enunciadas ao longo da exposição do conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos*?

Para responder nossa questão de pesquisa levantamos algumas hipóteses, como mostra a seção 2.5. A primeira consistia em admitir que os autores das coleções analisadas realizariam um número maior de provas do que demonstrações às propriedades abordadas num conteúdo algébrico em questão. Porém, após a análise, verificamos que essa hipótese não se confirmou. Para o conteúdo *Conjuntos e Conjuntos Numéricos,* constatamos que uma coleção trouxe um número de provas maior que demonstrações (C2, 1 e 3, respectivamente), outra, um número maior de demonstrações que de prova (C11, 5 e 2, respectivamente) e a última, um equilíbrio entre as propriedades provadas e demonstradas (C3, 4 e 4 respectivamente). Em geral, nas três coleções, houve poucas propriedades sem justificativa alguma.

Com relação ao uso das tarefas de prova e demonstração como bloco tecnológico-teórico na resolução de exercícios de aplicação e na resolução de problemas, percebemos que há tarefas que não são usadas posteriormente pelos autores. Em particular na coleção C11, das 7 tarefas realizadas 4 não foram utilizadas nem em exercícios de aplicação, nem na resolução de problemas.

As três coleções propõem aos alunos poucos problemas do tipo mostre que... ou demonstre que... A coleção C2 não propõe problemas desse tipo.

A partir da análise das tarefas sobre *Conjuntos e Conjuntos Numéricos,* a luz da noção de praxeologia de Chevallard (1999), percebemos que os autores realizaram cinco[20] *provas conceituais* ao nível do *cálculo nas afirmações*, ou seja, demonstrações do ponto de vista de Balacheff (1988). Das seis[21] *provas pragmáticas*, a maioria está ao nível do *empirismo ingênuo*, ou seja, são baseadas em casos específicos. Além disso, esta análise também nos permitiu perceber que a maioria das demonstrações realizadas pelos autores das três coleções utiliza, como bloco tecnológico-teórico, conceitos ensinados no Ensino Fundamental ou ensinados durante a abordagem do conteúdo algébrico em questão no Ensino Médio. Em outras palavras, a maioria das demonstrações dadas não utiliza conceitos que são ensinados num nível superior de ensino, ou seja, são demonstrações acessíveis aos alunos do Ensino Médio. Um exemplo disso é a demonstração da irracionalidade da $\sqrt{2}$ realizada nas três coleções. Essa demonstração exige que o aluno tenha conhecimento sobre paridade no conjunto dos números inteiros, números primos, técnicas algébricas elementares e demonstração por absurdo. O único item que geralmente não é visto no Ensino Fundamental é a demonstração por absurdo, mas este é abordado pelos três autores durante a exposição do conteúdo algébrico em questão.

[20] TR1, TR2, TR3, TR4, TR7.
[21] TR5, TR6, TR8, TR9, TR10, TR11.

As propriedades que necessitam de um discurso matemático melhor elaborado são, pelo menos, provadas pelos autores. É o caso da representação decimal de um número racional. Os três autores utilizam casos específicos para mostrar aos alunos que um número racional possui representação decimal finita ou infinita e periódica.

Apesar da presença significativa de provas e demonstrações na abordagem feita nas três coleções, percebe-se que esta atividade ficou restrita aos autores. Em outras palavras, não houve nas coleções um trabalho de incentivo para que o aluno pudesse construir suas próprias provas, o que fica evidenciado com as poucas tarefas do tipo *prove que...* ou *demonstre que...,* propostas aos alunos. Esta constatação nos levou aos trabalhos de Duval (1989), Almouloud (2003) e Arsac (1992) e nos fez refletir sobre a maneira pela qual autores de livros didáticos e professores poderiam propiciar ao aluno o contato com o ambiente das provas e demonstrações.

Segundo Duval (1989), a demonstração é um discurso especial que descansa sobre uma operação de substituição mais próxima de uma atitude de cálculo que de uma atitude de argumentação em interação social. Com base nisso, o pesquisador afirma que a aprendizagem de demonstração deve consistir primeiramente numa tomada de consciência da diferença entre o discurso praticado naturalmente e aquele praticado na demonstração em matemática. Essa tomada de consciência pode ser adquirida por meio de atividades que envolvam a articulação de dois ou mais registros e não pode ser vinculada a um conteúdo matemático específico (só geometria, por exemplo).

As idéias de Almouloud (2003) vão ao encontro às de Duval (1989) de modo que para Almouloud (2003) a compreensão operatória das definições e teoremas supõe que estes sejam vistos como regras de substituição.

Em nossa análise não constatamos a presença de tarefas propostas aos alunos que propiciassem a tomada de consciência do que é uma demonstração, bem como a percepção das regras de substituição que envolve esse discurso.

Arsac et al. (1992) consideram que para provar e/ou demonstrar, o alunos precisam apropriar-se de regras de debate cientifico e apresentam algumas delas:

- Um enunciado matemático é verdadeiro ou falso. É uma realidade matemática que nem sempre está presente no quotidiano do aluno.
- Um contra-exemplo é suficiente para invalidar um enunciado matemático.
- Para debater em matemática apoiamo-nos sobre propriedades e/ou definições aceitas pela comunidade matemática.
- Em matemática, não podemos decidir da validade de um enunciado pelo voto ou pela convicção da maioria das pessoas presentes em debate matemático.

Estas regras não são evidentes e simples a compreender pelos alunos. O professor precisa propor situações que proporcionam ao aluno as condições de sua apropriação. Os resultados de nossa análise sobre o uso de prova e demonstrações mostra que, exceto na tarefa TP3 proposta na coleção C3, nenhuma dessas regras foi utilizada na validação ou não dos enunciados propostos.

Consideramos que nossa pesquisa trouxe contribuições importantes para o estudo do ensino de provas e demonstrações em álgebra, visto que ainda não havia pesquisas brasileiras abordando essa temática. Porém nossas contribuições estão limitadas ao que os livros didáticos selecionados por nós mostraram a respeito do uso de provas e demonstrações no conteúdo algébrico *Conjuntos e Conjuntos Numéricos* abordado no primeiro ano do Ensino Médio.

Sugerimos para pesquisas posteriores um trabalho voltado a outros conteúdos algébricos abordados no Ensino Fundamental ou Médio. Além disso, recomendamos um estudo de como os professores abordam as provas e demonstrações no ensino de álgebra em sala de aula e também como os alunos aprendem essas noções. Estas são sugestões para trabalhos futuros que sigam essa mesma temática.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em matemática: registro de representação semiótica**, Papirus, São Paulo, 2003, p. 125-148.

ARSAC, G. L´origine de la démontration: essai d´épistémologie didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, França, vol.8, n.03, 1987. p. 267-312

ARSAC, G. et al. Initiation au raisonnement déductif au collège. Lyon: Presse Universitaire, França, 1992.

BALACHEFF, N. Preuve et démonstration em mathématiques au college. **Recherches en didactique des mathématiques**, França, vol.3.3, 1982. p. 261-304

______. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: **PIMM D. (ed.) Mathematics, Teachers and Children**. London: Hodder and Stoughton**,** 1988. p.316-230

______. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. **Les cahiers du laboratoire Leibniz,** Grenoble/França, n.109, 2004**.** Disponível em: http://www-leibniz.imag.fr/leibniz/LesCahiers/2004/Cahier109/CLLeib109.pdf. Acesso em 27 de julho de 2007.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Edgard Blücher. São Paulo, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

______. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática. Brasília: MEC, 2002.

______. PCN+ **Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.

______. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM 2006.** Brasília: MEC, 2004.

______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.

CARLOVICH, M. **A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do estado de São Paulo para o 3° e 4° ciclos do Ensino Fundamental**. 2005. 150p. Dissertação (Mestrado) - Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CHEVALLARD, Y. Conceitos fundamentais da didáctica: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: **BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas.** Lisboa, Instituto Piaget, 1996.

______. El análisis de lãs prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique das Mathématiques**. França, vol. 19, nº02, 1999. p. 221-226.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos.** Ciência Moderna. Rio de Janeiro, 2000.

CRUZ, E. S. **A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental: um estudo sob a ótica da organização praxeológica.** 2005. 93p. Dissertação (Mestrado) - Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DE VILLIERS, M. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica**. University of Durban, Westville, 2002.

DUVAL, R. L'organisation deductive du discours : Interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. **Annales de Ditactique el de Sciences Cognitives 2**, IREM de Strasbourg, 1989. p. 25-40.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.).

Aprendizagem em matemática: registro de representação semiótica, Papirus, São Paulo, 2003. p. 8-34.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. **BOLEMA**, Rio Claro, ano 15, n18, 2002.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Editora da UNICAMP. Campinas, 2004.

GOUVÊA, F. T. **Aprendendo e ensinando geometria com demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do Ensino Fundamental**. 1998. 256p. Dissertação (Mestrado) - Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MELLO, E. G. T. **Demonstração: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino de geometria**. 1999. 179p. Dissertação (Mestrado) - Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In: **GROUWS, D. A. Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan. 1992. p. 390-419.

PAIS, L. C. Transposição Didática In: **MACHADO, S. D. A. et al., Educação Matemática: Uma introdução.** Educ. São Paulo, 2002. p. 13-41.

PEDEMONTE, B. **What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation?** Anais do CERME III, 2003. Disponível em: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG4/TG4_ Pedemonte_cerme3.pdf. Acesso em 10 de dezembro de 2006.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re) significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática**. 2005. 388p. Tese (Doutorado) - Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PIRES, C. M. C. **Ensino de geometria no Brasil: uma análise com base em modelos de referência que colocam em relação à epistemologia e a didática da geometria.** Anais da VII Reunião de didática da matemática do Cone Sul. Águas de Lindóia. São Paulo, 2006. CD-ROM.

SANT'ANNA, A. S. **O que é um axioma**? Manole. São Paulo, 2003.

SANTOS, L. M. **Concepções do professor de matemática sobre o ensino de álgebra.** 2005. 111p. Dissertação (Mestrado) - Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: **COXFORD, A. F. & SHULTE, A. P. As idéias da álgebra.** Traduzido por Hygino H. Domingues. São Paulo. Atual, 1995. p. 01-08.

COLEÇÕES ANALISADAS

BIANCHINI, E. R.; PACCOLA, H. **Matemática**. Editora Moderna, São Paulo, 2004.

DANTE, L. R. **Matemática**. Editora Ática, São Paulo, 2003.

LONGEN, A. **Matemática**. Editora Nova Didática, São Paulo, 2004.

LONGEN, A. **Matemática: Uma Atividade Humana**. Base Editora, Curitiba, 2003.

PAIVA, M. R. **Matemática**. Editora Moderna, São Paulo, 2004

GOULART, M. C. **Matemática no Ensino Médio.** Editora Scipione, São Paulo, 2004.

GUELLI NETO, O. A. **Matemática**. Editora Ática, São Paulo, 2004.

IEZZI, G.; et al. **Matemática Ciência e Aplicações**. Editora Saraiva. São Paulo, 2004.

SILVA, C. X.; BARRETO FILHO, B. **Matemática Aula por Aula**. Editora FTD, São Paulo, 2004.

SMOLE, K. C. S.; VIEIRA, M. I. S.; KIYUKAWA, R. **Matemática**. Editora Saraiva, São Paulo, 2004.

ZAMPIROLO, M. J. C. V.; SCORDAMAGLIO, M. T.; CÂNDIDO, S. L. **Matemática**. Editora do Brasil, São Paulo, 2004.