



PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
ÁREA DE CIÊNCIAS NATURAIS E TECNOLÓGICAS
Curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática

RONIZE LAMPERT FERREIRA

**UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE LOGARITMOS
USANDO A ENGENHARIA DIDÁTICA**

Santa Maria, RS

2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

RONIZE LAMPERT FERREIRA

**UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE LOGARITMOS
USANDO A ENGENHARIA DIDÁTICA**

Dissertação apresentada ao Curso
de Mestrado Profissionalizante em
Ensino de Física e de Matemática
do Centro Universitário
Franciscano como exigência
parcial para obtenção do título de
Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr.^a ELENI BISOGNIN

Co-orientadora: Prof^a. Dr.^a. Maria Arleth Pereira

Santa Maria, RS

2006

51

F383u Ferreira, Ronize Lampert

Uma seqüência de ensino para o estudo de Logaritmos usando a Engenharia Didática / Ronize Lampert Ferreira. – Santa Maria, 2006.

149 p : il.

Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. UNIFRA.

1. MATEMÁTICA – LOGARITMO. 2. LOGARITMO.
3. ENGENHARIA DIDÁTICA. I. Título.

CDU 51

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Marta Elena Santana Rumpel CRB – 10/1214 Biblioteca CMSM.

**CENTRO UNIVERSITÁRIO FRANCISCANO
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE
FÍSICA E DE MATEMÁTICA**

A COMISSÃO EXAMINADORA, ABAIXO-ASSINADA, APROVA A
DISSERTAÇÃO:

**UMA SEQUÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE LOGARITMOS
USANDO A ENGENHARIA DIDÁTICA**

Elaborada por:

RONIZE LAMPERT FERREIRA

COMISSÃO EXAMINADORA:

Profª Drª ELENI BISOGNIN

Presidente

Profª. Drª. Maria Arleth Pereira

Profª Drª Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Santa Maria, 13 de dezembro de 2006

DEDICATÓRIA

Ao meu querido esposo agradeço pela paciência, compreensão e acima de tudo pela sua dedicação durante a realização deste trabalho. E ao meu amado filho por ter compreendido minha ausência.

AGRADECIMENTOS

Para a realização deste trabalho, tive apoio de muitas pessoas e por isso agradeço a Deus, por tê-las colocado em meu caminho tornando possível esta pesquisa.

Agradeço aos meus pais pelo apoio, carinho e paciência durante a realização do mestrado.

À professora doutora Eleni Bisognin pelas sugestões valiosas em todas as fases da execução desta pesquisa.

À professora doutora Claudia Groenwald que aceitou fazer parte da banca examinadora e pela colaboração com material didático essencial ao desenvolvimento dessa pesquisa.

À professora doutora Maria Arleth Pereira pela colaboração com sugestões enriquecedoras.

Ao corpo docente do mestrado pelos valorosos ensinamentos.

À professora Marta Inês pela colaboração na correção da Língua Portuguesa deste trabalho.

Ao amigo Fernando C. Ramos, pelo apoio em todos os momentos da dissertação.

A todos os colegas do Colégio Militar de Santa Maria pelo apoio e incentivo recebido.

Aos funcionários da biblioteca por facilitarem minha caminhada.

À secretária Juliane, pela atenção recebida.

A todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta pesquisa.

É melhor tentar e falhar, que preocupar-se e ver a vida passar. É melhor tentar, ainda que em vão, que sentar-se fazendo nada até o final. Eu prefiro na chuva caminhar, que em dias tristes em casa me esconder. Prefiro ser feliz, embora louco, que em conformidade viver ..."

(Martin Luther King).

RESUMO

Esta pesquisa propõe verificar a utilização de uma seqüência didática, elaborada segundo as etapas da Engenharia Didática, com problemas que privilegiam situações reais incentivando à pesquisa e atividades relacionadas ao surgimento dos logaritmos, contribuindo para a construção e compreensão do conceito de logaritmo por parte dos alunos. O estudo está fundamentado na didática da matemática que se preocupa com resultados de experiências em sala de aula, relativas ao ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. A metodologia utilizada segue os princípios da Engenharia Didática, a qual se justifica pelo fato de se tratar de uma concepção que dá importância tanto a dimensão teórica, como experimental da pesquisa e cuja finalidade é analisar as situações didáticas, objeto de estudo da educação matemática. As atividades da seqüência foram elaboradas visando a participação dos alunos da 1ª série do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria-RS na construção do conceito de logaritmo. Nesse trabalho, foram analisadas as produções de 27 (vinte e sete) alunos, organizados em trios. Pode-se inferir a partir das análises a posteriori, que as atividades da seqüência contribuíram para a aquisição do conceito de logaritmo. Os resultados obtidos também revelam que as aulas realizadas no laboratório de informática, com auxílio do software Winplot, facilitaram a construção dos gráficos, permitindo o desenvolvimento de competências para a interpretação dos mesmos, bem como a compreensão da função logarítmica como inversa da função exponencial. Ainda, as atividades da seqüência de ensino envolveram situações que tornaram a aprendizagem do conceito de logaritmo mais significativo, possibilitando aos alunos utilizarem-se desse conceito para o entendimento de fenômenos do mundo real.

Palavras-chave: Engenharia didática – Seqüência de ensino – Logaritmos.

ABSTRACT

This research proposes to check whether the use of a didactic sequence, created according to the stages of the Didactic Engineering, presenting problems concerning real situations, motivating the research and activities related to the appearance of logarithms, it is contributing to the construction of comprehension of the logarithm concept by students. The study is based on didactic of mathematics, which is concerned about experiences results in the classroom related to teaching-learning processes of mathematics subjects. The methodology that was used follows the Didactic Engineering principles, which is justified due to the fact that it is a conception that gives importance to the theoretical dimension as well as to the experiential dimension of the research and whose objective is to analyze the didactic situations, object of study of the mathematics education. The activities of the sequence were elaborated in order to have students from the first grade of high school level,

from Colégio Militar de Santa Maria, taking part in the building of the logarithm concept. In this study, the productions of 27 (twenty-seven) students, who were grouped in trios, were analyzed. One can infer from the later analysis that the activities of the sequence contributed to the acquisition of the logarithm concept. The obtained results also showed the classes that were performed at the computer laboratory, using Winplot software, facilitated the construction of exponential and logarithmic function graphics, allowing the development of competences to interpret them as well as the construction of the logarithmic scale. Moreover, the development of the activities related to the teaching sequence made students learn the logarithm concept and the logarithmic scale more significantly, turning it possible for students to use this concept to understand the real world phenomena.

Key-words: Didactic Engineering, Teaching Sequence; Logarithms

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Análise dos livros didáticos.	55
Tabela 2 – Distância percorrida pelo foguete em função do tempo	71
Tabela 3 – Valores de x e $f(x)=2^x$	90
Tabela 4 – Valores de x e $g(x)=\log_2 x$	90
Tabela 5 – Dados localizados na escala numérica	106
Tabela 6 – Magnitude de terremotos e suas respectivas intensidades	111
Tabela 7 – pH de algumas substâncias.....	112

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Relativo às porcentagens de acertos e erros do teste diagnóstico 64

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1 – Base de lançamento de foguetes em Alcântara-MA.....	70
Ilustração 2 – Gráfico de $y = 10^t$	72
Ilustração 3 – Gráfico da função $f(t) = 10^t$ e de sua inversa	73
Ilustração 4 – Gráfico da função $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$	74
Ilustração 5 – Gráfico da interseção das duas curvas $P(t) = 486$ e $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$	75
Ilustração 6 – Gráfico de $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$ e de sua inversa	76
Ilustração 7 – Gráfico da função $y = e^x$ e sua inversa $y = \ln x$	92
Ilustração 8 – Representação dos Dados na Escala Logarítmica.....	106
Ilustração 9 – Gráfico da função $y = 10^x$	107
Ilustração 10 – Gráfico da função $y = 10^x$ em escala logarítmica.....	107

LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE A – Teste diagnóstico	130
APÊNDICE B – Pauta de observação.....	135
APÊNDICE C – Seqüência Didática	137

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	17
2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	35
2.1 OBJETIVO.....	37
2.2 HIPÓTESES	37
2.3 FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA	39
3 ESTUDO HISTÓRICO DOS LOGARITMOS.	45
4 ANÁLISES PRELIMINARES	52
4.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS	53
4.2 DADOS SOBRE A AMOSTRA.....	58
4.3 TESTE DIAGNÓSTICO.....	58
5 SEQÜÊNCIA DIDÁTICA	67
5.1 A PROPOSTA DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA.....	67
5.2 AS SESSÕES DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA E AS ANÁLISES A PRIORI E A POSTERIORI DAS ATIVIDADES.....	69
5.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA	118
CONSIDERAÇÕES FINAIS	122
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	126
APÊNDICES.....	129

INTRODUÇÃO

É muito comum ouvir falar que em boa parte das escolas brasileiras, predominam técnicas tradicionais de ensino, como: a reprodução, a “decoreba”, a aprendizagem de conceitos sem a abrangência de seu significado, além da necessidade de saber somente para tirar boas notas. Porém, um grande esforço tem sido feito, por parte dos professores, no sentido de mudar essa situação.

No decorrer de alguns anos de magistério, no ensino da Matemática para o Ensino Médio, pode-se observar que a maioria dos alunos da 1ª série apresentavam dificuldades na compreensão do conceito de logaritmo, isto é, os alunos não entendem o real significado do conceito de logaritmo e para que estes servem. Pensando nessa situação, para o desenvolvimento dessa pesquisa, foi construída uma seqüência didática direcionada ao Ensino Médio, que aborda atividades matemáticas como possibilidade de ilustrar a aplicabilidade do conceito de logaritmo e da função logarítmica, seguindo as fases de uma Engenharia Didática.

A matemática é importante para se entender vários aspectos da vida real, por isso, explorá-la com aplicações em problemas práticos, envolvendo outras áreas do conhecimento, é um dos objetivos desse trabalho. Acredita-se que sem esta ligação com a realidade, fica difícil possibilitar um processo autêntico de transformação pela aprendizagem. Portanto, o interesse pela realização desta pesquisa está ligado a uma necessidade de reestruturação nos métodos de ensino de logaritmos, isto é, pela forma de apresentação deste conhecimento em um contexto que proporcione ao aluno um real sentido ao conteúdo que está sendo estudado.

Esta dissertação visa descrever o desenvolvimento de uma seqüência de atividades e de problemas que possam tornar a aprendizagem do conceito de logaritmo mais significativo, pois as atividades desenvolvidas pelos alunos, em sala de aula, podem influenciar de maneira significativa na construção do conhecimento de conceitos matemáticos muitas vezes considerados como desnecessários ou muito difíceis.

Grande parte dos alunos, que passam pelo Ensino Médio, vêem os conteúdos, como logaritmo, sem nenhuma relação com a sua vida prática, no

entanto, é possível realizar uma série de relações deste conteúdo com algumas situações ligadas à realidade desses alunos. Entende-se que esta é uma alternativa pedagógica que oportuniza ao aluno analisar situações que envolvam conhecimentos matemáticos e desenvolvam o espírito crítico através das soluções encontradas, associando a teoria à prática. Na atividade escolar, no que se refere ao estudo de logaritmos e a aprendizagem de seu conceito, percebe-se que as dificuldades apresentadas devem-se ao fato de que, do ponto de vista da aquisição de um conhecimento, este não pode ser gerado a partir da definição algébrica, definição esta que muitas vezes é apenas memorizada. Apesar da importância do estudo de logaritmos, muitos alunos saem do Ensino Médio sem entendê-lo e nem sequer relacioná-lo com aplicações práticas e conhecidas, isto é, sem saber que a teoria dos logaritmos se aplica a muitos tipos de situações-problema, como por exemplo, a quantificação de níveis de intensidade sonora, a construção de uma escala logarítmica, a resolução de problemas envolvendo juros compostos, a utilização de uma escala de medição do grau de acidez ou alcalinidade de uma solução química, o uso da escala Richter na medição da intensidade de terremotos, etc.

Percebe-se, muitas vezes, que a maneira como a matemática vem sendo trabalhada em sala de aula, os alunos não conseguem dar um sentido ao conteúdo que eles estudam. Com esse pensamento e por acreditar que a função social da escola é transmitir conhecimentos que possam ser usados pelos alunos no dia-a-dia, em um contexto diferente ao da sala de aula, pensou-se em oferecer ao aluno uma forma mais significativa de introduzir logaritmos, partindo de problemas que representem situações diversas relacionadas com o seu cotidiano, com o objetivo de ajudá-lo a construir seus próprios conhecimentos.

O ensino do conteúdo de logaritmos é abordado na 1ª série do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria. Constatada a dificuldade dos alunos com relação à construção do conceito e interpretação de gráficos, acredita-se ser possível proporcionar-lhes a oportunidade de desenvolver, por meio de uma seqüência didática, o conceito de logaritmos. Na intenção de favorecer a compreensão deste conteúdo, fundamenta-se esse trabalho de pesquisa na Didática da Matemática Francesa, que tem um papel importante

na busca de alternativas metodológicas de ensino em sala de aula. De modo geral, ela descreve e analisa as dificuldades encontradas e propõe meios para ajudar os professores e alunos a superá-las.

Nessa pesquisa, o conteúdo abordado foi logaritmo, interessando a apropriação deste saber por parte dos alunos. Para isso organizou-se uma sequência didática seguindo as fases de uma Engenharia Didática.

Inicialmente é apresentada a fundamentação teórica desta pesquisa, baseada na Didática da Matemática Francesa, cujo interesse é contribuir com propostas pedagógicas, baseadas em resultados de pesquisas em sala de aula, colaborando para uma melhor aprendizagem da matemática.

A seguir são apresentados os procedimentos metodológicos, utilizados para o desenvolvimento da pesquisa, destacando-se a problemática, os objetivos e as hipóteses da pesquisa.

Em seguida é apresentado um estudo histórico do surgimento dos logaritmos. Esse capítulo tem a intenção de levantar alguns esforços e obstáculos da época do surgimento dos logaritmos e também analisar os efeitos da História da Matemática sobre a construção e evolução do conceito de logaritmo.

Após descreve-se as análises do teste diagnóstico, aplicado em vinte e sete alunos da 1ª série do Colégio Militar de Santa Maria, no Rio Grande do Sul, e a análise de cinco livros didáticos, utilizados no Ensino Médio, no capítulo sobre logaritmo. Estas análises, que fazem parte da primeira fase da Engenharia Didática, a fase das análises prévias foi imprescindível na construção da sequência didática. A análise dos livros foi realizada a fim de verificar o ensino habitual dos logaritmos e a análise do teste foi realizada a fim de verificar as concepções dos alunos a respeito dos pré-requisitos para a introdução do conteúdo de logaritmo.

A sequência didática é apresentada juntamente com as análises a priori e a posteriori das atividades desenvolvidas, bem como a síntese da aplicação desta sequência. Esta fase apóia-se tanto na aplicação, quanto no conjunto de dados recolhidos quando da experimentação, tais como: as observações realizadas nas sessões de ensino, durante a realização das atividades da sequência; nas produções dos alunos tanto em sala como fora, sendo

posteriormente realizado o confronto das duas análises, a priori e a posteriori das atividades de cada sessão, validando ou não as hipóteses da pesquisa.

Nas considerações finais, são relatadas as idéias conclusivas acerca das confirmações das hipóteses e objetivos alcançados. São destacados também os pontos positivos e negativos durante a aplicação da seqüência didática.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Hoje em dia o professor não é o único detentor do conhecimento e o aluno não é aquela página em branco onde se gravava exercícios repetitivos. O saber mudou e a notícia chega cada vez mais rápido. Acredita-se que o professor deve estar constantemente refletindo sobre sua prática, buscando através de leitura e cursos de formação continuada, alternativas para enfrentar os problemas de sala de aula.

Nessa perspectiva o professor,

[...] constitui-se num agente reflexivo de sua prática pedagógica, passando a buscar, autônoma e/ou colaborativamente, subsídios teóricos e práticos que ajudem a compreender e a enfrentar os problemas e desafios do trabalho docente (FIORENTINI; NACARATO, 2005, p.9).

Depreende-se que não basta ser consciente dos problemas de sala de aula, é preciso buscar contribuições teóricas que permitam possíveis soluções além da percepção comum, pois o professor é a personagem central na expansão do conhecimento, aquele que tem a tarefa da sociabilização, ou seja, aquele que desenvolve nos alunos determinadas habilidades e atitudes. Afinal de contas, ele é representante de uma determinada cultura, capaz de influenciar os comportamentos e a conduta dos alunos. Por isso o professor deve dar condições para que os alunos aprendam, propondo-lhes questões que estimulem sua capacidade de pensar criticamente.

Segundo DEMO,

Para atingir níveis aceitáveis, com relação à educação brasileira é estratégia primordial resolver a questão dos professores. Esta questão é complexa incluindo dois planos mais relevantes: valorização profissional e competência técnica (1995, p.87).

Em se tratando de competência técnica, pode-se afirmar que esta significa a capacidade de domínio do conjunto de métodos e pormenores práticos essenciais ao perfeito desempenho de uma profissão ou atividade. Para que exista a competência técnica por parte do professor, faz-se

necessário que haja uma atualização constante, pois é importante que o professor seja competente para poder propiciar uma formação adequada, instalando o ambiente do aprender a aprender, do saber pensar, do questionar criticamente.

Pedro Demo, em *Desafios Modernos da Educação* (1995), enfoca a necessidade de o professor ter a convicção de que a atualização do conhecimento deve ser constante, destacando a importância da pesquisa para a produção do mesmo. Nesses tempos de constantes mudanças, torna-se necessário que o profissional da educação assuma seu papel de formulador, organizador e atualizador de conteúdos, deixando de lado o medíocre repasse de informações que não colaboram para o desenvolvimento do cidadão. Ainda, segundo Demo, “de tempos em tempos o professor deveria suspender suas atividades e passar um semestre estudando, para fazer jus ao processo inovador da educação, baseado na atualização do conhecimento” (1995, p.57). O desafio educacional deve ser uma constante na vida dos professores, tendo em vista que estes precisam acompanhar as mudanças econômico-sociais e tecnológicas sofridas pela sociedade. Para tanto há a necessidade de que o professor mantenha ativo seu papel de pesquisador.

A preocupação constante que o professor tem, por resultados positivos, tanto para seus alunos como para si é o que faz com que ele busque constantemente por melhorias em sua prática educacional. Também, as mudanças constantes, pelas quais passa a sociedade, obrigam os professores e as escolas a reconsiderar seu papel e a repensar o modelo educacional pelo qual se trabalha. Muitas vezes, tem-se um professor que não está preparado adequadamente para atuar na nova realidade da escola. Pode-se constatar que alguns professores, hoje, transformaram-se em meros especialistas em transferir conhecimentos adquiridos e esqueceram-se das principais qualidades que deveriam desenvolver nos estudantes: a iniciativa, a criatividade e o constante questionamento crítico.

Antigamente, a figura do professor era a de um homem de cultura, e sua autoridade tradicional tinha um forte componente moral. Mas o professor evoluiu durante o século XIX, deixando de se centrar na autoridade moral para atuar numa função mais racional e produtiva. Hoje, deseja-se um profissional ciente de seu verdadeiro papel, pois professor é aquele que

facilita o acesso às informações para que o aluno possa construir as suas verdades, desenvolvendo uma postura crítica.

Nesse contexto, outra questão importante a ser considerada é com relação aos conteúdos que os futuros professores aprendem na graduação. Estes conteúdos devem ser reelaborados, pelos docentes, no momento do planejamento da aula, de modo a proporcionarem aos alunos a construção dos conhecimentos, ou seja, é preciso transformar os saberes científicos em saberes escolares, de maneira que estes tenham significado para seus alunos. Esta questão é difícil e desafiadora para os professores de matemática, pois não é fácil superar o ensino tradicional, aprender o conteúdo de uma forma e transmiti-lo de outra. Além do mais, é importante que eles tenham conhecimento da matéria que ensinam, não um conhecimento marcado por regras e formalidades, mas um conhecimento voltado às necessidades da profissão-professor, que englobam desde a simples transmissão de idéias de cidadania até o estímulo à busca do conhecimento.

A literatura destaca a importância do domínio do conhecimento específico pelo professor, principalmente quando este busca a renovação curricular:

Este domínio profundo do conhecimento é fundamental para que o professor tenha autonomia intelectual para produzir o seu próprio currículo se constituindo efetivamente como mediador entre o conhecimento historicamente produzido e aquele – o escolar reelaborado e relevante socioculturalmente – a ser apropriado/construído pelos alunos. Este domínio e reflexão epistemológica é sobretudo fundamental nas áreas de ciências e matemática, pois, segundo Fiorentini (1995), a forma como conhecemos e concebemos os conteúdos de ensino tem fortes implicações no modo como os selecionamos e os reelaboramos didaticamente em saber escolar, especialmente no modo como os exploramos/problematizamos em nossas aulas (FIORENTINI; MELO, 1998, p.316-7, apud FIORENTINI; NACARATO, 2005, p.39).

Faz-se necessário que os professores tornem-se cada vez mais aptos a conduzir um ensino adequado às necessidades e aos interesses dos alunos, ou melhor, aos interesses de uma sociedade informatizada. Sociedade esta que impõe novos hábitos aos adolescentes, como a Internet, por exemplo, que traz um contentamento imediato a seus anseios. Embasados nessa realidade, a educação de sala de aula deixa de ser essencial para o aluno.

Conforme argumenta Dario Fiorentini:

Do professor têm sido exigidas competências para as quais não está preparado, pois sua formação inicial não lhe deu e a continuada – quando existe – não aborda essas questões. Além de ministrar competentemente o conteúdo de sua disciplina, o professor deve exercer funções que deveriam ser de outras áreas: assistente social, psicólogo, orientador sexual... Enfim deve ser capaz de lidar com as questões emocionais, afetivas, sociais e cognitivas de seus alunos (FIORENTINI; NACARATO, 2005, p.97,).

Percebe-se a necessidade de os professores desenvolverem habilidades, além das que lhes foram oferecidas, durante o curso de graduação. O desafio maior para os professores de matemática é despertar nos alunos uma motivação, não somente para prestarem a atenção em suas aulas, mas também para que eles compreendam o que está sendo trabalhado em sala, para que possam verificar a utilidade dos saberes escolares.

Nesse contexto, esta pesquisa tem por base a educação matemática, que está voltada para os estudos realizados sobre o ensino e a aprendizagem da matemática na sala de aula, buscando organizar um trabalho em que os alunos são colocados diante de situações que realmente os desafiem e que os auxiliem no desenvolvimento de autonomia intelectual de forma que os conhecimentos adquiridos, na escola, possam lhes proporcionar condições para compreender e participar do mundo.

A educação matemática no contexto mundial é considerada como,

[...] área educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino-aprendizagem da matemática, nos diversos níveis da escolaridade, quer seja em uma dimensão teórica ou prática (PAIS, 2002, p.10).

Esta pesquisa fundamenta-se, ainda, na educação matemática, que é uma área de pesquisa em matemática e tem por fim o estudo das situações didáticas, ou seja, uma área do conhecimento ligada ao ensino da matemática, mais precisamente interessada na pesquisa dos fenômenos relativos ao ensino da matemática, sendo seu fim, a “determinação das condições nas quais se produz a apropriação do saber, por parte dos alunos” (GALVEZ, 2001, p.27). Nesse sentido faz-se necessário que o professor possa controlar tais condições, seguindo as fases de uma engenharia didática.

Conforme Pais:

A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (PAIS, 2002, p.10).

Nesse sentido, pode-se entender que a didática da matemática, fornece resultados de pesquisas, sobretudo em sala de aula, para que os educadores de modo geral possam indicar propostas pedagógicas com a intenção de contribuir não somente, para uma melhor aprendizagem da matemática, mas para a melhoria de seu ensino.

Dentro dessa perspectiva, objetivou-se estabelecer as noções didáticas que deram base à pesquisa. Utilizou-se algumas contribuições da Didática da Matemática Francesa que, segundo Pais (2002, p.9), “tem como uma de suas características a formalização conceitual de suas constatações práticas e teóricas”. Algumas dessas constatações são identificadas na idéia de Situação Didática, Transposição Didática, Obstáculos Epistemológicos, Contrato Didático e Formação de Conceitos. Esses conceitos são importantes para a compreensão de questões educacionais relativas ao fenômeno da aprendizagem da matemática.

Entre as diversas teorias pedagógicas, desenvolvidas nas últimas décadas, será utilizada como referência, a teoria das situações didáticas, pois esta ajuda a compreender melhor o fenômeno relativo ao ensino da matemática, e também por se tratar de uma teoria que considera as particularidades do saber matemático, isto é, observa e analisa segundo Freitas (1999, p.65), "as diferentes formas de apresentação do conteúdo matemático ao aluno". Essa teoria desenvolvida por Brousseau (1986), preocupa-se com a aprendizagem matemática, em sala de aula, abrangendo professor, alunos e o conhecimento matemático. Utilizar-se-á da teoria da situação didática, pois acredita-se que essa, enquanto estratégia pedagógica para o ensino da matemática num ambiente contextualizado, possa garantir aprendizagens significativas .

De acordo com Brousseau (1986), as situações didáticas são definidas como:

[...] um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição (apud PARRA; SAIZ, 2001, p.28).

Com relação à teoria das situações didáticas de Brousseau (1986), pode-se afirmar que esta analisa as várias maneiras de se apresentar um conteúdo em sala de aula. O interesse por essa teoria deve-se ao fato de que aborda aspectos específicos do saber matemático. Procura formas significativas de apresentar o conteúdo matemático, tendo a preocupação de apresentar o conhecimento dentro de um contexto que tenha significado para os alunos.

Conforme Pais (2002), um aspecto importante a ser levantado nas situações didáticas é o problema da exposição do conteúdo em um contexto que seja significativo, caso contrário, este assunto poderá perder a importância aos olhos dos alunos. Por esse motivo, a teoria das situações é colocada a partir da questão que consiste na maneira de apresentação do conteúdo, possibilitando ao aluno a construção do conhecimento. Nesse sentido, a situação didática elaborada pela professora-pesquisadora e descrita neste trabalho, refere-se à apropriação do conceito de logaritmo e foi construída a partir de situações-problema para que os alunos pudessem compreender o seu sentido e sua utilidade.

Seguindo essa linha de raciocínio, podemos inferir que as situações didáticas devem ser organizadas pelo professor de maneira a despertar o interesse dos alunos em buscar soluções, utilizando seus próprios conhecimentos. O que importa para a didática da matemática é distinguir dentro de cada situação didática, o que realmente determina o crescimento dos alunos com relação ao seus conhecimentos. Não importando se a situação didática teve êxito ou fracasso, o que importa é identificar os fatores determinantes do fracasso ou sucesso para a aprendizagem de determinado conhecimento.

Em decorrência do acima exposto, faz-se necessário entender a diferença entre o saber e o conhecimento. Segundo Brousseau (1988 apud MACHADO, et al, 1999), o conhecimento está ligado a ciência, a história e a cultura, envolve o aluno em atividades que o desafiem. O conhecimento é pessoal e útil. Por outro lado, o saber é algo ligado a um contexto científico, histórico e cultural. Interessante observar as transformações do saber na escola, como por exemplo, as transformações sofridas pelos logaritmos ao longo desse último século.

Ao conjunto dos conteúdos escolhidos para compor os programas escolares, dá-se o nome de saberes escolares; esses saberes são eleitos pela influência de professores, especialistas, cientistas, políticos, autores de livros didáticos. Em se tratando da evolução de um saber, faz-se necessário falar em transposição didática, que pode ser analisada, segundo Pais (1999, p.21-24), a partir de três tipos de saberes: o saber científico, que está atrelado às produções acadêmicas como artigos, teses, livros, etc.; o saber a ensinar e o saber ensinado. Para que os alunos possam atingir certo conhecimento é necessário que os saberes científicos sejam reformulados em uma linguagem mais acessível e didática. O saber a ensinar está ligado a maneira de apresentar um saber ao aluno, ou seja, geralmente se encontra nos livros didáticos. A partir desses dois saberes, o científico e o a ensinar, surge o saber ensinado que é realizado pelo professor. Este deve levar em consideração o uso de uma metodologia de ensino direcionada a aprendizagem de determinado conteúdo. O mais importante com relação aos saberes é que eles possam ser gerados a partir dos conhecimentos dos alunos.

O saber escolar pode ter um sentido maior ou menor, dependendo da maneira com que este é apresentado ao aluno. O envolvimento do aluno, em sala de aula, está na subordinação da situação didática, que deve ser planejada pelo professor para cada conteúdo específico. As pesquisas que vem sendo realizadas acerca dos diferentes tipos de situações didáticas permitem que se descubram aspectos importantes relacionados as questões do ensino-aprendizagem e proporciona a busca de resoluções de problemas do dia-a-dia da sala de aula.

Com relação a forma de apresentação dos conhecimentos matemáticos, convém lembrar que: “O significado do saber matemático escolar para o aluno

é fortemente influenciado pela forma didática com que o conteúdo lhe é apresentado. O envolvimento do aluno dependerá da estruturação das diferentes atividades de uma situação didática” (FREITAS, 1999, p.66).

O professor deve planejar sua aula de maneira a oportunizar ao aluno a tomada de decisões tanto na resolução, quanto na formulação criativa de problemas. É por esse caminho que o aluno realmente constrói o seu conhecimento. As Situações Didáticas envolvem especificamente três elementos, o professor, o aluno e o saber. Conforme Pais (2002) pode existir uma situação de estudo sem a presença do professor, somente o aluno e o saber, o que importa é a vontade determinada de que alguém aprenderá algo. Ainda, segundo o autor, esses três fatores não são suficientes para abranger o fenômeno cognitivo, faz-se necessário um nexos entre as situações didáticas e outros aspectos do sistema didático como, por exemplo: objetivos, métodos, posições teóricas, recursos didáticos entre outros. Dependendo do conteúdo a ser ensinado, esses elementos receberão influências diretas da especificidade, ou seja, a situação deve ser planejada pelo professor, de forma a tratar cada conteúdo de maneira específica e singular.

Segundo as concepções de Chevallard (1991), “Todo saber ao se tornar um saber escolar passa por um processo de reconstrução, fruto de uma transposição didática”. A respeito deste tema, Chevallard define transposição como:

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (1991, apud PAIS, 2001, p.19).

Em uma sala de aula, quando é apresentado um conceito novo para o aluno, pode ocorrer uma transformação radical entre um velho conceito, por exemplo, e um novo saber apresentado pelo professor. Para a educação, é de interesse analisar se os saberes que se deseja ensinar aos alunos, trazem consigo obstáculos que possam inviabilizar a aprendizagem, ou seja, conhecimentos adquiridos anteriormente e incorporados como absolutos. A noção de obstáculo epistemológico foi introduzida na educação matemática

por Brousseau em 1976 e foi inspirada nas idéias do filósofo francês Bachelard apresentadas em 1938. O conceito de obstáculo será utilizado nessa pesquisa como “sendo aquele obstáculo ligado à resistência de um saber mal-adaptado”.

O interesse, nesta pesquisa, ao estudar a noção de obstáculo, é devido ao fato de que esta noção é um alerta, no sentido de o professor ter que levar em conta o que os alunos trazem para a sala de aula, seus conhecimentos já constituídos. Pode-se inferir que o obstáculo, é gerado por um conhecimento e não pela falta deste, portanto todo conhecimento pode vir a se tornar um obstáculo diante da aprendizagem de um novo conceito. Por exemplo, às vezes, faz-se necessário que o aluno ignore o saber cotidiano para que possa elevar o nível de seu conhecimento. O objetivo de toda aula de matemática é a aprendizagem de um conceito, para isso, o professor elabora os objetivos a serem atingidos, para determinar ações e definir conhecimentos que os estudantes devem adquirir, estes objetivos devem ser elaborados de forma que resultem na transposição do obstáculo.

Sempre que possível deve-se, em sala de aula, trabalhar com atividades envolvendo situações conhecidas pelos alunos. Ao professor cabe, portanto, encontrar formas didáticas de proporcionar essas situações aos alunos. Nesse mesmo contexto surge a necessidade de uma metodologia que viabilize a ação do professor, por outro lado, também não se pode esquecer que as relações de sala de aula (durante o saber ensinado) estão atreladas a um contrato didático.

Conforme dito anteriormente, a educação matemática tem por fim o estudo das situações didáticas, que, pode ser descrita como a união das relações entre os alunos, um determinado meio e o professor, com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber. As regras da negociação dessas relações são o que se denomina de contrato didático, dentro das situações didáticas. Após a elaboração das situações didáticas, deve-se ter a preocupação com as regras durante a aplicação das atividades, pois essas podem sofrer influências não previstas pelo professor.

De acordo com Brousseau o contrato didático refere-se,

[...] ao estudo das regras e condições que condicionam o funcionamento da educação escolar, quer seja no contexto de uma sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar quer

seja na dimensão mais ampla do sistema educativo (1986 apud PAIS, 2002, p.77).

Pode-se inferir que o contrato didático refere-se às regras, muitas vezes implícitas que se estabelecem entre o professor e o aluno, podendo ocorrer tanto na sala de aula como fora dela.

Segundo Pais (2002) estudos mostram que o contrato didático é mais claramente percebido, quando suas regras não são observadas pelo professor ou pelo próprio aluno, ou seja, quando as regras desse contrato não são seguidas. O contrato didático refere-se a uma situação de ensino que leva em conta a relação entre o professor, o aluno e o conhecimento. Não se pode esclarecer todas as normas que regem um contrato didático, porém existem certas atitudes do professor que são esperadas pelos alunos e vice-versa. Se por alguma razão, houver uma ruptura do contrato por parte do aluno, seria interessante verificar as causas que levaram a esta ruptura para que houvesse continuidade do processo educativo.

De acordo com Brousseau (1986, apud PAIS, 2002), encontram-se três exemplos de contrato didático, relacionando professor, aluno e conhecimento. Com relação ao primeiro exemplo de contrato, pode-se caracterizá-lo como uma metodologia tradicional na qual só o professor detém o conhecimento. Além de elaborar sozinho suas aulas, acredita que somente através da sua exposição dá-se a aprendizagem do conteúdo. Geralmente, nesse tipo de contrato, o professor resolve alguns problemas aparentemente fáceis aos olhos dos alunos, mas quando estes vão tentar resolvê-los sozinhos eles parecem mais difíceis.

No segundo exemplo de contrato didático, destaca-se a relação do aluno com o saber, e o professor acompanha à distância. O aluno é que tem a obrigação de estudar e acaba construindo sua própria concepção, nesse sentido, há um pequeno ou nenhum controle pedagógico do processo ensino-aprendizagem. Aqui, segundo Brousseau, confundem-se o saber cotidiano que flui de maneira mais espontânea e o saber escolar.

No terceiro exemplo de contrato didático, o professor intervém de forma mais compromissada, tanto com os grupos de alunos como com o aluno individualmente. Aqui, ele elabora as situações didáticas com o objetivo de controlar possíveis erros e a preocupação maior é com o aluno e o saber.

Nesta pesquisa procurou-se seguir os passos do terceiro exemplo de contrato didático, na qual a professora elaborou uma seqüência didática relativa ao conteúdo de logaritmo, com situações-problema desafiadoras, levando o aluno a pesquisar e trabalhar com atividades adequadas à realidade. A idéia de contrato didático surge das relações entre os sujeitos envolvidos no processo ensino-aprendizagem. Dessas relações surgem regras ora implícitas ora explícitas no que se refere às responsabilidades do professor em relação ao aluno e do aluno em relação ao professor. Essas regras viabilizam as práticas metodológicas de sala de aula.

Como a educação matemática, empenha-se em estudar questões relativas a aquisição dos conceitos por parte dos alunos, far-se-á um breve comentário da teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1996), em que um dos objetivos, segundo Pais, é reconsiderar as circunstâncias da aprendizagem conceitual, de modo a facilitar a compreensão por parte do aluno. Essa teoria leva em consideração, a existência de conceitos formulados anteriormente de maneira que a cada novo conceito passa a utilizar-se de um saber já existente, ou seja, uma aprendizagem bem sucedida dá-se quando os conhecimentos anteriores são adicionados uns aos outros e incorporados a um novo contexto (PAIS, 2002, p.53).

Pais é pontual na definição de conceitos:

Os conceitos são idéias gerais e abstratas desenvolvidas no âmbito de uma área específica de conhecimento, criados para sintetizar a essência de uma classe de objetos, situações ou problemas relacionados ao mundo-da-vida (2002, p.55).

Acredita-se ser de grande importância a aprendizagem de conceitos, e a escola e os professores devem dar maior atenção a essa situação. Não se pode aceitar, que a compreensão de um conceito possa ser concebida através de uma comunicação verbal, ou seja, não se pode restringir a aprendizagem dos alunos a uma memorização de fórmulas, regras e definições.

O sentido de um conceito, segundo Vergnaud é que:

Um conceito está fortemente associado à atividade de resolução de problemas. É nesse contexto que o aluno pode desenvolver sua compreensão do sentido inicial dos conceitos e teoremas matemáticos (apud PAIS, 2001, p.57).

Uma tarefa que cabe aos professores, é prever diversos caminhos para a aprendizagem dos conceitos, ou seja, planejar situações didáticas, que como anteriormente comentado, permitam difundir a compreensão do conceito para o aluno (PAIS, 2002). Quando os alunos chegam na escola, trazem consigo muitos conhecimentos, é o que é chamado de saber cotidiano e que, por sua vez, não pode ser desprezado. O grande desafio para os educadores é organizar ou elaborar situações didáticas que possam contribuir na transposição didática, ou seja, na transformação do saber cotidiano para o saber escolar.

Nesse contexto, a formação de um conceito não acontece através de um único tipo de situação, da mesma forma que uma única situação, geralmente, envolve uma diversidade de conceitos. Pais (2002) salienta que a formação de um conceito é realizado a partir de componentes anteriores, isto é, a idéia que se tem de algo básico ou ainda de outros conceitos pré-existentes.

Faz-se necessário salientar, nesse contexto, as situações de aprendizagem nas quais os conceitos são elaborados pelos alunos. Hoje em dia, os alunos vivenciam as aulas conforme seu humor, sua disposição, sua capacidade de concentração, seu interesse, capacidade de relacionar o que sabem com outros saberes que já possuem. Pensar que se pode alcançar todos os alunos de uma sala de aula com uma palestra é ilusão. O fato é que existem tantas situações distintas quanto alunos diferentes. Por isso, para um trabalho mais eficaz em sala de aula, faz-se necessário que os professores sejam capazes de organizar situações de aprendizagem.

Organizar situações de aprendizagem significa pensar naqueles alunos que não conseguem aprender a matéria só ouvindo, é observar o tempo certo para inserir as atividades específicas em cada momento, é fugir dos exercícios de repetição ou aplicação de fórmulas. Segundo Perrenoud (2000, p.26), para poder organizar e dirigir situações de aprendizagem, é necessário algumas competências específicas tais como:

- conhecer, para determinada disciplina, conteúdos a serem ensinados e sua tradução em objetivos de aprendizagem;
- trabalhar a partir das representações dos alunos;
- trabalhar a partir dos erros e de obstáculos à aprendizagem;

- construir e planejar dispositivos e seqüências didáticas;
- envolver os alunos em atividades de pesquisa, em projetos de conhecimento.

A importância de trabalhar com atividades dessa natureza é que não se pode esquecer que o aluno tem conhecimentos prévios e o professor deve levá-los em conta para que seus ensinamentos não se choquem frente as suas concepções. O professor deve ser consciente de que aprender não é memorizar, mas sim reestruturar as concepções já existentes.

Conforme Perrenoud (2000, p.27):

A competência requerida hoje em dia é o domínio dos conteúdos com suficiente fluência e distância par construí-los em situações aberta e tarefas complexas, aproveitando ocasiões, partindo dos interesses dos alunos, explorando os acontecimentos, em suma favorecendo a apropriação ativa e a transferência dos saberes, sem passar por sua exposição metódica, na ordem prescrita por um sumário.

Dentro de uma seqüência didática, as situações de aprendizagem, tendem a colocar os alunos frente a uma situação que precisa ser resolvida, ou seja, é preciso envolver os alunos em atividades de pesquisa e situações-problema que são organizadas em torno de um obstáculo o qual desaparece quando ele é ultrapassado.

Astolfi (1997 apud PERRENOUD 2000, p.42), define as 10 características de uma situação-problema:

- uma situação-problema é organizada em torno da resolução de um obstáculo pela classe, obstáculo previamente bem-identificado;
- o estudo organiza-se em torno de uma situação de caráter concreto, que permita efetivamente ao aluno formular hipóteses e conjecturas. Não se trata, portanto, de um estudo aprofundado, nem de um exemplo *ad hoc*, de caráter ilustrativo, como aqueles encontrados nas situações clássicas de ensino (inclusive em trabalhos práticos);
- os alunos vêem a situação que lhes é proposta como um verdadeiro enigma a ser resolvido, no qual estão em condições de investir.

Esta é a condição para que funcione a devolução: o problema, ainda que inicialmente proposto pelo professor, torna-se “questão dos alunos”;

- os alunos não dispõem, no início, dos meios da solução buscada, devido à existência do obstáculo a transpor para chegar a ela. É a necessidade de resolver que leva o aluno a elaborar ou a se apropriar coletivamente dos instrumentos intelectuais necessários à construção de uma solução;
- a situação deve oferecer resistência suficiente, levando o aluno a nela investir seus conhecimentos anteriores disponíveis, assim como suas representações, de modo que ela leve a questionamentos e à elaboração de novas idéias;
- entretanto, a solução não deve ser percebida como fora de alcance pelos alunos, não sendo a situação-problema uma situação de caráter problemático. A atividade deve operar em uma zona próxima, propícia ao desafio intelectual a ser resolvido e à interiorização das “regras do jogo”;
- a antecipação dos resultados e sua expressão coletiva precedem a busca efetiva da solução, fazendo parte do jogo o “risco” assumido por cada um;
- o trabalho da situação-problema funciona, assim, como um debate científico dentro da classe, estimulando os conflitos sociocognitivos potenciais
- a validade da solução e sua sanção não são dadas de modo externo pelo professor, mas resultam do modo de estruturação da própria situação
- o reexame coletivo do caminho percorrido é a ocasião para um retorno reflexivo, de caráter metacognitivo; auxilia os alunos a conscientizarem-se das estratégias que executaram de forma heurística e a estabilizá-las em procedimentos disponíveis para novas situações-problema.

Outra questão a ser levada em consideração com relação a aprendizagem, é que esta não ocorre somente na presença de um contexto

escolar, sob o domínio do professor. De acordo com Chevallad (1991), “para que uma aula funcione, também tem de existir processos didáticos fora dela”. Os alunos devem, segundo o autor, estudar sozinhos ou em grupo, com ou sem ajuda, assuntos relativos as aulas, porém fora da sala. Existem situações que o professor controla e outras que escapam de seu domínio, porém podendo ocasionar uma aprendizagem. A essas últimas, Brousseau (1996), chamou de Situações Adidáticas.

Nas palavras de Brousseau:

Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar ele mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática (1986, apud PAIS, 2001, p.68).

Vale a pena destacar, entre outros objetivos, que a educação matemática viabiliza a integração entre a didática e o adidático, em que a intenção é estabelecer o que está sob domínio pedagógico ou não. Conforme Pais (2002, p.69), a “potencialidade das situações adidáticas está, justamente, voltada para a tentativa de romper com as velhas práticas da repetição e do modelo, que tanto influenciaram uma certa vertente da pedagogia tradicional”.

Ainda de acordo com Pais (2002), Bachelard notou que o crescimento de um conhecimento pré-científico para um nível de reconhecimento científico, passa pelo afastamento de conhecimentos já existentes e se enfrenta com vários obstáculos. A expressão obstáculos será utilizada no sentido descrito por Gastão Bachelard, em sua obra “A Formação do Espírito Científico”, publicada em 1983, o qual é definido como um conhecimento e não a falta dele. Com relação à matemática, Bachelard acrescenta que esta não progride segundo um método de acréscimo, ou seja, os novos teoremas não se ligam imediatamente uns aos outros. Um exemplo prático de obstáculo epistemológico, segundo Bachelard (1996) é o senso comum, pois a evolução da ciência passa por épocas sem progressão significativa, porém estes períodos ficam registrados por uma concepção fixa, que a sua contradição torna-se um obstáculo frente a novos contextos.

Vive-se em um mundo de rápidas mudanças, por isso é importante que a educação esteja voltada para o desenvolvimento do cidadão como um todo,

que a educação escolar propicie aos alunos capacidades mínimas para que eles possam se mover dentro de uma sociedade mutável. Nesse contexto, a missão dos educadores, torna-se bastante árdua, pois proporcionar um ensino que possibilite ao aluno adquirir habilidades para resolver problemas, tomar decisões e participar ativamente da sociedade a qual está inserido, não é nada fácil.

Segundo Chevallard e Bosch:

O fato de que se ensine matemática na escola responde a uma necessidade ao mesmo tempo individual e social: cada um de nós deve saber um pouco de matemática para poder resolver, ou quando muito reconhecer, os problemas com os quais se depara na convivência com os demais (2001, p.45).

Nesse contexto, acredita-se que oferecer ao aluno uma forma mais significativa de trabalhar com logaritmos, partindo de problemas que representem situações diversas e concretas, isto é, que permitam aos alunos formular hipóteses e conjecturas, é um modo de motivá-lo ao estudo da matemática e propiciar o sucesso escolar, uma vez que as aplicações dos logaritmos estão presentes na sociedade e trazem implicações para a vida das pessoas.

Com relação à importância da integração de situações reais na sala de aula, convém observar que:

Utilizar situações reais para fazer matemática na escola deve ser, antes de tudo, um instrumento para saber interpretar a realidade matematicamente com o fim de que possa ser útil ao aluno para se mover melhor no seu meio e atuar sobre este (ALSINA; CALLÍS; FIGUEIRAS apud BARBOSA, 1999, p.69).

Diante da diversidade, faz-se necessário repensar o ensino, a aprendizagem de certos conhecimentos e a maneira de abordá-los. A intenção é levar o aluno a pensar sobre a realidade, mostrar-lhe que a matemática da escola é necessária para resolver problemas do seu dia-a-dia.

Chevallard e Bosch ainda definem:

A presença da matemática na escola é uma consequência de sua presença na sociedade e, portanto, as necessidades matemáticas que

surgem na escola, deveriam estar subordinadas às necessidades matemáticas da vida em sociedade (2001, p.45).

Acredita-se que, se o aluno puder trabalhar o conceito de logaritmo por meio de situações reais, ele compreenderá a necessidade de seu estudo, bem como saberá justificar as características e as condições de existência inerentes a esse conceito.

Nesse sentido, a escola deve estar em constante alerta, isto é, adaptar o seu ensino, seus conteúdos e principalmente as metodologias a fim de garantir a presença dos alunos como um todo na sala de aula. Caso contrário, devido a velocidade dos meios de comunicação e o avanço da tecnologia, os alunos não se sentirão atraídos pelas aulas de matemática e encontrarão outras maneiras de buscar os conhecimentos necessários à sua compreensão de mundo.

Segundo os PCNs,

[...] a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (1999, p.251).

Diante do exposto, pode-se perceber que cabe aos educadores, refletir e decidir a respeito dos conteúdos e também sobre a metodologia mais conveniente, com o intuito de que o ensino, que os alunos receberão na escola possa ser suficiente para atuarem no mundo do conhecimento.

Com relação ao caráter instrumental da matemática, os PCNs argumentam:

A matemática deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional (1999, p.251).

Levando-se em conta o exposto acima, foi possível perceber uma necessidade urgente de reestruturação nos métodos de ensino da matemática. Atualmente, faz-se necessário repensar o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, e a maneira de abordá-los. O desafio maior para os professores é levar o aluno a pensar criativamente, propiciando uma visão ampla da realidade, pois a matemática é importante para se entender vários

aspectos da vida real e explorá-la com aplicações em problemas práticos, envolvendo outras áreas do conhecimento, é levar a sério as realidades do sistema educacional. Conforme os PCNs, “não basta rever a forma ou metodologia de ensino, e manter o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação” (1999, p.255).

Considerando as características relatadas, essa pesquisa preocupou-se com a construção e conseqüente apropriação do conceito de logaritmo, por parte dos alunos, a partir da construção de uma seqüência didática, elaborada com o intuito de oferecer condições para que eles elaborem pessoalmente o conhecimento e compreendam seu significado, a partir uma experiência na resolução de problemas significativos.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A partir da prática docente, como professora do Colégio Militar de Santa Maria (CMSM), constatou-se que os alunos da 1ª série do Ensino Médio apresentam dificuldades na compreensão do conceito de logaritmo, ou seja, não sabem como utilizar este conceito para o entendimento de fenômenos do mundo real. Constatou-se, por meio da experiência da professora-pesquisadora, que a maioria dos alunos, ao calcular o logaritmo de um número, não entende o significado do que está fazendo, tornando-se, o cálculo, um ato puramente mecânico. Esse fato pode ter acontecido, talvez pelo método de ensino estar centrado na aplicação de propriedades e respostas, o que Freire denomina de “educação bancária” (1975), método este que não desenvolve nos alunos o questionamento e a reflexão crítica, apenas os fazem reproduzir o que seus professores lhes ensinaram.

Segundo os PCNs, o critério central,

[...] é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (1999, p.255).

Refletindo sobre essa questão e sobre a maneira como vem sendo ensinado o conteúdo de logaritmo, sem explorar e interpretar através de seu conceito, situações da realidade, decidiu-se trabalhar com este tema de forma a recriar em sala de aula, situações didáticas em que os conceitos adquiram significado.

Sabe-se, quando da criação, que os logaritmos surgiram para facilitar cálculos aritméticos, isto é, foram criados para realizar multiplicações de números com muitos algarismos, por exemplo, ou uma potenciação com expoente fracionário. Em uma época em que não havia calculadora, a tábua de logaritmo era um livro obrigatório, pois era com ela que eram feitos cálculos complexos. Nos dias atuais, a presença dos logaritmos continua sendo importante, observa-se isso na sua utilização como: ferramenta para a resolução de problemas que envolvem crescimento populacional,

desintegração radioativa, resfriamento de um corpo, depreciação de bens, aplicações financeiras e muitos outros problemas relacionados a outras áreas do conhecimento, próximas a realidade do aluno e comuns à sociedade.

No decorrer de alguns anos de magistério, como professora de Matemática, para o Ensino Médio, observou-se que os alunos conseguem resolver equações logarítmicas, porém não compreendem para que serve o logaritmo, a não ser para a resolução de tais equações. Com relação a questões que envolvem a aplicação direta da definição de logaritmo, não há grandes problemas, porém esta situação não significa que os alunos compreendam o significado do que está sendo produzido. Constata-se, ainda, que alguns alunos, mesmo já tendo estudado a função exponencial, não sabem resolver problemas envolvendo tal função, cuja solução depende da aplicação do logaritmo, por não conseguirem relacionar a definição de logaritmo anteriormente aprendida com a situação vivenciada.

A dificuldade na compreensão do conceito de logaritmo, consiste no fato de que os aspectos cognitivos exigidos para a aquisição desse conteúdo, não podem ser gerados simplesmente a partir da definição algébrica. O aluno precisa ser instigado a buscar o conhecimento que já possui, uni-lo ao saber que está sendo ensinado, para, enfim, atingir o aprendizado. E o professor, por sua vez, deve conduzir o aluno a identificar as situações em que o tema pode ser empregado, mostra a relação estreita que pode existir entre atividades cotidianas e a matemática, e como esta pode ser um instrumento facilitador dessas atividades.

Muitas pesquisas referentes ao ensino da matemática, tem sido desenvolvidas na tentativa de diagnosticar as dificuldades dos alunos na compreensão de determinados conceitos matemáticos. Nesse sentido, é conveniente salientar o importante papel da educação matemática na busca de novas alternativas de ensino, uma vez que esta estuda como se dá a transmissão e aquisição dos conhecimentos. Dentro desse contexto, algumas aplicações teóricas têm sido testadas e analisadas sob diversas perspectivas e dentro de vários contextos.

Portanto, a questão de pesquisa, consiste em verificar se é possível proporcionar aos alunos, a construção do conceito de logaritmo a partir de

problemas significativos, ou seja, possibilitar a participação dos alunos na construção desse conceito.

2.1 OBJETIVO

O objetivo dessa pesquisa foi investigar o aprendizado do aluno no domínio do conceito de logaritmos, por meio da realização de um estudo sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem desse conceito, e propor alternativas para minimizar tais dificuldades, bem como desenvolver uma sequência didática elaborada de acordo com as etapas da Engenharia Didática, sobre o conteúdo de logaritmo, e aplicá-la em sala de aula.

2.2 HIPÓTESES

Acredita-se que o interesse pelo conteúdo, por parte dos alunos, aumenta a partir do momento em que estes compreendem as ligações do conteúdo a ser estudado com um contexto relacionado com suas vivências. Diante desse pensamento, destacar-se-á a primeira hipótese de pesquisa:

H₁: A proposição de problemas relevantes e o auxílio da História da Matemática propiciarão a construção e compreensão do conceito de logaritmo.

Levando-se em conta que os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), sugerem que a investigação e a compreensão sejam uma competência e uma habilidade a serem desenvolvidas na disciplina de Matemática, pode-se mencionar uma segunda hipótese:

H₂: A utilização de atividades que propiciem o desenvolvimento da criatividade incentivando à pesquisa e admitindo estratégias de resolução de problemas como as construções de escalas logarítmicas, favorecem a construção e consolidação do conceito de logaritmo.

Os conhecimentos adquiridos através da construção do gráfico da função logarítmica, produzidos no meio informatizado, com o auxílio do

software Winplot é muito mais amplo do que se fosse realizada a construção gráfica em um ambiente que tivesse somente lápis e papel. Com base nesse pensamento vamos elencar a terceira hipótese.

H₃: a falta de familiaridade dos alunos com o software Winplot, pode ser superada com o planejamento de atividades simples, iniciando-se com aulas mais livres para conhecimento do programa. O Winplot é de fácil utilização.

Para que se possam atingir os objetivos da pesquisa, trabalhou-se em algumas sessões da sequência didática, no laboratório de informática, com o uso do software Winplot, para a construção do gráfico da função logarítmica. Esse *software* permite a construção de gráficos em duas dimensões, sendo possível visualiza-lo através de animações à medida que os coeficientes vão se alternado, além de permitir a construção simultânea de gráficos que é o que mais nos interessa, pois se deseja que os alunos possam definir a função logarítmica através de sua inversa, a função exponencial. Acredita-se que em um ambiente informatizado, onde os alunos sentem-se mais a vontade, a aprendizagem pode fluir mais naturalmente. Além do que o Winplot é facilmente operado pelos alunos, possibilitando a estes explorarem sua criatividade, pois, após a construção dos gráficos, os alunos podem trocar o gráfico de cor, escala, espessura, enfim, os alunos podem “brincar” e aprender ao mesmo tempo. É necessário que se faça uso da tecnologia disponível, adaptando-as de acordo com os objetivos, tornando o ensino mais interessante aos olhos dos alunos.

A idéia de propor a elaboração de uma sequência didática para a introdução do conceito de logaritmos deve-se ao fato de que esse conteúdo da 1ª série apresentava um desempenho pouco satisfatório. Desejava-se, além de proporcionar um real significado para o aprendizado da função logarítmica, estabelecer conexões entre este conteúdo e o conhecimento de outras áreas do currículo, ou seja, aplicar os conhecimentos sobre logaritmos a situações diversas, além de oportunizar aos alunos da 1ª série do CMSM (Colégio Militar de Santa Maria), a busca de informações em outras fontes, que não o livro didático, utilizando ferramentas matemáticas para analisar fenômenos da

natureza, como por exemplo, medir a intensidade de um terremoto, de um *tsunami*, o pH de um líquido e o nível de intensidade sonora de um ruído. Elaborar situações didáticas interessantes, possibilitando ao aluno a participar da construção do seu próprio conhecimento.

2.3 FASES DA ENGENHARIA DIDÁTICA

Para o desenvolvimento dessa pesquisa, utilizou-se a metodologia denominada de Engenharia Didática a qual se justifica pelo fato de se tratar de uma concepção que dá importância tanto a dimensão teórica como experimental da pesquisa. A Engenharia Didática surgiu por volta de 1980, da necessidade de nomear uma maneira específica de se trabalhar em sala de aula. Conforme Artigue (1995), esta metodologia é comparável ao trabalho do engenheiro, que além de seus conhecimentos científicos para realizar um projeto, apoia-se no estudo dos objetos de forma prática. Assim a Engenharia Didática proporciona aos professores-pesquisadores a investigação de um determinado problema e uma ação sobre o sistema para resolvê-lo. Ainda conforme a autora, “esta metodologia favorece uma ligação entre a pesquisa e a ação pedagógica, possibilitando o enfrentamento de problemas práticos para os quais não existe teoria prévia”.

Uma das principais ocupações do professor de matemática é a de estruturar atividades que explorem o domínio de um certo conhecimento. A propósito, estruturar seqüências de ensino é também um dos principais objetivos da Engenharia Didática. Optou-se por essa metodologia, pois ela coloca em destaque as relações mútuas entre professor, aluno e um conteúdo matemático.

Segundo Artigue,

A Engenharia Didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização a observação e a análise de seqüências de ensino (1995, p.36).

Ainda segundo a autora, essa metodologia possibilita encarar problemas práticos de sala de aula para os quais não existe uma proposta para explicar

alguns fatos antecipadamente, ao mesmo tempo em que ela valoriza o trabalho do professor em sala de aula.

Pensando nos problemas até aqui levantados e observando que existem possíveis soluções para tornar o aluno capaz de compreender o real significado do conceito de logaritmo, foi elaborada uma seqüência didática, com questões que pudessem justificar o uso de logaritmo e não apenas a aplicação direta de técnicas para a resolução de problemas. Questões que além de propiciar uma aprendizagem mais relevante, contemplem a construção do conceito de logaritmo.

Para esta pesquisa, as atividades da seqüência foram elaboradas pela professora-pesquisadora de modo a não deixar tudo explícito ao aluno; ao mesmo tempo em que a professora deve mediar nas resoluções das atividades, para que o contrato didático não se rompa na visão do aluno, este deve sentir que a professora está por perto para auxiliá-lo a qualquer momento. Além disso, nesse trabalho de pesquisa, estabeleceu-se um novo contrato didático, ou seja, nas atividades das seqüências os alunos foram convidados a trabalhar em grupo, com situações-problema, expondo suas dificuldades, assumindo seus erros, aprendendo a comunicar-se, tomar decisões, aprender a aprender e ser social. Acredita-se que esse tipo de ensino, favorece a aprendizagem do aluno. As atividades das sessões foram organizadas de forma que a aprendizagem se desse através de mediações entre os alunos do grupo e do grupo de alunos com a professora-pesquisadora.

Esta pesquisa verificou, nos livros didáticos, como é apresentado o conceito de logaritmo e se é feita uma relação entre esse conceito com problemas da realidade, ou seja, se existe uma interação entre o conteúdo e situações reais, para introduzir a idéia de logaritmo, como também verificar se os livros levam em consideração os conhecimentos anteriores dos alunos, se apresentam as idéias que deram origem ao conteúdo de logaritmo e se apresentam um problema motivador para a introdução deste conteúdo.

Acredita-se que o estudo dos logaritmos possa tornar-se mais amplo e não ficar restrito a aplicação direta de propriedades. Que esse conteúdo possa ter uma esfera de atuação maior do que comumente é trabalhado em sala de aula, pois ele tem aplicações em diversas áreas do conhecimento como a física, química, biologia, geografia, etc., e por meio dessa abrangência o

aluno possa identificar e aplicar o conhecimento desse conteúdo. É com esta meta que se desenvolveu uma unidade didática, para o estudo de logaritmos.

De um modo geral, segundo Artigue (1995), as investigações que também recorrem a experimentação em sala de aula, estão baseadas em comparações estatísticas do rendimento de grupos experimentais e grupos de controle. No caso da engenharia didática o que a diferencia de outros tipos de investigação é a maneira como se registram as observações e como estas são validadas, ou seja, trabalha-se com um único grupo, registrando seus conhecimentos prévios a respeito de um determinado conteúdo; a partir daí desenvolve-se uma sequência de ensino; após, efetua-se uma análise da aplicação dessa sequência e compara-se os resultados com a análise prévia. Enfim, esta metodologia está voltada para um estudo de caso cuja validação está baseada no confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori.

Este processo de investigação, baseado nos experimentos de sala de aula, delimita-se em quatro (4) fases: análises prévias; análise a priori; aplicação da sequência (experimentação); análise a posteriori e validação da sequência.

Sabe-se que os objetos de uma investigação, utilizando-se a Engenharia Didática, podem ser diversos. Porém, nessa pesquisa, foi priorizado as investigações que visam o estudo dos processos de aprendizagem do conceito de logaritmo.

Na primeira fase, fase das análises prévias, foi realizado um levantamento das concepções envolvidas, que buscam referências teóricas para fundamentar a pesquisa, apoiando-se em um certo número de análises preliminares. Com relação ao referencial teórico, foi realizado, no capítulo anterior, uma explanação a cerca da Didática da Matemática, as Situações Didáticas, Transposição Didática, Contrato Didático, Saber e Conhecimento. Com relação às análises preliminares tem-se, segundo Artigue (2001):

- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino,
- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação.

A primeira análise, com relação aos conteúdos visados pelo ensino foi realizada com base no currículo do Colégio Militar de Santa Maria para a série em questão e também observando-se os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Com relação ao segundo aspecto destacado na análise prévia, o objetivo foi verificar as concepções dos alunos por meio de um teste diagnóstico, e também averiguar o ensino atual do conteúdo de logaritmo, com a intenção de propor melhorias com relação a sua aprendizagem. A análise foi realizada para que fosse possível levantar as dificuldades e obstáculos e a partir daí intervir para obtenção de um resultado mais satisfatório.

Foi realizada também, uma pesquisa bibliográfica sobre logaritmo, a qual compôs o quadro teórico da pesquisa e um estudo histórico e epistemológico do tema, visando analisar quais os efeitos da história da matemática sobre a construção e evolução do conceito de logaritmo. Nesta pesquisa, também foram levantadas algumas constatações empíricas a respeito do ensino atual de logaritmos, levando-se em conta o quadro teórico didático, a proposta curricular e os livros didáticos. Também foram feitas análises de cinco livros do Ensino Médio, sendo dois adotados nos últimos cinco anos pelo Colégio Militar de Santa Maria, e avaliados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), com relação ao conteúdo de logaritmo.

Conforme Artigue (1995), “o objetivo dessa fase é determinar quais seleções de fato permitem controlar os comportamentos dos estudantes e seu significado”. Além do mais, estas análises se baseiam nas hipóteses que serão validadas ou não mais adiante, na 4ª fase da confrontação.

Com o propósito de localizar as possíveis dificuldades e obstáculos dos alunos, aplicou-se um teste diagnóstico em 27 alunos da 1ª série do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria (CMSM); alunos em que, posteriormente, foi aplicada a seqüência, na qual incluía questões relativas aos pré-requisitos necessários à construção do conceito de logaritmo e também questões de conhecimento geral, a fim de verificar se os alunos possuíam um conhecimento mínimo necessário para iniciar o estudo de logaritmo. Por meio do teste diagnóstico, pode-se verificar as concepções dos estudantes, suas dificuldades e obstáculos. Estas análises foram feitas, com vistas a dar subsídios ao desenvolvimento da análise a priori.

Importante ressaltar novamente que a validação desta metodologia é interna, e que o processo de validação inicia-se desde a fase de concepção e da análise a priori.

Segundo Artigo:

A análise a priori deve ser concebida como uma análise do controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia da engenharia didática teve desde sua origem a ambição de se constituir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações.

[...] o objetivo da análise a priori é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori a ser operada na quarta fase (1988 apud MACHADO, 1999, p.205).

Na Segunda fase, fase da análise a priori, foram elaboradas as atividades que compõe a seqüência didática. As atividades foram escolhidas, levando-se em conta as variáveis didáticas empregadas, a problemática e as hipóteses da pesquisa. Também foi observado o conhecimento sobre o assunto em questão e os resultados obtidos com o teste diagnóstico. A seqüência didática elaborada constituiu-se de situações-problema visando proporcionar aos alunos condições para melhor compreensão do conteúdo de logaritmo. O objetivo é fazer com que os eles percebam a necessidade dos logaritmos, compreendendo sua utilidade.

A seqüência foi estruturada com várias questões referentes ao tema, com o propósito de que sejam produzidos significados para o conceito de logaritmo, pelos alunos da 1ª série do Ensino Médio. As atividades propostas aos alunos tiveram a intenção de que os mesmos pudessem construir de maneira gradual o conceito de logaritmo.

A terceira fase foi a fase da aplicação da seqüência didática aos 27 (vinte e sete) alunos da 1ª série do CMSM. A aplicação da seqüência teve a duração de 5 semanas com duas sessões semanais, levando-se em conta os objetivos específicos da investigação. Essa fase é a da realização da engenharia com certa população de alunos. Nesse momento são estabelecidas algumas regras, tais como:

- a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- a aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- o registro das observações feitas durante a experimentação (descrita em pautas de observação).

Nessa fase da pesquisa, o professor interfere somente quando solicitado e o aluno deve ser o ator principal, ou seja, o que vale são as considerações e colocações dos alunos acerca das questões propostas na seqüência de ensino. O professor deve ser considerado, essencialmente, do ponto de vista das suas relações com a devolução e a institucionalização (ARTIGUE, 1996). Considera-se uma situação de institucionalização aquela em que o professor retoma as questões discutidas e estabelece seus principais resultados, o que ocorre no final de cada sessão. Esse procedimento do professor pode ser explicado pelo fato de que a investigação em didática constituiu-se, na França, embasada nas teorias construtivista do conhecimento, ou seja, primeiramente os trios tentam realizar as atividades, discutindo entre eles as possíveis soluções, após a professora faz a institucionalização (formalização) da sessão, levando-se em conta os questionamentos e considerações dos alunos.

A quarta fase, da análise a posteriori e validação, teve como apoio todos os dados colhidos durante a experimentação constante das pautas de observações realizadas durante cada uma das sete sessões, das produções dos alunos em sala de aula e fora dela. Após, confrontar-se-á os dados obtidos na análise a priori e a posteriori validando ou refutando as hipóteses da pesquisa.

3 ESTUDO HISTÓRICO DOS LOGARITMOS.

A importância da realização de estudos quanto ao surgimento dos logaritmos, faz-se necessário para mostrar aos alunos o quão útil foi sua descoberta, em uma época em que se fazia necessário efetuar cálculos complexos, principalmente nas orientações astronômicas durante as grandes navegações para exploração e expansão territorial. Acredita-se ser necessário colocar os alunos a par dos obstáculos e esforços da época, dos empreendimentos e falhas para se chegar a esta matemática de hoje que nos parece sabida de todos.

A expansão da Europa entre os anos de 1492 a 1700 deu-se através de três fases, segundo Eves (2004), passando pela era das explorações. A primeira fase, desta era, caracterizou-se pelo comércio, isto é, teve início com viagens comerciais, onde mercadores europeus negociavam com a Ásia. Algumas cidades européias ocupavam uma posição geográfica favorável para o comércio de especiarias e tecidos finos que eram trazidos em navios pelo mar Mediterrâneo. Porém outras cidades não tão bem localizadas tinham que procurar rotas alternativas para o comércio. Navegadores de Lisboa e Portugal, na metade do século XV, começaram a procurar uma rota marítima para Índia em torno da África. Essa busca culminou com o êxito de expedições como a de Vasco da Gama e Cristóvão Colombo (1492), que alcançou a América em vez da Índia.

Nesta época, vários mercadores espanhóis, ingleses e franceses exploraram as costas atlânticas das América do Norte e do Sul, em busca de uma saída para a China e Índia. Os holandeses seguiam a trilha portuguesa em torno da África.

A Segunda fase da era das explorações pela Europa, foi marcada pela conquista e anexação. E a terceira fase da era das explorações, foi a colonização e a efetiva migração dos Europeus para outros continentes. Segundo Eves (2004, p.338), “o século XV assistiu também a diversos avanços tecnológicos cruciais para a expansão européia. Os equipamentos de navegação e os projetos de navios foram melhorados”.

A era das explorações, despertou uma revolução cultural e científica na Europa, marcada pelo interesse de novos lugares e por uma percepção de

necessidade de tecnologia nova, especialmente na navegação. O avanço da matemática, durante o século XVII, deveu-se principalmente ao crescimento político, econômico e social da época. A necessidade crescente de realizações de cálculos rápidos e precisos era exigido cada vez mais pelos astrônomos, navegadores, pelo comércio, a engenharia e também a guerra. Pode-se afirmar que os logaritmos vieram ao encontro dessas demandas.

O desenvolvimento da astronomia, navegação, matemática comercial e financeira do século XVIII estava atrelado ao enfrentamento do problema comum da necessidade de simplificação de cálculos aritméticos complexos e trabalhosos. Na época das grandes navegações, século XV, exigia-se cálculos bastante precisos, mais do que os que existiam naquele tempo. Nesta época, a trigonometria era bastante utilizada, (os astrônomos gregos, já a utilizavam).

A contribuição da matemática árabe foi fundamental para o crescimento na astronomia náutica européia, conforme Hogben (apud MIORIM; MIGUEL, 2001, p.27.) “[...] sua contribuição às aplicações da matemática, em particular à trigonometria esférica, à realização de mapas científicos e à astronomia, ultrapassou consideravelmente o nível alcançado pelo Almagesto”. Segundo os autores acima, a prática social náutico-astronômica dessa época necessitava muito da trigonometria, pois nesse tipo de cálculo aparecia com frequência a utilização de multiplicações e divisões envolvendo números muito grandes. Ainda, segundo os autores, no fim do século XVI utilizava-se o método da prostaférese, para a simplificação de cálculos aritméticos. Esse método consistia em transformar multiplicações em adições ou subtrações por meio de fórmulas trigonométricas, também conhecidas como fórmulas de Werner. Essas fórmulas relacionavam o produto do cosseno ou do seno de dois arcos com o cosseno ou seno da soma e diferença dos arcos.

As fórmulas de Werner eram expressas do seguinte modo:

$$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

Essas fórmulas permitem também converter divisões em adições e subtrações.

Para exemplificar o uso das fórmulas de Johannes Werner (1468-1528), através das tábuas trigonométricas, utilizar-se-á um exemplo extraído do livro de Maria Ângela Miorin e Antônio Miguel, “Os logaritmos na Cultura Escolar Brasileira”, será mostrado como funciona o método da prostaférese para realizar a multiplicação de 89750 por 94330 utilizando a fórmula de Werner a seguir:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

Segundo os autores desse livro, as tábuas trigonométricas, em uso naquele período, procuravam evitar frações, então os construtores das tábuas utilizavam o artifício de atribuir valores ao raio do círculo trigonométrico conforme o número de algarismos que desejassem considerar nos cálculos. No caso do exemplo acima, será utilizado os valores dos co-senos com 5 (cinco) casas decimais. Para efetuar o cálculo eram identificados os valores com os respectivos co-senos, isto é,

$$\cos A = 89750 \quad \text{e} \quad \cos B = 94330$$

Posteriormente eram localizados na tábua trigonométrica quais os ângulos cujos co-senos têm aproximadamente esses valores. A consulta às tábuas mostra que:

$\cos 26^\circ = 89879$	$\cos 19^\circ = 94551$
$\cos 26^\circ 9' = 89764$	$\cos 19^\circ 22' = 94342$
$\cos 26^\circ 10' = 89752$	$\cos 19^\circ 23' = 94332$
$\cos 26^\circ 11' = 89739$	$\cos 19^\circ 24' = 94322$
$\cos 27^\circ = 89100$	$\cos 20^\circ = 93969$

Logo as melhores aproximações para A e B são, respectivamente $26^\circ 10'$ e $19^\circ 23'$. Substituindo esses valores na expressão trigonométrica anteriormente referida resulta:

$$\begin{aligned}
89750 \times 9433 &= \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)] = \\
&= \frac{1}{2} [\cos(26^\circ 10' + 19^\circ 23') + \cos(26^\circ 10' - 19^\circ 23')] = \\
&= \frac{1}{2} (\cos 45^\circ 33' + \cos 6^\circ 47')
\end{aligned}$$

Consultando novamente a tábua trigonométrica obtém-se:

$$\cos 45^\circ 33' = 71386 \quad \text{e} \quad \cos 6^\circ 47' = 99300$$

Substituindo tais valores na última igualdade vem:

$$89750 \times 94330 = \frac{1}{2} (71386 + 99300) = 85343$$

Portanto, o resultado obtido pela prostaférese, da multiplicação de 89750 x 94330 é 85343. Esse mesmo cálculo com o auxílio da calculadora é 8.466.117.500. Pode-se observar que o produto obtido, está distante do produto real. Essa diferença é atribuída porque recorreu-se a uma tábua com apenas cinco casas decimais e contendo apenas valores de co-senos de ângulos expressos até minutos. Problema este que poderia se minimizado utilizando-se uma tábua trigonométrica com um número cada vez maior de casas decimais com subdivisões mais refinadas dos ângulos. Sabe-se que os árabes possuíam tábuas com até 12 ou 15 casas decimais, Eves (apud MIORIM; MIGUEL, 2001, p.31).

Napier (1550-1617), viveu a maior parte de sua vida na propriedade de sua família, o castelo de Merchiston, Escócia. Era um homem inteligente e escrevia sobre vários assuntos e só se interessava por certos aspectos da matemática, em particular aos que se referiam a computação e trigonometria. Napier era anticatólico e polêmico no que se referia a política e a religião, sua primeira publicação continha escritos contra a igreja de Roma, no qual tencionava provar que o papa era o Anticristo, livro este que atingiu vinte e uma edições. Com o desenvolvimento contínuo da navegação e da astronomia, a preocupação na época, era descobrir um método para simplificação de cálculos aritméticos complicados. Também Napier estava interessado em

estudos relativos à simplificação de cálculos, pois nesta época, século XVII, praticava-se muito a astrologia e essa exigia técnicas de cálculos complexos. Os astrólogos organizavam tabelas com relação à posição dos astros no céu. Também realizavam cálculos complicados para estabelecer seus horóscopos. Nesse período os astrólogos eram considerados autênticos sábios, atuavam como médicos e matemáticos, e suas atitudes não eram questionadas. Napier dedicou-se durante 20 (vinte) anos aos estudos relativos à simplificação de cálculos, após publicou, em 1614 “*Murifici logarithmorum canonis constructio (Uma construção da maravilhosa regra dos logaritmos)*”. Nesta obra, conforme Miorim; Miguel (2001), “os logaritmos foram concebidos dentro de um quadro simultaneamente geométrico, cinemático, aritmético, funcional e trigonométrico”.

Geométrico, porque o logaritmo não aparecia como um número puro, mas como a medida de um segmento de reta; cinemático, porque a situação utilizada para descrever tal conceito envolvia a a coordenação de dois movimentos; aritmético, porque o mesmo conceito era expresso por meio do relacionamento entre duas seqüências de números, uma geométrica e outra aritmética; funcional, porque a situação cinemática envolvia uma grandeza variando em função de outra; e trigonométrica, porque, porque Napier se propôs a determinar, não os logaritmos de segmentos de reta genéricos, mas os logaritmos de segmentos de reta representativos dos senos de certos ângulos.

A fórmula trigonométrica $2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$, já era conhecida por Napier. Nessa época utilizavam-se as tábuas trigonométricas para contornar o problema de simplificações de cálculos astronômicos. Essas tábuas permitiam, como já foi mencionado antes, realizar produtos através de somas. Sabe-se que essas tábuas já eram conhecidas desde a antigüidade.

Segundo Boyer,

[...] Ptolomeu de Alexandria, em sua obra Síntese Matemática, organizado em treze volumes, que posteriormente, na Arábia, passou a chamar-se Almagesto (“o maior”), chegou a construir uma tábua de cordas para arcos variando de $\frac{1}{2}^\circ$ a 180° , com intervalos de $\frac{1}{2}^\circ$, o que equivale, feitos alguns ajustes, a uma tabela de senos de $\frac{1}{2}^\circ$ a 90° , para intervalos de $\frac{1}{4}^\circ$. (apud MIORIM; MIGUEL, 2001, p.27).

Ainda, segundo o autor esta tabela era parte integral do livro I do *Almagesto* e continuou a ser um instrumento indispensável para os astrônomos por mais de mil anos.

Credita-se a Napier a invenção dos logaritmos, pois ele foi a primeira pessoa a publicar uma obra sobre logaritmos. Não há dados históricos que comprovem quem inventou primeiro os logaritmos, porém sabe-se que esta teoria foi desenvolvida praticamente ao mesmo tempo por Jobst Bürgui. De qualquer forma os dois seguiram abordagens diferentes, terminologia e valores numéricos diferentes, apesar de ambos partirem do mesmo ponto, ou seja, a relação entre a progressão aritmética e geométrica. Sabe-se ainda segundo Eves (2004), que Bürgui seguiu uma abordagem exclusivamente numérica, enquanto Napier privilegiou seu trabalho com logaritmos sob a ótica geométrica, como será visto.

Napier restringiu seus logaritmos, inicialmente aos senos de ângulos por isso segundo Ives (2004), acredita-se que ele tinha conhecimento a respeito das fórmulas de prostaférese. Porém o tratamento de Napier para simplificar o trabalho com relação as contas de multiplicação e divisão, difere-se da prostaférese e fundamenta-se no fato de que, associando-se as ternas de uma progressão geométrica $b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^m, \dots, b^n$, aos da progressão aritmética, $1, 2, 3, 4, \dots, m, \dots, n$, então o produto $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ de dois termos da primeira progressão está associado à soma $m + n$ dos termos correspondentes da segunda progressão. Para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondência precedente, deve-se escolher o número “b” bem próximo de 1. Por isso Napier escolheu $1 - \frac{1}{10^7} = 0,999999$ para b. Segundo Eves (2004) ele multiplicava cada potência por 10^7 , afim de evitar decimais.

Além de Napier, a invenção dos logaritmos também é creditada a Jobst Bürgi (1552-1632), que trabalhou como relojoeiro oficial do príncipe Landgrave de Hesse, em Cassel, que naquela época era considerado uma atividade científico-tecnológica; pois para que se pudesse construir um relógio era necessário certas observações e conhecimentos astronômicos, além disso os relógios desempenhavam uma função artística, isto é, funcionavam

como elementos decoradores das igrejas e hotéis das grandes cidades. Dizem, ainda, que ele chegou a medir as estrelas e esse trabalho o teria levado a buscar formas simplificadas para a realização de cálculos trabalhosos (MIORIM; MIGUEL, 2001). Existem evidências que o trabalho de Bürgui já estava em andamento desde 1588, porém a publicação dos mesmos só ocorreu em 1620. Acredita-se que tanto Napier quanto Bürgui inspiraram-se nas fórmulas da prostaférese.

Procurou-se neste capítulo fazer um estudo histórico referente à evolução do conceito de logaritmo, destacando os problemas abordados na época e os principais obstáculos encontrados na construção desse conceito.

4 ANÁLISES PRELIMINARES

O Colégio Militar de Santa Maria, apoia-se sobre uma proposta pedagógica que visa ministrar a seus alunos uma educação integral, permitindo que descubram suas potencialidades como elemento de auto realização, qualificando-os para a vida e para o exercício de sua plena cidadania. A orientação específica para a disciplina de matemática é a utilização de meios auxiliares e a utilização de recursos tecnológicos, como por exemplo o laboratório de informática, com a intenção de despertar no aluno o gosto pela disciplina, enfatizando também o ensino contextualizado, o qual visa atenuar as dificuldades de aprendizado dos alunos com menor habilidades com números e/ou com dificuldades na visão espacial e que apresentam menor grau de abstração.

Os novos conhecimentos que a sociedade nos impõe, com relação ao avanço das novas tecnologias, obrigam de certa forma que as escolas propiciem aos alunos uma maneira destes se inserir ao mundo de forma participante e produtiva. O Ministério da Educação, juntamente com alguns professores elaboraram um currículo apoiado em competências básicas para o engajamento dos jovens na vida adulta. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1999), o ensino no Brasil era descontextualizado e o acúmulo de informações era grande. Portanto, o que os PCNs desejavam, era que os professores trabalhassem de forma interdisciplinar, incentivando nos alunos a criatividade e o raciocínio.

Nesse contexto, o trabalho de sala de aula deve estar voltado à formação integral do aluno, propiciando conhecimentos básicos de forma a facilitar sua inserção na sociedade.

O PCN propõe,

[...] no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica. O desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las, a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização (p.16).

Estes são os princípios que norteiam o currículo do Ensino Médio e que estão na Lei de Diretrizes e Bases da Educação – Lei 9.394/96.

4.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Os livros de matemática, destinados ao Ensino Médio, de modo geral, apresentam um programa semelhante, pois levam em conta as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e têm a intenção de contribuir para um melhor trabalho do professor em sala de aula.

Levando-se em conta as propostas pedagógicas atuais, isto é, para um ensino de matemática tendo como ponto de partida a proposição de problemas práticos do cotidiano, analisar-se-á 5 (cinco) livros didáticos, observando algumas categorias as quais acredita-se interferir diretamente na construção do conceito de logaritmos. A análise será no sentido de responder algumas indagações, tais como: Como é introduzido o conceito de logaritmo? Os livros preocupam-se em apresentar as idéias que deram origem a este conteúdo? A linguagem utilizada é mais matemática ou coloquial? São apresentadas situações motivadoras ao estudo deste conteúdo sempre que possível?

O livro didático tem sido utilizado por muitos professores, na íntegra, para ministrarem suas aulas, porém acredita-se que este deve ser utilizado como um apoio pelo professor e um suporte para os alunos na realização de exercícios, ou quando estes encontram-se fora do ambiente escolar ou não estão na presença de um professor. Ainda o livro deve servir de referencial para o professor como fonte de pesquisa aos alunos. Os livros apresentam características próprias conforme o autor, por isso é importante que se observe na apresentação dos livros, onde o autor explicita o público alvo a que se destina.

Importante esclarecer que a análise realizada nos livros didáticos, não pretende julgar o modo de apresentação do conteúdo de logaritmos pelos autores e sim realizar uma análise do ensino habitual deste conteúdo pelos livros. Existem várias categorias para serem analisadas dependendo do interesse do pesquisador. Ao serem analisadas, por exemplo, o primeiro e o segundo critério, deseja-se levantar subsídios para posteriormente responder a uma das hipóteses levantadas nessa pesquisa;

H₁: a proposição de problemas relevantes e o auxílio da História da Matemática propiciarão a construção e compreensão do conceito de logaritmo.

Definir-se-á alguns critérios para a análise dos livros, de acordo com esta pesquisa:

- 1) Primeiro critério: Aspectos Históricos
 - a) apresenta as idéias que deram origem a este conteúdo, utilizando-as para introduzir o conceito de logaritmo;
 - b) breve comentário sobre a história dos logaritmos;
 - c) não há referência histórica.

- 2) Segundo critério: Introdução do Conceito
 - a) o conteúdo inicia-se por uma situação-problema motivadora para então chegar à definição de logaritmo;
 - b) inicia-se com exemplos simples para depois introduzir a definição;
 - c) inicia-se com o conceito e logo em seguida utiliza-se de exemplos e após exercícios.

- 3) Terceiro critério: Linguagem
 - a) apresenta uma linguagem matemática natural, com textos informativos e ilustrações com intenção de persuadir os alunos;
 - b) apresenta uma linguagem matemática, com texto informativo sem intenção de persuadir os alunos;
 - c) apresenta uma linguagem estritamente matemática.

Primeiramente apresentar-se-á de maneira resumida a análise de 5 (cinco) livros didáticos.

Tabela 1 – Análise dos livros didáticos.

AUTORES / CRITÉRIOS	Aspectos Históricos	Introdução do Conceito	Linguagem
Gelson Iezzi (vol 1)	b	a	c
Luiz R. Dante (vol único/2001)	c	a	c
Bonjorno/Giovanni/Giovanni Jr 200 (vol 1)	b	b	c
Bianchini e Pacolla (vol único)	b	a	c
Manoel Paiva (vol 1)	b	b	c

Fonte: Livros de Matemática para o Ensino Médio.

Será apresentada uma análise mais detalhada, de apenas quatro livros, sendo que dois destes foram adotados nos últimos 5 (cinco) anos no Colégio Militar de Santa Maria, quais sejam: Manuel Rodrigues Paiva (v.1, 1995) e Bianchini; Paccola (2003).

a) Ciência e Aplicação (IEZZI et al.,2001)

Utiliza-se de uma situação-problema motivadora para então iniciar intuitivamente a definição de logaritmo. A situação inicial escolhida pelos autores organiza-se em torno de uma situação de caráter concreto, um enigma a ser resolvido na qual os alunos têm condições de investir e o principal, os alunos não dispõe, de início, dos meios para a solução. A partir desse momento o conceito de logaritmo é formalizado, na sequência são sugeridos alguns exemplos, as consequências da definição, os sistemas de logaritmo decimal e neperiano e alguns exercícios de aplicação direta da definição. Após as propriedades operatórias e a sua utilização através de exercícios de aplicação direta das propriedades. Estes autores propõem um histórico bastante aprofundado sobre a invenção dos logaritmos, explicando como teriam surgido as primeiras tábuas logarítmicas, por meio das seqüências de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica. De maneira particular, antes de definir a função logarítmica, explora a definição da função inversa e trabalha alguns exemplos de funções conhecidas pelos alunos como a função polinomial do 1º grau, função quadrática, etc. Trabalham com equações exponenciais que necessitam do logaritmo como ferramenta para resolução destas, e ainda exploram os logaritmos decimais, trabalhando com exercícios

de estimativa e também explorando a tábua de logaritmo. Somente no fim do capítulo é que surgem quatro problemas contextualizados.

b) Matemática uma nova abordagem (GIOVANNI; BONJORNO, 2000)

Estes autores não se utilizam de uma situação-problema para introduzir a definição de logaritmo, fazem referência a uma tabela com números naturais relacionando-os com o expoente de dez. Apresentam uma pequena nota histórica sobre o surgimento dos logaritmos. Iniciando com alguns exemplos e após a definição formal de logaritmo. É feito um comentário sobre o logaritmo neperiano e especificamente sobre o número e . Observa-se que esses autores exploram a construção de modelos matemáticos em vários exercícios, chegando em uma equação onde se faz necessário o uso da definição de logaritmo. Apresentam apenas um exercício que faz referência ao uso da calculadora. Explora-se bem a definição de logaritmo para só então trabalhar com as propriedades operatórias. Apresentam vários textos elucidativos ao longo deste conteúdo. Apresentam um capítulo que explora o cálculo de logaritmos decimais. Trabalham com exercícios de estimativa, explorando em seguida a construção de uma tábua de logaritmo e exercícios envolvendo calculadora.

c) Curso de Matemática (BIANCHINI; PACCOLA, 2003)

Os autores iniciam o conteúdo por meio de uma situação que a princípio os alunos conseguem resolver, e no final necessitam de um novo conhecimento que ainda não possuem. Após, alguns exemplos vem a definição formal de logaritmo e a definição de logaritmo base 10. Em seguida são propostos alguns exercícios para a fixação da definição e as conseqüências de logaritmo acompanhada de alguns exemplos e mais exercícios para a fixação das conseqüências imediatas. Segue-se com as propriedades operatórias seguidas de exemplos e exercícios de aplicação imediata das propriedades. O capítulo que segue refere-se a função logarítmica, que não explora exercícios de construção do gráfico desta função. A seguir trabalham com sistema de logaritmo de base dez e base e , explorando exercícios de estimativa. Nessa

parte surge um texto informativo sobre terremotos e escala Richter, sem a pretensão de ensinar como esta é construída.

d) Matemática (PAIVA, 1995)

Neste livro o autor faz um breve comentário sobre os princípios básicos dos logaritmos; transformar uma multiplicação em adição ou uma divisão em subtração. Inicia este conteúdo por meio de alguns exemplos e então parte para definição de logaritmo. Apresenta uma grande quantidade de exercícios, utilizando-se de uma ordem crescente de dificuldade. Não oferece atividades envolvendo situações reais, que possibilite aos alunos uma interação com o conteúdo. Explora bastante, exercícios envolvendo a tábua de logaritmos e possui uma linguagem estritamente matemática. Este livro, apesar de não trabalhar com situações contextualizada, traz uma quantidade grande, diferenciada e diversificada de exercícios de logaritmo.

Percebe-se de um modo geral que existe uma distância entre as notas históricas apresentadas pelos livros didáticos, relativas ao surgimento dos logaritmo, e a definição deste conteúdo. Os livros não se utilizam das idéias que deram origem aos logaritmos para então, a partir daí construírem o conceito deste, também observou-se que não existem exercícios relacionados com a história do surgimento do logaritmo. Os livros, não fazem referências as escalas logarítmicas ou a sua construção, porém, nos mais atuais aparecem problemas contextualizados, que utilizam-se desta escala; como os problemas de pH, nível de intensidade sonora, intensidade de um terremoto, etc. Os alunos utilizam as fórmulas fornecidas nos problemas, mas não sabem exatamente o real significado destas, isto é, porquê necessita-se usar o logaritmo nessas fórmulas. Os alunos aceitam, mas não compreendem a situação em sua totalidade.

4.2 DADOS SOBRE A AMOSTRA

Para que fosse possível introduzir as primeiras noções de logaritmos, necessitava-se de algumas informações a respeito das concepções de alunos da 1ª série do Ensino Médio no que se refere aos pré-requisitos necessários de base para o estudo do conteúdo em questão. Para essa investigação, foi realizado um teste diagnóstico, que também possibilitou identificar as concepções errôneas dos alunos, para que pudessem ser devidamente trabalhadas na Sequência Didática. Esse teste diagnóstico, foi respondido pelos 27 alunos da 1ª série, do CMSM antes que recebessem qualquer explicação sobre o conteúdo de logaritmo.

Os alunos responderam o questionário em sala de aula, na presença do professora-pesquisadora. O tempo despendido nessa atividade foi de quarenta e cinco minutos. As questões apresentadas continham quatro alternativas, sendo que o aluno deveria escolher uma entre as opções apresentadas e justificar sua escolha.

4.3 TESTE DIAGNÓSTICO.

O teste diagnóstico, aplicado aos vinte e sete alunos da 1ª série do CMSM, constam de sete questões. Foi solicitado aos alunos que marcassem uma entre as quatro alternativas propostas, e que justificassem conforme seu entendimento.

1ª QUESTÃO: Se $1000 = 10^x$ então qual deve ser o valor de “x” ?

- a. () $x = 10$
- b. () $x = 2$
- c. () $x = 3$
- d. () $x = 4$

Justificativa:

O objetivo dessa questão foi analisar se os alunos sabem resolver equações exponenciais simples.

Para a solução desta questão espera-se que os alunos resolvam a equação exponencial, escrevendo;

$$10^3=10^x, \text{ obtendo para } x, \text{ o valor } 3.$$

2ª QUESTÃO: Sabendo-se que $E = 2 \cdot \left(16^{0,5} + 8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{32} \right)^{-0,2} \right)$ então o valor

de $2E$ é:

a. () 16

b. () 48

c. () 25

d. () 10

Justificativa:

Para esta questão o esperado é que os alunos resolvam a expressão, utilizando as propriedades de potência de expoente decimal, fracionário e expoente decimal negativo:

$$E = 16^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{32} \right)^{-0,2} = 2^{4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)} + 2^{3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)} + 2^{-5 \cdot (-0,2)} = 4 + 2 + 2 = 8$$

$$\text{Logo } 2 \cdot E = 2 \cdot 8 = 16$$

3ª QUESTÃO: Um biólogo acompanhou o crescimento de uma planta aquática, cujo caule tinha forma circular. Durante suas observações, percebeu que a cada três meses o diâmetro da planta triplicava. No início das suas observações o biólogo mediu a planta e obteve 1 cm de diâmetro. Após 3 meses o diâmetro da planta media 3 cm, após 6 meses 9 cm e após 9 meses, 27 cm. Então pode-se concluir que :

3.1 – Ao final de um ano o diâmetro da planta será:

- a. () 243 cm
- b. () 81 cm
- c. () 108 cm
- d. () 36 cm

Justificativa:

3.2 – Se, “t” indica o número de meses que a planta cresce, a expressão que fornece a medida do diâmetro é:

- a. () $y = t^3$
- b. () $y = 3^t$
- c. () $y = 3t$
- d. () $y = 3^{t/3}$

Justificativa:

Para a resolução desta questão, espera-se que os alunos observem o comportamento do diâmetro em função do tempo, e consigam fazer a seguinte inferência:

Meses	Tamanho
Inicialmente	1 cm
Após 3 meses	3 cm
Após 6 meses	9 cm
Após 9 meses	27 cm
Após 1 ano	

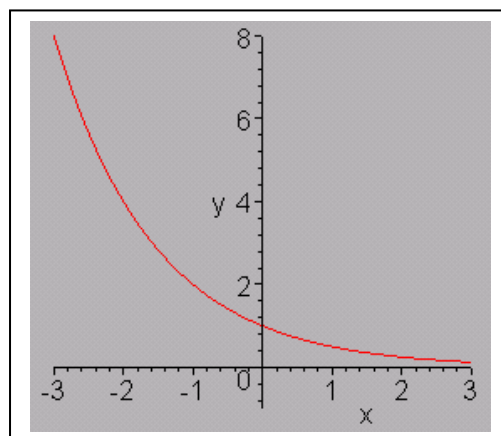
3.1 – Como a planta triplica a cada três meses, de 9 meses para 12 meses ela triplicará novamente passando de 27 cm para 81 cm, conforme a tabela acima.

3.2 – Para este item, deseja-se verificar o domínio do conhecimento de função exponencial. Espera-se que os alunos utilizem as informações fornecidas pela tabela do item anterior e consigam encontrar o modelo matemático para a situação apresentada, isto é, $y = 3^{t/3}$.

4ª QUESTÃO: O gráfico a seguir, representa uma função exponencial definida por $f(x) = r^x$. Então pode-se afirmar que:

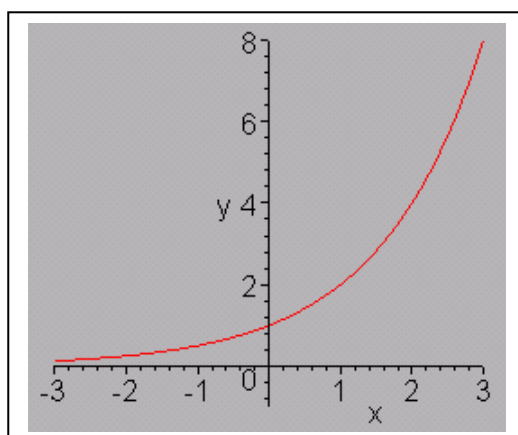
- a. () $r > 1$ e $D(f) = \mathbb{R}$
- b. () $0 < r < 1$ e $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
- c. () $r > 1$ e $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
- d. () $0 < r < 1$ e $D(f) = \mathbb{R}$

Justificativa:



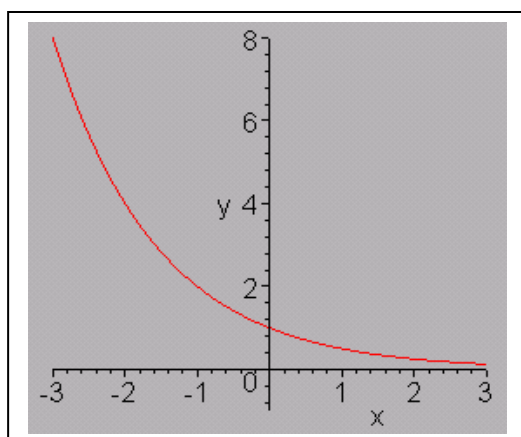
Espera-se nessa questão que os alunos possam realizar uma análise gráfica do comportamento da função exponencial, o que considera-se muito importante e determinante para a aprendizagem da função logarítmica. Identificando se a função é crescente ou decrescente e também observando o domínio desta função. O esperado é que os alunos encontrem a alternativa (d).

5ª QUESTÃO - A figura abaixo mostra o gráfico da função $f(x)=2^x$.

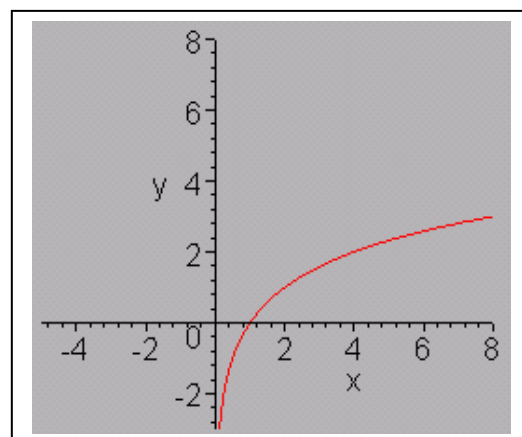


Marque o gráfico da função inversa acima e justifique sua resposta.

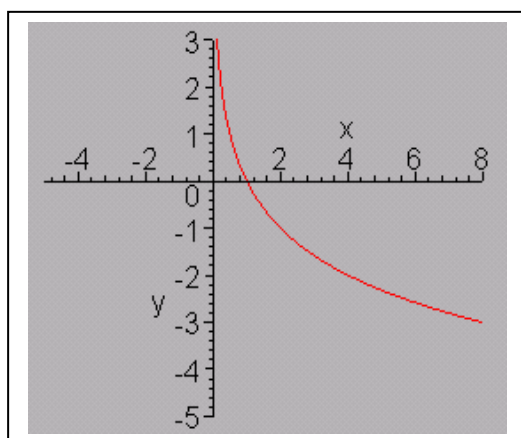
a.



b.



c.



d. n.d.a

Justificativa:

O objetivo dessa questão é saber qual a concepção dos alunos com relação à noção de função inversa. Espera-se que os alunos escolham a alternativa (c).

6ª QUESTÃO: Num mapa desenhado na escala de $\frac{1}{5000000}$, a distância entre duas cidades é indicada por 4,5 cm; então, pode-se afirmar que a distância real entre as duas cidades é:

- a. () 22.500 m
- b. () 225 km
- c. () 225 hm
- d. () 22.500cm

Justificativa:

O objetivo dessa questão é explorar a idéia de escala. Espera-se que os alunos observem que para cada 1 cm do mapa, equivale à 5.000.000 cm na realidade. Portanto para encontrar a distância real deverá realizar o seguinte cálculo:

$4,5 \cdot 5.000.000 = 22.500.000\text{cm}$ e logo após transformar esta medida em quilômetros que é a medida utilizada para grandes distâncias, obtendo 235 Km.

7ª QUESTÃO:

7.1) Você sabe o que é um terremoto, ou um *tsunami*? Explique.

7.2) Você sabe como se mede a intensidade de um terremoto? Explique.

Para esse item o propósito é verificar as concepções dos alunos com relação aos conhecimentos gerais sobre terremotos, pois essas informações serão utilizadas posteriormente para mostrar uma das utilidade da escala logarítmica.

Resultados obtidos:

O quadro a seguir mostra a porcentagem de acertos e erros dos alunos.

Quadro 1 – Relativo às porcentagens de acertos e erros do teste diagnóstico.

Questões	Acerto S/Justificativa	Acerto C/Justificativa	Erros	Erros Graves	Não Resolveu
1ª	55,6%	37%	7,4%		
2ª	11,1%	44,4%	14,8%	7,4%	22,2%
3ª(3.1)	44,4%	37%	7,4%	3,7%	
(3.2)	44,4%	22,2%	14,8%	11,1%	3,7%
4ª	18,5%	11,1%	44,4%	14,8%	11,1%
5ª	11,1%		48,1%	22,2%	18,6%
6ª		59,3%	18,5%	7,4%	14,8%
7ª(7.1)	33,3%	55,5%	7,4%		3,7%
(7.2)	40,7%	11,1%	11,1%		37%

Pode-se observar, através dos dados estatísticos que a maioria dos alunos atingiu os objetivos com relação à primeira questão, apesar de nem todos terem justificado.

Com relação à segunda atividade metade dos alunos acertaram e metade tiveram dificuldades na resolução, principalmente, por não saberem trabalhar com potência de expoente fracionário e decimal. Um erro grave identificado foi o de um aluno que chegou a colocar a expressão toda na base “2” e adicionar os expoentes.

A maioria dos alunos não tiveram dificuldades com relação ao item 3.1 e com relação ao item 3.2, alguns alunos encontraram a resposta esperada, utilizando as alternativas uma a uma e observando a tabela do item anterior. Ao contrário, alguns optaram pela alternativa (c), pois não observaram que “inicialmente”, tratava-se do tempo zero, e também pelo fato de que desconheciam estar diante de uma função exponencial.

A quarta questão, apresentou um grande índice de dificuldades, entre elas salienta-se:

- três alunos não conseguiram determinar o domínio da função;
- dois alunos referiram-se à curva, como sendo uma parábola;
- aproximadamente 50% dos alunos confundiram o domínio da função com o conjunto imagem.

Na quinta questão, apenas três dos 27 (vinte e sete) alunos que responderam ao teste acertaram, porém não justificaram claramente seu raciocínio. Pode-se perceber que a maioria dos alunos não têm noção de função inversa. Também não utilizam conhecimentos anteriores, como por exemplo, como proceder no caso de uma outra função conhecida para achar o esboço de sua inversa. Um erro que foi considerado grave, foi o fato de os alunos marcarem a alternativa(a).

Com relação à sexta questão os alunos de modo geral não tiveram dificuldades na realização dos cálculos, suas dificuldades ficaram por conta da transformação de centímetros para quilômetros.

Na sétima questão com relação ao item 7.1 a maioria dos alunos respondeu afirmativamente, porém desconheciam o modo de medir a intensidade dos terremotos e não conheciam a escala Richter.

Pode-se observar por meio deste teste diagnóstico, que os alunos chegam à 1ª série com várias dificuldades, obstáculos que terão de transpor para uma boa compreensão do conceito de logaritmo. Obstáculos esses que foram formados ao longo das séries anteriores e agora faz-se necessário que sejam esclarecidos. Cabe, portanto, à professora-pesquisadora elaborar uma seqüência didática que viabilize essa transposição.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

5.1 A PROPOSTA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.

Neste capítulo é apresentada a sequência didática referente à construção do conceito de logaritmo e de escalas logarítmicas. Ela está fundamentada na teoria das situações didáticas, desenvolvida por Brousseau (1986), segundo a qual o conhecimento emerge de situações-problema. Para a elaboração das atividades dessa sequência, consideraram-se os resultados da análise de alguns livros didáticos, utilizados no ensino médio, entre os quais dois foram utilizados no colégio Militar de Santa Maria (CMSM). Utilizou-se também um teste diagnóstico com o objetivo de identificar as concepções e dificuldades com relação aos conteúdos que dão base à introdução do conceito de logaritmo, para posteriormente trabalhar essas dificuldades detectadas, em sala de aula. O teste foi respondido pelos alunos da 1ª série do ensino médio, que ainda não tinham estudado o conceito de logaritmo, sendo que os resultados foram importantes também para eleger as variáveis didáticas envolvidas na pesquisa.

Após a análise das dificuldades encontradas no teste diagnóstico aplicado, foram feitas as primeiras escolhas das variáveis de comando, isto é, pertinentes ao problema estudado, quais sejam:

1. retomada do estudo de função exponencial, e construção do modelo matemático que descreve cada situação estudada;
2. estabelecer a relação entre o gráfico da função exponencial e de sua inversa, a função logarítmica, bem como a relação entre as definições dessas duas funções;
3. relacionar as propriedades da função exponencial e da função logarítmica e utilizar essas propriedades na resolução de problemas;
4. construção de uma escala logarítmica para compreender o significado das medidas expressas pela escala Richter, quando da medição de fenômenos da natureza, como intensidade de terremotos;

5. utilizar o *software* Winplot para construir os gráficos dos modelos matemáticos obtidos, verificar graficamente as propriedades da função logarítmica e comparar os gráficos de uma função exponencial de base 10 com o gráfico em escala logarítmica.

Para cada sessão apresentar-se-á o objetivo e para cada atividade das sessões, será realizada uma análise a priori e uma análise a posteriori. Na primeira é feita uma previsão pela professora-pesquisadora dos possíveis resultados ou situações, segundo a situação elaborada por essa, para posteriormente confrontar essa previsão com as soluções obtidas na realização das atividades. Os dados obtidos nas atividades receberam tratamento qualitativo, permitindo fazer distinções e decidir os índices a serem privilegiados para então quantificar as informações e analisá-las, pois na engenharia didática, a validação é interna, ou seja, baseia-se na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori. Quanto à última, realizada para cada sessão, está fundamentada nas soluções das atividades apresentadas pelos alunos e pelo registro das observações realizadas pela professora-pesquisadora constantes nas pautas de observação, realizadas em cada sessão.

A partir da definição das variáveis globais, foram programadas as atividades que compõem a seqüência didática que foi desenvolvida em sala de aula. Esta seqüência foi elaborada, segundo o programa estabelecido para a 1ª série do ensino médio. Teve por objetivo a introdução do conceito de logaritmo e a construção de escala logarítmica por meio de situações-problema. Foi composta em sete sessões e aplicada em uma turma de vinte e sete alunos da 1ª série do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria. Os alunos trabalharam em trios reunidos segundo suas afinidades, pois se acredita que essa forma de trabalho contribui nas discussões sobre as situações lançadas à classe, colocando os alunos em uma situação de ação. Ao final de cada sessão, foi realizada a formalização dos conteúdos.

5.2 AS SESSÕES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E AS ANÁLISES A PRIORI E A POSTERIORI DAS ATIVIDADES

A) 1ª SESSÃO: CONSTRUINDO O CONCEITO DE LOGARITMO

a) Objetivo

O Objetivo dessa sessão foi por meio de situações-problema, possibilitar aos alunos:

- revisar o conceito de função exponencial;
- construir o modelo matemático referente às situações-problema;
- analisar graficamente a solução do problema;
- analisar a importância desse conceito na definição da função logarítmica;
- analisar a relação entre a definição da função exponencial e da função logarítmica.

b) 1ª Atividade

O Programa Espacial Brasileiro começou a ser projetado em 1961, quatro anos após o primeiro lançamento do satélite russo *Sputnik 1*. Nesses quarenta anos foram criados centros de pesquisas para o desenvolvimento de projetos espaciais que incluem a criação de foguetes, satélites e bases de lançamento. Hoje, várias instituições brasileiras, governamentais e privadas desenvolvem pesquisas na área de tecnologia espacial para a produção de foguetes e mísseis. Esses produtos podem ser fabricados com duas finalidades principais, para uso militar ou civil. A indústria bélica fornece equipamentos para as Forças Armadas Brasileiras ou busca exportar para o mercado internacional. Por outro lado, as tecnologias espaciais com fins pacíficos produzem sondas e satélites, que podem ser utilizados em diversas áreas da pesquisa científica como a meteorologia e o mapeamento geográfico. A base de lançamento desses foguetes localiza-se em Alcântara no estado do Maranhão e foi destruída em 2003 devido a um acidente.

Sabendo-se que um dos foguetes lançado nessa base percorreu uma distância de 10m em 1s, 100m em 2s e 1000m em 3s. Pergunta-se:

- a) É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a distância percorrida pelo foguete em função do tempo? Descreva essa lei de formação.
 - b) Quantos metros o foguete percorreu em 8 segundos? Em 10 segundos?
 - c) Quanto tempo foi necessário para o foguete percorrer 10.000 Km?
- Além dessas indagações:
- d) Represente graficamente a função obtida na letra (a).
 - e) Represente graficamente a inversa da função obtida no item (a).



Ilustração 1 - Base de lançamento de foguetes em Alcântara-MA.

c) 2ª Atividade

As estimativas populacionais têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sóciodemográficos nos períodos intercensitários, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretarias Estaduais e Municipais da área social para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, em cumprimento a dispositivo constitucional, as estimativas da população constituem o principal parâmetro para a distribuição conduzida pelo Tribunal de Contas da União, das quotas relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

A população da cidade de Santa Maria - RS no ano 2000 era de aproximadamente 243 mil habitantes (Fonte: IBGE) e está crescendo a uma taxa média anual de 1,8%. Pergunta-se:

- a) Qual era a população estimada da cidade em 2001? Em 2003? Em 2005? Para 2006, 2008 e 2010 qual será a população estimada?
- b) É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a população da cidade em qualquer ano? Em caso afirmativo, descreva a lei.
- c) Represente graficamente a função obtida na letra (b).
- d) Quantos anos são necessários para a população da cidade duplicar?
- e) Quando a população da cidade será de aproximadamente 291 mil habitantes?
- f) Represente graficamente a inversa da função obtida no item (b).

d) Análise a Priori das Atividades da 1ª sessão

A análise a priori é concebida como uma forma de “controle das ações dos alunos” através das variáveis escolhidas. Assim prevêem-se as possíveis soluções para as atividades propostas e quais os comportamentos esperados pelos trios. Esta fase da engenharia didática está fundamentada nas hipóteses levantadas para essa pesquisa e a confirmação destas ou não sendo verificada na 4ª fase, ou seja, na fase da análise a posteriori.

d.1) Análise a Priori da 1ª Atividade

Para a solução da 1ª atividade, os alunos podem construir uma tabela, como a descrita a seguir (Tabela 2), estabelecendo a relação entre o tempo e a distância percorrida para responder as questões do item (a).

Tabela 2 – Distância percorrida pelo foguete em função do tempo.

Tempo (segundos)	1	2	3	4	5	...
Distância (metros)	10	100	1000	10.000	100.000	...

A partir da construção da tabela, espera-se que os alunos possam deduzir a lei de formação, $f(t) = 10^t$, ou usar a variável x , neste caso, $f(x) = 10^x$, onde x representa a variável tempo, em segundos e, $f(x)$, a distância percorrida em metros. A seguir, os trios podem utilizar esta tabela ou a lei encontrada para responder ao item (b), verificando que:

$$f(4) = 10^4 = 10.000 \text{ m}$$

$$f(5) = 10^5 = 100.000 \text{ m}$$

Para responder ao item (c), os alunos podem analisar a tabela ou o gráfico para obter o tempo necessário para o foguete percorrer 10.000 Km. Faz-se necessário, neste momento, observar as unidades de medida. Os alunos podem, também, obter a resposta do item (c) resolvendo a equação $10^t = 10^7$ e usar os conhecimentos sobre potências de mesma base para concluir que o tempo necessário para percorrer 10.000.000 m, distância essa equivalente a 10.000 Km é de 7 segundos.

O gráfico da função, obtido com o auxílio do Winplot, é descrito na Ilustração 2 a seguir. Nele destaca-se a altura atingida pelo foguete em função do tempo.

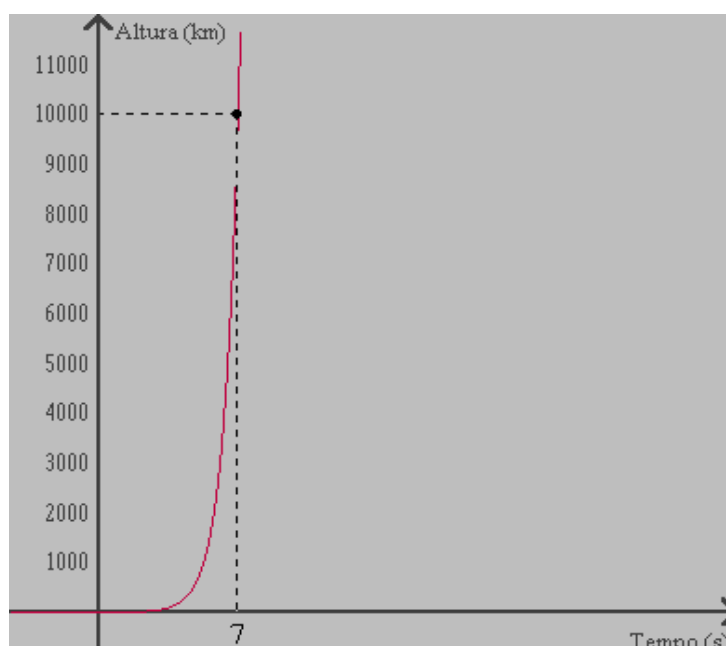


Ilustração 2 - Gráfico de $y = 10^t$

Para encontrar o gráfico da função inversa, os alunos podem utilizar o programa Winplot, encontrando o gráfico abaixo conforme mostra a Ilustração 3. É necessário, ao utilizar o software, comentar com os alunos a limitação do programa, pois como a ilustração mostra, o gráfico toca os eixos coordenados.

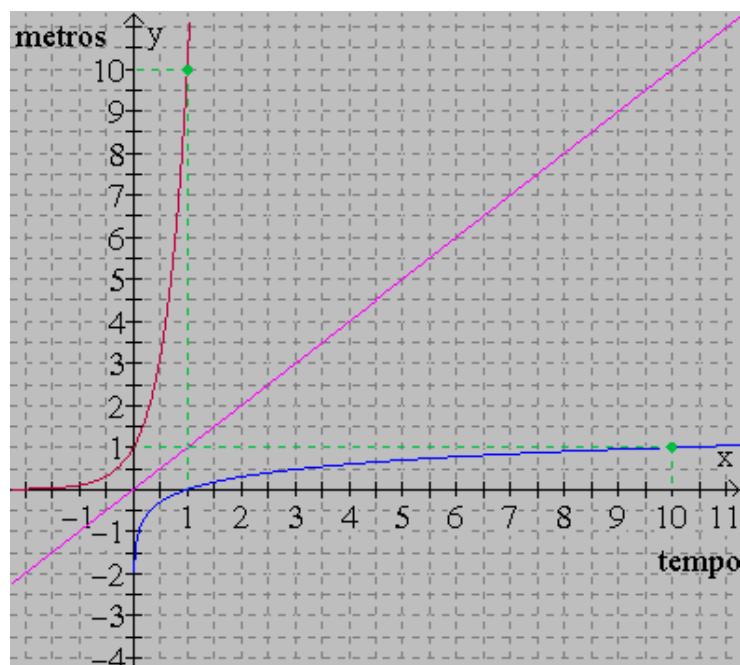


Ilustração 3 - Gráfico da função $f(t) = 10^t$ e de sua inversa.

d.2) Análise a Priori da 2ª Atividade.

Para solucionar o problema da 2ª atividade, os alunos devem observar que a população inicial P_0 , em 2000, é de aproximadamente 243 mil habitantes e como a taxa média de crescimento anual é de 1,8% ou, em número decimal 0,018, então a população em 2001 será:

$$\begin{aligned} \text{População de 2001} &= (1 + 0,018) \cdot \text{população de 2000} \\ &= \text{população de 2000} + 0,018 \cdot \text{população de 2000} \end{aligned}$$

Com esse raciocínio constrói-se uma tabela com os valores da população da cidade de Santa Maria em cada ano, iniciando com a população $P_0 = 243$ mil em 2000. Em 2001, após 1 ano, haverá então:

$$P_1 = 1,018 \cdot P_0 = 1,018 \cdot 243 \cong 247 \text{ mil de habitantes.}$$

Em 2002, para $t = 2$, a população P_2 será:

$$P_2 = 1,018 \cdot P_1 = 1,018 \cdot (1,018 \cdot P_0) = (1,018)^2 \cdot P_0 = (1,018)^2 \cdot 243 \cong 251,82 \text{ mil habitantes.}$$

Em 2003, para $t = 3$, a população P_3 será:

$$P_3 = 1,018 \cdot P_2 = 1,018 \cdot (1,018)^2 \cdot P_0 = (1,018)^3 \cdot P_0 = (1,018)^3 \cdot 243 \cong 256,35 \text{ mil habitantes.}$$

Em 2005, para $t = 5$, a população P_5 será:

$$P_5 = 1,018 \cdot P_4 = 1,018 \cdot (1,018)^4 \cdot P_0 = (1,018)^5 \cdot P_0 = (1,018)^5 \cdot 243 \cong 265,67 \text{ mil habitantes.}$$

Seguindo esse raciocínio obtém-se a lei de formação:

$$P(t) = P_0 \cdot (1,018)^t = 243 \cdot (1,018)^t$$

Nessa lei, “ t ” é a variável tempo e P_0 a população inicial da cidade. Esse modelo matemático facilitará o cálculo para as populações de 2006, 2008 e 2010 solicitadas no item (a) e possibilitará o cálculo da população em qualquer ano.

O gráfico da função $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$ pode ser esboçado com a utilização do programa Winplot, como na Ilustração 4 a seguir.

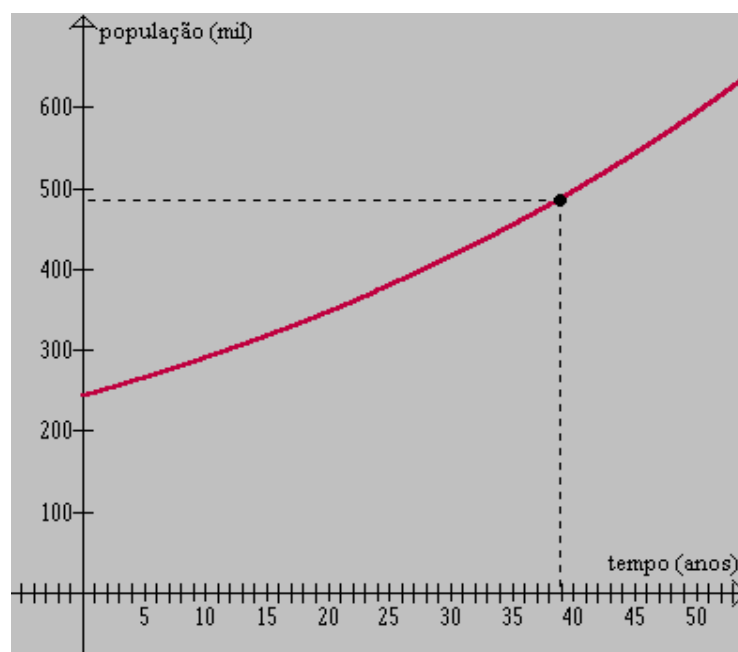


Ilustração 4 - Gráfico da função $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$.

Para responder ao item (d), isto é, em quanto tempo a população da cidade será duplicada, os alunos podem analisar o gráfico e obter uma

resposta aproximada. Por exemplo, o dobro da população é $2 \cdot 243 = 486$ mil habitantes, portanto os alunos devem resolver a equação $243 \cdot (1,018)^t = 486$. Isso pode ser feito, por meio do software Wimplot, observando a interseção das duas curvas, $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$ e $y = 486$, pois este software permite visualizar o ponto de interseção das duas funções, conforme o gráfico da Ilustração 5 a seguir:

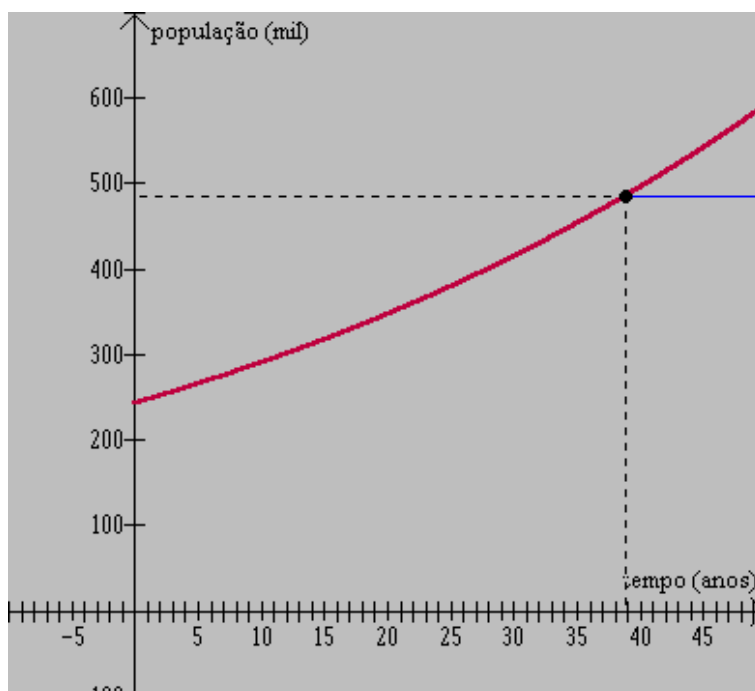


Ilustração 5 - Gráfico da interseção das duas curvas $P(t) = 486$ e $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$

A solução gráfica diz que são necessários aproximadamente 38 anos para a população duplicar. É possível que alguns alunos sintam dificuldades para analisar graficamente e obter a resposta do item (d). Neste caso a professora poderá propor novas situações-problemas aos alunos

Para responder o item (e), a professora fará uma intervenção para definir a função logarítmica base 10, como sendo a inversa da função exponencial cuja base é 10.

Assim o logaritmo de um número x , na base 10, é o expoente da base 10, necessário para se obter x , isto é:

$$\log_{10} x = y \text{ é equivalente a } 10^y = x$$

Retornando a situação-problema 1, os alunos poderão observar que:

$\log_{10} 10 = 1$ pois $10^1 = 10$, isto é, 1 é o expoente que se deve elevar a base 10 para se obter 10.

$\log_{10} 100 = 2$, pois $10^2 = 100$, isto é, 2 é o expoente que se deve elevar a base 10 para se obter 100.

$\log_{10} 1000 = 3$, pois $10^3 = 1000$, isto é, 3 é o expoente que se deve elevar a base 10 para se obter 1000.

Espera-se que os alunos possam resolver o item (e), após a definição de logaritmo decimal, utilizando uma calculadora científica e obtendo com o auxílio da professora, a seguinte expressão:¹

$$\begin{aligned} 291 &= 243 (1,018)^t, \text{ então } 1,1975 = (1,018)^t, \text{ aplicando logaritmo} \\ &\text{ decimal em ambos os} \\ \text{membros tem-se, } \log 1,1975 &= \log (1,018)^t, \text{ logo} \\ 0,0783 &= t \cdot 0,0077 \text{ e portanto} \\ t &\cong 10 \text{ anos} \end{aligned}$$

Para a solução do item (f), os alunos podem novamente utilizar o Winplot, obtendo o gráfico abaixo, conforme a Ilustração 6.

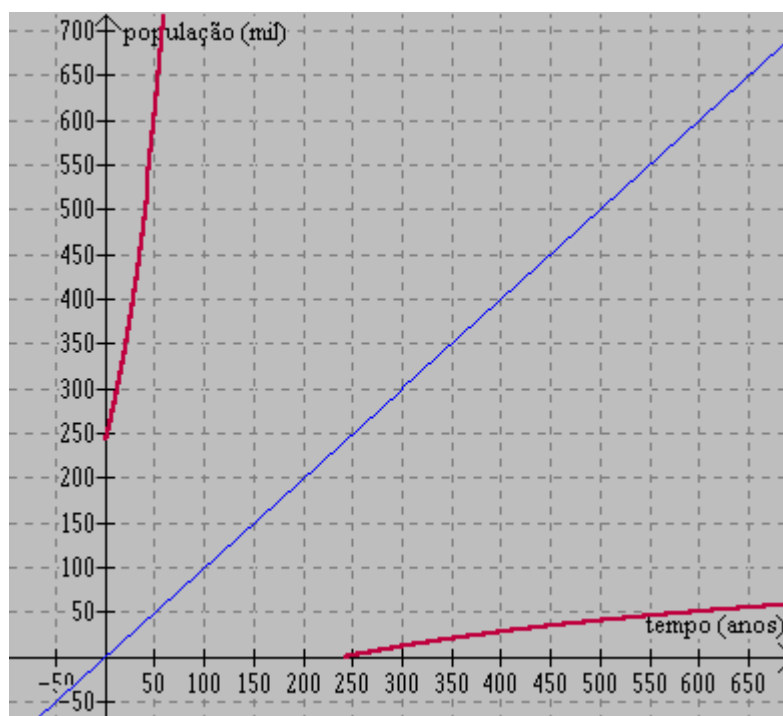


Ilustração 6 - Gráfico de $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$ e de sua inversa.

¹ Para facilidade de escrita, usar-se-á “log x” indicando que a base do logaritmo é 10.

e) Análise a Posteriori das Atividades da 1ª Sessão

As análises a posteriori das atividades foram realizadas levando-se em consideração as soluções dos problemas apresentadas pelos alunos, os caminhos por eles percorridos na busca das soluções, e as observações registradas pela professora-pesquisadora nas pautas de observação referente à atuação de cada trio. Ainda, a análise a posteriori foi realizada de acordo com as expectativas expressas na análise a priori.

e.1) Análise a Posteriori da 1ª Atividade.

Para a realização da 1ª sessão, foram utilizados dois períodos de 90 minutos. Essa sessão foi composta de duas atividades. Analisadas as soluções apresentadas para a 1ª atividade, pode-se destacar que:

- 8 dos 9 trios, correspondendo a 88,9% dos alunos, não tiveram dificuldades para solucionar os itens (a) e (b), resolveram por meio de uma tabela, como previsto na análise a priori, sendo que uma pequena minoria necessitou de esclarecimentos da professora. Para os itens (c) e (d), 4 trios, o que corresponde a 44,5% dos alunos, não tiveram dificuldades na resolução, somente fizeram perguntas rápidas para a professora a fim de conferir se o raciocínio estava correto. Os demais trios necessitaram de ajuda da professora que procurou auxiliá-los fazendo novas perguntas. Os trios utilizaram-se do software Winplot, para a plotagem dos gráficos dessa atividade, que não apresentaram dificuldades com relação ao manuseio desta ferramenta computacional.

Dificuldades encontradas nessa primeira atividade:

- o traçado do gráfico da função $f(t) = 10^t$, no que se refere a escala, pois primeiramente os trios tentaram fazer o esboço com lápis e papel. Para sanar essa dificuldade, utilizou-se o programa Winplot, no laboratório de informática, possibilitando uma melhor visualização da curva e, portanto, permitindo aos alunos trabalhar com escalas diferentes nos eixos x e y. A dificuldade de cinco dos

nove trios foi com relação a configuração do plano cartesiano a fim de visualizar a curva da função $y = 10^t$. Nessa atividade foi necessário fazer um ajuste na janela do gráfico utilizando-se escalas diferentes para os eixos x e y . Com a utilização desse programa foi possível traçar vários gráficos de funções exponenciais e explorá-los principalmente utilizando escalas diferentes. Apesar dessa facilidade o programa Winplot apresenta uma limitação no que se refere a parte gráfica, pois os gráficos tocam os eixos x e y ao invés de tangenciarem.

- Expressar a distância na mesma unidade de medida. Dois trios realizaram a conversão de 10.000 Km em metros de modo errado e um dos trios não percebeu que as unidades eram distintas.
- Para a realização do item (e), 6 trios, o que corresponde a 66,7% dos alunos, após explorarem bastante o software, conseguiram esboçar o gráfico da função inversa obtida no item (a). O restante dos trios necessitou de ajuda para ajustar a escala do gráfico. Os alunos tiveram que configurar o plano cartesiano, para visualizar as curvas das funções.

e.2) Análise a Posteriori da 2ª Atividade.

Analisando as resoluções dos trios e as pautas de observação, destacam-se os seguintes pontos:

- Com relação à construção do modelo matemático, seis trios (66,7% dos alunos) não tiveram dificuldades. Essa facilidade é atribuída ao fato de os alunos já terem trabalhado esse tipo de problema quando estudaram a função exponencial.
- Para três trios (33,3% dos alunos), houve necessidade de a professora intervir para que conseguissem iniciar a construção do modelo matemático. A taxa de crescimento foi uma das dificuldades, pois trabalharam com ela na forma de porcentagem e não na forma decimal.

- Dos nove trios, três conseguiram esboçar o gráfico sem problemas e com dois trios, houve a necessidade de interferência, pois marcaram corretamente os pontos no gráfico, porém tiveram dúvidas com relação à escala e conseqüentemente quanto ao esboço da curva. Para realizarem os cálculos, os alunos trabalharam nessa sessão com uma calculadora científica por trio. As dificuldades com relação a construção do gráfico foram sanadas com a utilização do Winplot, havendo necessidade de se trabalhar com escalas diferentes nos eixos cartesianos para ajustar a janela do gráfico, o que possibilitou uma melhor visualização da curva. Esse software permite alterar as escalas dos eixos, de maneira que se possa visualizar a situação desejada.

Para a solução do item “d”, os trios de um modo geral apresentaram dificuldades. Três dos nove trios chegaram à seguinte equação:

$$243 (1,018)^t = 2 \cdot (243)$$

$$243 (1,018)^t = 243$$

$$(1,018)^t = 2$$

A partir desse momento, os alunos pediram ajuda à professora.

Eles assim manifestaram-se:

- *Trio E: professora, como eu acho o “t”? Nós não sabemos que número devemos elevar o 1,018 para obter o 2.*
- *Professora: porque vocês não tentam resolver a situação graficamente? Localizem no gráfico onde está o dobro da população.*
- *Trio E: como assim professora?*
- *Professora: vocês podem observar a interseção da função $f(t) = 486$, que representa o dobro da população com a curva $P(t) = 243 (1,018)^t$, que representa o crescimento dessa população, para isso basta esboçar o gráfico dessas funções no mesmo plano cartesiano.*
- *Trio E: vai ser difícil!*
- *Trio B: Já entendemos.*

Esse item não ocorreu conforme previsto na análise a priori. Três dos nove trios (33,3% dos alunos) encontraram a resposta certa para o valor de “t” que satisfaz $486 = 243 (1,018)^t$ com o auxílio de uma calculadora, encontrando o valor de “t” por tentativas. Os demais trios sentiram dificuldades na resolução dessa atividade. Como o tempo previsto esgotou-se sem que os alunos terminassem a resolução, a professora concordou em disponibilizar mais tempo na próxima aula. Na aula seguinte, os três trios que haviam encontrado o valor de “t”, utilizaram este valor, no Winplot, e encontraram a imagem de t, através do gráfico da função $P(t) = 243 \cdot (1,018)^t$.

Para a resolução do item (f), os alunos utilizaram-se do gráfico esboçado no item (c), encontrando o gráfico da inversa por simetria à bissetriz do 1º e 3º quadrantes. Sete dos nove trios não tiveram dificuldades em encontrar a inversa. Porém demoraram um pouco para achar a escala conveniente. A dificuldade nesse item foi somente com relação ao ajuste da janela do gráfico, utilizando os eixos x e y na mesma escala.

Nessa aula foi realizada a formalização das duas atividades da 1ª sessão, isto é, dos conteúdos trabalhados na sessão anterior, dando ênfase nos itens “d” e “e” da 2ª atividade, em que os trios sentiram mais dificuldades. Posteriormente, foi traçado o gráfico da inversa da função exponencial, obtendo-se o gráfico da função logarítmica. Nesse momento, foi definida a função logarítmica pela professora como sendo a inversa da função exponencial, cuja base é 10. Foi colocado aos alunos que o logaritmo de um número x na base 10 é o expoente que deve ser elevada a base 10, para se obter x, isto é, $\log_{10} x = y$ é equivalente a $10^y = x$, onde essa equivalência foi explorada graficamente.

De modo análogo, a professora apresentou outros exemplos tais como:

$\log_{10}(0,1) = \log_{10} 10^{-1} = -1$, pois $0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ e -1 é o expoente necessário para se obter -1 .

Para a realização do item “e”, a professora teve de intervir várias vezes tentando lembrar aos alunos como eles procediam para encontrar, por exemplo, a inversa da função polinomial do 1º grau. Ao que os trios responderam:

Comentários:

- *Trio C: professora, é só trocar x por y e isolar o y .*
- *Trio D: podemos isolar x e depois trocar x por y .*
- *Professora: e o que significa trocar x por y para achar a função inversa?*
- *Trio G: professora, nós estamos achando os pontos simétricos, não é?*

Para esta atividade, a professora pediu para pararem os cálculos a fim de lembrar-lhes a definição de função inversa e como identificar graficamente duas funções inversas. Foi necessário utilizar alguns exemplos para que a turma toda pudesse relembrar esses conceitos. Um obstáculo nesse momento foi o conceito de inverso e simétrico, também se discutiu sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares. De posse desses conhecimentos, o gráfico da inversa aconteceu rapidamente.

Para a formalização dos conteúdos trabalhados na 1ª sessão, foram utilizados 90 minutos da aula seguinte. Após uma conversa com a turma para retomada do contrato didático, iniciou-se a discussão com a professora, sendo corrigidas as atividades no quadro-negro. Na primeira atividade, a discussão ficou centrada na escala utilizada para a construção do gráfico. Na segunda atividade, a professora obteve ajuda dos alunos na construção do modelo, pois estes utilizaram uma calculadora científica para construção de tal modelo.

Após as discussões e observando-se que os alunos não tinham mais dúvidas a aula foi encerrada. Então, a professora alertou aos alunos quanto à importância da compreensão da função logarítmica e da definição de logaritmo pois trabalhariam com esta definição na próxima aula.

B) 2ª SESSÃO: USANDO A DEFINIÇÃO DE LOGARITMO.

a) Objetivo

Essas atividades têm por objetivo que o aluno utilize a definição de logaritmo para buscar a solução das equações e concluir as propriedades das operações com logaritmos.

b) 1ª Atividade

Escrever cada equação na forma exponencial equivalente.

- a) $\log_5 x = 2$
- b) $\log_b 64 = 3$
- c) $\log_3 7 = y$
- d) $\log_{10} 10 = c$

c) 2ª Atividade

Escrever cada equação na forma logarítmica equivalente.

- a) $12^2 = x$
- b) $b^3 = 8$
- c) $2^y = 9$
- d) $3^c = 3$

d) 3ª Atividade

Determinar o valor do logaritmo e justificar sua resposta.

- a) $\log_2 16 =$
- b) $\log_3 9 =$
- c) $\log_{25} 5 =$

e) 4ª Atividade

Sem usar a calculadora, faça uma estimativa do intervalo que se encontra o logaritmo, na base 10, dos seguintes números abaixo.

- a) 1543
- b) 15,43
- c) 0,1543

f) 5ª atividade

1) Utilizando a definição, determine o valor dos logaritmos abaixo, e conclua a propriedade utilizada.

a) $\log_2 4 =$
 $\log_2 8 =$
 $\log_2 4 + \log_2 8 =$
 $\log_2 4 \cdot 8 =$

b) $\log_3 3 =$
 $\log_3 9 =$
 $\log_3 3 + \log_3 9 =$
 $\log_3 3 \cdot 9 =$

Que conclusão pode-se obter analisando os resultados da letra (a) e (b)?

R:

c) $\log_2 \frac{16}{4} =$
 $\log_2 16 - \log_2 4 =$

d) $\log_5 \frac{125}{5} =$
 $\log_5 125 - \log_5 5 =$

Que conclusão pode-se obter analisando os resultados das letras (c) e (d)?

R:

e) $\log_2 7^3 =$

f) $\log_2 2^3 =$

Que conclusão pode-se obter analisando os resultados das letras (e) e (f)?

R: _____.

g) Análise a Priori das Atividades da 2ª sessão.

g.1) Análise a Priori da 1ª Atividade

Na primeira atividade, é esperado que os alunos percebam no que se refere ao item (a), que “2” é o expoente ao qual se deve elevar a base “5” para se obter o valor de x , isto é, $5^2 = x$. No caso da letra (b), o raciocínio é o mesmo, os alunos devem perceber que “3” é o expoente ao qual deve-se elevar a base “b” para encontrar 64, isto é, $b^3 = 64$. Na letra (c), y é o expoente ao qual se deve elevar a base 3 para se obter 7, isto é, $3^y = 7$. No caso do item “d”, acredita-se que os alunos não sentirão dificuldades para encontrar a forma exponencial equivalente, ou seja, $10^1 = 10$.

g.2) Análise a Priori da 2ª Atividade

Na Segunda atividade, espera-se que os alunos concluam que a equação equivalente à $12^2 = x$ é $\log_{12} x = 2$, no caso da letra (a). No caso da letra (b) a equação equivalente à $b^3 = 8$ é $\log_b 8 = 3$, e no caso do item (c), o raciocínio é o mesmo, logo a equação equivalente à $2^y = 9$ é $\log_2 9 = y$. No item (d), espera-se que o aluno chegue a conclusão de que a equação equivalente à $3^1 = 3$, pois $\log_3 3 = 1$ e concluam que a propriedade é válida para qualquer número real positivo, isto é, $\log_b b = 1$.

g.3) Análise a Priori da 3ª Atividade

Com relação a terceira atividade, uma resposta esperada para o item (a) é $\log_2 16 = x$ e na forma exponencial $2^x = 16 = 2^4$ e, portanto, $\log_2 16 = 4$, pois 4 é o expoente necessário que se deve elevar a base “2” para se obter 16. Seguindo o mesmo raciocínio nas alternativas (b) e (c), tem-se $\log_3 9 = y$, ou

$3^y = 9 = 3^2$, portanto $y = 2$ concluindo que $\log_3 9 = 2$. Do mesmo modo $\log_{25} 5 = x$, passando para forma equivalente, $5 = 25^x = (5^2)^x = 5^{2x}$ portanto $x = \frac{1}{2}$.

g.4) Análise a Priori da 4ª Atividade

Na quarta atividade, espera-se que os alunos busquem uma solução prática por meio de estimativas usando a definição de logaritmo decimal.

Para a letra (a), os alunos devem observar que o número 1.543 está compreendido entre duas potências de base 10, cujos expoentes são números inteiros consecutivos, ou seja,

$$10^3 < 1543 < 10^4, \text{ logo } \log_{10} 10^3 < \log_{10} 1543 < \log_{10} 10^4 \text{ e, portanto,} \\ 3 < \log_{10} 1543 < 4.$$

Para a letra (b), tem-se:

$$10^1 < 15,43 < 10^2, \text{ logo } \log_{10} 10 < \log_{10} 15,43 < \log_{10} 10^2 \text{ e, portanto,} \\ 1 < \log_{10} 15,43 < 2.$$

Para a letra (c), tem-se:

$$10^{-1} < 0,1543 < 10^0, \text{ logo } \log_{10} 10^{-1} < \log_{10} 0,1543 < \log_{10} 10 \text{ e, portanto,} \\ -1 < \log_{10} 0,1543 < 1$$

g.5) Análise a Priori da 5ª Atividade

Na quinta atividade, espera-se que os alunos utilizem a definição para deduzir as propriedades das operações com logaritmo.

Das soluções obtidas em (a) e (b), espera-se que os alunos concluam a propriedade:

$$\log_b M \cdot N = \log_b M + \log_b N,$$

válida para todos os número reais positivos M e N.

Do mesmo modo espera-se que os alunos analisando as soluções obtidas em (c) e (d), concluam a propriedade:

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N,$$

válida para todos os número reais positivos M e N.

Para o item (e) e (f) após os cálculos e análise dos resultados obtidos

$$\log_2 7^3 = \log_2 7 + \log_2 7 + \log_2 7 = 3 \cdot \log_2 7 \text{ e, portanto,}$$

$$\log_2 7^3 = 3 \cdot \log_2 7$$

a conclusão esperada é que os alunos possam observar a partir dos cálculos realizados, que é válida a propriedade: $\log_b M^N = N \cdot \log_b M$ para M e N reais positivos.

h) Análise a Posteriori das Atividades da 2ª sessão.

Para a maioria dos trios, essas atividades foram consideradas inicialmente simples. O fato de aplicar a definição na atividade 1 e resolver as equações exponenciais na atividade 2 foi realizada pela maioria dos trios sem problemas. Importante nesta sessão era o fato de os alunos exprimir-se com clareza, na linguagem matemática, usando a terminologia correta, conseguindo estabelecer a relação entre a função exponencial e a função logarítmica.

Algumas observações constatadas a partir do desempenho dos nove trios com relação à resolução da 1ª, 2ª e 3ª atividades:

- a maioria dos trios aproximadamente 88,9% dos alunos atingiu os objetivos previstos na análise a priori para a primeira, segunda e terceira atividades dessa sessão;
- alguns trios preocuparam-se muito em encontrar uma resposta para as incógnitas que apareceram na primeira e segunda atividades, esquecendo-se do que realmente foi pedido no enunciado. Fez-se necessária a intervenção da professora, chamando a atenção destes alunos para o que estava sendo solicitado.

Na análise da quarta atividade, observou-se que o que fora previsto na análise a priori não ocorreu em sua totalidade. Os trios tiveram inicialmente dificuldades com relação à sua interpretação, havendo necessidade da intervenção da professora. Depois disso, cinco dos nove trios (55,6% dos

alunos), conseguiram inferir a seguinte situação: $\log 1543 = x$ equivalente à $10^x = 1543$, e não saíram desse ponto. Após uma segunda intervenção, é que os alunos resolveram a situação.

Nos itens (a), (b),(c) e (d) da quinta atividade, pode-se afirmar, de uma maneira geral, que os trios corresponderam à expectativa, aplicando a definição de logaritmo, porém houve a necessidade de auxílio da professora em alguns trios (11,1% dos alunos), para a conclusão das propriedades. Cerca de 77,8% dos alunos encontraram dificuldades no item (e), havendo necessidade de maiores esclarecimentos para a conclusão da propriedade.

Alguns trios assim se manifestaram:

Trio C: como assim professora, que propriedade é esta?

Trio I: resolvemos os logaritmos, dá o mesmo resultado nos dois, e agora ...

Professora: o que vocês podem inferir a respeito das duas atividades que acabaram de realizar?

Em linhas gerais, os trios compreenderam a resolução do problema, eles só não sabiam escrever matematicamente as propriedades operatórias do logaritmo, então a professora teve de intervir, concluindo a propriedade $\log M \cdot N = \log M + \log N$ e pediu que fizessem o mesmo com $\log M/N = \log M - \log N$, prontamente os trios desenvolveram. Essa atividade conduziu os alunos a perceberem certos comportamentos que se repetiam, levando-os a descoberta das propriedades desejadas.

A formalização da segunda sessão, de 90 minutos, foi realizada decorridos 60 minutos, isto é, foi feita a correção das atividades de 1 a 4. A professora realizou a discussão das questões propostas à turma, utilizando o quadro e giz. Resolveu-se item por item para que os alunos se apropriassem da definição de logaritmo, bem como concluíssem as propriedades das operações com logaritmos.

Pode-se afirmar que os objetivos dessa sessão foram atingidos, uma vez que os alunos conseguiram estabelecer e compreender a relação entre a função exponencial e a função logarítmica. As propriedades operatórias também foram assimiladas após a formalização da seção.

C) 3ª SESSÃO: CONSTRUINDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

a) Objetivo

O objetivo dessa sessão é construir o gráfico da função logarítmica, com o auxílio do programa Winplot e identificar essa função como sendo a inversa da função exponencial, determinar o domínio e o conjunto imagem da função logarítmica, bem como as condições para que a função seja crescente ou decrescente.

b) 1ª atividade

Considere as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$

- a) Construir uma tabela de valores para $f(x)$, considerando $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ e uma tabela para a função $g(x)$ para $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$.
- b) Compare os valores de “x” da primeira tabela e os valores de $g(x)$ da segunda tabela. Compare também, os valores de “x” da segunda tabela e os valores de $f(x)$ da primeira tabela. Quais são suas conclusões? Justifique.
- c) Use o programa Winplot para traçar o gráfico das duas funções no mesmo plano cartesiano.
- d) Trace onde se localiza a bissetriz do 1º quadrante, no gráfico das funções f e g , e identifique os pontos $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$ das tabelas construídas no item (a) .
 - d₁) Esses pontos são simétricos em relação à bissetriz do 1º quadrante?
 - d₂) Os gráficos das funções f e g são simétricos em relação a bissetriz do 1º quadrante? Justifique.
- e) Analisando o gráfico determine o domínio e o conjunto imagem das funções f e g .
- f) Verifique se as funções f e g são crescentes.

c) 2ª atividade

Considere as funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

- Trace o gráfico das duas funções f e g no mesmo sistema de eixos coordenados.
- Determine o domínio e o conjunto imagem das funções f e g.
- Trace a bissetriz do 1º quadrante e verifique se os gráficos das funções f e g são simétricos em relação a ela. Descreva suas conclusões.
- As funções f e g são crescentes ou decrescentes?
- Comparando as bases das funções da atividade 1 e da atividade 2 o que você pode concluir sobre o crescimento ou decrescimento das funções?

d) 3ª atividade

A função inversa de $f(x) = e^x$ é a função $g(x) = \log_e x = \ln x$. A notação $\ln x$ é utilizada para designar o logaritmo de um número na base “e”. Esse logaritmo é denominado logaritmo neperiano de x ou logaritmo natural em homenagem ao matemático Napier. Uma aproximação do número “e” é obtida calculando-se $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para diferentes valores de n, sendo n qualquer valor real.

- Com o auxílio do programa Winplot, trace no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico da função $f(x) = e^x$ e de sua inversa.
- Calcule o valor da expressão acima para os seguintes valores de n = 1;5;10;20;50;100; 500;1000;10.000. Utilize uma calculadora científica e verifique o que ocorre com a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Qual é o domínio e o conjunto imagem da função $g(x) = \ln x$?
- A função $g(x) = \ln x$ é crescente? Justifique sua resposta.

e) Análise a Priori das Atividades da 3ª sessão.

Embora a professora já tenha definido a função logarítmica como sendo a inversa da função exponencial e analisado graficamente o gráfico da inversa, o objetivo desta atividade é explorar um pouco mais o gráfico da função logarítmica para que os alunos possam visualizar o crescimento ou decrescimento da função.

e.1) Análise a Priori da 1ª Atividade.

Na atividade “1” os alunos podem construir as tabelas e obterem os seguintes valores:

Tabela 3 – Valores de x e $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Tabela 4 – Valores de x e $g(x) = \log_2 x$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)$	-2	-1	0	1	2	3

Espera-se que ao construírem as tabelas, os alunos percebam a igualdade entre os valores de x da primeira tabela e $g(x)$ na segunda tabela e justifiquem essa igualdade, usando a equivalência entre as equações $y = \log_2 x$ e $x = 2^y$. O traçado dos gráficos será feito usando o programa Winplot.

O item (d) foi elaborado com o objetivo de que os alunos percebam que os pontos $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$ são simétricos, pois tem a mesma distância em relação à bissetriz do primeiro quadrante e também que os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ são simétricos em relação à essa bissetriz.

Com relação ao item (e), espera-se que os alunos constatem que o domínio da função “ f ” é o conjunto dos números reais e a imagem dessa função é o conjunto dos números reais positivos e igualmente para a função g ,

tem-se que o domínio é o conjunto dos números reais positivos e a imagem é o conjunto dos números reais.

Para o item (f), espera-se que os alunos percebam que aumentando o valor de “x” o valor de “y” também aumenta, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 < y_2$ para todo x_1, x_2 pertencente ao domínio das funções, o que caracteriza que as funções são crescentes, esta é a resposta esperada.

e.2) Análise a Priori da 2ª Atividade.

Com relação à atividade 2, espera-se que os alunos, no item (a), atentem para o fato de a função $g(x)$ situar-se somente no 1º e 4º quadrantes e determinem o domínio e o conjunto imagem das funções f e g . Ou seja, para a função f , tem-se $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$ e para a função “g” tem-se $D(g) = \mathbb{R}_+^*$ e $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$.

Espera-se, no item (c), que os alunos percebam ao traçar a reta $y = x$, que os gráficos das funções são simétricos em relação a ela.

No item (d), espera-se que os alunos identifiquem que a função exponencial e a função logarítmica são funções crescentes, quando a base “a” é um número real positivo maior do que “1” e que as funções são decrescentes quando $0 < a < 1$.

e.3) Análise a Priori da 3ª Atividade.

Para o item (a), espera-se que os alunos possam encontrar o seguinte gráfico, expresso pela Ilustração 7, a seguir. A limitação do programa, em alguns casos, pode mostrar o gráfico de $y = e^x$, tocando o eixo x .

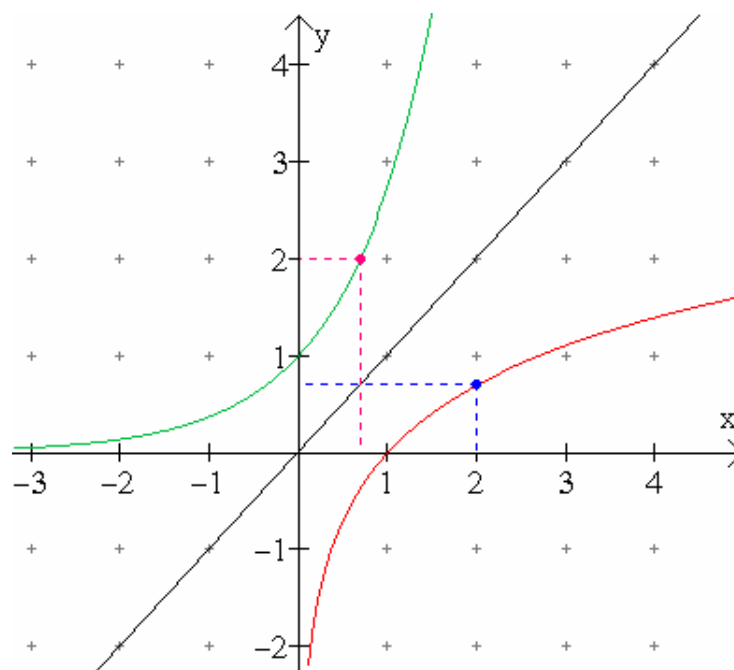


Ilustração 7 - Gráfico da função $y = e^x$ e sua inversa $y = \ln x$.

No item (b), utilizando-se uma calculadora, são obtidos os valores de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ para}$$

$n = 1; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 500; 1000; 10000; \dots$

Para $n = 1$ tem-se: $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$

Para $n = 5$ tem-se, $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2,48$

Para $n = 10$ tem-se, $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,59$

Para $n = 20$ tem-se, $\left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} = 2,65$

Para $n = 50$ tem-se, $\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50} = 2,69$

Para $n = 100$ tem-se, $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2,704$

Para $n = 200$ tem-se, $\left(1 + \frac{1}{200}\right)^{200} = 2,7115$

Para $n = 500$ tem-se, $\left(1 + \frac{1}{500}\right)^{500} = 2,7155$

Para $n = 1.000$ tem-se, $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,7169$

Para $n = 10.000$ tem-se, $\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2,7181$

A professora analisará com os alunos que quanto maior o valor de “n”, mais próximos estes valores vão estar do número irracional $e = 2,718281\dots$, que tem em sua representação decimal, infinitas casas decimais que não são periódicas.

Comentar-se-á com os alunos que para um cálculo mais refinado, o valor de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sempre estará compreendido entre 2 e 3, ou seja, $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. Deve ficar bem claro para os alunos que quando “n” cresce indefinidamente, o valor de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima do valor $e = 2,71828\dots$

Observando o gráfico esboçado no item (a), os alunos podem concluir que $D(f) = \mathfrak{R}_+^*$ e $\text{Im}(f) = \mathfrak{R}$ e que a função $f(x) = \ln x$ é crescente, pois quanto maior o valor de “x”, maior será o valor de “y”, ou ainda que eles percebiam que a base é maior do que 1, e portanto a função é crescente. A professora analisará com os alunos que a base “e” do logaritmo natural é um número maior do que um, portanto a função é crescente.

f) Análise a Posteriori das Atividades da 3ª sessão

Essa sessão, relativa à construção do gráfico da função logarítmica, foi realizada no laboratório de informática. Primeiramente, trabalhou-se com a construção de várias funções exponenciais e logarítmicas tais como $f(x) = 10^x$ e $f(x) = \log_{10}(x)$, $f(x) = 2^x$ e $f(x) = \log_2(x)$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f(x) =$

$\log_{\frac{1}{2}}(x)$. De modo geral, o desempenho dos trios correspondeu à expectativa em todos os itens.

f.1) Análise a Posteriori da 1ª Atividade.

Será feita a análise da primeira atividade, relatando as considerações mais relevantes que foram observadas e registradas.

- Todos os trios construíram a tabela de valores solicitada no item (a). Apenas um trio precisou de auxílio (11,1% dos alunos).
- Na solução do item (b), os trios perceberam a simetria entre os pontos, porém não souberam se expressar corretamente. Ao observarem as tabelas, perceberam que os valores de “x” da 1ª tabela e os valores de $g(x)$ na 2ª tabela eram iguais e que os valores de “x” da 2ª tabela eram iguais aos valores de $f(x)$ da 1ª tabela, porém, para justificar usaram a expressão “inversos”, a maioria dos trios fez a mesma justificativa, por isso optou-se por enquadrar esta análise como um acerto parcial.
- De modo geral, houve certa demora na realização dessa atividade, porém a demora está ligada ao fato de os alunos não saberem justificar seus raciocínios.
- Dois trios, (22,2 %dos alunos), justificaram o item (d) relatando que “os pontos têm a mesma distância até a bissetriz” (não souberam expressar claramente que pontos, provavelmente os pontos simétricos).
- Outra análise importante foi a do domínio e a imagem das funções. Seis trios, (66,7% dos alunos), precisaram de auxílio para determinar o domínio e o conjunto imagem. Portanto, percebeu-se que os alunos ainda não dominam esses conceitos, porém pôde-se notar que a análise gráfica facilitou a compreensão por parte de alguns trios.

f.2) Análise a Posteriori da 2ª Atividade.

Os alunos tiveram mais facilidade ao responder os itens dessa atividade, apenas dois trios necessitaram de pequenas intervenções, tais como confirmar o domínio e o conjunto imagem das funções, também solicitaram auxílio para justificar o porquê das funções serem decrescentes, apesar de já terem constatado o fato.

Uma análise pertinente e já feita também na primeira atividade foi em relação à conclusão das funções serem simétricas. Os trios foram unânimes em afirmar que os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, porém não souberam escrever essa justificativa.

f.3) Análise a Posteriori da 3ª Atividade.

Essa atividade foi realizada no laboratório de informática. Com relação à construção do gráfico, todos os trios acertaram. Eles utilizaram calculadoras científicas para encontrar o número irracional “e”. No início não compreenderam o que significava o número “e”, houve a necessidade de intervenção da professora. Esta utilizou-se de um quadro branco e um pincel para justificar a necessidade que Napier teve em determinar este número. Esta foi a única dificuldade com relação a esta atividade.

A formalização das atividades 1 e 2 foi realizada pela professora após decorridos 90 minutos, utilizando para isso um data show ligado ao seu computador, pois dessa forma todos os trios acompanharam ao mesmo tempo.

D) 4ª SESSÃO – RESOLVENDO PROBLEMAS.

a) Objetivo

O objetivo dessa sessão é que o aluno compreenda a definição e a utilização da função logarítmica, bem como a aplicação de algumas propriedades logarítmicas através da resolução de problemas.

b) 1ª atividade

Foi apresentado aos alunos um texto do Jornal Correio do Povo, referente à Exportação de Carne Bovina.

EXPORTAÇÃO DE CARNE BOVINA SOBE 71% NO RS

A exportação de carne bovina gaúcha está aumentando. Para manter o ritmo, porém, a produtividade do rebanho terá de crescer nas mesmas taxas. Segundo o Ministério da Agricultura, os embarques cresceram 71% em receita para 144,3 milhões de dólares, e 36,2% em volume, para 58,8 mil toneladas, de janeiro a julho, na comparação com o mesmo período de 2005. Com as boas perspectivas de exportação, o Estado vem atraindo novas plantas frigoríficas. Contudo, o presidente do Sindicato da Indústria de Carnes e Derivados do RS (Sicadergs), Ronei Lauxen, vê com preocupação os empreendimentos. Se os novos projetos não forem acompanhados de aumento do rebanho, a escassez de animais poderá frear o aumento dos embarques. Desde 2003, o rebanho do RS se estabilizou em 14 milhões de cabeças (CORREIO DO POVO; 2006).

Ainda nesta reportagem, tem-se que um dos grandes pecuarista do estado do RS, cria gado Limousin, de origem francesa, em uma fazenda de 1,3 mil hectares e sua empresa, deverá entregar 16 mil cabeças ao frigorífico até o final deste ano. Seus bois são abatidos em média aos 24 meses. A precocidade é semelhante à conseguida por outros pecuaristas. De acordo com ele, cerca de 95% da carne produzida por seu rebanho são exportadas para países do Oriente Médio e Norte da África. O Egito, está entre os principais clientes.

Num sistema de engorda de gado da raça Limousin, em regime de confinamento, cada animal tem um ganho de peso de 10% ao mês. Pergunta-se:

Qual é o tempo aproximado necessário para que o animal dobre de peso?

Em geral um animal é vendido para abate com aproximadamente 400Kg. Se um animal pesa aproximadamente 248 Kg, quanto tempo é necessário para que ele atinja o peso ideal para o abate?

c) 2ª atividade

Durante o primeiro semestre você economizou R\$ 500,00 e agora quer aplicar num fundo de aplicação que rende, em média, 1,5% a.m. Em quantos meses, você terá no mínimo R\$ 1.200,00? Utilize uma calculadora científica para realizar os cálculos necessários.

d) 3ª atividade

Se você ganhar na loteria R\$ 800,00 e aplicar num banco com juros compostos à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R\$ 700,00?

e) Análise a Priori das Atividades da 3ª sessão**e.1) Análise a Priori da 1ª Atividade.**

Para a solução da primeira atividade, o aluno deve supor que o animal tenha hoje um peso "P". No mês seguinte, esse peso "P" terá aumentado 10%, isto é, no primeiro mês o peso será:

$$P(1) = P_0 + 10\% \text{ de } P_0 = P_0 + 0,1 \cdot P_0 = P_0 (1 + 0,1) = 1,1 \cdot P_0,$$

ao final do 2ª mês, o peso será :

$$P(2) = 1,1 P_0 + 0,1 \cdot (1,1 P_0) = 1,1 P_0 \cdot (1 + 0,1) = (1,1)^2 \cdot P_0,$$

ao final do 3ª mês, o peso será :

$$P(3) = (1,1)^2 \cdot P_0 + 0,1 \cdot [P_0 \cdot (1,1)^2] = (1,1)^2 P_0 \cdot (1 + 0,1) = (1,1)^2 P_0 \cdot 1,1 = (1,1)^3 \cdot P_0 \text{ e assim por diante.}$$

Ao fim de n meses, o peso será $P(n) = P_0 \cdot (1,1)^n$.

Como se deseja saber após quanto tempo o animal terá duplicado de peso, tem-se:

$$P_0 \cdot (1,1)^n = 2 P_0$$

Calculando o logaritmo em ambos os membros, resulta

$$\log (1,1)^n = \log 2 \quad \text{então } n \cdot (\log 1,1) = \log 2$$

e utilizando uma calculadora científica conclui-se:

$$0,041n = 0,30 \text{ então } n = \frac{0,301}{0,041} \text{ ou } n \cong 7,341$$

Assim: 7,341 meses = 7 meses + 0,341 de um mês

7,341 meses = 7 meses + 0,341 de 30 dias

7,341 meses = 7 meses + 10,23 dias

Portanto, o animal terá duplicado de peso após 7 meses e 10 dias, aproximadamente.

Para solucionar o item (b), os alunos devem observar que o peso de um animal em regime de confinamento é dado por $P(n) = P_0 \cdot (1,1)^t$, então para que um bovino cujo peso inicial é de 248Kg, chegue até 400Kg, deve-se ter que:

$$400 = 248 \cdot (1,1)^t$$

$$400/248 = (1,1)^t$$

Calculando o logaritmo em ambos os membros resulta:

$$0,207608 = t \cdot 0,04139$$

$$t \cong 5 \text{ meses}$$

e.2) Análise a Priori da 2ª atividade

Para a solução da segunda atividade, os alunos devem encontrar o modelo matemático que permita calcular o montante com passar do tempo. Inicialmente tem-se R\$ 500,00

Espera-se que os alunos percebam, com relação à taxa de juros, que

$$1,5\% = \frac{15}{100} = 0,15.$$

Para encontrar o modelo matemático, observa-se que:

Após 1 mês, será:

$$500 + 500 \cdot 0,15 = 500 (1+0,15) = 500 \cdot 1,15$$

Após 2 meses:

$$500 \cdot 1,15 + 0,15 \cdot (500 \cdot 1,15) = (500 \cdot 1,15) \cdot (1+0,15) = 500 \cdot (1,15)^2$$

Após 3 meses:

$$500 \cdot (1,15)^2 + 0,15 \cdot [500 \cdot (1,15)^2] = 500 \cdot (1,15)^2 \cdot (1+0,15) = 500 \cdot (1,15)^3, \text{ logo, após "t" meses, o montante será dado por:}$$

$$M(t) = 500 (1+0,15)^t$$

Portanto para que se atinja a quantia de R\$1.200,00, deve-se obter o valor de t tal que:

$$1.200 = 500 (1+0,15)^t, \text{ então}$$

$$\frac{1.200}{500} = (1,15)^t, \text{ logo}$$

$$2,4 = (1,15)^t$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros e utilizando a propriedade do logaritmo de uma potência vem que:

$$\log 2,4 = \log (1,15)^t, \text{ usando a calculadora científica obtém-se,}$$

$$0,3802 = t \cdot \log 1,15, \text{ logo}$$

$$t = \frac{0,3802}{0,0606} \cong 6,27 \text{ portanto em aproximadamente 6 meses.}$$

e.3 Análise a Priori da 3ª Atividade

Para a solução da terceira atividade, os alunos devem observar que para se obter juros no valor de R\$ 700,00, seu montante será de R\$1.500,00. Lembrando que a taxa de juros é de 12% ao ano, deve-se calcular o tempo tal que:

$$1.500 = 800 (1+ 0,12)^t, \text{ ou}$$

$$\frac{15}{8} = (1,12)^t$$

Pode-se aplicar a propriedade do quociente de um logaritmo, conforme os dados no enunciado ou utilizar a calculadora científica para obter-se:

$$\log 1,875 = t \cdot \log 1,12 \text{ logo,}$$

$$0,2730 = t \cdot 0,04921 \text{ e, portanto,}$$

$$t = 5,5476$$

E concluir que daqui a 5 anos e 5 meses aproximadamente, serão obtidos juros no valor de R\$ 700,00.

f) Análise a Posteriori das Atividades da 4ª sessão.

As análises abaixo foram retiradas das resoluções dos trios e algumas foram retiradas das pautas de observações.

f.1) Análise a Posteriori da 1ª Atividade.

Com relação à primeira atividade, os alunos tiveram dificuldades pelo fato de não saberem o peso inicial do gado. Eles assim se manifestaram:

Trio G: professora não tem como resolver porque não tem o peso do gado.

Trio A: O problema tá mal elaborado...

Trio B: não sabemos nem começar...

Professora: Calma pessoal! Quando vocês não sabem quanto vale algo, como é que se deve proceder? Ou quando vocês não conhecem uma medida, por exemplo, o que é que vocês fazem?

Trio E: há! A gente chama de “P”, ou qualquer outra letra...

Professora: Muito bem, então supondo que o peso inicial do gado seja “ P_0 ”, o que vocês podem inferir para o mês seguinte?

A partir dessa primeira intervenção, a maioria dos trios seguiu esse raciocínio, para os meses seguintes; sendo que as outras intervenções foram relativas a cálculos. A segunda intervenção deu-se quando os trios chegaram a seguinte equação $(1,1)^t = 2$, nesse momento, três dos nove trios tiveram um raciocínio semelhante:

Trio E: que número nós devemos elevar 1,1 para obtermos o 2?

Trio B: chegamos até $\log_{1,1} 2 = t$ e agora?

Trio A: $\log_{1,1} 2 = t$?

Professora: É possível usar a calculadora?

Imediatamente os trios encontraram a solução.

f.2) Análise a Posteriori da 2ª Atividade.

Com relação à segunda atividade, os trios tiveram um melhor desempenho, sendo que as intervenções estavam mais relacionadas à

construção do modelo matemático. Um dos trios trabalhou com a taxa em porcentagem, dificultando muito seus cálculos.

Após encontrarem o modelo, as intervenções foram no sentido de alertá-los para quais propriedades de logaritmos, eles poderiam usar para resolver a equação logarítmica, propriedade está trabalhada na segunda sessão.

f.3) Análise a Posteriori da 3ª Atividade.

Para a terceira atividade, os trios foram rápidos, sendo que três deles visualizaram o modelo matemático de imediato. A euforia foi grande e os trios não disfarçaram a alegria.

Trio E: professora posso ir direto né?

Trio A: é claro, agora ficou fácil...

Trio B: não vamos precisar fazer todas aquelas contas e...

Para essas atividades foi utilizado um período de 60 minutos e após realizou-se a formalização do conhecimento, chamando a atenção para a aplicação das propriedades operatórias dos logaritmos e também para o manuseio da calculadora científica que nem todos os trios tinham domínio.

E) 5ª SESSÃO: A HISTÓRIA E O SURGIMENTO DOS LOGARITMOS.

a) Objetivo

O objetivo dessa sessão foi usar a História da Matemática para mostrar a construção e evolução do conceito de logaritmo de um número.

b) 1ª atividade

Foi distribuído aos alunos o texto a seguir:

A História da Matemática relata que John Napier interessava-se por resolver problemas de sua época, principalmente os relacionados à matemática. Nesse tempo, muitos já vinham tentando achar um processo que

permitisse reduzir operações de multiplicação e divisão ou de potenciação e radiciação em operações mais simples como a adição e a subtração. Assim aconteceu com John Napier e Jost Bürgi que publicaram as primeiras tábuas de logaritmos.

Napier ao comparar os termos de duas seqüências, por exemplo:

2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 ...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...

notou que existem números que podem ser expressos como produto de outros números. Ao observar as seqüências acima, Napier percebeu que para multiplicar dois termos da primeira seqüência, bastava somar os seus correspondentes na outra seqüência e ver qual o termo da primeira seqüência que corresponde a essa soma. Ele também observou que para realizar o produto de $8 \cdot 64$ bastava somar $3 + 6 = 9$, ou seja, os seus correspondentes na segunda seqüência e encontrar o termo da primeira que corresponde ao 9. Neste caso, é o 512. Com esse raciocínio John Napier e Jobst Burgi, publicaram as primeira tábuas de logaritmos.

Observando as seqüências abaixo,

3 9 27 81 243 729 2187 6561 19683 ...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...

e usando as idéias de Napier, pergunta-se:

- Qual é o produto de 9 por 81 ? E o de 27 por 243? Justifique sua resposta.
- Qual é a divisão de 19683 por 2187? Justifique sua resposta com base no método de Napier.
- Qual é o resultado de 27 elevado ao quadrado? Justifique sua resposta.

c) Análise a Priori das Atividades da 5ª sessão.

c.1) Análise a Priori da 1ª Atividade.

Segundo as idéias de Napier e com base no exemplo dado, para realizarem o produto $9 \cdot 81$, localizados na primeira seqüência, os alunos devem perceber que somando os elementos correspondentes a esses números na segunda seqüência, ou seja, $2 + 4 = 6$, identificando na primeira seqüência o número 729. Para o produto $27 \cdot 243$, também da primeira seqüência, basta que os alunos somem os números correspondentes de 27 e de 81, na segunda seqüência, no caso, $3 + 5 = 8$ e identifique o termo da primeira seqüência que corresponde a essa soma, no caso 6561.

Como justificativa do item (a), espera-se que os alunos percebam que a regra acima enumerada nada mais é do que a conhecida regra para multiplicar potências de mesma base, ou seja, para $9 \cdot 81$, equivale a $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$. Para o outro caso o raciocínio é equivalente.

No item (b), para a divisão de 19683 por 2187, espera-se que os alunos percebam que basta subtrair os termos correspondentes a 19683 e 2187 na segunda seqüência, ou seja, $9 - 7 = 2$ e identifique o termo da primeira seqüência que corresponde a essa subtração, no caso 2. E para a justificativa, a resposta esperada é que utilizem as propriedades de potência de mesma base, isto é, $\frac{3^9}{3^7} = 3^{9-7} = 3^2 = 9$.

Com relação ao item (c), o raciocínio é semelhante, basta observar que $(27)^2 = 27 \cdot 27 = 3^3 \cdot 3^3 = 3^{3+3} = 3^6$ e identificar o termo da primeira seqüência que corresponde ao número 6, que nesse caso é o número 729.

d) Análise a Posteriori das Atividades da 5ª sessão.

d.1 Análise a Posteriori da 1ª Atividade.

A maioria dos trios, pelo menos 77,8% dos alunos, não teve dificuldades para resolver essa atividade. Inicialmente os trios dispuseram de um tempo de aproximadamente trinta minutos para a realização da atividade.

Dos nove trios, dois (22,2% dos alunos), apresentaram dificuldades com relação à justificativa dos itens, sendo que um deles, trio I, após a intervenção da professora, conseguiu finalizar a atividade, enquanto que o trio H, efetuou os cálculos, porém não justificou.

No final da atividade foi feita uma explanação, pela professora, referente aos problemas que impulsionaram o surgimento dos logaritmos e foi feita uma análise da evolução histórica desse conceito e das necessidades do uso do logaritmo para efetuar os cálculos.

F) 6ª SESSÃO: CONSTRUINDO UMA ESCALA LOGARÍTMICA.

a) Objetivo

O objetivo dessa sessão é a construção de uma escala logarítmica a partir de uma situação problema

b) 1ª atividade

Nessa primeira atividade, a professora solicitou aos alunos que pesquisassem na internet, ou em jornais, revistas, livros, como se formam os *tsunamis*, quais as causas de um terremoto, como se mede a intensidade dos terremotos, para que serve a escala Richter e como se interpretam as medidas determinadas por essa escala. Para que os alunos sentissem a necessidade de construir uma escala logarítmica foi apresentado o seguinte problema:

- a) Representar sobre uma reta o número de elementos que compõe uma família de 4 pessoas, uma classe escolar com 30 alunos, uma escola com 4.000 alunos, uma cidade com 20.000 pessoas, uma

região urbana com 5.000.000 de habitantes e a população de 250.000.000 de habitantes de um país.

- b) Construir o gráfico de $y = 10^x$.
- c) Construir o gráfico de $y = 10^x$ em escala logarítmica, $\log y = x$ e estabelecer a relação entre os dois gráficos.

c) Análise a Priori das Atividades da 6ª sessão.

c.1) Análise a priori da 1ª atividade.

Espera-se que os alunos, após as devidas discussões acerca da situação, sintam dificuldades no que se refere a encontrar uma escala para a representação do problema acima.

A dificuldade está em determinar uma escala para a representação desses números. Para representar esses valores num gráfico, observa-se que há uma diferença muito grande entre eles. Por exemplo, o número de alunos na sala de aula é aproximadamente 8 vezes o número de pessoas da família. O número de alunos da escola é 1.000 vezes o número de pessoas de família. A população da cidade é 5.000 vezes o número de pessoas da família e assim por diante.

Um modo de solucionar este problema é considerar a quantidade de algarismos de cada número. No caso da família, o número de pessoas é indicado por *1 algarismo*, logo está na casa das *unidades*. Na sala de aula, há 30 alunos, isto é, o número de pessoas é formado por *2 algarismos*, logo está na casa das dezenas. O número de alunos na escola é 4.000, nesse caso, há *4 algarismos*, portanto está na casa dos milhares, e assim por diante. O que permite localizar cada grupo conforme a Tabela 5, a seguir.

Tabela 5 – Dados localizados na escala numérica.

Família	Classe		Escola	Cidade	Região		País		
-- ---	-- ---	-- ---	-- ---	-- ---	-- ---	-- ---	-- ---	-- ---	-- ---
0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
0	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000	100.000.000	1.000.000.000

Da definição de logaritmo decimal tem-se:

$$\log_{10} 10 = 1 \quad \log_{10} 100 = 2 \quad \log_{10} 1000 = 3 \quad \dots \quad \log_{10} 1000000000 = 9$$

e assim por diante.

Logo, com a utilização do logaritmo decimal é possível construir uma nova escala para representar esses valores. Dessa forma é possível localizar, novamente, cada grupo conforme a Ilustração 8, a seguir.

Família	Classe		Escola		Região		País		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ilustração 8 – Representação dos Dados na Escala Logarítmica.

Essa escala, construída com o auxílio do logaritmo dos números, é uma escala logarítmica.

Para a realização do item (b), espera-se que os alunos ajustem a janela do gráfico, utilizando escalas diferentes para os eixos x e y para uma melhor visualização da curva, e encontrem o seguinte gráfico, mostrado através da Ilustração 9 a seguir. A limitação do programa mostra o gráfico tocando o eixo x .

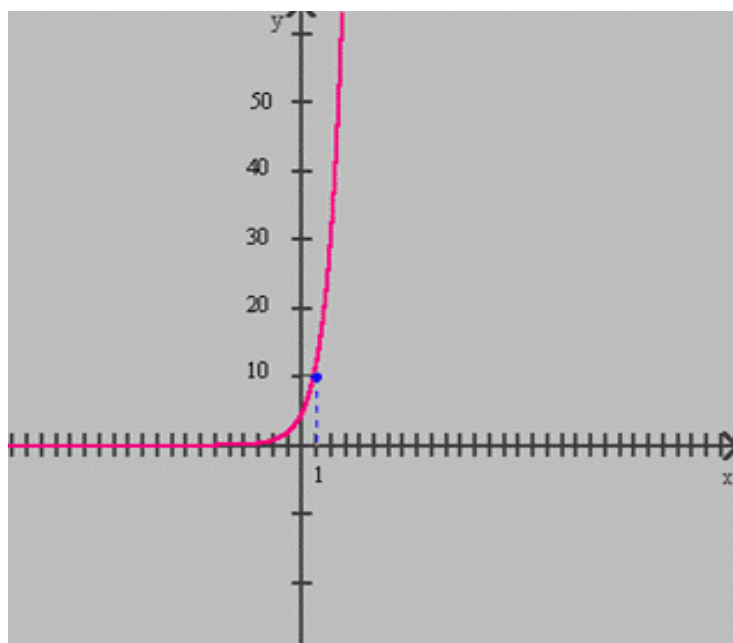


Ilustração 9 – Gráfico da função $y = 10^x$.

Espera-se que os alunos possam esboçar, com o auxílio do Winplot, o gráfico de $y = 10^x$ em escala logarítmica, encontrando o gráfico da Ilustração 10, a seguir:

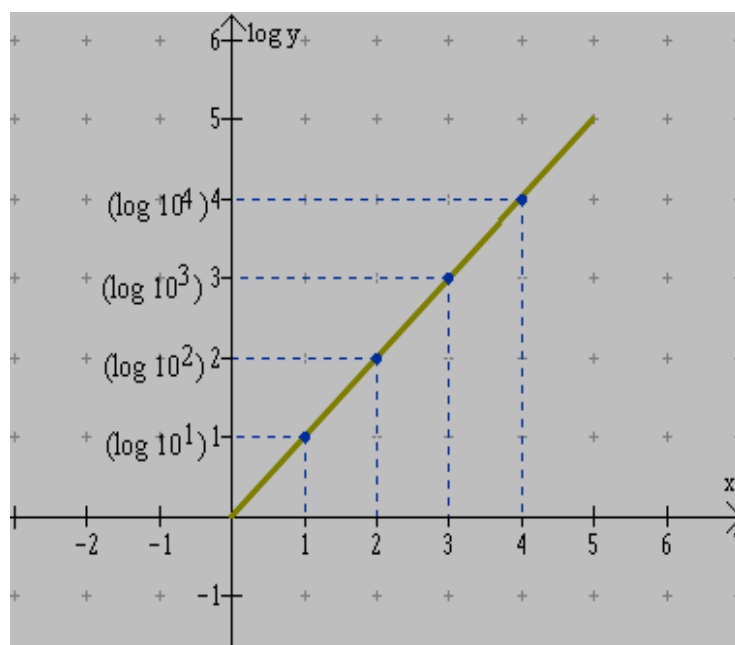


Ilustração 10 – Gráfico da função $y = 10^x$ em escala logarítmica.

d) Análise a Posteriori das Atividades da 6ª sessão.

d.1) Análise a posteriori da 1ª atividade.

Inicialmente foi fornecido um tempo para que os trios pudessem ler e interpretar o problema. Como era esperado para essa atividade, os alunos apresentaram algumas dificuldades, entre elas pode-se destacar :

- Três trios, aproximadamente 40% dos alunos, não compreenderam o que deveria ser feito no item (a);
- Dois trios, aproximadamente 20% dos alunos, pensaram em esboçar no plano cartesiano, porém não souberam dizer qual era o valor de “x” e o de “y”.
- Dois trios pensaram em representar as populações separadamente.
- Os demais trios compreenderam o enunciado da atividade, porém tiveram dificuldades em encontrar uma escala para representar as populações sobre a reta. Como esta observação abaixo:

Trio D: os números são grandes demais, que escala vamos usar?

A professora teve que intervir para que os trios pudessem seguir a atividade. Inicialmente a orientação da professora procurou alertar para o número de algarismos de cada população, ou seja, que os trios construíssem uma reta levando-se em conta a classe a que pertence cada população.

Dupla B: professora ainda não entendemos a lógica de se verificar a quantidade de algarismos e a classificação das populações por classes.

Nesse momento, houve necessidade de mais uma explicação da professora para representar sobre a reta os dados do problema e as potências de base 10. Também, observou-se que 100% dos trios não perceberam a relação entre as duas escalas. Fez-se necessário a intervenção da professora, chamando a atenção para a definição de logaritmo e sua utilização na construção de escalas.

Para a construção do gráfico do item (b), pode-se observar que apenas um trio (11,1% dos alunos) não teve êxito, o seu equívoco ocorreu, devido a escala utilizada para o esboço do gráfico não permitir que a visualização fosse a de uma função exponencial.

Para a construção do gráfico do item (c), 7 trios correspondente a 80% dos alunos não apresentaram dificuldades e 20% dos alunos necessitaram de uma pequena intervenção da professora. No que se refere ao fato de relacionar os gráficos, inicialmente, apenas 40% dos alunos perceberam que os gráficos eram iguais, porém o segundo estava em escala logarítmica, permitindo a redução da escala. Para 80% dos trios, mesmo tendo esboçado o gráfico, houve a necessidade de a professora explicar a relação entre os dois gráficos, salientando que sendo uma escala logarítmica, cada número sobre a reta representa 10 vezes mais que a anterior. Por exemplo, o número 3 corresponde a um valor dez vezes maior que 2, pois o número 2 na escala logarítmica é o expoente de 10^2 e o número 3 é o expoente de 10^3 .

G) 7ª SESSÃO: PROBLEMAS ENVOLVENDO ESCALA LOGARÍTMICA.

a) Objetivo

Resolver problemas utilizando a definição de escala logarítmica para compreender e medir a intensidade de terremotos, a intensidade do som ou o pH de soluções, propiciando aos alunos uma oportunidade de trabalhar interdisciplinarmente.

Para a elaboração das atividades desta sessão, foi solicitado aos alunos no final da sexta sessão, que pesquisassem em revistas, internet, jornais, etc, informações sobre a escala Richter e sua utilização. A partir dessa pesquisa, a professora elaborou uma síntese com informações referentes aos dados encontrados pelos alunos.

b) 1ª atividade

A primeira atividade foi proposta aos alunos usando o material pesquisado por eles mesmos, em revistas, internet, jornais, etc. A partir desse material, foram extraídas as informações sobre a escala Richter.

Ela foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg. É uma escala logarítmica de medição da energia liberada durante os terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre, construída utilizando-se o logaritmo decimal. Os valores desta escala são chamados de magnitude. A escala Richter é também utilizada para medir a intensidade de um terremoto, baseada na idéia de um valor inicial mínimo correspondente à intensidade do abalo sísmico, denotado por I_0 . Sendo uma escala logarítmica, a variação de um ponto a outro significa um aumento 10 vezes maior. Por exemplo, se um terremoto teve magnitude 2 e o outro magnitude 3, significa que o segundo foi 10 vezes mais potente que o primeiro.

Se “I” indica a intensidade de um terremoto, a escala Richter relaciona a magnitude “M” do terremoto, com sua intensidade, isto é,

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

- a) Se o terremoto que destruiu São Francisco em 1906 teve uma intensidade $10^{8,3} I_0$ qual foi sua magnitude na escala Richter?
- b) Se a medida de um terremoto teve magnitude 2 e outro magnitude 4, eles têm a mesma intensidade?
- c) Faça uma pesquisa, na Internet, sobre a magnitude do terremoto que causou ondas gigantescas (*tsunami*) em dezembro de 2004.

c) 2ª atividade

Essa atividade também foi realizada utilizando-se as informações pesquisadas pelos trios sobre terremotos e como eles ocorrem. Terremoto (ou terramoto ou sismo) é um fenômeno de vibração brusca e passageira da superfície da Terra, resultante de movimentos subterrâneos de placas rochosas, de atividade vulcânica, ou por deslocamentos de gases no interior da terra, principalmente metano. O movimento é causado pela liberação rápida de grandes quantidades de energia na forma de ondas sísmicas. A maior parte dos terremotos ocorrem nas fronteiras entre placas tectônicas, ou falhas entre dois blocos rochosos. O comprimento de uma falha pode variar de alguns centímetros até milhares de quilômetros. Para ter-se idéia da

intensidade de alguns terremotos, se fosse liberado um cubo de granito, com 2 km de aresta, de uma altura de 280 km sobre a terra, a energia liberada durante o impacto, seria de 20 trilhões de kWh. O terremoto que destruiu Lisboa, em 1755, liberou energia equivalente a 350 trilhões de kWh.

A tabela abaixo fornece a magnitude de alguns terremotos acontecidos neste planeta e as suas respectivas intensidades, medidas de acordo com a escala Richter.

Tabela 6 – Magnitude de terremotos e suas respectivas intensidades.

Localização	Data	Leitura na E. RICHTER
Chile	1960	8.4
Alasca	1964	8.5
Peru	1970	7.7
Irã	1990	7.3
Cidade do México	1985	8.1
Armênia	1989	6.9
São Francisco	1989	7.1

- a) Calcule, aproximadamente, quantas vezes a intensidade do terremoto que atingiu a Cidade do México, em 1985, foi maior que a intensidade do terremoto que atingiu a Cidade de São Francisco, em 1989.
- b) Explique qual o significado físico da variação de um ponto nessa escala de medida.

d) 3ª atividade

Inicialmente os alunos pesquisaram a respeito do pH, em livros, jornais e na internet, conversaram também com a professora de química sobre o significado do pH de algumas soluções e como se realizam essas medidas. A partir dessas informações, foi elaborado o seguinte problema:

Em química, o pH de soluções é uma medida da sua acidez ou alcalinidade. O pH de uma solução varia de 0 a 14 numa escala logarítmica.

Um valor de pH igual a 7 indica que a solução é neutra (nem ácida nem alcalina). Um pH abaixo de 7 indica acidez e, acima de 7 alcalinidade. A medida do pH obedece, também, a uma escala logarítmica onde a variação de uma unidade de pH representa um aumento de 10 vezes na acidez ou alcalinidade da substância. A tabela a seguir indica o pH de algumas substâncias.

Tabela 7 – pH de algumas substâncias.

Substância	pH
Suco de Limão	2.1
Suco de Tomate	4.1
Água de Torneira	5.8
Leite	6.6
Leite de Magnésia	10.0

- Observando a tabela acima, calcule, aproximadamente, quantas vezes o suco de limão é mais ácido do que o leite?
- Quantas vezes o Leite de Magnésia é mais alcalino que uma solução neutra?

A chuva ácida é hoje em dia um grande problema para a natureza. A poluição do ar causada pela queima de petróleo ou queima de carvão é uma das causas da chuva ácida. Ela prejudica o solo, as florestas, os rios, as plantações, causando sérios prejuízos à saúde dos seres vivos e ao meio ambiente.

Sabendo-se que o pH de uma solução é dado por $\text{pH} = -\log x$, onde “x” representa a concentração de íons de hidrogênio em mols por litro de solução, pergunta-se:

- Qual é a concentração de íons de hidrogênio de uma chuva ácida cujo pH é 4,5?

e) 4ª atividade

De acordo com (GASPAR, 2002), é utilizada a grandeza Intensidade para determinar a energia com uma onda sonora atravessa uma região e para medi-la, é utilizada a unidade de intensidade w/m^2 , isto é, Watts por metro quadrado. Ainda, segundo o autor, a intensidade sonora assim definida é diferente da intensidade sonora que o ouvido humano percebe, pois o ouvido humano reduz drasticamente a intensidade sonora que ele detecta.

A intensidade sonora percebida pelo sistema auditivo humano dá-se o nome de Nível de Intensidade. Para o ser humano, a intensidade sonora mínima percebida é em média, $I_0 = 10^{-12} \text{w/m}^2$ para uma frequência de 1.000 Hz.

O nível de intensidade sonora é medido em decibéis, indicado por db.

Como o nível de intensidade varia em escala logarítmica, os sons cuja intensidade são 10^n vezes maior do que a intensidade mínima I_0 , são percebidos com nível de intensidade “n” vezes maior.

- a) De acordo com os dados, o nível de intensidade no limiar da audição é 0 db. Calcule qual é a intensidade (I_0) do som correspondente a esse nível de intensidade?
- b) O nível de intensidade de uma conversação normal (a 1 m de distância) é de 60 db. Calcule qual é a intensidade (I_{60}) sonora correspondente a este nível de intensidade?
- c) Cientistas afirmam que a partir de 120 db, o som provoca dor e a partir de 160 db pode haver ruptura do ouvido humano. Calcule qual é a intensidade sonora (I_{120}), correspondente ao nível de intensidade 120 db?

f) Análise a Priori das Atividades da 7ª sessão.

f.1) Análise a priori da 1ª atividade.

Para o item (a), os alunos devem observar que:

como $I = 10^{8,3}$, então a magnitude na escala Richter é dada por $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$,

ou seja,

$$M = \log\left(\frac{10^{8,3} \cdot I_0}{I_0}\right) = \log 10^{8,3} = 8,3 \cdot \log 10 = 8,3, \text{ portanto o terremoto}$$

de São Francisco em 1906 registrou na escala Richter a magnitude de 8,3.

Para a solução do item (b), espera-se que os alunos percebam que se $M=2$ então $\log\left(\frac{I}{I_0}\right)=2$, e usando as propriedades dos logaritmos, pode-se

escrever $10^{\log\left(\frac{I}{I_0}\right)}=10^2$, $\frac{I}{I_0}=100$ ou $I = 100 I_0$, isto é, o terremoto tem uma

intensidade 100 vezes maior do que o nível inicial.

Se $M = 4$ então $\log\left(\frac{I}{I_0}\right)=4$ ou $10^{\log\left(\frac{I}{I_0}\right)}=10^4$ portanto, $\frac{I}{I_0}=1000$, isto é, $I = 10.000 I_0$, nesse caso, o terremoto tem uma intensidade 10.000 vezes maior do que o nível inicial.

Comparando os dois resultados, observa-se que se a magnitude é o dobro, a intensidade é 100 vezes maior, pois a relação entre esses valores é determinada pelo quociente abaixo:

$$\frac{10^4 \times I_0}{10^2 \times I_0} = 100$$

Com relação ao item (c), espera-se que os alunos consigam, com os conhecimentos trabalhados em sala de aula, interpretar as informações resultantes da pesquisa realizada.

f.2) Análise a Priori da 2ª Atividade.

Como $M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ e o problema fornece o valor de $M=8,1$ então o esperado para este item é $8,1 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ou, na forma exponencial $10^{8,1} = \frac{I}{I_0}$, portanto, $10^{8,1} \cdot I_0 = I$.

Do mesmo modo, $7,1 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ou $10^{7,1} = \frac{I}{I_0}$ logo, $10^{7,1} \cdot I_0 = I$.

Comparando as duas informações acerca da intensidade, tem-se que:

$$\frac{10^{8,1} \cdot I_0}{10^{7,1} \cdot I_0} = 10^{8,1-7,1} = 10$$

portanto a intensidade do terremoto que atingiu a cidade do México foi 10 vezes mais intenso do que o terremoto que atingiu a cidade de São Francisco.

No item (b), espera-se que os alunos percebam através da tabela fornecida que a magnitude do terremoto que atingiu a cidade do México, em 1985 é uma unidade maior do que a magnitude do terremoto que atingiu a cidade de São Francisco, em 1989. Portanto a intensidade do terremoto que atingiu a cidade do México foi 10 vezes mais intenso do que o terremoto que atingiu a cidade de São Francisco, como calculado anteriormente.

f.3) Análise a Priori da 3ª Atividade.

Espera-se que os alunos analisem as informações e ao observar a tabela possam concluir no item (a) que o suco de limão é aproximadamente 10^5 vezes mais ácido que o leite. E para o item (b), que o leite de magnésia é 10^3 mais alcalino que uma substância neutra. Para o item (c), espera-se que os alunos utilizem a fórmula fornecida, $\text{pH} = -\log x$.

portanto, $4,5 = \log x^{-1}$, ou na forma exponencial $10^{4,5} = \frac{1}{x}$ logo

$$31.622,77 = \frac{1}{x} \text{ e}$$

$x = 0,00003$ é a concentração de íons de hidrogênio.

f.4) Análise a Priori da 4ª Atividade.

Como o nível de intensidade sonora é dado por $D = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ tem-se que:

$$0 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou } 10^0 = \frac{I}{10^{-12}} \text{ logo } 10^{-12} = I_0$$

Espera-se que os alunos cheguem a conclusão de que para um nível de intensidade mínimo de 0 db, a intensidade inicial seja $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Para o item (b), segue-se o mesmo raciocínio, para um nível de intensidade de 60 db, tem-se:

$$60 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou } 6 = \log \frac{I}{10^{-12}} \text{ portanto, } 10^6 = \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou } 10^6 \cdot 10^{-12} = I$$

$$\text{logo, } 10^{-6} = I,$$

$$\text{portanto, a intensidade sonora } I_{60} = 10^{-6} \text{ W/m}^2.$$

Para o item (c), segue que para um nível de intensidade de 120db resulta :

$$120 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou } 12 = \log \frac{I}{10^{-12}} \text{ logo, } 10^{12} = \frac{I}{10^{-12}} \text{ ou, } 10^{12} \cdot 10^{-12} = I,$$

$$\text{logo } 10^0 = I \text{ portanto } I_{120} = 10^0 = 1 \text{ W/m}^2$$

g) Análise a Posteriori das Atividades da 7ª sessão.

Esta sessão foi composta por quatro atividades relacionadas com a aplicação da escala logarítmica estudada na sessão anterior.

g.1) Análise a Posteriori da 1ª atividade.

Analisando as resoluções apresentadas pelos trios, pode-se destacar as seguintes observações:

- a) Com relação ao item (a), 80% dos alunos conseguiram efetuar os cálculos sem dificuldades e 20% dos alunos, não resolveram.
- b) Com relação ao item (b), 40% dos alunos resolveram corretamente, 40% dos alunos realizaram os cálculos de forma correta, porém houve necessidade da professora intervir para que os alunos

pudessem concluir a questão e 20% dos alunos, calcularam corretamente, porém não conseguiram interpretar a situação.

Com relação ao item (b), os trios “C” e “D” resolveram, ou seja, substituíram e aplicaram a definição de logaritmo corretamente, porém a conclusão foi somente que as intensidades eram diferentes. Nesse momento, houve a necessidade de auxiliá-los, lembrando-os de que estavam trabalhando com escalas logarítmicas e chamando a atenção para as informações constantes no enunciado do problema.

O trio “B” encontrou as intensidades relativas aos terremotos de magnitude 2 e 4, porém não souberam o que fazer com seus cálculos. O trio apresentou dificuldades na hora de comparar as intensidades, ou seja, dificuldades em expressar a relação de comparação.

Após uma pequena intervenção para que comparassem as intensidades que estavam em escala logarítmica, pôde-se perceber que os alunos compreenderam a utilização da escala logarítmica.

g.2) Análise a Posteriori da 2ª atividade.

Essa atividade serviu para reforçar a compreensão da definição de escala logarítmica. Todos os trios tiveram êxito na resolução dessa atividade. Os alunos perceberam que poderiam saber quantas vezes um terremoto é maior que outro calculando a diferença das magnitudes dos dois terremotos.

Decorridos vinte minutos, a professora realizou a discussão da situação-problema com os trios. Pôde-se perceber que todos dos trios realizaram essa atividade com tranquilidade e firmeza.

g.3) Análise a Posteriori da 3ª atividade.

Com relação a atividade 3, pode-se observar que:

- a) Dos nove trios, três (60% dos alunos), resolveram tranquilamente os itens “a” e “b”, de maneira correta e com extrema segurança do que estavam fazendo.
- b) Dois trios resolveram o item (a) utilizando a fórmula da atividade anterior.

- c) Três trios resolveram sem maiores dificuldades.
- d) Um trio teve dificuldades na realização desse item.

Com relação ao item (c) dessa terceira atividade, destaca-se o trio C que após uma pequena intervenção, conseguiu resolver o item (c) e o trio B que mesmo com a intervenção da professora, não conseguiu resolver a questão. Embora o trio tenha utilizado corretamente a fórmula fornecida, houve grande dificuldade em determinar o valor de “x”. Essa dificuldade foi atribuída pelo trio à não percepção da propriedade do logaritmo de uma potência.

As atividades dessa sessão foram entregues aos trios uma a uma e a formalização foi realizada após o término dessas. Vinte minutos foram disponibilizados, logo após iniciou-se a discussão dos trios com a professora, que fez uso do quadro como recurso para corrigir as situações-problema apresentadas.

Pôde-se perceber, por parte dos alunos, uma certa euforia em verificar a utilidade dos logaritmos em várias situações (na química, física, biologia, etc.)

Trio C: essa a senhora tirou de um livro de geografia.

Trio D: isto é matemática ou química?

Trios B: esses logaritmos estão em todas...

5.3 SÍNTESE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Artigue (1986), a Engenharia Didática “caracteriza-se pelo estudo do caso onde a validação é essencialmente interna, prescindindo assim de análises comparativas entre a análise a priori e as análises a posteriori”.

Acredita-se que pelo fato de a própria professora pesquisadora ter conduzido a sequência de ensino, realizando todas as observações, essa tenha minimizado a quebra do contrato didático, já existente pela própria situação de pesquisa proposta aos alunos. Levando-se em consideração, a análise do conteúdo de logaritmos no ensino atual, e o resultado do teste diagnóstico, elaborou-se uma sequência didática, composta de situações-problemas e

outras atividades, visando proporcionar aos alunos condições para construção do conceito de logaritmo.

A análise dos resultados da aplicação da sequência didática mostrou uma melhor compreensão do conceito de logaritmo, também da função logarítmica por parte dos alunos, confirmando a primeira de nossas hipóteses. Ao aplicarmos a primeira sessão, pôde-se perceber que os alunos apresentaram interesse pelas atividades, pois a partir do momento em que eles compreendem a ligação do conteúdo a ser estudado com o contexto compreensível por eles, estes se sentiram mais dispostos a encarar os desafios de sala de aula.

Ao compararmos a análise a priori com a análise a posteriori da primeira sessão, pode-se observar que os alunos realizaram as duas atividades satisfatoriamente. Também observou-se que ao utilizar o software Winplot para a construção dos gráficos dos modelos matemáticos encontrados, esse proporcionou uma visualização favorável com relação aos pontos simétricos das funções logarítmicas e exponencial, uma vez que muitos alunos não lembravam do conceito de simetria, bem como proporcionou uma revisão de conceitos relacionados a funções, como por exemplo a leitura de gráficos, ou seja, intervalos de crescimento e decrescimento, interseção de eixos coordenados, domínio e imagem.

Ao comparar a análise a priori da 2ª sessão com a análise a posteriori, pôde-se observar que os objetivos também foram atingidos, as atividades propostas provocaram as aprendizagens almejadas.

Com relação à terceira sessão proposta, comparando-se as duas análises, foi possível verificar a existência de obstáculos à aprendizagem da função logarítmica, que era uma das questões de pesquisa a que nos propusemos verificar. O fato dos alunos confundirem o conceito de simétrico e inverso, configurou-se em um obstáculo epistemológico, mas que foi imediatamente sanado com a utilização do Winplot em que os alunos puderam visualizar o conceito de simetria. Em decorrência desse fato, não podemos nos esquecer que o aluno traz conhecimentos consigo e o professor deve levá-los em conta para que seus ensinamentos não se choquem frente as concepções dos alunos.

Ao serem comparadas as análises a priori e a posteriori da quarta sessão, pôde-se verificar uma grande autonomia por parte dos trios com relação a resolução dos problemas, isto é, os trios empenharam-se na busca de um modelo matemático, os alunos envolveram-se em uma tarefa cooperativa. Houve conflitos por parte de alguns membros do trio, durante a resolução das situações-problemas, porém essas divergências favoreceram a evolução das representações e dos conhecimentos. Pôde-se observar também que a partir do momento em que se trabalha com problemas reais, os alunos participam mais ativamente das discussões, fazendo inferências e tomando decisões.

Após a análise da quinta sessão, verificou-se que a segunda hipótese foi confirmada, relativa à história do surgimento dos logaritmos. Percebeu-se o quanto foi importante colocar nossos alunos a par das dificuldades da época, das tentativas e erros para se chegar a esta matemática de hoje que nos parece trivial. Com certeza, essa sessão favoreceu a compreensão do conceito de logaritmos.

Na sexta sessão, confrontando as análises a priori e a posteriori foi possível verificar que essas atividades propiciaram aos alunos a busca do conhecimento, colocando os alunos frente a uma situação que precisava ser resolvida. Os alunos envolveram-se, aceitaram o desafio e por esse motivo podemos afirmar que o desafio didático em propor uma atividade que impõe a cooperação dos membros do trio foi alcançada. Convém lembrar que fazer os alunos trabalharem em equipe não é fácil, não basta organizar trios, é preciso que a atividade exija discussão e cooperação entre os membros do grupo. Pôde-se observar que a atividade proposta nesta sessão propiciou que alunos mais autônomos cooperassem com colegas que precisavam aprender, desenvolvendo no grupo atitudes de solidariedade.

Ao compararmos a análise a priori e a análise a posteriori da sétima sessão, percebeu-se que os objetivos foram alcançados, pois os alunos resolveram as atividades com bastante propriedade, justificando corretamente todos os itens solicitados.

A seqüência apresenta uma abordagem diferente e direcionada à 1ª série do Ensino Médio, que além de introduzir o logaritmo como sendo necessário na resolução de equações exponenciais, também mostrou a necessidade desse conceito na construção de escalas logarítmicas. Foram trabalhados exercícios

de estimativa e explorou-se a construção do gráfico da função logarítmica, através da sua inversa, utilizando-se do software Winplot.

Acredita-se que os problemas contextualizados não devem surgir, somente no final desse conteúdo, como forma de justificar a aprendizagem é preciso que as situações-problemas estejam presentes sempre que possível, pois essas despertam nos alunos um interesse em resolvê-las. Nessa seqüência, esses problemas aparecem sempre que possível a fim de desempenhar uma ligação da matemática da sala de aula e a matemática da realidade.

Essa seqüência preocupou-se em sanar algumas dificuldades mais evidentes, tais como as relativas à compreensão e à aplicação do conceito de logaritmo, bem como a construção do gráfico da função logarítmica por meio do Winplot.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa foi realizado um estudo sobre a construção do conceito de logaritmo e da função logarítmica. Na intenção de propor melhorias com relação à compreensão desse conceito, foi aplicada uma seqüência didática referente a esse conteúdo. Primeiramente, realizou-se uma análise sobre a forma como esse conteúdo está sendo ensinado e foi aplicado um teste diagnóstico aos alunos da 1ª série do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria (CMSM), participantes dessa pesquisa, para detectar as dificuldades referentes aos pré-requisitos que servem de base ao estudo de logaritmo. Essas análises serviram de subsídios para construir uma seqüência didática de maneira a estar direcionada especificamente às necessidades dos alunos e a atender ao objetivo de analisar o aprendizado do aluno no domínio do conceito de logaritmos, por meio da realização de um estudo sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem desse conceito e propor alternativas para minimizar tais dificuldades, aplicando-a em sala de aula

Observou-se que os alunos envolveram-se em um trabalho interdisciplinar, buscando novas fontes de pesquisas, aprendendo a trabalhar em grupo, utilizando-se de uma ferramenta computacional para a construção de gráficos, como o programa Winplot, que é de fácil manuseio e dispensa o conhecimento de qualquer linguagem de computação. Além do mais, os alunos apresentaram uma motivação para trabalharem no laboratório de informática, onde suas ansiedades são supridas mais rapidamente.

Sabendo que construir o conhecimento é trabalhar as múltiplas informações disponibilizadas, pode-se concluir que as sessões elaboradas e aplicadas aos alunos da 1ª série do Ensino Médio do CMSM, possibilitaram a construção de vários conhecimentos, como a de escala logarítmica e a sua utilização para compreender e interpretar as medidas obtidas na Escala Richter sobre a intensidade de terremotos, *tsunamis* ou determinação do pH de uma solução.

O fato da seqüência didática elaborada contemplar a história do surgimento dos logaritmos de uma maneira natural, aproveitando e explorando algumas atividades relacionadas com as idéias que deram origem aos logaritmos, merece ser destacada positivamente, pois confirmou a primeira

hipótese dessa pesquisa. A linguagem coloquial utilizada permitiu aos trios trabalharem de maneira tranqüila, possibilitando a compreensão do surgimento do conteúdo. Os alunos puderam entender, através das atividades relacionadas aos aspectos históricos, o porquê da necessidade da simplificação de cálculos numéricos em uma época que não existia calculadora.

As situações de aprendizagem foram elaboradas de maneira que cada atividade da seqüência didática se constituísse em uma etapa progressiva, isto é, as atividades foram elaboradas com objetivos específicos a serem atingidos, de forma a colocar os alunos diante de um problema a ser resolvido. Algumas atividades foram mais simples e diretas, outras tiveram como objetivos despertar habilidades para selecionar informações, analisá-las e, a partir destas, tomar decisões que exigiram linguagem, procedimentos e forma de pensar matematicamente, porém todas as atividades favoreceram gradualmente a aprendizagem visada, a construção do conceito de logaritmo. A atividade relativa à construção da escala logarítmica foi elaborada com a intenção de favorecer a progressão das aprendizagens, ou seja, para que mais tarde os alunos pudessem trabalhar com a aplicação dessas escalas, bem como compreender as aplicações e utilidades desse conteúdo. Nessa sessão, a situação-problema oferecida aos alunos foi uma situação de caráter concreto e organizada em torno da resolução de um obstáculo previsto. Os alunos sentiram-se atraídos em resolvê-la, pois não a perceberam como fora de seu alcance, porém não dispunham de meios para buscar a solução, devido à existência de um obstáculo a transpor. Foram observadas, durante a resolução desta atividade, que os alunos utilizaram várias estratégias, levando os trios a investirem seus conhecimentos anteriores disponíveis como a definição de logaritmo. Em decorrência do acima exposto, confirmou-se a segunda hipótese.

As atividades desenvolvidas no laboratório de informática com o programa Winplot, possibilitaram a abordagem de alguns enfoques que em um ambiente só com lápis e papel não seria suficiente para a resolução, por exemplo, a construção de gráficos da função logarítmica, bem como a possibilidade de observar as translações sofridas por esses. Nessa sessão, os alunos puderam comprovar a simetria de dois pontos em relação à bissetriz

dos quadrantes ímpares e também a simetria da função exponencial e da função logarítmica. Foi muito importante para o grupo visualizar essa situação, pois, através desta, puderam compreender e discutir o conceito de simetria, dando prosseguimento às atividades da seqüência didática com mais segurança e propriedade.

Com relação à análise dos resultados da aplicação da seqüência didática, pode-se fazer as seguintes inferências:

Alguns alunos não sabem trabalhar em grupo, preferindo realizar as atividades individualmente. Quando surgem as dúvidas chamam a professora, não confiando nos colegas do trio.

Alunos que tem muitas dificuldades ou não gostam de matemática, preferem aulas expositivas.

Nas primeiras sessões da seqüência didática, os alunos de um modo geral, sentiram-se inseguros com relação a metodologia; porém logo compreenderam como deveriam desempenhar as atividades contando com o auxílio da professora sempre que necessitassem. Os alunos sentiram-se seguros com a formalização das atividades.

A maioria dos trios mostrou-se bastante motivada em resolver situações-problema das quais eles tinham certo conhecimento, situações desafiadoras e contextualizadas que estavam ao seu alcance e que traziam informações de caráter geral. Essas situações propiciaram o crescimento dos alunos e a aquisição de conhecimentos sobre o conteúdo.

Esse tipo de atividade levou alunos pouco interessados pela matemática a ingressar no grupo sem perceber; eles foram atraídos pela discussão acerca da situação-problema e, quando perceberam, já estavam envolvidos na resolução da atividade;

Muitos alunos passam a trabalhar de maneira mais autônoma, enquanto que outros aprendem a cooperar com o grupo;

Os alunos empenharam-se em pesquisar assuntos relacionados a terremotos e a *tsunamis*, dedicando-se a uma atividade de pesquisa. Com esse tipo de atividade teve-se a intenção de atribuir aos alunos uma responsabilidade maior na sua produção, no seu aprendizado, o que mais adiante veio a contribuir na compreensão da construção da escala logarítmica.

A experiência facilitou a compreensão dos alunos no que se refere ao conceito de logaritmo, bem como sua significação e aplicação.

A experiência realizada contribuiu para o desenvolvimento de uma unidade de ensino relacionada aos logaritmos, enriquecida com as atividades da seqüência didática construída.

A elaboração da seqüência didática permitiu a professora trabalhar de maneira direcionada aos objetivos específicos, dando ênfase à superação dos obstáculos e dificuldades encontradas no teste diagnóstico. A investigação aqui realizada, sob a ótica da Engenharia Didática, considerou o conteúdo de logaritmo de maneira a propor atividades para melhor compreensão deste conceito. O objetivo de propor alternativas por meio de uma seqüência didática para minimizar as dificuldades no que se refere à construção do conceito deste conteúdo foi atingido. Os alunos adaptaram-se ao método de ensino diferenciado, que permitiu a eles trabalharem de maneira mais autônoma, pois sabiam que ao final de cada sessão seria realizada a formalização de cada atividade.

A preocupação maior caracterizou-se na elaboração de atividades em que o conhecimento fosse produzido e não só transmitido, procurando dar significado ao conteúdo de logaritmo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. **Problemas y desafios en educacion matematica que nos ofrece hoy la didactica de las matematica para afrontarlos?** Paris: Université Paris 7, Denis Diderot, 1999.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: **Recherches em Didactique des Mathematiques**. v.9/3, Grenoble: La penseé sauvage, 1988.

ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis. **Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovavación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Bogotá: Pedro Gómez, 1995.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

———. **Epistemologia**. 2.ed. Org. Dominique Lecourt. Trad. Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1983.

BASTIAN, Irma Verri. **O Teorema de Pitágoras**. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Curso de Pós-Graduação em Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: PUC, 2000.

BECKER, Fernando. **Da ação à operação: o caminho da aprendizagem: J. Piaget e P. Freire**. Porto Alegre: EST: Palma Rinca: Educação e Realidade, 1993.

BOYER, C.B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretária de educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, 1999.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathematiques. In: **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v.7/2. Grenoble, 1986.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, Campinas, v.13, n.23, p.87-119, jan./jun. 2005.

CHAVES, João Gabriel. **Didática da Matemática**. Rio de Janeiro: Gráfica Olímpica, [19--].

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CUNHA, Maria I. **O bom professor e sua prática**. 6. ed. Campinas: Papirus, 1996. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. 12. ed. Campinas: Papirus, 2005. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

DEMO, Pedro. **Desafios modernos da educação**. Rio de Janeiro: Vozes, 1993.

DOMINONI; Nilcéia Regina Ferreira. **Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo funções exponenciais**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. De Higino H. Domingues. Campinas: Edit. Da UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, Dário; NACARATO, Adair M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática**. São Paulo: Musa; Campinas: GEPPM-PRAPM-FE/UNICAMP, 2005.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática da liberdade**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1967.

———. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro. Paz e Terra, 1970.

FREITAS, Maria T. A (Org.). **Vygotskyi um século depois**. Juiz de Fora: EDUFJF, 1998.

KALMAN, Dan. **Elementary mathematical models: order aplenty and a glimpse of chaos**. American Universit, 1997.

LIMA, Elon L. **Logaritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. (Coleção do Professor de Matemática).

MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

MIORIM, M. A; MIGUEL, A. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Campinas: Gráfica da Faculdade de Educação da UNICAMP/Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2001.

PAIS, Luis C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PARRA, Cecília et al. (Org.). **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Trad. Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PERRENOUD, Philippe. **Construir as competências desde a escola**. Tradução Charles Magne. Porto Alegre: Artes Médicas do Sul, 1999.

———. **Dez novas competências para ensinar**. Trad. Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas do Sul, 2000.

ROSA, S.B. **A integração do instrumento ao campo da engenharia didática**: o caso do perspectógrafo. Florianópolis, 1999. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC. Florianópolis, 1999.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. 2. ed. Campinas: Papirus, 2004. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente**: desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Michael Cole et al (Org.). Trad. José Cipolla Neto et al. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

ZUCHI, Ivonete. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática**: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional. Florianópolis: UFSC, 2005. Tese (Doutorado em Engenharia da Produção), Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Teste diagnóstico.

TESTE DIAGNÓSTICO

Este teste diagnóstico faz a parte de um projeto de pesquisa intitulada “*Uma seqüência de ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática*”. Estou em fase de elaboração de dissertação de mestrado e venho por meio deste, solicitar sua contribuição para o desenvolvimento desta pesquisa. Desde já lhe agradeço.

Nome:

Série:

Data:

Responda as questões abaixo, marcando um “x” na alternativa correta e, após justifique sua resposta.

1ª QUESTÃO: Se $1000 = 10^x$ então qual deve ser o valor de “x” ?

a. () $x = 10$

b. () $x = 2$

c. () $x = 3$

d. () $x = 4$

Justificativa:

2ª QUESTÃO: Sabendo-se que $E = 2 \cdot \left(16^{0,5} + 8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{32} \right)^{-0,2} \right)$ então o valor

de E é:

a. () 16

b. () 48

c. () 25

d. () 10

Justificativa:

3ª QUESTÃO: Um biólogo acompanhou o crescimento de uma planta aquática com forma circular. Durante suas observações, percebeu que a cada três meses o diâmetro da planta triplicava. No início das suas observações o biólogo mediu a planta e obteve 1 cm de diâmetro. Após 3 meses o diâmetro da planta media 3cm, após 6 meses, 9 cm e após 9 meses, 27 cm. Então podemos concluir que :

3.1 - Ao final de um ano o diâmetro da planta será:

- a. () 243 cm
- b. () 81 cm
- c. () 108 cm
- d. () 36 cm

Justificativa:

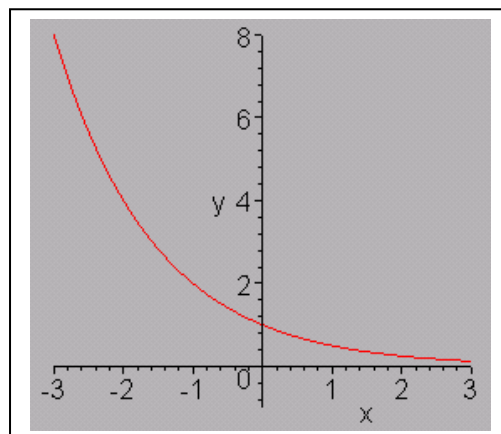
3.2 - Se, “t” indica o número de meses que a planta cresce, a expressão que fornece a medida do diâmetro é:

- a. () $y = t^3$
- b. () $y = 3^t$
- c. () $y = 3t$
- d. () $y = 3^{t/3}$

Justificativa:

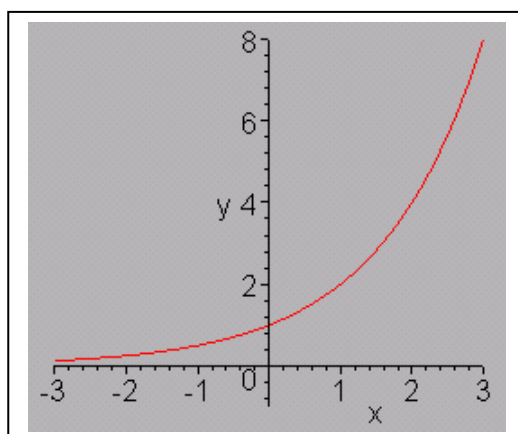
4ª QUESTÃO: O gráfico a seguir, representa uma função exponencial definida por $f(x) = r^x$. Então pode-se afirmar que:

- a. () $r > 1$ e $D(f) = \mathbb{R}$
 b. () $0 < r < 1$ e $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
 c. () $r > 1$ e $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
 d. () $0 < r < 1$ e $D(f) = \mathbb{R}$



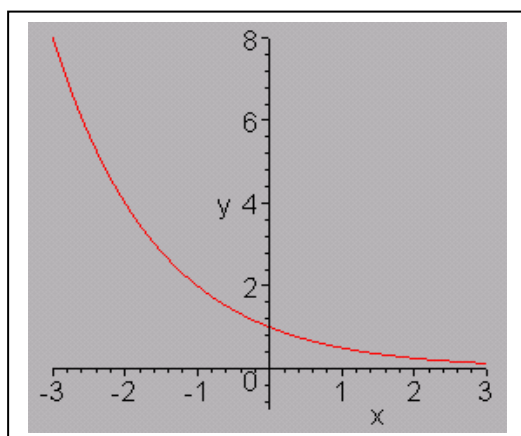
Justificativa:

5ª QUESTÃO - A figura abaixo mostra o gráfico da função $f(x)=2^x$.

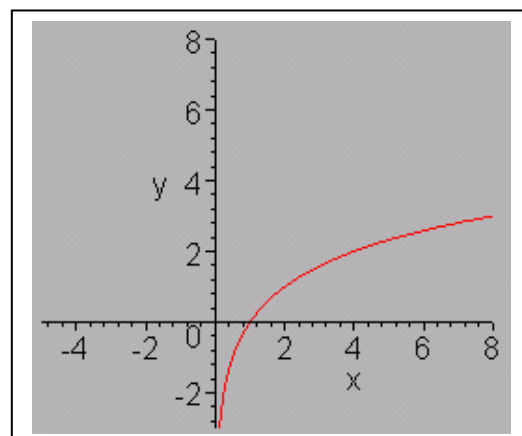


Marque o gráfico da função inversa acima e justifique sua resposta.

a.

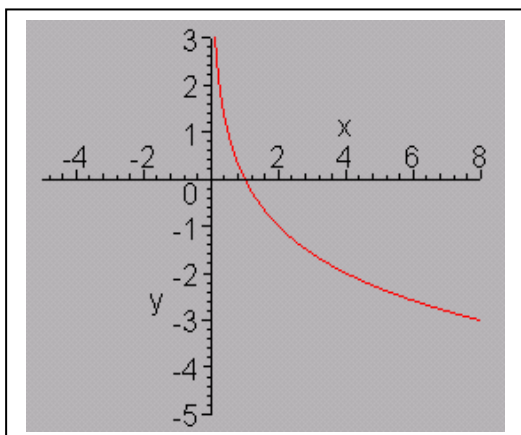


b.



c.

d. n.d.a



Justificativa:

6ª QUESTÃO: Num mapa desenhado na escala de $\frac{1}{5000000}$, a distância entre duas cidades é indicada por 4,7 cm, então pode-se afirmar que a distância real entre as duas cidades é:

- a. () 22.500 m
- b. () 225 km
- c. () 225 hm
- d. () 22.500cm

Justificativa:

7ª QUESTÃO:

7.1) Você sabe o que é um terremoto, ou um *tsunami*? Explique.

7.2) Você sabe como se mede a intensidade de um terremoto? Explique.

Obrigada pela colaboração.

APÊNDICE B – Pauta de observação.

Pauta de Observação

Turma: _____ Sessão de número: _____ Data: ____ / ____ / ____

Trio: _____

1) Atividade desenvolvida.

2) Orientação da professora.

3) Estratégia de Resolução dos alunos.

4) Dificuldades e ou erros apresentados pelos alunos.

5) Discussões pertinentes (perguntas que os alunos fizeram).

6) Colocações feitas pelos alunos (angústias, felicidade, ...)

7) Interações entre os alunos.

Observações pertinentes:

SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

1ª Sessão: CONSTRUINDO O CONCEITO DE LOGARITMO.

1ª ATIVIDADE

O Programa Espacial Brasileiro começou a ser projetado em 1961, quatro anos após o primeiro lançamento do satélite russo Sputnik 1. Nesses quarenta anos foram criados centros de pesquisas para o desenvolvimento de projetos espaciais que incluem a criação de foguetes, satélites e bases de lançamento. Hoje, várias instituições brasileiras, governamentais e privadas desenvolvem pesquisas na área de tecnologia espacial para a produção de foguetes e mísseis. Esses produtos podem ser fabricados com duas finalidades principais, para uso militar ou civil. A indústria bélica fornece equipamentos para as Forças Armadas Brasileiras ou busca exportar para o mercado internacional. Por outro lado, as tecnologias espaciais com fins pacíficos produzem sondas e satélites, que podem ser utilizados em diversas áreas da pesquisa científica como a meteorologia e o mapeamento geográfico. A base de lançamento desses foguetes localiza-se em Alcântara no estado do Maranhão que foi destruída em 2003 devido a um acidente.

Sabendo-se que um dos foguetes lançados nessa base percorreu uma distância de 10m em 1s, 100m em 2s e 1000m em 3s. Pergunta-se:

- f) É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a distância percorrida pelo foguete em função do tempo? Descreva essa lei de formação.
- g) Quantos metros o foguete percorreu em 8 segundos? Em 10 segundos?
- h) Quanto tempo foi necessário para o foguete percorrer 10.000 Km?

Além dessas indagações:

- i) Represente graficamente a função obtida na letra (a).
- j) Represente graficamente a inversa da função obtida no item (a).



2ª ATIVIDADE

As estimativas populacionais têm fundamental importância para o cálculo de indicadores sóciodemográficos nos períodos intercensitários, bem como alimentam as bases de informações de Ministérios e Secretarias Estaduais e Municipais da área social para a implementação de políticas públicas e a posterior avaliação de seus respectivos programas. Além disso, em cumprimento a dispositivo constitucional, as estimativas da população constituem o principal parâmetro para a distribuição conduzida pelo Tribunal de Contas da União, das quotas relativas ao Fundo de Participação de Estados e Municípios.

A população da cidade de Santa Maria - RS no ano 2000 era de aproximadamente 243 mil habitantes (Fonte: IBGE) e está crescendo a uma taxa média anual de 1,8%. Pergunta-se:

- a) Qual era a população estimada da cidade em 2001? Em 2003? Em 2005? Para 2006, 2008 e 2010 qual será a população estimada?
- b) É possível estabelecer uma lei de formação para calcular a população da cidade em qualquer ano? Em caso afirmativo, descreva a lei.

- c) Represente graficamente a função obtida na letra (b).
- d) Quantos anos são necessários para a população da cidade duplicar?
- e) Quando a população da cidade será de aproximadamente 291 mil habitantes?
- f) Represente graficamente a inversa da função obtida no item (b) .

2ª Sessão: USANDO A DEFINIÇÃO DE LOGARITMO.

1ª ATIVIDADE

Escrever cada equação na forma exponencial equivalente.

- a) $\log_5 x = 2$
- b) $\log_b 64 = 3$
- c) $\log_3 7 = y$
- d) $\log_{10} 10 = c$

2ª ATIVIDADE

Escrever cada equação na forma logarítmica equivalente.

- a) $12^2 = x$
- b) $b^3 = 8$
- c) $2^y = 9$
- d) $3^c = 3$

3ª ATIVIDADE

Determinar o valor do logaritmo e justificar sua resposta.

- a) $\log_2 16 =$
- b) $\log_3 9 =$
- c) $\log_{25} 5 =$

4ª ATIVIDADE

Sem usar a calculadora, faça uma estimativa do intervalo que se encontra o logaritmo, na base 10, dos seguintes números abaixo.

- a) 1543

b) 15,43

c) 0,1543

5ª ATIVIDADE

1) Utilizando a definição, determine o valor dos logaritmos abaixo, e conclua a propriedade utilizada.

a) $\log_2 4 =$

$\log_2 8 =$

$\log_2 4 + \log_2 8 =$

$\log_2 4 \cdot 8 =$

b) $\log_3 3 =$

$\log_3 9 =$

$\log_3 3 + \log_3 9 =$

$\log_3 3 \cdot 9 =$

Que conclusão pode-se obter analisando os resultados da letra (a) e (b)?

R: _____.

c) $\log_2 \frac{16}{4} =$

$\log_2 16 - \log_2 4 =$

d) $\log_5 \frac{125}{5} =$

$\log_5 125 - \log_5 5 =$

Que conclusão pode-se obter analisando os resultados das letras (c) e (d)?

R: _____.

e) $\log_2 7^3 =$

f) $\log_2 2^3 =$

Que conclusão pode-se obter analisando os resultados das letras (e) e (f)?

R: _____.

3ª Sessão: CONSTRUINDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA.

1ª ATIVIDADE

Considere as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$

- Construir uma tabela de valores para $f(x)$, considerando $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ e uma tabela para a função $g(x)$ para $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$.
- Compare os valores de “x” da primeira tabela e os valores de $g(x)$ da segunda tabela. Compare também, os valores de “x” da segunda tabela e os valores de $f(x)$ da primeira tabela. Quais são suas conclusões? Justifique.
- Use o programa Winplot para traçar o gráfico das duas funções no mesmo plano cartesiano.
- Trace onde se localiza a bissetriz do 1º quadrante, no gráfico das funções f e g , e identifique os pontos $(x, f(x))$ e $(x, g(x))$ das tabelas construídas no item (a).
 - Esses pontos são simétricos em relação à bissetriz do 1º quadrante?
 - Os gráficos das funções f e g são simétricos em relação a bissetriz do 1º quadrante? Justifique.
- Analisando o gráfico determine o domínio e o conjunto imagem das funções f e g .
- Verifique se as funções f e g são crescentes.

2ª ATIVIDADE

Considere as funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

- a) Trace o gráfico das duas funções f e g no mesmo sistema de eixos coordenados.
- b) Determine o domínio e o conjunto imagem das funções f e g .
- c) Trace a bissetriz do 1º quadrante e verifique se os gráficos das funções f e g são simétricos em relação a ela. Descreva suas conclusões.
- d) As funções f e g são crescentes ou decrescentes?
- e) Comparando as bases das funções da atividade 1 e da atividade 2 o que você pode concluir sobre o crescimento ou decrescimento das funções?

3ª ATIVIDADE

A função inversa de $f(x) = e^x$ é a função $g(x) = \log_e x = \ln x$. A notação $\ln x$ é utilizada para designar o logaritmo de um número na base “e”. Esse logaritmo é denominado logaritmo neperiano de x ou logaritmo natural em homenagem ao matemático Napier. Uma aproximação do número “e” é obtida calculando-se $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para diferentes valores de n , sendo n qualquer valor real.

- a) Com o auxílio do programa Winplot, trace no mesmo sistema de coordenadas, o gráfico da função $f(x) = e^x$ e de sua inversa.
- b) Calcule o valor da expressão acima para os seguintes valores de $n = 1; 5; 10; 20; 50; 100; 500; 1000; 10.000$. Utilize uma calculadora científica e verifique o que ocorre com a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- c) Qual é o domínio e o conjunto imagem da função $g(x) = \ln x$?
- d) A função $g(x) = \ln x$ é crescente? Justifique sua resposta.

4ª Sessão – RESOLVENDO PROBLEMAS.

1ª ATIVIDADE

Foi apresentado aos alunos um texto do Jornal Correio do Povo, referente à Exportação de Carne Bovina.

EXPORTAÇÃO DE CARNE BOVINA SOBE 71% NO RS

A exportação de carne bovina gaúcha está aumentando. Para manter o ritmo, porém, a produtividade do rebanho terá de crescer nas mesmas taxas. Segundo o Ministério da Agricultura, os embarques cresceram 71% em receita para 144,3 milhões de dólares, e 36,2% em volume, para 58,8 mil toneladas, de janeiro a julho, na comparação com o mesmo período de 2005. Com as boas perspectivas de exportação, o Estado vem atraindo novas plantas frigoríficas. Contudo, o presidente do Sindicato da Indústria de Carnes e Derivados do RS (Sicadergs), Ronei Lauxen, vê com preocupação os empreendimentos. Se os novos projetos não forem acompanhados de aumento do rebanho, a escassez de animais poderá frear o aumento dos embarques. Desde 2003, o rebanho do RS se estabilizou em 14 milhões de cabeças (CORREIO DO POVO; 2006).

Ainda nesta reportagem, tem-se que um dos grandes pecuaristas do Estado do RS, cria gado Limousin, de origem francesa, em uma fazenda de 1,3 mil hectares e sua empresa, deverá entregar 16 mil cabeças ao frigorífico até o final deste ano. Seus bois são abatidos em média aos 24 meses. A precocidade é semelhante à conseguida por outros pecuaristas. De acordo com ele, cerca de 95% da carne produzida por seu rebanho são exportadas para países do Oriente Médio e Norte da África. O Egito está entre os principais clientes.

Num sistema de engorda de gado da raça Limousin, em regime de confinamento, cada animal tem um ganho de peso de 10% ao mês. Pergunta-se:

- a) Qual é o tempo aproximado necessário para que o animal dobre de peso?
- b) Em geral um animal é vendido para abate com aproximadamente 400Kg. Se um animal pesa aproximadamente 248 Kg, quanto tempo é necessário para que ele atinja o peso ideal para o abate?

2ª ATIVIDADE

Durante o primeiro semestre você economizou R\$ 500,00 e agora quer aplicar num fundo de aplicação que rende, em média, 1,5% a.m. Em quantos meses, você terá no mínimo R\$ 1.200,00? Utilize uma calculadora científica para realizar os cálculos necessários.

3ª ATIVIDADE

Se você ganhar na loteria R\$ 800,00 e aplicar num banco com juros compostos à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R\$ 700,00?

5ª Sessão: A HISTÓRIA E O SURGIMENTO DOS LOGARITMOS.

1ª ATIVIDADE

Foi distribuído aos alunos o texto a seguir:

A História da Matemática relata que John Napier interessava-se por resolver problemas de sua época, principalmente os relacionados à matemática. Nesse tempo, muitos já vinham tentando achar um processo que permitisse reduzir operações de multiplicação e divisão ou de potenciação e radiciação em operações mais simples como a adição e a subtração. Assim aconteceu com John Napier e Jost Bürgi que publicaram as primeiras tábuas de logaritmos.

Napier ao comparar os termos de duas seqüências, por exemplo:

2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

notou que existem números que podem ser expressos como produto de outros números. Ao observar as seqüências acima, Napier percebeu que para multiplicar dois termos da primeira seqüência, bastava somar os seus correspondentes na outra seqüência e ver qual o termo da primeira seqüência que corresponde a essa soma. Ele também observou que para realizar o produto de $8 \cdot 64$ bastava somar $3 + 6 = 9$, ou seja, os seus correspondentes na segunda seqüência e encontrar o termo da primeira que corresponde ao 9.

Neste caso, é o 512. Com esse raciocínio John Napier e Jobst Burgi, publicaram as primeira tábuas de logaritmos.

Observando as seqüências abaixo,

3 9 27 81 243 729 2187 6561 19683 ...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...

e usando as idéias de Napier, pergunta-se:

- Qual é o produto de 9 por 81 ? E o de 27 por 243? Justifique sua resposta.
- Qual é a divisão de 19683 por 2187? Justifique sua resposta com base no método de Napier.
- Qual é o resultado de 27 elevado ao quadrado? Justifique sua resposta.

6ª Sessão: CONSTRUINDO UMA ESCALA LOGARÍTMICA.

1ª ATIVIDADE

Nessa primeira atividade, a professora solicitou aos alunos que pesquisassem na internet, ou em jornais, revistas, livros, como se formam os *tsunamis*, quais as causas de um terremoto, como se mede a intensidade dos terremotos, para que serve a escala Richter e como se interpretam as medidas determinadas por essa escala. Para que os alunos sentissem a necessidade de construir uma escala logarítmica foi apresentado o seguinte problema:

- Representar sobre uma reta o número de elementos que compõe uma família de 4 pessoas, uma classe escolar com 30 alunos, uma escola com 4.000 alunos, uma cidade com 20.000 pessoas, uma região urbana com 5.000.000 de habitantes e a população de 250.000.000 de habitantes de um país.
- Construir o gráfico de $y = 10^x$.
- Construir o gráfico de $y = 10^x$ em escala logarítmica, $\log y = x$ e estabelecer a relação entre os dois gráficos.

7ª Sessão: PROBLEMAS ENVOLVENDO ESCALA LOGARÍTMICA.

1ª ATIVIDADE

A primeira atividade foi proposta aos alunos usando o material pesquisado por eles mesmos, em revistas, internet, jornais, etc... A partir desse material, foram extraídas as informações sobre a escala Richter.

Ela foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg. É uma escala logarítmica de medição da energia liberada durante os terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre, construída utilizando-se o logaritmo decimal. Os valores desta escala são chamados de magnitude. A escala Richter é também utilizada para medir a intensidade de um terremoto, baseada na idéia de um valor inicial mínimo correspondente à intensidade do abalo sísmico, denotado por I_0 . Sendo uma escala logarítmica, a variação de um ponto a outro significa um aumento 10 vezes maior. Por exemplo, se um terremoto teve magnitude 2 e o outro magnitude 3, significa que o segundo foi 10 vezes mais potente que o primeiro.

Se “I” indica a intensidade de um terremoto, a escala Richter relaciona a magnitude “M” do terremoto, com sua intensidade, isto é,

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

- Se o terremoto que destruiu São Francisco em 1906 teve uma intensidade $10^{8,3} I_0$ qual foi sua magnitude na escala Richter?
- Se a medida de um terremoto teve magnitude 2 e outro magnitude 4, eles têm a mesma intensidade?
- Faça uma pesquisa, na Internet, sobre a magnitude do terremoto que causou ondas gigantescas (*tsunami*) em dezembro de 2004.

2ª ATIVIDADE

Essa atividade também foi realizada utilizando-se as informações pesquisadas pelos trios sobre terremotos e como eles ocorrem. Terremoto (ou terramoto ou sismo) é um fenômeno de vibração brusca e passageira da superfície da Terra, resultante de movimentos subterrâneos de placas rochosas, de atividade vulcânica, ou por deslocamentos de gases no interior

da terra, principalmente metano. O movimento é causado pela liberação rápida de grandes quantidades de energia na forma de ondas sísmicas. A maior parte dos terremotos ocorre nas fronteiras entre placas tectônicas, ou falhas entre dois blocos rochosos. O comprimento de uma falha pode variar de alguns centímetros até milhares de quilômetros. Para ter-se idéia da intensidade de alguns terremotos, se fosse liberado um cubo de granito, com 2 km de aresta, de uma altura de 280 km sobre a terra, a energia liberada durante o impacto, seria de 20 trilhões de kWh. O terremoto que destruiu Lisboa, em 1755, liberou energia equivalente a 350 trilhões de kWh.

A tabela abaixo fornece a magnitude de alguns terremotos acontecidos neste planeta e as suas respectivas intensidades, medidas de acordo com a escala Richter.

Tabela 6 – Magnitude de terremotos e suas respectivas intensidades.

LOCALIZAÇÃO	DATA	LEITURA NA E.RICHTER
Chile	1960	8.4
Alasca	1964	8.5
Peru	1970	7.7
Irã	1990	7.3
Cidade do México	1985	8.1
Armênia	1989	6.9
São Francisco	1989	7.1

- Calcule, aproximadamente, quantas vezes a intensidade do terremoto que atingiu a Cidade do México, em 1985, foi maior que a intensidade do terremoto que atingiu a Cidade de São Francisco, em 1989.
- Explique qual o significado físico da variação de um ponto nessa escala de medida.

3ª ATIVIDADE

Inicialmente os alunos pesquisaram a respeito do pH, em livros, jornais e na internet, conversaram também com a professora de química sobre o

significado do pH de algumas soluções e como se realizam essas medidas. A partir dessas informações, foi elaborado o seguinte problema:

Em química, o pH de soluções é uma medida da sua acidez ou alcalinidade. O pH de uma solução varia de 0 a 14 numa escala logarítmica. Um valor de pH igual a 7 indica que a solução é neutra (nem ácida nem alcalina). Um pH abaixo de 7 indica acidez e, acima de 7 alcalinidade. A medida do pH obedece, também, a uma escala logarítmica onde a variação de uma unidade de pH representa um aumento de 10 vezes na acidez ou alcalinidade da substância. A tabela a seguir indica o pH de algumas substâncias.

Tabela 7 – pH de algumas substâncias.

Substância	pH
Suco de Limão	2.1
Suco de Tomate	4.1
Água de Torneira	5.8
Leite	6.6
Leite de Magnésia	10.0

- Observando a tabela acima, calcule, aproximadamente, quantas vezes o suco de limão é mais ácido do que o leite?
- Quantas vezes o Leite de Magnésia é mais alcalino que uma solução neutra?

A chuva ácida é hoje em dia um grande problema para a natureza. A poluição do ar causada pela queima de petróleo ou queima de carvão é uma das causas da chuva ácida. Ela prejudica o solo, as florestas, os rios, as plantações, causando sérios prejuízos à saúde dos seres vivos e ao meio ambiente.

Sabendo-se que o pH de uma solução é dado por $\text{pH} = -\log x$, onde “x” representa a concentração de íons de hidrogênio em mols por litro de solução, pergunta-se:

- Qual é a concentração de íons de hidrogênio de uma chuva ácida cujo pH é 4,5?

4ª ATIVIDADE

De acordo com (GASPAR, 2002), é utilizada a grandeza Intensidade para determinar a energia com que uma onda sonora atravessa uma região e para medi-la, é utilizada a unidade de intensidade w/m^2 , isto é, Watts por metro quadrado. Ainda, segundo o autor, a intensidade sonora assim definida é diferente da intensidade sonora que o ouvido humano percebe, pois o ouvido humano reduz drasticamente a intensidade sonora que ele detecta.

A intensidade sonora percebida pelo sistema auditivo humano dá-se o nome de Nível de Intensidade. Para o ser humano, a intensidade sonora mínima percebida é em média, $I_0 = 10^{-12} \text{w/m}^2$ para uma frequência de 1.000 Hz.

O nível de intensidade sonora é medido em decibéis, indicado por db.

Como o nível de intensidade varia em escala logarítmica, os sons cuja intensidade são 10^n vezes maior do que a intensidade mínima I_0 , são percebidos com nível de intensidade “n” vezes maior.

- a) De acordo com os dados, o nível de intensidade no limiar da audição é 0 db. Calcule qual é a intensidade (I_0) do som correspondente a esse nível de intensidade?
- b) O nível de intensidade de uma conversação normal (a 1 m de distância) é de 60 db. Calcule qual é a intensidade (I_{60}) sonora correspondente a este nível de intensidade?
- c) Cientistas afirmam que a partir de 120 db, o som provoca dor e a partir de 160 db pode haver ruptura do ouvido humano. Calcule qual é a intensidade sonora (I_{120}), correspondente ao nível de intensidade 120 db?

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)