PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

CHRISTIANE MOLINA CAMILO

GEOMETRIA NOS CURRÍCULOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE À LUZ DOS MODELOS TEÓRICOS DE JOSEP GASCÓN

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

CHRISTIANE MOLINA CAMILO

GEOMETRIA NOS CURRÍCULOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE À LUZ DOS MODELOS TEÓRICOS DE JOSEP GASCÓN

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires**.*

PUC/SP
2007

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura	Local e Data

Aos meus pais, Wilson Molina e Elizabeth Gonçalves Molina, pela formação e orientação que me proporcionaram para que eu pudesse atingir mais um objetivo em minha vida.

Ao meu marido Naum Camilo e nosso filho Kauan Molina Camilo pelo apoio demonstrado e aceitação da ausência momentânea que exigiu muitos sacrifícios, renúncia quase que total e uma grande carência em muitos momentos de nossas vidas.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que me ilumina em todos os momentos de minha existência.

À Profa. Dra. Célia Maria Carolino Pires, minha orientadora, por sua infinita dedicação, compreensão e acompanhamento nesta jornada desafiadora.

Ao Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni e ao Prof. Dr. Armando Traldi Júnior que aceitaram o convite para participar da banca examinadora.

À fiel amiga e mãe Elizabeth pelo eterno e inesgotável apoio, minha eterna gratidão.

Ao meu pai Wilson pela ajuda prestada no momento em que mais precisei.

Ao meu marido pela paciência, compreensão das ausências ocorridas neste momento de nossas vidas e pela imensurável ajuda.

Ao meu filho, que considero um presente divino e que, apesar de sua pouca idade, soube compreender dentro de suas possibilidades todos os momentos de "abandono" ou "ausência" que infelizmente foram inevitáveis, minha eterna gratidão.

Às minhas irmãs Patrícia e Viviane que demonstraram carinho, compreensão e apoio sempre que precisei durante esta jornada.

À amiga tão querida Isabel pelos desabafos, consolos, pela força e palavras sempre tão positivas e acolhedoras.

Aos queridos amigos Mônica e Dimas, companheiros fiéis de longa e incansável jornada pela Educação e pela Vida.

Às amigas Neusa, Mut e Joseli pela parceria e total apoio durante este percurso.

Aos demais amigos e familiares, que apesar de não mencioná-los, sou eternamente grata, pois contribuíram com uma palavra, um carinho, um abraço, enfim com um simples gesto que para mim foi essencial.

Aos professores do Mestrado Acadêmico.

Aos participantes desta pesquisa, especialmente àqueles que responderam aos questionários utilizados no estudo de caso, pela disponibilidade e pela atenção, sem os quais este trabalho não teria se concluído.

Àqueles que são ou foram meus alunos, meu eterno agradecimento.

Às escolas que colaboraram na realização desta pesquisa, em especial àquelas que permitiram a minha presença no universo do seu trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela bolsa de estudos concedida.

A Autora

Resumo

A presente pesquisa tem como objetivo analisar a trajetória das prescrições curriculares para o ensino de Geometria tomando por base os modelos teóricos denominados *Euclidianista, Quase-empirista e Construtivista* apresentados pelo professor e pesquisador Josep Gascón. Com esse estudo pretendemos responder as seguintes questões: Como os modelos teóricos denominados *Euclidianista*, *Quase-empirista* e *Construtivista* são identificados na trajetória particular do ensino de Geometria e qual a implicação disso para a organização curricular na Educação Básica? Analisando as prescrições curriculares para o ensino de Geometria hoje, qual a sua base e como estão sendo colocadas em prática na sala de aula? Para desenvolvermos este trabalho, inicialmente analisamos documentos curriculares *e* atividades geométricas propostas em alguns livros didáticos das décadas de 1930 até 1970 e atuais. Num segundo momento realizamos um estudo sobre como os currículos atuais estão sendo desenvolvidos em sala de aula, em turmas dos quatro anos finais do Ensino Fundamental, de duas escolas localizadas em São Bernardo do Campo e Guarulhos. Seis professores responderam a um questionário em que relataram o trabalho com Geometria que desenvolveram no ano de 2005. Complementamos esse estudo com a análise dos planos de ensino desses docentes, elaborados e desenvolvidos por eles no mesmo ano. Os resultados mostram que os modelos teóricos de Gascón podem ser identificados e provavelmente influenciaram o ensino da Geometria nas diferentes décadas analisadas. Nos documentos e livros constatamos a forte presença do *Euclidianismo* antes do Movimento Matemática Moderna; o surgimento de uma perspectiva *Quase-empirista* como a protagonizada pelo projeto “Geometria Experimental”, na década de 70 e que até hoje permanece nos currículos e a presença pouco perceptível de uma concepção *Construtivista* de ensino-aprendizagem de Geometria. Embora nos

Parâmetros Curriculares Nacionais existam indicações que permitem identificar uma perspectiva *Construtivista*, elas não estão explicitadas. Observamos que os docentes pesquisados ainda que façam referências a esse documento, adotam uma perspectiva *Quase-empirista* de ensino de Geometria.

Palavras-chave: Geometria, Espaço e Forma, Prescrições Curriculares e Matemática.

Abstract

The aim of the present work is to analyze the curricula prescription in the Geometry teaching nowadays, taking as a base theorical models such as Euclidianism, Almost-empiric and Construtivism made by teacher and researcher Josep Gascón. In this research, we aim to answer the following questions: How can the theorical models called Euclidianism, Almost-empiric and Construtivism be identified in the particular route of Geometry teaching and what is its implication to the curricula organization on Basic Teaching? Analyzing the curricula prescription to the teachings of Geometry nowadays, what is its base and how are they being worked effectively in the classroom? To have this work developed, a biographical and documental research was organized and analyzed through books which were used in the 1930's and the 1970's up to the present moment. On a second moment a study was made about how the present curricula is being developed in the classroom, in the final four years of the Elementary school, of two school located in the cities of São Bernardo do Campo and Guarulhos. Six teachers answered a questionnaire where they reported the work which was developed in Geometry in 2005. The study was complemented with the analysis of the planning documents produced by the teachers on the same year. The results show that the theorical models of Gascón can be identified and that probably influenced the teaching of Geometry in different analyzed decades. On documents and books a significant presence of Euclidianism was noticed even before The Moviment of Modern Mathematics; the emergence of an Almost-empiric feature as in the project “Experimental Geometry” in the 70's and that still nowadays remains in the curricula, and also the small presence of a Construtivist perspective in learning-teaching experience of Geometry. Even though there are indications of Construtivist perspective in the National Curricular Parameters, they are not

explicit. It is still observed that although teachers refer to these documents, an Almost-empiric feature in the teachings of Geometry is adopted.

Key-words: Geometry, “Space and shape”, Curricula Prescription and Mathematic.

Sumário

INTRODUÇÃO 13
APRESENTAÇÃO DA PESQUISA 13
1 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA E FORMULAÇÃO DAS QUESTÕES DE PESQUISA 14
2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 15
3 ESTRUTURA DO TEXTO 17

CAPÍTULO 1 19
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA 19
1.1 Introdução 19
1.2 Modelos Euclídeos ou Euclidianismo 20
1.3 Modelos Quase-empíricos 22
1.4 Modelos Construtivistas 24
1.5 Modelos Epistemológicos e Didáticos e a Gestão da aula de Geometria 26

CAPÍTULO 2 28
IDENTIFICAÇÃO DOS MODELOS TEÓRICOS NA ANÁLISE DE ALGUNS LIVROS DAS DÉCADAS DE 1930 ATÉ 1970 28
2.1 Livros da década de 1930 28
2.2 Livro da década de 1940 35
2.3 Livros da década de 1950 37
2.4 Livros da década de 1960 39
2.5 Livros da década de 1970 54

CAPÍTULO 3 61
OS MODELOS TEÓRICOS E SUA IDENTIFICAÇÃO EM DOCUMENTOS OFICIAIS, PRESCRIÇÕES CURRICULARES E PROJETOS 61
3.1 Guias Curriculares do Estado de São Paulo 61
3.1.1 Focalizando a proposta de Geometria nos Guias 64

3.2 Geometria Experimental 68
3.2.1 Analisando as atividades 69
3.3 Proposta Curricular para o ensino de Matemática 83
3.3.1 O tema Geometria 84
3.4 Experiências Matemáticas 92
3.4.1 As atividades geométricas 93

CAPÍTULO 4 113
UMA ANÁLISE DAS PRESCRIÇÕES CURRICULARES E LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS 113
4.1 Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental 113
4.1.1 O bloco de conteúdos “Espaço e Forma” 116
4.2 Identificação dos Modelos Teóricos na análise de alguns livros didáticos atuais 122

CAPÍTULO 5 145
UM ESTUDO SOBRE CURRÍCULOS ATUAIS EM DESENVOLVIMENTO NA SALA DE AULA, FOCALIZANDO O TEMA “ESPAÇO E FORMA” 145
5.1 Introdução 145
5.2 Composição do Questionário 147
5.3 Caracterização dos sujeitos de pesquisa 148
5.4 Plano referente à unidade da rede pública estadual 149
5.5 Plano referente à unidade da rede particular 151
5.6 Analisando os dados coletados 153

CAPÍTULO 6 159
CONSIDERAÇÕES FINAIS 159

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 168

ANEXO I i

ANEXO II iv

Introdução

APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

O presente trabalho insere-se no Projeto de pesquisa “Inovações Curriculares nos Ensinos Fundamental e Médio”, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Trata-se de um conjunto de pesquisas que têm a organização curricular dos Ensinos Fundamental e Médio como tema, incluindo análises sobre a trajetória da Matemática na organização curricular brasileira para essas etapas da escolaridade e as atuais propostas de ensino de Matemática.

Focaliza, portanto o processo de desenvolvimento curricular, as variáveis que intervêm em sua formulação e as mudanças que ocorrem nos currículos. Discute como as diretrizes veiculadas por documentos oficiais são traduzidas nos livros didáticos e investiga o “currículo como práxis”, identificando como são realizadas, na prática dos professores em sala de aula, as orientações dos currículos oficiais.

O presente estudo descreve os modelos denominados por Gascón como *Euclidianista, Quase-empirista e Construtivista*, procurando verificar as possíveis relações entre estes e as atividades de geometria propostas em alguns livros didáticos e propostas curriculares.

1 Delimitação do problema e formulação das questões de pesquisa

Contribuiu para a depreciação da Geometria o advento da Matemática Moderna, não que esta renovação tivesse o objetivo de excluir o ensino desse eixo, mas a apropriação das propostas é que gerou a marginalização sofrida.

G. Choquet (1973) apud Pires (2000, p. 13) faz um relato de sua estarrecedora observação do que acontecia na França em decorrência da reforma. Choquet foi um dos precursores do Movimento na Europa e não reconhecia na prática seu real propósito. A Geometria foi, segundo ele, desprivilegiada como conseqüência dessa interpretação reduzida do Movimento. Sobre este aspecto diz:

> "Em particular, um ataque contra a Geometria e contra os recursos da intuição: foi dito aos professores que seria lastimável que eles estudassem triângulos e que álgebra linear substituiria toda a velha geometria (...)."

No Brasil, a abordagem do Movimento não foi diferente do que pudemos notar no relato acima, pois seu marco deu-se de forma verticalizada já que partiu de discussões em Congressos Brasileiros do Ensino de Matemática, como descreve a autora, em livro já mencionado, a partir de 1955, migrando para os materiais de apoio didático, como se observa abaixo:

> "Veiculada principalmente nos livros didáticos, sem adequada preparação dos educadores nem suficiente discussão de seus propósitos, a Matemática Moderna surgiu entre nós como substituta definitiva da velha Matemática, com a qual parecia não manter relação alguma." (Pires, 2000, p. 31)

Em decorrência da deturpação involuntária ocorrida nesta época, manteve-se um tratamento insatisfatório do ensino de Geometria nas últimas décadas. Alguns autores brasileiros, como Pavanello (1993), defendem a importância desse ensino por relacionar-se diretamente às questões espaciais disseminadas em diversas áreas do conhecimento humano, como as artes, a bioquímica, a cirurgia, a arquitetura entre outras.

Essa grande preocupação com a ausência ou o abandono da Geometria impede que a discussão deixe de atuar sobre os modelos didáticos matemáticos, principalmente, neste caso, em que se pretende direcionar o estudo para o ensino da Geometria.

Um autor que se debruçou sobre a descrição dos modelos teóricos de referência no qual o presente estudo se norteia é Josep Gascón (2001), professor da Universidade Autônoma de Barcelona. Em seus trabalhos discute um modelo criado pela Didática da Matemática que tem como objetivo estudar a organização dos saberes matemáticos, que direcionará a base dessa pesquisa, voltando-se especificamente para a Geometria.

Na tentativa de evidenciar em nossa análise a perspectiva apresentada por Gascón a partir dos modelos teóricos, reuniremos as possíveis relações encontradas entre essas teorias, o material didático e alguns documentos oficiais.

Ao finalizarmos, pretendemos responder as seguintes questões de pesquisa:

- Como os modelos teóricos denominados *Euclidianista*, *Quase-empirista* e *Construtivista*, são identificados na trajetória particular do ensino de Geometria e qual a implicação disso para a organização curricular na Educação Básica?
- Analisando as prescrições curriculares para o ensino de Geometria hoje, qual a sua base e como estão sendo colocadas em prática na sala de aula?

2 Procedimentos Metodológicos

Para o desenvolvimento de nosso trabalho, inicialmente utilizamos a pesquisa bibliográfica, para análise de propostas curriculares e atividades geométricas propostas em alguns livros didáticos das décadas de 1930 até 1970 e atuais.

Segundo Fiorentini (2006, p. 102) a pesquisa bibliográfica é também chamada de *estudo documental* e realiza-se preferencialmente sobre documentação escrita. O autor destaca ainda que:

> “(...) os documentos para estudo apresentam-se estáveis no tempo e ricos como fonte de informação, pois incluem: filmes, fotografias, livros, propostas curriculares, provas (testes), pareceres, programas de TV, listas de conteúdos de ensino, planejamento, dissertações ou teses acadêmicas, diários pessoais, diários de classe, entre outros documentos”. (Fiorentini, 2006, p. 102-103)

Justifica que apesar desse tipo de pesquisa ser criticado pela não representatividade da amostra e pela subjetividade da análise, examinar o documento pode ser uma técnica útil se o pesquisador construir categorias que reflitam o propósito da análise.

Em nossa pesquisa, utilizamos uma categoria denominada *estudos tipicamente históricos* que "utilizam geralmente fontes primárias (textos impressos, manuscritos e outros documentos originais)”. (Fiorentini, 2006, p. 103).

Num segundo momento elaboramos um questionário com os professores que ministram aulas de Matemática para o Ensino Fundamental II de duas unidades escolares, uma da rede pública estadual localizada em São Bernardo do Campo, estado de São Paulo e outra da rede privada sediada em Guarulhos pertencente ao mesmo estado.

A elaboração do questionário foi composta por perguntas referentes ao trabalho desses professores realizado em Geometria no ano de 2005. O objetivo principal era o de verificar quais são as prescrições contempladas na dinâmica de sala de aula, em que estão baseadas e como são colocadas em prática.

O questionário foi proposto para quatro professores da rede estadual e quatro da rede particular, porém os sujeitos dessa pesquisa são compostos apenas por seis elementos, devido os professores da entidade privada de 7ª e 8ª séries não desenvolverem o conteúdo referente à Geometria em suas aulas de Matemática.

As perguntas foram distribuídas em dois blocos, o primeiro buscou os dados pessoais dos professores voltados para sua formação e o segundo tratou de doze questões que visavam um parecer referente ao trabalho feito pelos professores em Geometria no ano de 2005. O foco principal desse último bloco era a identificação das prescrições utilizadas pelos sujeitos na dinâmica da sala de aula, quais seus princípios norteadores e como foram colocadas em prática.

Complementamos nossa pesquisa com a análise dos planos de ensino referentes à disciplina Matemática no Ensino Fundamental II, elaborados no ano de 2005 pelos professores que compõe o quadro docente das escolas analisadas, com o objetivo de verificarmos a presença ou ausência da Geometria.

Ao finalizarmos as análises dos planos de ensino propostos para a área de Matemática no Ensino Fundamental II e observarmos as respostas pertencentes ao bloco 2 oferecidas pelos professores, buscamos responder algumas de nossas questões referentes às prescrições curriculares atuais para o ensino de Geometria e identificar os modelos teóricos na descrição do desenvolvimento didático geométrico.

3 Estrutura do texto

Para a organização de nosso trabalho, elegemos a seguinte ordenação de capítulos:

No capítulo 1 realiza-se a descrição e análise dos modelos teóricos e a relação entre a epistemologia e a didática como referenciais do trabalho para o ensino da Geometria. Como fonte de descrição para esses modelos, citamos Josep Gascón (2001, 2003) que estabelece essa relação em seus trabalhos, baseando-se em Lakatos. Denominados como *Euclidianista*, *Quase-empirista* e *Construtivista*, descreveremos esses modelos, procurando identificar suas características principais.

No capítulo 2, buscamos identificar os modelos teóricos na análise de alguns livros das décadas de 1930 até 1970. Selecionamos como material de pesquisa para a década de 1930, a coleção *Mathematica* dos autores Cecil Thiré, Mello e Souza e Euclides Roxo; para a de 1940, o livro *Matemática Ginasial*, de Miguel Feitosa e Walter Toledo Silva; de 1950, *Matemática* de Carlos Calioli e Nicolau D’Ambrosio; de 1960, *Matemática Curso Ginasial – 3ª Série* de Osvaldo

Sangiorgi e para 1970 os livros *Matemática 6*, *Matemática 8*, *Matemática Nova Série – 1º Grau – 6ª* e *7ª Séries* do último autor mencionado.

No terceiro capítulo, direcionamos nosso trabalho para documentos oficiais, prescrições curriculares e projetos que se destacaram por influenciar o período referente às décadas de 1970 a 1990, pois consideramos necessárias as intersecções desses materiais com os livros didáticos. Analisamos os *Guias Curriculares para o Ensino de 1º grau do Estado de São Paulo*, o *Projeto Geometria Experimental*, a *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática* e o *Projeto Experiências Matemáticas*, para posteriormente submetê-los à verificação dos elementos teóricos que os permeiam, procurando observar se há vestígios dos modelos com os quais Gascón trabalha.

No quarto capítulo propõe-se a discussão do enfoque dos *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental*, sobre o ensino da Geometria. Justificamos a análise desse documento separadamente dos outros por representar a atual prescrição curricular do Brasil. Complementamos o capítulo com a apreciação da coleção *Matemática para todos*, publicada em 2002, pelos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis com proposta pedagógica fundamentada nos mesmos princípios norteadores dos PCN.

Como um pequeno recorte do ensino de Geometria atualmente, baseado num questionário composto por 13 questões elaboradas com o intuito de verificar pistas que evidenciem a presença dos modelos teóricos, o capítulo 5 submete a análise das respostas dos professores como amostragem do encaminhamento do ensino e aprendizagem da disciplina, tanto no ensino público como no particular. Insere-se no capítulo a análise dos planos de ensino de nossos sujeitos de pesquisa referentes ao ano de 2005.

Nas Considerações Finais procurar-se-á relacionar as informações discutidas em cada capítulo a fim de evidenciar a incorporação dos modelos teóricos de Gascón nos documentos, nos materiais didáticos, nos PCN e na análise dos questionários e planos de ensino, levando-se a identificar de que forma tudo isso favorece a presença da Geometria em sala de aula.

Capítulo 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

1.1 Introdução

A fundamentação teórica de nossa pesquisa apóia-se no trabalho intitulado *"Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes"* desenvolvido pelo pesquisador e professor Josep Gascón[1].

Segundo Gascón (2003), a atividade matemática é o princípio gerador de questões que levam à investigação teórica da análise didática. Como resposta a essas questões, agrupam-se em *Organizações Matemáticas* (OM)[2] quatro componentes que estruturam a praxeologia matemática: tipos de problemas, técnicas, tecnologias e teorias. Em decorrência dessas OM's, surge a *Organização Didática* (OD)[3] composta pela "práxis" e pelo "logos". Aquela constituída por tarefas e técnicas didáticas e este que se compõe pelas tecnologias e teorias didáticas[4].

Antes de partir para a elaboração de uma OD, é importante considerar os modelos teóricos referenciais que permeiam esta organização.

---

[1] Departamento de Matemáticas, Universitat Autônoma de Barcelona, Edifício C, 08913 Bellaterra (Barcelona) Spain; Fax: 34 93 581 27 90; e-mail: gascon@mat.uab.es

[2] GÁSCON, J. "La necesidad de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas", Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 5, n. 2, pp. 11-37, 2003.

[3] Id., ibid., p. 16.

[4] Id., Ibid., p. 17.

Diferentes modelos teóricos podem ser tomados como referência para se investigar o processo de ensino-aprendizagem da Geometria no Brasil. Como fonte para descrição de tais modelos, cita-se Gascón (2001, 2003), cujos trabalhos estabelecem a relação entre a epistemologia da matemática e a didática da matemática.

Baseando-se em Lakatos, esse autor organiza as teorias epistemológicas dividindo-as inicialmente em *Teorias Euclídias* e *Teorias Quase-empíricas*. Para completar essa organização, Gascón (2003) analisa um terceiro grupo de teorias epistemológicas, as *Teorias Construtivistas*.

A característica principal dos modelos epistemológicos Euclidianos reside na trivialização do conhecimento matemático. Quando essa forma de interpretação do saber matemático se insere no ensino da Matemática, originam-se dois modelos docentes, o teoricismo e o tecnicismo, que apesar de diferentes têm em comum a trivialização do processo de ensino. Já os modelos Quase-empíricos têm como foco a destrivialização do conhecimento matemático, dando ênfase ao descobrimento no processo de ensino.

1.2 Modelos Euclídeos ou Euclidianismo

Esse modelo teórico conduz à prática docente um conhecimento que se direciona com ênfase na teoria e na técnica, trivializando a atividade matemática e posicionando o professor como controlador deste processo mecanizado. Gascón define o Euclidianismo como modelo docente que[5]:

> "(...) propõe que todo conhecimento matemático pode deduzir-se de um conjunto finito de proposições trivialmente verdadeiras (axiomas) que constam de termos perfeitamente conhecidos (termos primitivos)".

Toda a teoria apresentada nesse modelo é proposta, a partir de proposições finitas e verdadeiras que se fecham em si mesmas. Com relação à

[5] Tradução do texto "Incidência del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes" de Gascón. J., Revista Latinoamericana de Investigacion em Matemática Educativa, México, v. 4, n. 2, pp. 129-159, 2001, p. 131.

técnica podemos dizer que esta é condicionada pela teoria, desprivilegiando o desencadeamento de sua aplicação.

O ponto de convergência entre essas duas teorias é a cristalização do conhecimento matemático.

Para demonstrar a interferência dessas teorias no processo de ensino e aprendizagem, torna-se necessário utilizar as seguintes denominações: *teoricismo* e *tecnicismo*.

O *teoricismo* valoriza apenas a finalização da atividade matemática, sendo o conhecimento considerado como algo pronto e acabado. Nesse modelo, o momento de ensino mais destacado é o da apresentação da teoria, evidenciando sua sobreposição à prática e à resolução de problemas, impossibilitando concebê-lo como um processo de construção do conhecimento matemático.

Tem-se com a utilização da técnica apenas uma forma de se organizar ou sistematizar um raciocínio ancorado na teoria, ou seja, a técnica justifica-se não por ela mesma, mas alimenta-se dos princípios conceituais aprendidos.

Traduz-se no teoricismo o ensino e a aprendizagem da Matemática como ensino e aprendizagem de teorias. O mesmo mecanismo acontece no *tecnicismo*, pois neste modelo está implícito o ensino e aprendizagem matemática como ensino e aprendizagem de técnicas algorítmicas. Pode-se perceber que enquanto o teoricismo ressalta a "teoria", o tecnicismo faz o mesmo com a "técnica", ocorrendo a já mencionada trivialização do ensino em ambos.

A resolução dos problemas no tecnicismo tem como principal objetivo trabalhar com os que propiciem a escolha de técnicas adequadas, visando à construção de estratégias para a resolução.

Observando-se o aluno mediante esses modelos, Gascón (2003) interpreta-os da seguinte forma: o teoricismo considera o aluno como uma "caixa vazia" e o tecnicismo o vê como um "autômato", cuja melhora está associada ao domínio das técnicas, sistematizando-as. Para tanto, as duas teorias consideram o processo de ensino como algo mecânico e totalmente controlável pelo professor.

Pelas características evidenciadas dos modelos acima descritos, estes recebem a denominação citada por Gascón (2001) de *Modelos Clássicos*.

1.3 Modelos Quase-empíricos

Os *Modelos Quase-empíricos* surgem como contraposição aos *Modelos Clássicos*. Com essa nova proposta evidencia-se um ponto de inflexão da epistemologia matemática a partir da década de setenta, em decorrência dos trabalhos desenvolvidos por Imre Lakatos, direcionados para as ciências experimentais.

Lakatos (1978a, pp. 47) apud Gascón (2001, p. 138) apresenta esta contraposição da seguinte forma[6]:

> "(...) se chamamos *enunciados básicos* aos enunciados de um sistema dedutivo aos que se insere inicialmente valores de verdade, então *um sistema é euclídeo se é a clausura dedutiva dos enunciados básicos que se assumem como verdadeiros. Em caso contrário, é quase-empírico.*
>
> Pode afirmar-se que uma teoria euclídea é *"verdadeira"* no sentido de que está *"provada"* pelos enunciados básicos verdadeiros (axiomas). Ao contrário, de uma teoria quase-empírica pode-se dizer, no máximo, que está "*bem alicerçada*", porém sem deixar nunca de ser *conjectural*; de fato nela os enunciados básicos verdadeiros (que são os axiomas) são simplesmente "*explicados*" pelo resto do sistema no sentido de que formam um todo coerente e não contraditório".

Segundo Gascón (2001, p. 138) esta denominação *Quase-empírica* é justificada pela seguinte propriedade[7]:

> "Se utilizarmos a noção de teoria matemática informal, podemos dizer que o fato de que a matemática seja quase-empírica significa que toda teoria matemática axiomático-formal deve ser considerada como a formalização de alguma teoria matemática informal, pela qual se aceita a possibilidade de que existam distorções *heurísticas* de uma teoria matemática formal".

[6] Id., Ibid., p. 138.
[7] Id., Ibid., p. 138.

Os modelos Quase-empíricos levam à destrivialização do conhecimento matemático, destacando a descoberta como fundamento do processo de aprendizado.

Com esses modelos, o problema epistemológico sofre uma reformulação que se direciona para questões preocupadas com as respostas sobre a lógica do conhecimento matemático e com o estabelecimento de teorias. O desenvolvimento da teoria matemática é concebido de forma muito diferente na teoria quase-empírica, pois na euclídea este se reduz na busca de um método de decisão para elaboração de teoremas, ou seja, um método de algoritmização, enquanto que na quase-empírica enfatizam-se procedimentos não algorítmicos como conjecturar, contrastar, refutar, buscar contra-exemplos, etc.

Para o processo de ensino e aprendizagem, Gascón (2001) utiliza para esses modelos as seguintes denominações: *modernismo e procedimentalismo*.

O modernismo tem seu surgimento vinculado a uma reação das limitações causadas pelos modelos clássicos anteriormente citados e denominados teoricistas e tecnicistas.

Nele, a atividade matemática é identificada com a exploração de problemas não triviais e o destaque está sempre direcionado para o momento exploratório da atividade.

O modernismo identifica "'ensinar' e 'aprender' matemática como *ensinar e aprender esta atividade exploratória, livre e criativa, de problemas não triviais*" (Gascón, 2001, p. 140).

Esse modelo considera o processo de aprendizagem como um processo de descobrimento indutivo e autônomo, destacando que a exploração deve ser desvinculada de teorias e técnicas, para que seja a mais criativa, livre, não repetitiva e original.

Gascón (2001, p. 141) menciona que "teoricismo, tecnicismo e modernismo constituem *modelos docentes extremamente reducionistas*". Justifica este reducionismo pelo destaque dado a uma dimensão única da atividade deixando as demais, fato gerador de um desconhecimento das relações funcionais entre elas, impossibilitando a interligação em um único processo em que se relacionem e complementem.

Porém, o modernismo é considerado o marco da destrivialização do conhecimento matemático, sendo apenas complementado e melhorado pelo *procedimentalismo* "(...) que situa como principal objetivo do processo didático o *domínio de sistemas estruturados de técnicas heurísticas* (no sentido de não algorítmicas)" (Gascón, 2001, p. 142).

Este novo modelo relaciona na atividade matemática o momento exploratório com o trabalho direcionado para a técnica, complementando de certa forma o tecnicismo e reagindo com o modernismo que não limita a classe dos problemas utilizados, isolados uns dos outros, explorando-os descontroladamente.

O procedimentalismo é o responsável pela ruptura do isolamento dos problemas gerado tanto pelos modelos clássicos, que encerram os problemas em classes algorítmicas independentes como pelo modelo modernista que impede o agrupamento dos problemas em classes, associados pelas suas técnicas, para garantia de uma exploração livre e criativa.

1.4 Modelos Construtivistas

Para melhor compreensão do marco desse novo modelo, que empiricamente baseia a epistemologia no desenvolvimento psicogenético, citaremos um resumo realizado por Gascón (2001, p. 143) no qual se refere às primeiras etapas da reconstrução da evolução da epistemologia da matemática:

> "Durante a primeira etapa - *o euclidianismo* – teríamos uma epistemologia sem nenhuma *base empírica* que assumia, a priori, o ideal da *trivialização do conhecimento matemático* assim como a irrelevância do processo de descobrimento para justificar a validade das teorias matemáticas. Neste sentido podemos considerar a epistemologia euclídea como uma parte da filosofia.
>
> Na segunda etapa (a dos modelos quase-empíricos) se tomam os dados que proporciona a história da ciência (em particular, a da matemática) como a base empírica da epistemologia. Entretanto, apesar de coincidir neste ponto, se produz uma grande dispersão

> (que chega a ser aberta discrepância) entre os diversos autores citados (Popper, Lakatos, Kuhn, Feyerabend, Toulmin) quando tentam descrever os mecanismos do desenvolvimento do conhecimento científico. Uma primeira conjectura para explicar esta falta de acordo é a insuficiência de dados históricos (proporcionados pela história da ciência) como base empírica da epistemologia. Esta presente carência é, precisamente, um dos pontos de partida da *epistemologia construtivista* de Piaget (1972-1975), que culmina em Piaget e Garcia (1982)".

Essa discrepância é o ponto de partida da epistemologia construtivista e está centrada na descoberta dos mecanismos que conduzem o desencadeamento do conhecimento científico. Tal epistemologia privilegia na abordagem do problema epistemológico a utilização de uma base empírica aliada à história da ciência e ao desenvolvimento psicogenético.

Gascón (2001) denomina este novo modelo como *Construtivista* ou *Construtivismo*, que reformula e direciona o problema epistemológico para os mecanismos do desenvolvimento do conhecimento matemático.

Segundo Gascón (2003, p. 28), o construtivismo identifica "'ensinar matemática' como possibilidade de que os estudantes 'construam' o conhecimento matemático".

Para análise desse modelo dependente da epistemologia construtivista, Gascón (2001, p. 146) utiliza duas denominações que se relacionam parcialmente, o *Construtivismo Psicológico* e o *Construtivismo Matemático*.

No Construtivismo Psicológico, a resolução de problemas tem como objetivo a construção de novos conhecimentos. Diferencia-se dos modelos clássicos e do modernismo, por relacionar diferentes dimensões da atividade matemática, associando o momento exploratório com o tecnológico-teórico, porém este modelo ainda desvaloriza a técnica e a resolução de problemas.

O Construtivismo Matemático, que tem sua gênese nos conhecimentos mediante a modelização, interpreta[8]:

> "(...) 'aprender matemáticas' como um processo de construção de conhecimentos matemáticos (relativos a um sistema matemático

[8] Id., Ibid., p. 148.

> ou extramatemático) que se leva a cabo mediante a utilização de um modelo matemático correspondente ao referido problema".

A modelização matemática simboliza o auge da contextualização das atividades de resolução de problemas. Segundo Gascón (2001, p. 150), "o objetivo da atividade matemática e, portanto, o do ensino da matemática é a *obtenção de conhecimentos relativos a um sistema modelizado* que, em princípio, pode ser tanto matemático como extramatemático".

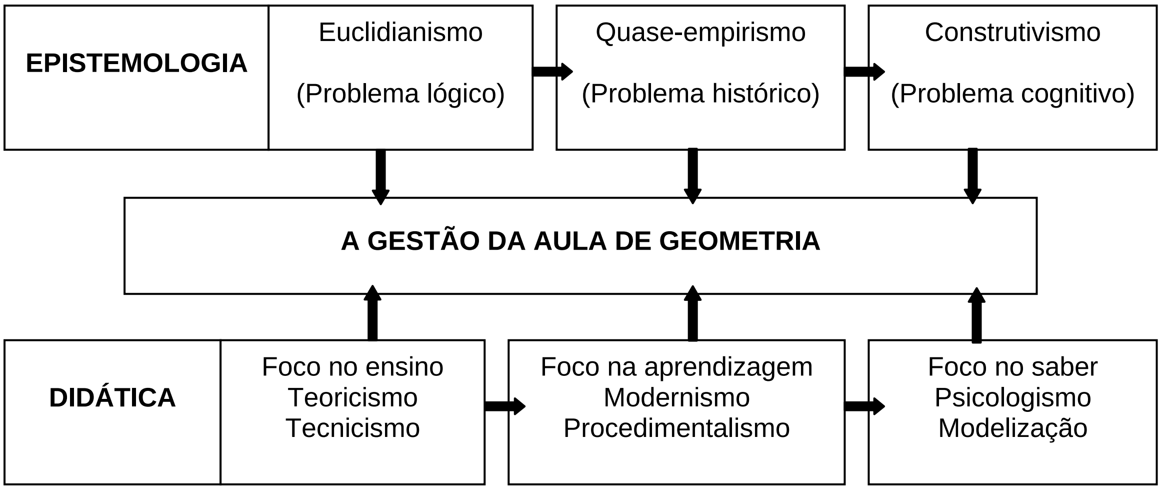
O modelizacionismo interpreta a atividade da mesma forma que o construtivismo psicológico, como construção de novos conhecimentos, porém com o diferencial de aprofundá-la, nesta construção, em sistemas concretos e na elaboração de um modelo matemático, aperfeiçoando-o. As limitações desse modelo, mais uma vez estão direcionadas para o desenvolvimento das técnicas na atividade matemática.

1.5 Modelos Epistemológicos e Didáticos e a Gestão da aula de Geometria

Em seu trabalho *"Ensino de Geometria no Brasil: uma análise com base em modelos de referência que colocam em relação à epistemologia e a didática da Geometria",* Pires (2006) refere-se ao modelo de Gascón (2001) e destaca que a análise dos modelos teóricos de referência é muito importante:

> "(...) pelo fato de que modelos didáticos evoluem a partir da gênese de problemas e das formas de solução que se elege para resolvê-los. Ou seja, Gascón chama a atenção para a relação entre a epistemologia da Geometria e a didática da Geometria".

A autora comenta um esquema em que aparecem as interferências tanto de modelos epistemológicos como de modelos didáticos na gestão da aula de Geometria, apresentado na seqüência:



Referindo-se a esquemas apresentados por Villella (2001,a) apud Pires (2006), a autora ressalta que a escolha de um dos modelos teóricos de Gascón pode configurar situações de ensino peculiares que serão descritas a seguir[9]:

- No Modelo *Euclidianista* o professor “usa o problema como controle das aprendizagens adquiridas pelos alunos”, o aluno “deve aprender o conteúdo, suas relações e seus fundamentos” e no saber ”predomina o caráter conceitual”.
- No Modelo *Quase-empirista* o professor “usa o problema como motivo para satisfazer as inquietações dos alunos”, o aluno “seu interesse é medido pela sua participação e desempenho nas seqüências apresentadas” e no saber “predomina o caráter atitudinal”.
- No Modelo *Construtivista* o professor “usa o problema como meio para aproximar o aluno do saber matemático”, o aluno “importa como se relaciona com o saber” e no saber “predomina o caráter procedimental".

[9] PIRES, Célia Maria Carolino. “Ensino de Geometria no Brasil: uma análise com base em modelos de referência que colocam em relação à epistemologia e a didática da Geometria”, Anais da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil (08 a 11 de Outubro de 2006). Painel nº 2. CD ROM.

Capítulo 2

IDENTIFICAÇÃO DOS MODELOS TEÓRICOS NA ANÁLISE DE ALGUNS LIVROS DAS DÉCADAS DE 1930 ATÉ 1970

2.1 Livros da década de 1930

A opção pela escolha da análise iniciar-se pela década de 1930 justifica-se pelas mudanças curriculares desencadeadas pela Reforma Francisco Campos, ocorridas em 1931, que repercutiram nos programas do curso fundamental do ensino secundário e trouxeram alterações, abaixo apontadas por Miorim (2005, p.03), defendidas pelo primeiro movimento modernizador do ensino de Matemática:

> "(...) a eliminação de 'assuntos de interesse puramente formalístico', de 'processos de cálculos desprovidos de interesse didático', a introdução do conceito de função, das noções do cálculo infinitesimal, a proposta de descompartimentalização das várias áreas da matemática e a ênfase na importância das aplicações práticas".

Nos livros didáticos, essas mudanças também provocaram repercussão, gerando alterações em relação aos livros anteriormente publicados.

Considerando esses aspectos, optou-se por analisar a coleção *Mathematica* dos autores Cecil Thiré e Mello e Souza, reunindo-se a estes num segundo momento mais um autor, Euclides Roxo[10].

[10] Responsável pelos programas de Matemática da Reforma 'Francisco Campos' e participante ativo do grupo encarregado de elaborar os programas de Matemática, em 1942, na Reforma 'Gustavo Capanema'. In: Valente, 2005, p. 90.

Como proposta, os autores apresentam a Matemática dividida em quatro segmentos direcionados para Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria.

Nessa coleção, percebemos que a linguagem utilizada nos textos procura aproximar-se do leitor e ao mesmo tempo romper o formalismo com que a Matemática era tratada até então.

Analisaremos apenas o segmento direcionado para a Geometria, que é o objeto desse trabalho e nele escolheremos a abordagem de um conteúdo para que possamos identificar o modelo teórico que o permeia.

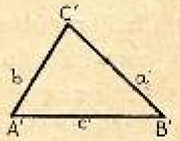
Para iniciarmos, selecionamos no livro do 2º ano o Capítulo V, intitulado "Triângulos". Primeiramente, verificamos a definição oferecida pelos autores sobre Igualdade de dois Triângulos, enunciada da seguinte forma: "*Dois triângulos são iguaes quando coincidem por superposição*" (1931, p. 54-55), justificam que apenas serão estudados os casos de igualdade que são de aplicações freqüentes na prática.

Thiré e Souza elegem como 1º caso de igualdade de triângulos, o seguinte: *"Dois triângulos são iguais quando tiverem um lado igual adjacente a ângulos respectivamente iguaes"*, para verificarmos sua demonstração segue fac-símile da página referida.

Fac-símile do livro *Matemática - 2º ano*, Cécil Thiré e Mello e Souza. Livraria Francisco Alves. Rio de Janeiro, 1931 - 1ª. Edição, p. 55.

— 55 —

Vamos suppor que collocamos o triangulo $A'B'C'$ sobre ABC.



Se esses triangulos forem iguaes o triangulo $A'B'C'$ irá coincidir com ABC.

Quando dois triangulos são iguaes os seus seis elementos são respectivamente iguaes.

As condições para que dois triangulos sejam iguaes constituem os *casos de igualdade* de triangulos.

Estudaremos apenas os casos de igualdade que são de applicação frequente na pratica.

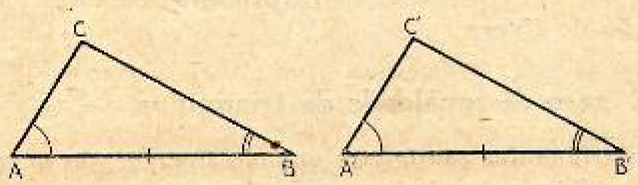
13 — 1º caso de igualdade de triangulos.

Dois triangulos são iguaes quando tiverem um lado igual adjacente a angulos respectivamente iguaes.

Sejam os triangulos ABC e $A'B'C'$.

Supponhamos que o lado AB do primeiro seja igual ao lado $A'B'$ do segundo; ainda mais:

$$\text{ang. } A = \text{ang. } A'$$
$$\text{ang. } B = \text{ang. } B'.$$



Vamos demonstrar que esses dois triangulos são iguaes.

Colloquemos o triangulo $A'B'C'$ sobre ABC de modo que o lado $A'B'$ coincida com seu igual AB.

Como os angulos A e A'são iguaes o lado $A'C'$ cairá sobre o lado AC; por causa da igualdade dos angulos B e B' o lado $B'C'$ cairá sobre BC.

O vertice C' devendo ficar simultaneamente sobre AC e sobre BC coincidirá com o vertice C.

Os dois triangulos ABC e $A'B'C'$ coincidem. Logo são iguaes.

Pode-se observar a preocupação dos autores com a demonstração, sendo a explicação realizada passo a passo, com rigor na linguagem matemática utilizada.

Percebemos que direcionam a demonstração por um viés experimental: "*Colloquemos o triângulo A'B'C' sobre ABC de modo que o lado A'B' coincida com seu igual AB*". O fato de utilizarem o verbo no imperativo destaca a participação do leitor na construção da verificação do que se afirma.

Nas demonstrações do 2º caso *"Dois triângulos são iguaes quando tiverem um ângulo igual compreendido entre lados respectivamente iguaes"* e do 3º caso *"Dois triângulos são iguaes quando tiverem os três lados respectivamente iguaes"*, utilizam o mesmo procedimento, que é o de sobreposição dos triângulos como recurso para a demonstração, mantendo a mesma preocupação e rigor com a linguagem matemática. Pelo fato de a estrutura ter sido mantida, não foram anexadas as digitalizações do 2º e 3º casos de igualdade.

Em 1936 foi lançada uma 3ª edição do 3º ano, que traz algumas mudanças referentes ao título *Curso de Matemática* e à inserção de mais um autor, Euclides Roxo.

Observamos que no livro por nós acima analisado (1931), o conteúdo abordado é denominado como "Igualdade de Triângulos", porém na edição de 1936, foi suprimido e substituído pela nomenclatura "Congruência de Triângulos".

Nas demonstrações dos casos de Congruência de Triângulos, os autores utilizam à mesma estrutura e ordem dos casos anteriormente mencionados na Igualdade de Triângulos.

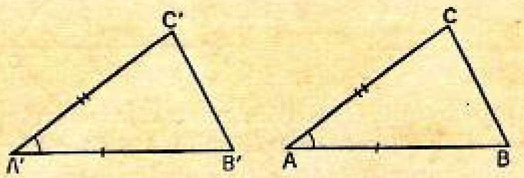
Para constatarmos esta permanência, segue fac-símile da demonstração do 2º caso de Congruência de Triângulos que enuncia: *"Dois triângulos são congruentes quando têm um ângulo igual formado por dois lados respectivamente iguais"* (1936, p. 234).

Fac-símile do livro *Curso de Matemática – 3º ano*, de Euclides Roxo, Hildebrando Cécil Thiré e Mello e Souza. Livraria Francisco Alves. Rio de Janeiro e Belo Horizonte, 1936 - 3ª. Edição, p. 234.

7 — Segundo caso de congruência de triângulos.

Dois triângulos são cogruentes quando têm um ângulo igual formado por dois lados respectivamente iguais.

Sejam ABC e A'B'C' dois triângulos. Admitamos, por hipótese, que o ângulo A é igual ao ângulo A' e que o lado AB é igual ao lado $A'B'$ e que o lado AC é igual ao lado $A'C'$.



Temos: $\wedge A = \wedge A'$
$AB = A'B'$
$AC = A'C'$

Podemos demonstrar que êsse triângulos são congruentes.

Com efeito. Coloquemos o triângulo ABC sôbre o triângulo $A'B'C'$ de modo que o ângulo A' coincida com o seu igual A, ficando o lado $A'B'$ sôbre o lado AB e o lado $A'C'$ sôbre o lado AC.

Da coincidência dos vértices B' e B e dos vértices C e C' resultará a coincidência dos lados $B'C'$ e BC. Logo, os triângulos coincidem e são, portanto, congruentes.

8 — Observação.

Um triângulo fica determinado quando dêle conhecemos um ângulo e os dois lados que formam êsse ângulo.

9 — Exercício.

Demonstrar que, si dois segmentos se dividem mutuamente ao meio, os segmentos que ligam extremidades distintas são iguais.

10 — Propriedade do triângulo isósceles.

Em um triângulo isósceles, aos lados iguais se opõem ângulos iguais.

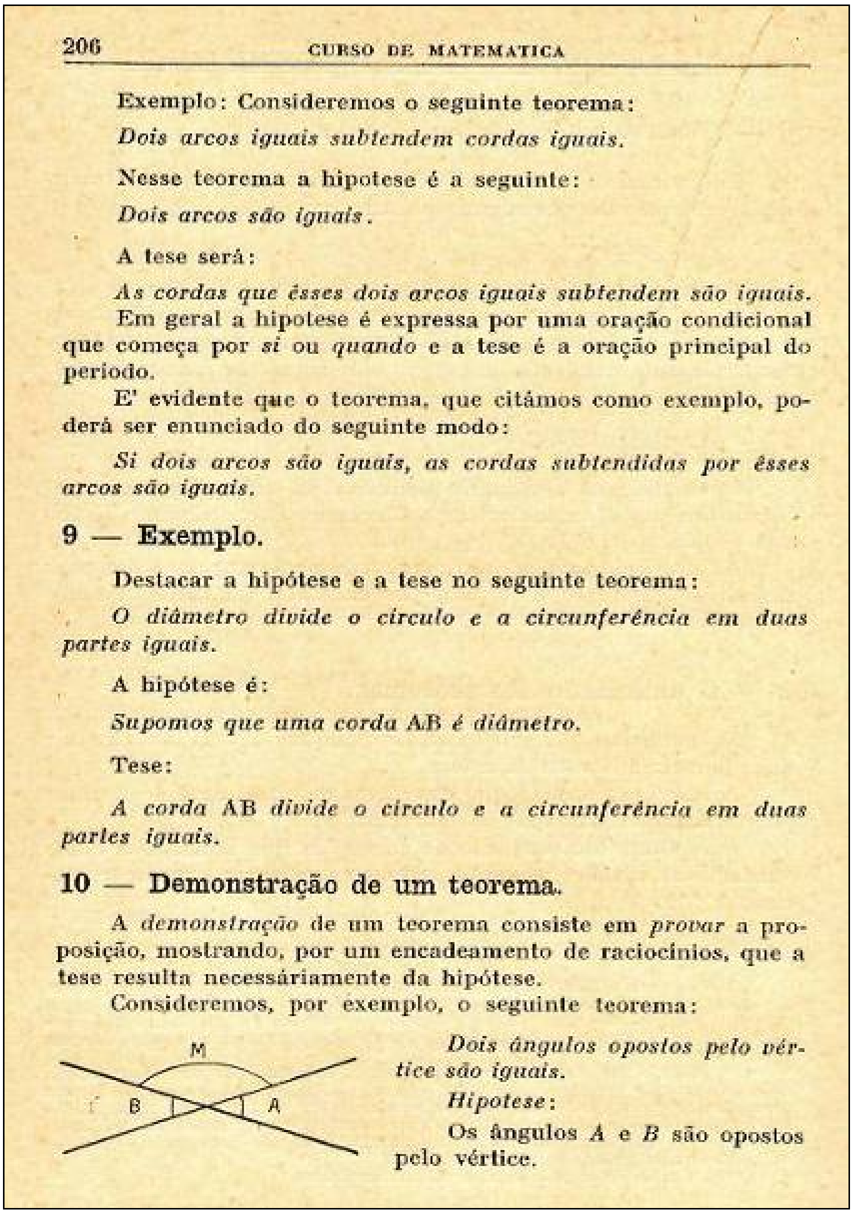
Percebemos apenas que, apesar da demonstração estar novamente direcionada para a sobreposição, existe agora uma mudança na nomenclatura, pois não mais utilizam o termo “suposição” e sim “hipótese”. Nota-se um aprimoramento da linguagem matemática em função da substituição efetuada dos termos acima citados.

Ainda neste livro, os autores definem “Demonstração de um teorema” da seguinte maneira:

> “A demonstração de um teorema consiste em provar a proposição, mostrando, por um encadeamento de raciocínios, que a tese resulta necessariamente da hipótese”. (1936, p. 206)

Para exemplificarmos a demonstração de um **teorema** desta época, segue fac-símile: *“Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais”* (1936, p. 206-207).

Fac-símile do livro *Curso de Matemática*, de Euclides Roxo, Cecil Thiré e Mello e Souza do 3º ano, da Livraria Francisco Alves São Paulo, Rio de Janeiro e Belo Horizonte, 1936 - 3ª. Edição, p. 206-207.



206 CURSO DE MATEMATICA

Exemplo: Consideremos o seguinte teorema:

Dois arcos iguais subtendem cordas iguais.

Nesse teorema a hipotese é a seguinte:

Dois arcos são iguais.

A tese será:

As cordas que êsses dois arcos iguais subtendem são iguais.

Em geral a hipotese é expressa por uma oração condicional que começa por *si* ou *quando* e a tese é a oração principal do período.

E' evidente que o teorema, que citámos como exemplo, poderá ser enunciado do seguinte modo:

Si dois arcos são iguais, as cordas subtendidas por êsses arcos são iguais.

9 — Exemplo.

Destacar a hipótese e a tese no seguinte teorema:

O diâmetro divide o circulo e a circunferência em duas partes iguais.

A hipótese é:

Supomos que uma corda AB é diâmetro.

Tese:

A corda AB divide o circulo e a circunferência em duas partes iguais.

10 — Demonstração de um teorema.

A *demonstração* de um teorema consiste em *provar* a proposição, mostrando, por um encadeamento de raciocínios, que a tese resulta necessáriamente da hipótese.

Consideremos, por exemplo, o seguinte teorema:

Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Hipotese:

Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são opostos pelo vértice.

CONJUNTO DE PROPOSIÇÕES FUNDAMENTAIS, ETC. 207

Tese:

Esses ângulos são iguais.

Demonstração:

Seja M o ângulo adjacente aos ângulos A e B.

Os ângulos A e M são suplementares, pois são ângulos adjacentes cujos lados exteriores estão em linha reta. Temos, pois:

$$A + M = 2 \text{ retos} \qquad (1)$$

Pela mesma razão os ângulos B e M são suplementares:

$$B + M = 2 \text{ retos} \qquad (2)$$

Da relação (1) tiramos:

$$A = 2 \text{ retos} - M$$

Da relação (2) tiramos:

$$B = 2 \text{ retos} - M$$

Como os ângulos A e B são iguais a 2 *retos* — M, podemos escrever, em virtude de um axioma (*):

$$A = B$$

Conclusão:

Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

11 — Observação.

Não é possivel fixar um método geral para a demonstração de todos os teoremas de Geometria.

Veremos, nos capítulos seguintes, as várias formas de demonstração (**) entre as quais faremos destacar a *demonstração pela redução ao absurdo.*

12 — Corolário.

Corolário é uma consequencia imediata de um teorema:

Exemplo:

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

(*) Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.

(**) Os métodos de demonstração podem ser divididos em dois grandes grupos: *métodos gerais* e *métodos particulares*. Os métodos gerais são a *análise* e a *síntese*.

Logo após a demonstração, os autores observam que não é possível fixar um método geral para a demonstração de todos os teoremas em Geometria e que nos próximos capítulos serão vistas as várias formas de demonstração entre as quais destacarão a "*demonstração pela redução ao absurdo*".

É interessante notar que sempre ao final de cada capítulo desse livro é proposta uma leitura complementar, a seguir transcrevemos uma delas denominada *"As demonstrações Matemáticas"*, de Amoroso Costa:

> "Demonstrar uma proposição é deduzi-la, aplicando os princípios da lógica formal, de outras proposições já admitidas. A demonstração, têm por fim estabelecer uma cadeia entre os postulados e os teoremas, mediante um cálculo do qual se exclue qualquer arbitrariedade." (1936, p. 219)

Torna-se possível identificar pela análise por nós realizada nos livros de Thiré, Souza e Roxo da década de 1930, a presença do *Euclidianismo*, modelo segundo o qual todo o conhecimento pode deduzir-se de um conjunto finito de proposições verdadeiras (os axiomas), cujas regras lógicas de dedução permitem chegar destes aos teoremas.

2.2 Livro da década de 1940

Segundo Pires (2006), uma característica que é evidente nos livros desse período é a grande ênfase na exploração de áreas e volumes. Uma das hipóteses que se levantou sobre estes destaques pode relacionar-se à utilização de fórmulas para o cálculo de tais conteúdos.

Para constatarmos essa característica, observamos no livro *Matemática Ginasial*, de Miguel Feitosa e Walter Toledo Silva[11], a definição de área do losango, feita na forma de receituário, como mostra o exemplo abaixo:

> "Área do losango: O losango é um paralelogramo e, por conseguinte, acha-se a área de um losango do mesmo modo pelo qual se acha a área de qualquer paralelogramo. Existe, entretanto, um segundo processo de se calcular a área do losango. Esse processo consiste em fazer o produto das medidas das diagonais e dividir o resultado por dois".

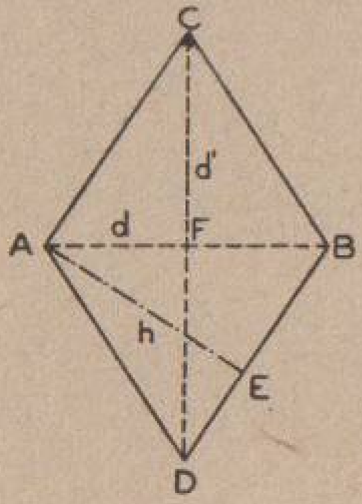
A fim de demonstrar a apresentação da área do losango acima mencionada, com sua respectiva fórmula, segue fac-símile de um livro cuja publicação marca exatamente a metade da década de 1940.

[11] Publicação da Editora Renascença S.A. São Paulo, 1945.

Fac-símile do livro *Matemática Ginasial*, de Miguel Feitosa e Walter Toledo Silva. Editora Renascença S.A. São Paulo, 1945, p. 21.

Área de um losango

O losango (Fig. 11) é um paralelogramo, e por conseguinte acha-se a área de um losango do mesmo modo pelo qual se acha a área de qualquer outro paralelogramo.



—FIG. 11—

Existe, entretanto, um segundo processo de se calcular a área do losango. Êste processo consiste em fazer o produto das medidas das diagonais e dividir o resultado por dois. Um losango cujas diagonais tenham por medida 4 cm e 6 cm terá área:

$$A = \frac{4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}}{2}$$

$$A = \frac{24 \text{ cm}^2}{2}$$

$$A = 12 \text{ cm}^2$$

FÓRMULA: Se as medidas das diagonais forem indicadas respectivamente por d e d′ a área do losango será dada pela fórmula:

$$A = \frac{d \times d'}{2}$$

Partindo dessa breve análise e considerando a característica evidenciada por Pires (2006), percebe-se ainda a permanência de uma perspectiva *Tecnicista*.

2.3 Livros da década de 1950

Na década de 1950, como Miorim (2005, p. 7) descreve, os livros didáticos dividiam-se em dois grupos básicos: os atualizados de acordo com a Portaria Ministerial nº 966/1951 e aqueles de anos anteriores que ainda eram reeditados e utilizados. Para o primeiro grupo destacam-se autores como: Ary Quintella, Osvaldo Sangiorgi, Jairo Bezerra entre outros; e no segundo grupo mantém-se Trajano, Cecil Thiré e Mello e Souza e Jácomo Stávale.

Para a autora, a convivência desses dois grupos "(...) parece apontar para a existência de uma certa estabilidade da matemática escolar, apesar das reformas e mudanças oficiais."[12]

De acordo com essas apreciações, nota-se a permanência do modelo *Euclídeo*.

A arbitrariedade na escolha do material analisado pode reduzir o foco de observação, pois não é nossa proposta exaurir a busca por "todos" os autores das décadas analisadas. Isso nos força a considerar que outros autores pudessem trabalhar com modelos teóricos diferentes do *Euclidianista*.

Partindo dessa observação, Pires (2006) na análise do livro *Matemática*, de Carlos Calioli e Nicolau D'Ambrosio[13], de 1956, observa o ensino da Geometria "(...) marcado pelo apelo à intuição, já a partir de sua denominação Geometria intuitiva". Com o exemplo a seguir, a autora ilustra esse apelo:

> "Suponhamos um sólido geométrico esmaltado de branco. A parte do sólido que recebeu a camada de esmalte, que pode ser por

---

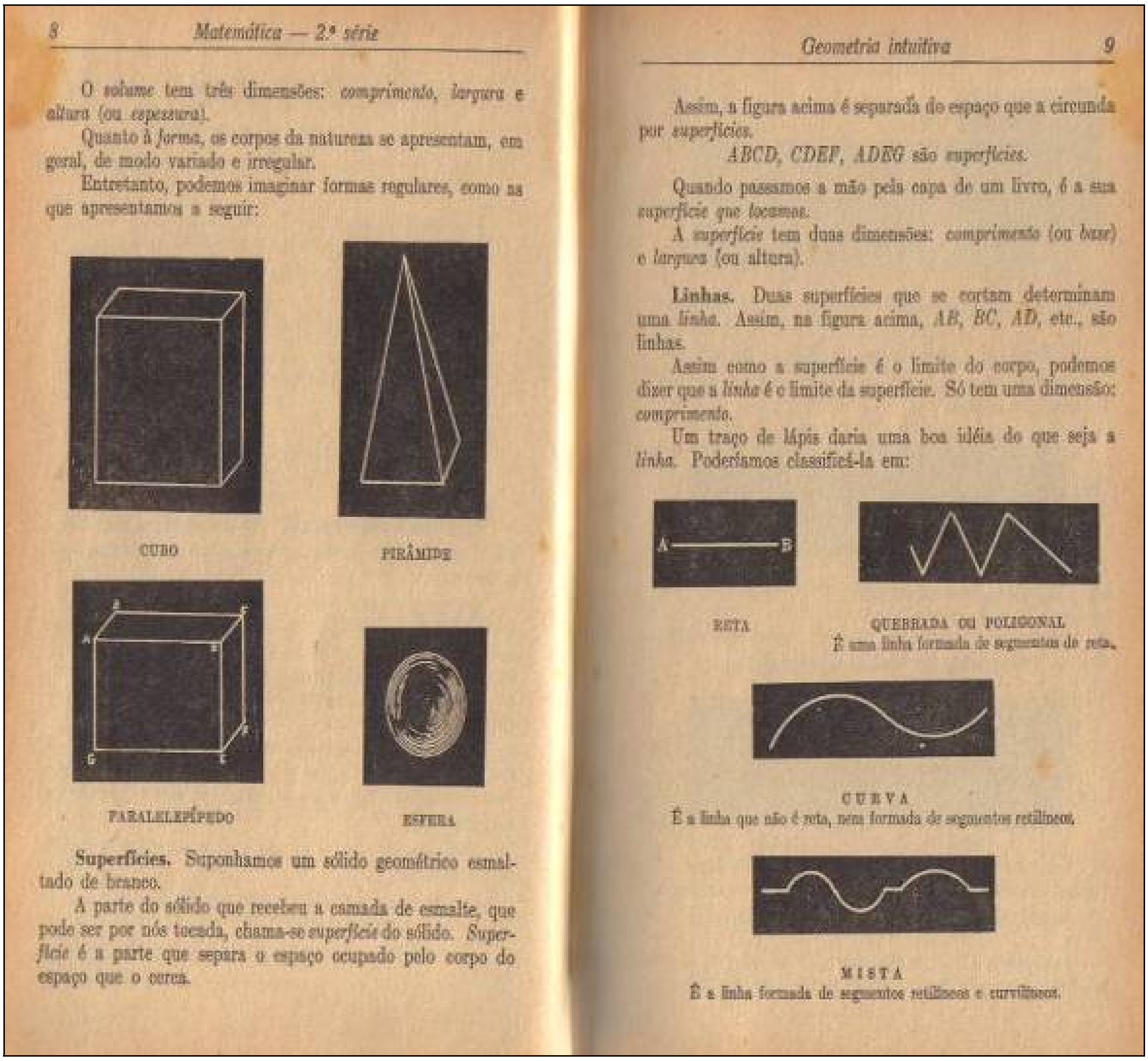
[12] MIORIM, Maria Ângela. Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. In: V CIBEM – CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2005, 17 a 22 de julho, Porto, p. 7. Disponível em: http://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&lr=&q=V+CIBEM+ANAIS&btnG=Pesquisar&lr=. Acesso em: 29 maio 2007.

[13] Publicação da Companhia Editora Nacional. São Paulo. 1956. 1ª. Edição

nós tocada, chama-se superfície do sólido. Superfície é a parte que separa o espaço ocupado pelo corpo do espaço que o cerca.

Ao passarmos uma régua sobre a superfície de uma mesa, se a régua tocá-la em todos os pontos, diremos que a superfície é plana. Caso contrário, será curva.” (Calioli e D’ Ambrosio, 1956)

Fac-símile do livro *Matemática*, de Carlos Calioli e Nicolau D’Ambrosio. Companhia Editora Nacional. São Paulo, 1956 - 10ª Edição, p. 8-9.


8 *Matemática — 2ª série*

O *volume* tem três dimensões: *comprimento*, *largura* e *altura* (ou *espessura*).

Quanto à *forma*, os corpos da natureza se apresentam, em geral, de modo variado e irregular.

Entretanto, podemos imaginar formas regulares, como as que apresentamos a seguir:

CUBO

PIRÂMIDE

PARALELEPÍPEDO

ESFERA

Superfícies. Suponhamos um sólido geométrico esmaltado de branco.

A parte do sólido que recebeu a camada de esmalte, que pode ser por nós tocada, chama-se *superfície* do sólido. *Superfície* é a parte que separa o espaço ocupado pelo corpo do espaço que o cerca.

Geometria intuitiva 9

Assim, a figura acima é separada do espaço que a circunda por *superfícies*.

ABCD, CDEF, ADEG são *superfícies*.

Quando passamos a mão pela capa de um livro, é a sua *superfície que tocamos*.

A *superfície* tem duas dimensões: *comprimento* (ou *base*) e *largura* (ou altura).

Linhas. Duas superfícies que se cortam determinam uma *linha*. Assim, na figura acima, *AB*, *BC*, *AD*, etc., são linhas.

Assim como a superfície é o limite do corpo, podemos dizer que a *linha* é o limite da superfície. Só tem uma dimensão: *comprimento*.

Um traço de lápis daria uma boa idéia do que seja a *linha*. Poderíamos classificá-la em:

RETA

QUEBRADA OU POLIGONAL
É uma linha formada de segmentos de reta.

CURVA
É a linha que não é reta, nem formada de segmentos retilíneos.

MISTA
É a linha formada de segmentos retilíneos e curvilíneos.

Observando esse material evidencia-se a presença do modelo *Quase-empírico*, que leva à destrivialização do conhecimento matemático, destacando a descoberta como fundamento do processo de aprendizado.

É importante ressaltar que a escolha do livro realizada, não implica na predominância de um único modelo teórico para a década analisada, talvez se tivéssemos contato com livros de outros autores como Ary Quintella, Osvaldo Sangiorgi ou Jairo Bezerra, teríamos identificado à permanência do *Euclidianismo*.

2.4 Livros da década de 1960

Segundo Miorim (2005, p. 07), uma tentativa inicial de ampliação das discussões acerca do ensino de Matemática brasileiro ocorreu por iniciativa da Faculdade de Filosofia da Universidade da Bahia, no 1º Congresso Nacional de Ensino da Matemática no Curso Secundário em 1955.

Já as primeiras manifestações das idéias defendidas pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM), ocorreram no 2º e 3º Congressos realizados em 1957 (Porto Alegre) e 1959 (Rio de Janeiro). Porém, essas ocupam o centro das discussões apenas em 1966, no V Congresso realizado em São José dos Campos (SP). A divulgação ocorre por meio de cursos realizados pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), fundado em São Paulo (1961).

Silva (2005, p. 74) menciona que o MMM "buscava aproximar a Matemática desenvolvida na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área". Acrescenta ainda que teses e dissertações muito pouco mencionaram sobre o ensino de Geometria nesse período.

Em seu trabalho, a autora descreve uma importante conclusão realizada pela pesquisadora D'Ambrósio sobre seus estudos direcionados para este tema (D'Ambrósio, 1987, apud Silva 2005 p. 75):

> "afirma que a geometria é ainda relegada para última parte dos livros didáticos e que os tópicos de Geometria propostos na década de 60, como as transformações geométricas, nunca integram o currículo." (p. 221)

Em seu trabalho, cita, além de D'Ambrósio, outros autores como Burigo (1989) que traz a informação de novas experiências de introdução de novos conceitos como isometria e homotetia e Soares (2001) que afirma o emprego da linguagem dos conjuntos, no tradicional ensino da Geometria Euclidiana.

Nas décadas de 60 e 70, Pires (2006) observa que já sob a influência do MMM, os documentos curriculares e os livros passaram a apresentar uma nova abordagem da geometria.

No Brasil, um dos maiores precursores da Matemática Moderna foi o Professor Doutor em Lingüística Matemática, Osvaldo Sangiorgi. Principal representante do GEEM, considerado um dos pioneiros na divulgação do movimento no Brasil e primeiro autor de livros didáticos a incorporar as novas propostas defendidas pelo MMM.

Como acima mencionamos, a década de 1960 tem como cenário o MMM e como personagem principal Osvaldo Sangiorgi. Portanto, para podermos identificar os modelos teóricos de Gascón neste período, utilizaremos como referência o livro desse autor denominado *Matemática Curso Ginasial – 3ª Série* de 1964. Ressaltamos que essa obra faz parte de uma coleção direcionada para as quatro séries do Curso Ginasial, porém selecionamos a terceira série por conter o conteúdo por nós analisado anteriormente "Congruência de Triângulos".

Pretendemos transcrever informações suficientes, para que seja permitida a identificação do modelo teórico no material analisado e logo após verificaremos nos livros da década de 70 do mesmo autor, sua permanência ou mudança.

No capítulo II, denominado "Figuras geométricas planas. Reta e círculo", Sangiorgi (1964, p. 123) enuncia a "Congruência de Triângulos" da seguinte forma:

> "Dois triângulos são i*guais* ou *congruentes* quando por intermédio de um movimento eles *coincidem*, isto é, se superpõem. Nestas condições, os vértices e os lados de um triângulo vão coincidir, após o movimento, com os vértices e os lados *correspondentes* do outro".

Podemos observar que a sobreposição dos triângulos permanece como estratégia para a verificação da congruência entre os triângulos observados. Na seqüência, o autor acrescenta que é possível sabermos se dois triângulos são ou não congruentes sem a verificação da igualdade entre todos os lados e ângulos.

Para tanto, sugere ao leitor que observe a demonstração realizada sobre a igualdade de somente três dos elementos principais, dentre os quais esteja compreendido pelo menos um lado. Em seguida realiza a seguinte constatação "*Surgem, assim,* os *casos clássicos de congruência* ou *critérios de igualdade de triângulos de muita importância e grande uso na Geometria Dedutiva*". (Sangiorgi, 1964, p. 124).

É interessante notarmos que nessa obra, os casos apresentam-se no formato de teoremas que são demonstrados e acompanhados de aplicações.

O autor enuncia o primeiro caso de congruência da seguinte forma: "*Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados e o ângulo compreendido, respectivamente, iguais* (L.A.L.)(**)." (Sangiorgi, 1964, p. 124). Como aplicação do 1º caso de congruência aborda as "Propriedades do triângulo isósceles", demonstrando-as de duas maneiras, sendo uma delas a demonstração por redução ao absurdo.

A seguir, apresentamos fac-símile para ilustrarmos as observações realizadas (1964, p. 123-129).

Fac-símile do livro *Matemática Curso Ginasial – 3ª Série* de Osvaldo Sangiorgi. Companhia Editora Nacional. São Paulo, 1964 - 78ª Edição, p. 123-129.

Em relação aos ângulos, um triângulo pode ser:

acutângulo, quando possui os três ângulos agudos (fig. 66); caso êstes três ângulos sejam iguais, o triângulo diz-se *eqüiângulo* ;

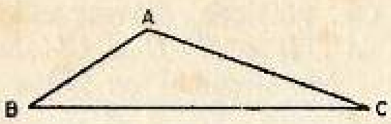


Fig. 65

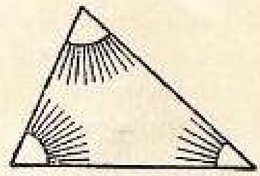


Fig. 66

retângulo, quando possui um ângulo reto (fig. 67); neste triângulo o lado oposto ao ângulo reto é denominado *hipotenusa* e os outros dois lados, *catetos* e

obtusângulo, quando possui um ângulo obtuso (fig. 68).

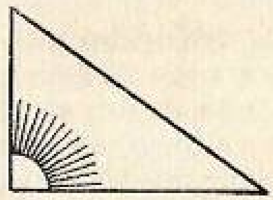


Fig. 67

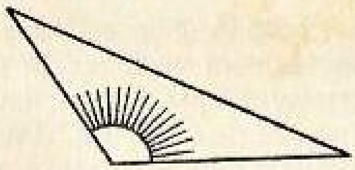


Fig. 68

Nota : Costuma-se atribuir o nome de *obliquângulos* aos triângulos que não são retângulos (os lados são segmentos de retas oblíquas, figs. 66 e 68).

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

36. Casos clássicos de congruência de triângulos. Dois triângulos são *iguais* ou *congruentes* quando por intermédio de um movimento êles *coincidem*, isto é, se superpõem. Nestas condições, os vértices e os lados de um triângulo vão coincidir, após o movimento, com os vértices e os lados *correspondentes* do outro (figs. 69 e 70).

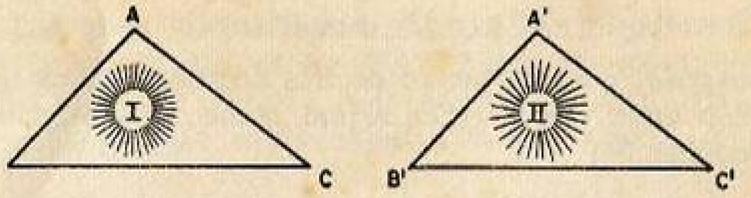


Fig. 69

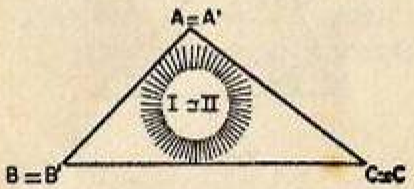


Fig. 70

Os vértices correspondentes A e A', B e B' C e C' são os *pontos homólogos* e os lados correspondentes AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, CA e $C'A'$, são os *lados homólogos*. Pode-se afirmar, assim que :

Dois triângulos são congruentes ou iguais quando têm todos os lados e todos os ângulos respectivamente iguais.

Todavia é possível saber se dois triângulos são congruentes sem verificar se *todos os lados* e *todos os ângulos* são respectivamente iguais, isto é, não usando os *seis* elementos principais de cada um. Para isso, basta verificar, como iremos demonstrar mais adiante, se os dois triângulos têm, respectivamente iguais, sòmente *três* dos elementos principais, dentre os quais esteja compreendido, pelo menos, um lado. Surgem, assim, os *casos clássicos de congruência* ou *critérios de igualdade de triângulos* de muita importância e grande uso na Geometria dedutiva.

37. Primeiro caso de congruência (*). É dado pelo seguinte

Teorema: *Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados e o ângulo compreendido, respectivamente, iguais* (L.A.L.) (**).

(*) Poderíamos considerar êste caso de igualdade e outros como *postulado*. Preferimos, na idade em que se encontram os alunos, introduzí-lo como *teorema*, admitindo, no entretanto, o *Postulado do movimento* (pág. 94).
(**) Abreviatura do 1.º caso — L.A.L. — significa : *lado, ângulo, lado.*

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 71). Temos:

$$H \begin{cases} AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ AC = A'C' \end{cases} \qquad T \; \{ \; \Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

(L.A.L.)

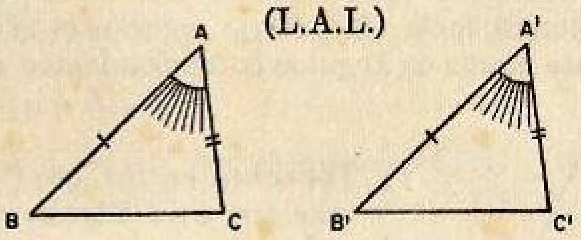


Fig. 71

Demonstração:

1. Transportemos o ΔABC sôbre o $\Delta A'B'C'$, de modo que $\hat{A}$ coincida com o seu igual $\hat{A}'$ e que os lados AB e AC se situem, respectivamente, sôbre os lados $A'B'$ e $A'C'$.
2. Como, por hipótese, $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$, o vértice B coincidirá com o vértice B' e C com o C'. Logo, sendo coincidentes os vértices dos dois triângulos, segue-se que:

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$$

c.q.d.

Nota: Êste teorema permite afirmar que: em dois triângulos iguais a *lados iguais* opõem-se *ângulos iguais* e a *ângulos iguais* opõem-se *lados iguais*.

Aplicações do 1.° caso de congruência

38. Propriedades do triângulo isósceles.

a) ***Teorema:*** *Em todo triângulo isósceles os ângulos da base são iguais.*

Seja o triângulo ABC (fig. 72). Temos:

$$H \; \{ \; AB = AC$$
$$T \; \{ \; \hat{B} = \hat{C}.$$

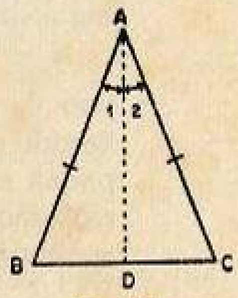


Fig. 72

Demonstração:

1. Tracemos a bissetriz do ângulo do vértice A que encontra BC no ponto D. Logo: $\hat{1} = \hat{2}$ (def. de bissetriz).
2. Os triângulos ABD e ADC são iguais, pelo 1.º caso de congruência (L.A.L.), e, portanto, são necessàriamente iguais os ângulos correspondentes $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Logo:

$$\hat{B} = \hat{C}$$ c.q.d.

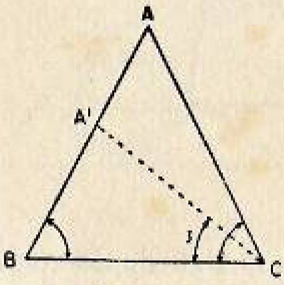


Fig. 73

b) ***Teorema recíproco:*** (*) *O triângulo que tem dois ângulos iguais é isósceles.*

Seja o triângulo ABC (fig. 73).

Temos:

H { $\hat{B} = \hat{C}$

T { $AB = AC$.

Demonstração (por redução ao absurdo):

1. Neguemos a tese, isto é, se não fôsse $AB = AC$, então deveríamos ter forçosamente: $AB > AC$ ou $AB < AC$ (n.º 11).
2. Se fôsse $AB > AC$, poderíamos determinar sôbre AB um ponto A' tal que $A'B = AC$ e unindo A' com C obteríamos o $\Delta A'BC = \Delta ABC$ (pelo 1.º caso L.A.L.), pois,

$$\begin{cases} A'B = AC & \text{(por construção)} \\ \hat{B} = \hat{C} & \text{(por hipótese)} \\ BC \text{ é comum} & \end{cases}$$ e, portanto,: $\hat{B} = \hat{3}$.

3. Como, por hipótese: $\hat{B} = \hat{C}$
segue-se, então, que $\hat{3} = \hat{C}$ (propriedade transitiva, n.º 10 – 3.ª),

isto é, *um absurdo*, pois, o ângulo $\hat{3}$ sendo *parte* do ângulo $\hat{C}$ nunca poderia ser igual a $\hat{C}$. Portanto, não poder ser $AB > AC$. Com raciocínio análogo verificaríamos não ser possível $AB < AC$ o que nos leva a concluir ser

$$AB = AC$$ c.q.d.

(*) Ver algumas observações interessantes sôbre a Geometria Dedutiva da 3.ª Série (pág. 311).

c) ***Corolários:***

1.º) *Todo triângulo eqüilátero é também eqüiângulo.*

Seja o triângulo ABC (fig. 74). Temos:

H { $AB = BC = AC$ T { $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

DEMONSTRAÇÃO :

1. Sendo $AB = AC$, segue que $\hat{B} = \hat{C}$ (I) (teorema *a*)
   „ $AB = BC$, „ „ $\hat{A} = \hat{C}$ (II) (teorema *a*).

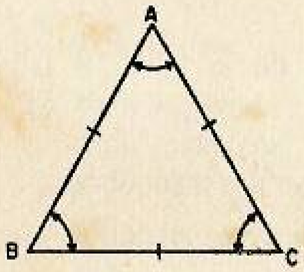


FIG. 74

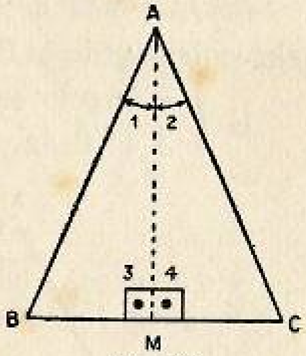


FIG. 75

2. Das igualdades (I) e (II), segue pela propriedade transitiva (n.º 10, 3.ª) que :

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

c.q.d.

2.º) *Em todo triângulo isósceles a bissetriz do ângulo do vértice, a altura e a mediana relativas à base, coincidem.*

Seja o triângulo ABC (fig. 75). Temos :

$$H \begin{cases} AB = AC \\ AM \text{ é bissetriz } (\hat{1} = \hat{2}) \end{cases}$$

T { AM é altura e mediana.

DEMONSTRAÇÃO :

1. Sendo AM bissetriz do $\hat{A}$, isto é, $\hat{1} = \hat{2}$, temos que :

$$\Delta AMB = \Delta AMC \text{ (caso L.A.L.).}$$

2. Logo, os elementos correspondentes são iguais, isto é:

$$BM = MC \quad \text{(I)}$$

$$\hat{3} = \hat{4} \quad \text{(II) (âng. adjacentes iguais).}$$

A igualdade (I) mostra que AM *é mediana* e a igualdade (II) que AM *é altura* (perpendicular à base BC) do triângulo ABC em relação à base BC.

c.q.d.

39. Teorema do ângulo externo. *Em todo triângulo um ângulo externo é maior do que cada um dos ângulos internos não adjacentes.* (*)

Seja o triângulo ABC (fig. 76). Temos:

$$\text{H} \begin{cases} \hat{\alpha} \text{ ângulo externo} \\ \hat{A} \text{ e } \hat{B} \text{ ângulos não adj. de } \hat{\alpha} \end{cases} \qquad \text{T} \begin{cases} \hat{\alpha} > \hat{A} \\ \hat{\alpha} > \hat{B}. \end{cases}$$

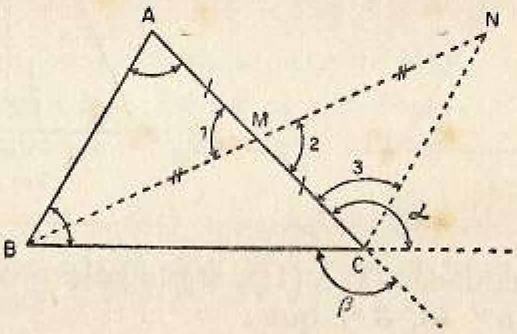


FIG. 76

DEMONSTRAÇÃO:

1. Seja M o ponto médio do lado AC; unamos M a B e prolonguemos BM de um segmento $MN = BM$. Liguemos N a C e consideremos os triângulos ABM e MCN.
2. Êstes triângulos são iguais, pelo caso L.A.L., isto é:

$$\triangle ABM = \triangle MCN$$

$$\text{(L.A.L.)} \begin{cases} BM = MN \text{ (por construção)} \\ \hat{1} = \hat{2} \text{ (o.p.v.)} \\ MA = MC \text{ (por construção)} \end{cases}$$

e, portanto, $\hat{A} = \hat{3}$ (âng. homólogos em $\triangle$ iguais).

(*) Com relação ao seu ângulo adjacente, o ângulo externo não está subordinado a nenhuma relação, podendo ser *menor*, *igual* ou *maior*, conforme o ângulo interno seja *obtuso*, *reto* ou *agudo*, respectivamente.

3. Como: $\hat{\alpha} > \hat{3}$ (α contém $\hat{3}$)
   segue-se que $\hat{\alpha} > \hat{A}$ ($\hat{A} = \hat{3}$).

   Com raciocínio análogo, prova-se que $\hat{\beta} > \hat{B}$ ($\hat{\beta}$ também é externo) e como $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ (o.p.v.), vem

$$\hat{\alpha} > \hat{B} \qquad \text{c.q.d.}$$

Corolário: *Em todo triângulo a soma de dois ângulos é menor que 2 retos.*

Seja o triângulo ABC (fig. 77). Temos:

H { $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ ângulos internos   T { $\hat{A}+\hat{C} < 2$ retos.

DEMONSTRAÇÃO:

1. Prolonguemos o lado BC e representemos por $\hat{\alpha}$ o ângulo externo adjacente a $\hat{C}$.
2. Pelo teorema do ângulo externo:

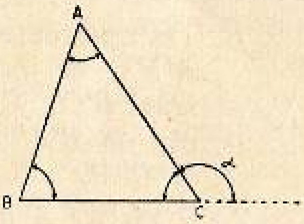


FIG. 77

$$\hat{\alpha} > \hat{A}$$

e somando $\hat{C}$ aos dois membros dessa desigualdade (*), temos:

$$\hat{\alpha} + \hat{C} > \hat{A} + \hat{C}.$$

Sendo $\hat{\alpha}+\hat{C}=2$ retos (n.º 28, 3.º), segue-se que:

$$2 \text{ retos} > \hat{A} + \hat{C}$$

ou

$$\hat{A} + \hat{C} < 2 \text{ retos}$$

c.q.d.

40. Segundo caso de congruência. É dado pelo seguinte

Teorema: *Dois triângulos são congruentes quando têm um lado igual e os dois ângulos adjacentes a êste lado, respectivamente, iguais.* (A.L.A.) (**).

(*) Propriedades das desigualdades. Ver *Matemática*, Curso Ginasial, 2.ª Série, pág. 147 do mesmo autor.

(**) Abreviatura do 2.º caso — A.L.A. — significa: *ângulo, lado ângulo.*

O autor menciona quatro casos de congruência dos triângulos, sendo 4º caso assim enunciado: "*Dois triângulos são congruentes, quando têm um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a êste lado, respectivamente iguais*." (L.A.A_o)(*).[14], logo após, insere ainda a Congruência de Triângulos Retângulos.

[14] Sangiorgi, O. "Matemática Curso Ginasial – 3ª Série". São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1964 – 78ª Edição, p. 124.

Verificamos nesse volume que os tópicos direcionados para a Geometria são acompanhados constantemente pelas demonstrações, prevalecendo a permanência do Modelo *Euclidianista*.

Fac-símile do livro *Matemática Curso Ginasial – 3ª Série* de Osvaldo Sangiorgi. Companhia Editora Nacional. São Paulo, 1964 - 78ª Edição, p. 130-134.

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 78). Temos:

$$\text{H}\begin{cases}\hat{B} = \hat{B}' \\ BC = B'C' \\ \hat{C} = \hat{C}'\end{cases} \qquad \text{T}\ [\ \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

(A.L.A.)

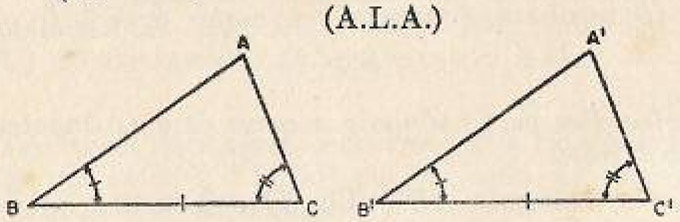


Fig. 78

DEMONSTRAÇÃO:

1. Transportemos o triângulo ABC sôbre o triângulo $A'B'C'$ de modo que o lado BC coincida com o seu igual $B'C'$. Como $\hat{B} = \hat{B}'$, o lado BA tomará a direção de $B'A'$ e como $\hat{C} = \hat{C}'$, CA tomará a direção de $C'A'$.
2. O vértice A devendo estar simultâneamente sôbre as semi-retas $B'A'$ e $C'A'$, estará forçosamente no ponto de encontro das duas, isto é, em A'. Logo, coincidindo os três vértices, temos que

$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

c.q.d.

Corolário: *Todo triângulo eqüiângulo é também eqüilátero.*
A *demonstração* ficará a cargo do aluno.

41. Terceiro caso de congruência. É dado pelo seguinte

Teorema: *Dois triângulos são congruentes quando têm os três lados respectivamente iguais* (L.L.L.) (*).
Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 79). Temos:

$$\text{H}\begin{cases}AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ CA = C'A'\end{cases} \qquad \text{T}\ [\ \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

(*) Abreviatura do 3.º caso — L.L.L. — significa: *lado, lado, lado.*

(L.L.L.)

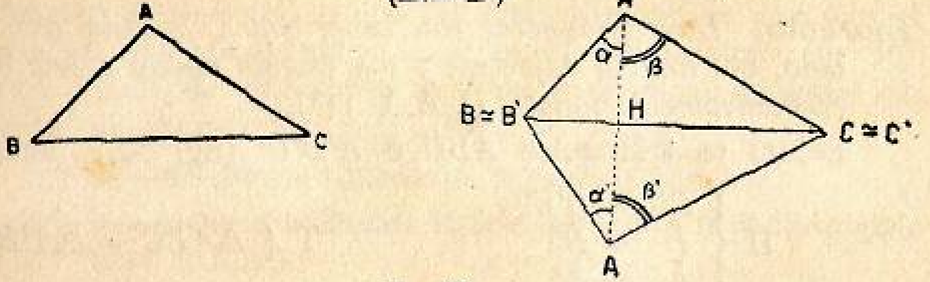


Fig. 79

DEMONSTRAÇÃO:

1. Transportemos o triângulo ABC sôbre o triângulo $A'B'C'$ de modo que BC coincida com o seu igual $B'C'$. Nada podemos dizer, por enquanto, sôbre a coincidência dos outros lados, pois, nada sabemos (hipótese) acêrca dos ângulos. Giremos, então, o $\triangle ABC$ em tôrno do lado comum $BC = B'C'$, de sorte que o vértice A fique no semi-plano oposto de A' em relação a êste lado comum e unamos A' com A formando os triângulos $A'B'A$ e $A'C'A$;
2. Os triângulos $A'B'A$ e $A'C'A$ são isósceles ($AB = A'B'$, $CA = C'A'$, por hip.) e, portanto, os ângulos da base são iguais (n.º 38 – a):

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$$
$$\hat{\beta} = \hat{\beta}'.$$

Somando, membro a membro, estas igualdades, temos:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\alpha}' + \hat{\beta}'$$

ou

$$\hat{A} = \hat{A}'.$$

Logo, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são iguais pelo caso L.A.L., pois têm os dois lados iguais (por hip.) e os ângulos compreendidos ($\hat{A}$ e $\hat{A}'$) respectivamente iguais. c.q.d.

NOTA: O ponto de intersecção de $A'A$ com BC (H na fig. 79) pode ser também *externo* ao segmento BC (é o caso dos triângulos ABC e $A'B'C'$ serem obtusângulos) ou *coincidente* com um dos vértices B ou C (é o caso dos triângulos ABC e $A'B'C'$ serem retângulos em B e B').

42. Quarto caso de congruência. É dado pelo seguinte

Teorema: *Dois triângulos são congruentes, quando têm um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a êste lado, respectivamente iguais.* (L.A.A.) (*).

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 80). Temos:

$$H \begin{cases} BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \qquad T \{ \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

(L.A.Aₒ.)

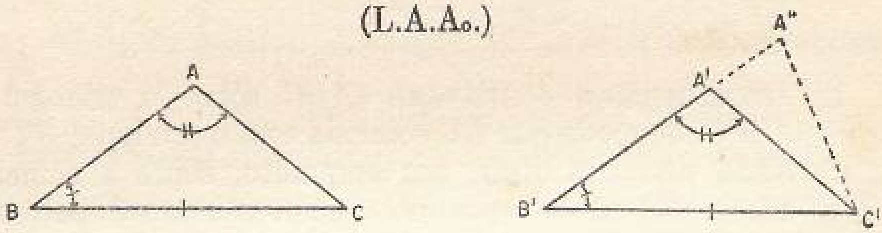


Fig. 80

Demonstração:

1. Transportemos o triângulo ABC sôbre o triângulo $A'B'C'$, de modo que BC coincida com o seu igual $B'C'$. Nas condições da hipótese ($\hat{B}=\hat{B}'$), dizemos que $\hat{A}$ deve coincidir com $\hat{A}'$, ou seja, $AB=A'B'$ e os dois triângulos serão iguais pelo caso L.A.L.;
2. Com efeito, se não fôsse $AB=A'B'$, deveria ser, por exemplo, $AB > A'B'$ e então existiria um ponto A'', tal que $A''B'=AB$ e unindo A'' com C resultaria

$$\triangle A''B'C' = \triangle ABC \text{ (L.A.L.)},$$

e, portanto: $\hat{A} = \hat{A}''$.

Como $\hat{A} = \hat{A}'$ (por hip.)

segue-se que: $\hat{A}' = \hat{A}''$,

isto é, *um absurdo*, pois, $\hat{A}'$ sendo ângulo externo ao $\triangle A''A'C'$ é maior que o ângulo interno não adjacente $\hat{A}''$ (n.º 39). Chegaríamos a absurdo análogo, caso fôsse $AB < A'B'$. Logo,

$$AB = A'B' \quad \text{e} \quad \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

c.q.d.

(*) Abreviatura do 4.º caso — L.A.Aₒ. — significa: *lado, ângulo adj., ângulo oposto.*

43. Congruência de triângulos retângulos. O caso particular de dois triângulos retângulos, significa que êles já trazem sempre um elemento igual, que é o ângulo reto (n.º 26). Nestas condições concluímos que *dois triângulos retângulos são congruentes, quando têm respectivamente iguais:*

1.º) *os dois catetos* (imediato pelo caso L.A.L.) ;

2.º) *um cateto e o ângulo agudo adjacente* (imediato pelo caso A.L.A.) ;

3.º) *a hipotenusa e um ângulo agudo* (imediato pelo caso L.A.A$_o$.) ;

4.º) *um cateto e o ângulo agudo oposto* (imediato pelo caso L.A.A$_o$.), e podemos demonstrar, ainda baseados nos casos já estudados,

5.º) *a hipotenusa e um cateto.*

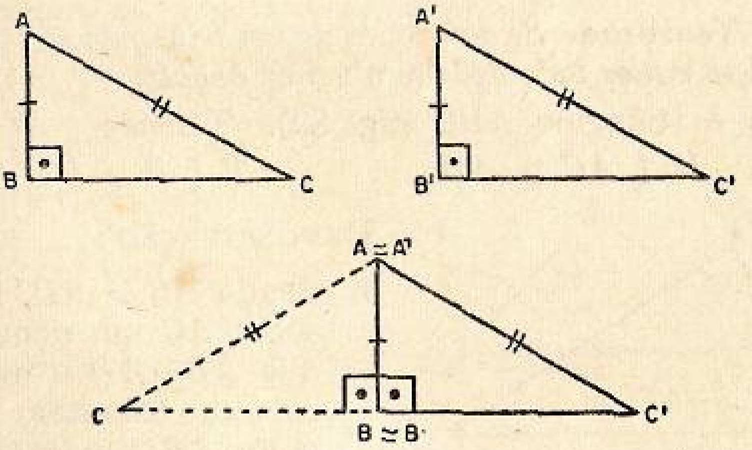


Fig. 81

De fato, sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ (fig. 81), onde temos:

$$H \begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' & \text{(1 reto)} \\ AB = A'B' & \text{(cateto)} \\ AC = A'C' & \text{(hipotenusa)} \end{cases} \qquad T \{ \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

Demonstração:

1. Construamos o $\triangle ABC$ ao lado do $\triangle A'B'C'$, de modo que o cateto AB coincida com o seu igual $A'B'$ e que

o vértice C se situe no semi-plano oposto de C' em relação a AB (esta operação eqüivale a girar o $\triangle ABC$ em tôrno do cateto comum $AB = A'B'$).

2. Como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ são retos e adjacentes segue-se que o ângulo $C\hat{B}C'$ é *raso* e BC é semi-reta oposta de $B'C'$. O triângulo ACC' é isósceles ($AC = A'C'$, por hip.) e, por conseguinte, os ângulos da base são iguais (n.º 38), isto é, $\hat{C} = \hat{C}'$. Logo, os dois triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$, tendo a *hipotenusa* e *um ângulo agudo*, respectivamente iguais, são *congruentes* (3.º).

c.q.d.

Relações de desigualdades entre lados e ângulos

44. Teorema. *Se dois lados de um triângulo são desiguais, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.*

Seja o triângulo ABC (fig. 82). Temos:

$H \{ AC > AB \qquad T \{ \hat{B} > \hat{C}.$

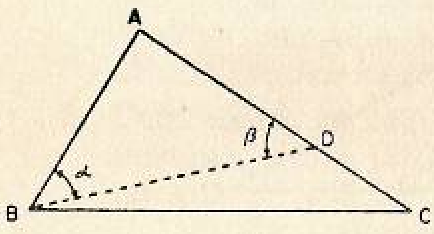


FIG. 82

DEMONSTRAÇÃO:

1. Sendo $AC > AB$, tomemos sôbre AC um ponto D, tal que $AB = AD$ e unamos D com B. Resultam os triângulos ABD e DBC;

2. O triângulo ABD é isósceles ($AB = AD$) e, portanto:

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}.$$

O ângulo $\hat{\beta}$ é externo ao triângulo DBC, logo:

$$\hat{\beta} > \hat{C} \quad \text{e} \quad \therefore \quad \hat{\alpha} > \hat{C} \quad (\hat{\alpha} = \hat{\beta}).$$

Como $\hat{B} > \hat{\alpha}$ ($\hat{B}$ contém $\hat{\alpha}$) e pelo fato de ser $\hat{\alpha} > \hat{C}$ (*), concluímos que:

$$\hat{B} > \hat{C}$$

c.q.d.

(*) Propriedade transitiva das desigualdades: se $\hat{A} > \hat{B}$ e $\hat{B} > \hat{C}$, segue-se que: $\hat{A} > \hat{C}$.

2.5 Livros da década de 1970

Nesse tópico, analisaremos os livros de Osvaldo Sangiorgi da década de 70, denominados *Matemática 6 da Companhia Editora Nacional de 1978 – 2ª edição, Matemática 8 da Editora Nacional de 1979 - 2ª Edição* e *Matemática Nova Série – 1º Grau – 6ª e 7ª Séries da Companhia Editora Nacional* (sem data, mas a capa traz a informação impressa de que está de acordo com os Guias Curriculares do Estado de São Paulo de 1975).

Iniciamos nossa análise pelo livro *Matemática 6* de 1978, localizando tópicos sobre o Conjunto dos Números Inteiros Relativos e dos Números Racionais, Equações e Inequações de 1º grau com uma variável, Sistemas de Equações com duas variáveis, Razões e Proporções, Números Proporcionais, Grandezas Proporcionais e Juros Simples. Nesta série, nenhum capítulo é direcionado para a Geometria, porém como temos apenas esse volume da coleção, não podemos realizar nenhuma conclusão sobre a não abordagem do tema pelo autor.

No livro *Matemática 8* (1979) de outra coleção, verificamos que de quinze capítulos propostos para a 8ª série, nove são direcionados para a Geometria. Como neste caso também possuímos apenas esse volume, ao contrário da situação acima, torna-se impossível concluir que Sangiorgi valorizava muito este tema. O único fato que podemos constatar é que os capítulos direcionados para a Geometria estão relegados para a última parte do livro, confirmando mais uma vez a afirmação de D’Ambrósio (1987, apud Silva 2005, p. 75).

Buscamos nos capítulos com abordagem geométrica, os casos de Congruência de Triângulos, tópico selecionado anteriormente para análise bibliográfica, porém não o localizamos. Verificamos ainda se nos temas destacados havia alguma menção desse estudo e localizamos na introdução dos “Casos clássicos de Semelhança de Triângulos” uma observação que confirma nossa hipótese:

> “Para reconhecer se dois triângulos são congruentes, você aprendeu (7ª série) que não é necessário verificar se possuem os três lados correspondentes congruentes e os três ângulos correspondentes congruentes. Basta verificar se os dois triângulos possuem somente três dos seis elementos correspondentes congruentes (casos: LAL, ALA, LLL e LAAo).
>
> Também para reconhecer se dois triângulos são semelhantes, basta usar somente dois ou três dos elementos correspondentes.
>
> Essa nova economia constitui os chamados “Casos clássicos de semelhança de triângulos”. (1979, p. 107)

Analisaremos agora os dois volumes denominados *Matemática Nova Série-1º Grau – 6ª e 7ª Séries*. Como já mencionamos, nestes livros não foram localizadas as datas pelo fato de terem sido retiradas as primeiras folhas nas quais constavam esse dado. Porém, na capa localizamos a seguinte informação impressa “*De acordo com os Guias Curriculares do Estado de São Paulo*”, como os guias são datados de 1975, podemos concluir que provavelmente os livros pertencem à década de 1970.

Nos conteúdos do volume direcionado para a 6ª série, localizamos os seguintes capítulos: Divisibilidade no Conjunto IN, Números Racionais Absolutos, Números Racionais Relativos, Equações e Inequações do 1º grau com uma variável, Sistemas de Equações do 1º grau com duas variáveis, Razões e Proporções, Grandezas Proporcionais e Geometria Intuitiva e Construções Geométricas.

Logo após a listagem dos capítulos, observamos a escrita dos “*Objetivos Gerais (Educacionais) da Área” e “Objetivos Específicos da Matemática*” registrando respectivamente as seguintes informações[15]:

> PROPICIAR AO ALUNO A CAPACIDADE DE:
> . Utilizar **linguagem, técnicas** e outros instrumentos de **análise científica** (generalização e abstração);
> . Estabelecer **relações** entre conhecimento científico e as situações-problema da vida real.
>
> DESENVOLVER NO ALUNO:
> . Raciocínio lógico-matemático;
> . Habilidades **numéricas** (cálculo e resolução de problemas), **algébricas** (propriedades estruturais das operações fundamentais) e **geométricas** (intuitivas e dedutivas).

[15] SANGIORGI, Osvaldo. “Matemática Nova Série – 1º Grau”, 6ª Série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 246p.

Percebe-se nesses objetivos a preocupação com a generalização e abstração, a proposta de estabelecimento entre as relações científicas e cotidianas, o desenvolvimento do raciocínio lógico e das habilidades, inclusive as geométricas com apelo à intuição e dedução.

Esses objetivos indicam a não permanência do modelo *Euclidianista*, mas para confirmarmos esta informação, devemos prosseguir nossa análise.

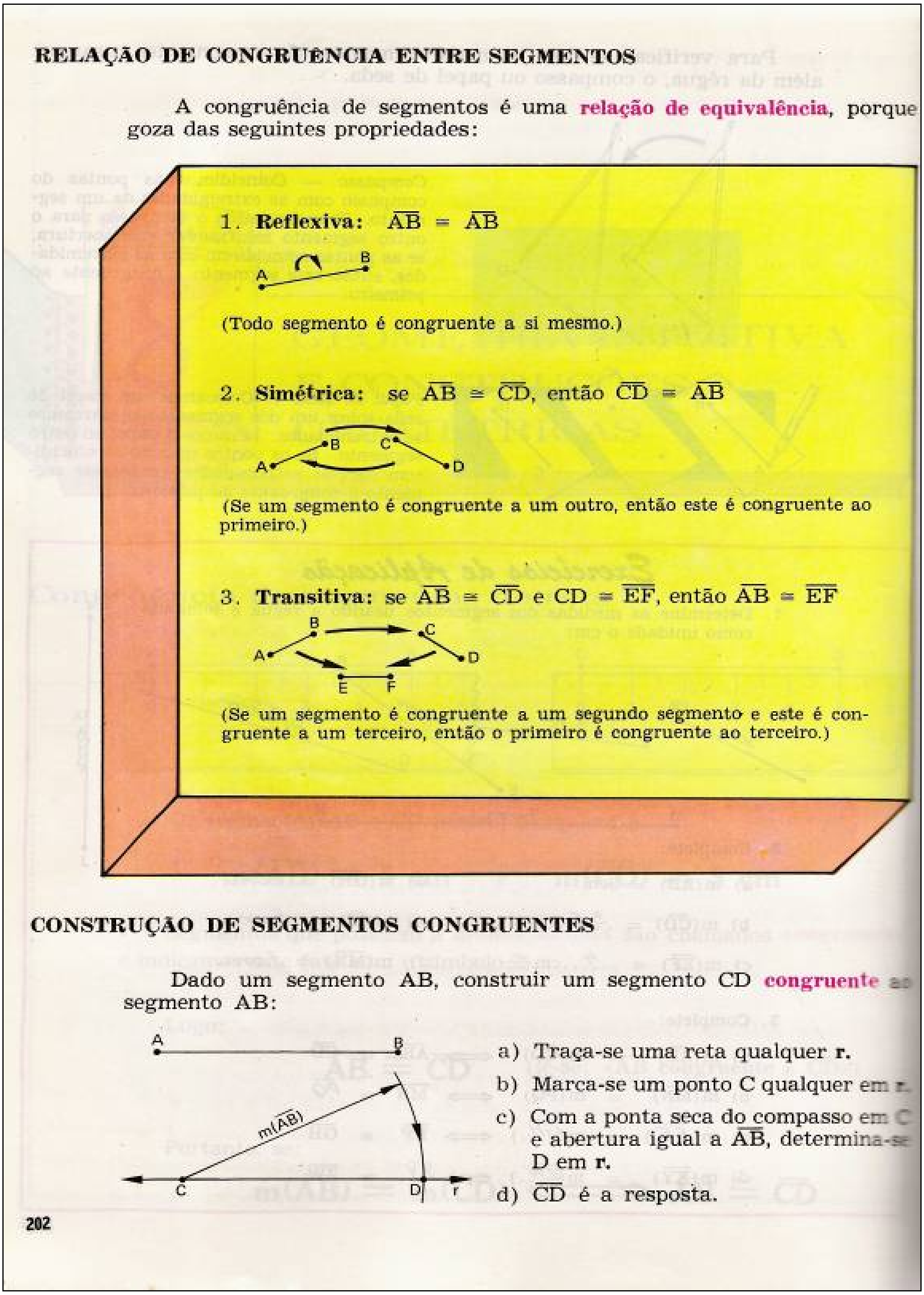
O capítulo direcionado para Geometria, apresenta um título que nos chama a atenção: *Geometria Intuitiva e Construções Geométricas*. Nele o autor aborda Congruência de Segmentos de Reta, propondo para sua verificação a utilização da régua, compasso ou papel de seda (p. 201). Em seguida, trabalha com a Relação de Congruência entre Segmentos, na qual podemos perceber a presença da generalização e abstração.

No volume da 7ª série, os conteúdos eleitos foram os seguintes: Conjunto dos Números Reais, Cálculo Algébrico em IR, Ângulos: propriedades; aplicações, Polígonos: triângulos; propriedades, Construção lógica da Geometria, Quadriláteros, Circunferência e círculo e Transformações geométricas planas. Nota-se a presença de seis capítulos geométricos entre oito propostos, porém constatamos sempre a localização dessa abordagem no final do livro.

Nesta série identificamos o tema por nós anteriormente selecionado, Congruência de Triângulos. Percebemos em seu desenvolvimento, algumas diferenças, são estas: estabelecimento da relação de equivalência com a congruência e a proposta da verificação experimental com papel de seda dos casos de congruência.

Para ilustrarmos as observações realizadas, apresentamos fac-símile referente à *Relação de congruência entre segmentos* (p. 202), das *Relações de equivalência* e *dos Casos de Congruência* (p. 114-115).

Fac-símile do livro *Matemática Nova Série 1º Grau – 6ª Série*, de Osvaldo Sangiorgi, da Companhia Editora Nacional, p. 202.



RELAÇÃO DE CONGRUÊNCIA ENTRE SEGMENTOS

A congruência de segmentos é uma **relação de equivalência**, porque goza das seguintes propriedades:

1. **Reflexiva:** $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

(Todo segmento é congruente a si mesmo.)

2. **Simétrica:** se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, então $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

(Se um segmento é congruente a um outro, então este é congruente ao primeiro.)

3. **Transitiva:** se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, então $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

(Se um segmento é congruente a um segundo segmento e este é congruente a um terceiro, então o primeiro é congruente ao terceiro.)

CONSTRUÇÃO DE SEGMENTOS CONGRUENTES

Dado um segmento AB, construir um segmento CD **congruente** ao segmento AB:

a) Traça-se uma reta qualquer **r.**

b) Marca-se um ponto C qualquer em **r.**

c) Com a ponta seca do compasso em C e abertura igual a $\overline{AB}$, determina-se D em **r.**

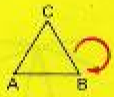
d) $\overline{CD}$ é a resposta.

202

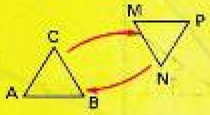
Fac-símile do livro "Matemática Nova Série – 1º Grau" – 7ª Série, de Osvaldo Sangiorgi, da Companhia Editora Nacional, p. 114–115.

A congruência de triângulos é uma *relação de equivalência*, porque é:

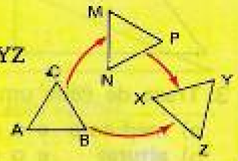
1. *Reflexiva:* $\triangle ABC \cong \triangle ABC$



2. *Simétrica:* se $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, então $\triangle MNP \cong \triangle ABC$



3. *Transitiva:* se $\triangle ABC \cong \triangle MNP$ e $\triangle MNP \cong \triangle XYZ$, então $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$



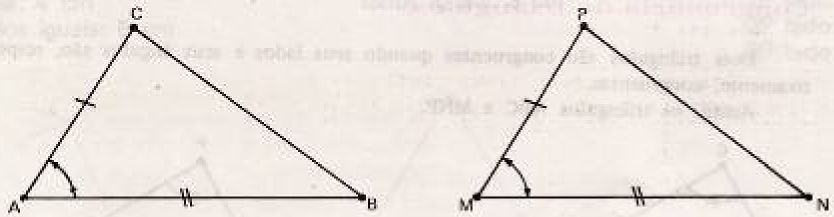
Casos de congruência

Para saber se dois triângulos são congruentes, seria necessário, de acordo com a definição, verificar se são congruentes os *três lados* e os *três ângulos*, respectivamente, desses triângulos (isto é, *seis* elementos).

Porém, basta, na verdade, saber se *apenas três* desses elementos (dos quais pelo menos um deve ser *lado*) são congruentes numa determinada ordem para se *concluir* que dois triângulos são *congruentes*. Essa importante "economia" é garantida pelos seguintes *casos de congruência:*

Primeiro caso de congruência [Lado (L), Ângulo (A), Lado (L)]

Dois triângulos que possuem, respectivamente, *dois lados* e o *ângulo compreendido* congruentes são congruentes.



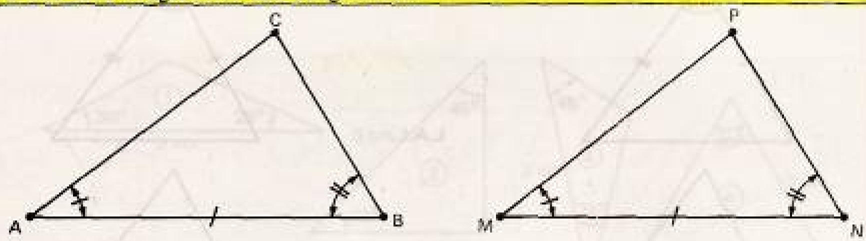
Logo: se $\begin{cases} \overline{AC} \cong \overline{MP} \ (L) \\ \hat{A} \cong \hat{M} \ (A) \\ \overline{AB} \cong \overline{MN} \ (L) \end{cases}$ então: $\triangle ABC \cong \triangle MNP$

Verifique experimentalmente, com um papel de seda, deslocando o $\triangle ABC$ sobre o $\triangle MNP$, que os dois triângulos, na situação L.A.L., coincidirão, isto é, são *congruentes*.

114

Segundo caso de congruência [Ângulo (A), Lado (L), Ângulo (A)]

Dois triângulos que possuem, respectivamente, *um lado* e *dois ângulos adjacentes* a esse lado congruentes são congruentes.

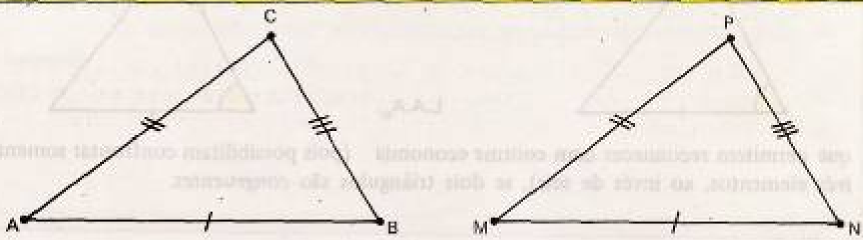


Logo: se $\begin{cases} \hat{A} \cong \hat{M} & (A) \\ \overline{AB} \cong \overline{MN} & (L) \\ \hat{B} \cong \hat{N} & (A) \end{cases}$ então: $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

Verifique experimentalmente que dois triângulos nessa situação (A.L.A.) são congruentes.

Terceiro caso de congruência [Lado (L), Lado (L), Lado (L)]

Dois triângulos que possuem, respectivamente, os *três lados* congruentes são congruentes.

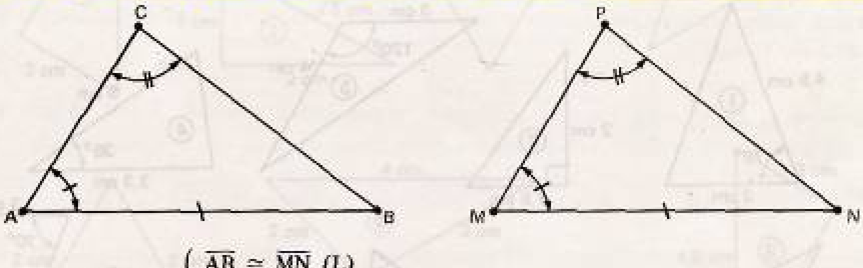


Logo: se $\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{MN} & (L) \\ \overline{BC} \cong \overline{NP} & (L) \\ \overline{AC} \cong \overline{MP} & (L) \end{cases}$ então: $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

Verifique experimentalmente.

Quarto caso de congruência [Lado (L), Ângulo (A), Ângulo Oposto (A_O)]

Dois triângulos que possuem, respectivamente, *um lado*, *um ângulo adjacente* e *um ângulo oposto* a esse lado congruentes são congruentes.



Logo: se $\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{MN} & (L) \\ \hat{A} \cong \hat{M} & (A) \\ \hat{C} \cong \hat{P} & (A_O) \end{cases}$ então: $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

Verifique experimentalmente.

É interessante observarmos que o autor solicita a verificação experimental de cada caso de congruência apenas no final de seu desenvolvimento.

Ao finalizarmos nossa análise, confirmamos a presença de um modelo *Quase-empírico*, como enunciavam os objetivos da obra mencionados anteriormente. É importante reforçarmos que este modelo surge como contraposição aos modelos *Euclidianistas*, sendo a década de setenta o marco desta evidência, em decorrência dos trabalhos direcionados para as ciências experimentais desenvolvidos por Imre Lakatos.

Capítulo 3

OS MODELOS TEÓRICOS E SUA IDENTIFICAÇÃO EM DOCUMENTOS OFICIAIS, PRESCRIÇÕES CURRICULARES E PROJETOS

3.1 Guias Curriculares do Estado de São Paulo

Oficialmente, a Matemática Moderna insere-se no sistema de ensino público do Estado de São Paulo, quando se formulam os Guias Curriculares como constatou Pires (2000, p. 32-33), cuja organização deveria “orientar as escolas de 1º grau, que se estruturavam em cursos de oito séries, por força da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (L.F. nº. 5692/71)”.

A estrutura dos Guias centra-se nas matérias, tendo sido elaborados de acordo com o núcleo comum que as disciplinas englobam; sendo um desses formado por Matemática, Ciências e Programas de Saúde.

Especificamente ao que se refere à Matemática, o Guia abrange as oito séries dividindo seu conteúdo e tendo como princípio os objetivos referentes a cada uma.

Uma orientação interessante que encontramos nas Considerações Gerais do documento sugere que se abranjam os conteúdos programados em sua totalidade evitando-se o aprofundamento de alguns em detrimento de outros que não conseguiriam ser abordados (Guias Curriculares, 1975, p. 13).

Nesse mesmo item enumera-se uma série de objetivos que proporcionariam ao aluno um desenvolvimento geral de suas habilidades e competências[16]:

> "(...) oferecem ampla oportunidade para a participação ativa do aluno, para o aprender como aprender, enfatizando a aquisição de habilidades de observar, classificar, construir, medir, induzir, deduzir, predizer, manipular equipamentos, inferir, interpretar dados e textos, formular modelos, comunicar, usar relações de espaço e tempo... Em suma, oferecem oportunidade para a redescoberta, estimulam a criatividade e maximizam o reforço da aprendizagem criando condições para o sucesso do aluno, mantendo os motivos e desenvolvendo atitudes mais favoráveis para a matéria e aprendizagem em geral".

Direcionando o olhar do Guia para a análise da introdução desse documento, da apresentação da Geometria, dos conteúdos propostos e de orientações sobre sua aplicação, teremos como ponto de partida os pressupostos pedagógico-didáticos expostos nesses itens.

Analisaremos o núcleo formado por Matemática, Ciências e Programas de Saúde, direcionando-o especificamente para a disciplina Matemática, com a abordagem direcionada para quatro tópicos: Introdução, Objetivos Gerais, Temas Básicos e Especificação de conteúdo, objetivos e sugestões de atividades.

Na Introdução, observa-se que ao se organizar um programa para uma determinada matéria algumas questões devem ser abrangidas. De forma geral deve-se verificar "Quais as diretrizes que devem nortear a sua elaboração?" e com o olhar direcionado para a Matemática "Qual o método a ser utilizado: axiomático ou indutivo? E Qual a orientação a ser dada: clássica ou moderna?" (Guias Curriculares, 1975, p. 201).

Em resposta à primeira questão matemática, aponta-se que um tratamento axiomático para o ensino de 1º grau não seria aconselhável. Observa-se que isso não significa o abandono do rigor, característica do raciocínio matemático necessária em todo o desenvolvimento do programa, mas que os conceitos deveriam ser obtidos por meio das atividades, da manipulação de instrumentos e

---

[16] SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Guias curriculares para ensino de 1º grau**. São Paulo, CERHUPE, 1975, p. 14.

materiais didáticos adequados, em situações próximas do concreto e da experiência do aluno. Quanto à abstração, orienta-se que sua realização ocorra de forma cuidadosa e gradativa, progredindo de acordo com a maturidade do aluno.

Antes de responder a segunda questão, os autores do documento julgam conveniente um esclarecimento sobre a chamada *Matemática Moderna*[17]:

> "Esse assunto tem dado oportunidade a muitas polêmicas, a nosso ver estéreis. Pensamos que todo o problema se resume na infeliz escolha do nome: Matemática Moderna. A Matemática não é moderna, nem clássica: é simplesmente a Matemática. Ocorre que, como muitas outras ciências, ela experimentou nos últimos tempos uma evolução extraordinária, provocando uma enorme defasagem entre a pesquisa e o ensino da matéria. O que deve ser feito, e isso é importante, é uma reformulação radical dos programas, para adaptá-los às novas concepções surgidas, reformulação essa que deve atingir as técnicas e estratégias utilizadas para a obtenção dos objetivos propostos. Nessa acepção achamos que o movimento que levou a uma orientação moderna no ensino da Matemática é irreversível, no sentido de um maior dinamismo na aprendizagem da mesma, em contraste com a maneira estática como era apresentada".

Como resposta menciona-se que a orientação dada deve ser moderna, enfatizando no estudo da matéria aspectos que destaquem uma unidade matemática sem compartimentos estanques. Acrescentam que apesar de acreditarem na fusão das duas orientações, a intuitiva e a moderna, a seleção caberá ao professor tendo como parâmetro as condições da escola, dos recursos materiais e humanos.

Analisando o Programa, verificou-se que sua apresentação é realizada por meio de um agrupamento de assuntos, dividido em quatro temas: Relações e funções, Campos Numéricos, Equações e Inequações e Geometria.

Nos objetivos gerais são abordados os seguintes itens (Guias Curriculares, 1975, p. 205):

> 1. Desenvolver a capacidade de: analisar, relacionar, comparar, classificar, ordenar, sintetizar, avaliar, abstrair, generalizar, criar.

---

[17] SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Guias curriculares para ensino de 1º grau**. São Paulo, CERHUPE, 1975, p. 201.

2. Desenvolver hábitos de estudo, de rigor e precisão, de ordem e clareza, de uso correto de linguagem, de concisão, de perseverança na obtenção de soluções para os problemas abordados e de crítica e discussão dos resultados obtidos.
3. Adquirir habilidades específicas para: medir e comparar medidas, calcular, construir e consultar tabelas, traçar e interpretar gráficos, utilizar e interpretar corretamente a simbologia e a terminologia matemáticas.
4. Adquirir informações e conhecimentos sobre os diversos tipos de conceitos e métodos utilizados na Matemática.
5. Desenvolver a capacidade de obter, a partir de condições dadas, resultados válidos em situações novas, utilizando o método dedutivo.
6. Reconhecer a inter-relação entre os vários campos da Matemática.

A partir dos temas básicos, passaremos a analisar apenas os conteúdos direcionados para a Geometria, objeto de nossa pesquisa.

3.1.1 Focalizando a proposta de Geometria nos Guias

Nesse documento, os Temas Básicos apresentam-se por meio de tabelas, antecedidas pela denominação do tema com seu título e objetivos. Na composição destas, são apresentados os conteúdos, os níveis com as respectivas séries e algumas observações.

Direcionando nossa análise para o foco dessa pesquisa, observaremos apenas a tabela construída para o *Tema IV Geometria*, com os objetivos assim enunciados (Guias Curriculares, 1975, p. 212):

- Adquirir conhecimentos que possibilitem uma compreensão do mundo físico aparente.
- Adquirir habilidades em construções geométricas e processos de medida.
- Desenvolver a intuição geométrica.

A seguir, apresentamos uma cópia da tabela indicativa desse tema (Guias Curriculares, 1975, p. 212). Em sua análise, Pires (2006) destaca que é possível identificarmos mudanças na nomenclatura utilizada para os conteúdos abordados no ensino fundamental.

Conteúdos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
1. Figuras geométricas								
a) Noções topológicas: interior, exterior e fronteira; regiões, conexidade.	x	x	x	x	x	x		
b) Noções projetivas: retas, intersecções, convexidade.			x	x	x	x		
c) Noções afins: paralelismo; semelhança.				x	x	x	x	X
d) Noções euclidianas: distâncias; ângulos.			x	x	x	x	x	X
2. Transformações Geométricas								
a) Conceito. Invariantes.						x	x	X
b) Transformações através de coordenadas.								X
3. Medidas								
a) Comprimento.			x	x	(*)	x		
b) Áreas.			(*)	x	(*)	(*)	(*)	X

Os níveis estão estabelecidos da seguinte forma: Nível I para a 1ª e 2ª séries e o II para a 3ª e 4ª. Quanto aos sinais utilizados é observado que o sinal "x" está associado aos conteúdos citados explicitamente no guia e o "(*)" quando a citação está implícita nas atividades ou na resolução de problemas. Acrescentamos ainda que no documento a *semelhança* identifica-se como uma *noção afim*.

Verifica-se que após a ocorrência do último sinal "x", o fato de não mais aparecem, indica que o conteúdo não deixou de ser utilizado, mas que o mesmo já é sistematizado e aplicado como instrumento de trabalho do aluno.

Analisando os conteúdos de 5ª a 8ª séries, identificamos a presença constante de Noções Afins e Euclidianas, sendo as Áreas citadas apenas implicitamente, com exceção da última série.

As observações referentes aos conteúdos orientam que o desenvolvimento da Geometria nos quatro primeiros anos seja realizado pela exploração do espaço físico aparente, iniciado pelas noções intuitivas de caráter topológico (interior, exterior, fronteira, etc).

O reconhecimento das formas geométricas deverá ocorrer intuitivamente e através da observação e manipulação de material didático apropriado. Aconselha-se utilizar as noções da Teoria dos Conjuntos de forma auxiliar, aplicar outros métodos além do geométrico na resolução de situações específicas e empregar resultados obtidos intuitivamente, como meio dedutivo para outras propriedades.

Solicita-se, sempre que possível, o destaque do conceito de transformação e a introdução do conceito de segmento orientado, visando posteriormente à noção de vetor. A introdução de noção de área é sugerida com a utilização do papel quadriculado, por contagem dos quadrados contidos na figura.

Finalizaremos a análise desse documento com o tópico direcionado para a especificação de conteúdo, objetivos e sugestões de atividades de Geometria.

Os conteúdos estão assim distribuídos e denominados: 5ª série – Geometria intuitiva, 6ª – Geometria intuitiva e construções geométricas, 7ª série – Início do emprego do raciocínio hipotético-dedutivo na geometria e 8ª série – Homotetia e semelhança: Aplicações e Medidas: comprimento do círculo; áreas.

Na análise dos objetivos da 5ª série, identificamos que visam à ampliação dos conhecimentos geométricos adquiridos anteriormente, a aplicação da linguagem e simbologia da Teoria dos Conjuntos para conceitos geométricos e o reconhecimento destes de forma abstrata, como mero recurso de ajuda e compreensão.

Na 6ª série, estão direcionados para o estabelecimento intuitivo de resultados geométricos baseados na experiência e observação, relacionando a congruência de segmentos de reta, a congruência de ângulos, ângulos determinados por duas paralelas e uma transversal e na aquisição de habilidades na utilização de compasso, régua, esquadro e transferidor.

Na 7ª série, visam à aquisição de habilidades em construção geométricas com régua e compasso; reconhecimento dos conceitos geométricos de forma abstrata, como mero recurso de ajuda e compreensão; obtenção de conhecimentos que possibilitem a sistematização da geometria; compreensão da simetria axial e central como transformação do plano e o desenvolvimento de demonstrações locais.

Na 8ª série, os objetivos requerem a aquisição de conhecimentos amplos sobre transformação, integração de métodos algébricos na resolução de problemas geométricos e aquisição de noções trigonométricas para aplicações em outras disciplinas.

Ao finalizarmos a análise desse documento, percebemos que durante nosso percurso, em determinados momentos identificamos características de um modelo teórico *Quase-empírico*. Destacamos dois deles para ilustrarmos nossa observação: na organização do programa, o destaque dado a questões relacionadas aos métodos e orientação, enfatizando a necessidade da obtenção de conceitos por meio das atividades, da manipulação e de experiências e nas orientações das observações da tabela a proposta direcionada para a exploração do espaço físico, sempre acompanhada de manipulação.

Porém, verificamos que em muitos momentos o documento posiciona a Geometria como veículo para a introdução da Teoria dos Conjuntos.

Neste período, o professor tinha um papel fundamental, pois as orientações por eles recebidas eram novas e os conteúdos abordados referentes a Conjuntos abrangiam uma linguagem específica[18]:

> "A chegada dessas orientações aos professores foi acompanhada de inúmeros treinamentos, com objetivos e conteúdos variados que iam desde ensiná-los a 'linguagem dos conjuntos' até passar-lhes sugestões de como trabalhar com relações de pertinência, inclusão, as operações de reunião e intersecção (...)".

[18] PIRES, Célia Maria Carolino. Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000, p. 34.

No decorrer da análise do documento, identificamos algumas observações que nos levaram a uma reflexão sobre esta nova abordagem geométrica, como a seguinte[19]:

> "Em virtude de a Geometria estar servindo de veículo para a introdução da linguagem da Teoria dos Conjuntos, a notação de letras minúsculas para pontos (elementos) e letras maiúsculas para retas, planos e figuras geométricas (conjuntos), se adotada, dará maior uniformidade notacional aos diversos assuntos matemáticos".

Observando estas últimas evidências, nossa conclusão sobre o modelo teórico modifica-se. Justificamos a mudança, pela utilização desta nova abordagem geométrica que pode ter gerado características de um modelo *Euclidianista*.

Na análise desse documento realizada por Pires (2006), a autora ao identificar o modelo teórico, conclui que[20] :

> "Nesse período a marca era menos de uma perspectiva do 'euclidianismo', como a apresentada por Gascón e mais de uma submissão de estudo de geometria ao estudo dos conjuntos, das relações, das transformações e dos invariantes".

3.2 Geometria Experimental

O Movimento Matemática Moderna conquistou muitos educadores e matemáticos, pois contagiados pelas "idéias de estrutura e unidade, pela formalização de conceitos, pela linguagem de conjuntos, não hesitaram em condenar a intuição, sempre presente no curso de desenvolvimento da Matemática" (Pires, 2000, p. 30-31).

Neste período, mesmo com a presença marcante deste movimento, surge um Projeto denominado *Geometria Experimental* que apresenta outra conotação,

---

[19] SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Guias curriculares para ensino de 1º grau**. São Paulo, CERHUPE, 1975, p. 263.

[20] PIRES, Célia Maria Carolino. "Ensino de Geometria no Brasil: uma análise com base em modelos de referência que colocam em relação à epistemologia e a didática da Geometria", Anais da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil (08 a 11 de Outubro de 2006). Painel nº 2. CD ROM.

“trouxe ao cenário dominado pela Matemática Moderna, uma proposta que pode ser considerada filiada ao modelo do Empirismo” (PIRES, 2006).

Segundo a autora, este material foi proposto para alunos de 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, apresentando uma estrutura composta por atividades geométricas direcionadas ao processo de exploração e descoberta dos alunos.

Observa que além de exploratório, o material rompe com seqüências tradicionais, como por exemplo, a proposta do trabalho com figuras tridimensionais como ponto de partida, ao invés de “ponto, reta, plano e espaço”.

Acrescenta ainda que o Projeto contribuiu com este período marcado pelo MMM, não só com a mudança do modelo teórico, mas também com inovações curriculares direcionadas para a Geometria, como a relação estabelecida entre o estudo das formas com elementos da natureza (explorando a simetria, por exemplo).

3.2.1 Analisando as atividades

Em nossa pesquisa, analisaremos o *Livro do Aluno*, composto por três volumes, sendo os Volumes 1 e 3 - 1ª edição de 1972 e o Volume 2 - 2ª edição de 1982. Estão organizados por meio de fichas numeradas, compostas por atividades que direcionam o aluno passo a passo por meio de perguntas ou testes.

Ao analisá-las, observamos que em sua seqüência os conteúdos são abordados e aprofundados gradativamente, ocorrendo com freqüência a presença de uma introdução comentando a atividade realizada na ficha anterior, seguida de uma formalização do conteúdo geométrico estudado.

Nas atividades os enunciados são bem elaborados e objetivos, sendo direcionados pela experimentação e descoberta constantemente.

Para melhor ilustrarmos nossa descrição, apresentamos fac-símile da Fichas nº.1 e nº. 2 do Volume 1, p. 1-4.

Fac-símile do Projeto Geometria Experimental – Volume 1 (livro do aluno), PREMEM – MEC/IMECC – UNICAMP. Campinas - São Paulo, 1972 – 1974, p. 1-2.

FICHA Nº 1

Atividade nº 1

Você tem uma bacia com água. Pegue dois ou três objetos que você tem em sua mesa. Coloque esses objetos na água.

1. O que acontece com os objetos quando você os põe na água?
2. Você e seus colegas viram a mesma coisa ou coisas diferentes?
3. Olhe novamente os objetos colocados na bacia. Faça uma lista de tudo o que você percebe. Você não esqueceu alguma coisa?
4. Repita a experiência com outros tipos de objetos.
5. O que você e seus colegas viram, na experiência anterior, se repete com os objetos que você colocou agora na água? Procure explicar, com suas próprias palavras, o que você observou nessas experiências.

Teste nº 1

Leia o que está abaixo e assinale o que aconteceu na atividade anterior.

a. Todos os objetos boiaram.
b. Todos os objetos foram até o fundo da bacia.
c. Alguns objetos boiaram, alguns mergulharam sem atingir o fundo e alguns foram até o fundo.
d. Todos os objetos mergulharam sem atingir o fundo.

Atividade nº 2

Leia as afirmações abaixo:

1. Os objetos mais leves bóiam e os mais pesados afundam.
2. Os maiores afundam e os menores bóiam.
3. Os redondos bóiam e os outros afundam.
4. Os menores afundam e os maiores bóiam.

Alguma dessas afirmações explica o que aconteceu na atividade nº 1?

Respostas:

Atividade nº 1

Teste nº 1

a. ( )
b. ( )
c. ( )
d. ( )

Atividade nº 2

1

Realize as atividades seguintes e compare os resultados obtidos com o que dizem as quatro afirmações anteriores.

Atividade nº 3

Use a mesma bacia com água da atividade nº 1.

1. Pegue os objetos vermelho 1 e branco 2.
2. Você percebe imediatamente qual desses objetos é o maior. Ponha esses objetos na balança e veja qual deles é o mais leve.
3. Coloque esses objetos na bacia com água.
4. O que aconteceu?

Atividade nº 4

1. Pegue uma bolinha de gude e o objeto vermelho 1.
2. Coloque esses objetos na bacia com água.
3. O que aconteceu?

Atividade nº 5

1. Pegue os objetos branco 1 e vermelho 2.
2. Coloque esses objetos na bacia com água.
3. O que aconteceu?

Atividade nº 6

Você vai usar, novamente, a bacia com água e a balança.

1. Escolha dois dos objetos que estão sobre a mesa.
2. Use a balança para comparar seus pesos.
3. Coloque esses objetos na água e veja o que acontece.
4. Escreva o que você viu.
5. Pegue um outro par de objetos. Compare seus pesos . Coloque os objetos na água. Escreva o que você viu.
6. Repita a experiência com todos os outros pares de objetos.
7. Compare todos os resultados que você obteve e procure achar uma explicação para o fato de que alguns objetos afundam e outros bóiam.

Respostas:

Atividade nº 3

Atividade nº 4

Atividade nº 5

Atividade nº 6

1) vermelho 1 e vermelho 2:

2) vermelho 1 e branco 1:

3) vermelho 1 e branco 2:

4) vermelho 2 e branco 1:

5) vermelho 2 e branco 2:

6) branco 1 e branco 2:

Fac-símile do Projeto Geometria Experimental – Volume 1 (livro do aluno), PREMEM – MEC/IMECC – UNICAMP. Campinas - São Paulo, 1972 – 1974, p. 3-4.

FICHA Nº 2

Ao fazer as experiências anteriores, você viu que alguns objetos boiavam e outros afundavam.

Pese os objetos vermelho 1 e vermelho 2. O que faz com que objetos do mesmo tamanho possam ter pesos diferentes, recebe o nome de DENSIDADE.

Teste nº 2

O fato de um objeto afundar, quando colocado na água, depende somente:

a) do tamanho do objeto;
b) do peso do objeto;
c) da forma do objeto;
d) da densidade do material.

Atividade nº 7

Você tem um vidro contendo água. Nele está colada uma tira de papel.

1. Marque, com um risco nesse papel, a altura atingida pela água.
2. Ponha na água o paralelepípedo sem furo. Olhe, agora, a altura da água.
3. O que aconteceu?
4. Procure explicar porque isso aconteceu?
5. Anote os resultados a que você chegou.
6. Retire o paralelepípedo sem furo e coloque o cubo sem furo.
7. O que aconteceu?

Teste nº 3

Assinale, entre as afirmações abaixo, aquela que você acha correta.

a) Ao colocar o objeto na água, a altura atingida pela água não muda.
b) Ao colocar o objeto na água, o nível da água no vidro baixa.
c) Ao colocar o objeto na água, o nível da água no vidro sobe.

Atividade nº 8

Use, nas mesmas condições da atividade nº 7, o paralelepípedo que tem um furo.

1. Marque, no papel, a altura atingida pela água antes de colocar o objeto.

Respostas:

Teste nº 2

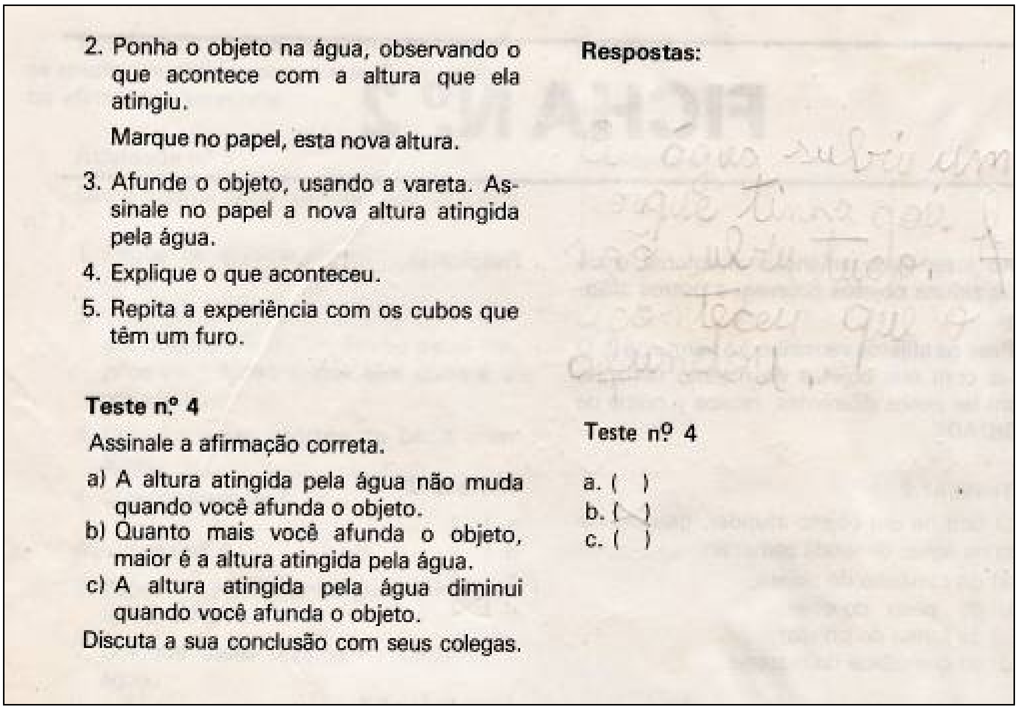
a. ( )
b. ( )
c. ( )
d. (X)

Atividade nº 7

Teste nº 3

a. ( )
b. ( )
c. (X)

Atividade nº 8



2. Ponha o objeto na água, observando o que acontece com a altura que ela atingiu.
   Marque no papel, esta nova altura.
3. Afunde o objeto, usando a vareta. Assinale no papel a nova altura atingida pela água.
4. Explique o que aconteceu.
5. Repita a experiência com os cubos que têm um furo.

Teste nº 4

Assinale a afirmação correta.

a) A altura atingida pela água não muda quando você afunda o objeto.
b) Quanto mais você afunda o objeto, maior é a altura atingida pela água.
c) A altura atingida pela água diminui quando você afunda o objeto.

Discuta a sua conclusão com seus colegas.

Respostas:

Teste nº 4

a. ( )
b. ( )
c. ( )

A seguir, analisaremos a Ficha nº. 11 do Volume 1, pois as atividades nela propostas correspondem a um dos conteúdos inovadores do currículo na época como mencionamos anteriormente, a Simetria.

Sua apresentação ocorre por meio de um jogo, denominado “Jogo do Espelho” no qual o aluno utilizando um espelho marcará pontos sempre que ao posicioná-lo na figura, obterá sua imagem completa (Atividade nº. 33). As figuras utilizadas são de diferentes formas geométricas e além destas é solicitada uma folha de cartolina dividida ao meio, que funcionará como o eixo de simetria (Atividade nº. 34).

A atividade nº. 35 sugere que o aluno, utilizando apenas uma peça quadrada, coloque o espelho sobre ela e verifique de quantas maneiras podemos posicioná-lo mantendo a mesma imagem, em seguida é solicitado o uso de outras figuras.

Apenas na finalização da ficha é que surge o termo Simetria, porém não é realizada uma definição formal, apenas observam que “a margarida, a borboleta, a peça quadrada possuem posições em que a imagem refletida no espelho completa a parte que está fora dele. Por isso dizemos que há **SIMETRIA** (...)” (Geometria Experimental, 1972, p. 34).

Para melhor análise, segue fac-símile da Ficha nº. 11 do Volume 1, p. 33-34.

Fac-símile do Projeto Geometria Experimental – Volume 1 (livro do aluno), PREMEM – MEC/IMECC – UNICAMP. Campinas - São Paulo, 1972 – 1974, p. 33-34.

FICHA Nº 11

Atividade nº 33

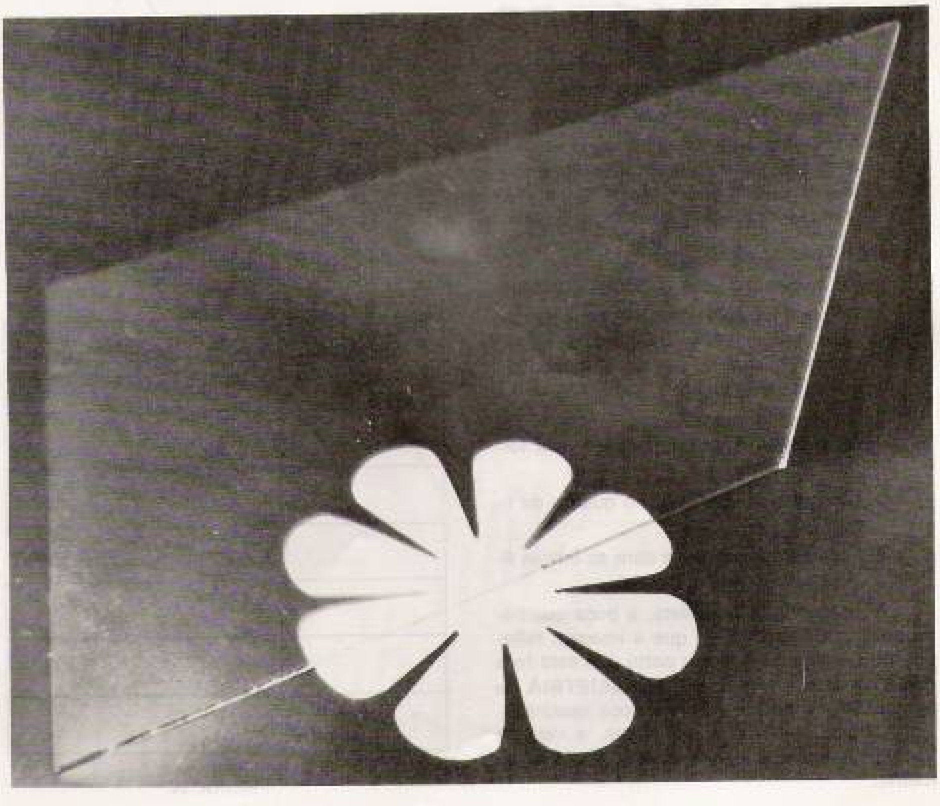
Você vai participar do jogo do espelho. Em cada rodada, o jogador só poderá usar o espelho uma única vez.

1. Coloque o espelho sobre a margarida como mostra a fotografia.
2. A parte que está em cima da carteira e a sua imagem refletida no espelho formam juntas uma figura.
3. Toda vez que essa figura mostrar a margarida inteirinha, você fez um ponto que será marcado no quadro da figura 13.

Respostas:
Atividade nº 33

OBJETO	NÚMERO DE POSIÇÕES DO ESPELHO
margarida	
borboleta	
rosto	
estrela	

FIGURA 13



33

4. ATENÇÃO. Você só marcará ponto quando a figura mostrar a margarida exatamente como ela é.
5. Você não poderá colocar o espelho na mesma posição mais do que uma vez.
6. Continue o jogo usando a estrela de 6 pontas, a borboleta, o rosto de algum de seus colegas.
7. O número de posições diferentes que você colocou o espelho, em cada um dos casos, é o mesmo?

Atividade nº 34

Você vai usar peças de várias formas geométricas, um espelho e uma folha de cartolina dividida ao meio.

1. Usando várias destas peças, forme uma figura qualquer num dos lados da folha.
2. Coloque o espelho sobre a linha que divide a folha.
3. Copie, na outra metade da folha, a imagem que você vê refletida no espelho.
4. Forme outras figuras. Copie, na outra metade da folha, a imagem refletida no espelho de cada uma destas figuras.
5. Forme mais de uma figura. Desta vez você não vai usar o espelho. Reproduza, na outra metade da folha, a imagem que esta figura refletiria no espelho.

Atividade nº 35

Pegue somente a peça de forma quadrada.

1. Coloque o espelho sobre a peça de maneira que a parte da peça que está diante do espelho e a sua imagem formem um quadrado.
2. De quantas maneiras você pode colocar o espelho sobre esta peça para formar o quadrado?
3. Escreva este resultado no quadro da figura 14.
4. Faça esta experiência com as outras figuras e complete o quadro.

A margarida, a borboleta, a peça quadrada possuem posições em que a imagem refletida no espelho completa a parte que está fora dele. Por isso dizemos que há **SIMETRIA** na margarida, na borboleta e na peça quadrada.

Olhe ao seu redor, na classe, e veja se você pode apontar alguns objetos que tem simetria.

Respostas:

Atividade nº 34

Atividade nº 35

NOME DAS PEÇAS	NÚMERO DE MANEIRAS DE COLOCAR O ESPELHO

FIGURA 14

Dando continuidade à análise do Volume 1, verificamos a presença de atividades desenvolvidas por meio de dobraduras. Na Ficha nº. 12 (p. 37-40), por exemplo, estas são utilizadas para dar idéia ao aluno de reta, plano, posições de retas e ângulo reto. Ao final, solicita-se a utilização de um pedaço de arame para a obtenção de um retângulo a partir da construção de ângulos retos.

Observamos no material a presença constante de fotos ou desenhos, proporcionando aos alunos uma melhor orientação e compreensão sobre o desenvolvimento das atividades.

A seguir apresentamos fac-símile da Ficha nº. 12 do Volume 1 (p. 37-38), para ilustrarmos nossa observação.

Fac-símile do Projeto Geometria Experimental – Volume 1 (livro do aluno), PREMEM – MEC/IMECC – UNICAMP. Campinas, São Paulo, 1972-1974, p. 37-38.

FICHA Nº 12

Atividade nº 36

Pegue uma folha de papel e dobre esta folha, como é mostrado na figura 15.

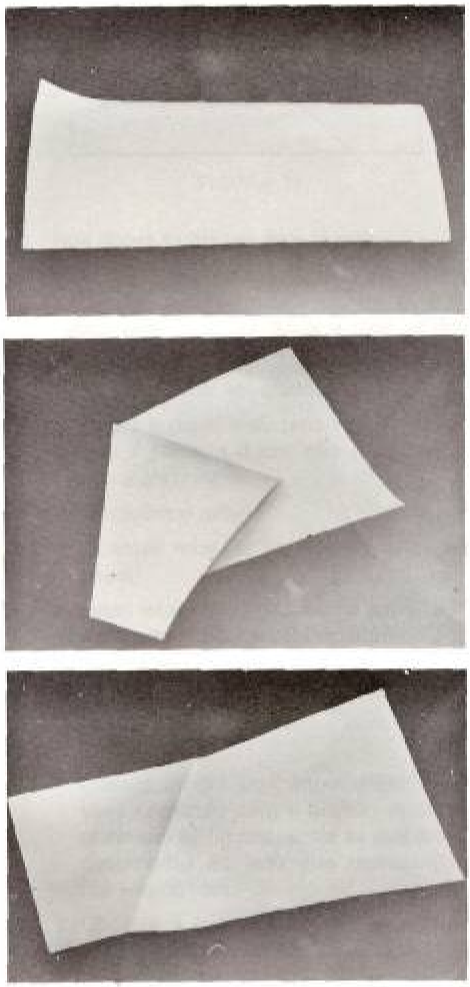


FIGURA 15

1. Abra a folha e, com o auxilio de uma régua, faça um risco em cima da dobra que apareceu *na folha*. A folha aberta nos dá idéia de um plano. O risco que foi feito nos dá a idéia de uma reta deste plano.

Respostas:

Atividade nº 36

37

2. Na figura aparece um pontilhado para nos lembrar que uma reta continua em ambas as direções.

Uma reta continua mesmo fora do papel.

3. As paredes, o chão e o teto também nos dão idéia de plano.

Veja nestes planos se você encontra outras coisas que representem retas.

Atividade n.º 37

Pegue uma folha de papel.

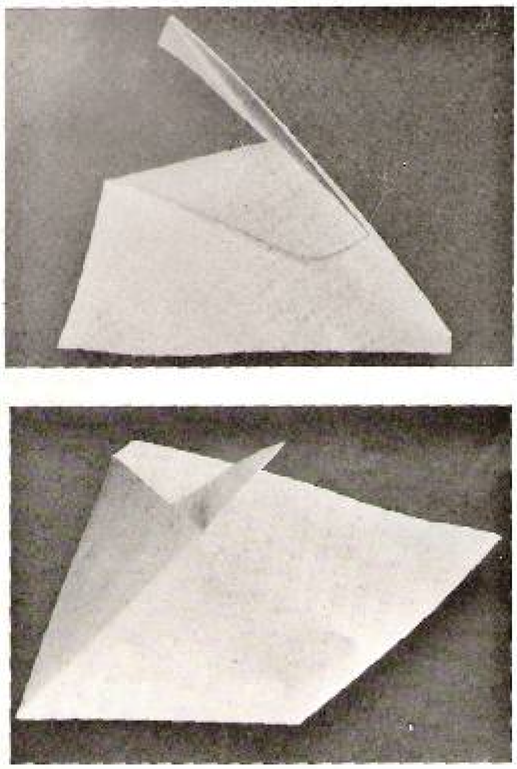


FIGURA 16

1. Dobre o papel em qualquer lugar, como mostra a fotografia da figura 16. Dobre o papel, mais uma vez, de modo que a primeira dobra se sobreponha a ela mesma.
2. Desdobre o papel.
3. Quantas retas estão representadas no papel?
4. Estas retas, representadas na folha, chamam-se *retas perpendiculares*.
5. Observe a figura 17.

A parte representada em vermelho mostra um ângulo formado pelas duas retas. Quantos ângulos foram formados?

Respostas:

Atividade n.º 37

Ao finalizarmos a análise do Volume 1, verificamos que os conteúdos geométricos abordados são bem diversificados: densidade, volume, sólidos geométricos, simetria, posições de retas, entre outros. Já no volume 2, as atividades estão direcionadas para unidades de comprimento, perímetro e área; sendo o papel quadriculado um material constantemente utilizado como recurso, como podemos observar na atividade nº. 27 da Ficha nº. 8, p. 34.

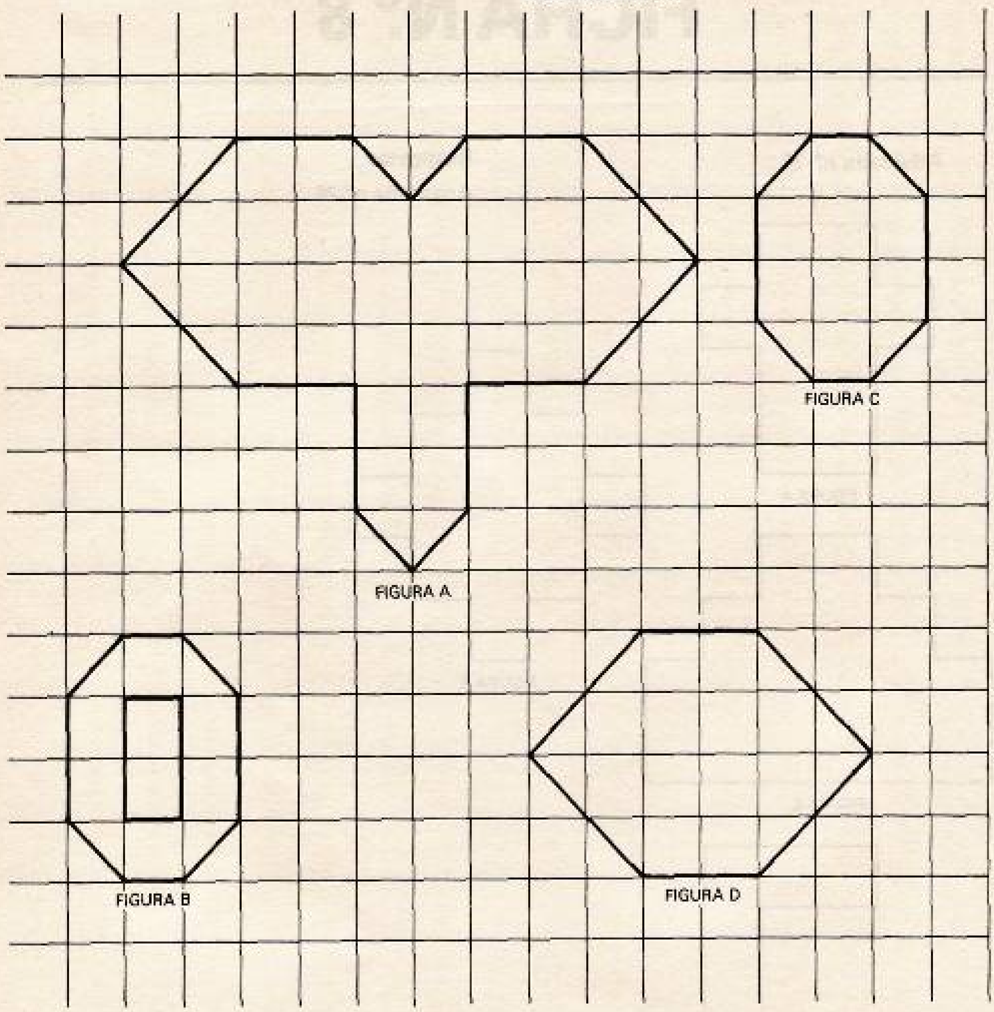
No volume 3, as atividades direcionam-se para o trabalho com área e volume de sólidos geométricos como prisma, cilindro, cone, pirâmide e cubo, e a partir da Ficha nº. 9 são apresentadas às unidades de medida de comprimento, de área e volume.

Apesar do caráter experimental sempre presente, os cálculos também são solicitados, como por exemplo, na Ficha nº. 8 onde podemos identificar seu uso nas áreas das bases dos sólidos utilizados e na variação da altura do nível de areia.

Fac-símile do Projeto Geometria Experimental – Volume 2 (livro do aluno), PREMEM – MEC/IMECC – UNICAMP. Campinas, São Paulo, 1972-1974, p. 34.

Atividade n.º 27

Respostas:
Atividade n.º 27



Calcule as áreas das figuras A, B, C, D.
Se você achar mais fácil, decomponha as figuras dadas em figuras mais simples como o quadrado, o retângulo ou o triângulo. Preencha a tabela da figura 32 com os resultados que você obtiver.

FIGURA	ÁREA

FIGURA 32

34

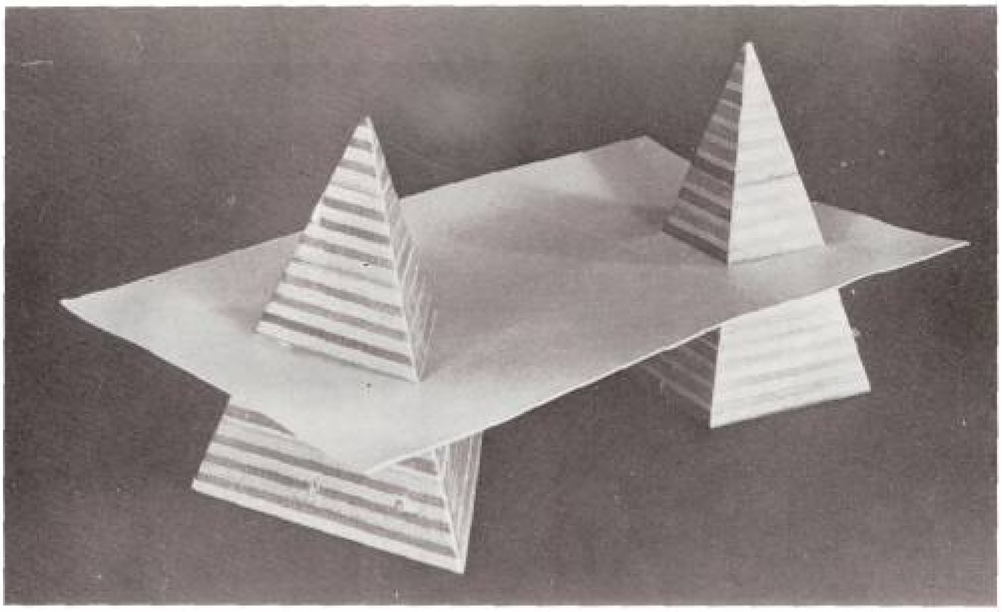
Fac-símile do Projeto Geometria Experimental – Volume 3 (livro do aluno), PREMEM – MEC/IMECC – UNICAMP. Campinas, São Paulo, 1972-1974, p. 15-16.

FICHA Nº 8

Nas atividades seguintes, as folhas de papel representam planos que indicaremos por letras maiúsculas.

Atividade nº 23

1. Com o material que lhe foi dado, monte duas pirâmides apoiadas na folha de papel A.
2. Coloque a folha de papel B entre as partes que compõem os sólidos, como mostra a foto abaixo.



3. Retire as partes que ficaram acima da folha de papel B.
4. Desenhe o contorno das peças, sobre as quais a folha B está apoiada.
5. *Calcule a área das figuras que você desenhou.*
6. Coloque a folha de papel C em uma *posição diferente* da folha de papel B. Desenhe o contorno das peças, sobre as quais a folha C está apoiada.

Respostas:

Atividade nº 23

15

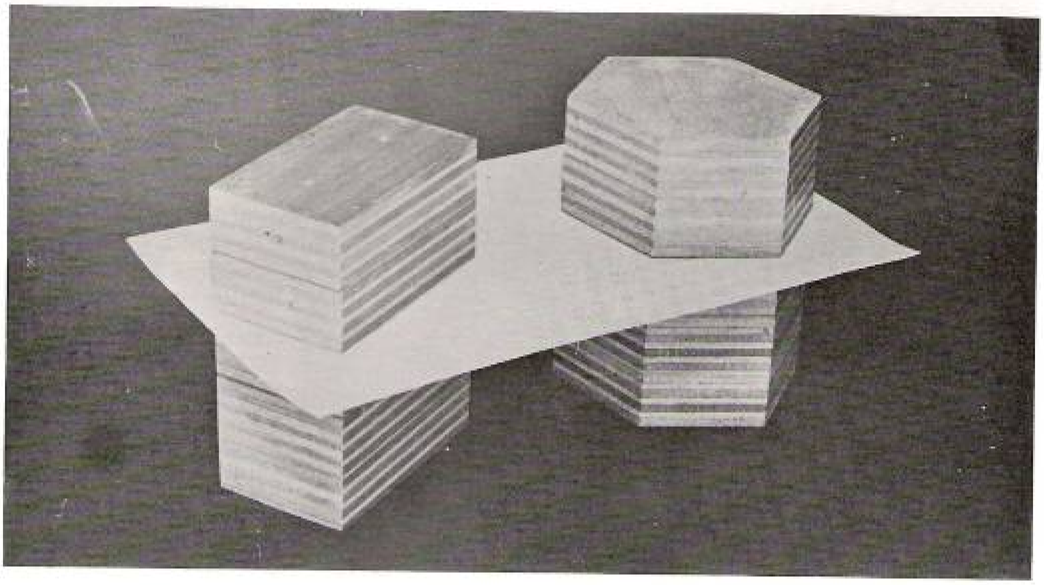
7. Qual a área das duas novas figuras que você desenhou?
8. Ponha areia fina no vidro n.º 1, até atingir uma das marcas do vidro.
9. Coloque no vidro n.º 2 as peças que compõem uma das pirâmides. Despeje, nesse vidro, a areia do vidro n.º 1. Marque a altura atingida pela areia. Qual é a variação da altura do nível da areia?
10. Repita a experiência, usando desta vez, as peças da outra pirâmide. O que você observa?

Respostas:

Atividade n.º 24

1. Com o material que lhe foi dado, monte dois prismas apoiados sobre a folha de papel D.
2. Coloque a folha de papel E entre as partes que compõem os prismas como mostra a foto abaixo.

Atividade n.º 24



3. Retire as partes do prisma que ficaram acima da folha de papel E.
4. Desenhe o contorno das peças sobre as quais a folha E está apoiada.
5. Calcule a área destas figuras.
6. Coloque a folha de papel E em outra posição. Desenhe as figuras e encontre a área de cada uma delas.
7. Ponha areia no vidro n.º 1, até atingir uma das marcas do vidro.

Após analisarmos o material, percebemos que apesar de ter convivido no tempo com o Movimento Matemática Moderna ele traz uma dimensão diferente, bastante inovadora para época ao propor atividades que exploram problemas não triviais, destacando seu momento exploratório. A perspectiva descrita por Gascón como *Quase-empirista* pode ser considerada a marca dessa seqüência de atividades em que são privilegiados procedimentos, não algorítmicos como conjecturar, contrastar, refutar, buscar contra-exemplos e não a mera repetição de regras e fórmulas prontas.

3.3 Proposta Curricular para o ensino de Matemática

Iniciou-se, em 1985 na rede pública estadual de São Paulo, a elaboração das Propostas Curriculares para o ensino de 1º e 2º graus, a partir de reflexões sobre o papel da Matemática no currículo, problemas identificados no ensino dessa disciplina e análise crítica dos Guias Curriculares (Pires, 2000, p. 49-50).

A análise desse documento, em nossa pesquisa, justifica-se pela importância de se verificar a nova organização curricular dos conteúdos a serem ensinados neste período, substituta da organização precedente.

Como o foco de nosso trabalho está direcionado para o Ensino Fundamental II, analisaremos apenas a Proposta Curricular para o ensino de matemática - 1º grau. O documento que será observado é a 4ª edição do ano de 1992, cuja elaboração estava vinculada diretamente a discussões referentes à qualidade de ensino das escolas públicas.

Analisando inicialmente o prefácio da Proposta, identificamos a apresentação dos problemas referentes ao ensino de Matemática, acima mencionados como um dos pontos de partida para elaboração deste documento[21]:

[21] SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de matemática: 1º grau. 4. ed.** São Paulo: SE/CENP, 1992, p. 7.

- A preocupação excessiva com o treinamento de habilidades com a mecanização de algoritmos, com a memorização de regras e esquemas de resolução de problemas, com a repetição e a imitação e não com uma aprendizagem que se dê, inicialmente, pela compreensão de conceitos e de propriedades, pela exploração de situações-problema nas quais o aluno é levado a exercitar sua criatividade, sua intuição;
- A priorização dos temas algébricos e a redução ou, muitas vezes, eliminação de um trabalho envolvendo tópicos de Geometria;
- A tentativa de se exigir do aluno uma formalização precoce e um nível de abstração em desacordo com seu amadurecimento.

As concepções condutoras dos trabalhos no desenvolvimento desse documento foram norteadas pelas seguintes questões: O lugar da Matemática no currículo; Os conteúdos e a abordagem; A Matemática e a linguagem; A extensão dos programas; O papel da avaliação e A estruturação desta proposta.

No documento, justifica-se que a apresentação dos conteúdos será realizada em diferentes níveis de abordagem, respeitando a integração dos temas a serem trabalhados. Serão desenvolvidos em espiral, proporcionando ao professor uma maior flexibilidade do desenvolvimento do programa dentro de uma ou mais séries.

Os assuntos que compõem esta proposta estão divididos em três grandes temas: Números, Geometria e Medidas. Solicita-se um desenvolvimento simultâneo deles, pretendendo-se com essa ação uma visão global e a obtenção das "grandes metas para o ensino de Matemática na escola básica: as aplicações práticas e o desenvolvimento do raciocínio lógico" (Proposta Curricular para o ensino de Matemática 1º grau, 1992, p. 19).

3.3.1 O tema Geometria

Na estruturação dessa proposta, os autores do documento mencionam que para concretizarem as considerações feitas irão especificar as metas a serem alcançadas a cada série, apresentando sugestões de distribuição, detalhamento e integração dos temas. Acrescentam ainda que, serão desenvolvidas indicações detalhadas dos conteúdos com o acompanhamento de sugestões de natureza metodológica e comentários técnicos.

Ressaltamos que, como os conteúdos listados pelo tema “Medidas” representam uma junção entre números e geometria, em nossa análise manteremos nosso foco direcionado apenas para o tema “Geometria”, no qual será explorada a manipulação dos objetos, o reconhecimento das formas, as suas características e propriedades, até chegarmos a uma sistematização.

Observaremos em cada série todos os itens abordados, porém apresentaremos apenas os objetivos e as observações mais significativas, buscando elementos que nos permitam identificar no final desta análise o modelo teórico que permeia este documento.

Os objetivos da 5ª série esperam que o aluno (Proposta Curricular para o ensino de Matemática 1º grau, 1992, p. 74):

- Tenha noções de reta, semi-reta e segmento de reta.
- Identifique retas paralelas, retas concorrentes e retas reversas.
- Identifique alturas de triângulos, paralelogramo e trapézios.
- Conheça os elementos de uma circunferência e de uma superfície esférica.
- Divida a circunferência utilizando dobraduras, compasso ou transferidor em 2, 3, 4, 6, 8 arcos iguais.
- Determine a porcentagem que cada uma das partes da circunferência representa em relação à circunferência.

Identificamos nos objetivos a presença do experimentalismo, quando é solicitada a utilização de dobraduras. Nas observações para o professor, é sugerido que para a distinção de circunferência, círculo, superfície esférica e esfera sejam utilizados materiais manipulativos como anéis, discos de papel cartão, bolinhas de pingue-pongue e de isopor, aconselha-se ainda o uso de compasso para construção.

Os objetivos da 6ª série esperam que o aluno (Proposta Curricular para o ensino de Matemática 1º grau, 1992, p. 94):

- Desenvolva a noção de ângulo e de ângulo central através de experimentação e construções.
- Identifique a posição de dois segmentos perpendiculares com o fato deles formarem um ângulo de 90°, bem como, reconheça e nomeie pares de segmentos perpendiculares existentes em configurações planas e de pares de arestas perpendiculares existentes em configurações espaciais.
- Identifique o perpendicularismo entre retas a planos experimentalmente e inferindo que uma reta só é perpendicular a um plano A, quando for perpendicular a qualquer reta contida nesse plano e que passa pelo ponto A.
- Identifique, por meio de medição, que os pontos de bissetriz de um ângulo eqüidistam dos lados do mesmo e trace bissetrizes de ângulos, utilizando régua e compasso.
- Reconheça os ângulos formados por retas coplanares cortadas por uma transversal e estabeleça as relações de igualdade ou de suplementaridade nos casos onde as retas coplanares são paralelas.
- Desenvolva a noção de polígono e faça construções de polígonos regulares com auxílio de régua, compasso e transferidor.
- Verifique experimentalmente os teoremas relativos à soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo.

Observando os objetivos acima listados, notamos que o experimental, a descoberta e as construções geométricas estão mais presentes que na série anterior.

Ao analisarmos na Proposta os conteúdos desta série, identificamos a solicitação da “verificação experimental e demonstração do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo” (Proposta Curricular de Matemática, 1992, p. 95), observamos neste item a presença do momento exploratório e do tecnológico-teórico.

Nos comentários, várias orientações são direcionadas para o tema Geometria, entre elas destacamos as seguintes: para introdução do conceito de ângulo na circunferência, é sugerida a utilização de dobraduras dando continuidade ao trabalho desenvolvido na série anterior; para a verificação do perpendicularismo entre retas, e planos é proposto o uso de uma vareta ou de um canudo de refrigerante; para a identificação da Bissetriz de um ângulo, novamente o recurso da dobradura.

Os objetivos da 7ª série esperam que o aluno (Proposta Curricular para o ensino de Matemática 1º grau, 1992, p. 128):

- Identifique as diagonais de um polígono e determine o número de diagonais de um polígono qualquer.
- Verifique, utilizando dobraduras, régua e compasso as propriedades das diagonais de um paralelogramo.
- Verifique experimentalmente o teorema de Pitágoras e o demonstre através de áreas.
- Construa triângulos com régua e compasso, conhecendo-se as medidas dos três lados.
- Verifique experimentalmente a propriedade da desigualdade triangular.
- Tenha disponível o conceito de congruência e, em particular, de triângulos congruentes.
- Identifique a correspondência entre os elementos de triângulos congruentes.
- Reconheça os casos de congruência na resolução de situações-problema.
- Identifique e aplique as propriedades e relações de triângulos isósceles e eqüiláteros.
- Identifique quadriláteros, seus elementos e propriedades e classifique-os.
- Identifique mediana e mediatriz de um triângulo.
- Construa com régua e compasso o baricentro, o circuncentro, o incentro e o ortocentro de um triângulo.
- Aplique os casos de congruência de triângulos na demonstração das principais propriedades relativas a triângulo e quadriláteros.

Nas orientações, observamos o uso de dobraduras para identificação das diagonais de um polígono; para a determinação do número de diagonais, sugere-se a construção com fios coloridos numa prancha de madeira; na verificação experimental do Teorema de Pitágoras, utiliza-se o cálculo das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos e hipotenusa de vários triângulos retângulos, sugerindo a apresentação aos alunos de triângulos que não sejam retângulos.

Percebemos, nesta série, novamente o uso de construções e a presença da descoberta, do momento exploratório e do momento tecnológico-teórico.

Em nossa pesquisa ao realizarmos a análise bibliográfica, buscamos identificar nos livros os Casos de Congruência de Triângulos, nesta Proposta verificamos a presença deste conteúdo nos objetivos acima listados. Mantendo o critério anteriormente utilizado, faremos a seguir a transcrição das orientações sugeridas para o desenvolvimento deste tópico, para uma breve análise[22]:

> **“Congruência de triângulos**
> Utilizando ainda a sobreposição, agora de triângulos, identificar triângulos congruentes e estabelecer as correspondências necessárias entre lados de um e de outro triângulo para que essa congruência se verifique.
>
> **Os casos de congruência de triângulos**
> - Os casos deverão ser verificados, experimentalmente, por meio de construção dos triângulos com régua, compasso e transferidor. A questão que deverá orientar essa pesquisa é a seguinte: ‘Será necessário que se conheçam previamente todos os três pares de lados correspondentes e todos os três pares de ângulos correspondentes dos dois triângulos, para termos certeza que eles são congruentes?’.
> Esse é o momento para se trabalhar com situações que utilizem localmente o raciocínio hipotético-dedutivo, fazendo uso dos casos de congruência de triângulos (...)”

O recurso didático utilizado para este conteúdo, manteve-se direcionado para a “sobreposição”, porém neste momento utiliza-se o experimentalismo e a descoberta, acompanhados pela construção.

Os objetivos da 8ª série esperam que o aluno (Proposta Curricular para o ensino de Matemática 1º grau, 1992, p. 152):

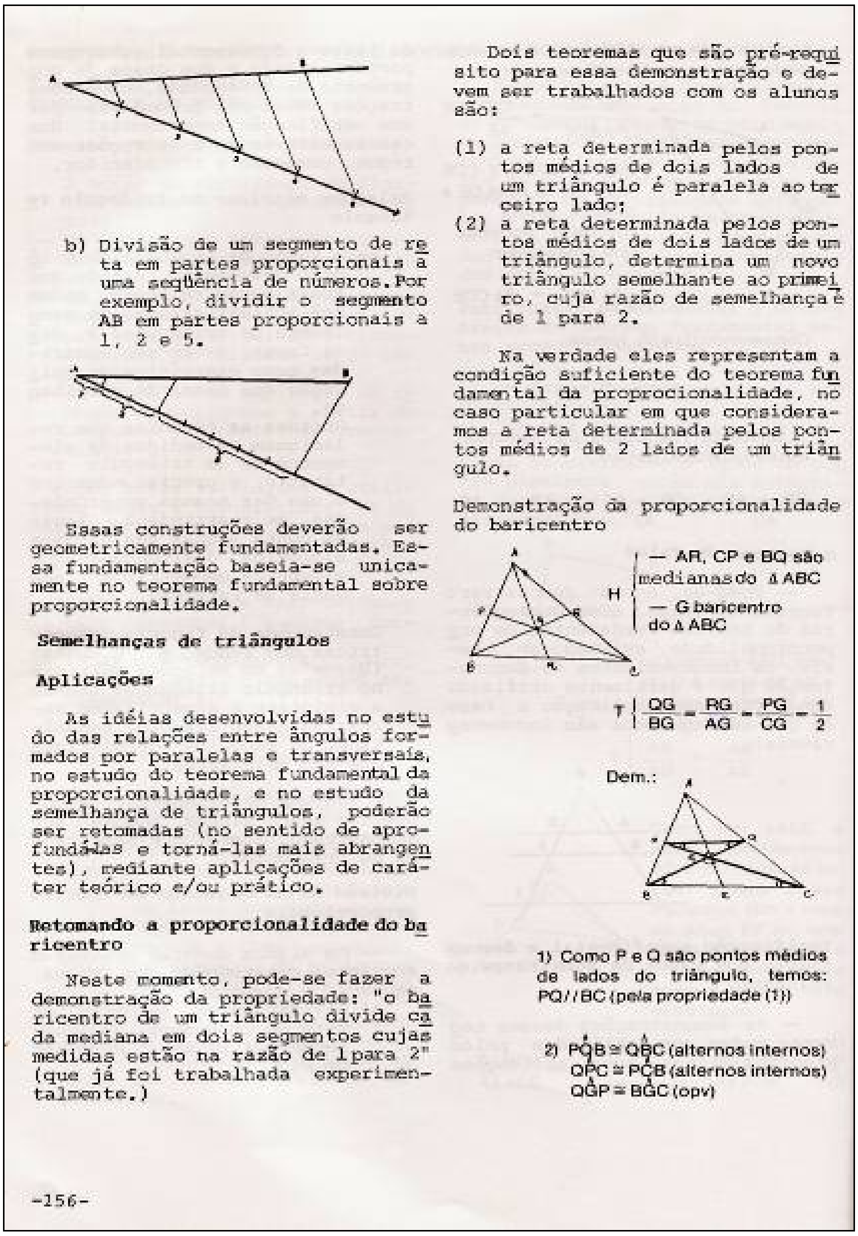
- Desenvolva a noção de semelhança de figuras planas e verifique experimentalmente o teorema fundamental da proporcionalidade e sua demonstração.
- Demonstre o teorema de Tales e saiba aplicá-lo em situações-problema.
- Aplique o teorema fundamental da proporcionalidade na verificação e demonstração dos casos de semelhança em triângulos.
- Utilize os teoremas sobre semelhança de triângulos para demonstrar o teorema de Pitágoras.
- Verifique experimentalmente as relações métricas nos polígonos regulares e realize cálculos do lado e do apótema de um polígono inscrito numa circunferência de raio dado.

[22] Id., Ibid., p. 145.

Novamente verifica-se a presença do momento exploratório e o tecnológico-teórico em quase todos os objetivos, pois as demonstrações são constantemente solicitadas nesta série.

Ao analisarmos os comentários, percebemos que as orientações utilizam os mesmos recursos das séries anteriores, portanto não mencionaremos nenhuma observação. Nesta série, optamos por ilustrar este tópico escolhendo como conteúdo "Semelhança de Triângulos", para possibilitar a verificação desta abordagem.

Fac-símile da Proposta Curricular para o ensino de Matemática 1º grau, 4ª edição. São Paulo: SE/CENP, 1992, p. 156-157.



b) Divisão de um segmento de reta em partes proporcionais a uma seqüência de números. Por exemplo, dividir o segmento AB em partes proporcionais a 1, 2 e 5.

Essas construções deverão ser geometricamente fundamentadas. Essa fundamentação baseia-se unicamente no teorema fundamental sobre proporcionalidade.

Semelhanças de triângulos

Aplicações

As idéias desenvolvidas no estudo das relações entre ângulos formados por paralelas e transversais, no estudo do teorema fundamental da proporcionalidade, e no estudo da semelhança de triângulos, poderão ser retomadas (no sentido de aprofundá-las e torná-las mais abrangentes), mediante aplicações de caráter teórico e/ou prático.

Retomando a proporcionalidade do baricentro

Neste momento, pode-se fazer a demonstração da propriedade: "o baricentro de um triângulo divide cada mediana em dois segmentos cujas medidas estão na razão de 1 para 2" (que já foi trabalhada experimentalmente.)

-156-

Dois teoremas que são pré-requisito para essa demonstração e devem ser trabalhados com os alunos são:

(1) a reta determinada pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado;
(2) a reta determinada pelos pontos médios de dois lados de um triângulo, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro, cuja razão de semelhança é de 1 para 2.

Na verdade eles representam a condição suficiente do teorema fundamental da proprocionalidade, no caso particular em que consideramos a reta determinada pelos pontos médios de 2 lados de um triângulo.

Demonstração da proporcionalidade do baricentro

H — AR, CP e BQ são medianas do ΔABC
— G baricentro do ΔABC

$$T \quad \frac{QG}{BG} = \frac{RG}{AG} = \frac{PG}{CG} = \frac{1}{2}$$

Dem.:

1) Como P e Q são pontos médios de lados do triângulo, temos: PQ//BC (pela propriedade (1))

2) $P\hat{Q}B \cong Q\hat{B}C$ (alternos internos)
$Q\hat{P}C \cong P\hat{C}B$ (alternos internos)
$Q\hat{G}P \cong B\hat{G}C$ (opv)

Logo, $\Delta PGQ \cong CGB$ (AAA) portanto, seus lados homólogos são proporcionais.

3) $\frac{PQ}{CB} = \frac{QG}{BG} = \frac{PG}{CG}$

analogamente demonstra-se que

4) Como $\frac{PQ}{CB} = \frac{1}{2}$

(pela propriedade ... (2))

então, $\frac{QG}{BG} = \frac{PG}{CG} = \frac{1}{2}$

analogamente demonstra-se que

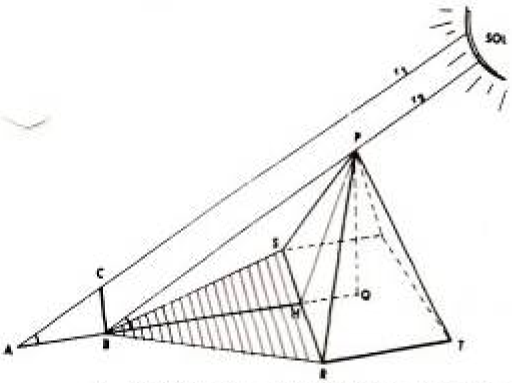
$\frac{RG}{AG} = \frac{PG}{CG} = \frac{1}{2}$

5) Logo, $\frac{QG}{BG} = \frac{RG}{AG} = \frac{PG}{CG} = \frac{1}{2}$

(pela propriedade transitiva da igualdade).

O problema da sombra e um pouco de história

— Os alunos podem se interessar por saber como os egípcios da antiguidade calculavam a altura das pirâmides.



O cateto BC do ΔABC do desenho representa um bastão cravado perpendicularmente ao solo no ponto B (que é a sombra do vértice P da pirâmide). O cateto AB do ΔABC representa a sombra do bastão nesse momento. O cateto PQ do ΔPQB representa a altura da pirâmide. O cateto BQ do ΔBQP representa a soma da altura do ΔBRS (triângulo da sombra) com a metade da aresta da base da pirâmide, isto é:

$$m(BQ) = m(BH) + m(HQ)$$

Como os raios de Sol chegam à terra aproximadamente paralelos, então, $r_1 // r_2$. As retas r_1 e r_2 cortadas pela transversal AQ, dão-nos:

$$\boxed{B\hat{A}C \cong Q\hat{B}P} \quad (1)$$

(ângulos correspondentes)

Como os triângulos ABC e PQB são retângulos em B e Q, respectivamente, então:

$$\boxed{\hat{B} \cong \hat{Q}} \quad (2)$$

De (1) e (2) vem: $\Delta ABC \cong \Delta BQP$ (caso AA)

Logo,

$$\frac{QP}{BC} = \frac{BQ}{AB} \rightarrow \boxed{QP = \frac{BC \cdot BQ}{AB}}$$

Essa última expressão nos permite concluir que a medida da altura (QP) da pirâmide (que é inacessivel) pode ser determinada, conhecendo-se seguintes distâncias acessiveis:

m(BC) — comprimento do bastão que foi cravado ao solo

m(AB) — comprimento da sombra do bastão no instante da experiência

m(BQ) — a soma entre a metade de uma das arestas da

Podemos observar que nas orientações são realizadas sugestões, aplicações, demonstrações, enfim elementos que elucidam e auxiliam o professor em seu trabalho.

No início desse capítulo, justificamos a análise do referido documento por substituir os conteúdos a serem ensinados da organização precedente, os *Guias Curriculares*. No final deste material, localizamos um paralelo traçado entre os objetivos do *Guia* e da *Nova Proposta Curricular*, do qual transcrevemos apenas o tema direcionado para a Geometria (Proposta Curricular para o ensino de Matemática 1º grau, 1992, p. 181).

GUIAS CURRICULARES	NOVA PROPOSTA CURRICULAR
• Objetivos gerais inovadores, como o desenvolvimento da intuição geométrica, aquisição de habilidades em construções geométricas e processos de medidas, etc. • Propõe trabalhar a noção de transformação, até hoje inviabilizada. • Ênfase na utilização da linguagem dos conjuntos na geometria – o que desviou a atenção das propriedades geométricas.	• Opção pelo ensino da Geometria a partir da manipulação, exploração de objetos do mundo físico, reconhecimento das formas mais freqüentes de sua caracterização, através das propriedades, do encadeamento e relacionamento entre elas, caminhando para uma axiomatização provisória no final do 1º grau.

Apesar de apresentar idéias inovadoras, Pires (2000, p.50) menciona que "O processo de implantação dessa proposta encontrou barreiras. Apesar de não haver críticas por parte dos professores às idéias nele contidas, o fato é que sua incorporação à prática não ocorreu como se poderia esperar".

No tocante ao ensino de Geometria, ao explicitar sua opção pela "a partir da manipulação, exploração de objetos do mundo físico, reconhecimento das formas mais freqüentes de sua caracterização, através das propriedades (...)" (Proposta Curricular para o ensino de Matemática 1º grau, 1992, p. 181), há provavelmente um ratificar da perspectiva *Quase-empirista* que já se manifestava no projeto "Geometria Experimental". Ressaltamos que algumas exemplificações de atividades nessa proposta são muito similares às contidas no projeto.

Outro destaque importante refere-se à observação contida no documento indicando um caminhar para uma “axiomatização provisória” no final do 1º grau, buscando não perder de vista a perspectiva *Euclidianista*.

3.4 Experiências Matemáticas

Elaborado em 1993 por membros da Equipe Técnica de Matemática da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP – e mais dois professores o *Projeto*, *Experiência Matemáticas*, tem seu desenvolvimento motivado pelos resultados do trabalho com as *Atividades Matemáticas*[23].

Como produto deste projeto, foi composto o material que será por nós analisado, em sua 2ª versão preliminar do ano de 1996, sendo a 1ª ocorrida em 1994. Estão divididos em quatro blocos direcionados de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental.

No prefácio, os autores consideram que (Experiências Matemáticas, 1996, p. 13):

> “(...) no ensino fundamental a Matemática é necessária ao aluno como ferramenta básica para que ele possa resolver situações da vida diária, compreender melhor o próprio ambiente para comunicar idéias e mesmo para entender melhor assuntos de outras áreas”.

Para que os objetivos acima sejam atingidos, as atividades elaboradas neste material contemplam o desenvolvimento de competências básicas para futuros cidadãos e não apenas um preparo dos alunos, para estudos posteriores.

O caminho traçado para a construção da Matemática neste material, foi esquematizado buscando-se (Experiências Matemáticas, 1996, p. 13):

- Relacionar observações do mundo real a representações (tabelas, figuras, esquemas).
- Relacionar estas representações a uma atividade matemática e a conceitos.

[23] Conjunto de sugestões destinadas aos professores de Ciclo Básico 3ª e 4ª séries que, segundo depoimentos de professores e especialistas da área, contribuíram para a renovação do ensino de Matemática não apenas na rede pública estadual paulista, nas escolas municipais, particulares e mesmo, em outros estados brasileiros.

As atividades foram desenvolvidas por meio de problemas concretos, que atribuam significado a linguagem e as idéias matemáticas, possibilitando aos alunos a construção de seu conhecimento.

Ressalta-se neste material que[24]:

> "A apropriação da Matemática pelo aluno não pode limitar-se ao conhecimento formal de definições, de resultados e técnicas, ou até mesmo de demonstrações. Mas é indispensável sim, que os conhecimentos tenham significado para ele, a partir de questões que lhes são colocadas e que saiba utiliza-las para resolver problemas. Desse modo não vemos sentido, para qualquer tema, insistir-se sobre aspectos puramente mecânicos e mnemônicos.
>
> Isso não impede, pelo contrário, é desejável, que o professor proponha exercícios de síntese com a finalidade de organizar as conclusões, os resultados obtidos a partir de situações diversas."

3.4.1 As atividades geométricas

Como já mencionamos, as propostas das atividades neste material estão direcionadas para a construção do conhecimento do aluno. Os temas nelas abordados, seguem as diretrizes contidas na *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no 1º grau*, organizando-se em três grandes eixos que são: Números, Medidas e Geometria.

Em seu desenvolvimento priorizam um destes eixos, porém valoriza-se a integração de todos, buscando-se o desenvolvimento de idéias que sejam fundamentais.

Os autores do material privilegiam atividades de construção, de desenhos, de organização de dados evitando-se a fragmentação de conhecimentos e métodos, evidenciando "que cada objeto matemático não é um bloco que subsiste isoladamente (...)" (Experiências Matemáticas, 1996, p.13).

Observando o sumário de cada série, procuramos selecionar as atividades que abordam nosso eixo de pesquisa, para nelas identificarmos os conteúdos geométricos trabalhados, apresentados a seguir pelo título da atividade[25]:

---

[24] SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências matemáticas:** 5ª série, 2ª versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996, p .14.
[25] Id., Ibid., p. 9-12.

5ª SÉRIE	• Geometria: Sólidos geométricos • Segmentos: Desenhando e estimando medidas • Os Prismas • Prismas e alturas • Simetrias • Áreas e perímetros • Dos prismas aos paralelogramos • Ampliação e redução de figuras • Das pirâmides aos triângulos • Volume/Capacidade • Circunferência e esfera • Divisão do círculo
6ª SÉRIE	• Elementos da circunferência e da esfera • Circunferência e ângulos • Medindo ângulos • Perpendicularismo • Transporte de ângulos • Paralelas e transversais • Os triângulos • Os quadriláteros • Os polígonos • Polígonos e problemas • Relações: diagonais, vértices e arestas • Posições de circunferências • Mediatriz • Bissetriz • Rotação e Translação • Medindo redondos • O que pensou Eratóstenes?
7ª SÉRIE	• Diagonais de um polígono • Áreas e perímetros dos polígonos • Relação pitagórica: uma verificação experimental • Figuras e sombras • Transformações de figuras • Área e perímetro do círculo • Congruência de figuras • Triângulos e alguns pontos notáveis • Outra vez a relação de Pitágoras • Um triângulo, suas medianas e alturas • Mediatriz, bissetrizes e alguns problemas • Problemas polígonos estre-lados
8ª SÉRIE	• Semelhança de figuras planas • Semelhança de triângulos • Teorema de Tales • Mais aplicações do Teorema de Tales • O triângulo retângulo e Pitágoras • Relações métricas nos triângulos retângulos • Inscrição e relações métricas • Circunscrição e relações métricas • Algumas relações métricas em polígonos regulares • Determinando áreas de superfícies de poliedros • Áreas de superfícies de corpos redondos

Ao analisar o formato das atividades desse material, verificamos que são numeradas, apresentam inicialmente seus objetivos, em seguida abordam os tópicos do conteúdo por meio de “Partes” também numeradas, nas quais constam o material necessário e a descrição do desenvolvimento com utilização freqüente de anexos e são quase sempre finalizadas com comentários direcionados ao professor.

Selecionamos em cada série uma atividade em que foi privilegiado o eixo Geometria, a fim de efetuarmos o estudo proposto.

Na 5ª série, escolhemos a Atividade 25, denominada “Dos prismas aos paralelogramos”, cujo objetivo é “identificar propriedades métricas e geométricas de prismas e paralelogramos” (Experiências Matemáticas, 1996, p.257).

Em seu desenvolvimento orienta-se aos alunos que, em grupo, recortem em uma cartolina um par de modelos de cada figura (triângulo, quadrado, retângulo, hexágono e pentágono) pertencente à folha-tipo I-25 (em anexo no final da atividade), a seguir furem estas nos “bicos”, passando um elástico e unindo os vértices correspondentes nas figuras iguais.

O aluno deverá fixar um dos polígonos sobre a mesa e movimentar o outro, mantendo-o sempre paralelo ao primeiro. Logo após, algumas questões são propostas para direcionar o desenvolvimento do conteúdo e solicitar ao professor uma formalização dos tópicos abordados. Acrescentam ainda comentários que contribuem com a exploração da atividade proposta.

Para ilustrarmos, segue fac-símile de algumas páginas da atividade analisada.

Fac-símile "Experiências Matemáticas: 5ªsérie", 2ª Versão Preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996, p.257-259.

ATIVIDADE 25: DOS PRISMAS AOS PARALELOGRAMOS

OBJETIVOS: Identificar propriedades métricas e geométricas de prismas e paralelogramos.

PARTE 1: PRISMAS E ELÁSTICOS

MATERIAL NECESSÁRIO: Folha-tipo I-25, folha de papelão duro, elásticos de dinheiro (30)

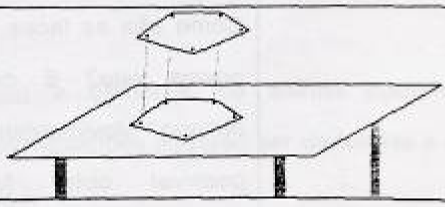
DESENVOLVIMENTO:

Com antecedência, fornecer à classe uma folha-tipo I-25 para cada aluno. Divida a classe em pequenos grupos. Oriente-os para que recortem em cartolina dois modelos de cada uma das figuras e, a seguir, furem as figuras próximo aos bicos para passar elástico unindo os vértices correspondentes em figuras iguais.

A atividade consta em fixar um dos polígonos sobre a mesa e movimentar o outro paralelamente à mesa.

Algumas questões podem ser colocadas para os grupos.

O que representam os elásticos?

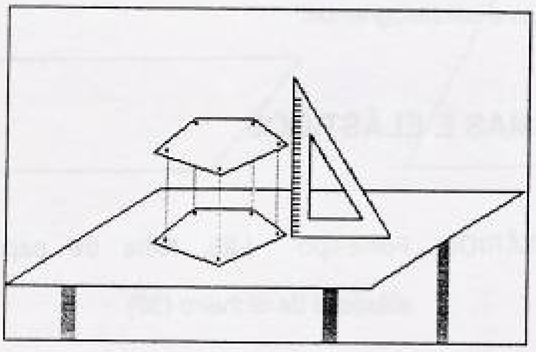


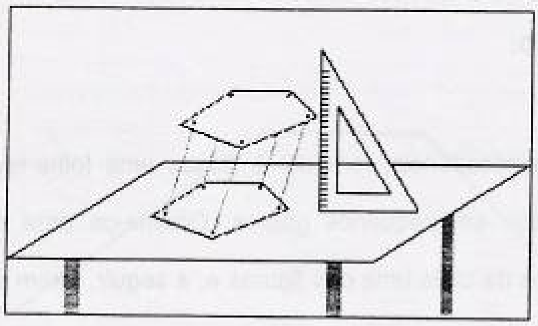
257

Com o auxílio do esquadro, faça com que as arestas laterais formem:

a) Ângulo reto com base.

b) Ângulo não reto com a base.





Informe aos alunos que, no caso a), eles têm a representação de um prisma reto e, em b), um prisma oblíquo.

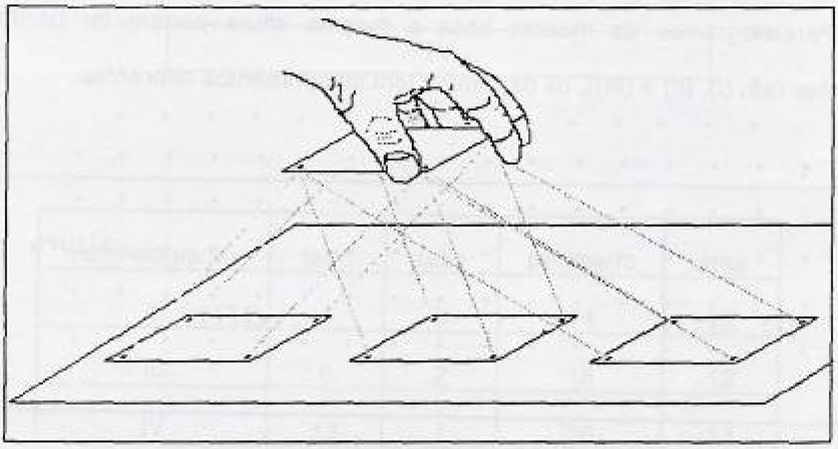
Como são as faces laterais de um prisma reto? E de um prisma oblíquo? Movimentando sua mão, é possível obter faces laterais triangulares, pentagonais...?

Como obter prismas diferentes, com mesmas bases e mesma altura?

Como obter um cubo?

COMENTÁRIOS:

Os movimentos que os alunos farão com os pares de figuras, ligadas pelos elásticos, propiciam a eles condições de visualizar vários prismas distintos com bases e alturas iguais, mantendo uma base fixa e deslocando a outra sobre a mesa.



Esta atividade proposta para prismas pode ser estendida, com as devidas adaptações, para paralelogramos, utilizando o geoplano numa atividade, como a seguinte.

Dispondo de um geoplano e barbante, os alunos podem ser incentivados a "criar" paralelogramos. Muitas questões poderão ser discutidas a partir disso, como por exemplo:

259

No material proposto para a 6ª série, selecionamos a Atividade 18: Os Quadriláteros, com o objetivo de "explorar quadriláteros, suas propriedades e a composição e decomposição de figuras" (Experiências Matemáticas, 1996, p. 205).

Realizamos essa escolha, pois ao observarmos o desenvolvimento da atividade, localizamos na Parte 3 a construção do Tangram para a composição de figuras e na Parte 4 a construção de pentaminós, materiais utilizados para estímulo dos alunos.

Fac-símile "Experiências Matemáticas: 6ªsérie", Versão Preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996, p. 209-211.

DESENVOLVIMENTO:

Peça a cada aluno que construa um quadrado de 10 cm de lado, num pedaço de cartolina, usando régua e compasso. A seguir, coloque na lousa as seguintes instruções:

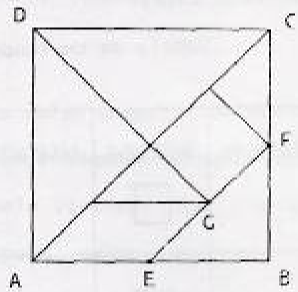
1. Traçar a diagonal AC.

2. Marcar os pontos E e F, pontos médios de AB e BC, respectivamente. Traçar EF.

3. Marcar G, ponto médio de EF e traçar GD.

4. Construir um segmento perpendicular a AC passando pelo ponto F.

5. Construir um segmento de reta do ponto G a AC, paralelo a AB.



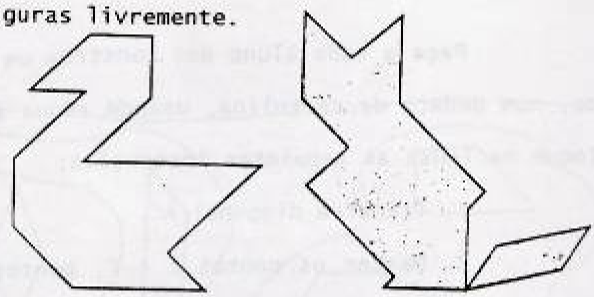
Observe e discuta com a classe os procedimentos de construção.

Comente que eles acabam de construir um Tangran, que é um milenar jogo originário da China. A respeito dele, conta-se que um chinês chamado Tan deixou cair uma placa quadrada no chão e esta partiu-se em 7 pedaços. Quando ele quis recompor o quadrado, percebeu que com as peças podia montar figuras que se pareciam com pássaros, homens etc. Ele mostrou a seus amigos, que construíram seus Tangrans (quadros de Tan) e popularizaram o jogo.

209

Proponha à classe:

1. Compor figuras livremente.



2 Compor quadrados, retângulos, triângulos, paralelogramos e trapézios, usando em cada vez, uma peça, duas peças, sete peças.

Depois de um tempo deverão surgir soluções como estas:

Nº de Peças	Quadrados	Retângulos	Triângulos	Paralelogramos	Trapézios
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

3. Compor pentágonos e hexágonos, com 7 peças.

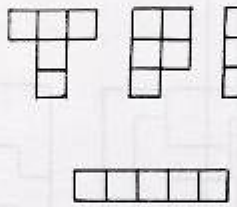
PARTE 4: OS PENTAMINÓS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Papel quadriculado (2 cm x 2 cm), régua, compasso, cartolina.

DESENVOLVIMENTO:

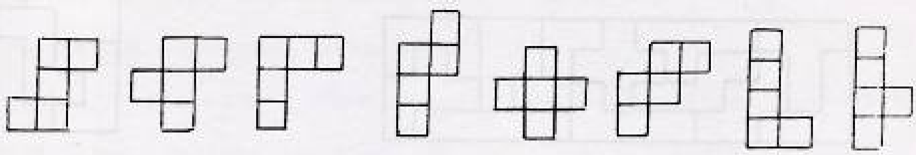
Forme grupos de alunos e peça a cada grupo que construa cinco quadrados de 2 cm de lado, em cartolina.

A seguir eles farão diferentes composições usando os cinco quadrados, como por exemplo:



Só não valem composições em que quadrados fiquem "unidos" apenas pelo vértice. Eles têm que ter pelo menos um lado em comum.

A medida em que eles vão encontrando as soluções devem copiá-las numa folha quadriculada de 2 cm por 2 cm. No total, é possível encontrar 12 dessas figuras, que são chamadas PENTAMINÓS.



211

Nos conteúdos referentes à 7ª série, identificamos o tema por nós destacado nesta pesquisa: "Congruência de Triângulos". No material, sua abordagem foi realizada na Atividade 18: Congruência de Figuras, Parte 3: Fazendo Construções e Descobertas.

Para seu desenvolvimento é proposta a construção de triângulos com instrumentos de desenho, orientada por quatro itens, nos quais são dados: três lados de medidas diferentes, três ângulos de medidas diferentes, dois lados de medidas diferentes e a medida do ângulo formado por eles e dois ângulos de medidas diferentes e um lado comum a esses dois ângulos.

Inicialmente, é solicitado que os alunos comparem os triângulos construídos por sobreposição e logo após identifiquem em quais itens ficaram congruentes quando sobrepostos.

Os alunos verificarão que no primeiro, terceiro e quarto itens, os triângulos por eles construídos são congruentes, porém, no segundo nem todos são, pois dados três ângulos, não há garantia desta ocorrência.

Logo após, solicita-se ao professor que comente os três “casos de congruência de triângulos”, sugerindo a resolução de dois novos problemas de construção. O primeiro oferece dois lados de medidas diferentes e um ângulo oposto a um dos lados dados e outro é dado um lado, um ângulo adjacente e outro oposto. Nestas novas construções os alunos verificarão que apenas na segunda construção foi obtida a congruência, surgindo o quarto caso.

Na abordagem desse conteúdo, identificamos mais uma vez a presença do experimental e da descoberta e em seu desenvolvimento a utilização da sobreposição e da construção.

Fac-símile "Experiências Matemáticas: 7ªsérie", Versão Preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996, p. 209-212.

Os alunos irão percebendo, aos poucos, que, embora duas figuras congruentes tenham todos os lados correspondentes e todos os ângulos correspondentes, de mesma medida, em alguns casos não é necessário comparar todos esses elementos, um a um.

PARTE 3: FAZENDO CONSTRUÇÕES E DESCOBERTAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Instrumentos de desenho.

DESENVOLVIMENTO:

Individualmente, os alunos irão fazer construções cujos dados serão colocados na lousa:

a) Construir um triângulo, cujos lados meçam 2 cm, 3 cm e 4 cm.

b) Construir um triângulo, cujos ângulos meçam 30°, 90° e 60°.

c) Construir um triângulo, cujos lados medem 3 cm e 5 cm, de modo que o ângulo formado por esses dois lados seja de 45°.

d) Construir um triângulo, que tenha um lado de 6 cm e dois ângulos, um de 60° e outro de 40°, sendo que o lado de 6 cm é comum a esses dois ângulos.

Quando os alunos terminarem as construções, discuta com eles o que aconteceu em cada situação, anotando pontos importantes. Dentre as observações, procure destacar:

209

1. Na situação a), todos os alunos devem ter desenhado triângulos que, se sobrepostos, são congruentes, ou seja, conhecendo-se os três lados, já se conhece "tudo" sobre o triângulo, inclusive os ângulos.

2. Na situação b), o fato de os ângulos terem sido dados não faz com que todos os triângulos desenhados sejam congruentes, certo?

3. Na situação c), eram dados dois lados e o ângulo formado por eles; isso levou os alunos a desenharem triângulos congruentes entre si.

4. Na situação d), eram conhecidos um lado e dois ângulos que tinham esse tal lado em comum; os triângulos obtidos também foram todos congruentes.

Comente com os alunos que até aqui já surgiram três dos chamados "casos de congruência de triângulos", nas situações a), c) e d), conhecidos por siglas que indicam quais os elementos estão servindo de base à comparação. São eles:

* L L L - lado, lado, lado.

SE DOIS TRIÂNGULOS TÊM OS TRÊS LADOS RESPECTIVAMENTE CONGRUENTES, ENTÃO ELES SÃO CONGRUENTES.

* L A L - lado, ângulo, lado.

SE DOIS TRIÂNGULOS TÊM DOIS LADOS E O ÂNGULO COMPREENDIDO ENTRE ELES, RESPECTIVAMENTE CONGRUENTES, ENTÃO ELES SÃO CONGRUENTES.

* A L A - ângulo, lado, ângulo.

SE DOIS TRIÂNGULOS TÊM UM LADO E DOIS ÂNGULOS A ELE ADJACENTES RESPECTIVAMENTE CONGRUENTES, ENTÃO ELES SÃO CONGRUENTES.

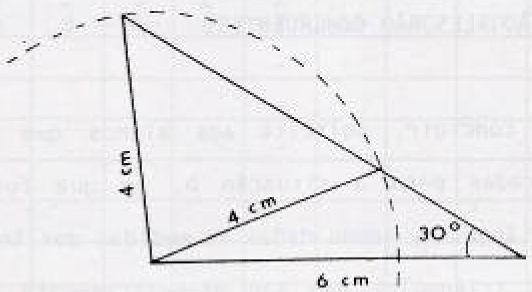
Proponha à classe a resolução de outros dois problemas de construção:

e) Construir um triângulo, que tenha lados medindo 6 cm e 4 cm e um ângulo de 30° que seja oposto ao lado de 4 cm.

f) Construir um triângulo, que tenha um lado medindo 8 cm, um ângulo adjacente a ele que meça 60° e um ângulo oposto a ele, que meça 45°.

Dê um tempo para que os alunos façam suas tentativas e depois discuta com eles os procedimentos usados, chamando atenção para os seguintes fatos:

- Na situação e) há duas possibilidades de solução:



Isso mostra que comparar dois lados e um ângulo oposto a um deles não é suficiente para concluirmos sobre a congruência entre dois triângulos.

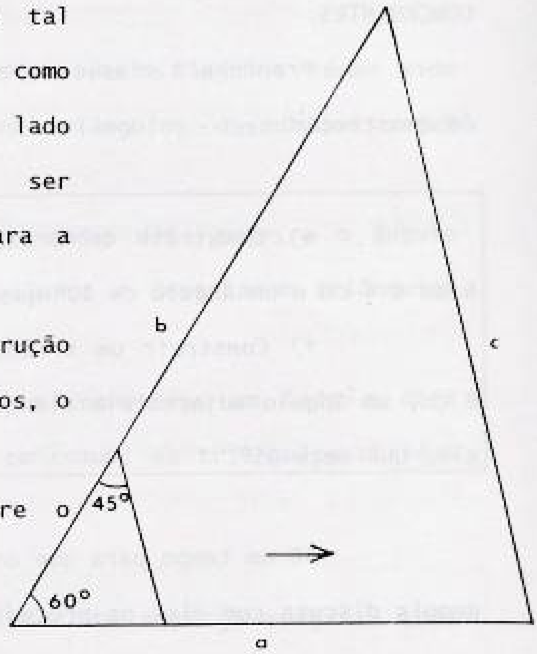
211

- Na situação f) é provável que haja alguma dificuldade na construção do ângulo de 45°.

Mostre a eles que tal ângulo pode ser construído tendo como vértice, qualquer ponto "P" do lado "b" (ver figura) e depois, ser transladado (por paralelismo) para a posição conveniente.

Embora essa construção possa ser feita de diferentes modos, o triângulo final é único.

Esta construção sugere o quarto caso de congruência:



* L A Ao - lado - ângulo adjacente e ângulo oposto.

SE DOIS TRIÂNGULOS POSSUEM UM LADO, UM ÂNGULO ADJACENTE E O ÂNGULO OPOSTO A ESSE LADO, RESPECTIVAMENTE CONGRUENTES, ENTÃO ELES SÃO CONGRUENTES.

Para concluir, solicite aos alunos que retomem as soluções encontradas para a situação b, em que foi pedida a construção de triângulos, sendo dadas as medidas dos ângulos.

Esses triângulos não são necessariamente congruentes (a menos que haja coincidências). Mas eles têm algo em comum. O que é?

212

No material referente à 8ª série, selecionamos a Atividade 6: Semelhança de triângulos, com o objetivo de "verificar, experimentalmente, os casos de semelhanças de triângulos" (Experiências Matemáticas, 1996, p.79). Esta atividade é composta por duas partes, sendo a primeira “O jogo das pistas”, cujo objetivo é comparar os triângulos para verificar a semelhança entre eles, por meio de pistas relativas ao seu formato (desenhos propostos na atividade Anexo I, p. 83) quanto aos ângulos, proporcionalidade entre as razões de seus lados, etc.

Ao terminar o jogo, será proposta pelo professor uma discussão para que os alunos verifiquem quantas pistas eram necessárias para ser bem sucedido, concluindo que dois triângulos são semelhantes, se cumprem uma das três condições:

I) Têm ângulos iguais (AAA)
II) Têm lados proporcionais (LLL)
III)Têm um ângulo igual compreendido entre os lados proporcionais (LAL)

Na segunda parte é proposto um problema cujo objetivo é o de comparar os procedimentos utilizados para sua resolução. No final da atividade, é proposta como curiosidade a construção do Pantógrafo, aparelho usado para construir figuras semelhantes.

Para ilustrar, segue fac-símile da primeira parte da Atividade 6, do Anexo I e da proposta da confecção do Pantógrafo.

Fac-símile "Experiências Matemáticas: 8ª série", Versão Preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996, p. 79-81.

ATIVIDADE 6: SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS.

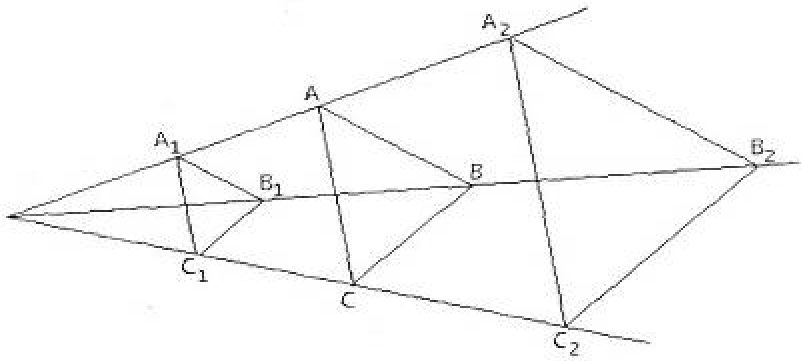
OBJETIVOS: Verificar, experimentalmente, os casos de semelhança de triângulos.

PARTE 1: O JOGO DAS PISTAS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Seis cartelas (anexo I).

DESENVOLVIMENTO:

Comente com a classe que quando um triângulo é ampliado ou reduzido por meio de uma homotetia, o triângulo obtido por essa transformação, é semelhante ao primeiro e tem ângulos iguais a ele e lados homólogos proporcionais.



Uma vez assegurada a compreensão desse fato, proponha à classe, a realização de um jogo: seis alunos da classe vão receber de você uma cartela na qual está desenhado um triângulo (use os modelos do anexo I) e escrita uma senha que indica o número de pistas que ele poderá usar. Senha 2 deve conter duas pistas e senha 3 deve conter três pistas. As pistas só podem ser de um dos dois tipos abaixo:

Um dos ângulos do triângulo mede ... graus
A razão entre os dois lados é proporcional ao número ...

Cada um dos seis alunos, um de cada vez, vai usar suas senhas, com o objetivo de fazer com que os demais alunos da classe construam triângulos semelhantes ao que está desenhado na cartela. Para isso ele vai ter um tempo para fazer suas escolhas, antes de "ditar" as pistas para a classe.

Terminado o jogo, é a hora de conferir se a utilização das pistas foram bem ou mal sucedidas, fazendo-se a comparação dos triângulos originais da cartela (que serão postos na lousa) e os feitos pela classe e verificando-se se são ou não semelhantes. A classe deve contabilizar, em cada caso, o número de soluções positivas.

Levante questões do tipo:

* O aluno que pode usar apenas duas senhas teve todas as chances necessárias para ser bem sucedido?

* E os que puderam usar três senhas?

As discussões devem conduzir á conclusão de que, dois triângulos são semelhantes, se cumprem uma das três condições.

I) Têm ângulos iguais (AAA).

II) Têm lados proporcionais (LLL).

III) Têm um ângulo igual compreendido entre os lados proporcionais (LAL).

Ou seja, quem tinha três pistas disponíveis, foi bem sucedido se usou um dos três critérios acima. Conclui-se também que, para decidir se dois triângulos dados são semelhantes, não é necessário comparar as medidas de seus seis elementos (3 lados e 3 ângulos), mas basta efetuar três medidas, especificadas nos critérios I, II e III.

PARTE 2: PEQUENOS DESAFIOS.

MATERIAL NECESSÁRIO: Nenhum.

DESENVOLVIMENTO:

Coloque na lousa o seguinte problema, para ser resolvido individualmente e, depois, discutido por grupos de alunos.

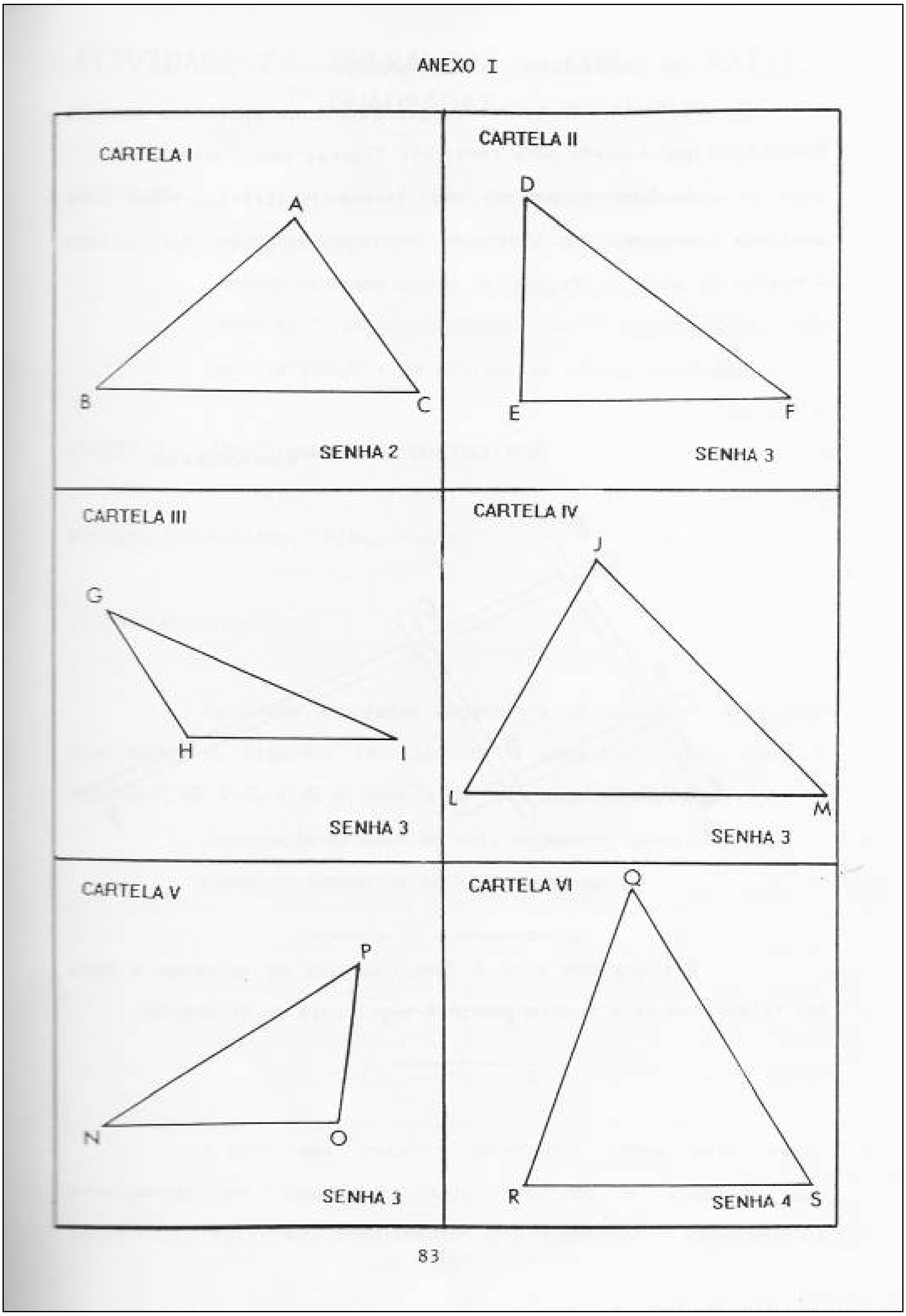
Os triângulos ABC e A'B'C' (figura) são isósceles e semelhantes. Encontre:

a) o comprimento do lado A'C'.

B) a altura relativa a base BC, do primeiro triângulo e a altura relativa a base B'C', do segundo triângulo.

C) a área de cada um dos triângulos.

Fac-símile “Experiências Matemáticas: 8ª série”, Versão Preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996, p.83-84.

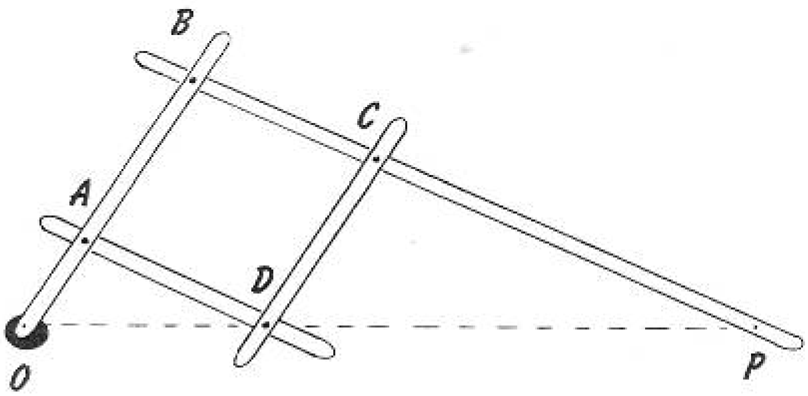


UMA CURIOSIDADE: O Pantógrafo.

Comente com a classe, que existe um aparelho, chamado PANTÓGRAFO que é usado para construir figuras semelhantes.

Se houver oportunidade, leve um desses aparelhos para a classe e proponha aos alunos a construção de um similar, usando 4 hastes de madeira (figura) e, preguinhos.

PANTÓGRAFO



Discuta com eles o funcionamento do aparelho e peça que relacionem esse funcionamento à semelhança de triângulos.

84

Como o projeto “Experiências Matemáticas” foi desenvolvido para subsidiar a “Proposta Curricular para o Ensino de Matemática”, ele revela uma perspectiva *Quase-empirista* e introduz no ensino de Geometria o uso de materiais que não eram tão requisitados nessa etapa da escolaridade no ensino de Geometria, como geoplanos, tangrans, poliminós que eram vistos como materiais direcionados apenas para crianças.

Capítulo 4

UMA ANÁLISE DAS PRESCRIÇÕES CURRICULARES E LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS

4.1 Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental

A Secretaria da Educação do Ensino Fundamental do Ministério da Educação e do Desporto coordenou a partir de 1995 um projeto nacional, que anunciava-se "como proposta de orientação para elaboração do currículo escolar de Matemática nos estados e municípios brasileiros" (Pires, 2005, p.54)

Segundo a autora, os *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio* é um projeto em que[26]:

> "(...) pela primeira vez em nossa história, educadores que atuam em diferentes níveis do sistema educativo debateram e indicaram diretrizes curriculares comuns para o ensino fundamental no Brasil."

Em nossa pesquisa, analisaremos a versão preliminar para discussão nacional de outubro de 1997, direcionado para o Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental.

Na apresentação do documento, os autores justificam que sua intenção "(..) é a de fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino de

[26] PIRES, Célia Maria Carolino. Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000, p. 56.

Matemática, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros.” (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1996).

Sua elaboração compõe-se de duas partes, sendo a primeira a apresentação da *Matemática no ensino fundamental* e a segunda o direcionamento para *3º e 4º ciclos do ensino fundamental*.

Analisaremos os tópicos componentes da primeira parte, dos quais destacaremos as informações mais significativas, para delinearmos um perfil da *Matemática no ensino fundamental* nesse documento.

Inicialmente é realizada uma *Breve análise da trajetória das reformas curriculares* da educação brasileira, constatando-se que[27]:

> “(...) ainda hoje nota-se, por exemplo, a insistência no trabalho com a linguagem da teoria dos conjuntos nas séries iniciais, a formalização precoce de conceitos, o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais e a pouca vinculação da Matemática com aplicações práticas” .

No *Quadro atual do ensino de Matemática no Brasil*, conclui-se no final da análise desse tópico que[28]:

> “(...) há problemas antigos e novos a serem enfrentados e solucionados, tarefa que requer operacionalização efetiva das intenções anunciadas nas diretrizes curriculares dos anos 80 e início dos anos 90, e a inclusão de novos elementos na pauta de discussões”.

Quanto ao *Conhecimento Matemático,* são destacadas primeiramente suas *principais características*, nas quais os autores entendem que[29]:

> “(...) hoje um saber matemático flexível, maleável às inter-relações entre seus vários conceitos, entre seus vários campos conceituais, os seus vários modos de representação, foi sempre o motor das inovações e das superações dos obstáculos ao seu desenvolvimento, desde os mais simples até aqueles que significaram verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento.

---

[27] Ministério da Educação e do Desporto e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília, 1997, p. 7.
[28] Id., Ibid., p. 11.
[29] Id., Ibid., p. 13.

> As necessidades atuais de integração dos saberes, demandam um conhecimento matemático também permeável aos problemas nos vários outros campos científicos".

Referente à *Matemática e construção da cidadania*, afirma que "para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc." (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1996, p. 14).

Quanto *A Matemática e os Temas Transversais*, trabalha-se numa perspectiva de transversalidade com questões de urgência social destacando o desenvolvimento dos temas direcionados para a ética, a orientação sexual, o meio ambiente, a saúde, a pluralidade cultural, o trabalho e consumo.

Justifica-se no projeto que o ensino da Matemática direcionado apenas para conteúdos acadêmicos, isoladamente, muito pouco contribui para a formação do aluno enquanto cidadão.

Para a abordagem do *Aprender e ensinar Matemática no ensino fundamental*, temas importantes são considerados como: o papel do professor e o saber matemático, o aluno e o saber matemático, as relações professor-aluno e aluno-aluno, alguns caminhos para fazer Matemática na sala de aula, o recurso à resolução de problemas, o recurso à história da Matemática, o recurso às tecnologias de comunicação, os objetivos e conteúdos propostos para o ensino fundamental e seleção de conteúdos.

Nesse último item, os autores do documento afirmam que o currículo de Matemática para o ensino fundamental deve contemplar o estudo dos números e das operações, do espaço e das formas e das grandezas e das medidas.

A organização dos conteúdos que contemplam estes temas está composta por blocos denominados: *Números e Operações*, *Espaço e Forma*, *Grandezas e Medidas* e *Tratamento da Informação*.

Porém, observa-se que há um trabalho de organização que compete ao professor, destacando que é de extrema importância a conexão dos diferentes blocos. Ressalta também que o aprofundamento dos conteúdos deverá ser realizado sempre que possível, originando projetos que os articulem.

O penúltimo tópico analisado na primeira parte desse material é a *Avaliação em Matemática*. Embora relacionada aos objetivos visados, nem sempre estes são alcançados plenamente pelos alunos, portanto devem-se construir critérios que indiquem o desenvolvimento obtido ao final de cada ciclo.

A *Síntese dos princípios que norteiam estes Parâmetros* para a área de Matemática no ensino de fundamental pauta-se por princípios “(...) cujo objetivo principal é o de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença dessa área do conhecimento em diversos campos da atividade humana”. (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1996, p. 46).

Na segunda parte dos *Parâmetros* aborda-se, inicialmente, o *Ensino e aprendizagem de Matemática no 3º ciclo*, destacando-se que o trabalho do professor deve possibilitar o desenvolvimento do aluno dentro de sua capacidade para a construção dos conhecimentos matemáticos e para a interação cooperativa e respeitosa na busca de soluções para problemas propostos.

A análise dos próximos tópicos dessa parte será realizada especificamente para o bloco *Espaço e Forma*, pois nele estão contemplados os conteúdos referentes ao campo geométrico, objeto de nossa pesquisa.

4.1.1 O bloco de conteúdos: “Espaço e Forma”

Os conceitos geométricos nesse documento são considerados como integrantes destacáveis no currículo de Matemática, porque “(...) por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”. (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1996, p. 41).

Com o estudo da Geometria, considera-se propício e interessante o desenvolvimento do trabalho com situações-problema, acrescenta-se ainda que ao abordar as noções geométricas o aprendizado de números e medidas recebe contribuição, pois com ele o aluno sente-se estimulado a observar, identificar diferenças e semelhanças, regularidades e irregularidades.

A seguir, faremos as transcrições dos objetivos, conceitos, procedimentos e critérios de avaliação do 3º e 4º ciclos referentes à Geometria, pois para nossa pesquisa essas informações são essenciais a fim identificarmos o modelo teórico que permeia esse documento.

Observando inicialmente o 3º ciclo (5ª e 6ª séries), verificamos que os *Objetivos propostos para o ensino de Matemática* visam o desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a[30]:

- resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;
- estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações;
- resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.

Os *Conceitos e procedimentos* destacados no bloco *Espaço e Forma* são os seguintes[31]:

- Interpretação, a partir de situações-problema (leitura de plantas, croquis, mapas, maquetes) de posição e deslocamento no plano (pontos, direção, sentido, distância, ângulo) e suas representações em um sistema de coordenadas cartesianas.
- Distinção, em contextos variados (obra de arte, elementos da natureza, objetos), de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.
- Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos como: corpos redondos e poliedros, poliedros regulares e não-regulares; prismas e pirâmides, círculos e polígonos, número de lados dos polígonos, eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.

[30] Id., Ibid., p. 53.
[31] Id., Ibid., p. 62-63.

- Composição e decomposição de figuras bidimensionais.
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.
- Movimentação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, da superfície, do perímetro).
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.
- Construção da noção de ângulo associada à idéia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas.
- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º e utilização desse resultado na determinação da soma dos ângulos internos de um polígono.
- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumento como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Utilização de notações algébricas para exprimir relações métricas ou generalização de propriedades relativas à contagem de elementos das figuras geométricas.

Analisando os *Critérios de avaliação direcionados para o 3º ciclo*, selecionamos a seguir, apenas aqueles que envolvem nosso tema, são eles[32]:

- Buscar os procedimentos matemáticos adequados para construir soluções num contexto de resolução de problemas numéricos, geométricos ou métricos.
- Utilizar a linguagem algébrica para representar as generalizações expressas em tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos.
- Obter e expressar resultados de medições utilizando as principais unidades padronizadas de medida de comprimento, capacidade, massa, superfície, volume, ângulo e tempo.

[32] Id., Ibid., p. 65-67.

- Utilizar as noções de direção, sentido, ângulo, paralelismo e perpendicularismo para representar num sistema de coordenadas a posição e a translação de pontos no plano.
- Analisar, classificar e construir figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais, utilizando as noções geométricas como ângulos, paralelismo, perpendicularismo, estabelecendo relações e identificando propriedades.

Para análise do 4º ciclo (7ª e 8ª séries), seguiremos a mesma seqüência do 3º. Os *Objetivos propostos para o ensino de Matemática* visam o desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a[33]:

- interpretar e representar a localização e o deslocamento de um objeto no plano cartesiano segundo um segmento de reta orientado;
- produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;
- desenvolver noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, particularmente as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais.

Os *Conceitos e procedimentos* destacados no bloco *Espaço e Forma* nesse ciclo são os seguintes[34]:

- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.
- Seções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
- Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).
- Representações de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.
- Identificação dos cinco poliedros regulares e constatação de que as faces dessas figuras são triângulos eqüiláteros, quadrados ou pentágonos regulares.
- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.

---
[33] Id., Ibid., p. 71.
[34] Id., Ibid., p. 77-78.

- Construção de procedimentos para calcular o número de diagonais de um polígono pela observação de regularidades existentes entre o número de ledos e o de diagonais.
- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de sua movimentação (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas de um triângulo utilizando régua e compasso.
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).
- Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.
- Verificações experimentais e aplicações do teorema de Pitágoras.

Analisando os *Critérios de avaliação direcionados para o 4º ciclo*, selecionamos a seguir, apenas aqueles que envolvem nosso tema, são eles[35]:

- Buscar os procedimentos matemáticos adequados para construir soluções num contexto de resolução de problemas numéricos, geométricos ou métricos.
- Estabelecer relações de congruência e de semelhança entre figuras planas e identificar propriedades dessas relações.
- Obter e expressar resultados de medidas de comprimento, massa, tempo, capacidade, superfície, volume, ângulo, densidade e velocidade e fazer cálculos com essas medidas.

O último tópico da segunda parte desse documento refere-se às *Orientações Didáticas para o 3º e 4º ciclos*, nas quais analisaremos a seguir, apenas o bloco *Espaço e Forma*.

Inicialmente, abordam a resolução de problemas envolvendo três objetos de natureza diferentes: o espaço físico, a geometria e o sistema de representação plana das figuras espaciais. No que se refere à aprendizagem, estão a eles vinculadas três questões[36]:

---

[35] Ministério da Educação e do Desporto e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília, 1997, p. 65-67.
[36] Id., Ibid., p. 108.

- Desenvolvimento das habilidades espaciais;
- Elaboração de um sistema de regras geométricas, que permita agir nesse modelo;
- Codificação e decodificação de desenhos.

Para o desenvolvimento das habilidades, diferentes situações podem ser realizadas pelos alunos desses ciclos como, por exemplo, atividades direcionadas a leitura e interpretação de mapas ou de plantas e a utilização de recursos tridimensionais como a construção de maquetes.

No campo das figuras geométricas, pode-se trabalhar com atividades de classificação, composição e decomposição utilizando-se materiais como ladrilhamentos, tangrans e poliminós; cálculo de áreas e determinação da soma das medidas dos ângulos internos.

São propostas atividades que envolvem transformações de uma figura no plano, pois permitem a abordagem de uma geometria mais dinâmica. Para seu desenvolvimento é sugerido o uso de softwares.

Para o trabalho com semelhança, orienta-se estabelecer conexões entre esse tema e conteúdos diversificados como razões, proporções, propriedades de ângulos e medidas. Na exploração do tópico a utilização da ampliação e redução de figuras, o enriquecerá.

No desenvolvimento de atividades relacionadas aos sistemas de representação plana das figuras espaciais, o desenho contribuirá com as seguintes funções: visualizar (fazer ver); resumir (a figura do enunciado); ajudar a provar (contra-exemplo) e ajudar a fazer conjecturas (o que se pode dizer) (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1996, p. 110-111).

Na finalização desse tópico, ressalta-se ainda que o estudo dos temas geométricos possibilite aos alunos uma interessante visualização dos aspectos históricos, já que “a Geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, que se desenvolveu em função de necessidades humanas”. (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1996, p. 111).

No percurso de nossa análise, identificamos características que nos direcionaram para a escolha do modelo construtivista, ao estabelecer a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática objetivando a construção de conhecimentos. Porém, em um de seus trabalhos, Pires uma das coordenadoras e elaboradoras desse documento observa que[37]:

> "De certo modo, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental – PCNEF, para a área de Matemática, abrem possibilidades a uma abordagem construtivista (...). No entanto, embora de forma geral, o documento estimule a resolução de problemas, a modelagem, os projetos temáticos como possibilidades metodológicas interessantes nas aulas de matemática, não há uma referência mais explícita sobre a incorporação de uma perspectiva construtivista no ensino de geometria, marcada pelas características descritas por Gáscon; a inserção do aluno na resolução de uma situação problemática eleita em função do conhecimento que se quer que ele construa e que deve permitir-lhe discernir se a solução por ele desenhada é correta ou não".

Como mencionamos anteriormente ao analisarmos esse documento, observamos nele contidas características direcionadas ao modelo *Construtivista* de Gascón. Porém, não afirmaremos que identificamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental esse modelo explicitamente no ensino de Geometria, pois conforme a autora observa acima, as referências construtivistas não estão explícitas nesse documento.

4.2 Identificação dos Modelos Teóricos na análise de alguns livros didáticos atuais

Em nossa pesquisa, analisamos o desenvolvimento dos temas geométricos em uma pequena amostra de livros das décadas de 1930 até 1970, pretendendo identificar os modelos teóricos que permeavam os materiais observados, pois, segundo Silva (2005, p.73):

[37] PIRES, Célia Maria Carolino. **"Ensino de Geometria no Brasil: uma análise com base em modelos de referência que colocam em relação à epistemologia e a didática da Geometria"**, Anais da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil (08 a 11 de Outubro de 2006). Painel nº 2. CD ROM

> "O livro didático, como fonte de pesquisa, na investigação da história da disciplina escolar tem um papel importante, na medida em que sua análise possibilita verificar como os autores apropriaram-se das legislações ou recomendações num determinado período".

Contemplando os mesmos objetivos, direcionamos nosso trabalho para documentos oficiais, prescrições curriculares e projetos que se destacaram e influenciaram o período referente às décadas de 1970 a 1990, já que consideramos necessárias as intersecções desses materiais com os livros didáticos.

Os *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental* foram analisados nesse capítulo, separadamente dos outros documentos e projetos oficiais por representarem a atual prescrição curricular do Brasil.

Motivados por essa evidência e mantendo uma seqüência cronológica crescente, optamos pelo estudo dos livros didáticos atuais nesse momento, pretendendo a identificação dos modelos teóricos de referência de Gascón.

Ao consultarmos o material para a pesquisa, deparamos-nos com uma diversidade de autores, fato que nos levou à busca de um critério para a seleção.

Optamos então pela coleção de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, pois nela está explícito que a proposta pedagógica da obra está fundamentada nos mesmos princípios norteadores dos *Parâmetros Curriculares Nacionais*, objeto de nossa escolha.

É uma coleção composta por quatro volumes, destinados aos alunos do Ensino Fundamental II, denominada *Matemática para todos*, publicada em 2002. Os livros examinados pertencem ao professor, sendo que o único diferencial em relação ao livro do aluno é a presença de uma *Assessoria Pedagógica* nas últimas páginas dos volumes.

Inicialmente, buscamos elementos para análise nesse bloco de informações destinados ao professor, identificando em sua apresentação a proposta para o desenvolvimento geométrico na obra[38]:

> "(...) multiplicidade de recursos e olhares para as formas planas e espaciais, num constante vai-e-vem entre o estudo do plano e do espaço, de forma complementar e em constante relação com a observação da geometria no mundo que cerca o aluno e em outros campos do conhecimento. O tema simetria aperfeiçoa-se, indo além do reconhecimento desta propriedade em figuras e de sua relação com a estética nas artes. A simetria é usada para o estudo de propriedades geométricas relacionadas à triângulos, quadriláteros e os polígonos, em geral. Deste modo, é oferecida ao aluno a oportunidade de perceber que as figuras podem ser estudadas por meio do movimento das simetrias e através das relações clássicas da geometria euclidiana sobre semelhança e congruência (aqui abordada de modo experimental e intuitivo)".

Como podemos verificar, os autores destacam a utilização de uma abordagem experimental e intuitiva.

Analisando esta seção, localizamos informações esclarecedoras e interessantes, porém direcionaremos nossa abordagem para a análise dos conteúdos geométricos, que estão divididos por série e apresentam-se por meio de capítulos, recebendo da *Assessoria Pedagógica* sugestões e orientações para seu desenvolvimento.

A seguir, apresentaremos um quadro que descreve o sumário de cada volume, sendo que os temas geométricos estão mais detalhados e em negrito e os demais apenas identificados pelo título do capítulo.

---

[38] IMENES, Luiz Márcio & LELLIS, Marcelo. **"Matemática para todos: 5ª série, 3º ciclo**, 1ª edição. São Paulo: Editora Scipione, 2002. Assessoria Pedagógica, p. 3.

5ª série	1. Um panorama da matemática; **2. Formas tridimensionais: Prismas e pirâmides; Vistas de um objeto; Cilindro, cone e esfera;** 3. Operações Fundamentais; **4. Formas Planas: Giros, cantos e ângulos; Perpendiculares e paralelas; Mosaicos e polígonos; Quadriláteros;** 5. Múltiplos e divisores; 6. Frações e porcentagens; **7. Construções geométricas: Construções em papel quadriculado; Construções com régua e esquadro; Construções com régua e compasso;** 8. Medidas e números decimais; 9. Operações com números decimais; 10. Estatística; 11. Linguagem matemática; **12. Áreas e perímetros: Noção de área; Área de retângulos; Unidades de medida de área;** **13. Simetria: Simetria nas formas;** números simétricos; 14. Generalizações; 15. Adição e subtração de frações.
6ª série	1. Números; **2. Construções geométricas: Ângulos; Circunferências; Simetrias; Medidas dos ângulos dos polígonos regulares;** 3. Padrões numéricos; 4. Cálculos com números decimais e frações; 5. Medidas; 6. Números negativos e contabilidade; 7. Proporcionalidade; **8. Mapas e localização: Vistas, mapas e plantas;** Localização de pontos no plano; 9. Tratamento da informação; 10. Multiplicação e divisão de números com sinais; 11. Usando letras em matemática; **12. Áreas e volumes: Áreas, Volumes; Volume do bloco retangular;** 13. Equações; **14. Geometria tridimensional: Poliedros; Classificação das formas geométricas.**
7ª série	1. Números primos; 2. Operações com frações; **3. Construções geométricas: Usando os instrumentos de desenho; A construção de formas tridimensionais;** 4. Aplicações da matemática; 5. Retomando a álgebra; **6. Ângulos, paralelas e polígonos: Algumas propriedades dos ângulos; Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo; Soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos; Classificação de polígonos;** 7. Potências e raízes; **8. Simetrias: Tipos de simetrias; Simetrias e propriedades das figuras geométricas;** 9. Estatística e possibilidades; **10. Desenhando figuras espaciais: Desenhando sobre malhas; Desenhando em perspectiva;** 11. Cálculo algébrico; **12. Áreas e volumes: Idéias para o cálculo de áreas e volumes; Fórmulas para o cálculo de áreas; O teorema de Pitágoras;** 13. Sistemas de equações; **14. Geometria Experimental: É ou não é proporcional; Figuras semelhantes; Perímetro da circunferência.**

8ª série	**1. Semelhança: Figuras semelhantes; Triângulos semelhantes; Semelhança no triângulo retângulo; O teorema de Pitágoras;** 2. A quinta e a sexta operações; 3. Equação e fatoração; **4. Medidas:** Sistemas decimais e não-decimais; **Calculando áreas e volumes;** 5. Estatística; 6. Equações e sistemas de equações de 2º grau; **7. Geometria dedutiva: Matemática, detetives e dedução; Ângulos nos polígonos; ângulos na circunferência; Paralelismo;** 8. Matemática, comércio e indústria; **9. Trigonometria: Medindo o que não se alcança; Razões trigonométricas; Polígonos inscritos e circunscritos;** 10. Funções; **11. Construções geométricas: Simetrias; Dá para construir; Desenhando em 3D;** **12. Círculo e cilindro: Perímetro e área do círculo; Volume do cilindro;** 13. Classificação dos números; 14. Técnica algébrica.

Podemos observar que a organização dos conteúdos realiza-se em espiral, pois os assuntos são abordados mais de uma vez, de formas diferentes e nos vários ciclos. Verificamos que os capítulos direcionados para a Geometria são trabalhados em momentos diferenciados e com freqüência nos ciclos.

Selecionaremos, entre os tópicos geométricos, uma proposta de desenvolvimento de um determinado conteúdo ou de uma atividade referente a cada série para analisarmos.

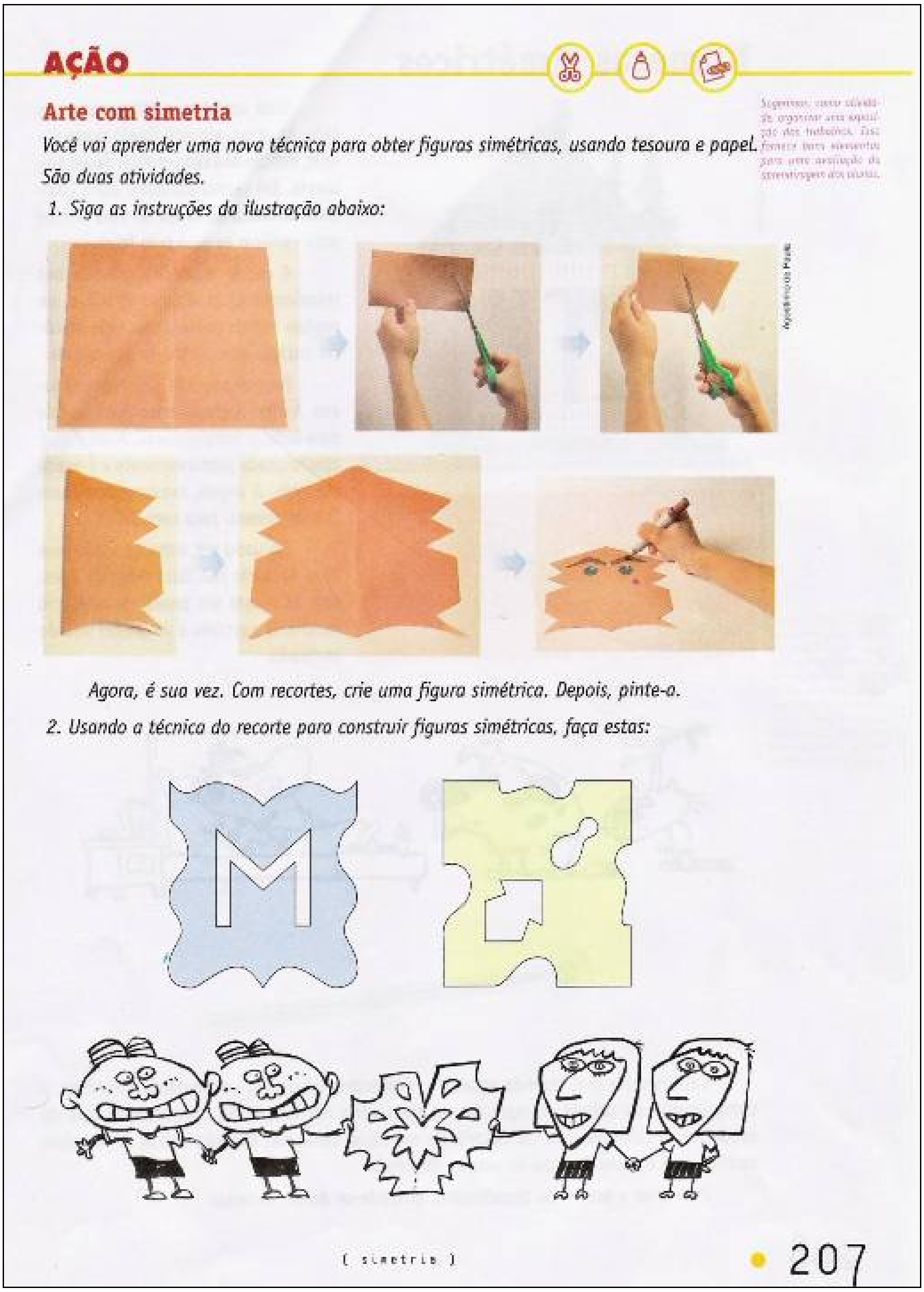
No volume referente à 5ª série, escolhemos duas atividades do *Capítulo 13 - Simetria*. Em sua abordagem, os autores inicialmente identificam a simetria em vários desenhos, mencionando que quando a figura é simétrica, ao dobrá-la no eixo, o lado esquerdo sobrepõe-se ao direito. Logo após, são propostas atividades de simetria com polígonos utilizando-se papel quadriculado e dobraduras.

A primeira atividade que apresentaremos chama-se *Arte com simetria*, cujo objetivo é o aprendizado de uma nova técnica para obtenção de figuras simétricas, utilizando tesoura e papel; as instruções são realizadas por ilustrações.

A segunda denomina-se *Pão-por-Deus*, título que se refere a um antigo costume, parte do folclore do estado de Santa Catarina. Sua proposta é a de construir um cartão rendilhado, produzindo figuras com um, dois ou mais eixos de simetria. Essa atividade representa um exemplo da presença da Matemática, por meio da simetria, no folclore nacional.

A seguir, como ilustração, segue fac-símile das atividades acima citadas.

Fac-símile "Matemática para todos: 5ª série" de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, 1ªedição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, p. 207.


AÇÃO

Arte com simetria

Você vai aprender uma nova técnica para obter figuras simétricas, usando tesoura e papel. São duas atividades.

1. Siga as instruções da ilustração abaixo:

Agora, é sua vez. Com recortes, crie uma figura simétrica. Depois, pinte-a.

2. Usando a técnica do recorte para construir figuras simétricas, faça estas:

(simetria)

207

Fac-símile “Matemática para todos: 5ª série” de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, 1ªedição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, p. 213.

UM TOQUE A MAIS

A+

Pão-por-Deus

Este título curioso refere-se a um antigo costume, hoje quase desaparecido, que faz parte do folclore do estado de Santa Catarina. É provável que tenha sido trazido por imigrantes portugueses, da Ilha da Madeira e das Ilhas dos Açores. Eles tiveram destacado papel na colonização desse estado brasileiro.

O costume era o seguinte: nos últimos meses do ano, em épocas bem antigas, as pessoas pobres escreviam mensagens em papéis rendilhados, coloridos e com filigranas, em cujo centro havia mensagens com pedido de pão, doce ou presente. O destinatário tinha a obrigação de enviar, até o Natal, uma oferta ao remetente. Com o tempo, os namorados também passaram a trocar essas mensagens. Observe alguns exemplos de pão-por-Deus:

Você percebe que se trata de uma simples brincadeira, sem pretensões artísticas. No entanto, quem a pratica quer mostrar que respeita ou que gosta da pessoa a quem escreve. Por isso, busca fazer o trabalho com capricho, organização e harmonia. Mas como é que se expressam essas intenções? Nesse caso, usando simetrias.

Os rendilhados são feitos dobrando uma folha de papel e recortando-a. É preciso algum planejamento para que haja um espaço no centro, sem recortes, onde será escrita a mensagem. Produzem-se, desse modo, figuras com um, dois ou mais eixos de simetria. É essa simetria da figura que sugere organização e harmonia

Assim, o pão-por-Deus é mais um exemplo da presença de noções matemáticas em atividades simples dos seres humanos. Neste caso, não importa se as pessoas sabem ou não que estão usando idéias matemáticas.

Agora, é com você. Pode imaginar como se faz um rendilhado como o do pão-por-Deus? Seria capaz de fazer um? Seria possível, empregando a mesma técnica, fazer algo mais moderno, digamos, o pão-por-Deus do terceiro milênio? Que tal usá-lo para enviar mensagens de paz? É só tentar e começar a criar.

Estes pães-por-Deus foram criados pela professora e artista Dircéa Binder, de Florianópolis (SC).

[simetria]   213

No livro proposto para a 6ª série, selecionamos uma atividade do *Capítulo 2-Construções geométricas* e outra do *Capítulo 14-Geometria tridimensional*.

A primeira, *Uma investigação sobre os ângulos dos triângulos*, propõe aos alunos que desenhem numa folha de papel um triângulo com lados maiores que 5 cm de comprimento. Em seguida, solicitam a marca de dois pontos em cada lado do triângulo, distando 1 cm das extremidades. Esses pontos deverão ser ligados, dois a dois, por uma linha tracejada conforme indicação da figura, proposta na atividade (os pontos unidos delimitam a região que contém os ângulos internos do triângulo).

Logo após, os alunos deverão pintar as três regiões delimitadas referentes aos ângulos internos da figura, recortá-las e juntá-las. O objetivo final é a verificação da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Como sugestão, os autores orientam as construções geométricas com a utilização do programa *Cabri-géomètre II*, sendo oferecidas informações sobre o software na *Assessoria Pedagógica*.

A segunda atividade que apresentaremos chama-se *Geometria da bola de futebol*. Sua proposta direciona-se para uma aplicação dos poliedros muito comum em nosso cotidiano, a construção de bolas de futebol a partir de pentágonos e hexágonos.

No texto informativo que acompanha a atividade, os autores mencionam que a partir de superfícies planas podemos construir poliedros, porém a esfera, por não ser planificável, tornou-se um problema para fabricantes de bolas de vôlei, futebol, basquete, etc. A partir desse momento descrevem uma idéia matemática usada como recurso: a construção de um icosaedro regular, cortando-lhe os bicos. Nas orientações didáticas é proposta a construção do modelo, em cartolina, do poliedro que dá origem à bola.

A seguir, como ilustração, segue fac-símile das atividades acima citadas.

Fac-símile “Matemática para todos: 6ª série” de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, 1ªedição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, p. 38.

AÇÃO

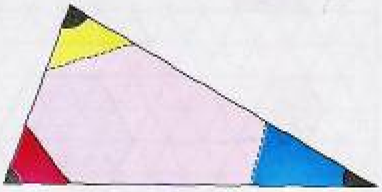
Leia comentários sobre esta **Ação** no item 6 da Assessoria Pedagógica, página 24.

Uma investigação sobre os ângulos dos triângulos

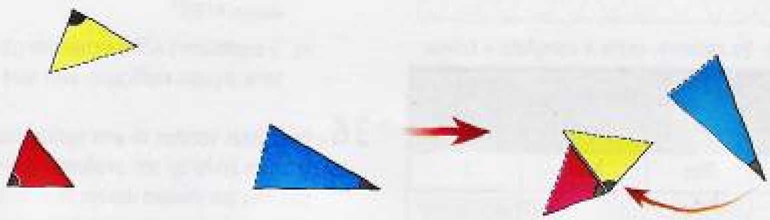
Procedimento 1

Numa folha de papel, desenhe com capricho um triângulo com lados de mais de 5 cm. O formato do triângulo fica por sua conta.

Em cada lado do triângulo, marque dois pontos, cada um a 1 cm da extremidade. Faça uma linha tracejada como mostra a figura.



Para destacar os ângulos do triângulo, pinte as três pontas delimitadas pelas linhas tracejadas. Recorte essas pontas pelas linhas tracejadas e junte-as, como se vê na figura.

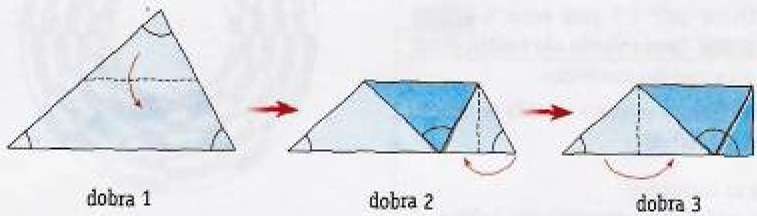


Observe o resultado e tire suas conclusões.

Procedimento 2

Faça outro triângulo seguindo as mesmas instruções do procedimento 1. Recorte-o. O novo triângulo não precisa ser igual ao primeiro.

Com base no modelo da figura seguinte, marque os ângulos do triângulo, tanto na frente quanto no verso do papel. Depois, faça as dobras 1, 2 e 3.



Observe o resultado e tire suas conclusões.

Relatório

Prepare um relatório das duas tarefas. Coloque o título: “Investigação sobre ângulos de triângulos”.

Descreva o que você fez nos procedimentos 1 e 2. Você pode fazer desenhos para ilustrar os procedimentos.

Depois, escreva as conclusões.

38

Fac-símile “Matemática para todos: 6ª série” de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, 1ªedição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, p. 251-252.

UM TOQUE A MAIS

A+

Na página 54 da Assessoria Pedagógica, há sugestão de atividade extra: a construção do poliedro da bola de futebol com cartolina e elásticos. Bloco de Folhas Especiais, página 351. No site da editora, você encontra todo o conteúdo do Bloco de Folhas Especiais.

Geometria da bola de futebol

Com superfícies planas, você pode construir poliedros. Pode até construir formas espaciais que têm superfícies curvas, como o cilindro ou o cone.

Agostinho de Paula

Proponha aos alunos que obtenham a forma cilíndrica com uma folha de papel. Se julgar pertinente, incentive-os para que investiguem como é a planificação de um cone.

Em matemática, dizemos que poliedros, cilindros e cones têm superfícies planificáveis. Ou seja, nesses casos, é possível gerar formas tridimensionais de formas bidimensionais.

Mas há formas espaciais que não podem ser construídas dessa maneira, porque suas superfícies não são planificáveis. É o caso da esfera.

Os alunos podem "sentir" essa impossibilidade tentando obter uma superfície esférica com uma folha de papel.

Esse fato colocou um problema para fabricantes de bolas de vôlei, futebol, basquete, etc. Se você observar as bolas usadas nos esportes, perceberá que há mais de uma maneira de fabricá-las.

Vamos descrever uma idéia matemática usada na fabricação de bolas de futebol.

O dodecaedro regular é um poliedro bastante “arredondado”. Entretanto, há outro, que você ainda não conhece, que é mais “arredondado” e que possui 20 faces triangulares:

Icosa(i) vem do grego eíkosi, que significa "vinte". Se julgar importante, mostre por que o número de vértices é 12, há 20 faces e, em cada uma, 3 arestas e 3 vértices. Como cada vértice do icosaedro é comum a 5 faces, o número de vértices do poliedro é 20 × 3 ÷ 5 = 12. Como cada aresta do poliedro é comum a duas faces, o número de arestas do icosaedro é 20 × 3 ÷ 2 = 30.

Sugira aos alunos que revejam o problema 8 para verificarem o desenho do dodecaedro regular.

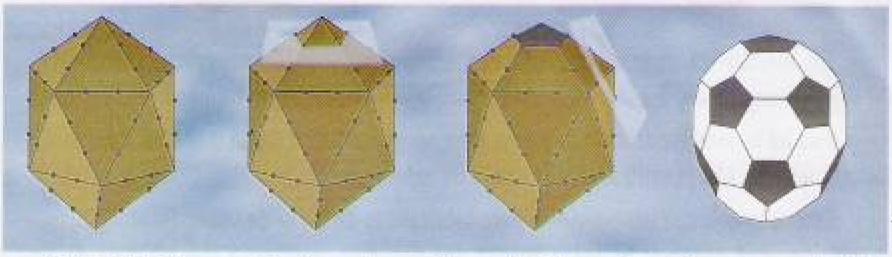
No icosaedro regular, as 20 faces são triângulos eqüiláteros e, de cada um de seus 12 vértices, partem 5 arestas.

[geometria tridimensional] • 251

A+

Embora seja "bem arredondada", é claro que não daria para jogar futebol com essa quase bola cheia de bicos.

Parece brincadeira, mas a idéia de cortar fora os bicos desse poliedro é boa. Vamos cortar deste modo:



Cada aresta do icosaedro é dividida em 3 partes iguais. **Este é um plano de corte.** **Esta seção do icosaedro é um pentágono regular. Fazemos um novo corte.** **Do mesmo modo, são extraídos os outros bicos do icosaedro regular.**

O resultado é um poliedro com faces pentagonais e hexagonais, bem mais "arredondado" que o icosaedro.

Nas bolas de futebol, esses polígonos das faces são feitos de couro e costurados um no outro. O couro é um material deformável. Por isso, injetando ar sob pressão em seu interior, essa superfície infla, arredondando-se mais ainda e tornando-se praticamente esférica. Os gomos perdem sua forma plana e já não temos mais um poliedro, mas uma bola de futebol.

Agora, é só jogar!

Se julgar conveniente, instigue os alunos perguntando-lhes quantos são os pentágonos e quantos são os hexágonos da bola. A pergunta não é fácil de ser respondida. Como o icosaedro tem 12 vértices e em cada um aparece um pentágono, eles são 12. Cada hexágono é parte do triângulo que é face do icosaedro. Como ele tem 20 faces, são 20 hexágonos na "bola".

Ari Gomes/Abril Imagens

O momento é adequado para retomar a capa do livro. Pergunte aos alunos: onde há matemática nas fotos da capa? Sugira que leiam o quadro "A matemática na capa", na página 2. Faz parte da formação matemática reconhecer a matemática das coisas que o cercam.

No volume referente à 7ª série, selecionamos uma atividade do *Capítulo 3-Construções geométricas* e uma abordagem sobre *dedução de fórmulas de áreas*, proposta no *Capítulo 12-Áreas e volumes*.

Na atividade denominada *Origami e matemática*, os autores realizam inicialmente um texto explicativo sobre o tema, lançando logo após dois desafios aos alunos. O primeiro propõe a construção de um "objeto voador" a partir de uma folha de papel retangular, durante as dobras identificam a bissetriz do ângulo reto e a diagonal do quadrado.

No segundo, mencionam que os alunos já conhecem a construção de um triângulo eqüilátero, utilizando os instrumentos de desenho e que agora a proposta é a construção apenas por dobras. As instruções da atividade são fornecidas por desenhos e orientações escritas. Ao terminá-la, apresentam um terceiro desafio, obter um hexágono regular partindo de recortes do triângulo construído.

No desenvolvimento do tópico *Fórmulas para o cálculo de áreas*, os autores iniciam o capítulo num diálogo com os alunos ressaltando que as fórmulas resumem raciocínios, resultados, e sua aplicação agiliza a resolução de problemas. Destacam ainda que saber utilizar, entender e deduzir são elementos importantes.

Logo após, revisam o cálculo da área do paralelogramo transformando-o num retângulo, ilustram as etapas por desenhos. Utilizando o mesmo processo, deduzem a fórmula para o cálculo da área de um triângulo qualquer, desenhando um triângulo simétrico ao inicial pelo ponto médio de um lado. No final do desenvolvimento, propõe-se aos alunos a dedução das fórmulas da área do trapézio e do losango.

A seguir, como ilustração, segue fac-símile da atividade descrita e do tópico abordado.

Fac-símile “Matemática para todos: 7ª série” de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, 1ªedição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, p. 51-54.

UM TOQUE A MAIS

A+

Origami e matemática

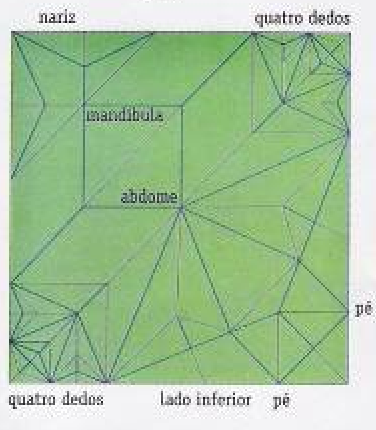
Mais uma oportunidade para se explorar a relação entre matemática e arte. O tema pode ser objeto de um trabalho interdisciplinar, que inclua pesquisas (se possível, via internet — use um site de busca e procure por origami), sobre a origem do origami, de seu significado na cultura oriental, do seu desenvolvimento e estágio atual. Indo mais longe, pode-se aprofundar a investigação em torno da matemática do origami. Se houver interesse, muitas outras construções podem ser propostas aos alunos.

Origami é a palavra de origem japonesa que designa a tradicional arte de dobrar papel, transformando uma folha plana em animais, flores e objetos variados, sempre com muita delicadeza e elegância.

Fotos: Digital Vision

Há construções simples, como os aviões ou barcos que você talvez já tenha feito tantas vezes. E há também outras, bastante sofisticadas, com dezenas e até centenas de dobras, que só os origamistas conseguem executar. Um exemplo é o *Ser Extraterrestre*, uma criação de Jun Maekawa, notável artista de nacionalidade japonesa.

Agostinho de Paula



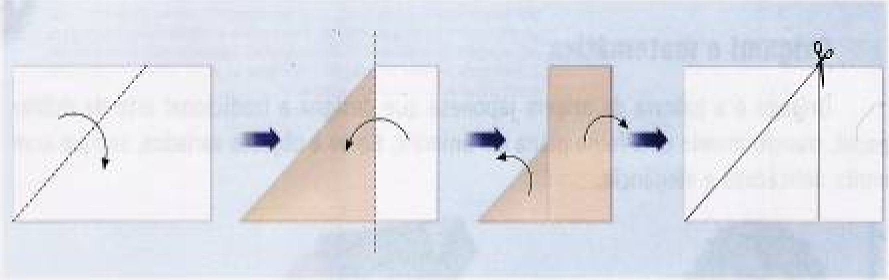
Desmontando o ET, vê-se o conjunto de passos necessários para sua construção. As dobras riscadas na folha de papel de forma quadrada revelam formas geométricas variadas. Note que a figura do ET é simétrica, assim como o nosso corpo. Observe que, para obter esse resultado, foi preciso fazer dobras simétricas. Localize o eixo dessa simetria.

Há muitos livros de origami para quem quiser aprender e desfrutar dessa arte. Neles, a comunicação se faz pela imagem e um dos desafios que o aprendiz deve vencer é o de decifrar os comandos e instruções. Vamos, então, lhe propor uns desafios. Para fazer as construções, você precisará de algumas folhas de papel comum.

A+

Primeiro desafio

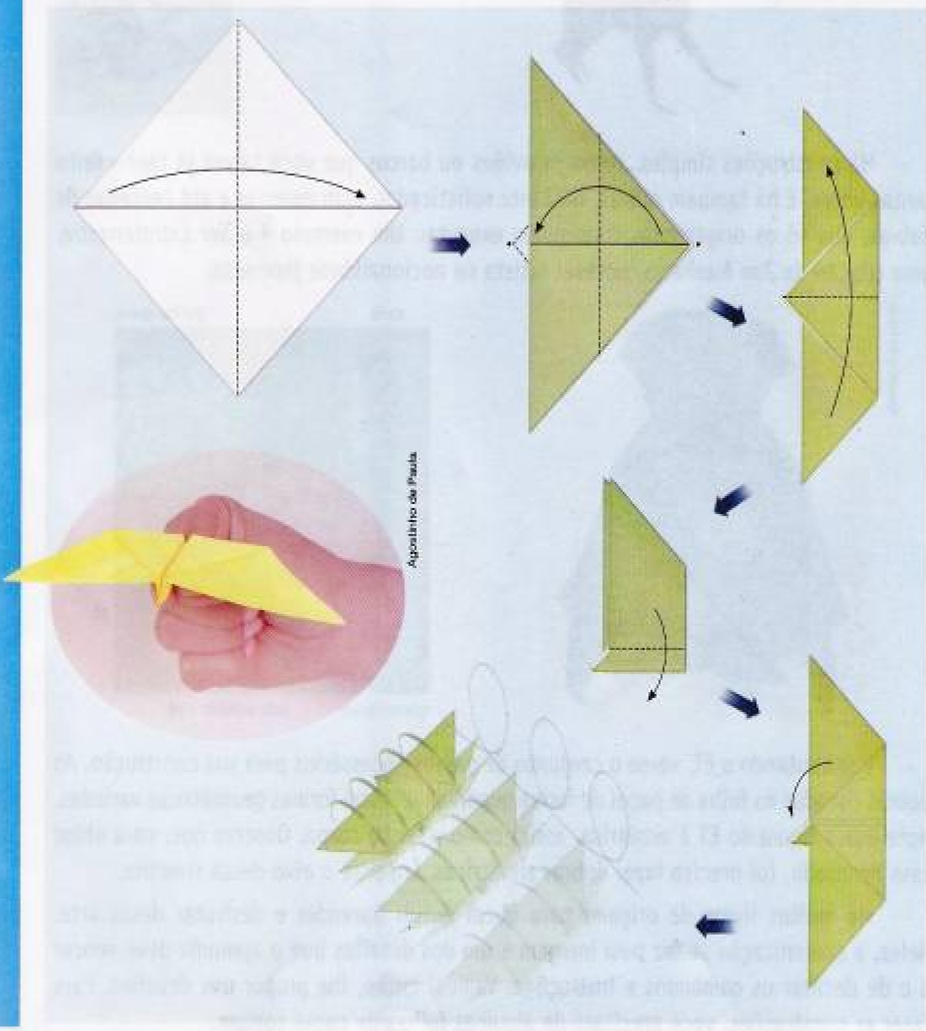
Comece obtendo um quadrado a partir da folha de papel retangular:



A linha de dobra é bissetriz do ângulo reto.

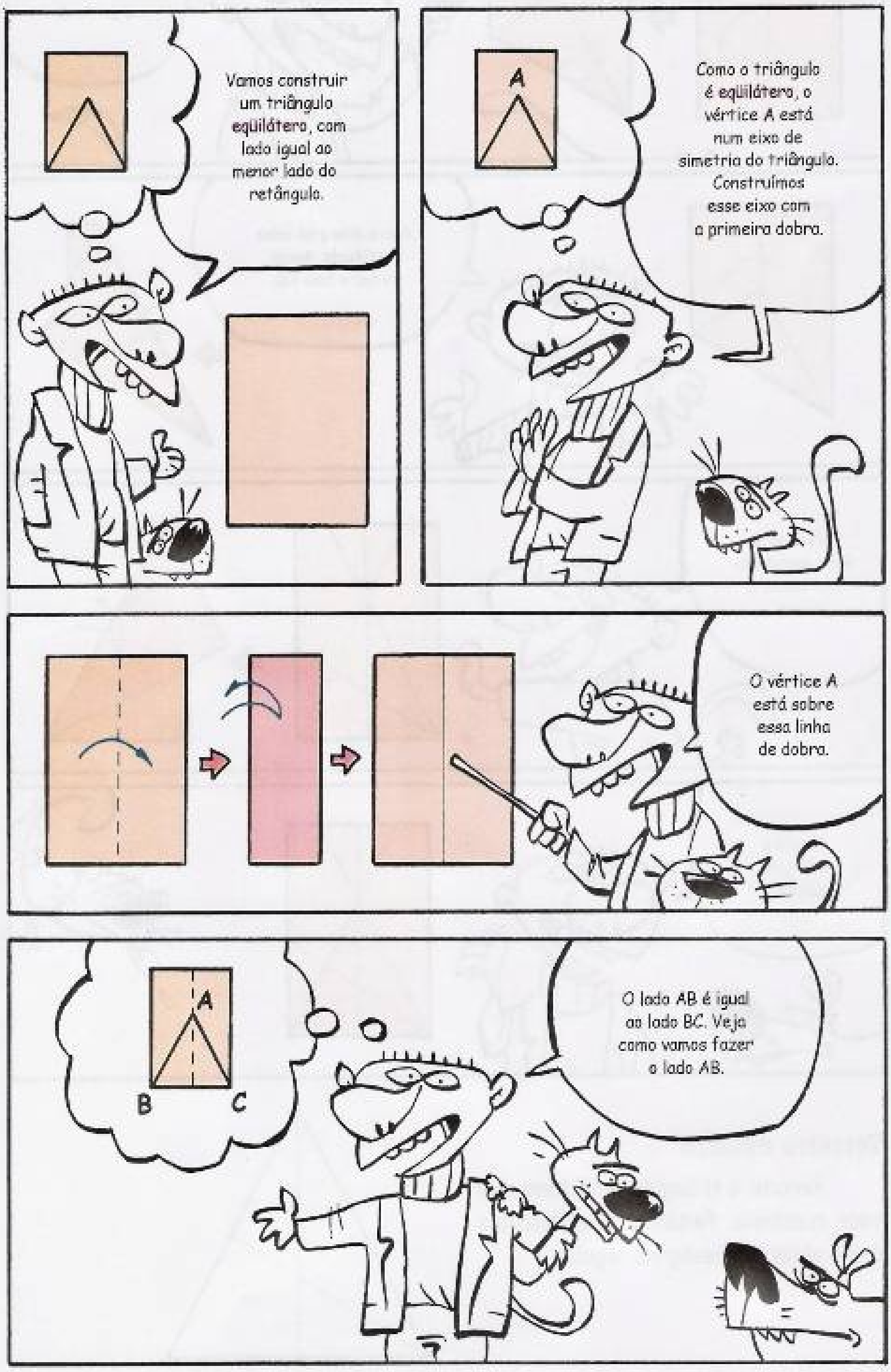
A primeira dobra é diagonal do quadrado.

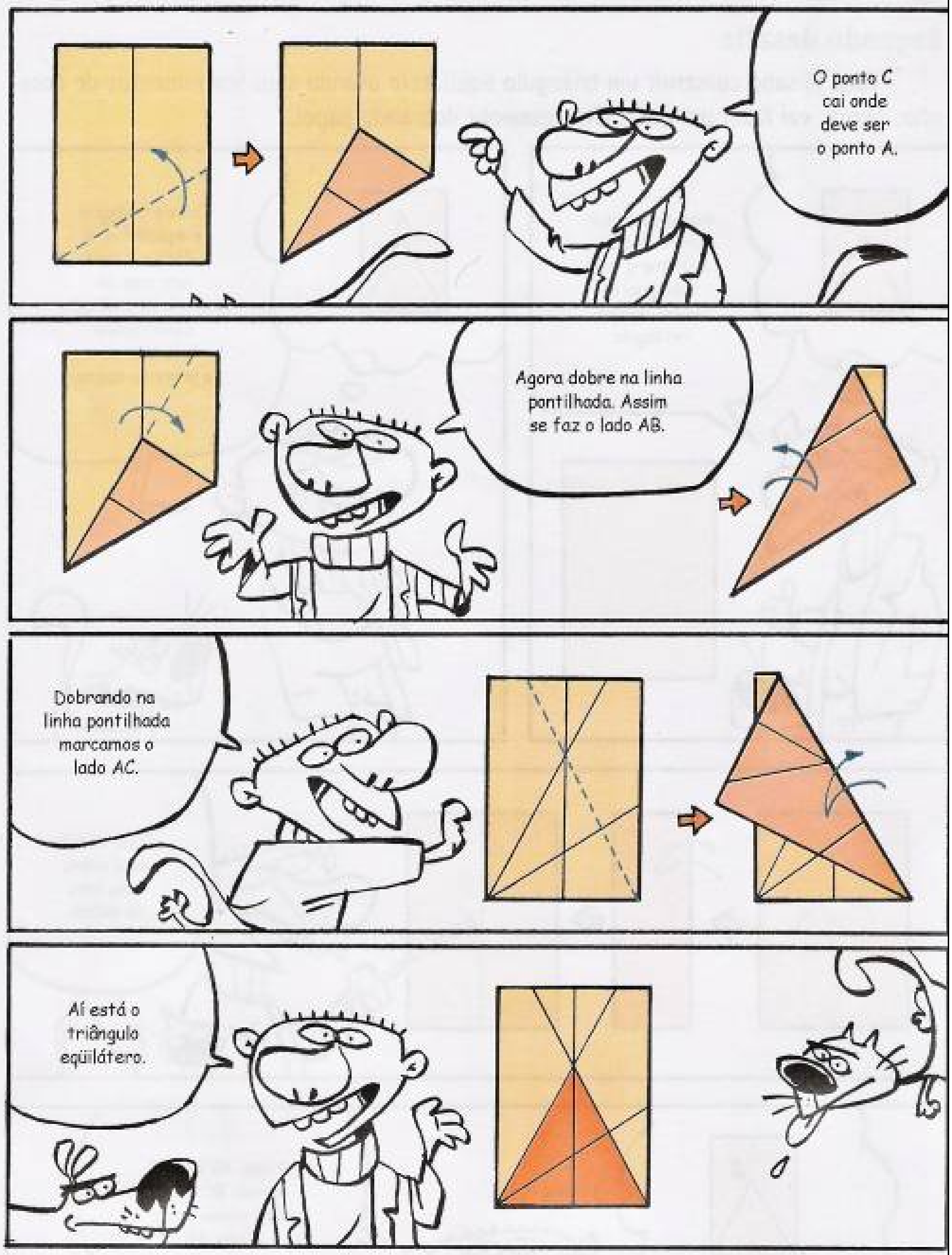
Agora, partindo do quadrado, construa este objeto voador:



Segundo desafio

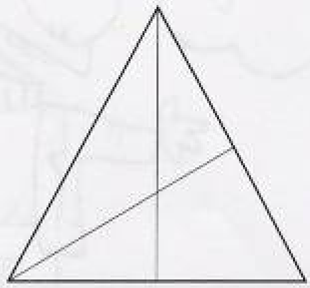
Você já sabe construir um triângulo eqüilátero usando seus instrumentos de desenho. Agora, vai fazer um deles simplesmente dobrando papel.





Terceiro desafio

Recorte o triângulo eqüilátero que você construiu. Partindo dele, descubra como obter um hexágono regular.



Fac-símile "Matemática para todos: 7ª série" de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, 1ªedição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, p. 210-212.

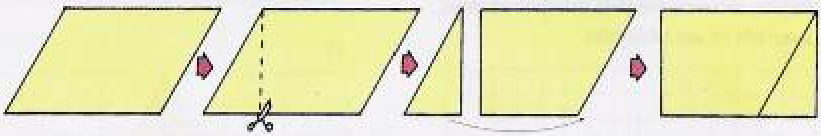
Fórmulas para o cálculo de áreas

Você conhece várias fórmulas e sabe que elas resumem raciocínios e resultados. Aplicando-as, é possível resolver problemas mais rapidamente.

É importante saber usar fórmulas, entender o seu porquê, compreender como foram deduzidas. Isso também ajuda na resolução dos problemas.

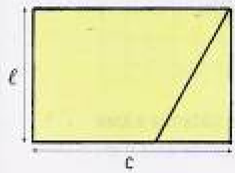
Neste item vamos tratar de fórmulas que facilitam o cálculo de áreas. Para começar, vamos obter uma fórmula para a área dos paralelogramos.

Já vimos como se calcula a área de um paralelogramo transformando-o num retângulo de mesma área:

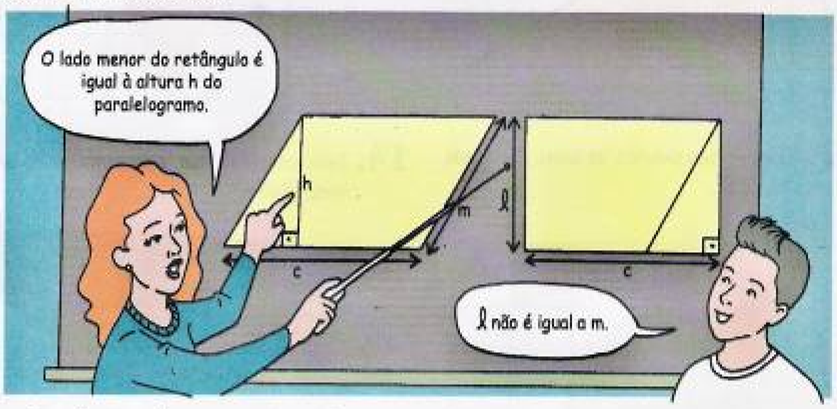


Podemos usar essa estratégia porque já sabemos calcular a área do retângulo:

$A = c \cdot \ell$

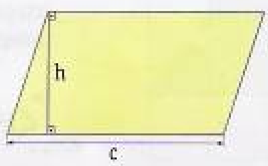


Agora observe: o comprimento c da base do retângulo é igual ao comprimento de um lado do paralelogramo. Mas atenção! O lado menor do retângulo não é igual ao lado menor do paralelogramo.



Conclusão: obtemos a área de um paralelogramo multiplicando a medida de sua base por sua altura:

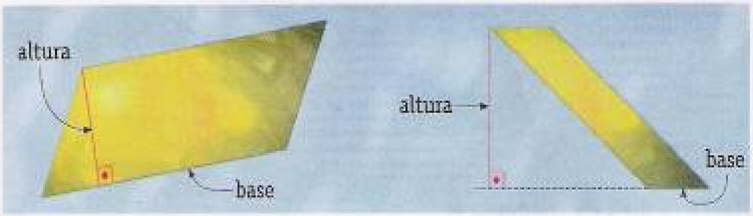
$A = c \cdot h$



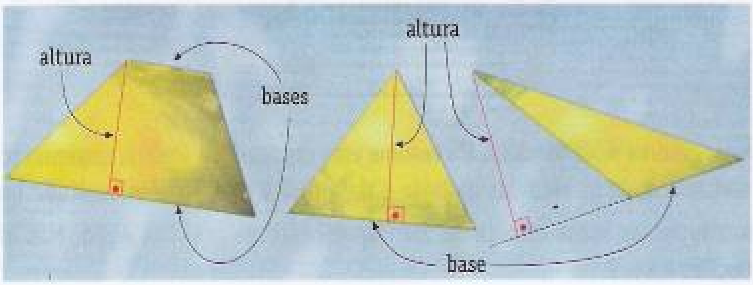
10

É costume designar altura por h. Isso vem da língua francesa, na qual altura é *hauteur*, e do inglês *height*.

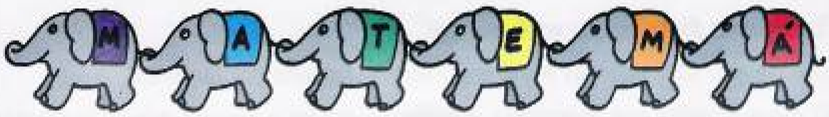
Vejamos, então, o que vem a ser a altura de um paralelogramo. Para defini-la, antes é preciso escolher um lado que será a base. No caso do paralelogramo, qualquer lado serve como base. Feito isso, a altura é um segmento de reta perpendicular à base (ou ao seu prolongamento), traçado de um vértice oposto à base Veja:



Triângulos e trapézios também têm alturas. Nos triângulos, as características são praticamente as mesmas que nos paralelogramos. Nos trapézios, somente os lados paralelos podem ser base.

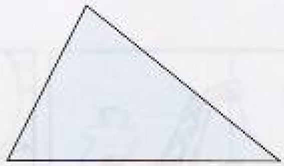


Voltemos às fórmulas. Na matemática uma coisa puxa outra, que puxa outra, e assim vai.

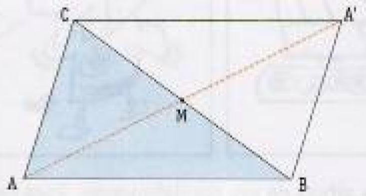


Pois bem, a partir da fórmula anterior deduz-se uma outra. Acompanhe.

Considere um triângulo qualquer:



Esse triângulo e seu simétrico pelo ponto médio de um lado formam um paralelogramo.

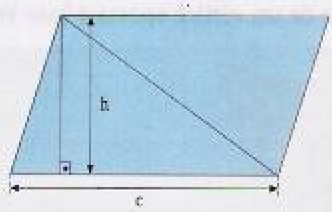


Em relação ao centro M:
A' é simétrico de A;
B é simétrico de C;
C é simétrico de B.

Por isso, o triângulo A'CB é simétrico do triângulo ABC.

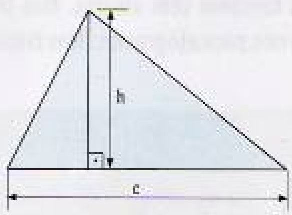
A área do paralelogramo é o produto das medidas da base e da altura:

$$\mathbf{A = c \cdot h}$$



Portanto, a área do triângulo é:

$$\mathbf{A = \frac{c \cdot h}{2}}$$



Deduzimos uma nova fórmula. Ela resume este resultado: a área de qualquer triângulo é obtida multiplicando as medidas da base e da altura e dividindo o resultado por 2.

Outras fórmulas sobre cálculo de área aparecerão na próxima **Ação.** Mas aí, quem faz as deduções é você.

Terceira questão: aplicar fórmulas ou calcular mecanicamente, sem a compreensão dos porquês, hoje é uma habilidade tola: as máquinas fazem isso melhor do que nós. A matemática não se caracteriza como um conjunto de dogmas nos quais se acredita ou não. A ciência matemática tem critérios para estabelecer verdades e isso passa pelos porquês. Compreender fórmulas deve contribuir para formar pessoas e cidadãos, e a "decoreba" não combina com esses objetivos.

CONVERSANDO SOBRE O TEXTO

- *Cite algumas fórmulas que você conhece.*
- *Explique com suas palavras o que diz o texto a respeito das fórmulas.*
- *Há quem acredite que importante é decorar fórmulas e saber usá-las e que saber os seus porquês e conhecer suas deduções não é relevante. E você, o que pensa disso?*

Na coleção direcionada para a 8ª série, selecionamos o *Capítulo 1-Semelhanças* para análise do tema *Triângulos semelhantes*. O conteúdo desenvolve-se inicialmente com a abordagem da ampliação e redução de figuras no papel quadriculado com o intuito de estabelecer-se uma relação com o conceito geométrico de semelhança.

Na seqüência, são enunciadas as duas condições que devem ser satisfeitas para que dois polígonos sejam semelhantes, seguida da proposta de outro método para ampliação e redução de figuras utilizando-se o compasso. Logo após, definem *homotetia*, ilustrando o conceito com o exemplo de uma situação direcionada para a ampliação de uma foto por uma copiadora.

Depois de propostos alguns exercícios, os autores abordam o tema *Triângulos semelhantes*. Iniciam o tópico verificando que dois pentágonos com ângulos iguais não são semelhantes, pois nesse momento os alunos já conhecem as condições de semelhança. As figuras comparadas são representadas pelo polígono original e por outro obtido do primeiro com um recorte, segue fac-símile para ilustração.

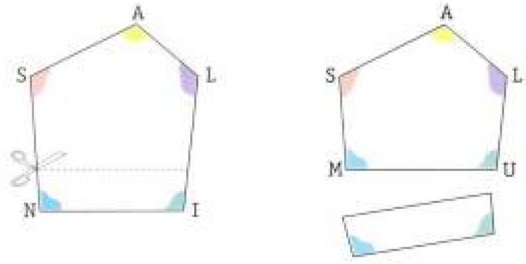
Realizam o mesmo procedimento com o triângulo, porém o corte é feito paralelamente a um de seus lados. Verificam que, nesse caso, os ângulos são iguais e os triângulos semelhantes, destacando que essa propriedade é válida apenas para esse polígono.

No desenvolvimento do capítulo, particularizam o tema para os triângulos retângulos, verificando uma propriedade pertencente apenas a esses polígonos por meio de uma "prova", cujo procedimento poderá ser verificado na ilustração anexada após o fac-símile da página 15.

Fac-símile "Matemática para todos: 8ª série" de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, 1ªedição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, p. 15.

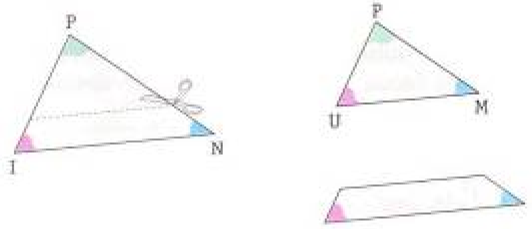
Triângulos semelhantes

O pentágono SALIN foi cortado por uma reta paralela a um de seus lados:



Os pentágonos SALIN e SALUM têm ângulos iguais, mas não são semelhantes porque de SN para SM o lado diminuiu, enquanto outros lados, como AS, não mudaram.

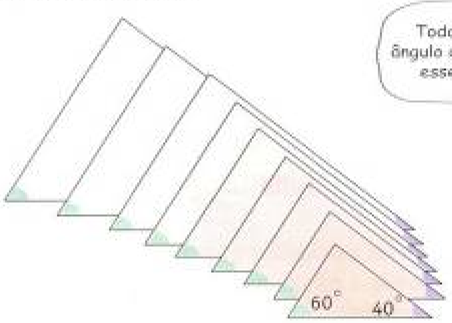
Agora vamos cortar o triângulo PIN por uma reta paralela a um de seus lados. Os triângulos PIN e PUM têm ângulos iguais:



O que o garoto percebeu é correto. Basta que dois triângulos tenham os ângulos respectivamente iguais para serem semelhantes.

Essa propriedade só é válida para os triângulos, ou seja, não se aplica a outros polígonos, como é possível perceber no exemplo dos pentágonos SALIN e SALUM.

A forma de um triângulo fica completamente definida quando são conhecidos os seus ângulos. Aliás, basta conhecer dois ângulos, pois o terceiro é o que falta para a soma dos três dar 180°.

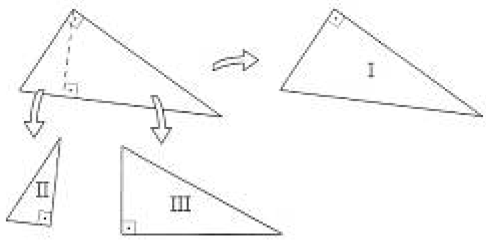


[semelhança] 15

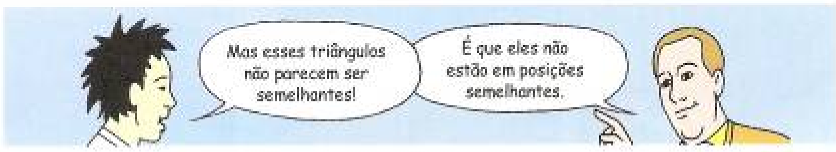
Fac-símile "Matemática para todos: 8ª série" de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, 1ªedição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, p. 24.

Vamos ver agora uma propriedade envolvendo semelhança e que só os triângulos retângulos possuem.

Em um triângulo retângulo, traçando a altura relativa à hipotenusa, formam-se dois novos triângulos retângulos. Vamos desenhar separadamente os três triângulos e designá-los por I, II e III.

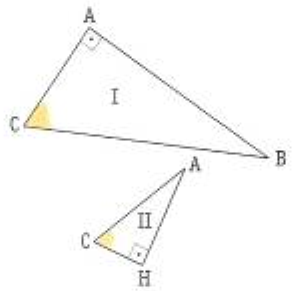


Afirmamos que esses triângulos retângulos são semelhantes dois a dois: I ~ II, II ~ III e I ~ III.



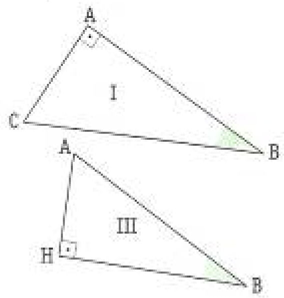
Vamos provar que essa propriedade especial dos triângulos retângulos é verdadeira. Acompanhe:

Prova de que I ~ II



- I e II têm ângulo reto ($\hat{H}$ em II e $\hat{A}$ em I).
- O ângulo $\hat{C}$ é o mesmo nos dois triângulos.

Prova de que I ~ III



- I e III têm ângulo reto ($\hat{H}$ em III e $\hat{A}$ em I).
- O ângulo $\hat{B}$ é o mesmo nos dois triângulos.

Finalmente, note que II e III têm os mesmos ângulos porque cada um deles tem os mesmos ângulos de I. Por isso, II ~ III.

Fica assim provado que os três triângulos são semelhantes dois a dois.

24

Ao finalizarmos a análise do material, constatamos que em seu desenvolvimento as abordagens são realizadas de modo experimental e intuitivo, caracterizando a presença de um modelo *Quase-empirista*.

Pires em uma de suas pesquisas constata que[39]:

> "Uma perspectiva construtivista de ensino em que os objetos matemáticos são extraídos das ações do sujeito, especialmente em contextos de resolução de problemas, de modelizações é ainda muito pouco freqüente e pouco divulgada em nosso país. De certo modo, nos livros textos, a perspectiva empirista ainda é dominante, mas há alguns indícios reveladores de uma preocupação construtivista".

[39] PIRES, Célia Maria Carolino. **"Ensino de Geometria no Brasil: uma análise com base em modelos de referência que colocam em relação à epistemologia e a didática da Geometria"**, Anais da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil (08 a 11 de Outubro de 2006). Painel nº 2. CD ROM.

Capítulo 5

UM ESTUDO SOBRE CURRÍCULOS ATUAIS EM DESENVOLVIMENTO NA SALA DE AULA, FOCALIZANDO O TEMA “ESPAÇO E FORMA”

5.1 Introdução

Para complementar nosso trabalho, com vistas a comprovar possíveis posicionamentos quanto a real aplicação dos diferentes modelos teóricos, fez-se necessário um estudo sobre currículos atuais em desenvolvimento na sala de aula, focalizando o tema “Espaço e Forma”. Para tanto foram escolhidas duas unidades escolares para avaliação e análise.

A primeira é uma escola da rede pública estadual, localizada em São Bernardo do Campo, estado de São Paulo. É composta por: doze salas de aula, um pequeno pátio, uma quadra esportiva, sala para os professores, dois banheiros para utilização dos alunos e dois para os professores, uma secretaria, uma sala de direção, uma sala de vídeo e uma de informática. O bairro que a escola atende é formado por pessoas carentes, sendo que muitos dos alunos freqüentam apenas para alimentar-se.

As aulas acontecem em três períodos matutino, vespertino e noturno; sendo as classes ocupadas respectivamente por 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental II (EFII) e Ensino Médio (EM); 5ª e 6ª séries do EFII; EM e Ensino de Jovens e Adultos (EJA).

O período da manhã é composto no EFII por três turmas de 7ª série e duas de 8ª e no EM, três turmas de 1ª série, duas de 2ª e duas de 3ª. À tarde, seis turmas de 5ª série e seis de 6ª série do EFII e à noite, no EM são quatro turmas de 1ª série, quatro de 2ª série, três de 3ª e uma turma do EJA. Em média, as salas de aula são ocupadas por trinta e cinco alunos nos períodos da manhã e da tarde, e quarenta à noite.

O corpo docente que ministra as aulas de Matemática para o EFII é constituído por professores experientes e todos são licenciados em Matemática. A escola conta apenas com o recurso de sala de vídeo, visto que a sala de informática encontra-se desativada.

A segunda escola pertence à rede privada e está sediada em Guarulhos, estado de São Paulo. É uma escola composta por vinte e cinco salas de aula, oito banheiros para os alunos e dois para os funcionários, há uma grande sala reservada à secretaria e direção, coordenação, biblioteca, tesouraria, auditório, sala de informática, de leitura, de música, de robótica atualmente desativada, duas salas para atendimento de pais e reuniões, sala de esportes, três quadras e um estacionamento. O corpo discente é formado por alunos oriundos da classe média e média-alta e o corpo docente da área de matemática do EFII constitui-se de professores licenciados e especialistas.

As aulas acontecem em dois períodos, manhã composto pelo Ensino Fundamental I (EFI), EFII e EM e tarde pelo EFI. Para as turmas da 3ª série do EM, são oferecidas aulas complementares no período da tarde.

O Ensino Fundamental I contém uma turma por série representando um total de oito turmas, considerando-se os dois períodos; o EFII compõe-se por duas turmas em cada série denominadas por A e B, totalizando oito salas e o EM, três turmas por série (A, B e C), num total de nove salas. Em média as salas apresentam um total de vinte e cinco alunos no EFI e trinta no EFII e EM.

5.2 Composição do questionário

A primeira etapa de coleta de dados de nossa pesquisa requereu a elaboração de um questionário (Anexo I) direcionado aos professores pesquisados, cuja composição referia-se a perguntas sobre o trabalho por eles realizado em Geometria no ano de 2005.

O objetivo principal dessas questões é o de verificar quais são as prescrições curriculares contempladas na dinâmica de sala de aula, em que estão baseadas e como são colocadas em prática. Foram distribuídas em 2 blocos e o objeto de cada um está descrito a seguir.

- Bloco 1: Tratou de uma questão que buscou os dados pessoais dos professores voltados para sua formação.

  1) Dados Pessoais

  Instituição em que trabalha:

  Nome (opcional):

  Formação/Área:

  Graduação:

  Pós-Graduação:

  Tempo de experiência no Ensino Fundamental II: _____ anos.

- Bloco 2: Tratou de doze questões que visavam um parecer referente ao trabalho feito pelos professores em geometria no ano de 2005, tendo como foco principal a identificação das prescrições curriculares por eles utilizadas na dinâmica de sala de aula, quais são seus princípios norteadores e como foram colocadas em prática.

2) O tema Geometria vem sendo desenvolvido no Ensino Fundamental II por você?

3) Em qual (is) série(s)?

4) Quais as prescrições curriculares para o ensino de Geometria que você conhece atualmente?

5) Em que elas se baseiam?

6) *A Grade Curricular de Matemática de sua instituição foi montada baseada nestas prescrições? Em caso positivo, de que forma? Em negativo, qual a estrutura que nela utilizada?*
7) *Em sua opinião, esta estrutura por você utilizada contribui com o desenvolvimento do trabalho na sala de aula? Justifique sua resposta, em caso afirmativo ou negativo.*
8) *Você conseguiu cumprir em seu Planejamento Anual de 2005 os conteúdos propostos em Geometria? Justifique sua resposta, em caso afirmativo ou negativo.*
9) *Adota livros didáticos ou outro material para desenvolver suas aulas de Geometria? Quais? Como avalia esses materiais?*
10) *Como são suas aulas de Geometria? Você poderia descrevê-las?*
11) *Você poderia registrar um exemplo de situação didática que você realiza com seus alunos nas aulas de Geometria?*
12) *Você acha que as demonstrações devem ser trabalhadas no Ensino Fundamental II e Médio? Justifique sua resposta em caso afirmativo ou negativo.*
13) *Você usa algum recurso tecnológico (software) geométrico? Qual (is)? Com que finalidades?*

5.3 Caracterização dos sujeitos de pesquisa

O questionário foi proposto para quatro professores que ministram aulas de Matemática para o Ensino Fundamental II, na rede pública estadual e quatro para a rede particular. Porém, os sujeitos dessa pesquisa são compostos apenas por seis elementos, devido os professores da entidade privada de 7ª e 8ª séries não desenvolverem o conteúdo referente à Geometria em suas aulas de Matemática.

Dos sujeitos analisados, cinco são do sexo feminino e um do sexo masculino, sendo que todos ministram aulas de Matemática no Ensino Fundamental II e apenas um deles no Ensino Médio.

No grupo, o tempo de magistério direcionado para o Ensino Fundamental II, varia de oito a vinte e um anos.

Nossa opção foi a de atribuir a cada professor uma identificação, **Sn**, em que **S** é o sujeito e **n** assume um valor variando de 1 a 6.

Antes de continuarmos a análise dos resultados desse procedimento, faz-se necessária a exposição dos planos de ensino de cada instituição.

5.4 Plano referente à unidade da rede pública estadual

Os planos de ensino analisados referem-se à disciplina Matemática do Ensino Fundamental II e foram elaborados no ano de 2005 pelos professores que compõe o quadro docente da escola da rede estadual por nós selecionada.

A seguir, abordaremos as informações contidas em cada documento, observando-se que o plano referente à 5ª série foi realizado pelo sujeito de pesquisa S_1, de 6ª série pelo S_2, de 7ª série pelo S_3 e 8ª série pelo S_4. Ressaltamos ainda que na análise apenas os tópicos referentes à Geometria serão detalhados e destacados em negrito.

No plano da 5ª série, denominado *Planejamento Anual de Matemática*, consta como objetivo geral o estímulo e a autonomia dos alunos, proporcionando-lhes oportunidades para levantarem hipóteses e buscarem soluções alternativas e pessoais. Menciona-se que ao ensino da Matemática devem ser associados os aspectos formativo, instrumental, científico e tecnológico.

Os *conceitos específicos* nele abordados recebem as seguintes divisões: Operações com Números Naturais, Potenciação e Radiciação, Divisibilidade, Números Racionais Absolutos e **Geometria/Medidas: Sólidos geométricos, Segmentos de reta mediatriz, Eixo de simetria, Comprimento, Geometria dos mosaicos, Volume/ Capacidade, Ângulos, Bissetriz e Polígonos.**

Logo após essa listagem, o documento menciona as *Habilidades*, *Competências*, *Proposta Pedagógica, Metodologia* e *Avaliação* para essa série.

Na 6ª série, o *Plano Anual de Matemática* apresenta os objetivos gerais propondo o desenvolvimento das habilidades do pensamento e a utilização da Matemática como ferramenta útil na representação e interpretação de situações problema. Em seguida, são mencionados os *Objetivos* e os *Conteúdos da Série* que estão divididos em: Conjunto dos Naturais, Equações do 1º grau, **Geometria: Ângulos, Noções de que dependem dos ângulos e Medidas (unidades de área e de volume)** e Estatística.

Na seqüência, abordam os *Objetivos Específicos*, *Metodologia*, *Avaliação*, *Habilidades* e *Competências*. No final do documento, o professor S_2 observa que no decorrer do ano o plano poderá sofrer alterações.

O *Plano Anual de Ensino*, referente à 7ª série, inicia-se com um item denominado *Diagnóstico das Séries*, no qual o professor S_3 relata informações das séries, justificando o desenvolvimento de sua forma de trabalho.

Em seguida, são listados os *Conteúdos:* Cálculo literal, Fatoração de expressões algébricas, Proporcionalidade, **Geometria: Número de diagonais de um polígono, Altura de polígonos: identificação e construção, Áreas e perímetro dos polígonos, Áreas de circunferências, Setor circular, Teorema de Pitágoras, Demonstrações experimentais do Teorema de Pitágoras, Congruência de figuras planas, Congruências de triângulos e aplicações**.

Após essa listagem, são apresentados os *Objetivos Específicos e Habilidades*, *Recursos/Metodologia* e *Avaliação*. No final do documento observam que durante o ano letivo será realizado o desenvolvimento de um Projeto.

Na 8ª série, o professor S_4 inicia a elaboração de seu *Plano* com a exposição do *objetivo geral*, direcionando-o para aquisição de conhecimentos e habilidades matemáticas. Logo após, apresenta os *objetivos específicos* referentes aos seguintes conteúdos conceituais: **Figuras Semelhantes**, **Triângulos semelhantes**, **Semelhança no triângulo retângulo**, **Teorema de Pitágoras**, **Medindo o que não se alcança, Polígonos inscritos e circunscritos**, **Calculando áreas e volumes**, **Perímetro e área do círculo**, Produção e proporcionalidade, Juros, Funções, Produtos notáveis e fatoração, Equações fracionárias, **Simetrias** e **Desenhando em 3D**.

5.5 Plano referente à unidade da rede particular

Na rede particular, o planejamento anual do Ensino Fundamental II é representado pelo *Desenho Curricular*, norteador das propostas educativas do ano letivo. Foi elaborado pelos professores da área de Matemáticas do EFII, sendo que nosso sujeito de pesquisa S_5 é o responsável pela composição do documento da 5ª e 6ª séries e o S_6 pelos de 7ª e 8ª séries.

Em sua introdução são expostos os objetivos do *Desenho Curricular*, seguidos dos objetivos do Ensino Fundamental II que são norteados pelos *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental*.

Logo após, são apresentados os *Programas Curriculares da 5ª, 6ª, 7ª* e *8ª séries* compostos pelos seguintes itens: *Objetivo geral da série, Características gerais do aluno, Grades curriculares: Conteúdos conceituais, Conteúdos procedimentais* e *Conteúdos atitudinais*, *O que os alunos lêem e ouvem*, *O que os alunos produzem, Projetos de trabalho, Trabalhos de Campo* e *Exposições/Painéis*.

Observando o documento, verificamos que na 5ª e 6ª séries a abordagem geométrica é realizada na disciplina Matemática e na 7ª e 8ª séries na disciplina Desenho Geométrico.

Na *Grade Curricular de Matemática da 5ª Série do Ensino Fundamental II*, os conteúdos são divididos por trimestres e *Eixos de Trabalho*. As denominações atribuídas a esses eixos são as propostas pelos PCN: *Números e Operações*, ***Espaço e Forma***, *Grandezas e Medidas* e *Tratamento da Informação*.

Analisaremos nesse documento apenas os conteúdos apresentados no eixo *Espaço e Forma*, direcionados para a Geometria.

Na 5ª série o tópico **FIGURAS TRIDIMENSIONAIS** é abordado no primeiro trimestre por **Poliedros: Prismas e pirâmides, Números de faces, Vértices e arestas de prismas e pirâmides; Corpos Redondos: Cilindro, Cone e Esfera** e **Vistas Simplificadas de um Objeto**.

No segundo trimestre são trabalhadas as **FORMAS PLANAS: Ângulos; Retas paralelas e perpendiculares; Construção de retas paralelas e perpendiculares com régua e esquadro; Polígonos: Ângulos dos polígonos regulares; Construções geométricas: ampliação e deformação de figuras, desenhos construídos com esquadro e régua; SIMETRIA: Observação da simetria existente na natureza e nas construções humanas; Simetria axial nos polígonos regulares**. No terceiro trimestre não são trabalhados conteúdos geométricos.

No primeiro trimestre da 6ª série, são abordados os seguintes itens: **Como utilizar a régua, compasso, esquadros e transferidor na Geometria; Construções geométricas: Ângulos; Círculos e circunferências; Simetrias: Confecção de figuras através de dobraduras.** No segundo trimestre não são propostos conteúdos geométricos e no terceiro são desenvolvidos: **Cálculo de áreas de figuras regulares e irregulares; Cálculo de volumes; Geometria tridimensional; Tipos de formas geométricas**.

Os conteúdos desenvolvidos na 7ª série pela disciplina Desenho Geométrico no primeiro trimestre são apresentados pelos tópicos: **O DESENHO GEOMÉTRICO NO NOSSO COTIDIANO: Utilizando os instrumentos de desenho geométrico; CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: Utilizando a régua, o transferidor e o par de esquadros; A construção de formas tridimensionais; ÂNGULOS, PARALELAS E POLÍGONOS: Algumas propriedades dos ângulos; Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo; Classificação dos polígonos**.

No segundo trimestre os conteúdos são direcionados para **SIMETRIAS: Tipos de simetrias; Simetrias e propriedades das figuras geométricas; DESENHANDO FIGURAS ESPACIAIS: Desenhando sobre malhas; Desenhando em perspectiva** e no terceiro, **ÁREAS E VOLUMES: Idéias para o cálculo de áreas e volumes; Fórmulas para o cálculo de áreas; O Teorema de Pitágoras; GEOMETRIA EXPERIMENTAL: É ou não proporcional; Figuras semelhantes; Perímetro da circunferência.**

Na 8ª série os conteúdos trabalhados no primeiro trimestre são os seguintes: **PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO: Baricentro, Incentro, Circuncentro, Ortocentro; SEMELHANÇA: Figuras semelhantes, Triângulos semelhantes; Semelhança no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras; MEDIDAS: Sistemas decimais e não-decimais; Cálculo de áreas e volumes**.

O segundo trimestre aborda a **GEOMETRIA DEDUTIVA: Matemática, detetives e dedução, ângulos nos polígonos; ângulos na circunferência; paralelismo** e **TRIGONOMETRIA: Medindo o que não se alcança, razões trigonométricas**. O terceiro inicia-se com a continuação de **TRIGONOMETRIA: Polígonos inscritos e circunscritos; CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: Simetrias, Desenhando em 3D** e **CÍRCULO E CILINDRO: Perímetro e área do círculo, Volume do cilindro**.

5.6 Analisando os dados coletados

Antes de continuarmos nossa pesquisa, neste tópico faz-se necessário esclarecer que há uma diferenciação nos planos de ensino das instituições, uma vez que na rede pública, a Geometria é inserida na disciplina matemática em todas as séries do EFII e, na rede particular há uma divisão: na 5ª e 6ª é abordada na disciplina Matemática e na 7ª e 8ª séries na disciplina Desenho Geométrico.

O modelo do questionário aplicado aos professores localiza-se no Anexo I desse trabalho, porém, para melhor análise, transcrevemos as questões que compõem os Blocos 1 e 2, paralelamente às respostas oferecidas pelos sujeitos dessa pesquisa situadas no Anexo II.

Ao finalizarmos as análises dos planos de ensino propostos para a área de Matemática no EFII referentes ao ano de 2005, e observarmos as respostas pertencentes ao Bloco 2 oferecidas pelos sujeitos dessa pesquisa, pretendemos identificar no desenvolvimento de seu trabalho qual o modelo teórico de Gascón que o permeia e responder algumas de nossas questões referentes as prescrições curriculares atuais para o ensino de Geometria.

Inicialmente, verificamos que todos os professores analisados são licenciados em Matemática e afirmam desenvolver o tema Geometria no Ensino Fundamental II nas séries em que ministram aulas, constatamos a presença desses tópicos também em seus planejamentos anuais.

Observamos nas respostas referentes ao conhecimento das prescrições curriculares atuais para o ensino de Geometria, que alguns professores demonstraram dúvidas quanto à denominação *prescrição curricular* (S_1, S_2, S_3 e S_4), porém os sujeitos S_5 e S_6 referiram-se aos *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ao perguntarmos qual a base destas prescrições, o professor S_2 cita os PCN e o sujeito S_6 oferece uma resposta bastante pertinente "*Se baseiam em uma proposta pedagógica que forme cidadãos atuantes e críticos.*".

Quando questionamos se a Grade Curricular de Matemática de suas instituições havia sido elaborada com base nestas prescrições, a maioria respondeu afirmativamente. Nessa questão obtivemos uma resposta do professor S_6 que nos chamou a atenção, pois demonstrou amplo conhecimento sobre a proposta dos temas transversais dos PCN:

> *"(...) elaboramos atividades com o objetivo de promover nos alunos os aspectos seguintes: cidadania; posicionamento crítico; sentimento de pertinência ao país; posicionamento contra qualquer tipo de discriminação; contribuir ativamente para a melhoria do meio ambiente; conhecer e cuidar bem do próprio corpo; utilizar diferentes linguagens para expressar e comunicar idéias; e utilizar-se de recursos tecnológicos para construir conhecimento entre outros."(S_6)*

Quanto à contribuição das prescrições com o desenvolvimento do trabalho em sala de aula, os sujeitos, com exceção do S_1, responderam que sim, alegando que "(...) a geometria é um assunto que grande parte dos alunos se interessam". (S_5), "(...) que os conteúdos estudados em Geometria, podem ser relacionados com números e operações, grandezas e medidas e tratamento da informação". (S_5) e "(...) que as atividades ficam mais objetivas e significativas" (S_6).

Ao analisarmos as respostas sobre o cumprimento dos Planejamentos Anuais relativos ao ano de 2005, referentes aos conteúdos de Geometria, a maioria dos sujeitos não conseguiu. Justificam que alguns fatores influenciaram nessa ocorrência: “(...) dificuldades dos alunos”. (S_3), “(...) grande número de alunos por sala.” (S_2), “O ir e vir do conteúdo prejudicou o cumprimento do plano.” (S_2), “(...) prefiro trabalhar pouco conteúdo e verificar que realmente aprenderam” (S_3), alegam ainda que “Os alunos da rede pública têm muitas dificuldades na aprendizagem, o que torna muito difícil cumprir com os conteúdos propostos”. (S_3).

Quanto à adoção dos livros didáticos, o professor S_1 responde que não, porém como menciona que leva para as aulas xérox de textos, provavelmente deve utilizá-los como material de apoio, como afirma o sujeito $S_{2,}$ os demais adotam.

Em relação ao material manipulativo, os professores $S_{1,}$ S_3 e $S_{.4}$ utilizam “sucatas” e instrumentos para desenho como régua e compasso e avaliam positivamente esses materiais, o sujeito S_6 complementa seu trabalho com livros paradidáticos.

Alterando a seqüência da análise das respostas, verificamos na questão sobre o uso de algum recurso tecnológico geométrico que o professor S_1 utiliza fitas de vídeo para despertar o interesse dos alunos; os sujeitos S_2 e S_3 mencionam impossibilidade, o sujeito S_5 respondeu vídeos educativos e às vezes *Cabri*-géomètre devido a escola não ter sala de informática. Os sujeitos da rede particular afirmam que não, justificando que o laboratório de informática está sendo reestruturado, inviabilizando recursos tecnológicos.

Pela análise realizada nos Planejamentos Anuais e respostas referentes ao questionário avaliadas até esse ponto de nosso trabalho, verificamos que as prescrições curriculares atualmente utilizadas para o ensino de Geometria estão norteadas pelos *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Percebemos que os docentes não demonstram muito conhecimento sobre as informações que constam no documento, mas utilizam-no como referência.

Para podermos identificar, no desenvolvimento do trabalho direcionado ao ensino da Geometria realizado pelos nossos sujeitos de pesquisa, o modelo teórico que o permeia, elegemos três questões cujas respostas nos descrevem referências sobre as aulas desses professores relacionadas a esse tema, registram um exemplo de situação didática e apresentam opiniões sobre o trabalho com demonstrações no EFII e EM.

Observando o trabalho desenvolvido pelo professor S_1, verificamos que o empirismo está sempre presente *"(...) procuro usar muitos conceitos com dobraduras. Fizemos painel para a copa com mosaicos nas cores símbolo do Brasil." (S_1)*. Quanto ao trabalho com as demonstrações, acredita ser cansativo para os alunos no EFII, alegando que *"(...) os alunos perdem o interesse. Um trabalho mais direto, com figuras e recortes torna-se mais prático". (S_1)*.

Os professores denominados nessa pesquisa como S_2, S_3, S_4 e S_5 apresentaram alternadamente em suas respostas características teoricistas e procedimentalistas. Procuramos, em nossa análise, identificá-las e a seguir realizamos a transcrição de alguns trechos em que as localizamos.

No sujeito S_2, um momento teoricista, "*Ocorre uma mistura entre a aula expositiva e a prática 'construção de modelos matemáticos'." (S_2)*, um empirista "(...) *pinte os três ângulos com cores diferentes, recortar e colar um do lado do outro. Os alunos verificarão que a soma dos ângulos é igual a 180°. "(S_2)*. Quanto ao trabalho com demonstrações, acredita que com seu uso "(...) *verifica-se uma melhor aprendizagem e um desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno." (S_2)*

No sujeito S_3, também encontram-se traços teoricistas quando menciona *"São aulas expositivas e demonstrativas. Procuro expor os conteúdos em sala de aula, de forma que o aluno a princípio se interesse a ouvir, refletir e participar." (S_3)* e empirista *"(...) é dado o tangram pronto (em forma de quebra-cabeça), para que o aluno possa observar e identificar a forma das peças. Em seguida passamos à construção das peças no quadrado perfeito." (S_3)*. O professor concorda com o trabalho das demonstrações no EFII.

No sujeito S_4, teoricista *"(...) a aula expositiva permeia todo o trabalho." (S_4)* e empirista *"Área e perímetro, utilizo quadrado de uma unidade e peço para que eles montem quadrados e retângulos a partir do menor para o maior, assim eles chegam a fórmula de área e perímetro sem ter que passar direto a fórmula." (S_4)*. O professor concorda com o uso de fórmulas justificando que *"(...) o aluno tem que ter noção que as regras e fórmulas tem sempre um porque." (S_4)*

No sujeito S_5, teoricista *"Dependendo do assunto, são aulas expositivas." (S_5)* e empirista *"(...) os alunos trazem diferentes embalagens, verificamos semelhanças e diferenças entre elas, até que eles percebem que existem formas que possuem todas as partes formadas por figuras planas." (S_5)* "(...) *fazemos também algumas planificações das embalagens para que percebam que elas são constituídas por polígonos." (S_5)*. Ao trabalho com demonstrações, o professor acredita que *"(...) nas 5ª e 6ª séries elas não devem ser trabalhadas, pois os alunos estão aproximando-se dos conceitos e as demonstrações exigem uma abstração que as crianças dessa série ainda não têm." (S_5)*.

Ao analisarmos as respostas oferecidas pelo professor S_6, identificamos em todas elas características do modelo Construtivista.

> *"Procuro dinamizá-las. Geralmente começo enfatizando a importância do conhecimento no nosso dia a dia, em especial do tema a ser desenvolvido. Trabalho muito com argumentação e validação. Após discussões amplas sobre um determinado tema os alunos são levados à construção do seu próprio conhecimento, por meio de orientações didáticos por mim elaboradas. Hipóteses são levantadas, discutidas e validadas. Após esse processo ocorre a formalização dos conceitos." (S_6)*

> *"Para deduzir a fórmula que nos permite calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer, procedo assim: contando com o conhecimento prévio dos alunos, que já sabem que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, pergunto quanto dá essa soma se o polígono em questão for um quadrilátero. Geralmente eles também já sabem que essa soma dá 360º. Em caso negativo, divido esse quadrilátero em dois triângulos, levando-os à dedução. Desenho na lousa as figuras anteriormente citadas, seguidas por um pentágono, um hexágono, um heptágono e um octógono. Peço que dividam essas figuras, de modo a obterem triângulos e, em seguida, verifiquem quanto dá a soma das medidas dos ângulos internos de cada uma delas. Peço que observem regularidades! Solicito que utilizem a letra "n" como sendo o número de lados do polígono em questão e "s" é a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono... Em pequenos grupos eles terão o objetivo de obter uma fórmula que nos permita calcular o valor de "s" para qualquer "n". Ou seja, calcular "s" em função de "n". Deixo que pensem sobre isso durante alguns minutos e apresentem suas conclusões. Por fim, as situações são analisadas validadas e a fórmula S = (n-2).180º é apresentada". (S_6)*

Na questão referente ao trabalho com demonstrações no EFII e EM, o professor concorda plenamente, destacando que:

> *“Acho as demonstrações fundamentais, pois elas resultam de raciocínios dedutivos. É importante que o aluno entenda os porquês. No Ensino Fundamental II, isso deve ser feito de maneira natural, sem maiores formalidades. Já no ensino médio, pode-se apresentar aos alunos demonstrações com um maior rigor matemático”. (S_6)*

Ao finalizarmos esse capítulo, concluímos pela análise de nossos resultados, que a atual prescrição curricular norteia-se nos *Parâmetros Curriculares Nacionais*, documento que tem como base[40]:

> “(...) a construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a garantir, a toda criança e jovem brasileiros, o acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura”.

Verificamos por meio das respostas oferecidas pelos nossos sujeitos, nessa pesquisa, que sua inserção na prática em sala de aula referente ao ensino da Geometria não ocorre efetivamente, porém podemos perceber que o documento oferece contribuições significativas aos professores.

Quanto aos modelos teóricos identificados na descrição do desenvolvimento didático geométrico dos professores analisados, podemos verificar que apenas dois de nossos sujeitos S_1 e S_6 permanecem com as características de um único modelo de Gascón, denominado respectivamente por *Quase-Empirista* e *Construtivista*, prevalecendo nos relatos dos demais, marcas dos modelos *Euclidianistas* e *Quase-empiristas*.

Porém, ressaltamos que a referência utilizada para essa identificação pode ter nos levado a conclusões equivocadas, pois não observamos os sujeitos dessa pesquisa em sala de aula, não analisamos as atividades geométricas por eles propostas e desenvolvidas com seus alunos, ou seja, não os observamos em diferentes situações de ensino direcionados para a Geometria.

[40] Ministério da Educação e do Desporto e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília, 1997.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao encerrar esse estudo, acreditamos ter fornecido respostas às questões de pesquisa propostas, além de algumas contribuições relacionadas aos fundamentos teóricos e procedimentos metodológicos para investigações sobre as prescrições curriculares para o ensino de Geometria hoje, bem como a análise da identificação dos modelos teóricos de referência em sua trajetória neste segmento.

Retrospectiva Metodológica e Teórica

A inspiração para o desenvolvimento de nosso trabalho fundou-se de uma grande preocupação com a ausência ou abandono da Geometria, impedindo que discussões atuassem sobre os modelos didáticos matemáticos que permeiam esse tema.

Ao buscarmos uma fundamentação teórica, identificamos diferentes modelos teóricos propícios para uma investigação sobre o processo ensino-aprendizagem de Geometria no Brasil.

Optamos então, por um autor que em suas pesquisas, discute um modelo criado pela didática da Matemática que tem como objetivo estudar a organização dos saberes matemáticos, Josep Gascón (2001). Baseando-se em Lakatos, organiza as teorias epistemológicas dividindo-as inicialmente em *Teorias Euclídias* e *Teorias Quase-empíricas*. Para completar essa organização, Gascón (2003) analisa um terceiro grupo de teorias epistemológicas, as *Teorias*

Construtivistas, descrevendo os modelos teóricos denominados *Euclidianista, Quase-empirista* e *Construtivista*.

Procuramos verificar as relações existentes entre essas referências teóricas e atividades de Geometria propostas em alguns livros didáticos e projetos direcionados a esse tema, evidenciando as intersecções entre os documentos oficiais e sua influência ou não nos materiais didáticos, para neles identificarmos de que forma esses modelos estão presentes.

A pesquisa foi complementada com um estudo sobre currículos atuais em desenvolvimento na sala de aula, em turmas do Ensino Fundamental II, de duas escolas: uma da rede pública estadual e outra particular. Os instrumentos metodológicos que utilizamos foram compostos por um questionário e pela análise geométrica dos Planos de Ensino dos sujeitos pesquisados.

Voltando às questões de pesquisa

Inserido no Projeto de pesquisa “Inovações Curriculares nos Ensinos Fundamental e Médio”, que discute como as diretrizes veiculadas por documentos oficiais são traduzidas nos livros didáticos e investiga o “currículo como práxis”, identificando como são realizadas, na prática dos professores em sala de aula, as orientações dos currículos oficiais, nosso trabalho pretendeu responder as seguintes questões, que permeiam e contribuem com essa discussão:

- Como os modelos teóricos denominados *Euclidianista*, *Quase-empirista* e *Construtivista* são identificados na trajetória particular do ensino de Geometria e qual a implicação disso para a organização curricular na Educação Básica?
- Analisando as prescrições curriculares para o ensino de Geometria hoje qual a sua base e como estão sendo colocadas em prática na sala de aula?

Para respondermos à primeira questão, realizamos inicialmente uma trajetória pela epistemologia da Matemática, analisando os modelos teóricos de referência descritos por Gascón e denominados como *Euclidianista*, *Quase-empirista* e *Construtivista*.

A característica principal do *Euclidianismo* reside na trivialização do conhecimento matemático, inserindo-se no ensino da Matemática, esse saber origina dois modelos docentes o *teoricismo e o tecnicismo*.

Em contrapartida, os modelos *Quase-empíricos,* denominados *modernismo e procedimentalismo* no processo de ensino e aprendizagem, têm como foco a destrivialização do conhecimento matemático, enfatizando a descoberta nesse processo.

Privilegiando na abordagem do problema epistemológico, a utilização de uma base empírica aliada à história da ciência e ao desenvolvimento psicogenético, o modelo *Construtivista*, reformula e direciona o problema epistemológico para os mecanismos do desenvolvimento do conhecimento matemático. Ao analisarmos esse modelo, utilizamos duas denominações que se relacionam parcialmente, o *Construtivismo Psicológico* e o *Construtivismo Matemático*.

Após analisarmos esses modelos, buscamos identificá-los na análise de alguns livros das décadas de 1930 até 1970.

Marcada pelas mudanças curriculares desencadeadas pela Reforma Francisco Campos, a década de 1930 foi o marco inicial de nossa trajetória. Como material de pesquisa, utilizamos à coleção *Mathematica* dos autores Cecil Thiré, Mello e Souza e Euclides Roxo, da qual selecionamos no livro do 2º ano o Capítulo V, intitulado “Triângulos”.

Em sua análise, destacamos o desenvolvimento da abordagem dos *Casos de Igualdade de Triângulos* e da definição oferecida pelos autores sobre a demonstração de um teorema, exemplificando-a com a demonstração *“Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais”* (1936, p. 206-207).

Por meio do material observado referente à década de 1930, identificamos a presença do modelo *Euclidianista*, para o qual “ensinar e aprender matemática é como ensinar e aprender teorias”(Gascón, 2001).

Segundo Pires (2006), uma característica evidente nos livros pertencentes à década de 1940, é a grande ênfase na exploração de áreas e volumes. Para ilustrarmos essa característica, observamos no livro *Matemática Ginasial*, de Miguel Feitosa e Walter Toledo Silva, a definição de área do losango, que está apresentada na forma de receituário. Partindo dessa breve análise e da consideração realizada por Pires (2006), percebemos que o modelo *Euclidianista* permanece.

Referindo-se a década de 1950, Miorim (2005, p. 7) descreve que os livros didáticos eram divididos em dois grupos, os atualizados de acordo com a Portaria Ministerial nº. 966/1951 e aqueles de anos anteriores que ainda eram reeditados e utilizados. A convivência desses grupos, segundo a autora, apontava para uma determinada estabilidade escolar, apesar das reformas oficiais. Portanto em nossas conclusões, notamos a permanência do Modelo *Euclídeo*.

Porém, a arbitrariedade na escolha do material analisado pode ter reduzido nosso foco de observação, pois nossa proposta não era exaurir a busca por “todos” os autores das décadas analisadas, consideramos que outros autores do período pudessem trabalhar com modelos teóricos diferentes do *Euclidianista.*

Constatamos esse evento na análise realizada por Pires (2006), do livro *Matemática*, de Carlos Calioli e Nicolau D’Ambrosio, de 1956, no qual observa o ensino da Geometria marcado pelo apelo à intuição, evidenciando-se no material analisado a presença do modelo *Quase-empírico*, que leva à destrivialização do conhecimento matemático, destacando a descoberta como fundamento do processo de aprendizado.

Nas décadas de 60 e 70, segundo a autora, os documentos curriculares e os livros passaram a apresentar uma nova abordagem da Geometria, influenciados pelo Movimento Matemática Moderna. Para analisá-las, utilizamos como referência o autor Osvaldo Sangiorgi, considerado no Brasil um de seus maiores precursores e o primeiro autor de livros didáticos incorporadores das novas propostas definidas pelo MMM.

Utilizamos como referência o livro desse autor denominado *Matemática Curso Ginasial – 3ª Série* de 1964, que faz parte de uma coleção direcionada para as quatro séries do Curso Ginasial, porém selecionamos a terceira por conter o conteúdo por nós analisado “Congruência de Triângulos”. Ao finalizarmos, verificamos que nesse volume os tópicos direcionados para a Geometria são acompanhados constantemente pelas demonstrações, prevalecendo à permanência do modelo *Euclidianista*, localizado na maioria dos livros analisados nessa pesquisa.

Referenciando-se a década de 1970, analisamos os livros do mesmo autor denominados *Matemática 6*, *Matemática 8*, *Matemática Nova Série – 1º Grau – 6ª e 7ª Séries*. Identificamos no último livro mencionado o tema por nós anteriormente selecionado, Congruência de Triângulos. Percebemos em seu desenvolvimento, algumas diferenças: estabelecimento da relação de equivalência com a congruência e a proposta da verificação experimental com papel de seda dos casos de congruência.

Prosseguimos com nossa análise e ao selecionarmos alguns tópicos, verificamos a presença da generalização e abstração. Ao finalizarmos, observamos características referentes ao modelo *Quase-empírico*, sendo a década de setenta, o marco dessa evidência em decorrência dos trabalhos direcionados para as ciências experimentais desenvolvidos por Imre Lakatos.

Quanto aos documentos pesquisados, iniciamos pela análise dos Guias Curriculares, introdutor oficial da Matemática Moderna no sistema de ensino público do Estado de São Paulo. Analisamos brevemente a estrutura do documento, em seguida direcionamos para a disciplina Matemática observando a abordagem geométrica. Durante nosso percurso, constatamos em determinados momentos características de um modelo teórico *Quase-empírico*. Porém, ao verificarmos o posicionamento da Geometria como veículo, para a introdução da Teoria dos Conjuntos modifica-se nossa primeira análise, pois a utilização desta nova abordagem geométrica pode ter gerado características de um modelo *Euclidianista*.

Após os Guias, verificamos o Projeto *Geometria Experimental*, que mesmo marcado pela presença do MMM, apresenta uma conotação empirista. Analisando as atividades que o compõe, constatamos que seu desenvolvimento partiu da exploração de problemas não triviais, destacando seu momento exploratório, caracterizando o modelo teórico *Quase-empirista*.

Nas Propostas Curriculares para o ensino de 1º e 2º graus, elaborada a partir de reflexões sobre o papel da Matemática no currículo, problemas identificados no ensino dessa disciplina e análise crítica dos Guias Curriculares, observamos especificamente o tema direcionado para a Geometria. Na análise da *Nova Proposta*, constatamos que o trabalho desenvolvido manteve-se direcionado para um ensino exploratório, de descoberta. Porém nas atividades geométricas, percebemos a relação entre diferentes dimensões, associando o momento exploratório com o tecnológico-teórico, caracterizando o modelo *Construtivista* de Gascón.

Finalizamos com o *Projeto Experiências Matemáticas*, cuja elaboração motivou-se pelos resultados do trabalho realizado com as *Atividades Matemáticas*. Analisando as atividades geométricas nele contidas, verificamos em seu desenvolvimento a presença do experimental, da descoberta e do exploratório, direcionadas para a construção do conhecimento matemático como havíamos observado na estrutura do projeto, portanto identificamos novamente como modelo teórico de Gascón, o *Construtivismo*.

Ao realizarmos essa trajetória particular do ensino de Geometria, verificamos que modelos teóricos de Gascón podem ser identificados e provavelmente influenciaram o ensino da Geometria nas diferentes décadas analisadas.

Nos documentos e livros constatamos a forte presença do *Euclidianismo* antes do Movimento Matemática Moderna; o surgimento de uma perspectiva *Quase-empirista* como a protagonizada pelo projeto “Geometria Experimental”, na década de 70 e que até hoje permanece nos currículos e a presença pouco perceptível de uma concepção *Construtivista* de ensino-aprendizagem de Geometria.

Pires (2006) após estabelecer em seu artigo as relações entre a trajetória do ensino de Geometria no Brasil e os três modelos de referência apresentados por Gascón, constata nas considerações finais de seu trabalho que[41]:

> "(...) os modelos apresentados nesse artigo, de certa forma, foram dominantes em determinados períodos da trajetória do ensino de Geometria e a ênfase dada a cada um deles foi sendo modificada. Embora num primeiro olhar possamos caracterizá-los como excludentes, numa reflexão mais aprofundada é possível ver possibilidades de convívio e de complementaridade entre eles, em currículos de matemática da educação básica".

Para respondermos à segunda questão de pesquisa, analisamos os *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental*, alguns livros didáticos atuais e realizamos um estudo sobre currículos atuais em desenvolvimento na sala de aula, focalizando o tema "Espaço e Forma".

Verificamos a elaboração da estrutura do documento, procurando delinear um perfil da Matemática no ensino fundamental destacando a Geometria, neste percurso identificamos características direcionadas para o modelo *Construtivista* de Gascón.

Ressaltamos que os princípios direcionados para a área da Matemática, são pautados na adequação do trabalho escolar, direcionando-o para a realidade, sendo os conceitos geométricos o veículo pelo qual o aluno desenvolverá formas de compreender, descrever e interpretar organizadamente seu mundo.

A base desse documento ampara-se na discussão sobre o papel da Matemática na construção de cidadãos, dando ênfase na participação crítica e autônoma do aluno.

Na análise dos livros didáticos atuais, selecionamos a coleção *Matemática para todos*, publicada em 2002, de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, devido

[41] PIRES, Célia Maria Carolino. "Ensino de Geometria no Brasil: uma análise com base em modelos de referência que colocam em relação à epistemologia e a didática da Geometria", Anais da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil (08 a 11 de Outubro de 2006). Painel nº 2. CD ROM.

sua proposta pedagógica estar fundamentada nos mesmos princípios norteadores dos *Parâmetros Curriculares Nacionais*.

Verificando os objetivos, os conteúdos e algumas atividades, constatamos que as abordagens geométricas no material analisado realizam-se de forma intuitiva e experimental. Concluímos que, a obra apresenta características direcionadas para o modelo *Quase-empirista.*

Pires (2006), ao analisar em seu artigo a abordagem geométrica em livros textos atuais menciona que:

> "(...) a perspectiva empirista é concretizada na proposição de atividades que os alunos devem realizar, com o estímulo de materiais como origamis, tangrans, poliminós, geoplanosetc.
>
> A perspectiva empirista é reforçada pelo apoio de sofisticados softwares que permitem o trabalho com uma Geometria dinâmica, alguns dos quais permitem visualizar os objetos geométricos criados e movimentá-los, deformando e conservando suas propriedades, identificando invariantes etc."

No estudo realizado sobre os currículos atuais que estão sendo desenvolvidos em sala de aula, em turmas dos quatro anos finais do Ensino Fundamental, de duas escolas localizadas em São Bernardo e Guarulhos, constatamos que as prescrições curriculares atualmente utilizadas para o ensino de Geometria, estão norteadas pelos *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Porém, notamos que os docentes pesquisados, não demonstraram amplo conhecimento sobre as informações que constam no documento, mas utilizam-no como referência.

Por meio das respostas oferecidas pelos nossos sujeitos nessa pesquisa, observamos que a inserção na prática destas prescrições curriculares em sala de aula, referentes ao ensino da Geometria, não ocorre efetivamente. Verificamos em seus relatos que as atividades desenvolvidas contemplam em alguns momentos uma proposta de caráter *Quase-empirista*, em outros *Euclidianista* ou *Construtivista*.

Para finalizarmos, ressaltamos que embora nos Parâmetros Curriculares Nacionais existam indicações que permitem identificar uma perspectiva *Construtivista*, elas não estão explicitadas. Observamos ainda que, apesar dos docentes pesquisados realizarem referências a esse documento, adotam uma perspectiva *Quase-empirista* de ensino de Geometria.

Referências Bibliográficas

CALIOLI, C.; D'AMBROSIO N. *Matemática*. Companhia Editora Nacional. São Paulo, 1956 - 10ª Edição.

CHIZZOTTI, A. Pesquisa em ciências humanas e sociais. 5.ed. – São Paulo: Cortez, 2001. – (Biblioteca da Educação. Série 1. Escola; v. 16).

FEITOSA, M.; SILVA T. W. *Matemática Ginasial*. Editora Renascença S.A. São Paulo, 1945.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. – (Coleção formação de professores).

GÁSCON, J. La necesidad de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 5, n. 2, 2003, pp. 11-37.

______. Incidência del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. Revista Latino Americana de Investigación em Matemática Educativa, México, v. 4, n. 2, jul, 2001, pp. 129-159.

_______. Epistemologia de las matemáticas y de la educacion matemática. Posición de la didáctica fundamental. Ponencia presentada em el XIII SIIDM, El Escorial, Abr,1999.

GIOVANNI, J. R.; PARENTE, E. Aprendendo Matemática: 8ª série. São Paulo: FTD, 1999, 304p.

GIOVANNI, J.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R. Jr. A conquista da Matemática: 7ª série. São Paulo: FTD, 2002, 359p.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. Matemática para todos: 5ª série, 3º ciclo, 1ª edição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, 319p.

_______. Matemática para todos: 6ª série, 3º ciclo, 1ª edição.São Paulo: Editora Scipione, 2002, 351p.

_______. Matemática para todos: 7ª série, 4º ciclo, 1ª edição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, 351p.

_______. Matemática para todos: 8ª série, 4º ciclo, 1ª edição. São Paulo: Editora Scipione, 2002, 375p.

LAKATOS, I. Mathematica, Science and Epistemology: Philosophical papers. Inglaterra, Cambridge University Pres, v. 2. (Tradução espanhola Matemática, Ciência y Epistemologia: Espana, Madrid, Alianza, 1981).

Ministério da Educação e do Desporto e Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, 1997.

MIORIM, M. A. Livros didáticos de Matemática do período de implantação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. In: V CIBEM – CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2005 ano, 17 a 22 de julho, Porto. Disponível em: http://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&lr=&q=V+CIBEM+ANAIS&btnG=Pesquisar&lr=. Acesso em: 29 maio 2007.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: Causas e conseqüências. Zetetiké. Campinas, ano I, n. 1, mar 1993.

PIAGET, J.; GARCIA, R. Psicogênese e História das Ciências. Ciência Nova. Flammarion, n. 6, set 1983.

PIRES, C. M. C. A Educação Matemática no Brasil. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n.3, septiembre, 2005, pp. 53-72. Disponível em: http://www.fisem.org/descargas/3/Union_003_008.pdf. Acesso em: 29 maio 2007.

_______. Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000, 223p.
_______. Ensino de Geometria no Brasil: uma análise com base em modelos de referência que colocam em relação à epistemologia e a didática da Geometria, Anais da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil (08 a 11 de Outubro de 2006). Painel nº 2. CD ROM.

PREMEM – MEC/IMECC – UNICAMP, Projeto: Novos Materiais para o Ensino da Matemática, Geometria Experimental - Volumes 1, 2 e 3, 1972-1974.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; SOUZA M. Curso de Matemática – 3º ano, Rio de Janeiro e Belo Horizonte: Livraria Francisco Alves. – 1936, 3ª. Edição, 234p.

SANGIORGI, O. Matemática 6, São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1978 - 2ª Edição, 146p.

_______. Matemática 8, São Paulo: Editora Nacional, 1979 - 2ªEdição, 198p.

_______. Matemática Curso Ginasial - 3ª Série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1964 – 78ª Edição, 317p.

_______. Matemática Nova Série – 1º Grau, 6ª Série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 246p.

_______. Matemática Nova Série – 1º Grau, 7ª Série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 198p.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Experiências matemáticas: 5ª série, 2ª versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996. 409 p.il.

_______. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Experiências matemáticas: 6ª série, 2ª versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996. 411 p.il.

_______. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Experiências matemáticas: 7ª série, 2ª versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996. 309 p.il.

_______. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Experiências matemáticas: 8ª série, 2ª versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1996. 365 p.il.

_______. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Proposta Curricular para o ensino de matemática: 1º grau. 4. ed. São Paulo: SE/CENP, 1992. 181p. il.

_______. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Subsídios para a implementação do guia curricular de Matemática: geometria para o 1º grau – 5ª a 8ª série – informações para o professor; coord. Almerindo Marques Bastos e Lygia Conde Lamparelli. São Paulo, SE/CENP, 1978. 72p.

_______. Guias curriculares para o ensino de 1º. grau. São Paulo, CERHUPE, 1975. 276p.

SILVA, M. C. L. A Geometria escolar ontem e hoje: algumas reflexões sobre os livros didáticos de Matemática. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n.3, septiembre, 2005, pp. 73-85. Disponível em: http://www.fisem.org/descargas/3/Union_003_009.pdf. Acesso em: 29 maio 2007.

THIRÉ, C.; SOUZA, M. Matemática 1º ano, Livraria Francisco Alves. Rio de Janeiro, 1931 - 1ª. Edição, 65p.

THIRÉ, C.; SOUZA, M. Matemática 2º ano, Livraria Francisco Alves. Rio de Janeiro, 1931 - 1ª. Edição, 55p.

VALENTE, W. R. Euclides Roxo e a História da Educação Matemática no Brasil. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 1, marzo, 2005, pp. 89-94. Disponível em: http://www.fisem.org/descargas/1/Union_001_012.pdf. Acesso em: 29 maio 2007.

VELOSO J.; PONTE J. P. Ensino de Geometria no virar do milênio. Departamento de Educação Faculdade de Ciências-Universidade de Lisboa, 1999. Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/29ra/trabalhos/trabalho/GT19-2019--Int.pdf. Acesso em: 29 maio 2007.

Anexos

ANEXO I

QUESTIONÁRIO

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados no Ensino da Matemática

Caro professor

Este questionário está sendo apresentado como um dos instrumentos selecionados para compor o trabalho de dissertação de mestrado acadêmico, que está inserido no Projeto de Pesquisa “Inovações Curriculares nos Ensinos Fundamental e Médio”, do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

A sua resposta é de grande valia para esta pesquisa e gostaríamos de lembrá-lo que este questionário é de caráter sigiloso, portanto sua identificação não será revelada.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Questionário

1) Dados Pessoais
Instituição em que trabalha: ____
Nome (opcional): ____
Formação/Área: ____

Graduação: ____

Pós-Graduação: ____

Tempo de experiência no Ensino Fundamental II: _____ anos.

2) O tema Geometria vem sendo desenvolvido no Ensino Fundamental II por você?

____

____

3) Em qual (is) série(s)?

____

____

4) Quais as prescrições curriculares para o ensino de Geometria que você conhece atualmente?

____

____

5) Em que elas se baseiam?

____

____

6) A Grade Curricular de Matemática de sua instituição foi montada baseada nestas prescrições? Em caso positivo, de que forma? Em negativo, qual a estrutura que nela utilizada?

____

____

7) Em sua opinião, esta estrutura por você utilizada contribui com o desenvolvimento do trabalho na sala de aula? Justifique sua resposta, em caso afirmativo ou negativo.

____

____

8) Você conseguiu cumprir em seu Planejamento Anual de 2005 os conteúdos propostos em Geometria? Justifique sua resposta, em caso afirmativo ou negativo.

____

____

9) Adota livros didáticos ou outro material para desenvolver suas aulas de Geometria? Quais? Como avalia esses materiais?

____

____

10) Como são suas aulas de Geometria? Você poderia descrevê-las?

____

____

11) Você poderia registrar um exemplo de situação didática que você realiza com seus alunos nas aulas de Geometria?

____

____

12) Você acha que as demonstrações devem ser trabalhadas no Ensino Fundamental II e Médio? Justifique sua resposta em caso afirmativo ou negativo.

____

____

13) Você usa algum recurso tecnológico (software) geométrico? Qual (is)? Com que finalidades?

____

____

ANEXO II

Transcrição do questionário respondido por quatro professores da rede estadual e dois da rede particular, aplicados em 2006.

- ***BLOCO 1***

1) Formação/Área:

"Tecnólogo Construção Civil Obras Hidráulicas/Matemática Licenciatura" (S_1)

"Licenciatura em Matemática" (S_2)

" Licenciatura Plena em Matemática" (S_3)

" Matemática" (S_4)

"Licenciatura plena em Matemática" (S_5)

" Ciências Físicas e Biológicas 1º grau / Matemática 1º e 2º graus" (S_6)

Graduação:

"Matemática" (S_1)

"Matemática" (S_2)

"Matemática" (S_3)

"Matemática" (S_4)

"Matemática" (S_5)

"Matemática" (S_6)

Pós-graduação:

"Nenhuma" (S_1)

"Nenhuma" (S_2)

"Nenhuma" (S_3)

"Nenhuma" (S_4)

"Nenhuma" (S_5)

"Educação Matemática" (S_6)

Tempo de experiência no Ensino Fundamental II: _____ anos.

"Oito anos" (S_1)

Em branco (S_2)

"Dez anos" (S_3)

"Vinte e um anos" (S_4)

"Vinte anos" (S_5)

"Dezenove anos" (S_6)

- ***BLOCO 2***

2) O tema Geometria vem sendo desenvolvido no Ensino Fundamental II por você?

"Sim, com as turmas de 5ª série" (S_1)

"Sim" (S_2)

"Sim, em todas as séries do EFII" (S_3)

"Sim, em todas as séries do EFII" (S_4)

"Sim" (S_5)

"Sim" (S_6)

3) Em qual (is) série(s)?

Em branco (S_1)

"6ª série" (S_2)

"Atualmente só na 7ª série" (S_3)

"8ª série" (S_4)

"5ª e 6ª séries" (S_5)

"7ª e 8ª séries" (S_6)

4) Quais as prescrições curriculares para o ensino de Geometria que você conhece atualmente?

Em branco (S_1)

"Geometria Plana" (S_2)

"Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no EF. Através da exploração de situações, a geometria leva o aluno a: interpretar e representar - produzir e analisar - ampliar e aprofundar as noções geométricas". (S_3)

"Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo, através da exploração de situações a geometria leva o aluno a interpretar, analisar e aprofundar o conhecimento." (S_4)

"Aquelas que estão nos PCN." (S_5)

"Seguimos o que é proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)" (S_6)

5) Em que elas se baseiam?

Em branco (S_1)

"Nos Parâmetros Curriculares Nacionais." (S_2)

"O estudo dos conteúdos de geometria se baseia como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permite identificar suas propriedades." (S_3)

"É ponto de partida para análise das figuras através da observação e construções para identificação das suas propriedades." (S_4)

Em branco; (S_5)

"Se baseiam em uma proposta pedagógica que forme cidadãos atuantes e críticos." (S_6)

6) A Grade Curricular de Matemática de sua instituição foi montada baseada nestas prescrições? Em caso positivo, de que forma? Em negativo, qual a estrutura que nela utilizada?

Em branco (S_1)

"Sim, partindo da realidade e necessidade da comunidade." (S_2)

"Sim, o conteúdo foi organizado de forma seqüencial, racional e lógica." (S_3)

“Positivo, porque é a base para a construção do conhecimento geométrico.” (S_4)
“Sim, os conteúdos de geometria foram distribuídos ao longo das séries do ensino fundamental II. Temos cinco aulas por semana em cada série. No caso das 5ª séries (durante o ano todo) e da 6ª séries (no 1º trimestre), são reservadas duas dessas aulas para os estudos de geometria.” (S_5)

“Sim, elaboramos atividades com o objetivo de promover nos alunos os aspectos seguintes: cidadania; posicionamento crítico; sentimento de pertinência ao país; posicionamento contra qualquer tipo de discriminação; contribuir ativamente para a melhoria do meio ambiente; conhecer e cuidar bem do próprio corpo; utilizar diferentes linguagens para expressar e comunicar idéias; e utilizar-se de recursos tecnológicos para construir conhecimento entre outros.” (S_6)

7) Em sua opinião, esta estrutura por você utilizada contribui com o desenvolvimento do trabalho na sala de aula? Justifique sua resposta, em caso afirmativo ou negativo.

Em branco (S_1)

“Contribui de forma significativa, proporcionando um melhor desenvolvimento intelectual do aluno.” (S_2)

“Sim, na geometria também existe uma seqüência de conteúdos, isto é, os pré-requisitos. Exemplo: como dar continuidade aos conteúdos de geometria sem saber identificar reta, segmento de reta e ponto.” (S_3)

“Os alunos aprendem a base da geometria através do concreto. O professor fará uso de materiais didáticos ou sucatas para o melhor aprendizado.” (S_4)

“Sim, pois Geometria é um assunto que grande parte dos alunos se interessam bastante, muitos dos conteúdos que são estudados em Geometria, podem ser relacionados com números e operações, grandezas e medidas e tratamento da informação. Por exemplo, na 6ª série, iniciamos estudando (aprofundando) ângulos, em seguida construção e medidas de ângulos, depois construção de polígonos regulares. Aprofundamos a noção de proporcionalidade e porcentagens de números decimais (principalmente as operações) e finalmente, encerramos o ano com a construção de gráficos de setores: os alunos realizam uma pesquisa de opinião com alunos de outras séries e constroem os gráficos com os resultados da pesquisa.” (S_5)

“Contribui e muito. As atividades adquirem um caráter mais objetivo e significativo. Há um envolvimento maior por parte dos alunos e ao longo do tempo percebemos a inscrição desses alunos como cidadãos no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura.” (S_6)

8) *Você conseguiu cumprir em seu Planejamento Anual de 2005 os conteúdos propostos em Geometria? Justifique sua resposta, em caso afirmativo ou negativo.*

"Em parte, para uma turma de 3º EM foi difícil, pois não existia uma base de Geometria Plana, e eu iniciei com Geometria Espacial, só depois de uma revisão. Para as aulas de Geometria Analítica foi um pouco melhor, mas não houve tempo para o término e diziam os alunos que estavam cansados de Geometria." (S_1)

"Não, devido ao grande número de alunos em sala e a preocupação para que a maioria deles alcance os objetivos propostos. O ir e vir do conteúdo prejudicou o cumprimento do plano. Mas isto não implicou na qualidade do mesmo." (S_2)

"Não, o conteúdo de geometria proposto para cada série do Ensino Fundamental II é extenso. Prefiro trabalhar pouco conteúdo e verificar que realmente aprenderam. Os alunos da rede pública têm muitas dificuldades na aprendizagem, o que torna muito difícil cumprir com os conteúdos propostos." (S_3)

"Não" (S_4)

"Na 6ª série sim, mas nas 5ª séries não faltou área e perímetros." (S_5)

"Não consegui cumprir todos os conteúdos propostos em 2005. Pedi ao professor da série seguinte que trabalhasse esse conteúdo logo no começo do ano. Também tomei providências para que isso não ocorra em 2006." (S_6)

9) *Adota livros didáticos ou outro material para desenvolver suas aulas de geometria? Quais? Como avalia esses materiais?*

"Não, mas levei para as aulas xérox de trechos onde havia necessidade de figuras geométricas. Usamos também sucatas (embalagens vazias), que são muito úteis." (S_1)

"Os livros são utilizados como material de apoio, portanto não trabalho com em único livro." (S_2)

"O livro didático é adotado em todas as séries do EF II. Esse material na verdade trata a geometria do mesmo modo e da mesma forma que as outras partes da matemática. Não temos muitos recursos, apenas a sala de aula e os materiais básicos como: lápis, régua, compasso e transferidor." (S_3)

"O livro utilizado é do Jacubo e utilizo materiais como caixas de brinquedos além de régua, compasso e etc." (S_4)

"Sim. O livro "Matemática para todos", gosto muito da abordagem que o livro dá à Geometria." (S_5)

“Adotamos o livro ”Matemática para todos” – Imenes & Lellis, por considerá-lo muito bom. Os capítulos relacionados à Geometria são desenvolvidos nas aulas de Desenho Geométrico. Além disso, o trabalho é complementado com material adequado, extraído de livros paradidáticos.” (S_6)

10) Como são suas aulas de Geometria? Você poderia descrevê-las?

“Para os alunos das 5ª séries, ao falar sempre procuro mostrar o elemento em estudo. Por exemplo, ao falar de retângulo, peço exemplos e mostro a janela, ao falar de retângulo, peço exemplos e mostro a caixa do apagador, para linhas (retas) mostro com papel. Na escola existem fitas que falam de Geometria, além disso, procuro usar muitos conceitos com dobraduras. Fizemos painel para a copa com mosaicos nas cores símbolo do Brasil. Este trabalho iniciou com margem no papel e o quadriculado foi feito pelos alunos, bem como a variação do trabalho, a partir de um desenho básico. Para anos anteriores, principalmente o 3º ano, procuro pedir aos alunos fotos de revistas sobre prismas e materiais redondos, fazemos cartazes com as fotos e montamos com papel sulfite cones, pirâmides etc.” (S_1)

“Ocorre uma mistura entre a aula expositiva e a prática ‘construção de modelos matemáticos’. Desta maneira se tem uma participação efetiva dos alunos.” (S_2)

“São aulas expositivas e demonstrativas. Procuro expor os conteúdos em sala de aula, de forma que o aluno a princípio se interesse a ouvir, refletir e participar. Mas nem sempre, este trabalho sai com sucesso, pois nossa clientela não tem muito interesse.” (S_3)

“Às vezes mostro o que é possível no concreto com materiais que peço para que venha de casa, a aula expositiva permeia todo o trabalho. O conteúdo é abordado resgatando as noções positivas ou negativas dos alunos. Em 99% das aulas é preciso retomar o conteúdo.” (S_4)

“Dependendo do assunto, são aulas expositivas. Mas, na maioria das vezes os conceitos são construídos com atividades práticas e em grupos, atividades que visam também à integração dos alunos. Como, por exemplo, a atividade de simetria, na qual por sugestão do livro, os alunos, confeccionam em papel de seda, um material chamado Pão-por-Deus (é parte do folclore de Santa Catarina). Nós fazemos um amigo secreto, e os alunos devem escrever no Pão-por–Deus um verso para o amigo.” (S_5)

“Procuro dinamizá-las. Geralmente começo enfatizando a importância do conhecimento no nosso dia a dia, em especial do tema a ser desenvolvido. Trabalho muito com argumentação e validação. Após discussões amplas sobre um determinado tema os alunos são levados à construção do seu próprio conhecimento, por meio de orientações didáticos por mim elaboradas. Hipóteses são levantadas, discutidas e validadas. Após esse processo ocorre a formalização dos conceitos.” (S_6)

11) Você poderia registrar um exemplo de situação didática que você realiza com seus alunos nas aulas de geometria?

"Sempre procuro mostrar o material a ser utilizado, para que serve e como usá-lo. Não importa a série, quando falo, por exemplo, do transferidor, verifico que nossos alunos não sabem usá-lo, bem como a régua muitas vezes. Ao fazer um gráfico de setores quase sempre preciso primeiro ensinar como posicionar o transferidor. O esquadro fica só de 'enfeite', pois eles têm dificuldades de posicioná-los e, além disso, muitas vezes 'esquecem' de levar nas aulas. Há necessidade de atendimento quase que individual numa aula, pois as dúvidas são muitas." (S_1)

"Uma oficina matemática com o tema soma dos ângulos internos de um triângulo. Desenhe em uma folha sulfite um triângulo qualquer. Depois, pinte os três ângulos com cores diferentes, recortar e colar um do lado do outro. Os alunos verificarão que a soma dos ângulos é igual a 180°." (S_2)

"Quando trabalho com o tangram, um quebra-cabeça que pode ser proposto para alunos de diversas séries. Em primeiro momento é dado o tangram pronto (em forma de quebra-cabeça), para que o aluno possa observar e identificar a forma das peças. Em seguida passamos à construção das peças no quadrado perfeito. Durante esse processo, demonstrando as propriedades das figuras e do espaço que elas ocupam. Num segundo momento, passamos para atividades mais específicas, sempre ligadas a algum conteúdo matemático como forma de exemplificar o uso desse material. Podendo assim trabalhar o conceito de área e representação de frações, as construções com régua e compasso e semelhança de figuras, etc." (S_3)

"Área e perímetro, utilizo quadrado de uma unidade e peço para que eles montem quadrados e retângulos a partir do menor para o maior, assim eles chegam a formula de área e perímetro sem ter que passar direto a fórmula." (S_4)

"Para a classificação das formas tridimensionais em poliedros e corpos redondos, os alunos trazem diferentes embalagens, verificamos semelhanças e diferenças entre elas, até que eles percebem que existem formas que possuem todas as partes formadas por figuras planas, os Poliedros.Observação: fazemos também algumas planificações das embalagens para que percebam que elas são constituídas por polígonos. Outras que por não possuem todas as partes planas, rolam (corpos redondos). Depois dessas observações, sistematizamos esses conceitos e fazemos desenhos de alguns poliedros (prismas e pirâmides) e dos corpos redondos. Identificamos os vértices, as faces e arestas tanto nas embalagens quanto nos desenhos e estabelecemos a relação entre o número de lados do polígono da base e o número de faces vértices e arestas dos prismas e das pirâmides." (S_5)
"Para deduzir a fórmula que nos permite calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer, procedo assim: contando com o conhecimento prévio dos alunos, que já sabem que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º, pergunto quanto dá essa soma se o polígono em questão for um quadrilátero. Geralmente eles também já sabem que essa soma dá 360º. Em caso negativo, divido esse quadrilátero em dois triângulos, levando-os à dedução. Desenho na lousa as figuras anteriormente citadas, seguidas por um pentágono, um hexágono, um heptágono e um

octógono. Peço que dividam essas figuras, de modo a obterem triângulos e, em seguida, verifique quanto dá a soma das medidas dos ângulos internos de cada uma delas. Peço que observem regularidades! Solicito que utilizem a letra "n" como sendo o número de lados do polígono em questão e "s" é a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono... Em pequenos grupos eles terão o objetivo de obter uma fórmula que nos permita calcular o valor de "s" para qualquer "n". Ou seja, calcular "s" em função de "n". Deixo que pensem sobre isso durante alguns minutos e apresentem suas conclusões. Por fim, as situações são analisadas validadas e a fórmula S = (n-2).180º é apresentada." (S_6)

12) Você acha que as demonstrações devem ser trabalhadas no Ensino Fundamental II e Médio? Justifique sua resposta em caso afirmativo ou negativo.

"No fundamental, acredito que não, para essa idade é muito cansativo e os alunos perdem o interesse. Um trabalho mais direto, com figuras e recortes torna-se mais prático. Seria ideal no EM se eles conseguissem chegar com base para isso, pois estão mais amadurecidos e com possibilidade de assimilação, pena que isso não acontece, nosso aluno chega ao EM com defasagem muito grande, principalmente em geometria." (S_1)

"Sim, verifica-se uma melhor aprendizagem e um desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno." (S_2)

"Sim, as demonstrações tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido, mostrando o real significativo aos alunos." (S_3)

"Sim, por que o aluno tem que ter noção que as regras e fórmulas tem sempre um por que." (S_4)

"Acho que nas 5ª e 6ª séries elas não devem ser trabalhadas, pois os alunos estão aproximando-se dos conceitos e as demonstrações exigem uma abstração que as crianças dessa série ainda não têm." (S_5)

"Acho as demonstrações fundamentais, pois elas resultam de raciocínios dedutivos. É importante que o aluno entenda os porquês. No Ensino Fundamental II, isso deve ser feito de maneira natural, sem maiores formalidades. Já no ensino médio, pode-se apresentar aos alunos demonstrações com um maior rigor matemático." (S_6)

13) Você usa algum recurso tecnológico (software) geométrico? Qual (is)? Com que finalidades?

"Fitas de vídeo, para despertar o interesse." (S_1)

"No momento não, pois nossa sala de informática não está pronta." (S_2)

"Não, pois a escola recebeu dez computadores no mês passado, não sendo possível ainda a utilização dos mesmos." (S_3)

“Vídeo educativos, cabri-geométrico de vez em quando, pois a escola não tem sala de informática.” (S$_4$*)*

“Não.” (S$_5$*)*
“Infelizmente o colégio está reestruturando seu laboratório de informática o que tem inviabilizado o uso de recursos tecnológicos.” (S$_6$*)*