

FORMULAÇÕES NÃO-CONVENCIONAIS DE MÉTODOS DO TIPO *MESHLESS*
BASEADOS NA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Leonardo de Souza Miers

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

Dra. Solange Guimarães, D.Sc.

Prof. José Antônio Marques Carrer, D.Sc.

Prof. Delfim Soares Junior, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MIERS, LEONARDO DE SOUZA

Formulações não-convencionais de métodos do tipo *meshless* baseados na equação integral de contorno [Rio de Janeiro] 2007

IX, 103 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 2007)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Equação integral de contorno
2. Métodos do tipo *meshless*
3. Função de Green numérica
4. Mecânica da fratura
5. Plasticidade
6. Materiais funcionalmente graduados

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À Marianne, minha esposa,
Vania, minha mamãe, minha
vó Livinha e meu vô Paulo
(saudades...).

AGRADECIMENTOS

Ao Telles, por nunca ter sido somente meu orientador, mas também meu grande amigo durante nossa jornada começada no mestrado em 2002. Obrigado pelos nossos produtivos minutos diários de pesquisa e por nossas horas diárias de conversas sobre música, programas de computador, hobbies, família, problemas e tantas outras coisas que nem me lembro agora.

Aos demais professores do LAMEC, Santiago, Webe e Carrer (uma vez LAMEC, sempre LAMEC), pelas conversas inspiradoras, pelo incentivo e pela amizade que desenvolvemos.

A todos os que passaram pela I-200 ao longo de meus momentos lá: Cleberson, Cláudio, Delfim, Carlos Andrés, Natália, Jan, Thilene, Wellington, Cid, Pinheiro, Manoel, Ana Ibis, Katia, Edmundo, André Fraga, Ivone e todos os outros que minha “prodigiosa” memória impediu de citar.

Aos funcionários da secretaria do PEC, em especial Beth, Rita e Jario, pela ajuda em todos os momentos necessários.

A todos os outros que, de alguma forma, ajudaram-me nesta longa e recompensadora jornada ...

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários
para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

FORMULAÇÕES NÃO-CONVENCIONAIS DE MÉTODOS DO TIPO *MESHLESS*
BASEADOS NA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Leonardo de Souza Miers

Outubro/2007

Orientador: José Claudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo trazer para o contexto de formulações sem malha de elementos baseadas na equação integral de contorno, ferramentas já consagradas do Método dos Elementos de Contorno para a análise de problemas elastoplásticos, de mecânica da fratura elástica e em meios heterogêneos.

As teorias de cada uma destas aplicações são apresentadas em detalhe. Na elastoplasticidade, é apresentado um algoritmo implícito inovador, sendo o primeiro independente de critério de escoamento já proposto. A análise de problemas de mecânica da fratura elástica é feita utilizando-se a Função de Green Numérica. A aplicação em meios heterogêneos é voltada para a elasticidade em materiais de propriedades gradualmente variáveis.

Ao final, são apresentados resultados comparados aos obtidos a partir de técnicas de eficiência reconhecida.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

NON-CONVENTIONAL FORMULATIONS ON MESHLESS METHODS BASED
ON THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATION

Leonardo de Souza Miers

October/2007

Advisor: José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

This work aims in introducing in the context of boundary integral equation meshless formulations well-established Boundary Element Method tools for elastoplastic, elastic fracture mechanics and heterogeneous media elasticity problems.

These theories are presented in detail. In elastoplasticity, an innovative implicit algorithm is presented, which is the first yield criteria-independent one ever proposed. The elastic fracture mechanics analysis uses the Numerical Green's Function approach. The application in heterogeneous media is turned to elasticity in functionally graded materials.

Some results are compared with the ones obtained with efficiency-recognized techniques and presented at the end.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1. Métodos sem malha: uma evolução natural	1
1.2. Funções de Green aplicadas à mecânica da fratura elastostática	3
1.3. Meios heterogêneos e materiais de propriedade gradualmente variáveis	6
1.4. Equações integrais aplicadas à plasticidade	8
1.5. Objetivos	10
1.6. Organização dos capítulos	10
CAPÍTULO 2 – FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA ANÁLISE DE TENSÕES	12
2.1. Introdução	12
2.2. Teoria da elasticidade	12
2.3. Plasticidade	15
2.4. Critérios de escoamento	18
2.5. Formulações deformações iniciais e tensões iniciais	20
2.6. Identidade de Somigliana para deslocamentos	21
2.7. Equação integral de contorno	27
2.8. Tensões em pontos internos	29
2.9. Formulação hipersingular para elasticidade	32
2.9.1. <i>Equação integral hipersingular para pontos internos</i>	32
2.9.2. <i>Equação integral hipersingular para contorno externo</i>	33
CAPÍTULO 3 – FORMAS DE IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO INTEGRAL DO CONTORNO	34
3.1. Introdução	34

3.2. <i>Moving Least-Squares (MLS)</i>	34
3.3. <i>Orthogonal Moving Least-Squares (OMLS)</i>	40
3.4. Interpolação de grandezas no contorno	41
3.5. Descontinuidades no contorno	43
3.6. Descontinuidades no domínio	43
3.7. Método da Equação Integral de Contorno Local – LBIE	44
3.8. <i>Boundary Element-Free Method</i> – BEFM	48
CAPÍTULO 4 – FUNÇÃO DE GREEN NUMÉRICA PARA PROBLEMAS DE	
MECÂNICA DE FRATURA	
4.1. Introdução	53
4.2. Função de Green	53
4.3. Solução do problema complementar	54
CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	
EM PROBLEMAS ELASTOPLÁSTICOS	
5.1. Introdução	61
5.2. Equações constitutivas da plasticidade	61
5.3. Procedimentos da implementação	64
CAPÍTULO 6 – APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	
EM MEIOS HETEROGÊNEOS	
6.1. Introdução	69
6.2. Equações constitutivas	69
6.3. Procedimentos da implementação	70
CAPÍTULO 7 – RESULTADOS	
7.1. Introdução	72
7.2. Mecânica da fratura	72

7.2.1. <i>Abertura de trinca e concentração de tensões</i>	72
7.2.2. <i>Fator de intensidade de tensões K_I</i>	74
7.2.3. <i>Fator de intensidade de tensões K_{II}</i>	76
7.3. Meios heterogêneos	77
7.3.1. <i>Deslocamentos na direção x</i>	77
7.3.2. <i>Tensões e deslocamentos</i>	79
7.4. Plasticidade	81
7.4.1. <i>Bloco retangular comprimido</i>	81
7.4.2. <i>Chapa perfurada</i>	84
7.4.3. <i>Sapata em base flexível</i>	86
CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES	89
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93
APÊNDICE A – TENSÕES EM PONTOS DO CONTORNO	100
APÊNDICE B – POLINÔMIOS DE LAGRANGE	102

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1. Métodos sem malha: uma evolução natural

Os problemas de mecânica computacional se tornam mais desafiadores a cada dia. Por exemplo, na simulação de processos industriais como extrusão e modelagem, é necessário lidar com grandes deformações da malha enquanto na computação de processos de fundição, a propagação das interfaces entre sólidos e líquidos são cruciais. Em simulações de processos de colapso, é necessário modelar a propagação de trincas com caminhos arbitrários e complexos. No desenvolvimento de materiais avançados, são necessários métodos que possam localizar o crescimento dos limites das fases e da extensão dos trechos onde haja microfraturas.

Estes problemas não são apropriados para a análise através de métodos computacionais convencionais como o Método dos Elementos Finitos – MEF, Método dos Volumes Finitos – MVF, Método das Diferenças Finitas – MDF, ou até para o Método dos Elementos de Contorno – MEC. A estrutura subjacente destes métodos se baseia na utilização de malhas de elementos e esta característica faz com que eles não sejam apropriados para o tratamento de descontinuidades que não coincidam com as linhas das malhas originais. Assim, a estratégia mais viável para lidar com descontinuidades móveis em métodos baseados em malhas é a de se gerar uma nova malha em cada passo da análise, de forma que as linhas da malha permaneçam coincidentes com as descontinuidades ao longo da evolução do problema. Esse processo é comumente chamado de *remeshing* e o custo computacional associado a ele é normalmente alto. Além disso, a possibilidade de geração de elementos degenerados é também alta, o que em certos casos inviabiliza o procedimento.

O objetivo dos métodos sem malha, ou do tipo *meshless*, é eliminar parte desta estrutura, pelo menos construindo a aproximação completamente em termos de pontos. Embora em muitos desses métodos haja a utilização de malhas em pelo menos algumas partes do domínio do problema, as descontinuidades móveis podem ser tratadas normalmente sem a necessidade de se gerar uma nova malha de elementos, acarretando uma menor degradação na precisão. Assim, é possível resolver problemas inadequados para a análise via métodos baseados em malhas.

O primeiro trabalho publicado em métodos desta natureza tinha como objetivo a modelagem de fenômenos astrofísicos no espaço infinito, tais como supernovas e nuvens de poeira (LUCY, 1977). Comparando-se com outros métodos, num tempo de pesquisadores prolíficos, a quantidade de publicações nesse tema foi modesta durante muitos anos. Recentemente, mais precisamente a partir da década de 90 do século passado, houve um grande desenvolvimento na pesquisa em métodos sem malha, nos quais se destacam:

- Métodos dos Elementos Difusos – DEM, do inglês *Diffuse Element Method* (NAYROLES et al., 1992), que foi onde se utilizou pela primeira vez a interpolação MLS (do inglês *Moving Least-Squares*), este dependendo apenas das posições relativas dos pontos utilizados, em métodos para a solução de equações diferenciais parciais (LANCASTER e SALKAUSKAS, 1981),
- Método de Galerkin Livre de Elementos – EFG, do inglês *Element-Free Galerkin* (BELYTCHKO et al., 1994), que é um aperfeiçoamento do DEM,
- Método do Nó de Contorno – BNM, do inglês *Boundary Node Method* (MUKHERJEE e MUKHERJEE, 1997),
- Método Local de Petrov-Galerkin Sem Malha – MLPG, do inglês *Meshless Local Petrov-Galerkin* (ATLURI e ZHU, 1998), e

- *Boundary Element-Free Method* – BEFM (KITIPORNCHAI *et al.*, 2006).

A partir do DEM, todos os métodos desenvolvidos utilizaram no esquema de aproximação adotado funções de base radial, sendo o MLS e suas variações os mais comuns.

A característica comum a todos estes métodos recentemente desenvolvidos, e que claramente se tornou uma tendência em termos de pesquisa, é o fato deles se basearem em formulações desenvolvidas inicialmente para a utilização em conjunto com esquemas de interpolação que utilizam malhas de elementos. Tanto o DEM quanto o EFG são baseados na formulação clássica do MEF, diferindo dele basicamente apenas no esquema de interpolação utilizado. O BNM e o BEFM têm como ponto de partida a formulação básica do MEC, sendo que eles diferem entre si e do próprio MEC apenas no esquema de interpolação. Já o MLPG possui variantes baseadas tanto no MEF (ATLURI e ZHU, 1998) quanto no MEC (ZHU *et al.*, 1998), sendo esta última também conhecida como Método da Equação de Contorno Local – LBIE, do inglês *Local Boundary Integral Equation*.

1.2. Funções de Green aplicadas à mecânica da fratura elastostática

O acontecimento de várias catástrofes, aparentemente sem causas conhecidas, entre meados do século XIX e início do século XX, gerou a necessidade de se aprimorar as técnicas construtivas e de ensaios existentes, além de se descobrir novas teorias mais consistentes com a realidade. Com isso, a mecânica da fratura surge na engenharia estrutural a partir do início do século XX, com INGLIS (1913) e GRIFFITH (1924), como tentativa de se explicar parte das causas das antes inexplicáveis catástrofes. Seu desenvolvimento nos últimos 50 anos se deu a partir de IRWIN (1957).

A partir destes estudos, concluiu-se que o colapso da grande maioria das estruturas envolvidas se deu por fissuração ou fratura devido a grandes concentrações de tensões que ocorriam em circunstâncias específicas, entre as quais pode-se citar:

- Falhas internas, denominadas trincas ou fissuras,
- Defeitos de fabricação em decorrência de má execução de soldagem, usinagem ou corte,
- Tratamento térmico incorreto.

Quanto à forma, a ruptura por fratura pode ser frágil, na qual ocorre pouca ou nenhuma deformação plástica, levando ao colapso inesperado e sem indícios aparentes, ou dúctil, na qual ocorrem grandes deformações antes da ruptura total da estrutura, e por isso fazendo com que esta seja previsível (ABM, 1982).

As equações integrais de contorno, principalmente na forma do MEC, são comumente aplicadas a problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica – MFLE, e atualmente existem diversas propostas a fim de evitar problemas de integração nas faces coincidentes da trinca. São utilizadas predominantemente quatro formulações para resolver problemas da MFLE com o MEC: Método da Descontinuidade dos Deslocamentos, Técnica das Sub-regiões, Formulação Mista e Função de Green Analítica e Numérica (NGF, do inglês *Numerical Green's Function*).

O Método da Descontinuidade dos Deslocamentos, introduzido por CROUCH (1976), é uma formulação baseada na solução elástica fundamental de um meio infinito submetido a uma descontinuidade de deslocamentos em uma superfície em meio infinito. GUO et al. (1990) consideram esta característica uma grande vantagem, pois a solução analítica apresenta resultados precisos próximos à ponta da fissura.

A Técnica de Sub-regiões (BLANDFORD et al., 1981, WEEËN, 1983) consiste em separar o domínio em regiões distintas, de tal forma que cada face da trinca pertença a um sub-domínio, sempre com a preocupação de compatibilizar as forças e deslocamentos nas interfaces das sub-regiões. Isto gera uma indesejável aproximação em pontos do domínio, que agora pertencem a elementos de contorno fictícios assim criados.

No terceiro procedimento, as equações integrais de contorno clássica e hipersingular são aplicadas a cada uma das faces da fissura. A formulação clássica, quando empregada isoladamente aos problemas trincados, não obtêm êxito, já que a mesma degenera o sistema algébrico de equações. O estudo da representação da trinca através das duas formulações, independentemente, é amplamente discutido em GUIMARÃES (1992). Esta técnica denomina-se Formulação Mista ou Dual (MARTHA et al., 1992, PORTELA et al., 1992, GUIMARÃES et al, 1994 e CHEN et al, 1995).

A formulação baseada nas Funções de Green é mais precisa que as demais, pois estas funções são soluções fundamentais para deslocamento e força de superfície que contemplam domínios com trincas embutidas. CASTOR (1993) e TELLES et al. (1995) apresentaram as Funções de Green Numéricas (FGN) bidimensionais aplicadas a problemas com trincas retas horizontais simples, múltiplas e de bordo. Esta técnica gera, com boa aproximação, a solução fundamental para deslocamentos e forças de superfície do problema e é introduzida através da associação de uma parte complementar à conhecida solução fundamental de Kelvin (TELLES, 1983).

SILVEIRA (1996) e SILVEIRA et al. (1998) estenderam estes trabalhos a casos planos com fissuras de geometria qualquer (trincas semicirculares, quadráticas, cúbicas e mistas). BARRA (1996), BARRA et al. (1999) e VERA-TUDELA (2003) aplicaram a

NGF a problemas elastodinâmicos descritos tanto no domínio da frequência como no domínio transformado de Laplace, sendo que em VERA-TUDELA (2003) são utilizados procedimentos de Dupla Reciprocidade e o Método da Quadratura Operacional.

Em 1999, FIGUEIREDO aplicou a técnica de obtenção da FGN para análise de placas com fissuras, no domínio da MFLE, utilizando a teoria de Reissner e CASTOR desenvolveu soluções fundamentais da FGN para problemas tridimensionais. SILVEIRA (2003) analisou a propagação de trincas planas empregando o critério da Densidade de Energia de Deformação Mínima.

Para problemas de descontinuidade de potencial, a FGN foi utilizada com sucesso tanto no MEC (FALCÃO, 2001) quanto para o LBIE (MIERS e TELLES, 2005), sendo esta última a primeira implementação da FGN em conjunto com um método do tipo *meshless*. Após este, a FGN para MFLE foi aplicada em conjunto tanto com o LBIE (MIERS e TELLES, 2006) quanto com o BEFM (MIERS e TELLES, 2007).

1.3. Meios heterogêneos e materiais de propriedade gradualmente variáveis

Um meio é considerado heterogêneo quando suas propriedades não permanecem constantes em sua continuidade, fazendo com que a resposta a determinada solicitação varie conforme elas e a posição no meio em questão. Em problemas de análise de tensões, as propriedades relevantes são, comumente, o módulo de elasticidade longitudinal, ou módulo de Young, e o coeficiente de Poisson. Como o módulo de elasticidade transversal é obtido a partir destas duas características, sua variação é função da variação deles.

A variação destas propriedades pode ocorrer em todo o volume do sólido e de acordo com uma determinada função, como é o caso dos chamados materiais de propriedades gradualmente variáveis – FGM's (do inglês *functionally graded materials* (SURESH *et al.*, 1998)), e/ou somente em determinadas regiões onde o limite elástico do material foi excedido, formando assim as zonas de plastificação.

Um FGM é uma combinação de dois ou mais componentes caracterizada por uma variação composicional de um componente para o outro. Em contraste, materiais compósitos tradicionais são misturas homogêneas que podem comprometer algumas das propriedades desejáveis dos materiais componentes. Tendo em vista que proporções significativas de um FGM contêm a forma pura de cada componente, este problema é praticamente eliminado, fazendo com que estas propriedades sejam completamente utilizadas em conjunto. Por exemplo, podem ser combinadas a dureza de um metal com as propriedades refratárias de uma cerâmica, sem qualquer comprometimento de nenhuma destas propriedades. Na Figura 1.1 estão dois exemplos de composições de FGM's, uma contínua (Fig. 1.1a) e outra discreta (Fig. 1.1b).

FGM's oferecem grandes expectativas em aplicações onde as condições operacionais são severas. Por exemplo, correias antiabrasivas utilizadas para o transporte de partículas pesadas de minério, proteções contra calor de foguetes, tubos de troca de calor, geradores termoelétricos, componentes de aquecedores, revestimentos de protoplasma para reatores de fusão e juntas de metal/cerâmica eletricamente isolantes. Eles também são ideais para minimizar combinações termomecânicas mal sucedidas entre metal e cerâmica.

O conceito de FGM teve origem no Japão em 1984 durante o projeto *Spaceplane*, na forma de um material para utilização como barreira térmica com espessura menor

que 10 mm capaz de resistir a uma temperatura de superfície de 2000 K e um gradiente térmico de 1000 K.

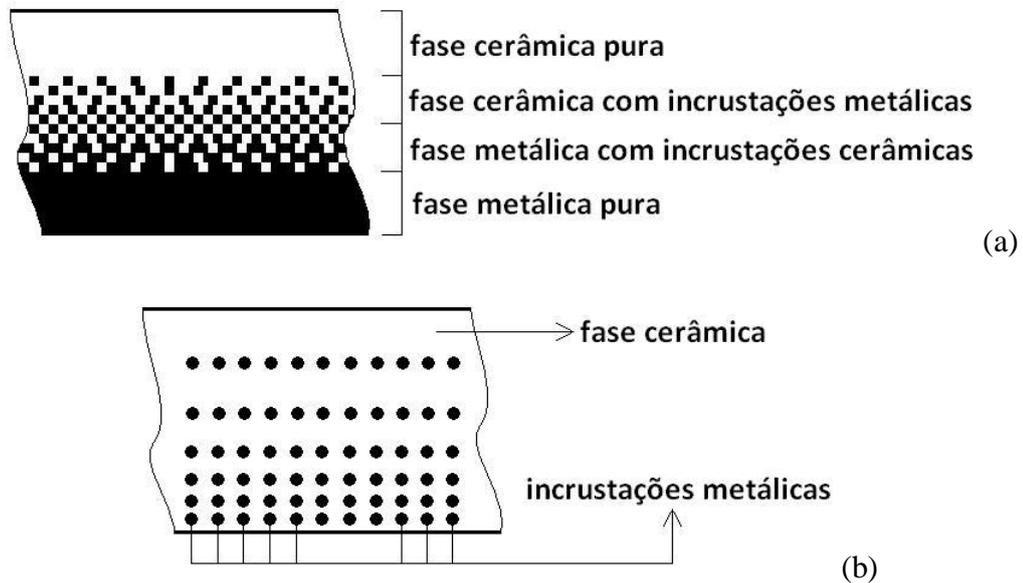


Figura 1.1 – tipos de composição de um FGM

Desde então, camadas finas de FGM são continuamente pesquisadas e já são quase uma realidade comercial. Sua análise em conjunto com as equações integrais foi primeiramente feita por ERDOGAN e WU (1996) em problemas de trincas decorrentes de tensões térmicas. Versões sem malha do método das equações integrais já foram e vêm sendo continuamente desenvolvidas para a análise dos FGM's, mais comumente o LBIE, para problemas de condução de calor (SLADEK *et al.*, 2003), elasticidade (SLADEK *et al.*, 2005) e viscoelasticidade (SLADEK *et al.*, 2006).

1.4. Equações integrais aplicadas à plasticidade

A primeira implementação numérica baseada na equação integral de contorno para a análise não-linear é devida a RICCARDELLA (1973), onde um esquema de solução puramente incremental foi utilizado em problemas de plasticidade não viscosa obedecendo ao critério de escoamento de von Mises. De acordo com TELLES (1985),

até meados dos anos 80, todos os algoritmos para análise elastoplástica via MEC eram baseados em esquemas explícitos, os quais se mostraram muito eficientes até então. Este trabalho foi o primeiro a apresentar rotinas implícitas para a solução de problemas elastoplásticos via MEC e foi continuado por TELLES e CARRER (1988, 1991 e 1994).

Após estes trabalhos, várias implementações foram feitas, principalmente no que diz respeito ao uso de operadores tangentes modificados, onde os mais estudados são os chamados operadores tangentes consistente (CTO, do inglês *Consistent Tangent Operator*) e contínuo (CON, do inglês *Continuum Tangent Operator*).

Formulações implícitas para o MEC que utilizam o CON foram apresentadas por TELLES (1985) e mais tarde por JIN *et al.* (1989). Estas também foram utilizadas com eficiência na análise de problemas viscoplásticos de grandes deformações por MUKHERJEE e LEU (1994). O conceito do CTO foi trazido para o contexto do MEC por BONNET e MUKHERJEE (1996) e sua origem vem de uma formulação de elementos finitos para plasticidade não viscosa devida a SIMO e TAYLOR (1985). Detalhes sobre as diferenças entre CTO e CON podem ser encontrados em POON *et al.* (1998) e em PAULINO e LIU (2001). No entanto, todas as formulações implícitas contendo o CTO encontradas na literatura até MIERS e TELLES (2004) são baseadas em critérios de escoamento do tipo J_2 , como o de von Mises, os quais, em geral, não são adequados para todos os tipos de problemas (como por exemplo, os que envolvem solo ou concreto).

1.5. Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é trazer para o contexto de formulações sem malha de elementos baseadas na equação integral de contorno, ferramentas já consagradas do MEC para a análise de problemas elastoplásticos, de mecânica da fratura elástica e elasticidade em meios heterogêneos.

Os métodos computacionais apresentados e estudados aqui são o LBIE e o BEFM, que são, respectivamente, formulações de domínio e de contorno baseadas na equação integral de contorno. Para ambos, é utilizado o esquema de aproximação OMLS (LIEW *et al.*, 2006), do inglês *Orthogonal Moving Least-Squares*, que é um aperfeiçoamento do MLS original.

Para o LBIE, é proposta uma metodologia para a análise de problemas de mecânica da fratura. Já o BEFM é utilizado, tanto para esta análise, quanto para a elastoplástica e elástica em meios heterogêneos.

1.6. Organização dos capítulos

No segundo capítulo é definida a formulação das equações integrais para a análise de tensões, onde são mostradas as teorias da elasticidade, da plasticidade e alguns critérios de escoamentos mais comuns, para que, com isso, se chegue à Identidade de Somigliana para deslocamentos, da qual se parte para a determinação da equação integral de contorno, em suas formulações convencional e hipersingular.

No terceiro capítulo são propostos os dois métodos, baseados na equação integral de contorno, utilizados neste trabalho: o LBIE e o BEFM. Para isto, são definidos os esquemas de interpolação MLS e OMLS, suas formas de aproximação e consideração de descontinuidades de grandezas tanto no domínio quanto no contorno.

No quarto capítulo é apresentado o processo de obtenção da Função de Green Numérica para problemas de mecânica da fratura, que se dá através da superposição de soluções fundamentais específicas.

A aplicação da equação integral de contorno em problemas elastoplásticos é mostrada no quinto capítulo. São apresentadas as equações constitutivas da plasticidade sem restrição a critério de escoamento e sua implementação numérica.

No sexto capítulo é apresentada a formulação da equação integral de contorno para elasticidade em meios heterogêneos, além da concepção de material funcionalmente graduado. São mostradas as equações constitutivas para problemas em meios heterogêneos além dos procedimentos de implementação.

No sétimo capítulo são apresentados os resultados obtidos para cada uma das técnicas propostas e comparados com os obtidos através de técnicas previamente estabelecidas e de eficiência comprovada.

As conclusões e as considerações finais são apresentadas no oitavo capítulo. Ao final deste estão as referências bibliográficas consultadas e um breve apêndice que inclui uma metodologia para a determinação das tensões em pontos do contorno.

CAPÍTULO 2 – FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA ANÁLISE DE TENSÕES

2.1. Introdução

Nesta seção, primeiramente é apresentada, de forma breve, a teoria da elasticidade geral (VILLAÇA e GARCIA, 2000). Em seguida, serão apresentadas as equações da plasticidade não-viscosa (CARRER, 1991), os diferentes critérios de plastificação e as formulações para plasticidade considerando-se deformações iniciais e tensões iniciais. Após estas definições, são apresentadas as equações integrais de contorno para deslocamentos e tensões que, além de serem a base para as implementações do tipo *meshless* que serão vistas nas próximas seções, originam o Método dos Elementos de Contorno.

2.2. Teoria da elasticidade

As forças externas que agem num certo instante de tempo em um corpo podem ser divididas em duas classes:

- Forças de volume, que, como as forças gravitacional e centrífuga, atuam em elementos de massa e volume no interior Ω do corpo;
- Forças de superfície, que atuam no contorno Γ do corpo, como as forças de contato.

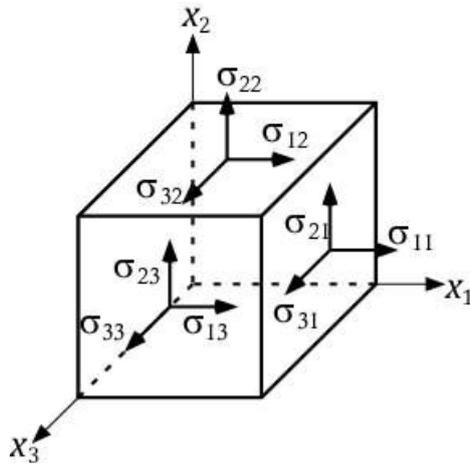


Figura 2.1 – paralelepípedo infinitesimal de tensões

Considere-se um paralelepípedo infinitesimal ao redor de um ponto no interior Ω do corpo, representado na Figura 2.1. Para ele é válida a seguinte equação de equilíbrio estático de forças e momentos

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (2.1)$$

onde σ_{ij} e b_j são, respectivamente, as componentes de tensões e forças de volume e a notação $()_{,i}$ indica derivada parcial com relação à coordenada espacial x_i , isto é, $\sigma_{ij,i} = \partial\sigma_{ij}/\partial x_i$. Se não existem momentos de volume aplicados, as condições de equilíbrio levam a

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.2)$$

Se as seis componentes de tensão são conhecidas em um determinado ponto, as forças de superfície equivalentes p_i atuando em um plano qualquer que passa por este ponto podem ser escritas como

$$p_i = \sigma_{ji}n_j \quad (2.3)$$

onde n_j representa o cosseno diretor da normal ao plano com relação à direção x_j .

Para um material elástico isotrópico, onde não existem mudanças de temperatura, a lei de Hooke fornece

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.4)$$

onde G é o módulo de cisalhamento do material, ν é o coeficiente de Poisson, ε_{ij} são as componentes de deformações específicas de Cauchy e δ_{ij} é o delta de Kronecker. O módulo de cisalhamento e as deformações específicas dão dadas por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(u_{i,j} + u_{j,i})}{2} \quad (2.6)$$

onde E é o módulo de Young e u_i é a componente de deslocamento na direção x_i .

Alternativamente, a eq.(2.4) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.7)$$

onde

$$C_{ijkl} = G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\delta_{ij}\delta_{kl}) \quad (2.8)$$

é um tensor de quarta ordem de constantes elásticas.

Ao substituir-se a eq.(2.6) na eq.(2.4), chega-se à relação entre as tensões e as derivadas de deslocamentos. Considerando esta equação em conjunto com as eqs.(2.1) e (2.3) chega-se às seguintes equações

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0 \quad em \ \Omega \quad (2.9)$$

$$\frac{2G}{1-2\nu}u_{k,k}n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i})n_j = p_i \quad em \ \Gamma \quad (2.10)$$

que são as chamadas Equações de Navier, válidas para 3-D e 2-D no estado plano de deformações. Para o estado plano de tensões, deve-se considerar $\bar{\nu}$ ao invés de ν , cuja forma é

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (2.11)$$

lembrando que G não muda.

2.3. Plasticidade

Considere-se o diagrama tensão-deformação referente a um ensaio de tração uniaxial de um corpo de provas cilíndrico apresentado na Fig.2.2. Entre os pontos O e A existe uma relação linear entre tensão e deformação e, quando cessado o carregamento, o corpo volta ao seu comprimento inicial. Esta fase é chamada fase elástica e é representada matematicamente pela teoria da elasticidade apresentada anteriormente. O ponto A é denominado limite elástico do material ou ponto de escoamento inicial.

A partir deste ponto, até o ponto B, chamado limite plástico ou de escoamento do material, as deformações aumentam consideravelmente em presença de pequenas tensões. Este trecho é denominado encruamento ou endurecimento. Nesta fase, uma vez cessado o carregamento, verifica-se a permanência de deformações plásticas residuais ε^p no corpo. O descarregamento ocorre segundo a linha A'B', paralela a AO, desaparecendo-se assim as deformações elásticas ε^e e restando somente as residuais. O trecho AB é onde é válida a teoria da plasticidade.

Após o ponto B, inicia-se a fase de colapso do material, tendo-se que as deformações aumentam mesmo sem acréscimo de tensão, chegando-se finalmente à ruptura em C.

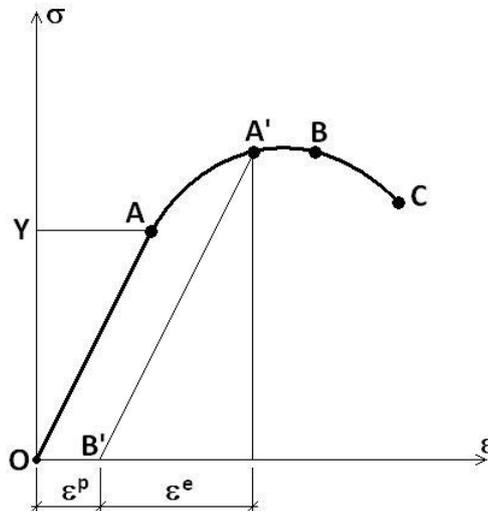


Figura 2.2 – diagrama tensão-deformação do ensaio de tração uniaxial

Tem-se então que, no trecho AB, as deformações totais são

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.12)$$

e que o recarregamento ocorre segundo A'B', não havendo escoamento até que A' seja novamente alcançado. O ponto A' representa o novo ponto de escoamento inicial.

Se o endurecimento se proceder da mesma forma na compressão e na tração, diz-se que o material apresenta comportamento isotrópico no endurecimento. Isso leva a um diagrama tensão-deformação simétrico com relação à origem.

Em relação ao ponto de escoamento inicial, o comportamento elástico ocorre quando

$$\sigma - Y < 0 \quad (2.13)$$

e, uma vez ultrapassado Y , deve-se desconsiderar a eq.(2.13) e adotar a seguinte expressão

$$\sigma - \sigma_0 < 0 \quad (2.14)$$

onde σ_0 é a nova tensão de escoamento que varia de acordo com a evolução da plastificação no corpo. Para um material que apresenta endurecimento linear, como apresentado na Fig.2.3, σ_0 varia da seguinte forma

$$\sigma_0 = Y + \frac{E \cdot E_T}{E - E_T} \varepsilon^p \quad (2.15)$$

onde E é o módulo de Young e E_T corresponde à inclinação do diagrama no trecho AB.

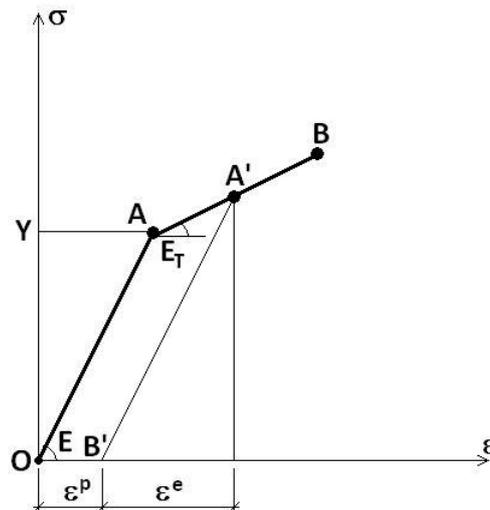


Figura 2.3 – diagrama tensão-deformação com endurecimento linear

Até agora, todas as considerações foram feitas sobre o caso do carregamento uniaxial, onde o estado de tensões é representado apenas pela tensão uniaxial correspondente. Para estados mais complexos, o critério de escoamento da eq.(2.14) é substituído por

$$F(\sigma_{ij}, k) = f(\sigma_{ij}) - \psi(k) = 0 \quad (2.16)$$

onde k é o parâmetro de endurecimento que representa o trabalho plástico total

$$k = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.17)$$

e $f(\sigma_{ij})$ é uma função escalar das componentes de tensão σ_{ij} . Substituindo-se $f(\sigma_{ij})$ por uma tensão equivalente σ_e , considera-se então a existência de uma deformação plástica equivalente ε_e^p , de forma que o incremento do trabalho plástico equivalente seja igual ao incremento do trabalho plástico total, isto é,

$$dk = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_e d\varepsilon_e^p \quad (2.18)$$

Logo, a eq.(2.16) pode ser substituída por

$$\sigma_e = \psi(k) = \psi\left(\int \sigma_e d\varepsilon_e^p\right) = H(\varepsilon_e^p) \quad (2.19)$$

A relação funcional entre a tensão e deformação plástica equivalentes é determinada experimentalmente. Na prática, considera-se o diagrama da Fig.2.2, em que a abscissa e a ordenada ficam em termos de valores equivalentes.

2.4. Critérios de escoamento

A tensão equivalente é normalmente expressa em função dos invariantes do tensor de tensões, uma vez que os critérios de escoamento não dependem do sistema de coordenadas. Os invariantes são

$$I_1 = \sigma_{kk} \quad (2.20)$$

$$J_2 = \frac{S_{ij}S_{ij}}{2}$$

$$J_3 = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{2}$$

onde

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}\delta_{ij}}{3} \quad (2.21)$$

Ao invés de se considerar o invariante J_3 , pode-se considerar o invariante α , chamado ângulo de Lode,

$$\alpha = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{-3\sqrt{3} \cdot J_3}{2 \cdot J_2^{3/2}} \right), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} \quad (2.22)$$

Considerando-se estes invariantes, são definidos os seguintes critérios de escoamento (CARRER, 1991):

- Tresca:

$$\sigma_0 = 2\sqrt{J_2} \cos \alpha \quad (2.23)$$

- Von Mises:

$$\sigma_0 = \sqrt{3J_2} \quad (2.24)$$

- Mohr-Coulomb:

$$\frac{I_1}{3} \sin \phi' + \sqrt{2} \left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \cos \phi' \right) = c' \cos \phi' \quad (2.25)$$

- Drucker-Prager

$$\alpha' I_1 + \sqrt{J_2} = K' \quad (2.26)$$

onde ϕ' é o ângulo de atrito interno e c' é a coesão do material. As constantes α' e K' são definidas como

$$\alpha' = \frac{2 \sin \phi'}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi')} \quad (2.27)$$

$$K' = \frac{6c' \cos \phi'}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi')} \quad (2.28)$$

2.5. Formulações de deformações iniciais e tensões iniciais

Considerando-se o regime de pequenas deformações, tem-se que o tensor de deformações específicas é dado pela seguinte expressão

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.29)$$

onde ε_{ij}^e e ε_{ij}^p são, respectivamente, as parcelas elástica e plástica da componente de deformação total.

Aplicando-se a lei de Hooke à parcela elástica da eq.(2.29), chega-se a

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) + \frac{2G\nu}{1 - 2\nu}(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p)\delta_{ij} \quad (2.30)$$

que corresponde à formulação de deformações iniciais. A consideração da aplicação da lei de Hooke também na parcela plástica leva à obtenção da chamada tensão plástica fictícia

$$\sigma_{ij}^p = 2G\varepsilon_{ij}^p + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}^p\delta_{ij} \quad (2.31)$$

Substituindo e eq.(2.31) na eq. (2.30) obtém-se

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \sigma_{ij}^p \quad (2.32)$$

que corresponde à formulação de tensões iniciais. As eqs.(2.31) e (2.32) são válidas para problemas tridimensionais. Para problemas bidimensionais, deve-se observar que

$$\varepsilon_{kk}^p = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p \quad \text{para estado plano de deformação e} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{kk}^p = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p \quad \text{para estado plano de tensão, substituindo-se } \nu \text{ por } \bar{\nu} = \nu/(1 + \nu).$$

2.6. Identidade de Somigliana para deslocamentos

Seja o corpo definido por $\Omega + \Gamma$ que está em estado de equilíbrio estático sob a ação de cargas ou deslocamentos prescritos, de acordo com a Fig.2.4. Este estado de equilíbrio é representado pelo grupo $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i, p_i$ e b_i .

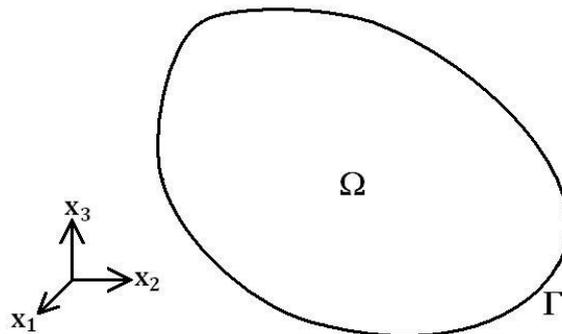


Figura 2.4 – corpo $\Omega + \Gamma$ em equilíbrio no espaço

Considere-se um domínio Ω^* , cujo contorno é Γ^* , que contém o corpo $\Omega + \Gamma$. Do mesmo modo que o anterior, seu estado de equilíbrio é representado por σ_{ij}^* , ε_{ij}^* , u_i^* , p_i^* e b_i^* .

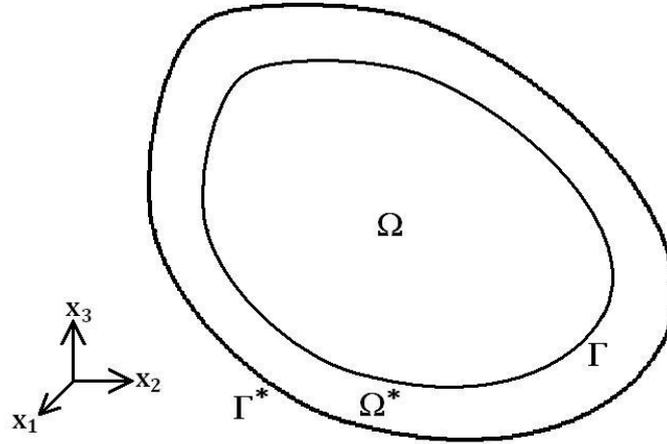


Figura 2.5 – corpos $\Omega + \Gamma$ e $\Omega^* + \Gamma^*$

De acordo com a eq.(2.7), pode-se escrever, respectivamente para $\Omega + \Gamma$ e $\Omega^* + \Gamma^*$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.34)$$

$$\sigma_{kl}^* = C_{klij} \varepsilon_{ij}^* \quad (2.35)$$

Como o tensor elástico C_{ijkl} é simétrico, isto é, $C_{ijkl} = C_{klij}$, tem-se que

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{kl} C_{klij} \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{kl} \sigma_{kl}^* \quad (2.36)$$

Para um material que apresenta comportamento elastoplástico, a eq.(2.36) deve, de acordo com a eq.(2.12) ser substituída por

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^p \quad (2.37)$$

Com isso, pode-se escrever

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^p d\Omega \quad (2.38)$$

Ao se integrar por partes ambos os lados e utilizando-se as eqs.(2.1), (2.5), (2.6) e (2.7), obtém-se

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^p d\Omega \quad (2.39)$$

que corresponde ao 2º teorema da reciprocidade de Betti.

Considerando-se que as componentes das forças de volume b_i^* correspondem a forças concentradas unitárias aplicadas no ponto $\xi \in \Omega^*$ em cada uma das direções ortogonais definidas pelo vetor de componentes P_j , tem-se

$$b_j^* = \delta(\xi, \mathbf{x}) P_j \quad (2.40)$$

onde $P_j = 1$ e $\delta(\xi, \mathbf{x})$ é a função delta de Dirac.

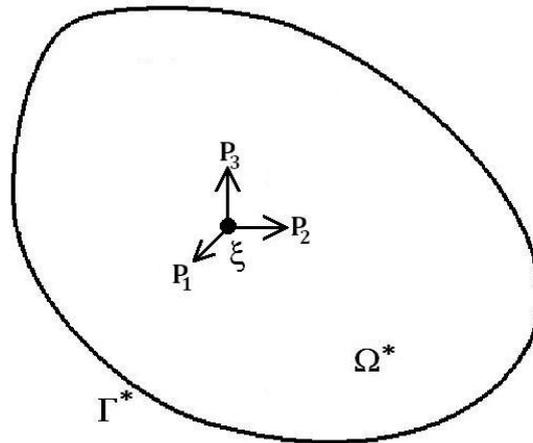


Figura 2.6 – cargas concentradas em ξ

Tendo-se em vista que

$$\delta(\xi, \mathbf{x}) \begin{cases} = 0 & \text{se } \xi \neq \mathbf{x} \\ \rightarrow \infty & \text{se } \xi = \mathbf{x} \end{cases} \quad (2.41)$$

e

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \delta(\xi, \mathbf{x}) d\Omega = g(\xi) \quad (2.42)$$

a primeira integral na eq.(2.39) pode ser substituída por

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(\xi) P_i = u_1(\xi) + u_2(\xi) + u_3(\xi) \quad (2.43)$$

Se cada carga concentrada for considerada atuando independente, os deslocamentos, forças de superfície e as tensões () * podem ser escritos como

$$u_i^* = u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) P_j \quad (2.44)$$

$$p_i^* = p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) P_j \quad (2.45)$$

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) P_i \quad (2.46)$$

onde $u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})$ e $p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})$ representam, respectivamente, deslocamentos e forças de superfície na direção j do ponto \mathbf{x} devido à presença de uma carga unitária na direção i no ponto ξ , e $\sigma_{jki}^*(\xi, \mathbf{x})$ corresponde ao tensor de tensões em \mathbf{x} devido à presença de uma carga unitária na direção i no ponto ξ . Adotando-se também, para o caso 2-D estado plano de deformações,

$$P_i = \delta_{i1}; P_i = \delta_{i2} \quad (2.47)$$

a eq.(2.39) resulta na seguinte, considerando-se uma equação para cada direção,

$$\begin{aligned}
u_i(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) b_j(\mathbf{x}) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \sigma_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) \varepsilon_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega
\end{aligned} \tag{2.48}$$

onde o termo $\sigma_{33i}^* \varepsilon_{33}^p \neq 0$ no caso de estado plano de deformação. Esta equação é conhecida como Identidade de Somigliana para deslocamentos na formulação de deformações iniciais. Esta equação foi obtida através de reciprocidade com a solução singular da Equação de Navier

$$Gu_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj}^* + \delta(\xi, \mathbf{x}) P_j = 0 \tag{2.49}$$

As soluções da eq.(2.49) são chamadas soluções fundamentais. No caso do plano infinito, estas soluções são as chamadas Soluções de Kelvin. Para estado plano de deformações:

$$u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}\} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = & -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i} n_j \right. \\
& \left. - r_{,j} n_i) \right\}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\sigma_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ki} - r_{,i} \delta_{jk}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \tag{2.52}$$

onde

$$r = r(\xi, \mathbf{x}) = (r_i r_i)^{1/2} \tag{2.53}$$

$$r_i = x_i(\mathbf{x}) - x_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.54)$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(\mathbf{x})} = \frac{r_i}{r} \quad (2.55)$$

Para o caso de estado plano de tensões, utiliza-se a eq.(2.11) da forma que já mencionada.

A versão correspondente da eq.(2.48) para a formulação de tensões iniciais é obtida através da seguinte consideração

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \varepsilon_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} C_{jkrst} \varepsilon_{rst}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \varepsilon_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (2.56)$$

Por simetria, tem-se que $C_{jkrst} = C_{rstjk}$. Logo

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{rst}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) C_{rstjk} \varepsilon_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{rst}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \sigma_{rs}^p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (2.57)$$

Com isso, tem-se que

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \varepsilon_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (2.58)$$

Ao se substituir a eq.(2.58) em (2.48), chega-se finalmente a

$$\begin{aligned} u_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) b_j(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.59)$$

que é a identidade de Somigliana para deslocamentos na formulação de tensões iniciais,

onde

$$\varepsilon_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} [(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ki}) - r_{,i}\delta_{jk} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (2.60)$$

A dedução formal da Identidade de Somigliana, bem como as soluções fundamentais para o caso 3-D e para o plano semi-infinito podem ser vistas com detalhes em (BREBBIA *et al.*, 1984).

2.7. Equação integral de contorno

A Identidade de Somigliana não pode ser empregada para a determinação de deslocamentos ou tensões enquanto os valores dos deslocamentos e forças de superfície ao longo de todo o contorno não forem determinados. Portanto, é necessário que se considere $\xi \in \Gamma$ (vide Fig.2.7), levando-se a eq.(2.39) à seguinte forma, já tendo as cargas unitárias atuando em separado e considerando a formulação de tensões iniciais:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) b_j(\mathbf{x}) d\Omega \\ & \quad - \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.61)$$

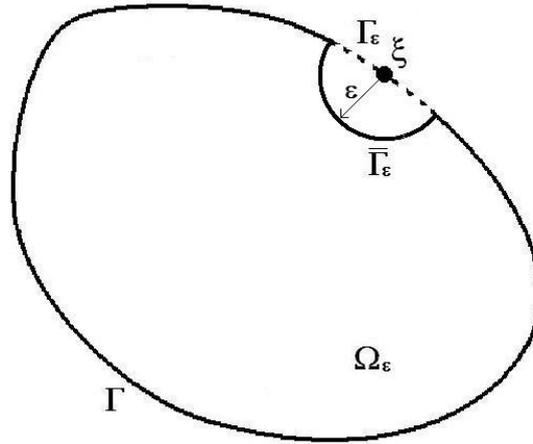


Figura 2.7 – ξ no contorno

Ao se analisar o limite de $\varepsilon \rightarrow 0$ de cada uma das integrais da eq.(2.61) em separado

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.62)$$

tem-se que a primeira integral à direita pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) [u_j(\mathbf{x}) - u_j(\xi)] d\Gamma \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ u_j(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde a primeira integral é nula por causa da continuidade dos deslocamentos e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) d\Gamma = c_{ij}(\xi) \quad (2.64)$$

A segunda integral no lado direito da eq.(2.62) é no sentido do Valor Principal de Cauchy, cuja existência é demonstrada se $u_j(\mathbf{x})$ satisfizer a condição de Holder

$$u_j(\mathbf{x}) - u_j(\xi) \leq Br^\alpha \quad (2.65)$$

onde B e α são constantes positivas. As demais integrais na eq.(2.61) não apresentam problemas por terem singularidades fracas ou aparentes. Logo, a eq.(2.61) pode ser finalmente escrita como

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})p_j(\mathbf{x})d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})b_j(\mathbf{x})d\Omega \\ - \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(\xi, \mathbf{x})\sigma_{jk}^p(\mathbf{x})d\Omega \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde a primeira integral do lado direito é no sentido do Valor Principal de Cauchy e pode ser mostrado que $c_{ij}(\xi) = \delta_{ij}/2$ quando o contorno é suave em ξ . Esta equação fornece uma relação que deve ser satisfeita pelos deslocamentos e forças de superfície no contorno (incluindo as forças de volume que são conhecidas). Portanto, quando as condições de contorno são utilizadas, esta equação pode ser aplicada para calcular as incógnitas restantes no contorno.

2.8. Tensões em pontos internos

As eqs.(2.48) e (2.59) são representações contínuas de deslocamentos no interior de um corpo. Logo, as componentes de tensões podem ser obtidas através da derivação

direta de uma delas (neste caso, é considerada a eq.(2.59), correspondente à formulação de tensões iniciais) com relação às coordenadas de ξ , obtendo-se assim as deformações específicas, e aplicação da Lei de Hooke que, em termos de deslocamentos, pode ser escrita como

$$\sigma_{ij} = 2G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k,k} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^p \quad (2.67)$$

As integrais de contorno e de forças de domínio são de fácil derivação. Porém, a derivação da integral de domínio das tensões iniciais não é trivial, merecendo atenção especial. Considere-se a eq.(2.59), onde a integral de tensões iniciais e sua derivada com relação às coordenadas de ξ são dadas como

$$V_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega \quad (2.68)$$

e

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_m} = V_{i,m} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega \right\} \quad (2.69)$$

Adotando-se um sistema de coordenadas polar centrado em ξ e raio polar a partir do eixo x_1 , tem-se que a integração em Ω_ε se torna uma integração na direção angular e outra na direção radial, cujo limite inferior é o raio de Ω_ε , ε . Como este raio depende da posição de ξ , é necessário utilizar a fórmula de Leibnitz (TELLES, 1983) para o cálculo de derivadas de integrais cujos limites dependem da variável de derivação. Com isso, a eq.(2.69) pode ser escrita como

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_m} = \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_{jki}^*(\xi, \mathbf{x})}{\partial x_m} \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega - \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}) \int_{\Gamma_1} \varepsilon_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) r_{,m} d\Gamma \quad (2.70)$$

onde a integral de domínio é calculada no sentido de valor principal e a integral de contorno é calculada analiticamente, tendo-se que Γ_1 é uma circunferência de raio unitário centrada em ξ . Logo, a expressão final para as componentes de tensões em pontos internos, para a formulação de tensões iniciais, é a seguinte

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) p_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) b_k(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^*(\xi, \mathbf{x}) \sigma_{kl}^p(\mathbf{x}) d\Omega \\ & + g_{ij}[\sigma^p(\xi)] \end{aligned} \quad (2.71)$$

As componentes dos novos tensores são, para o caso 2-D estado plano de deformação:

$$u_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi(1-2\nu)r} \{(1-2\nu)(r_j \delta_{ik} + r_i \delta_{jk} - r_k \delta_{ij}) + 2r_i r_j r_k\} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} p_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) = & \frac{G}{2\pi(1-2\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)r_k \delta_{ij} + \nu(r_j \delta_{ik} + r_i \delta_{jk}) \right. \\ & - 4r_i r_j r_k] + 2\nu(n_i r_j r_k + n_j r_i r_k) \\ & \left. + (1-2\nu)(2n_k r_i r_j + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijkl}^*(\xi, \mathbf{x}) = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{(1-2\nu)[\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\delta_{ij} r_k r_l] \\ & + 2\nu[\delta_{il} r_j r_k + \delta_{jk} r_i r_l + \delta_{ik} r_l r_k + \delta_{jl} r_i r_k] + 2\delta_{kl} r_i r_j \\ & + 8r_i r_j r_k r_l\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$g_{ij} = \frac{-1}{8(1-\nu)} [2\sigma_{ij}^p + (1-4\nu)\sigma_{ll}^p \delta_{ij}] \quad (2.75)$$

Para problemas em estado plano de tensão, utilizar a substituição mostrada na eq.(2.11).

2.9. Formulação hipersingular para elasticidade

Nesta formulação, desconsideram-se os termos de forças de volume e não-lineares da equação de tensões em pontos internos apresentada na eq.(2.71).

2.9.1. Equação integral hipersingular para pontos internos

Considerando-se a equação de equilíbrio de forças de superfície e tensões, previamente apresentada na eq.(2.3),

$$p_i = \sigma_{ji} m_j \quad (2.76)$$

onde m_j é a componente j da normal a um plano qualquer do domínio passando por ξ .

Esta equação, em conjunto com a eq.(2.71), resulta em

$$p_i(\xi) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.77)$$

onde

$$U_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) \left(m_j r_{,i} - m_i r_{,j} - \frac{\partial r}{\partial m} [2r_{,i} r_{,j} + (1-2\nu)\delta_{ij}] \right) \right\} \quad (2.78)$$

possui singularidade de ordem $(1/r)$ (termo singular) e

$$\begin{aligned}
P_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ -\frac{\partial r}{\partial m} \left[2\frac{\partial r}{\partial n} (v\delta_{ij} - 4r_{,i}r_{,j}) + 2vn_i r_{,j} \right. \right. \\
+ 2(1-2\nu)n_j r_{,i} \left. \right] + m_k n_k [2vr_{,i}r_{,j} + (1-2\nu)\delta_{ij}] \\
+ 2\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)m_i r_{,j} + vm_j r_{,i}] + (1-2\nu)m_j n_i \\
\left. - (1-4\nu)m_i n_j \right\}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

possui singularidade de ordem $(1/r^2)$ (termo hipersingular).

Nas equações acima, tem-se

$$\frac{\partial r}{\partial m} = -r_{,i} m_i \tag{2.80}$$

2.9.2. Equação integral hipersingular para contorno externo

Considerando-se $\xi \in \Gamma$, e adotando-se os mesmos procedimentos utilizados para a obtenção da identidade de Somigliana para pontos no contorno, tem-se que a eq.(2.77), no contorno suave, se torna

$$\frac{\delta_{ij}}{2} p_i(\xi) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \tag{2.81}$$

onde a primeira integral é no sentido do Valor Principal de Cauchy e a segunda é no sentido de Parte Finita de Hadamard (BREBBIA *et al.*, 1984).

CAPÍTULO 3 – FORMAS DE IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO INTEGRAL DO CONTORNO

3.1. Introdução

De forma que a abordagem numérica da equação integral de contorno apresentada neste trabalho seja completamente independente de malha, é necessário adotar um esquema de interpolação com esta característica.

Nesta seção serão apresentadas as formulações do LBIE e do BEFM, que são os métodos utilizados neste trabalho. Em ambos é utilizado um método baseado no MLS chamado *Orthogonal Moving Least-Squares* (OMLS), originalmente apresentado como *Improved Moving Least-Squares* (IMLS) (LIEW *et al.*,2006), cuja formulação é a mesma do MLS, que será vista a seguir.

3.2. *Moving Least-Squares* (MLS)

O MLS é um método que tem como característica principal o fato de não necessitar de uma malha para ser aplicável, pois a definição dos pontos que contribuem para a interpolação em um determinado ponto é função apenas da distância entre eles (Figura 3.1b) e não de alguma conectividade elemental (Fig.3.1a), como acontece nos esquemas utilizados no MEF e no MEC.

Como a aproximação gerada pelo MLS não possui a característica de função delta¹, não se pode lidar na interpolação com os valores reais das grandezas consideradas, mas com os chamados valores “fictícios”. Isso faz com que a solução

¹ Ao se utilizar um esquema com esta característica para aproximar uma função em um ponto pertencente ao conjunto de pontos utilizados na interpolação, não há contribuição de outros pontos para a aproximação nele, a não ser a dele própria.

encontrada em termos desses valores seja pós-processada no final, a fim de se determinar seus valores reais. Nesta seção será apresentada sua formulação matemática, juntamente com as demais características relevantes.

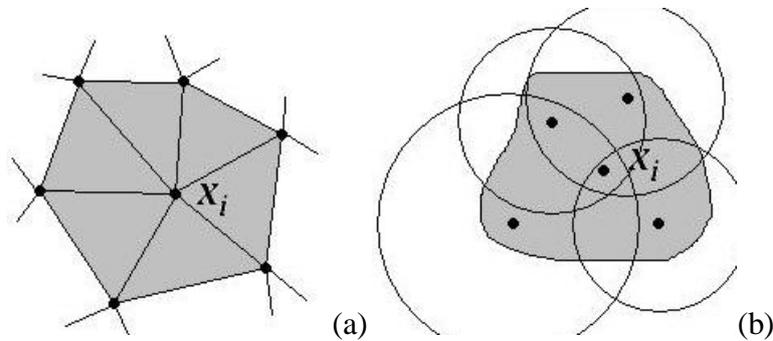


Figura 3.1 – contribuições para interpolação em x_i definidas por: (a) conectividade elemental; (b) distância

Considere-se um sub-domínio Ω_x que corresponda à vizinhança de um ponto $x = [x, y, z]$, o qual é chamado domínio de definição da aproximação MLS da função a interpolar em x . Este está contido inteiramente no domínio global do problema Ω e é composto por todos os pontos que possuem x em seu suporte. Para o caso 1-D, o suporte de x é composto por dois segmentos de reta que possuem x como extremidade, como mostrado na Fig.3.2. Já no caso 2-D, o suporte de um ponto x é um círculo centrado nele, de acordo com a Fig.3.3. As dimensões dos suportes serão discutidas mais a frente.

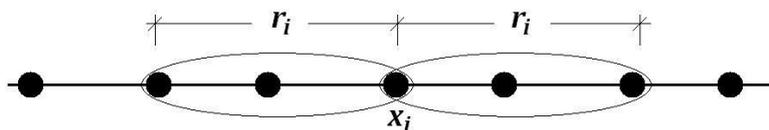


Figura 3.2 – suporte de função-peso para interpolação 1-D

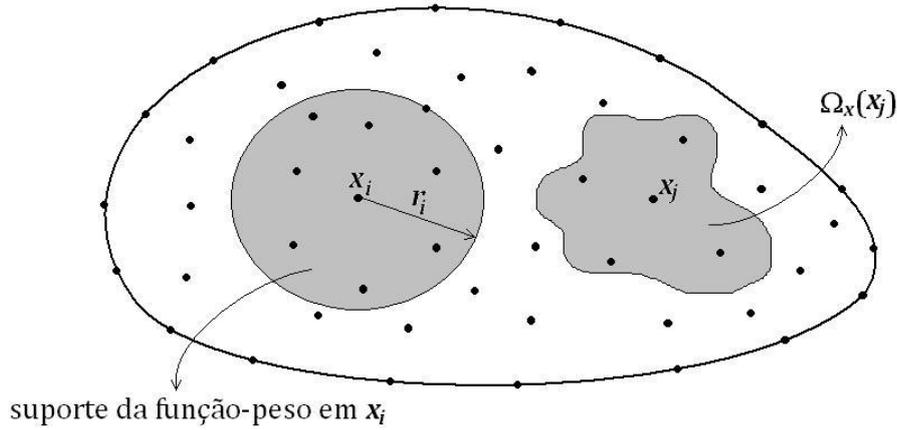


Figura 3.3 – domínio de definição e suporte de função-peso para interpolação 2-D

Objetivando aproximar uma função $u(\mathbf{x})$ em um ponto qualquer cujo domínio de definição Ω_x é composto por $\{\mathbf{x}_i\}, i = 1, 2, \dots, n$, sendo n o número de pontos em Ω_x , sua aproximação pode ser considerada $u^h(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega_x$ como sendo

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})]$ é uma base monomial linearmente independente e completa e m é o número de termos na base. Sendo t o expoente do monômio de maior ordem dos monômios que compõem a base, a relação entre t e m é a seguinte:

$$m = t + 1 \text{ para 1-D,}$$

$$m = \frac{(t+1)(t+2)}{2} \text{ para 2-D, e} \quad (3.2)$$

$$m = \frac{(t+1)(t+2)(t+3)}{6} \text{ para 3-D}$$

e $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é um vetor de m posições que é função das coordenadas espaciais. Para o caso 2-D, tem-se os seguintes exemplos para $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y] \text{ para base linear } (t = 1, m = 3), \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2] \text{ para base quadrática } (t = 2, m = 6), \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como mostrado em (ZHU *et al.*, 1998) e (ATLURI e ZHU, 1998), a base linear já garante que a aproximação possa representar bem qualquer função suave e sua primeira derivada. O vetor de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é determinado pela minimização da seguinte norma ponderada discreta L_2 (ATLURI e ZHU, 1998)

$$J(\mathbf{a}(\mathbf{x})) = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_I]^2 = [\mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}]^T \cdot \mathbf{W} \cdot [\mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}] \quad (3.4)$$

onde $w_I(\mathbf{x})$ é a função-peso associada ao nó $\mathbf{x}_I = [x_I, y_I, z_I]$, cujo suporte é radial de raio r_I , sendo que $0 < w_I(\mathbf{x}) \leq 1$ para qualquer ponto dentro de seu suporte, e \hat{u}_I são os já mencionados valores nodais fictícios, que em geral não são iguais aos valores reais de $u^h(\mathbf{x})$ nos pontos do conjunto da interpolação. Tem-se também que

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n] \quad (3.7)$$

A estacionariedade de $J(\mathbf{a}(\mathbf{x}))$ leva à seguinte relação linear entre $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ e $\hat{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} \quad (3.8)$$

onde as matrizes $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ são definidas como

$$A_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n w_k(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}_k) p_j(\mathbf{x}_k) \quad (3.9)$$

$$B_{ij}(\mathbf{x}) = w_i(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}_j) \quad (3.10)$$

ou, em forma matricial

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \quad (3.12)$$

Logo,

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} \quad (3.13)$$

e, com isso, substituindo na eq.(3.1), tem-se que

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} = \Phi(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (3.14)$$

sendo

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

As derivadas parciais de $u^h(\mathbf{x})$ são determinadas da seguinte forma

$$\frac{\partial u^h(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \Phi_{,k} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (3.16)$$

onde

$$\Phi_{,k} = \mathbf{p}_{,k}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_{,k}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{,k}(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

e

$$\mathbf{A}_{,k}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}_{,k}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

A aproximação MLS é bem definida somente quando a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ não é singular. A condição mínima necessária para evitar este problema é $n \geq m$. O vetor Φ é comumente chamado de vetor de funções de forma da interpolação MLS, onde seu i -ésimo termo corresponde à função de forma associada ao ponto \mathbf{x}_i . De acordo com as eqs.(3.9), (3.10), (3.13), pode-se observar que $\phi_i = 0$ quando $w_i(\mathbf{x}) = 0$. Esta característica preserva o caráter local da interpolação, uma vez que para os pontos fora de Ω_x tem-se $\phi_i = 0$.

A escolha da função-peso é arbitrária, desde que a escolhida seja contínua e positiva dentro dos suportes. As mais encontradas na literatura são as de distribuição de Gauss e as tipo *spline*. A função-peso Gaussiana correspondente ao ponto \mathbf{x}_I pode ser escrita como

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{d_I}{c_I}\right)^2} - e^{-\left(\frac{r_I}{c_I}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{r_I}{c_I}\right)^2}}, & 0 \leq d_I \leq r_I \\ 0, & d_I \geq r_I \end{cases} \quad (3.19)$$

onde $d_I = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|$ é a distância entre \mathbf{x}_I e \mathbf{x} , c_I é uma constante que controla a forma de $w_I(\mathbf{x})$, cujo valor é arbitrário e sua determinação analítica ainda é tópico de pesquisas. De acordo com ATLURI e SHEN (2002), a escolha inapropriada de valores para esta constante leva a resultados insatisfatórios. Um exemplo de função *spline* é a de 4ª ordem a seguir

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{d_I}{r_I}\right)^2 + 8 \left(\frac{d_I}{r_I}\right)^3 - 3 \left(\frac{d_I}{r_I}\right)^4, & 0 \leq d_I \leq r_I \\ 0, & d_I \geq r_I \end{cases} \quad (3.20)$$

O tamanho do suporte de $w_I(\mathbf{x})$, r_I , deve ser grande o bastante para garantir um número suficiente de pontos no domínio de definição Ω_x de cada ponto ($n \geq m$) e ainda pequeno o bastante para preservar o caráter local da aproximação MLS.

Como se pode observar, a consideração deste tipo de interpolação na montagem de um sistema de equações leva à obtenção de grandezas fictícias como solução, o que demanda um pós-processamento desta solução a fim de se determinar os valores reais das grandezas consideradas.

3.3. *Orthogonal Moving Least-Squares (OMLS)*

Esta forma de interpolação possui a mesma estrutura do MLS, diferindo inicialmente apenas no tipo de funções que compõem a base da interpolação. No MLS, a base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ era composta por um conjunto completo de monômios linearmente independentes entre si. Para o OMLS, a base, agora $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$, é composta por um conjunto de polinômios ortogonais entre si com relação à função-peso $w_I(\mathbf{x})$ adotada. Com isso, a aproximação gerada pelo OMLS passa a possuir a característica de função delta, fazendo com que se lide com valores reais das grandezas na interpolação.

Utilizando-se um algoritmo de ortogonalização, como o de Gram-Schmidt (KRIEDER *et al.*, 1983), pode-se obter uma base ortogonalizada $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ a partir de uma já existente $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. A fórmula de Gram-Schmidt aplicada à base relativa a um ponto \mathbf{x}_q qualquer é a seguinte

$$\bar{p}_1(\mathbf{x}_q) = 1$$

$$\bar{p}_i(\mathbf{x}_q) = p_i(\mathbf{x}_q) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}_j) \bar{p}_k(\mathbf{x}_j)}{\sum_{l=1}^n w_l(\mathbf{x}) \bar{p}_k(\mathbf{x}_l) \bar{p}_k(\mathbf{x}_l)} \bar{p}_k(\mathbf{x}_q) \quad (3.21)$$

Para a nova base ortogonalizada, é válida a seguinte igualdade

$$\sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) \bar{p}_i(\mathbf{x}_j) \bar{p}_k(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \bar{A}_{ik} & i = k \end{cases} \quad (3.22)$$

e a interpolação fica com o seguinte aspecto

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{p}}^T(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = \bar{\Phi} \cdot \mathbf{u} \quad (3.23)$$

onde os termos $(\bar{\quad})$ são os mesmos mostrados anteriormente para o MLS calculados agora utilizando-se $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ e \mathbf{u} é o vetor de valores nodais reais da grandeza a interpolar. Pelo fato desta interpolação não lidar com valores fictícios, não há mais a necessidade de pós-processamento da solução encontrada.

A partir da eq.(3.22), observa-se que a matriz $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ é diagonal. Logo, sua inversão é muito menos custosa que a de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Além disso, $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ é também naturalmente bem condicionada, necessitando-se assim de um menor número de pontos em Ω_x para se obter uma aproximação satisfatória (a condição $n \geq m$ ainda é necessária) (KITIPORNCHAI *et al.*, 2006).

3.4. Interpolação de grandezas no contorno

Do mesmo modo que ocorre com o MEC, a interpolação de grandezas no contorno é feita considerando-se uma dimensão a menos que a do problema real, isto é,

ao modelar-se um problema bidimensional, a interpolação no contorno terá bases unidimensionais.

No caso da aproximação MLS 2-D, isso consiste em se considerar como base um conjunto completo de monômios que são função de uma coordenada unidimensional parametrizada $\gamma(x)$, como se vê a seguir

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \left[1, \gamma(\mathbf{x}), \dots, (\gamma(\mathbf{x}))^{m-1} \right] \quad (3.24)$$

Esta nova coordenada é definida a partir de uma origem e é função do perímetro do problema. Como exemplo, considere-se o quadrado de lado unitário da Fig.3.4 cujos 12 pontos do contorno estão igualmente espaçados.

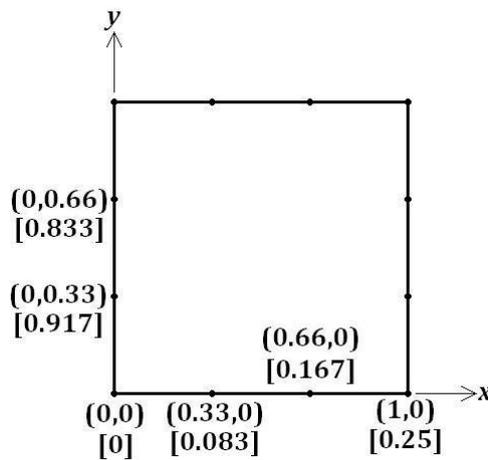


Figura 3.4 – coordenadas parametrizadas

Os termos entre parênteses se referem às coordenadas cartesianas bidimensionais dos pontos do contorno e entre colchetes se encontram suas respectivas coordenadas unidimensionais parametrizadas.

A determinação da base ortogonalizada dos pontos do contorno para utilização no OMLS é feita utilizando-se a eq.(3.21), do mesmo modo que para as bases 2-D e 3-D.

3.5. Descontinuidades no contorno

Existem casos onde a função a interpolar no contorno é descontínua em algum local, como no caso das tensões em um vértice ou de um ponto onde há mudança de carregamento, como apresentado na Fig.3.5.



Figura 3.5 – exemplos de descontinuidades de funções no contorno: (a) tensões em um vértice; (b) mudança de carregamento

O tratamento de descontinuidades no contorno se faz utilizando-se o artifício do nó duplo, da mesma maneira que no MEC. Para o caso do OMLS, isso acarreta uma descontinuidade em Ω_x do ponto onde se quer avaliar a função, isto é, apenas um dos pontos de mesma coordenada é considerado e nenhum outro a partir dele (Fig.3.6).

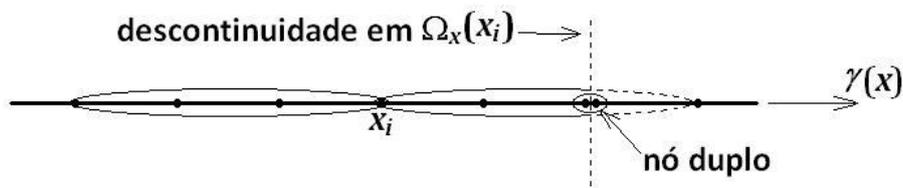


Figura 3.6 – descontinuidade de Ω_x em presença de nó duplo

3.6. Descontinuidades no domínio

Uma vez existindo uma descontinuidade de potenciais ou deslocamentos em Ω , o esquema de interpolação deve levar este quesito em consideração. O procedimento

adotado no OMLS é o mesmo apresentado em CHEN *et al.*(2004), consistindo na restrição do suporte dos nós utilizando o chamado critério de “visibilidade”, apresentado na Fig.3.7, para o qual a descontinuidade é considerada opaca para um observador posicionado sobre o nó em questão e somente os nós dentro de Ω_x que podem ser vistos são considerados na aproximação.

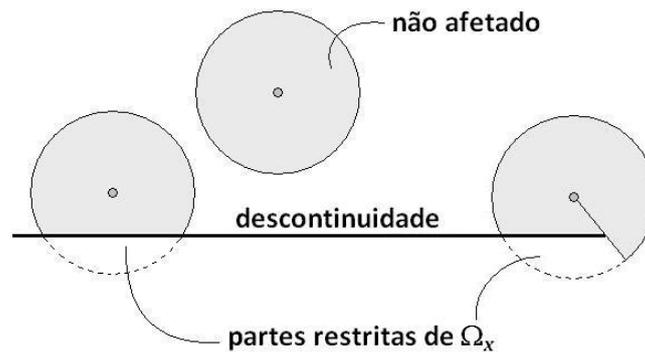


Figura 3.7 – critério de “visibilidade” adotado na presença da descontinuidade

3.7. Método da Equação Integral de Contorno Local – LBIE

Como as aplicações exploradas pelo LBIE neste trabalho são todas no regime elástico linear, os termos não-lineares das equações apresentadas neste capítulo serão desconsiderados.

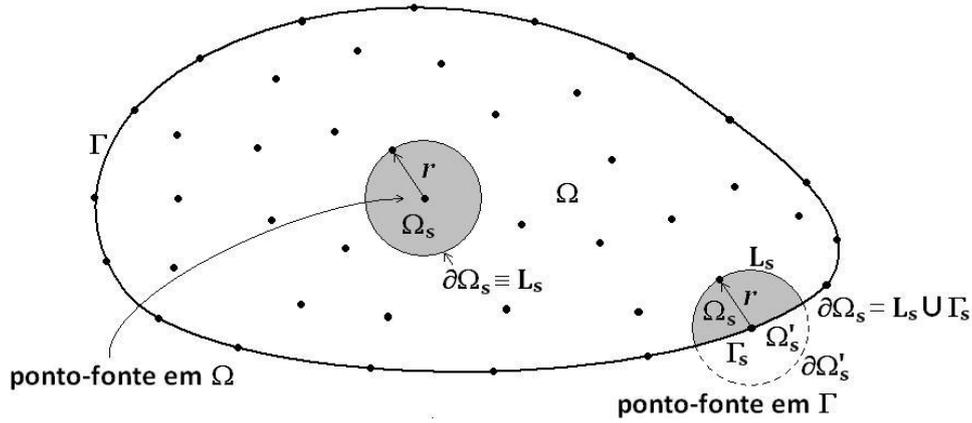


Figura 3.8 – sub-domínios de integração

Considere-se, para fins de integração, ao invés de Ω e Γ , um sub-domínio Ω_s , cujo formato é um círculo ou semi-círculo (para o caso bidimensional, e uma esfera ou semi-esfera para o caso tridimensional) centrado em ξ , e seu contorno $\partial\Omega_s$. O raio deste círculo é igual à distância entre ξ e o ponto mais próximo a ele. Os casos de Ω_s e $\partial\Omega_s$ para ξ localizado no domínio ou no contorno são apresentados na Fig.3.8. Em conjunto, estes sub-domínios Ω_s devem se sobrepor de tal forma que o domínio real Ω seja completamente abrangido por eles.

Com isso, a identidade de Somigliana apresentada na eq.(2.48) pode ser escrita da seguinte forma

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_{\partial\Omega_s} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})p_j(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\partial\Omega_s} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x})d\Gamma \quad (3.25)$$

onde o contorno real do problema é substituído pelo contorno de Ω_s . Adotando-se a interpolação OMLS de $u_j(\mathbf{x})$ da eq.(3.23)

$$u_j(\mathbf{x}) = \bar{\phi}_k u_j(\mathbf{x}_k) \quad (3.26)$$

e, para $p_j(\mathbf{x})$, considerando-se a versão OMLS para interpolação de domínio da eq.(3.16), a Lei de Hooke (eq.(2.4)) e as condições de contorno das forças de superfície (eq.(2.3)), tem-se que

$$p_j(\mathbf{x}) = N_{jl} D_{lm} B_{mn}^{(k)}(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}_k) \quad (3.27)$$

ou, em notação matricial,

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{NDB}^{(k)}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \quad (3.28)$$

onde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{D} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{B}^{(k)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{k,1} & 0 \\ 0 & \bar{\phi}_{k,2} \\ \bar{\phi}_{k,2} & \bar{\phi}_{k,1} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Com isso, a eq.(3.25) pode ser reescrita, de forma matricial, para o ponto ξ , como

$$\mathbf{c}(\xi)\mathbf{u}(\xi) = \int_{\partial\Omega_s} \mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}) \mathbf{NDB}^{(k)}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) d\Gamma - \int_{\partial\Omega_s} \mathbf{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\phi}_k \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) d\Gamma \quad (3.32)$$

onde, para o caso bidimensional,

$$\mathbf{c}(\xi) = \begin{bmatrix} c_{11}(\xi) & c_{12}(\xi) \\ c_{21}(\xi) & c_{22}(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi, \mathbf{x}) & u_{12}^*(\xi, \mathbf{x}) \\ u_{21}^*(\xi, \mathbf{x}) & u_{22}^*(\xi, \mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{p}^*(\xi, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} p_{11}^*(\xi, \mathbf{x}) & p_{12}^*(\xi, \mathbf{x}) \\ p_{21}^*(\xi, \mathbf{x}) & p_{22}^*(\xi, \mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

A eq.(3.32) representa uma equação para cada direção considerada. Para o caso bidimensional, isso acarreta em duas equações para cada ponto-fonte.

De acordo com a Fig.3.8, de forma geral, o contorno do subdomínio que se encontra em Ω_s , $\partial\Omega_s$, pode ser dividido em duas partes distintas: L_s , que corresponde à parte circular do contorno, e Γ_s , que é o trecho que compreende parte do contorno real do problema, Γ . Ainda, tem-se que Γ_s pode ser matematicamente dividido em dois trechos: Γ_{su} , que corresponde ao trecho onde os deslocamentos são prescritos, e Γ_{sp} , que é o trecho onde as forças de superfícies são conhecidas.

A consideração destas divisões de Ω_s em conjunto com os valores prescritos de deslocamentos e forças de superfície (vide eq.(2.3)) em seus respectivos locais, leva a eq.(3.32) à seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(\xi)\mathbf{u}(\xi) &= \int_{L_s} [\mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x})\mathbf{NDB}^{(k)}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^*(\xi, \mathbf{x})\bar{\phi}_k] \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x})\mathbf{NDB}^{(k)}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{sp}} \mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma_{sp}} \mathbf{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\phi}_k \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.37)$$

Após o rearranjo, a eq.(3.37), considerando uma equação por direção por ponto fonte, tem a seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) = \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.38)$$

onde N é o total de pontos,

\mathbf{K}_{ij}

$$= \begin{cases} \left[\mathbf{c}(\mathbf{x}_i) + \int_{L_s} [\mathbf{p}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \bar{\phi}_k - \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \mathbf{NDB}^{(k)}(\mathbf{x})] d\Gamma - \right. \\ \left. \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \mathbf{NDB}^{(k)}(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{sp}} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \bar{\phi}_k d\Gamma \right] & p / \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \neq \bar{\mathbf{u}} \\ \left[\int_{L_s} [\mathbf{p}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \bar{\phi}_k - \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \mathbf{NDB}^{(k)}(\mathbf{x})] d\Gamma - \right. \\ \left. \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \mathbf{NDB}^{(k)}(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma_{sp}} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \bar{\phi}_k d\Gamma \right] & p / \text{demais} \end{cases} \quad (3.39)$$

e

\mathbf{f}_i

$$= \begin{cases} \left[\int_{\Gamma_{sp}} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma - \mathbf{c}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) \right] & p / \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \bar{\mathbf{u}} \\ \left[\int_{\Gamma_{sp}} \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma \right] & p / \text{demais} \end{cases} \quad (3.40)$$

Após a resolução do sistema de equações de ordem $2N$, eq.(3.38), deve-se utilizar a eq.(3.27) para se encontrar as forças de superfície em cada ponto a partir dos deslocamentos.

3.8. Boundary Element-Free Method – BEFM

Considere-se o contorno real do problema Γ dividido em vários subcontornos Γ_n (Fig.3.9a), tendo-se que

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{NC} \Gamma_n \quad (3.41)$$

onde NC é o número de subcontornos. Para o caso bidimensional, Γ_n é uma linha unida a Γ_{n-1} e Γ_{n+1} através de pontos. É importante salientar que Γ_n não é um elemento de contorno, pois não há funções de forma que dependam dele. Essa divisão é feita somente para fins de integração, tanto de contorno quanto de domínio, pois o domínio real Ω pode ser subdividido a partir da divisão do contorno, de acordo com a Fig.3.9b. Logo, Ω pode também ser subdividido em NC subdomínios Ω_n onde, da mesma forma que para Γ ,

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{NC} \Omega_n \quad (3.42)$$

Porém, ao contrário do que ocorre para o contorno, a configuração da subdivisão de Ω muda de acordo com a posição do ponto-fonte considerado.

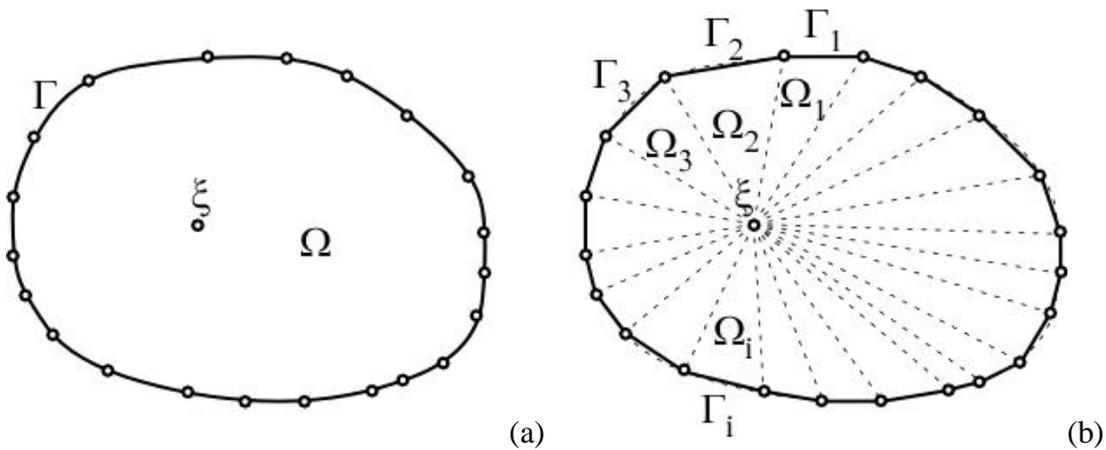


Figura 3.9 – divisões do contorno e domínio

Com isso, a eq.(2.66) fica com a seguinte forma, ao desconsiderar as forças de volume,

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\xi)u_j(\xi) &= \sum_{n=1}^{NC} \int_{\Gamma_n} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \sum_{n=1}^{NC} \int_{\Gamma_n} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \\
&\quad - \sum_{n=1}^{NC} \int_{\Omega_n} \varepsilon_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Substituindo-se os deslocamentos, forças de superfícies e tensões plásticas fictícias da eq.(3.43) por suas respectivas interpolações OMLS

$$u_j(\mathbf{x}) = \bar{\phi}_m(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}_m) \tag{3.44}$$

$$p_j(\mathbf{x}) = \bar{\phi}_m(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_m) \tag{3.45}$$

$$\sigma_{jk}^p(\mathbf{x}) = \bar{\phi}_m(\mathbf{x}) \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}_m) \tag{3.46}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\xi)u_j(\xi) &= \sum_{n=1}^{NC} \int_{\Gamma_n} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\phi}_m(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_m) d\Gamma \\
&\quad - \sum_{n=1}^{NC} \int_{\Gamma_n} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\phi}_m(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}_m) d\Gamma \\
&\quad - \sum_{n=1}^{NC} \int_{\Omega_n} \varepsilon_{jki}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\phi}_m(\mathbf{x}) \sigma_{jk}^p(\mathbf{x}_m) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.47}$$

que, na forma matricial, corresponde à

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^p \tag{3.48}$$

Considerando-se as interpolações das eqs.(3.44), (3.45) e (3.46) e as subdivisões em Ω e Γ na eq.(2.71), correspondente à equação integral das tensões em pontos internos, tem-se, desconsiderando as forças de volume,

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(\xi) = & \sum_{n=1}^{NC} \int_{\Gamma_n} u_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\phi}_m(\mathbf{x}) p_k(\mathbf{x}_m) d\Gamma \\
& - \sum_{n=1}^{NC} \int_{\Gamma_n} p_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\phi}_m(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}_m) d\Gamma \\
& + \sum_{n=1}^{NC} \int_{\Omega_n} \varepsilon_{ijkl}^*(\xi, \mathbf{x}) \bar{\phi}_m(\mathbf{x}) \sigma_{kl}^p(\mathbf{x}_m) d\Omega + g_{ij}[\sigma_p(\xi)]
\end{aligned} \tag{3.49}$$

cuja forma matricial é

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}'\mathbf{p} - \mathbf{H}'\mathbf{u} + \mathbf{Q}^*\boldsymbol{\sigma}^p \tag{3.50}$$

Impondo-se as condições de contorno e rearranjando as eqs.(3.48) e (3.50) de forma a separar os termos incógnitos dos prescritos, elas respectivamente tomam as seguintes formas

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{f} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^p \tag{3.51}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{A}'\mathbf{y} + \mathbf{f}' + \mathbf{Q}^*\boldsymbol{\sigma}^p \tag{3.52}$$

As eqs.(3.51) e (3.52) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}\boldsymbol{\sigma}^p + \mathbf{m} \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}^p + \mathbf{n} \tag{3.54}$$

onde

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q} \tag{3.55}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \tag{3.56}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}^* - \mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q} \tag{3.57}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{f}' - \mathbf{A}'\mathbf{m} \tag{3.58}$$

A partir das eqs.(3.53) e (3.54), é possível analisar problemas envolvendo heterogeneidades de meio, sejam elas constitutivas, como no caso dos materiais

funcionalmente graduados, ou devidas ao aparecimento de regiões onde o limite elástico do material é excedido, desenvolvendo regiões plásticas.

CAPÍTULO 4 – FUNÇÃO DE GREEN NUMÉRICA PARA PROBLEMAS DE MECÂNICA DE FRATURA

4.1. Introdução

Nesta seção são apresentadas as formulações da NGF para problemas de mecânica da fratura elastostática bidimensional. Sua obtenção se dá a partir da superposição de soluções que será vista a seguir.

4.2. Função de Green

No âmbito da elasticidade bidimensional, dá-se o nome de função de Green à toda solução fundamental correspondente ao problema da carga unitária aplicada em um ponto contido num domínio com características específicas (infinito, semi-infinito, ortotrópico, entre outros). Ela tanto pode ser analítica, como a própria solução de Kelvin para o plano infinito, ou numérica, como a que será apresentada a seguir.

Para a mecânica da fratura, a função de Green é a solução para um domínio que contém trincas descarregadas. Ela é obtida numericamente a partir da superposição das soluções para deslocamento e força de superfície relativas ao problema fundamental de Kelvin e das relativas a um problema complementar, de acordo com a Fig.4.1.

A primeira configuração de carregamento (*) representa um problema em meio infinito com fissura(s) submetida(s) às forças p_{ij}^* obtidas supondo-se o problema fundamental de Kelvin, Ω^* , submetido a uma carga unitária na direção i no ponto ξ . A continuidade das tensões despertadas nos pontos coincidentes com a fissura Γ_f inserida é garantida aplicando-se a condição de contorno das forças de superfície, $p_i = \sigma_{ij}m_j$, onde σ_{ij} é a tensão interna nos pontos da trinca e m_j é a normal externa à cavidade da

trinca, formada por duas superfícies coincidentes. Uma vez que ocorre uma continuidade de deslocamentos e forças de superfície no local da fissura, a solução fundamental para o problema (*) é igual à solução fundamental analítica de Kelvin.

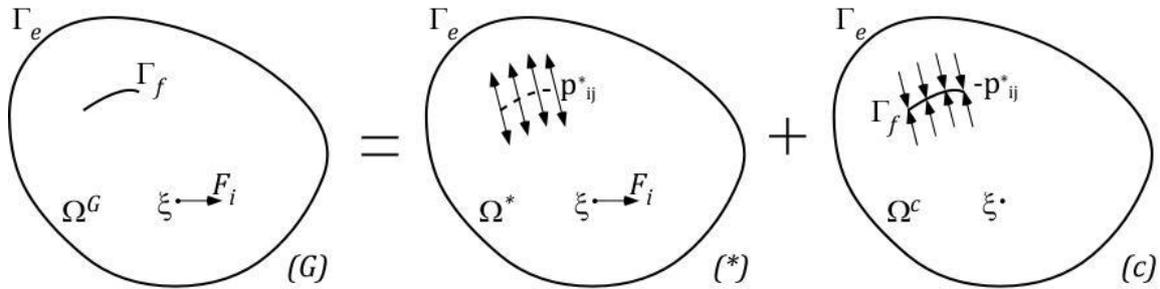


Figura 4.1 – superposição de efeitos da NGF

A segunda parcela consiste em um problema em meio infinito Ω^c , com uma fissura carregada com as mesmas forças de superfície aplicadas em (*), em pontos pertencentes ao contorno da trinca, porém com sentidos contrários. A solução para a parte complementar (c) é obtida numericamente através do emprego da formulação clássica e hipersingular do MEC.

A função de Green é então composta pela soma das soluções de Kelvin e complementar, de acordo com a expressão abaixo (CASTOR, 1993),

$$u_{ij}^G(\xi, \mathbf{x}) = u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) + u_{ij}^c(\xi, \mathbf{x}) \quad (4.1)$$

$$p_{ij}^G(\xi, \mathbf{x}) = p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) + p_{ij}^c(\xi, \mathbf{x}) \quad (4.2)$$

4.3. Solução do problema complementar

Considere-se a Identidade de Somigliana para deslocamentos, desconsiderando-se os termos de domínio, apresentada na eq.(2.48), agora aplicada no domínio infinito Ω^c com contorno externo Γ^e e contorno da trinca Γ^f ,

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma^e} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma^e} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Gamma^f} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma^f} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.3)$$

onde $\xi \in \Omega^c$ e $\mathbf{x} \in (\Gamma^e \cup \Gamma^f)$. Como as integrais em Γ^e se anulam por causa da satisfação das condições de regularidade no infinito, a eq.(4.3) é reescrita como

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma^f} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma^f} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.4)$$

Para o problema complementar, tem-se que os efeitos são devidos à aplicação de uma carga unitária na direção k em um ponto-fonte ζ . Logo, a eq.(4.4) toma a seguinte forma

$$u_{ki}^c(\zeta, \xi) = \int_{\Gamma^f} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_{kj}^c(\zeta, \mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma^f} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_{kj}^c(\zeta, \mathbf{x}) d\Gamma \quad (4.5)$$

e, substituindo-se na primeira integral a força de superfície calculada no contorno da trinca pelo oposto da força de superfície de Kelvin em seu respectivo problema

$$p_{kj}^c(\zeta, \mathbf{x}) = -p_{kj}^*(\zeta, \mathbf{x}) \quad (4.6)$$

e reorganizando-se os índices de forma a compatibilizar as eqs.(4.5), (4.1) e (4.6), tem-se

$$u_{ij}^c(\xi, \mathbf{x}) = - \int_{\Gamma^f} u_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta) p_{ik}^*(\xi, \zeta) d\Gamma - \int_{\Gamma^f} p_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta) u_{ik}^c(\xi, \zeta) d\Gamma \quad (4.7)$$

O contorno da trinca Γ^f pode ser dividido em contornos superior Γ^s e inferior Γ^i . Como no problema eles são coincidentes, tem-se que $u_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta)$ são iguais e que $p_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta)$ são opostos. Logo, a eq.(4.7) se torna, escrita em termos de Γ^i ,

$$\begin{aligned}
u_{ij}^c(\xi, \mathbf{x}) = & - \int_{\Gamma^i} u_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta) [p_{ik}^*(\xi, \zeta^s) + p_{ik}^*(\xi, \zeta^i)] d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma^i} p_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta) [u_{ik}^c(\xi, \zeta^s) - u_{ik}^c(\xi, \zeta^i)] d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Sabendo que a solução de Kelvin produz um campo de tensões contínuo, pode-se concluir que

$$p_{ik}^*(\xi, \zeta^s) = -p_{ik}^*(\xi, \zeta^i) \tag{4.9}$$

e, com isso, o deslocamento complementar fica definido como

$$u_{ij}^c(\xi, \mathbf{x}) = \int_{\Gamma^i} p_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma \tag{4.10}$$

onde $c_{ik}(\xi, \zeta) = u_{ik}^c(\xi, \zeta^s) - u_{ik}^c(\xi, \zeta^i)$ é a abertura fundamental da trinca na direção k quando uma carga unitária é aplicada na direção i em $\xi \in \Omega^*$.

A expressão para a parte complementar da força de superfície é obtida da mesma forma que os deslocamentos, só que a partir da equação hipersingular, resultando em

$$p_{ij}^c(\xi, \mathbf{x}) = \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma \tag{4.11}$$

Para se determinar as partes complementares da função de Green, é necessário determinar a abertura fundamental, uma vez que $p_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta)$ e $P_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta)$ são conhecidos.

A abertura fundamental é obtida a partir da eq.(4.11), levando-se o ponto \mathbf{x} para o contorno da trinca, no problema complementar, através de um processo de limite (CASTOR, 1993), sabe-se que

$$p_{ij}^c(\xi, \bar{\zeta}) = \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\bar{\zeta}, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma \tag{4.12}$$

onde $\bar{\zeta}$ é o ponto-fonte do problema complementar pertencente à trinca. Com isso, a integral da eq.(4.12) é calculada no sentido de Parte Finita de Hadamard. Adotando-se em conjunto as eqs.(4.6) e (4.12), levando em conta que sua resolução será numérica e empregando-se o método dos resíduos ponderados com a função-peso igual ao delta de Dirac $\delta(\bar{\zeta}_m, \zeta)$, $m = 1, 2, \dots, M$, onde $\bar{\zeta}_m$ é o ponto de colocação, tem-se

$$-p_{ij}^*(\xi, \bar{\zeta}_m) = \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \zeta) d\Gamma \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (4.13)$$

A abertura da trinca pode ser interpolada com N pontos $\zeta_n \in \Gamma^i$, em princípio não relacionados com $\bar{\zeta}_m$, porém tendo-se $N = M$ para que o sistema de equação tenha solução simples.

Ao se resolver a integral da eq.(4.13) com o método da quadratura Gaussiana, há a necessidade de se introduzir um termo corretivo $E_{ij}(\xi, \bar{\zeta}_m)$, em função deste método não contemplar a parte finita. Com isso, ela pode ser reescrita como

$$\sum_{n=1}^N P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta_n) c_{ik}(\xi, \zeta_n) W_n |J_n| - E_{ij}(\xi, \bar{\zeta}_m) = -p_{ij}^*(\xi, \bar{\zeta}_m) \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (4.14)$$

onde ζ_n se refere às coordenadas reais do pontos de Gauss adotados, W_n são os pesos respectivamente associados e J_n é o jacobiano da transformação de coordenadas.

Considerando-se a aproximação em série de Taylor para a abertura $c_{ik}(\xi, \zeta)$ em torno de $\bar{\zeta}_m$

$$c_{ik}(\xi, \zeta) = c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m) + \frac{\partial c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)} [\Gamma(\zeta) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)^2} [\Gamma(\zeta) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)]^2 + \dots \quad (4.15)$$

e substituindo-se a eq.(4.15) em (4.13), tem-se que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m) d\Gamma + \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta) \frac{\partial c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)} [\Gamma(\zeta) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)] d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)^2} [\Gamma(\zeta) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)]^2 + \dots \right\} d\Gamma \quad (4.16) \\
& = -p_{ij}^*(\xi, \bar{\zeta}_m)
\end{aligned}$$

onde a primeira integral possui singularidade de ordem $(1/r^2)$ e é calculada no sentido de partes finitas, a segunda integral possui singularidade de ordem $(1/r)$ e é calculada no sentido do valor principal de Cauchy e a última integral não possui singularidade e é calculada normalmente. Considerando-se, de acordo com a eq.(4.15), a expressão abaixo

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)^2} [\Gamma(\zeta) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)]^2 + \dots \\
& = c_{ik}(\xi, \zeta) - c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m) - \frac{\partial c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)} [\Gamma(\zeta) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)] \quad (4.17)
\end{aligned}$$

e substituindo-a na eq.(4.16), já se tendo em conta a forma numérica da integral regular, tem-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta) c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m) d\Gamma + \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta) \frac{\partial c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)} [\Gamma(\zeta) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)] d\Gamma \\
& + \sum_{n=1}^N P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta_n) W_n |J_n| \left\{ c_{ik}(\xi, \zeta_n) - c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m) \right. \\
& \left. - \frac{\partial c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)} [\Gamma(\zeta_n) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)] \right\} = -p_{ij}^*(\xi, \bar{\zeta}_m) \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Ao se comparar as eqs.(4.14) e (4.18), chega-se a:

$$E_{ij}(\xi, \bar{\zeta}_m) = c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m) e_{jk}^{(1)} + \frac{\partial c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)} e_{jk}^{(2)} \quad (4.19)$$

onde todos os termos são definidos para o ponto de colocação $\bar{\zeta}_m$, além de

$$e_{jk}^{(1)} = \sum_{n=1}^N P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta_n) W_n |J_n| - \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta) d\Gamma \quad (4.20)$$

sendo a integral no sentido de partes finitas e

$$e_{jk}^{(2)} = \sum_{n=1}^N P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta_n) [\Gamma(\zeta) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)] W_n |J_n| - \int_{\Gamma^i} P_{jk}^*(\bar{\zeta}_m, \zeta) [\Gamma(\zeta_n) - \Gamma(\bar{\zeta}_m)] d\Gamma \quad (4.21)$$

no sentido de Valor Principal de Cauchy.

Utilizando-se a seguinte aproximação por polinômio de Lagrange de grau $N + 1$ (vide Apêndice B)

$$c_{ik}(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^N D_n(\eta) c_{ik}(\xi, \zeta_n) \quad (4.22)$$

onde $\eta = \Gamma^i/a$ é a coordenada natural relativa à trinca de comprimento $2a$, a derivada da abertura pode ser calculada como sendo

$$\frac{\partial c_{ik}(\xi, \bar{\zeta}_m)}{\partial \Gamma(\zeta)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{a} \frac{\partial D_n(\eta)}{\partial \eta} c_{ik}(\xi, \zeta_n) \quad (4.23)$$

Como o erro pode ser agora escrito somente em termos da abertura, substituindo as eqs.(4.20), (4.21) (4.22) e (4.23) em (4.19) e a expressão resultante na eq.(4.14), tem-se em forma matricial

$$\mathbf{S}(\bar{\zeta}_m, \zeta_n) \mathbf{c}(\xi, \bar{\zeta}_m) = \mathbf{p}(\xi, \bar{\zeta}_m) \quad (4.24)$$

onde $\mathbf{S}(\bar{\zeta}_m, \zeta_n)$ é uma matriz que depende somente da geometria da trinca, $\mathbf{c}(\xi, \bar{\zeta}_m)$ é o vetor das aberturas relacionadas à carga unitária aplicada em ξ (incógnitas) e $\mathbf{p}(\xi, \bar{\zeta}_m)$ é o vetor contendo os valores de $-p_{ij}^*(\xi, \bar{\zeta}_m)$.

Uma vez obtidas as aberturas da trinca para ξ , a solução complementar para deslocamentos e forças de superfície pode ser determinada numericamente por quadratura Gaussiana e somada à solução de Kelvin, gerando a FGN para a trinca, de acordo com o seguinte

$$u_{ij}^G(\xi, \mathbf{x}) = u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N p_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta_n) c_{ik}(\xi, \zeta_n) W_n |J_n| \quad (4.25)$$

$$p_{ij}^G(\xi, \mathbf{x}) = p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N P_{jk}^*(\mathbf{x}, \zeta_n) c_{ik}(\xi, \zeta_n) W_n |J_n| \quad (4.26)$$

Ao adotar-se a FGN na equação integral de contorno, eq.(2.66), no lugar da solução fundamental de Kelvin, não há mais a necessidade de se integrar ao longo do contorno da trinca, desconsiderando-se assim sua discretização.

CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO EM PROBLEMAS ELASTOPLÁSTICOS

5.1. Introdução

Nesta seção são apresentadas as equações constitutivas para problemas elastoplásticos. De forma a se preservar o caráter geral da implementação, as equações apresentadas não possuem nenhuma particularidade no que diz respeito ao critério de escoamento, como apresentado em MIERS e TELLES (2004).

Com base nestas equações, é proposto um algoritmo implícito para a solução de problemas elastoplásticos independente de critério de escoamento.

5.2. Equações constitutivas da plasticidade

Como, no regime plástico, o estado final das deformações depende da história da aplicação do carregamento, as relações tensão-deformação correspondentes ao comportamento elastoplástico devem ser escritas de forma incremental (TELLES, 1983). Com isso, a eq.(2.31) pode ser reescrita, somente em termos de incrementos de deformação, como

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (5.1)$$

Considerando-se a hipótese de normalidade dos incrementos de deformação plástica, isto é, que a ocorrência de incrementos de deformação plástica se dá na direção normal da superfície de escoamento relativa ao critério de escoamento adotado, tem-se que, de acordo com a eq.(2.16)

$$d\varepsilon_{kl}^p = d\lambda \frac{\partial F(\sigma_{kl}, k)}{\partial \sigma_{kl}} \quad (5.2)$$

onde $d\lambda$ é o chamado multiplicador plástico. Substituindo-se (5.2) em (5.1) tem-se

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - a_{kl}d\lambda) \quad (5.3)$$

onde

$$a_{kl} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad (5.4)$$

Da eq.(2.16), obtém-se também o seguinte

$$dF = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial \psi(k)}{\partial k} dk = 0 \quad (5.5)$$

que, considerando-se a eq.(5.3), (5.4) e (2.18), leva a

$$a_{ij}d\sigma_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial k} \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad (5.6)$$

ou, de outra maneira,

$$a_{ij}d\sigma_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial k} \sigma_{ij}a_{ij}d\lambda = 0 \quad (5.7)$$

Como $f(\sigma_{ij})$ é uma função homogênea de grau unitário, a seguinte relação é válida

$$\sigma_{ij}a_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = f(\sigma_{ij}) = \sigma_e \quad (5.8)$$

levando a eq.(5.8) a eq.(5.7), tem-se

$$a_{ij}d\sigma_{ij} - \frac{\partial\psi}{\partial k}\sigma_e d\lambda = 0 \quad (5.9)$$

A partir das eqs.(5.2), (5.3), (5.4) e (5.9), o multiplicador plástico é definido como

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma'} a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (5.10)$$

onde

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{\partial\psi}{\partial k} \sigma_e \quad (5.11)$$

ou, de acordo com a eq.(2.19),

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{d\psi}{d\varepsilon_e^p} \quad (5.12)$$

Se ψ representar a tensão de escoamento uniaxial, então

$$\frac{d\psi}{d\varepsilon_e^p} = H' = \frac{E \cdot E_T}{E - E_T} \quad (5.13)$$

A forma incremental das relações tensão-deformação é obtida com a substituição da eq.(5.10) em (5.3), resultando na seguinte expressão

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (5.14)$$

onde

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{op} C_{opkl} = C_{ijkl} - D_{ijop} C_{opkl} \quad (5.15)$$

Considerando a seguinte relação como sendo o chamado incremento de tensão elástica fictícia

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (5.16)$$

tem-se que a eq.(5.14) pode ser reescrita como

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^e - D_{ijop} d\sigma_{op}^e \quad (5.17)$$

A eq.(5.17) indica que os incrementos de tensão real podem ser calculados a partir dos incrementos de tensão elástica fictícia, onde os incrementos de tensão plástica fictícia são definidos por

$$d\sigma_{op}^p = D_{ijop} d\sigma_{op}^e \quad (5.18)$$

5.3. Procedimentos da implementação

A tensão em qualquer momento pode ser calculada a partir da tensão relacionada à última mudança do estado de tensões e do atual incremento de tensão da seguinte forma

$$\sigma_{ij}|_{agora} = \sigma_{ij}|_{antes} + \Delta\sigma_{ij} \quad (5.19)$$

e, considerando-se a hipótese de endurecimento na plastificação (*work hardening*), o incremento de tensão é definido como

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^e - \Delta\sigma_{ij}^p = \Delta\sigma_{ij}^e - C_{ijkl} a_{kl} \Delta\varepsilon_e^p \quad (5.20)$$

onde $\Delta\varepsilon_e^p$ é o incremento de deformação plástica equivalente, o qual é determinado através da resolução da seguinte equação não-linear geral de consistência

$$\sigma_e|_{\sigma_{ij}+\Delta\sigma_{ij}} = \sigma_e|_{\sigma_{ij}+\Delta\sigma_{ij}^e} - C_{ijkl} a_{kl} a_{ij} \Delta\varepsilon_e^p \quad (5.21)$$

e, para este caso

$$a_{ij} = \frac{\partial \sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}^e}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.22)$$

onde $\sigma_e = f(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}^e)$ é o incremento de tensão equivalente considerando-se um incremento de tensão puramente elástico.

A eq.(5.21) é obtida através de uma expansão em série de Taylor da tensão equivalente real em torno de seu valor calculado para o último passo de carga mais um incremento de tensão “elástica” fictícia. Matematicamente, isto pode ser escrito como se segue

$$\sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}} = \sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}^e} + \frac{\partial \sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}^e}}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \Delta \varepsilon_{ij}^p \quad (5.23)$$

Expandindo o segundo termo da direita da eq. (5.23), tem-se

$$\sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}} = \sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}^e} + \frac{\partial \sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}^e}}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \Delta \varepsilon_{ij}^p = \sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}^e} + a_{kl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \Delta \varepsilon_{ij}^p \quad (5.24)$$

Considerando a não-dependência entre a tensão puramente elástica e a deformação plástica, o seguinte é observado

$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = \frac{\partial \sigma_{kl}^e}{\partial \varepsilon_{ij}^p} - \frac{\partial \sigma_{kl}^p}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = - \frac{\partial \sigma_{kl}^p}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = -C_{kl ij} = -C_{ijkl} \quad (5.25)$$

Substituindo a eq. (5.25) na (5.24), tem-se

$$\sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}} = \sigma_e |_{\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}^e} - C_{ijkl} a_{kl} \Delta \varepsilon_{ij}^p \quad (5.26)$$

Considerando a hipótese de *work hardening*, a eq.(5.26) se torna a eq.(5.21). Tal equação inclui, como caso particular, a equação de consistência apresentada por SIMO e TAYLOR (1985) baseada no critério de von Mises e utilizada no contexto do MEC por BONNET e MUKHERJEE (1996), porém é apresentada aqui em uma forma mais geral, sem restrição quanto ao critério de escoamento utilizado.

De forma a calcular os incrementos de tensão elástica no processo, o termo livre g_{ij} da eq.(2.71) é substituído por $\bar{g}_{ij} = g_{ij} + \delta_{ij}$, o que leva à substituição da matriz \mathbf{S} da eq.(3.54) por $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade. A eq.(3.54) pode ser agora reescrita, de forma incremental,

$$\Delta\sigma^e = (\mathbf{S} + \mathbf{I})\Delta\sigma^p + \Delta\mathbf{n} = \bar{\mathbf{S}}\Delta\sigma^p + \Delta\mathbf{n} \quad (5.27)$$

Substituindo a eq.(5.18) em (5.27) e rearranjando, tem-se

$$\bar{\mathbf{S}}\mathbf{D}\Delta\sigma^e - \Delta\sigma^e + \Delta\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.28)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz de acordo com a eq.(5.15), cuja forma é

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} [\mathbf{d}] & [\mathbf{0}] & \dots & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{d}] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ [\mathbf{0}] & \dots & \dots & [\mathbf{d}] \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

onde as submatrizes $[\mathbf{d}]$ fazem o papel do termo D_{ijop} .

Considerando-se o escopo numérico do procedimento, a eq.(5.28) é reescrita como o seguinte

$$\mathfrak{R}(\Delta\sigma^e) \equiv (\bar{\mathbf{S}}\mathbf{D} - \mathbf{I})\Delta\sigma^e + \Delta\mathbf{n} \approx \mathbf{0} \quad (5.30)$$

onde $\mathfrak{R}(\Delta\sigma^e)$ é o resíduo a se aproximar de zero. Esta equação é não-linear e pode ser resolvida utilizando-se o método de Newton. Neste caso, a correção $\delta\sigma^e = \Delta\sigma_n^e - \Delta\sigma_{n-1}^e$, que é a diferença entre os incrementos de tensão puramente elástica na n -ésima e $(n + 1)$ -ésima iteração, é solução de

$$[\bar{\mathbf{S}}\mathbf{D} - \mathbf{I}]\delta\sigma^e = \mathfrak{R}(\Delta\sigma^e) \quad (5.31)$$

onde os termos entre barras definem a matriz tangente (TELLES, 1985), também chamada de operador tangente global (POON *et al.*, 1998; PAULINO e LIU, 2001). Notar que as componentes do operador tangente global que multiplicam as correções

$\delta\sigma^e$ relativas a nós elásticos são idênticas às do tensor identidade, isto é, onde a plasticidade não se desenvolveu, $\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Este fato é de grande relevância no desempenho da implementação, uma vez que o sistema de equações apresentado deve ser resolvido uma vez por iteração.

O critério de convergência, medido em termos da norma discreta do resíduo em todos os nós, é definido como

$$\|\mathfrak{R}(\Delta\sigma^e)\|^{def} = \sqrt{\frac{\sum(|\mathfrak{R}(\Delta\sigma^e)|)^2}{4N}} \leq TOL \quad (5.32)$$

onde TOL é um número tão pequeno quanto se queira e $2N$ é a ordem do vetor $\mathfrak{R}(\Delta\sigma^e)$.

A estrutura do algoritmo implícito é a que se segue:

Para $0 \leq n \leq (N_T - 1)$:

1. Calcular $\Delta\mathbf{n} = \omega\mathbf{n}$
2. Inicializar $\Delta\sigma^e = \Delta\mathbf{n}$

Solução iterativa da eq.(5.30):

2.1. $i = 0$

2.2. Calcular o resíduo $\mathfrak{R}(\Delta\sigma^e)$

2.3. Testar se a condição de convergência (eq.(5.32)) é satisfeita; caso SIM, ir para 3.

2.4. $i = i + 1$

2.5. Calcular os operadores tangentes locais para todos os nós e determinar qual é plástico ou elástico.

2.6. Gerar o operador tangente global.

2.7. Resolver a eq.(5.31).

2.8. Atualizar $\Delta\sigma^e = \Delta\sigma^e + \delta\sigma^e$

2.9. Ir para 2.2 para nova iteração.

3. Atualizar:

$$3.1. \varepsilon_e^p = \varepsilon_e^p + \Delta\varepsilon_e^p$$

$$3.2. \sigma = \sigma + (I + D)\Delta\sigma^e$$

onde n é a carga onde a plastificação se inicia (carga de primeiro escoamento), ω é o percentual de incremento de carga dado em termos de n e N_T é o número total de incrementos de carga adotados no processo. A carga de primeiro escoamento é determinada resolvendo-se o problema como se ele fosse puramente elástico, de forma a se definir o ponto onde há a maior tensão equivalente. Esta tensão é comparada com a tensão de escoamento do material e a razão entre elas é aplicada ao carregamento total, gerando-se assim n .

É importante notar que a aplicação do item 3.2 do algoritmo tem o mesmo efeito do algoritmo de retorno radial – RRA, do inglês *Radial Return Algorithm* (SIMO e TAYLOR, 1985; BONNET e MUKHERJEE, 1996; POON *et al.*, 1998; PAULINO e LIU, 2001). Esta denominação não é mais adequada, tendo em vista que ela é originária da particularização para o critério de von Mises, não tão geral como discutido aqui.

CAPÍTULO 6 – APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO EM MEIOS HETEROGÊNEOS

6.1. Introdução

Nesta seção serão vistas as equações constitutivas para os materiais de propriedades gradualmente variáveis – FGM's, além dos respectivos algoritmos de resolução via equação integral de contorno (MIERS e TELLES, 2007).

6.2. Equações constitutivas

Matematicamente, os problemas envolvendo FGM's são descritos por equações diferenciais parciais com coeficientes variáveis. Para o caso específico da análise de tensões, a Lei de Hooke toma a seguinte forma

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl} \quad (6.1)$$

onde, se for considerada apenas a variação do módulo de Young $E(\mathbf{x})$ com relação às coordenadas cartesianas,

$$C_{ijkl}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})C_{ijkl}^0 \quad (6.2)$$

$$G(\mathbf{x}) = \frac{E(\mathbf{x})}{2(1 + \nu)} \quad (6.3)$$

e

$$C_{ijkl}^0 = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1 - 2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (6.4)$$

Pode-se escrever $E(\mathbf{x})$ como

$$E(\mathbf{x}) = \bar{E} + E^v(\mathbf{x}) \quad (6.5)$$

onde \bar{E} é uma parcela constante comum a todos os pontos do meio e $E^v(\mathbf{x})$ é função da posição. Substituindo a eq.(6.5) e (6.3) em (6.2) tem-se

$$C_{ijkl}(\mathbf{x}) = \frac{\bar{E} + E^v(\mathbf{x})}{2(1 + \nu)} C_{ijkl}^0 = \bar{C}_{ijkl} + C_{ijkl}^v(\mathbf{x}) \quad (6.6)$$

onde \bar{C}_{ijkl} é o tensor elástico para meio homogêneo e $C_{ijkl}^v(\mathbf{x})$ representa o tensor relativo à “correção” das tensões devidas à heterogeneidade do meio. Substituindo a eq.(6.6) em (6.1), chega-se à seguinte expressão

$$\sigma_{ij} = [\bar{C}_{ijkl} + C_{ijkl}^v(\mathbf{x})] \varepsilon_{kl} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^v(\mathbf{x}) \quad (6.7)$$

onde $\bar{\sigma}_{ij}$ é o tensor de tensões considerando-se o meio homogêneo e $\sigma_{ij}^v(\mathbf{x})$ é a correção das tensões devido à heterogeneidade.

6.3. Procedimentos da implementação

Considere-se a eq.(6.7) em sua forma matricial

$$\boldsymbol{\sigma}(E(\mathbf{x})) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{E}) - \boldsymbol{\sigma}^v(E^v(\mathbf{x})) \quad (6.8)$$

onde as tensões estão definidas em função dos respectivos módulos de elasticidade. Com isso, tem-se que as deformações reais são definidas, a partir das tensões considerando-se o meio homogêneo, como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\bar{\mathbf{C}}(\bar{E})]^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{E}) = \bar{\mathbf{D}}(\bar{E}) \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{E}) \quad (6.9)$$

Substituindo a eq.(6.9) na forma matricial da eq.(6.1), tem-se que

$$\boldsymbol{\sigma}(E(\mathbf{x})) = \mathbf{C}(E(\mathbf{x})) \bar{\mathbf{D}}(\bar{E}) \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{E}) \quad (6.10)$$

e, considerando-se a eq.(6.8), a expressão acima pode ser reescrita como

$$\boldsymbol{\sigma}^v = [\mathbf{I} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{D}}]\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (6.11)$$

que corresponde à relação entre as tensões considerando-se o meio homogêneo e a correção das tensões devido à heterogeneidade.

Considerando-se e eq.(3.54) em conjunto com a eq. (6.8), tem-se que

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{S} + \mathbf{I})\boldsymbol{\sigma}^v + \mathbf{n} \quad (6.12)$$

onde as tensões plásticas fictícias são substituídas pela correção e \mathbf{I} é a matriz identidade. Substituindo-se a eq.(6.11) em (6.12), tem-se a seguinte relação

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{S} + \mathbf{I})[\mathbf{I} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{D}}]\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{n} \quad (6.13)$$

que, rearranjando, chega-se a

$$\mathbf{B}\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} \quad (6.14)$$

onde \mathbf{B} é uma matriz naturalmente bem-condicionada definida por

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - (\mathbf{S} + \mathbf{I})[\mathbf{I} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{D}}] \quad (6.15)$$

Após a resolução do sistema de equações acima, as tensões reais são determinadas utilizando-se a eq.(6.10) e as deformações pela eq.(6.9). A estrutura do algoritmo fica com a seguinte forma:

1. Determinação de \mathbf{n} , a partir da resolução do problema elástico considerando-se o meio homogêneo;
2. Montagem da matriz \mathbf{B} a partir das matrizes \mathbf{S} , $\mathbf{C}(E(\mathbf{x}))$ e $\bar{\mathbf{D}}(\bar{E})$;
3. Determinação de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{E})$, a partir da resolução do sistema da eq.(6.14);
4. Determinação de $\boldsymbol{\sigma}(E(\mathbf{x}))$, a partir da eq.(6.10).

CAPÍTULO 7 – RESULTADOS

7.1. Introdução

De forma a validar todas as teorias apresentadas anteriormente, são apresentados aqui alguns exemplos ilustrativos para cada uma das implementações, onde pode-se verificar também a eficiência dos procedimentos propostos. Os resultados obtidos aqui são comparados com os obtidos através de técnicas já estabelecidas, com eficiência e precisão consagradas.

Os parâmetros da interpolação OMLS adotados são os mesmos encontrados em grande parte da literatura correspondente, os quais:

- Ordem da base polinomial LI: quadrática;
- Função-peso, w_I : Gaussiana
- Raios dos suportes de w_I , r_I : grandes o suficiente para que cada suporte cubra, pelo menos, 12 (doze) pontos;
- Parâmetro c_I : $0.3 r_I$

7.2. Mecânica da fratura

7.2.1. Abertura de trinca e concentração de tensões

Este exemplo consiste na estrutura e situação de carregamento apresentadas na Fig.7.1a abaixo, em estado plano de deformação. A nuvem de pontos utilizada na análise via LBIE contém 326 pontos e é apresentada na Fig.7.1b. Já a nuvem de pontos utilizada na análise pelo BEFM consiste apenas nos nós de contorno da Fig.7.1b, contendo 72 nós. Como propriedades do material, tem-se que $E = 10000$ e $\nu = 0.33$. Para valores de a , adotou-se 0.3 e 0.36.

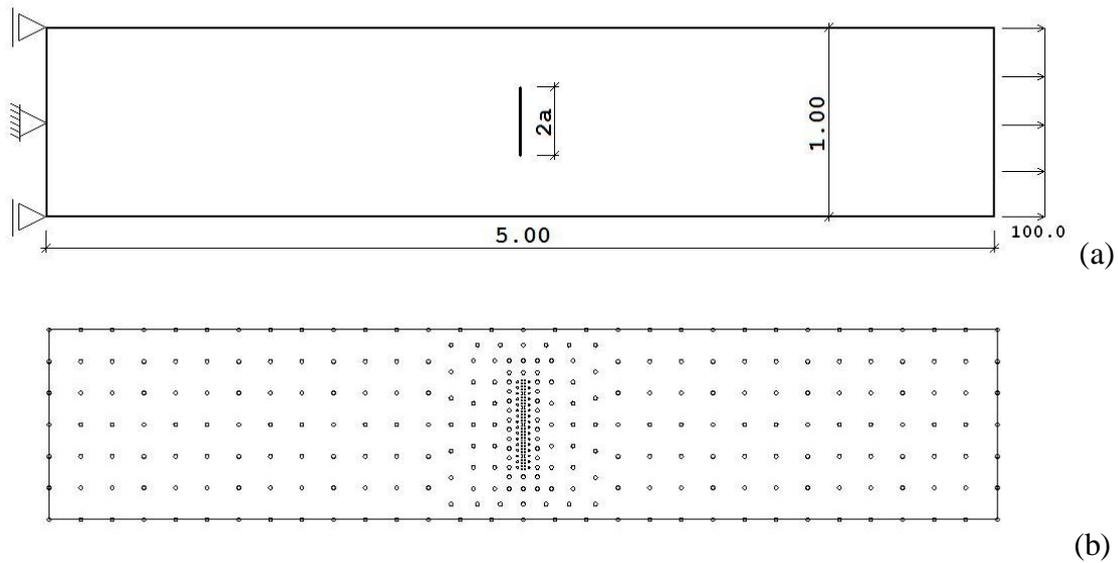


Figura 7.1 – mecânica da fratura: (a) geometria; (b) nuvem de pontos

Os resultados obtidos pelas técnicas NGF-LBIE e NGF-BEFM foram comparados com os obtidos através de um código baseado no MEC utilizando a NGF para mecânica da fratura – NGF-BEM, originalmente proposto por (CASTOR, 1993). Na Fig.7.2 estão apresentadas as aberturas da trinca obtidas pelos três métodos, respectivamente para os valores de $a = 0.3$ e $a = 0.36$.

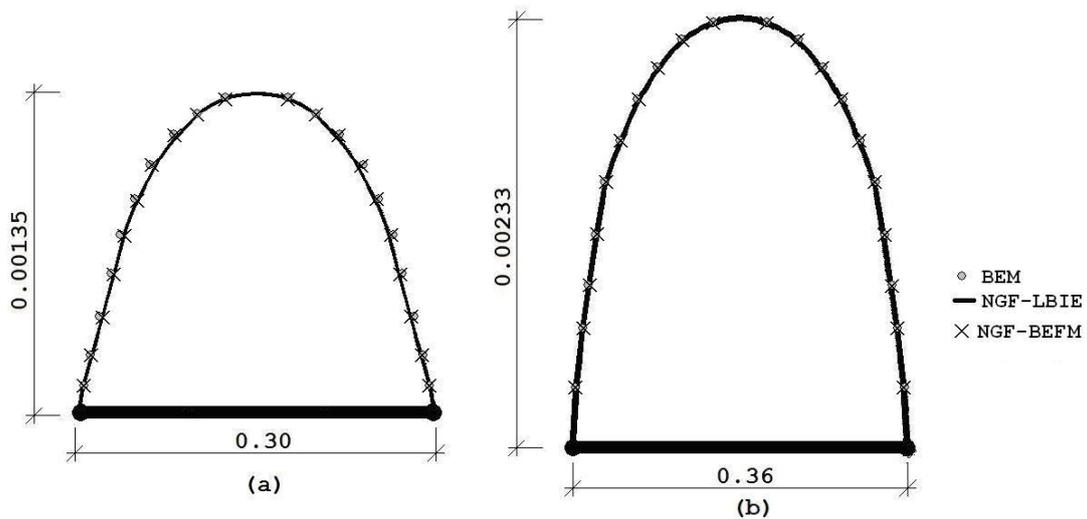


Figura 7.2 – mecânica da fratura: abertura das trincas (a) $a = 0.30$; (b) $a = 0.36$

Foram também obtidos os campos de tensão nas vizinhanças da trinca para os dois valores de abertura (Fig.7.3a para $a = 0.30$ e Fig. 7.3b para $a = 0.36$).

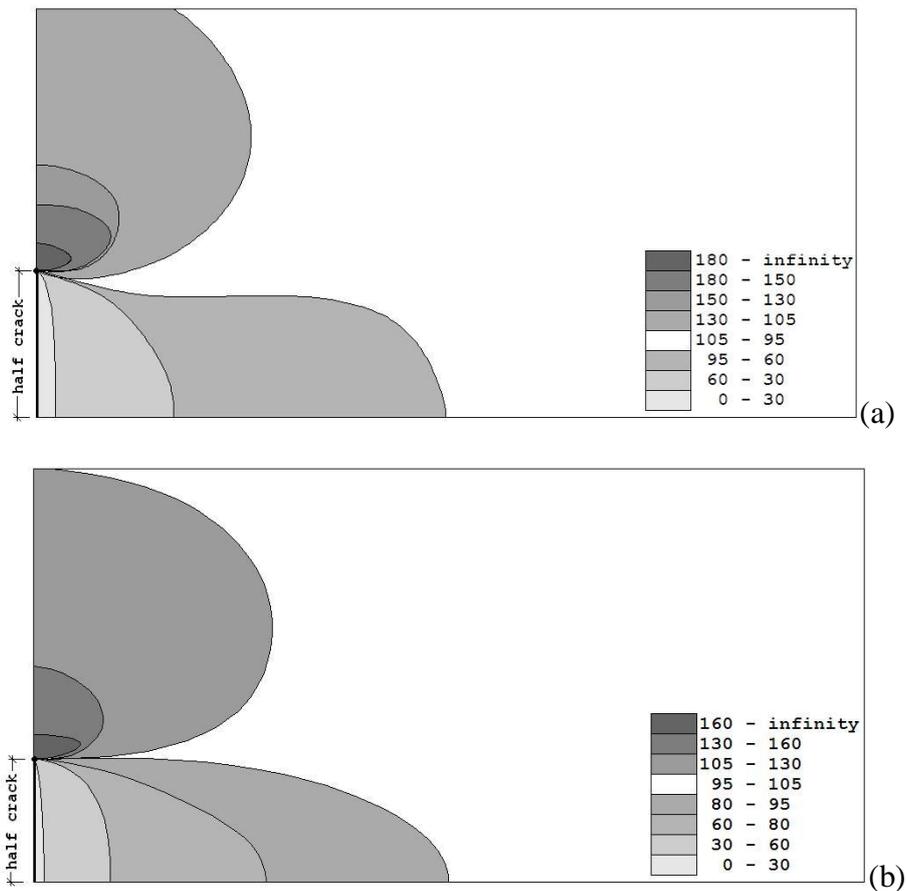


Figura 7.3 – mecânica da fratura: campo de tensões (a) $a = 0.30$; (b) $a = 0.36$

Como se pode observar, as tensões na vizinhança das trincas obtidas pelos três métodos, bem como as aberturas, foram praticamente as mesmas, tendo que, graficamente, as diferenças foram imperceptíveis.

7.2.2. Fator de intensidade de tensões K_I

Neste exemplo, em estado plano de tensão, o resultado analisado é o fator de intensidade de tensões K_I , que é o fator associado à abertura na direção normal às faces da trinca, também obtido através do NGF-LBIE e NGF-BEFM e comparado com os obtidos pelo NGF-BEM e por um código de elementos de contorno utilizando a solução analítica para trincas retas – AGF-BEM (CASTOR *et al.*, 1995). Sua geometria e

condições de contorno são apresentadas na Fig.7.4a e a nuvem de pontos utilizada na análise via NGF-LBIE é apresentada na Fig.7.4b. Novamente, a nuvem utilizada na análise pelo NGF-BEFM corresponde apenas aos nós do contorno da Fig.7.4b.

O fator K_I é obtido a partir da seguinte expressão

$$K_I = \frac{G\sqrt{2\pi}}{4(1-\bar{\nu})} \sum_{i=1}^{np} \frac{c_2(\zeta_i)\sqrt{r_i}}{r_i} \quad (7.1)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do material, $c_2(\zeta_i)$ é o tamanho da abertura da trinca relativa a K_I em ζ_i , r_i é a distância entre ζ_i e a extremidade da trinca mais próxima e np é o número de pontos na trinca considerados no cálculo. Neste trabalho, é adotado $np = 6$, de acordo com o proposto por (BARRA *et al.*, 1999) e suas posições na trinca são de acordo com a Fig.7.5, em coordenadas intrínsecas.

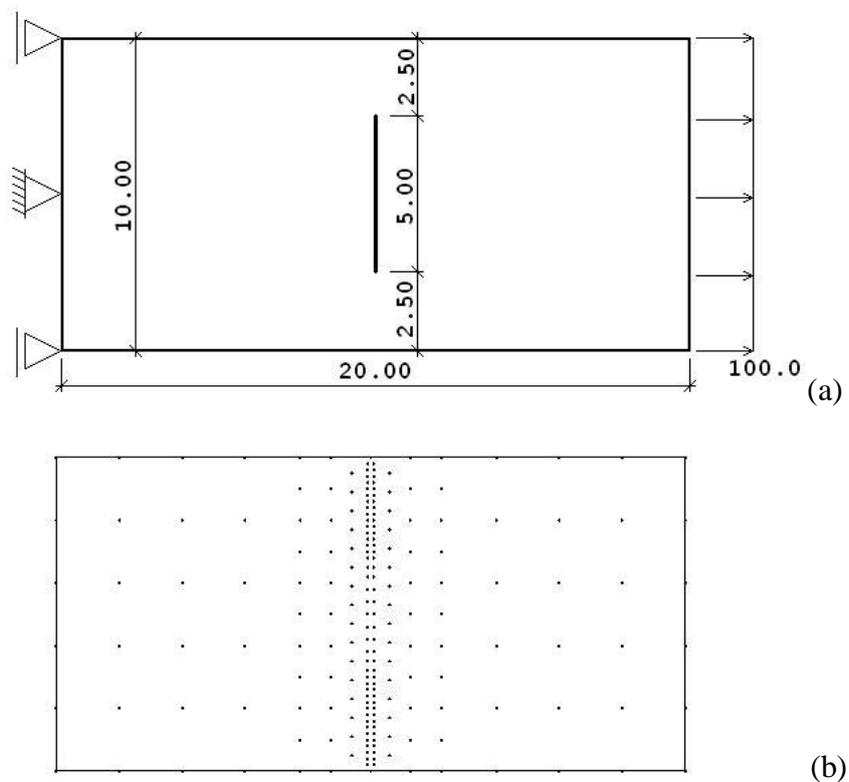


Figura 7.4 – fator K_I : (a) geometria; (b) nuvem de pontos

De forma a apresentar os resultados de forma adimensional, os fatores foram divididos por $K_0 = \sigma\sqrt{2\pi a}$, onde σ é o carregamento aplicado. Os resultados obtidos através de cada método estão apresentados na Tabela 7.1, bem como os erros relativos de cada método quando comparados a um valor estimado (CASTOR, 1993).

Tabela 7.1 – resultados para K_I/K_0

Método	K_I/K_0	Erro (%)
NGF-BEFM	1.1874	0.97
NGF-BEM	1.1877	0.99
NGF-LBIE	1.182	0.51
AGF-BEM	1.1871	0.94
estimado	$1.176 \pm 1\%$	-

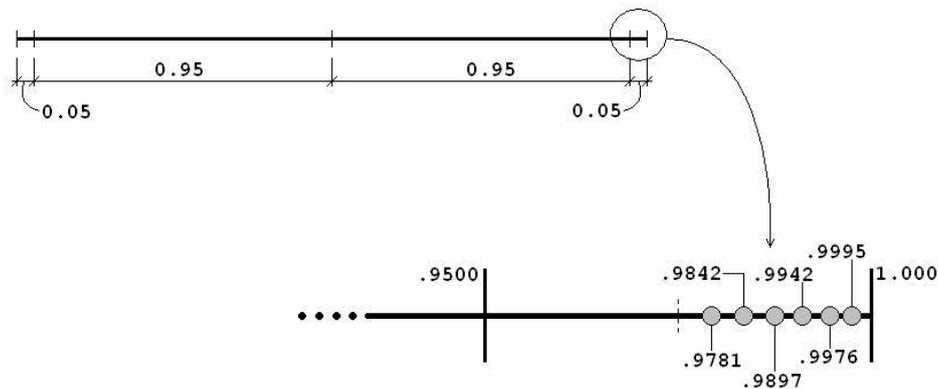


Figura 7.5 – fator K_I : posicionamento dos nós considerados

7.2.3. Fator de intensidade de tensões K_{II}

No último exemplo utilizando NGF, em estado plano de tensão, o resultado analisado é agora o fator de intensidade de tensões K_{II} , que é o fator associado ao deslizamento das faces da trinca, e é comparado com os obtidos pelos mesmos métodos do exemplo anterior. Este fator é também determinado pela eq.(7.1), trocando-se o termo $c_2(\zeta_i)$ relativo à abertura por $c_1(\zeta_i)$, que é o relativo ao deslizamento, e o

posicionamento dos pontos é o mesmo da Fig.7.5. A geometria do problema é mostrada na Fig.7.6a e a nuvem de pontos na Fig.7.6b.

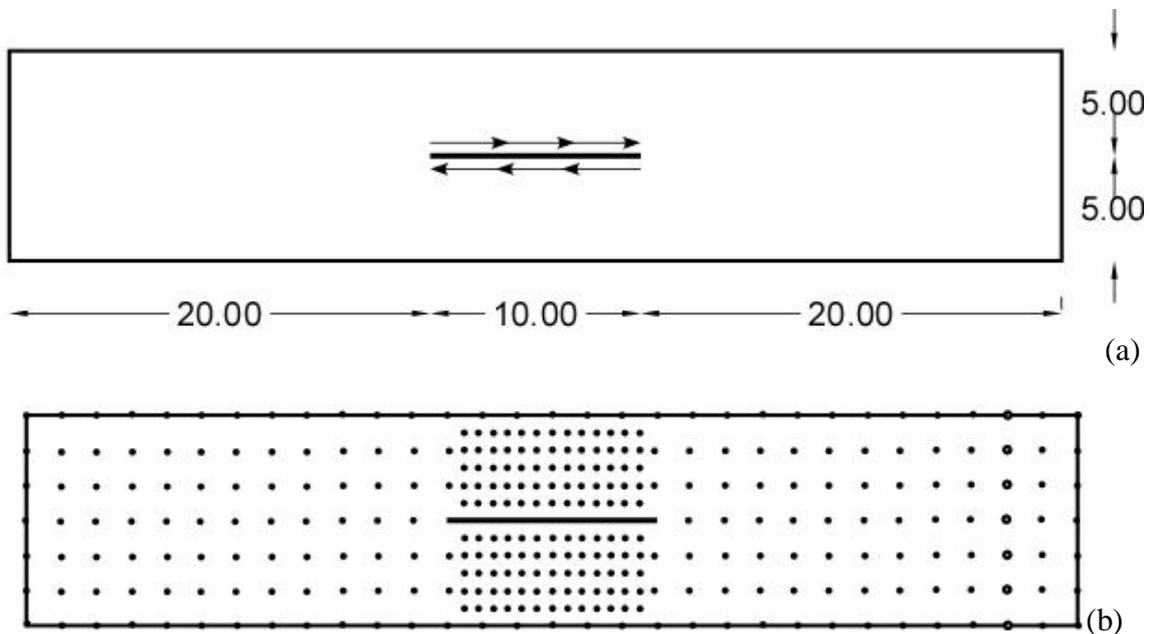


Figura 7.6 – fator K_{II} : (a) geometria; (b) nuvem de pontos

Os resultados são apresentados na Tab.7.2, também divididos pelo parâmetro K_0 , bem como os erros associados quando comparados com o valor estimado.

Tabela 7.2 – resultados para K_{II}/K_0

Método	K_{II}/K_0	Erro (%)
NGF-BEFM	1.361	0.65
NGF-BEM	1.360	0.75
NGF-LBIE	1.363	0.50
AGF-BEM		
estimado	$1.37 \pm 1\%$	-

7.3. Meios heterogêneos

7.3.1. Deslocamentos na direção x

Este primeiro exemplo consiste na análise dos deslocamentos longitudinais da face sob ação de carregamento externo de uma barra em estado plano de deformação,

cuja geometria é de acordo com a Fig.7.7a, cujo módulo de elasticidade longitudinal é dado pela expressão

$$E(x) = \bar{E} e^{\gamma x}$$

onde $\bar{E} = 1.0$, $\gamma = 0.2$ e $\gamma = 0.4$. A nuvem de pontos utilizada contém 52 pontos no contorno, sendo 4 deles duplos dos posicionados nas quinas, e 57 no domínio, como mostrado na Fig.7.7b.

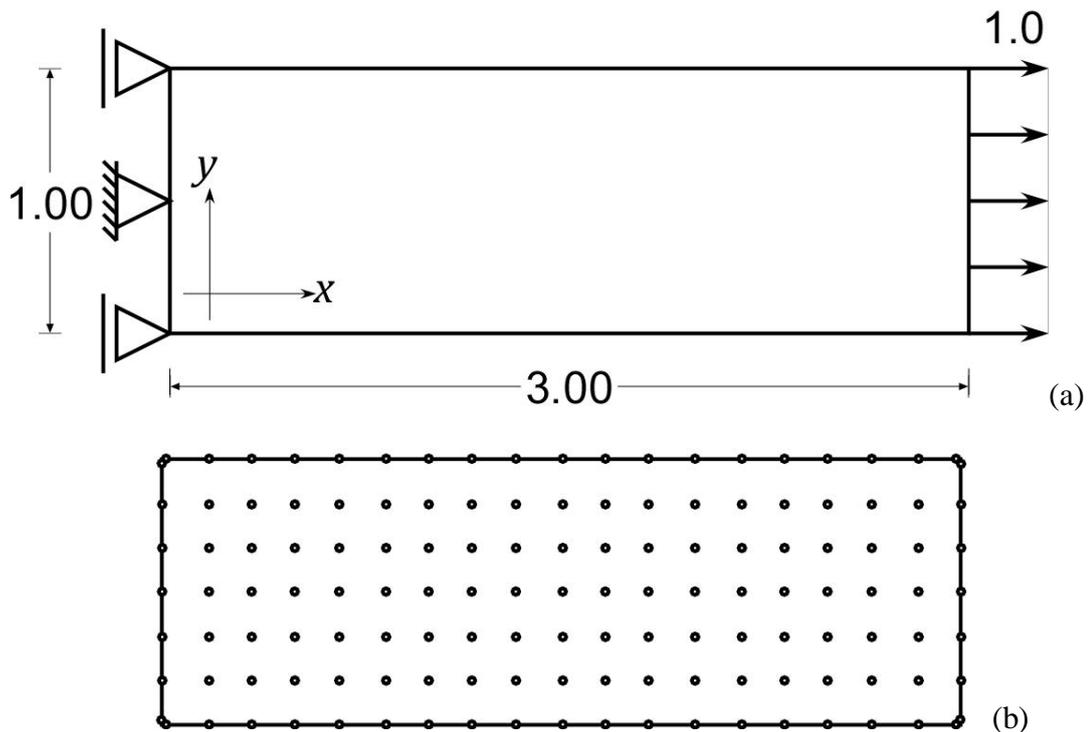


Figura 7.7 – (a) geometria da placa; (b) nuvem de pontos

Os resultados encontrados para cada valor de γ foram comparados com os obtidos através de um código LBIE (SLADEK et al., 2006) e são apresentados na Tab.7.3.

Tabela 7.3 – deslocamentos u_x na extremidade carregada

γ	LBIE	BEFM	variação
0.2	2.251	2.255	0.17%
0.4	1.738	1.746	0.40%

7.3.2. Tensões e deslocamentos

Neste último exemplo relativo a meios heterogêneos, são discutidos os deslocamentos e tensões ao longo de arestas e eixos de uma placa quadrada de carregamento simétrico, de acordo com a Fig.7.8a, e módulo de elasticidade variando de acordo com a seguinte expressão

$$E(\mathbf{x}) = \bar{E} \left(1 + \frac{|x|}{2} \right)^2$$

onde $\bar{E} = 123.000$, além de $\nu = 0.35$. Devido à dupla simetria do problema, apenas o quadrante superior direito foi analisado. A nuvem de pontos utilizada neste exemplo consiste em 121 pontos equidistantes ao longo de Ω e Γ , além de 4 pontos duplos em cada quina, num total de 125 pontos (Fig.7.8b).

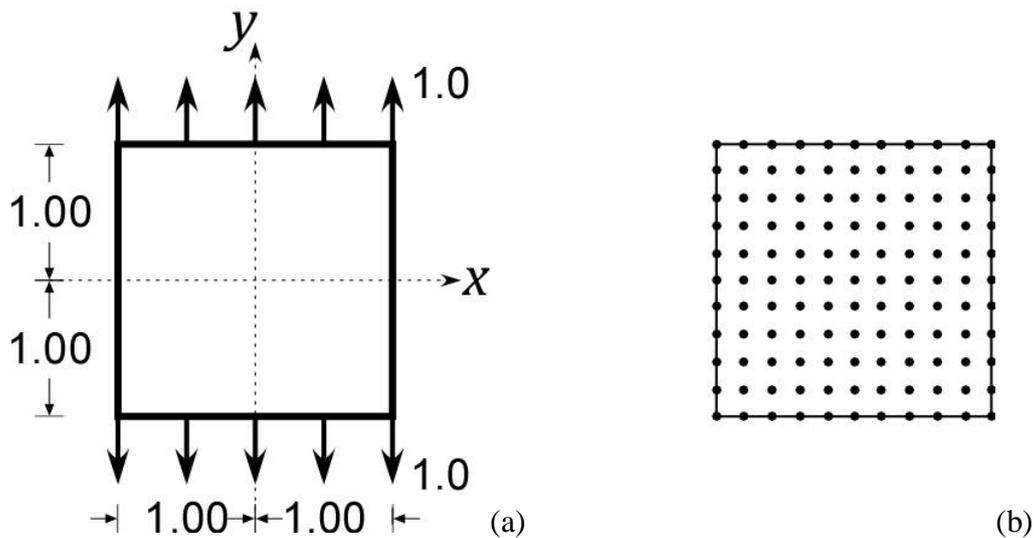


Figura 7.8 – (a) geometria da placa; (b) nuvem de pontos

Os resultados aqui analisados são: deslocamentos u_x e u_y ao longo da aresta $x = 1$, mostrados respectivamente em Fig.7.9a e 7.9b, e tensões σ_{yy} ao longo do eixo x (Fig.7.9c). Eles foram comparados com os apresentados por (SLADEK *et al.*, 2000), obtidos a partir de códigos para análise elástica em meios heterogêneos baseados no

MEF, no Método da Equação Integral de Contorno Local com elementos – LBIE elemental, e no LBIE convencional.

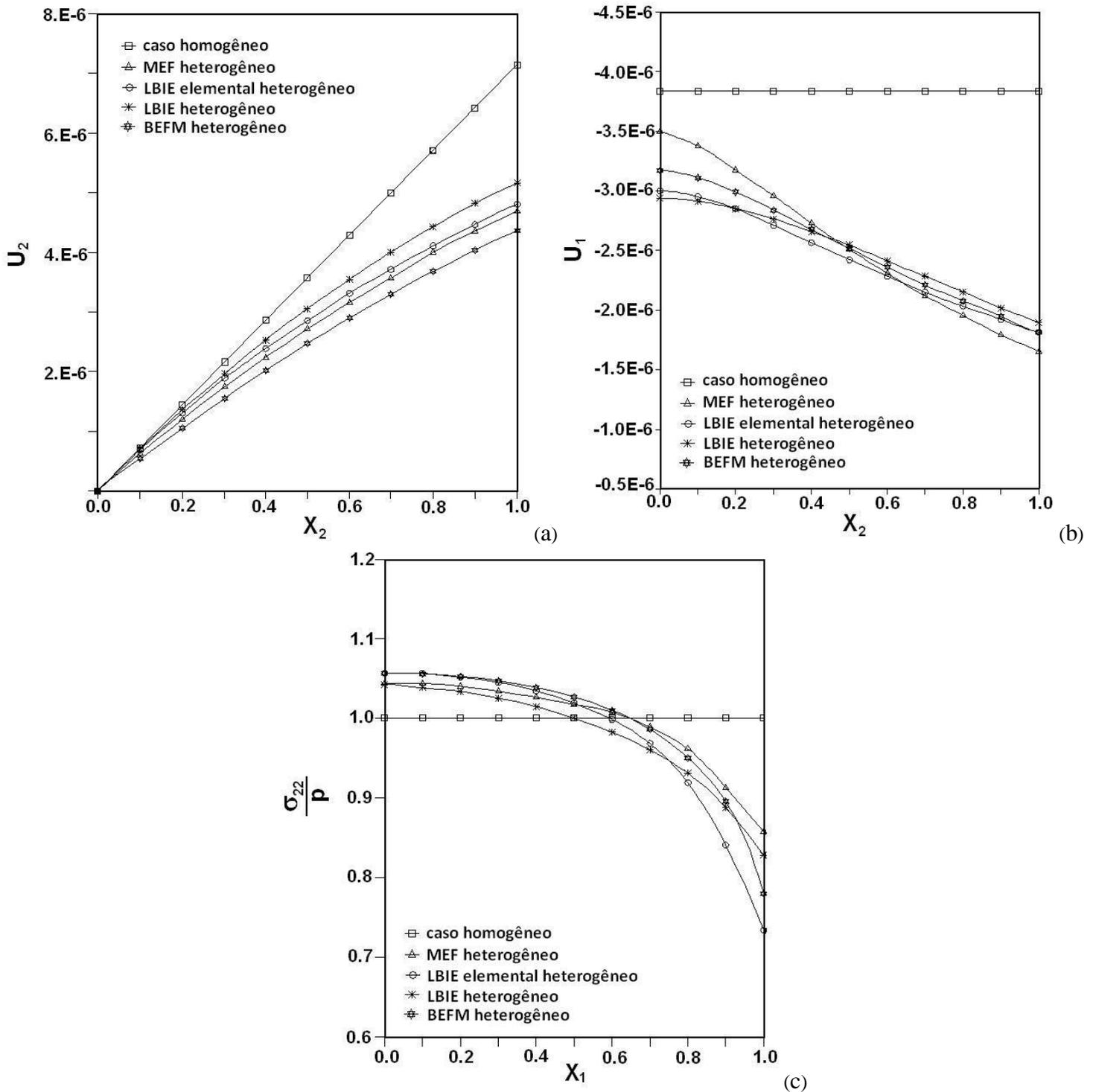


Figura 7.9 – resultados: (a) deslocamentos u_x ; (b) deslocamentos u_y ; (c) tensões σ_{yy}

Pode-se observar que todos os resultados analisados se encontram dentro da faixa de resultados obtidos através das outras técnicas, mostrando assim a eficiência da implementação.

7.4. Plasticidade

7.4.1. Bloco retangular comprimido

Este exemplo consiste em um bloco retangular comprimido por dois anteparos rígidos. A análise é feita considerando-se estado plano de deformação e a geometria do problema encontra-se na Fig.7.10a. Por causa da simetria do problema, apenas analisou-se seu quadrante superior direito, cuja nuvem de pontos utilizada é mostrada na Fig.7.10b. As propriedades relativas ao problema, tanto em termos de material quanto às condições de carregamento, estão descritas na Tab.7.4. O critério de escoamento considerado aqui foi o de von Mises.

Tabela 7.4 – propriedades

Item	Quantidade
Deslocamento imposto (d)	0,05"
Módulo de Young (E)	10^7 psi
Módulo tangente (E_T)	0
Tensão de escoamento (Y)	13000 psi
Coefficiente de Poisson (ν)	0,33
Incremento de deslocamento	10,0%

Os resultados analisados aqui, comparados com os obtidos por um código implícito de elastoplasticidade baseado no MEC (MIERS e TELLES, 2004), são a pressão média exercida pelos anteparos e o desenvolvimento das zonas de plastificação no bloco, de acordo com a penetração daqueles neste. A Fig.7.11 mostra a relação entre a pressão média exercida pelos anteparos e a tensão de escoamento do material que compõe o bloco à medida que os anteparos penetram no bloco idealmente plástico.

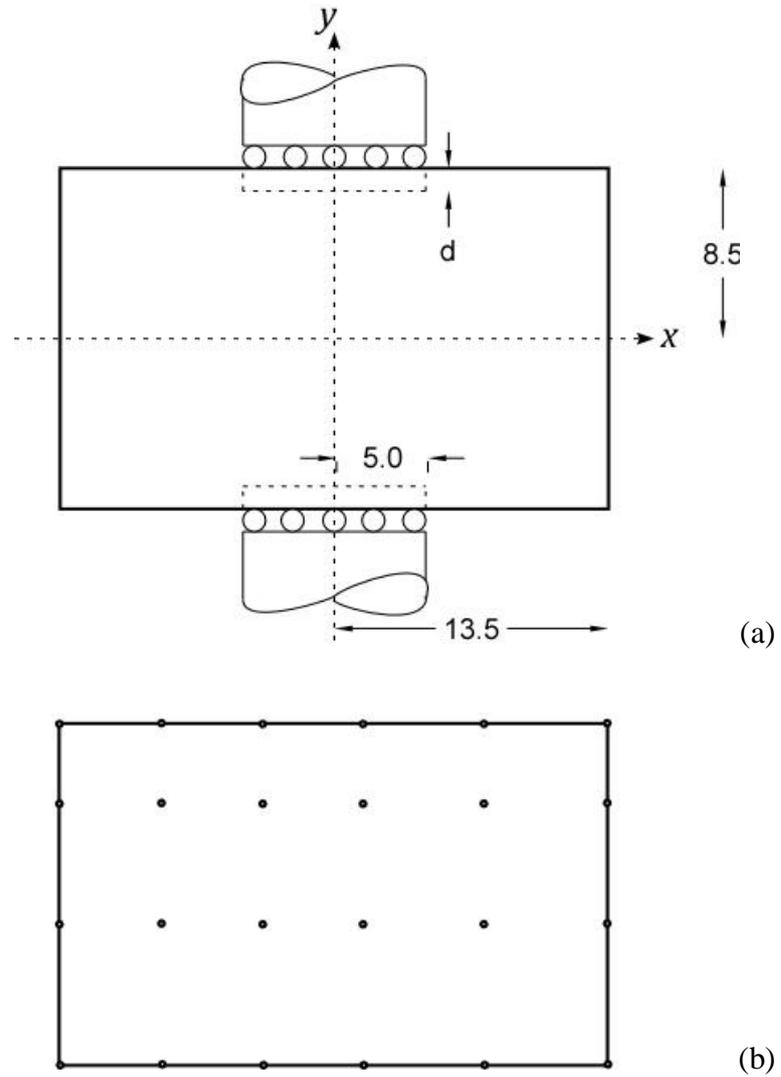


Figura 7.10 – (a) geometria do bloco; (b) nuvem de pontos

A abrangência da zona de plastificação devida à evolução da penetração dos anteparos é mostrada na Fig.7.12. O desenvolvimento da plastificação se deu praticamente da mesma forma tanto pela análise feita via MEC quanto pela via BEFM.

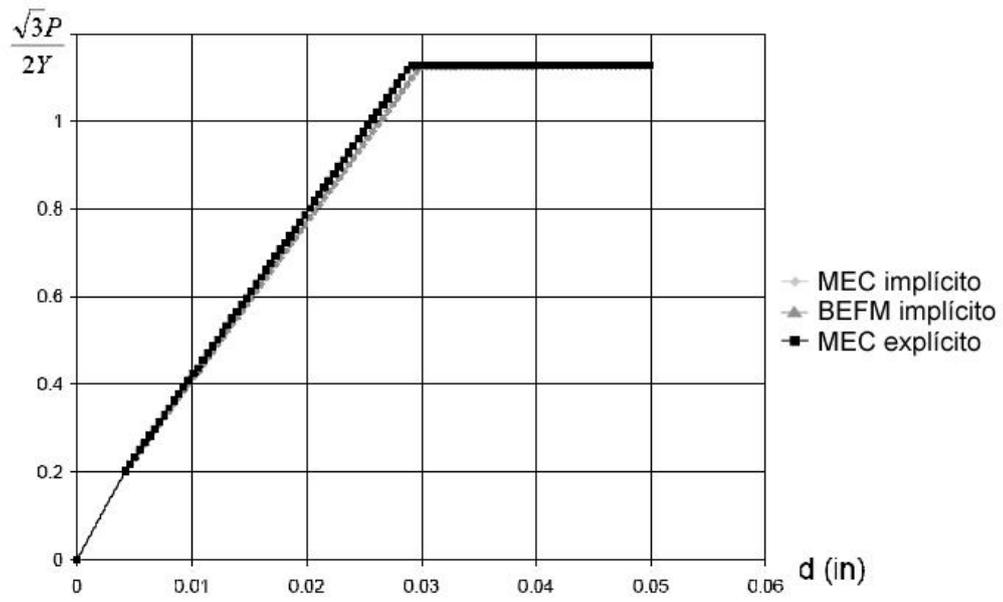


Figura 7.11 – pressão média exercida pelo anteparo

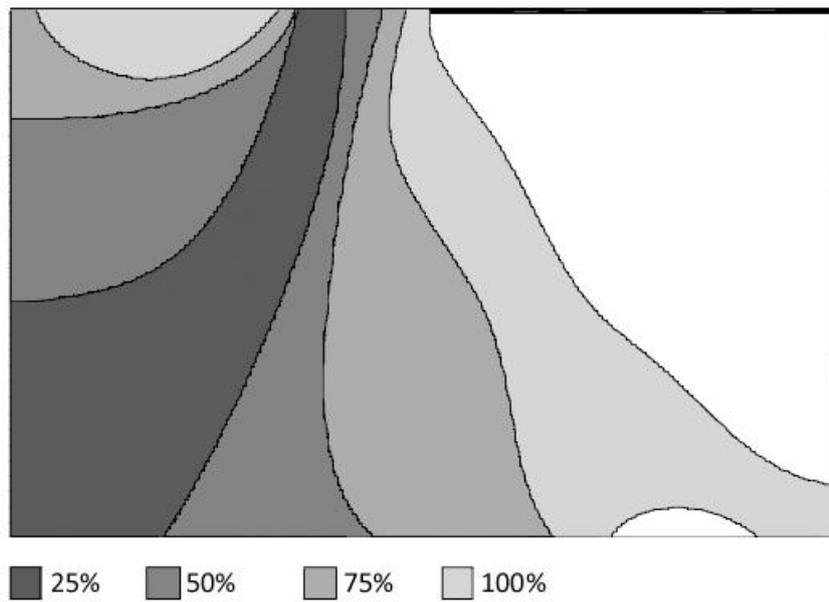


Figura 7.12 – desenvolvimento das zonas de plastificação

7.4.2. Chapa perfurada

Considere-se aqui a chapa simétrica, em estado plano de tensões, apresentada na Fig.7.13a, cuja nuvem de pontos é mostrada na Fig.7.13b. As características do problema são apresentadas na Tab.7.5 e o critério de escoamento considerado foi o de von Mises.

Tabela 7.5 – propriedades

Item	Quantidade
Carregamento aplicado (q)	11.5 kgf/mm ²
Módulo de Young (E)	7000 kgf/mm ²
Módulo tangente (E_T)	217 kgf/mm ²
Tensão de escoamento (Y)	24.3 kgf/mm ²
Coefficiente de Poisson (ν)	0,2
Incremento de deslocamento	10,0%

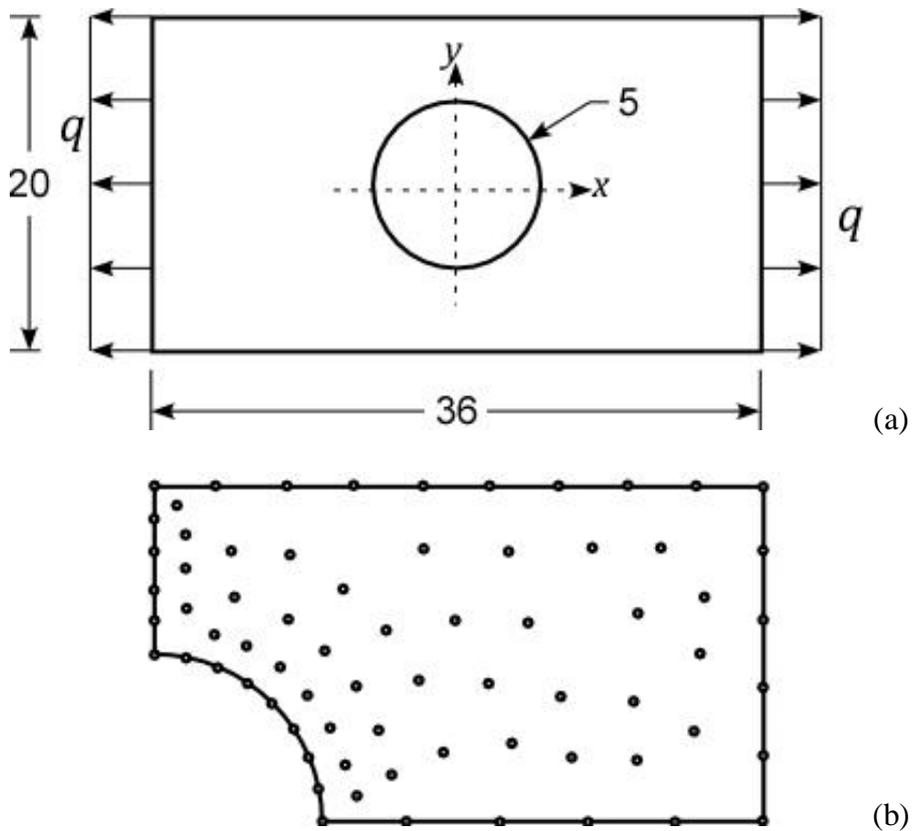


Figura 7.13 – (a) geometria do bloco; (b) nuvem de pontos

Os resultados obtidos aqui, também comparados com os apresentados em (MIERS e TELLES, 2004) são a razão entre a tensão σ_x e a de escoamento Y ao longo do eixo y , como mostrado na Fig.7.14, e a evolução das zonas de plastificação em várias etapas do processo, de acordo com a Fig.7.15.

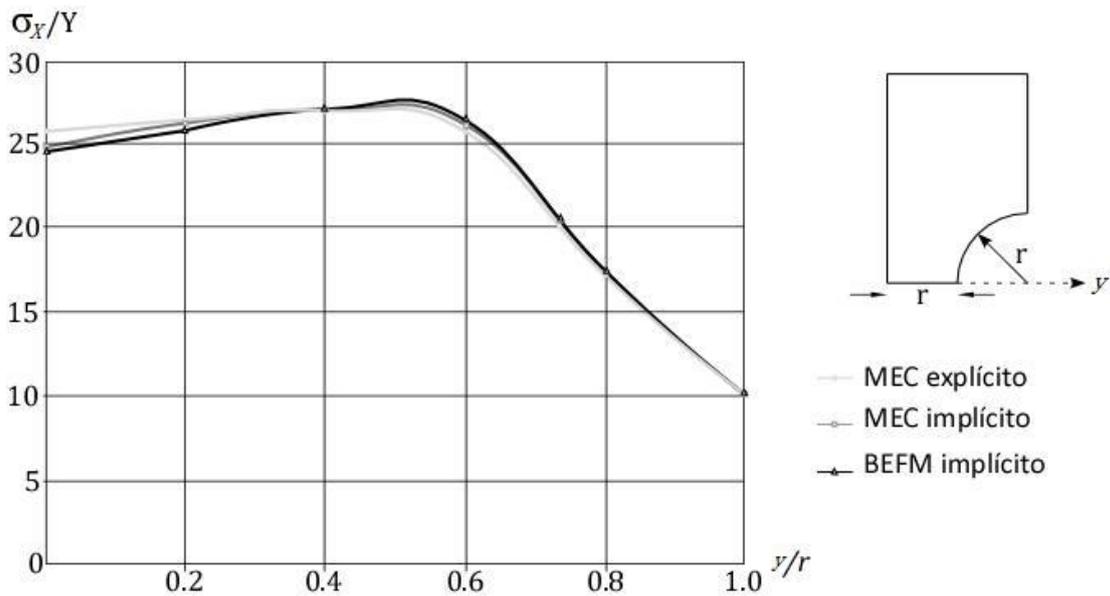


Figura 7.14 – tensão ao longo do eixo do estreitamento da chapa

As zonas de plastificação mostradas na Fig.7.15 se desenvolveram praticamente da mesma forma tanto pela análise feita via MEC quanto pela via BEFM.

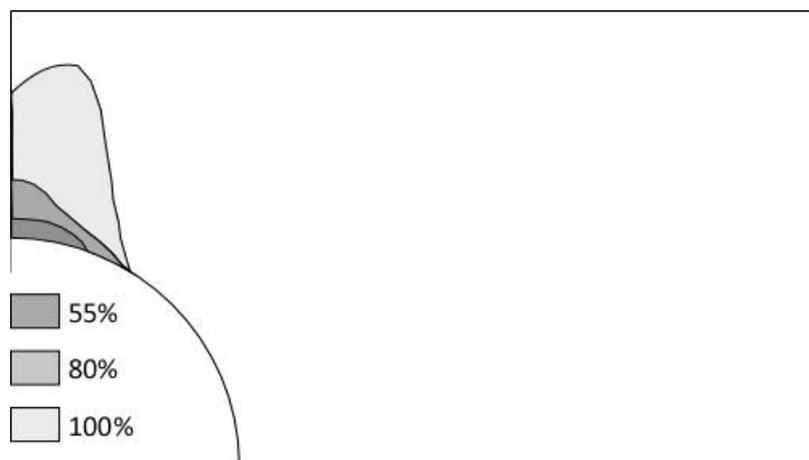


Figura 7.15 – evolução das zonas de plastificação

7.4.3. Sapata em base flexível

O último exemplo estudado é o de uma análise em estado plano de deformação de uma sapata contínua sobre base flexível. Sua geometria e a nuvem de pontos (25 em Γ e 47 em Ω) de sua metade direita estão apresentadas, respectivamente, nas Figs. 7.16a e 7.16b. As dimensões estão em pés e o critério de escoamento adotado é o de Mohr-Coulomb. As características do problema são apresentadas na Tab.7.6. Ainda que a solução de Kelvin permita a simulação correta do espaço infinito, o domínio é aqui truncado para permitir comparação com soluções clássicas alternativas, tais como via elementos finitos.

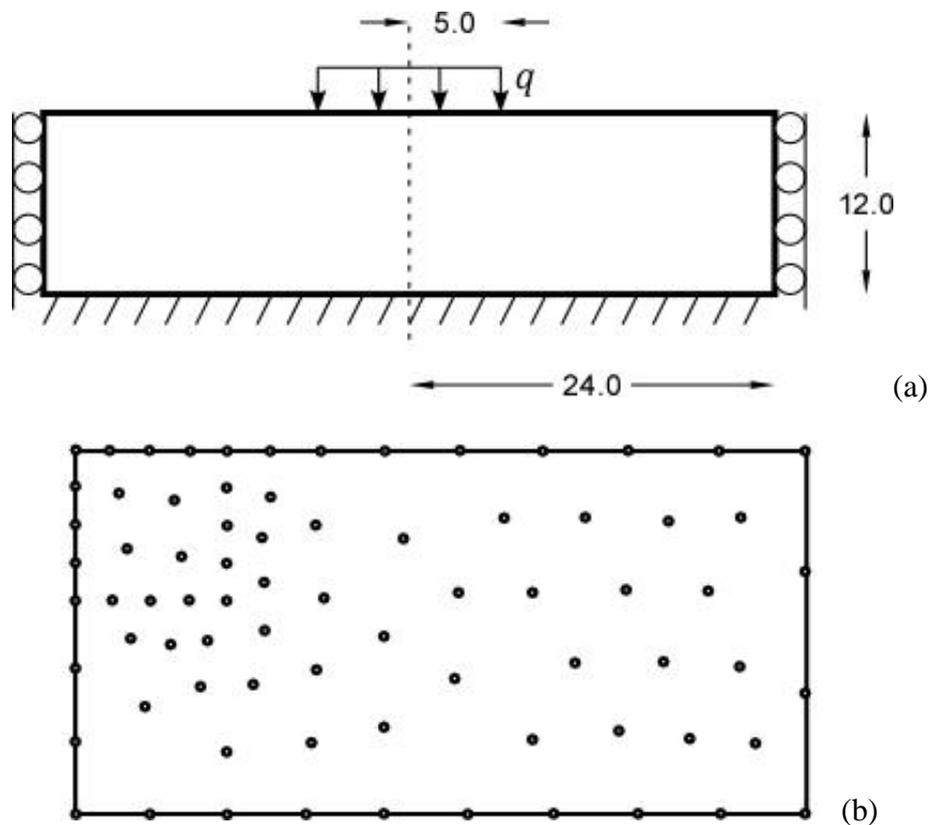


Figura 7.16 – (a) geometria do bloco; (b) nuvem de pontos

Tabela 7.6 – propriedades

Item	Quantidade
Carregamento aplicado (q)	180 psi
Módulo de Young (E)	30000 psi
Módulo tangente (E_T)	-
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3
Coesão (c)	10 psi
Ângulo de atrito (ϕ)	20°
Incremento de carga	12,5%

Os resultados obtidos aqui, também comparados com os apresentados em (MIERS e TELLES, 2004) são a relação entre a carga na sapata e o deslocamento vertical de seu ponto médio, como mostrado na Fig.7.17, e a evolução das zonas de plastificação em várias etapas do processo, de acordo com a Fig.7.18.

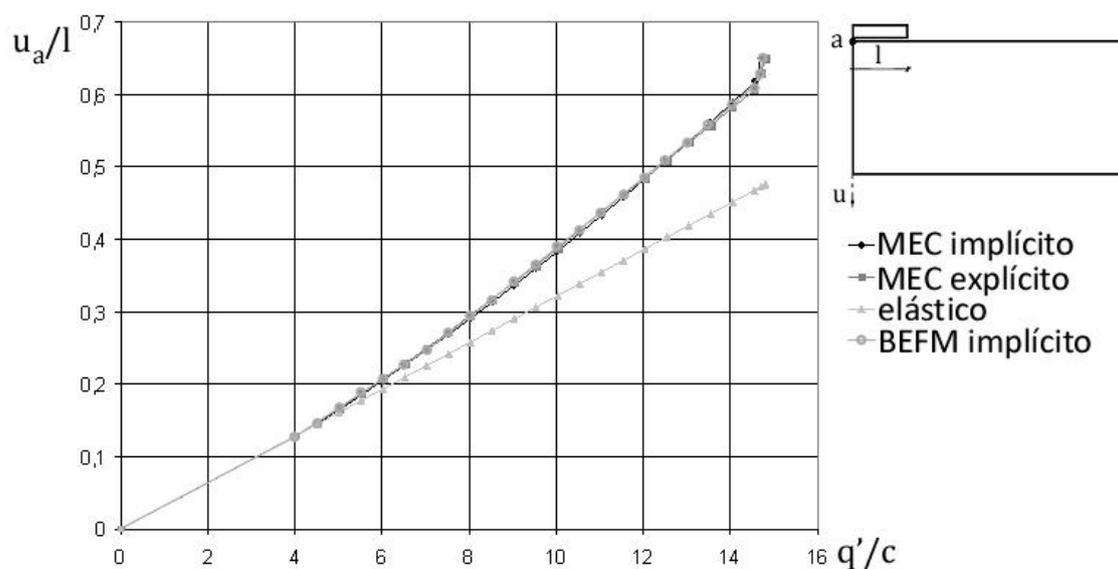


Figura 7.17 – carga na sapata vs. deslocamento do ponto médio

As zonas de plastificação mostradas na Fig.7.18 se desenvolveram praticamente da mesma forma tanto pela análise implícita feita via MEC quanto pela via BEFM, havendo alguma diferença com relação à análise explícita.

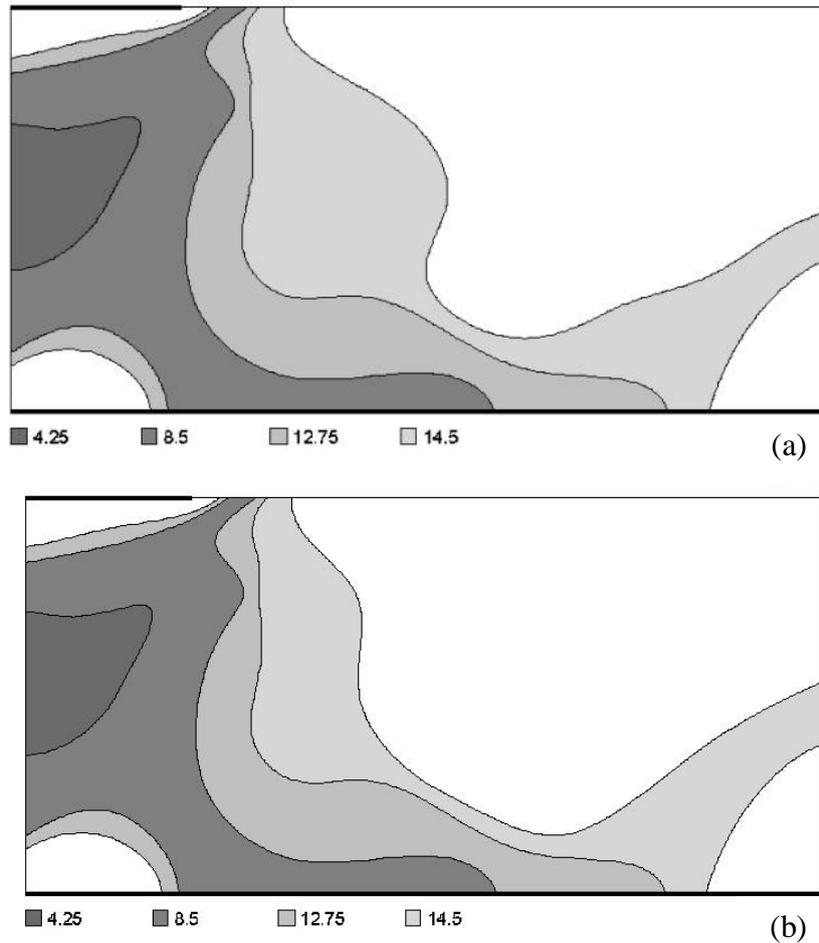


Figura 7.18 – evolução das zonas de plastificação: (a) MEC explícito; (b) MEC e BEFM implícito

A diferença mostrada na Fig.7.18 entre as zonas de plastificação nos últimos incrementos de carga se deve ao fato da base estar próxima de seu carregamento crítico, para o qual haverá sua ruptura. Nestes casos, é comprovado que algoritmos implícitos conseguem os representar melhor, uma vez que são mais estáveis que os explícitos (MIERS e TELLES, 2004).

CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES

Além de introduzir os conceitos e desenvolver aplicações para métodos do tipo *meshless* baseados na Equação Integral de Contorno, como o Método da Equação Integral de Contorno Local e o *Boundary Element-Free Method*, este trabalho teve também os seguintes objetivos:

- Introduzir o conceito da Função de Green Numérica para a mecânica de fratura linear elástica, antes utilizada somente no âmbito do Método dos Elementos de Contorno, no contexto do Método da Equação Integral de Contorno Local – LBIE, e do Boundary Element-Free Method – BEFM,
- Desenvolver um esquema implícito de solução de problemas elastoplásticos para utilização em conjunto com o BEFM,
- Implementar um procedimento, também implícito, para a análise de tensões elásticas em meios heterogêneos, mais precisamente os materiais de propriedades gradualmente variáveis.

Para isso, foram aqui apresentadas as teorias fundamentais para o desenvolvimento destas implementações, bem como exemplos ilustrativos para compará-las.

Primeiramente, foi apresentada aqui a obtenção da Equação Integral de Contorno, que utilizada em conjunto com um esquema de interpolação que não utilize malhas, dá origem aos métodos do tipo *meshless* citados acima. Para isso, foram descritas as teorias da elasticidade linear e da plasticidade não-viscosa. Nesta última, foram mostrados alguns critérios de escoamento mais usuais e os tipos de abordagem dos termos não-lineares, para então ser demonstrada a Identidade de Somigliana para deslocamentos nas

formulações de tensões iniciais e deformações iniciais. A partir dela e através de um processo de limite, chega-se à Equação Integral de Contorno. São também descritas as formas de obtenção de sua formulação hipersingular e da equação que fornece as tensões no domínio.

Após determinada a Equação Integral de Contorno, foi proposto o esquema de interpolação sem malha que seria utilizado em conjunto com ela: o *Orthogonal Moving Least Squares*. Este método é uma evolução do conhecido *Moving Least Squares*, que tem como núcleo funções de base radial, fazendo assim com que a interpolação seja apenas função das distâncias entre os pontos utilizados, não mais de alguma conectividade de elemento. Com isso, definiu-se então as duas variantes sem malha do Método da Equação Integral de Contorno utilizadas, o LBIE, que é uma formulação de domínio, e o BEFM, esta última de contorno.

Uma vez definidos os procedimentos numéricos, foram mostradas as formulações propriamente ditas dos problemas que seriam analisados, dentre os quais:

- Forma da obtenção da função de Green numérica para mecânica da fratura linear elástica bidimensional, que foi utilizada em conjunto tanto com o LBIE quanto com o BEFM, a partir da superposição da solução de Kelvin convencional com uma solução complementar referente a um plano infinito contendo trincas;
- Equações constitutivas da plasticidade e algoritmo implícito independente de critério de escoamento, cuja utilização só se daria em conjunto com o BEFM;

- Equações constitutivas e algoritmo implícito para elasticidade em meios heterogêneos, que é o caso dos materiais de propriedades gradualmente variáveis, que seriam utilizadas em conjunto com o BEFM.

Para verificar a precisão das técnicas apresentadas, foram discutidos alguns exemplos numéricos para cada uma das implementações, cujos resultados foram sempre comparados com os obtidos através de técnicas previamente estabelecidas e de eficiência comprovada.

Para o caso da NGF, foram analisados os fatores de intensidade de tensão, as aberturas de trinca e as tensões em suas vizinhanças em barras carregadas em estado plano de tensão e deformação. Os resultados obtidos foram muito bons, quando comparados aos encontrados na literatura. A variação entre eles foi muito pequena, chegando em alguns casos a ser graficamente imperceptível.

Os resultados analisados nos exemplos referentes à plasticidade foram deslocamentos e tensões ao longo de eixos e formação das zonas de plastificação de corpos carregados. De acordo com o observado, todos os resultados também comprovaram a precisão da formulação proposta, uma vez que as diferenças entre as soluções obtidas aqui e as apresentadas na literatura são muito pequenas.

Para elasticidade em materiais de propriedades gradualmente variáveis, foram analisados os deslocamentos e tensões em eixos de barras carregadas. Mais uma vez, como se pôde comprovar, estes foram muito próximos dos obtidos na literatura e a precisão da técnica foi comprovada.

Foi visto que todos os resultados foram encorajadores ao prosseguimento das pesquisas envolvendo procedimentos de análise baseados em técnicas do tipo *meshless*. Contudo, devido ao fato desses temas serem muito recentes e da falta de aplicações

comerciais que impulsionem o seu desenvolvimento, a eficiência da etapa de montagem das matrizes em método do tipo *meshless* ainda pode ser melhorada. Isso pode ser alcançado através da otimização dos algoritmos e do desenvolvimento de ferramentas específicas para eles, desde a geração e montagem dos termos das matrizes até métodos de resolução de sistemas de equações adaptados e otimizados. Já o pré-processamento, uma vez que não há a necessidade de se definir conectividade entre os pontos utilizados nas análises, é certamente mais eficiente que o dos métodos com malha, mesmo sem haver um específico para métodos do tipo *meshless*.

A partir destas conclusões, percebe-se que as formulações do tipo *meshless* são uma alternativa interessante aos métodos convencionais, mas seu contínuo desenvolvimento e possíveis aplicações comerciais são reféns de pesquisas voltadas para a criação de ferramentas específicas para estes métodos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABM, 1982, *Análise de Fraturas*, 5ª Impressão, São Paulo, Editora ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE METAIS.
- ATLURI, S.N., SHEN, S., 2002, “The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods”, *CMES - Computer Modelling in Engineering and Sciences*, v. 3, n. 1, pp.11-51.
- ATLURI, S.N., ZHU, T., 1998, “A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics”, *Computational Mechanics*, v. 22, n. 2, pp. 117-127.
- BARRA, L.P.S., 1996, *Aplicação do MEC a Mecânica da Fratura Elastodinâmica com Funções de Green Numéricas*, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro. RJ, Brasil.
- BARRA, L.P.S., TELLES, J.C.F., 1999, “A hyper-singular numerical green's function generation for BEM applied to dynamic SIF problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 23, pp. 77-87.
- BELYTSCHKO, T., GU, L., LU, Y.Y., 1994, “Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods”, *Modelling and Simulations in Material Sciences and Engineering*, v. 2, pp. 519-534.
- BLANDFORD, G.E., INGRAFFEA, A.R., LIGGET, J.A., 1981, “Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computation Using Boundary Elements Method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.17, pp. 387-404.
- BONNET, M., MUKHERJEE, S., 1996, “Implicit BEM formulations for usual sensitivity problems in elastoplasticity using the consistent tangent operator concept”, *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, pp. 4461-4480.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C., 1984, *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Berlin, Springer-Verlag.

- CARRER, J.A.M., 1991, *Técnicas Implícitas para Análise Elastoplástica Estática e Dinâmica com o Método dos Elementos de Contorno*, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro. RJ, Brasil.
- CASTOR, G.S., 1993, *Aplicação de Funções de Green a problemas da Mecânica da Fratura com o Método dos Elementos de Contorno*, Dissertação de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CASTOR. G.S., 1999, *Função de Green numérica aplicada a problemas 3-D da mecânica da fratura*, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro. RJ, Brasil.
- CHEN, W.H., CHE, T.C., 1995, “An Efficient Dual Boundary Element Technique for a Two-Dimensional Fracture Problem with Multiple Cracks”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, pp. 1739-1756.
- CHEN, Y., ESKANDARIAN, A., OSKARD, M., LEE, J.D., 2004, “Meshless analysis of plasticity with application to crack growth problems”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, v. 41, pp. 83-94.
- CROUCH, S.L., 1976, “Solution of plane elasticity problems by displacement discontinuity method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, pp. 301-343.
- ERDOGAN, F., WU, B.H., 1996, “Crack problems in FGM layers under thermal stresses”, *Journal of Thermal Stresses*, v. 19, n. 3, pp. 237-265.
- FALCÃO, T.C., 2001, *Aplicação da Função de Green Numérica a Problemas de Descontinuidade de Potencial via MEC*, Dissertação de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- FIGUEIREDO, V.S., 1999, *Obtenção da função de Green Numérica para problemas de mecânica da fratura em placas de Reissner*, Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- GRIFFITH, A.A., 1924, Proceedings of the 1st International Congress for Applied Mechanics, Delft, pp. 5.
- GUIMARÃES, S., 1992, *Sobre o Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Mecânica da Fratura*, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- GUIMARÃES, S., TELLES, J.C.F., 1994, "On the hyper-singular boundary-element formulation for fracture-mechanics applications", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, n. 13, pp. 353-363.
- GUO, H., AZIZ, N.I., SCHIMIDT, L.C., 1990, "Linear Elastic Crack Tip Modelling by Displacement Discontinuity Method", *Engineering Fracture Mechanics*, v. 36, n. 6, pp. 933-943.
- INGLIS, C.E., 1913, "Stress in plane due to the presence of cracks and sharp corners", *Proc. Inst. Naval Architects*, 60.
- IRWIN, G.R., 1957, "Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate", *Trans. A.S.M.E., Journal Applied Mechanics*.
- JIN, H., RUNESSON, K., MATIASSON, K., 1989, "Boundary element formulation in finite deformation plasticity using implicit integration", *Computers & Structures*, v. 31, pp. 25-35.
- KREIDER, D.L., KULLER, R.G., OSTBERG, D.R., PERKINS, F.W., 1966, *An Introduction to Linear Analysis*. Reading, Addison-Wesley Publishing Company.
- LANCASTER, P., SALKAUSKAS, K., 1981, "Surfaces Generated by Moving Least Squares Method", *Mathematics of Computation*, v. 37, n. 155, pp.141-158.
- LIEW, K.M., CHENG, Y., KITIPORNCHAI, S., 2006, "Boundary element-free method (BEFM) and its application to two-dimensional elasticity problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 65, n. 8, pp. 1310-1332.
- LUCY, L.B., 1977, "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *The Astronomy Journal*, v. 8, n. 12, pp. 1013-1024.
- MARTHA, L.F., GRAY, L.J., INGRAFFEA, A.R., 1992, "Three-Dimensional Fracture Simulation with a Single-Domain, Direct Boundary Element Formulation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 35, 1907-1921.
- MIERS, L.S., TELLES, J.C.F., 2004, "A general tangent operator procedure for implicit elastoplastic BEM analysis", *CMES - Computer Modelling in Engineering and Sciences*, v. 6, n. 5, pp.431-439.

- MIERS, L.S., TELLES, J.C.F., 2005, “Structural Integrity Analysis Using the Numerical Green's Function and the Local Boundary Integral Equation Method”, *Structural Integrity and Durability*, v. 1, n. 3, pp. 225-232.
- MIERS, L.S., TELLES, J.C.F., 2006, “On the NGF Procedure for LBIE Elastostatic Fracture Mechanics”, *CMES - Computer Modelling in Engineering and Sciences*, v. 14, n. 3, pp.161-169.
- MIERS, L.S., TELLES, J.C.F., 2007, “Two dimensional elastostatic analysis of FGM's via BEFM”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, em publicação.
- MIERS, L.S., TELLES, J.C.F., 2007, “A Boundary Element Free Implementation Using NGF to Solve Fracture Mechanics Applications”, *Key Engineering Materials*, em publicação.
- MUKHERJEE, S., LEU, L.J., 1994, “Sensitivity analysis of hyperelastic-viscoplastic solids undergoing large deformations”, *Computational Mechanics*, v. 15, pp. 101-116.
- MUKHERJEE, Y.X., MUKHERJEE, S., 1997, “The boundary node method for potential problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, pp. 797– 815.
- NAYROLES, B., TOUZOT, G., VILLON, P., 1992, “Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements”, *Computational Mechanics*, v. 10, pp. 307-318.
- PAULINO, G.H., LIU, Y., 2001, “Implicit consistent and continuum tangent operators in elastoplastic boundary element formulations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, pp. 2157-2179.
- POON, H., MUKHERJEE, S., BONNET, M., 1998, “Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elastoplasticity”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 22, pp. 257-269.

- PORTELA, A., ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P., 1993, "Dual Boundary Element Incremental analysis o crack propagation", *Computer & Structures*, v. 42,n. 2, pp. 237-247.
- RICCARDELLA, P.C., 1973, *An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity*, SM-73-10, Department of Mechanical Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburg.
- SILVEIRA, N.P.P., 1996, *Implementação da Função de Green Numérica para fraturas curvas com o MEC*, Dissertação de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- SILVEIRA, N.P.P., 2003, *Simulação de Propagação de Trincas com o uso do Método dos Elementos de Contorno*, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro. RJ, Brasil.
- SILVEIRA, N.P.P., GUIMARÃES, S., TELLES, J.C.F., 1998, "Singular Integrals in Boundary Element Methods". In: J. Sladek & V. Sladek, *Accurate Hypersingular Integral Computations in the Development of Numerical Green's Functions for Fracture Mechanics*, Chapter 11, Southampton, Computational Mechanics Publication.
- SIMO, J.C., TAYLOR, R.L., 1985, "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 48, pp. 101-118.
- SLADEK J., SLADEK V., ATLURI, S.N., 2000, "Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problems of elasticity with nonhomogeneous material properties", *Computational Mechanics*, v. 24, n. 6, pp. 456-462.
- SLADEK, J., SLADEK, V., ZHANG, Ch., 2003, "Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method", *Computational Materials Science*, v. 28, n. 3-4, pp. 494-504 .
- SLADEK, J., SLADEK, V., ZHANG, Ch., 2005, "Stress analysis in anisotropic functionally graded materials by the MLPG method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 29, n. 6, pp. 597-609 .

- SLADEK, J., SLADEK, V., ZHANG, Ch., SCHANZ, M., 2006, “Meshless local Petrov-Galerkin method for continuously nonhomogeneous linear viscoelastic solids”, *Computational Mechanics*, v. 37, n. 3, pp. 279-289.
- SURESH, S., MORTENSEN, A., 1998, *Fundamentals of Functionally Graded Materials*. The Institute of Materials, London: IOM Communications Ltd..
- TELLES, J.C.F., 1983, *The boundary element method applied to inelastic problems*. In: *Lecture Notes in Engineering*, vol.1, Berlin, Springer-Verlag.
- TELLES, J.C.F., 1985. “On inelastic analysis algorithms for boundary elements”, *Advanced Topics in Boundary Elements*, (Ed. Cruse, T.A., Pifko, A.B. and Arnen, H.), AMD – vol. 72, Miami, USA, pp. 35-44.
- TELLES, J.C.F., CASTOR, G.S., GUIMARÃES, S., 1995, “A Numerical Green’s Function Approach for Boundary Elements Applied to Fracture Mechanics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.38, pp. 3259-3274.
- TELLES, J.C.F.; CARRER, J.A.M., 1988, “Implicit solution techniques for inelastic boundary element”, *10th BEM*, v. 3, pp. 3-15.
- TELLES, J.C.F.; CARRER, J.A.M., 1991, “Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the boundary element method”, *Mathematical Computational Modelling*, v. 15, pp. 303-311.
- TELLES, J.C.F.; CARRER, J.A.M., 1994, “Static and transient dynamic nonlinear stress analysis by the boundary element method with implicit techniques”. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 14, pp. 65-74.
- VERA-TUDELA, C.A.R., 2003, *Formulações Alternativas do MEC para Problemas Elastodinâmicos de Mecânica da Fratura com o uso da Função de Green Numérica*, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro. RJ, Brasil.
- VILLAÇA, S.F., GARCIA, L.F.T., 2000, *Introdução à Teoria da Elasticidade*. 4. ed., Rio de Janeiro, Editora COPPE/UFRJ.

WEEËN, F.V., 1983, "Mixed Mode Fracture Analysis of Rectilinear Anisotropic Plates using Singular Boundary Elements", *Computers & Structures*, v. 17, n. 4, pp. 469-474.

ZHU, T., ZHANG, J., ATLURI, S.N., 1998, "A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach", *Computational Mechanics*, v. 22, n. 2, pp. 174-186.

APÊNDICE A – TENSÕES EM PONTOS DO CONTORNO

Considere-se o trecho do contorno Γ sobre um ponto x qualquer, conforme a Fig.A.1 abaixo,

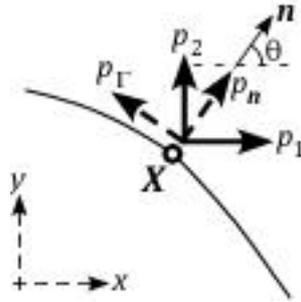


Figura A.1 – ponto x no contorno

onde \mathbf{n} é o vetor normal ao contorno em x , θ é o ângulo entre \mathbf{n} e o eixo x , p_1 e p_2 são as componentes da força de superfície, respectivamente, nas direções x e y (referencial global), e p_n e p_Γ são as componentes da força de superfície, respectivamente, nas direções da normal e perpendicular à ela (referencial local). Pode-se observar que estas se confundem com τ_{nn} e $\tau_{n\Gamma}$, que são as tensões normal e cisalhante no referencial local em x . Estas tensões podem ser escritas a partir de p_1 e p_2 da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \tau_{nn} \\ \tau_{n\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A tensão $\tau_{\Gamma\Gamma}$ é calculada a partir da aplicação da lei de Hooke, eq.(2.7) à deformação ao longo do contorno em x , $\varepsilon_{\Gamma\Gamma}$, que pode ser determinada de acordo com as eqs.(2.6) e (3.16) como se segue

$$\varepsilon_{\Gamma\Gamma} = u_{\Gamma,\Gamma} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_\Gamma} \cdot \mathbf{u}_\Gamma \quad (\text{A.2})$$

onde $\bar{\Phi}$ possui base de acordo com a eq.(3.24), os deslocamentos \mathbf{u}_Γ dos pontos que compõem o domínio de definição de x são determinados aplicando-se a eq.(A.1) para os deslocamentos, chegando-se a

$$\mathbf{u}_r = -\mathbf{u}_1 \sin \theta + \mathbf{u}_2 \cos \theta \quad (\text{A.3})$$

Com isso, τ_{rr} é definida da seguinte forma

$$\tau_{rr} = \frac{1}{1-\nu} (2G\varepsilon_{rr} + \nu\tau_{nn}) + \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{nn} \quad (\text{A.4})$$

Com todas as tensões no referencial local definidas, as tensões no referencial global são calculadas de acordo com a seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{nn} & \tau_{nr} \\ \tau_{nr} & \tau_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Considerando o meio heterogêneo ou a ocorrência de plastificação em \mathbf{x} , tem-se que as tensões calculadas na eq.(A.5) são as chamadas fictícias elásticas, como proposto, de forma incremental, na eq.(5.16). Logo, as tensões reais são obtidas simplesmente subtraindo delas as tensões de correção (eq.(6.7)) ou as plásticas fictícias (eq.(5.18)).

APÊNDICE B – POLINÔMIOS DE LAGRANGE

Considere-se a trinca, em coordenadas parametrizadas η , juntamente com a curva que representa sua abertura, um conjunto de pontos ζ_n , $n = 1, 2, \dots, N$ dispostos sobre ela e os respectivos valores conhecidos da abertura $c_{ik}(\xi, \zeta_n)$, de acordo com a Fig.B.1 abaixo.

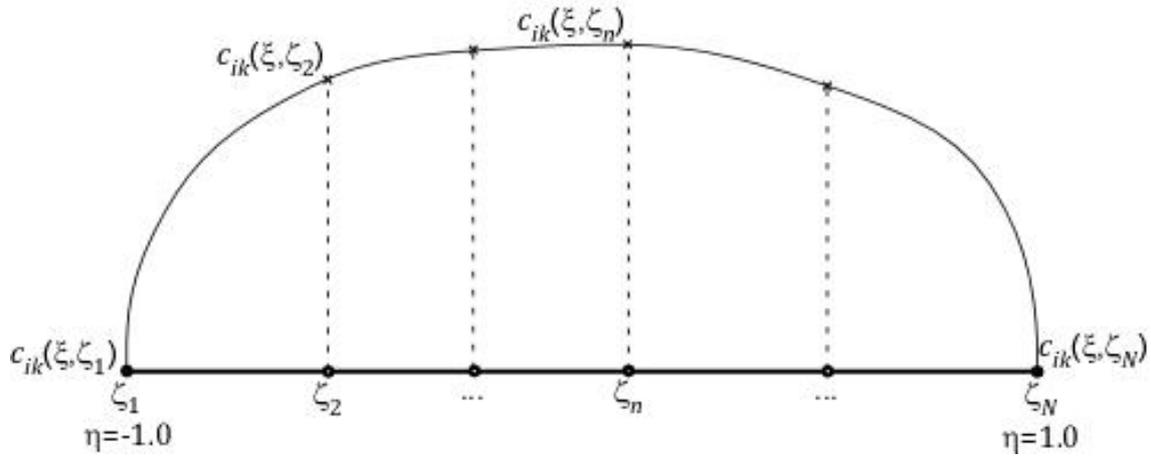


Figura B.1 – trinca em coordenadas parametrizadas

Para se determinar o valor de c_{ik} em um ponto qualquer entre ζ_n e ζ_N para o qual ele é incógnito, faz-se uso de um esquema de interpolação polinomial qualquer. Aqui, o esquema utilizado é o de Lagrange, cuja forma, partindo da eq.(4.22), é dada pela expressão

$$c_{ik}(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^N D_n(\eta) c_{ik}(\xi, \zeta_n) \quad (\text{B.1})$$

onde $D_n(\eta)$ é o polinômio de Lagrange associado à ζ e ζ_n , conforme a expressão abaixo

$$D_n(\eta) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N \frac{\eta(\zeta) - \eta(\zeta_n)}{\eta(\zeta_i) - \eta(\zeta_n)} \quad (\text{B.2})$$

A primeira derivada de $D_n(\eta)$, $\frac{\partial D_n(\eta)}{\partial \eta}$, é definida como

$$\frac{\partial D_n(\eta)}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^N \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \eta(\zeta_j) - \eta(\zeta_j)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N \eta(\zeta_i) - \eta(\zeta_n)} \quad (\text{B.3})$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)