

Luis Eduardo Araripe Gomes da Silva

Efeitos coletivos em eleições e jogos

Fortaleza

09/10/2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Luis Eduardo Araripe Gomes da Silva

Efeitos coletivos em eleições e jogos

Tese submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física

Orientador:

Raimundo Nogueira da Costa Filho

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Fortaleza

09/10/2007

Aos Meus Pais.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Raimundo Nogueira da Costa Filho pela orientação sempre muito paciente e aos vários ensinamentos ao longo deste trabalho.

Ao professor Josué Mendes Filho agradeço os valiosos comentários a respeito do trabalho das eleições e de maneira mais geral pelo seu enorme comprometimento com o curso de pós graduação, o que contribuiu de maneira significativa para a minha formação.

Agradeço também ao professor José Soares de Andrade Júnior devido aos vários ensinamentos que em muito contribuíram para este trabalho e para a minha formação.

Ao professor Matteo Marsili também é grande a minha gratidão por estar sempre disponível para esclarecer as minhas dúvidas e pelos valiosos ensinamentos.

Ao professor Hans Herrmann agradeço os vários ensinamentos.

Agradeço também a todos os professores e funcionários do departamento de física da UFC.

Assim como aos colegas estudantes e ex-estudantes, em especial ao Cheorge que me ajudou em algumas figuras desta tese.

Também sou muito grato aos funcionários e colegas do *The International Center for Theoretical Physics* pela hospitalidade.

E finalmente expresso a minha gratidão ao CNPq pela grande oportunidade que me foi concedida e pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho investigamos alguns fenômenos coletivos que surgem a partir das interações entre os indivíduos que formam uma população. Para isso utilizamos técnicas da mecânica estatística e modelos e análises que são comuns no estudo de fenômenos críticos e de sistemas fora do equilíbrio. A primeira manifestação coletiva estudada foi o resultado das eleições brasileiras dos anos de 1998, 2002, 2004 e 2006. Uma investigação a respeito da estatística do desempenho dos candidatos a deputado estadual mostrou que a distribuição de votos segue uma lei de potência com um expoente universal que se mantém o mesmo para diferentes eleições e diferentes regiões geográficas. Em uma análise considerando a estrutura partidária, pudemos verificar que existem diferenças entre as eleições brasileiras que estudamos com as eleições legislativas de alguns países europeus. Também utilizamos um modelo de fragmentação na tentativa de reproduzir os dados das eleições municipais estudadas. Sugerimos que um modelo de quebra possa ser utilizado para dar uma informação, de maneira quantitativa, a respeito da quantidade de votos estratégicos que foram utilizados. Esse estudo de eleições, ou melhor, de como as pessoas escolhem seus candidatos, nos levou a analisar o surgimento de padrões em grupos de pessoas utilizando jogos envolvendo agentes adaptativos. Para isso estudamos uma situação onde os agentes devem fazer uma previsão a respeito de um evento futuro. Além disso, mostramos uma aplicação desse jogo de previsão que tem como objetivo melhorar o desempenho das ferramentas de busca na internet. Em ambos estes modelos observamos um rico cenário envolvendo transições de fase em função da fração de agentes utilizando uma determinada estratégia.

Abstract

In this work we investigate some collective phenomena emerging from the interaction between individuals in a group or society. The approach is the same one used in statistical mechanics. Basically, we use the techniques and models that are well known in the subject of critical phenomena and statistical mechanics out of equilibrium. First, we studied the collective behavior of a population in an electoral process. In particular, we have analyzed the Brazilian elections from 1998 to 2006. In this study, we analyzed the performance of candidates in a proportional election. We have shown that the vote distributions of the candidates follows a power law for two orders of magnitude, and it is the same no matter the year of the election or different regions of the country. In order to verify the influence of the parties in the election we also analyzed the results using a electoral coefficient and compared our results to legislative elections in some European countries. We also studied majority elections, for that we have used a fragmentation model as an attempt to reproduce the result for mayor elections in the Brazilian cities. The model can give a good indication about the strategic voting in these kind of election. This study of how people choose their candidates drive us to analyze the emergence of patterns in groups of people playing games with adaptable agents. Therefore, we investigate here the forecasting game, a game where people make prediction about some events. Furthermore, we applied the forecasting game to study ways of how to improve the search tools on the internet. In both cases, we observed a rich scenario where phase transitions happen depending on the fraction of agents using some strategy.

Sumário

INTRODUÇÃO	p. 9
1 ELEIÇÕES	p. 13
1.1 Introdução	p. 13
1.2 Decisões em grupo e eleições	p. 14
1.3 Uma visão geral sobre diferentes sistemas de votação	p. 15
1.4 Um exemplo da importância da escolha do método	p. 17
1.5 Teorema de Arrow	p. 18
1.6 Teorema de Gibbard-Satterthwaite	p. 19
1.6.1 Alguns exemplos de votos táticos	p. 20
1.7 Lei de Duverger	p. 21
1.8 Física e eleições	p. 21
2 TEORIA DOS JOGOS	p. 41
2.1 Introdução	p. 41
2.2 Jogos estáticos e com informação completa	p. 42
2.3 O Dilema do prisioneiro	p. 42
2.4 Representação de jogos na forma-normal	p. 44
2.5 Estratégias claramente inferiores e conceitos de soluções	p. 44
2.6 O equilíbrio de Nash	p. 48
2.7 A tragédia dos comuns	p. 52
2.8 Jogos dinâmicos de informação completa	p. 54

2.9	Jogos dinâmicos de informação completa e perfeita	p. 54
2.10	Solução pelo método da indução por retrocesso.	p. 55
2.11	A representação dos jogos na forma extensiva.	p. 56
2.12	Equilíbrio perfeito dos subjogos	p. 57
2.13	Jogando jogos repetidamente.	p. 58
2.14	O Torneio de Axelrod	p. 59
2.15	Experimentos e o jogo do ultimato	p. 61
3	JOGOS DA MINORIA	p. 63
3.1	Introdução	p. 63
3.2	Jogo da minoria	p. 64
3.3	Mecânica estatística para o Jogo da Minoria	p. 70
3.4	Método da réplica	p. 71
4	AGENTES ADAPTATIVOS EM UM JOGO DE PREVISÃO E EM FERRAMENTAS DE BUSCA	p. 74
4.1	Introdução	p. 74
4.2	O Jogo da previsão	p. 75
4.3	Resultados	p. 76
4.4	Aplicação em ferramentas de busca	p. 82
4.5	Descrição do problema e modelo	p. 82
4.6	Resultados	p. 84
4.7	Conclusões e perspectivas	p. 89
	CONCLUSÃO	p. 90
	Apêndice A – Obtenção das equações que regem o modelo da predição	p. 94
A.1	Introdução	p. 94
A.2	Cálculos	p. 94

Apêndice B – Funções homogêneas, leis de potência, processos multiplicativos e criticalidade auto-organizada	p. 104
B.1 Funções homogêneas	p. 104
B.2 Lei de potência	p. 105
B.2.1 Processos multiplicativos	p. 106
B.2.2 Criticalidade auto-organizada	p. 107
Referências	p. 108

INTRODUÇÃO

O estudo de fenômenos que surgem devido a interação entre os indivíduos e situações advindas do comportamento humano não é exclusividade das ciências sociais, antropologia, ciências políticas, economia, etc. Hoje em dia é grande o número de físicos interessados nestas questões. A maior parte desse interesse é dos físicos estatísticos, que veem nestes problemas um excelente campo de estudo (1, 2). Uma das razões deste interesse é que existe uma grande quantidade de dados empíricos sobre os fenômenos socio-econômicos, servindo estes de “guia” para teorias e modelos. Alguns destes dados indicam que é comum se encontrar padrões nas flutuações de observáveis macroscópicos que não são triviais, além de algumas regularidades estatísticas que também estão presentes em sistemas complexos e fora do equilíbrio. Dentre os vários estudos interdisciplinares onde físicos, de alguma maneira, contribuíram para elucidar situações sociais e coletivas podemos citar o trabalho de Helbing et al.(3) que contém muitas referências sobre o tráfico de automóveis. Um outro tópico que também foi abordado pela física estatística é a dinâmica de uma multidão fugindo, em pânico, de ambientes fechados (4). A curiosa forma com que alguns pássaros se organizam durante o vôo também é um fenômeno coletivo muito interessante e que apresenta transição de fase (5, 6). Uma melhor compreensão sobre processos dinâmicos que ocorre em redes sociais, assim como sobre suas estruturas complexas (7) também é mais um exemplo dos recentes trabalhos da física estatística que está diretamente relacionado com sistemas sociais. Sobre economia e eleições veremos várias referências no decorrer desta tese mas a princípio mencionamos os textos (8) e (9) sobre estes dois assuntos respectivamente. De maneira geral, várias referências de trabalhos envolvendo física em questões sociais podem ser encontradas em Carbone et al.(10).

Esta interdisciplinariedade permite que um mesmo problema possa ser analisado por diferentes pontos de vista, cada uma delas acostumado as linhas de raciocínio e modelos típicos do seu ramo de estudo. Além de uma nova visão, o que a física estatística oferece para um estudo mais preciso destes sistemas socio-econômicos são conceitos como parâmetro de ordem, leis de escala, diagrama de fase, criticalidade auto-organizada, transições de fases e muitos outros (11, 12). Munido destes conceitos se espera que uma caracterização mais precisa do comportamento coletivo e de seus regimes seja possível.

Além destes conceitos, uma ampla quantidade de métodos, tanto teóricos (13–15) quanto numéricos (16) servem como ferramentas para uma melhor compreensão destes sistemas sociais. Alguns destes métodos surgiram com os recentes estudos sobre sistemas desordenados e fora do equilíbrio e permitem que os modelos a serem estudados possam incluir características importantes como a heterogeneidade entre os agentes e também permite que as flutuações possam ser melhor compreendidas.

Existem algumas diferenças conceituais nas características dos modelos para comportamentos sociais e econômicos que vem sendo feitas por físicos e as linhas que são tradicionalmente seguidas nas ciências sociais e economia. Nestas últimas, são geralmente feitas considerações detalhadas a respeito da racionalidade e da sofisticação com que os agentes se comportam. Se obter leis macroscópicas a respeito do comportamento coletivo de sistemas formado por agentes com um alto grau de sofisticação não é uma tarefa fácil. Certamente, o modelo mais clássico da física estatística é o modelo de Ising (15). Um dos vários ensinamentos obtidos com este modelo é que as leis macroscópicas surgem devido a algumas regularidades estatísticas que só são observadas em um *ensemble*. Por exemplo, a molécula de água que pode ser analisada detalhadamente de um ponto de vista individual através da mecânica quântica. Porém, nunca poderemos concluir a partir de um estudo deste tipo que a água pode existir em três diferentes estados, que à pressão atmosférica ela ferve a 100 graus Celsius e etc.. Estas observações surgem devido as interações intra-moleculares e só são observadas quando analisamos um conjunto destas moléculas. Estas regularidades estatísticas e propriedades macroscópicas são geradas devido as interações entre um grande número de agentes que formam o sistema e não dependem do comportamento individual com seu grande número de detalhes microscópicos. Desta forma, os modelos que vem sendo utilizados por físicos primam pela simplicidade dos detalhes microscópicos para que propriedades de natureza coletivas possam ser melhor identificadas.

Ao modelar sistemas sociais devemos sempre ter em mente que o comportamento “microscópico” destes sistemas são bem diferentes dos que governam partículas e átomos. De fato esta é a maior crítica que os modelos físicos para sistemas sociais recebem. Alguns autores afirmam que os modelos físicos menosprezam o poder de livre escolha dos indivíduos e que partículas, diferentemente de pessoas, não escolhem e nem mesmo demonstram ter um comportamento ambíguo com relação ao tipo de interação com os demais. Porém, uma análise mais minuciosa demonstra que temos bem menos alternativas da escolha sobre o que fazer do que achamos que temos. Nossas ações, aparentemente livres, estão fortemente vinculadas a uma grande variedade de fatores como por exemplo normas sociais,

necessidades econômicas, convenções, leis, etc. Estes vínculos surgem devido as interações com os demais indivíduos da sociedade e é uma manifestação do comportamento coletivo. Como exemplo, podemos citar o comportamento de um motorista, que teoricamente tem a livre escolha de dirigir a qualquer velocidade e em qualquer direção. Mas de fato o que observamos são condutores obedecendo as leis de trânsito e agindo de forma a evitar colisões. Uma modelagem para o trânsito pode argumentar que existe uma força repulsiva entre os carros de modo a evitar que eles colidam quando se aproximam. É obvio que uma força deste tipo não existe. Porém, os agentes agem como se ela fosse real. Um outro exemplo ocorre em eleições onde a escolha de cada eleitor é feita aparentemente de forma completamente individual e independente da escolha dos demais. De fato veremos nesta tese que isso não é verdade. Existe claramente a assinatura de comportamentos coletivos nas estatísticas das eleições.

A modelagem feita para sistemas sociais geralmente considera que os agentes respondem a incentivos externos e agem de maneira egoísta. Alguns conceitos da teoria dos jogos são tradicionalmente utilizados para a modelagem dos agentes. É usual se afirmar que os indivíduos são racionais, e agem com intuito de maximizar suas funções recompensas e são egoístas no sentido de que não se preocupam com o bem estar social. De uma maneira geral, os agentes têm interesses conflitantes, suas funções recompensas são diferentes e o comportamento egoísta, normalmente, leva a um estado que não é o ótimo do ponto de vista social (17).

No primeiro capítulo fazemos um estudo sobre as eleições Brasileiras de 1998 a 2006. Analisamos as eleições proporcionais e majoritárias. E descrevemos um modelo de fragmentação para estudar o caso da eleição majoritária.

A teoria dos jogos é o assunto do segundo capítulo desta tese. Esse capítulo é uma revisão e serve como uma breve introdução ao tema. Irei introduzir conceitos que são bastante utilizados em alguns modelos para sistemas sociais. Nele pode-se entender conceitos importantes como o do equilíbrio de Nash, jogadores racionais, jogos jogados repetidamente, e de como a cooperação pode surgir em um grupo de indivíduos egoístas entre outros. O capítulo terceiro, também um capítulo de revisão, é sobre um famoso modelo da econofísica, conhecido como o jogo da minoria. Apesar de simplicidade deste jogo, ele consegue capturar várias características que são observadas em mercados financeiros reais. Recentemente o conceito de racionalidade limitada (18) ou até mesmo de racionalidade zero (19) tem se mostrado importante e contrasta diretamente com o tradicional conceito de racionalidade perfeita ou de agentes sofisticados. Neste jogo, os agentes envolvidos são

evolucionários, competem por recursos limitados e possuem uma racionalidade limitada.

O quarto capítulo disserta sobre um modelo onde agentes adaptivos participam de um jogo da previsão. O comportamento dos agentes deste jogo inspirou o uso destes agentes adaptivos para propiciar um refinamento nas buscas pela internet.

1 ELEIÇÕES

1.1 Introdução

O tema central deste capítulo é o processo eleitoral. Eleições são processos de fundamental importância nas sociedades democráticas. É através delas que o indivíduo pode expressar seus desejos e convicções. Através de um processo eleitoral democrático as sociedades tentam aprimorar suas estruturas. Dessa forma, nada mais razoável que este seja objeto de muitos estudos e investigações. O fato do processo eleitoral ter esse importante papel na sociedade, e depender de fatores sociais e metodológicos, faz com que esse assunto transcenda o aspecto social e se torne interdisciplinar. Dentro dessa interdisciplinaridade, mostraremos nesse capítulo que disciplinas como física e matemática tem contribuições tão importantes quanto àquelas feitas por cientistas políticos, sociólogos etc.

Este capítulo está dividido da seguinte forma: a seção 1.2 irá discorrer sobre decisões em grupo e do cenário necessário para a realização de uma eleição. A seguir, na seção 1.3 está uma breve discussão sobre os diferentes métodos de eleições. A seção seguinte mostra um exemplo que ilustra bem a importância do método para a escolha do vencedor. As seções 1.5 e 1.6 mostrará dois teoremas a respeito das regras eleitorais: o teorema de Arrow e de Gibbard-Satterthwaite, enquanto que a seção 1.7 tratará de um resultado empírico observado nas eleições do tipo plural conhecido como lei de Duverger. Finalmente, na última seção deste capítulo mostraremos alguns trabalhos teóricos onde de alguma forma, ferramentas ou métodos que são utilizados em física, em particular na mecânica estatística, foram utilizados na análise do resultado de eleições. É também nesta seção que será feita todo um estudo estatístico das eleições brasileiras realizadas em 1998, 2002, 2004 e 2006. Os resultados referentes as eleições de 1998 e 2002 podem ser visto em (20) e (21). Uma análise das eleições municipais de 2004 esta descrita em (22), enquanto que a observação de que as estatísticas para 2006 foram as mesma observadas em 1998 e 2002 será descrito nesta tese.

1.2 Decisões em grupo e eleições

Tomar decisões é algo que esta presente no dia a dia de todos nós. Corriqueiramente nos vemos em situações onde temos que fazer alguma escolha. Muitas vezes estas escolhas são feitas de forma completamente individual. Porém, é comum que exista conflito nos interesses quando a questão diz respeito a várias pessoas. Em outras palavras, em uma situação onde a decisão final influencia não apenas um único indivíduo mas sim a todos da sociedade, é provável que não haja consenso na escolha. Uma situação como esta onde há conflitos entre as opiniões é o cenário ideal para a realização de uma eleição.

A eleição é uma consulta feita aos eleitores com o objetivo de efetuar uma escolha coletiva, racional, e que leve em conta as opiniões individuais. Porém, como fazer isso? De que maneira as opiniões individuais devem ser levadas em conta? Como o resultado da eleição está relacionado a forma da consulta que será feita? No decorrer deste capítulo mostraremos respostas para estas perguntas assim como alguns importantes teoremas.

Para que uma eleição esteja bem definida, deve-se especificar claramente seus três principais componentes (23):

- 1 O que vai ser posto em votação.
- 2 Quem está apto a votar.
- 3 Quais as regras que determinam os resultados desta eleição.

Identificar claramente o que esta sendo posto em votação não é uma tarefa difícil. Usualmente, após muita discussão, quando um grupo decide por fazer uma eleição, já está claro qual a decisão que deve ser colocada a prova.

A questão de quem esta apto a votar é um pouco mais polêmica. Aqueles que têm este “direito” são chamados de eleitores. Em algumas eleições é possível que nem todos os votos tenham o mesmo peso. A maioria das eleições utilizam o critério que cada eleitor contribui com um voto. Porém em algumas situações, é possível haver alguns eleitores cujos votos tenham mais ou menos influência. Por exemplo, alguns cargos de certas organizações o voto tem um peso de acordo com a função da pessoa dentro da organização. Algumas Universidades Brasileiras usam esse método para a escolha de seu reitor. Nestas, os votos de professores tem mais peso que servidores e estudantes, quando esse tem o direito de voto. Pesos não iguais nos votos também são comuns em eleições em empresas onde os maiores acionistas têm maior poder de decisão.

Dentre os três principais aspectos de uma eleição citados acima, o que determina as regras (a escolha do sistema de votação) é usualmente o mais polêmico. O conceito da função do bem estar social ajuda bastante para que tenhamos uma eleição bem definida. Vamos a ele.

A *função do bem estar social* (23, 24) é uma representação matemática do método utilizado para determinar o vencedor de uma eleição. Ela tem como parâmetro de entrada a opinião dos eleitores e produz como saída a escolha da sociedade. Em outras palavras, a função do bem estar social agrega n pré-ordenações individuais em uma única pré-ordenação social¹.

Dentre os métodos mais famosos para determinar o vencedor de uma eleição podemos citar a contagem de Borda, o método de Condorcet, o plural etc. (25). A escolha do método é de grande importância. Veremos posteriormente que dependendo da escolha do sistema, o resultado da eleição pode ser bem diferente mesmo considerando que os eleitores se expressaram da mesma forma. Devido a isso uma ampla discussão sobre a função do bem estar social deve ser feita.

O período eleitoral é repleto de discussões. As pessoas conversam sobre os candidatos, suas propostas, comentam debates, veem comícios e propagandas. Todas estas discussões são louváveis, engrandecem a democracia e fortalece a sociedade de uma maneira geral. Porém, as pessoas raramente discutem sobre o método de votação adotado. Talvez as pessoas não estejam conscientes da importância destes métodos. Talvez não conheçam a grande variedade de métodos disponíveis, assim como também ignoram a forma drástica que a escolha do método pode mudar o resultado de uma eleição. É uma necessidade que o método seja simples, que todos entendam suas regras, que proporcione uma contagem rápida dos votos e seja robusto a fraudes e manipulações. Certamente, uma maior divulgação e discussão sobre esta questão é extremamente pertinente.

1.3 Uma visão geral sobre diferentes sistemas de votação

A escolha do método para determinar o vencedor de uma eleição é bastante delicada. Como assegurar que esta escolha é a que melhor representa a vontade do grupo? Veremos que é bastante comum que o candidato vencedor em uma votação depende da escolha do método. Isto é, mesmo com a população expressando sua opinião da mesma forma o resultado pode ser bastante diferente dependendo do método utilizado para escolher o

¹ n é o número de eleitores.

vencedor.

A quantidade de métodos para escolher o vencedor é enorme. Para um texto mais completo com uma descrição detalhada sobre vários métodos ver a referência (25). Veremos a seguir uma breve descrição dos métodos mais conhecidos.

Um dos sistemas de votação mais utilizados é o sistema plural. Neste método, cada eleitor vota em um candidato. O candidato que receber o maior número de votos vence a eleição. Existe o oposto desse método, o chamado anti-plural. Neste caso cada eleitor vota contra um candidato. Isto é, vota naquele candidato que ele mais desaprova. O vencedor é aquele candidato que recebeu menos votos.

Outras eleições permitem que os eleitores votem em k dentre n candidatos ($k \leq n$). O vencedor é aquele que recebe a maior quantidade de votos.

Um outro método, chamado de votação por aprovação, se caracteriza por permitir que o eleitor vote em quantos candidatos ele quiser. Não havendo distinção entre cada candidato escolhido. O vencedor, novamente é aquele que recebeu a maior quantidade de votos. Existe também o método que assegura que cada eleitor tenha uma determinada quantidade de pontos x para distribuir entre os candidatos de sua preferência. Podendo este, atribuir mais de um ponto em um mesmo candidato. Sendo inclusive possível que ele coloque todos os seus x pontos em um mesmo candidato. Este método é chamado de votação cumulativa.

Um dos mais famosos métodos de votação é a contagem de Borda. Jean-Charles Borda foi um matemático e cientista político que em 1770 propôs um método de votação onde cada eleitor atribui pontos para cada candidato. Isto é feito da seguinte forma: se existem n candidatos, o j -ésimo candidato na lista de preferência de um eleitor recebe deste $n - j$ pontos. Por exemplo, se existem 3 candidatos, o favorito de um eleitor recebe 2 pontos enquanto o que representa sua segunda escolha recebe 1 ponto e o menos qualificado na opinião daquele eleitor irá receber dele 0 pontos.

Tanto a Contagem de Borda, quanto os métodos plural, anti-plural, método por aprovação são casos particulares de um método chamado de Posicional. Neste método cada eleitor expressa sua opinião através de uma lista onde ele ordena suas preferências de acordo com um peso. $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$ onde $w_1 > w_n$. No caso da votação plural $w_1 = 1$ e $w_j = 0$ para todo $j > 1$. No caso da contagem de Borda, $w_j = n - j$. No anti-plural $w_n = 0$ e todos os outros recebem $w_j = 1$. Já no método por aprovação cada candidato i aprovado por um eleitor, recebe deste $w_i = 1$ enquanto os demais recebem

$w_k = 0$.

Também é importante mencionar o método de Condorcet que tem como principal característica a comparação dos candidatos aos pares. Cada eleitor descreve suas preferências através de uma lista. Podendo atribuir posições iguais para mais de um candidato. O procedimento para encontrar um vencedor é comparar cada candidato com todos os demais. O vencedor é aquele candidato que venceu o maior número de comparação aos pares.

A quantidade de métodos para escolher o vencedor é enorme, estes que foram citados acima são os mais utilizados. Para um texto mais completo com uma descrição detalhada sobre cada um deles ver a referência (25).

1.4 Um exemplo da importância da escolha do método

Nesta seção o operador binário $>$ é utilizado com o intuito de expressar preferência. $X > Y$ quer dizer que o candidato X é preferido a Y .

Suponha uma eleição com 4 candidatos $\{A, B, C, D\}$ e 9 eleitores. A tabela abaixo descreve o número de eleitores com uma determinada preferência.

Preferência	Número de eleitores
$A > B > C > D$	2
$A > D > C > B$	2
$C > B > D > A$	2
$D > B > C > A$	3

Neste exemplo, a última linha da tabela indica que 3 eleitores preferem D a B , B a C e C a A .

Qual o vencedor em uma eleição onde a vontade dos eleitores esta descrita na tabela acima? A resposta para esta pergunta é: depende do método que será utilizado. Se utilizarmos uma votação do tipo plural, o vencedor será o candidato A . Pois ele recebeu 4 votos. Se o método a ser utilizado permite que cada eleitor vote nos seus 2 candidatos preferidos, o vencedor será o B (com 7 votos), apesar de B não ter sido a primeira escolha de nenhum eleitor. Se escolhermos um método onde os eleitores votam em 3 candidatos, o vencedor será o candidato C . E finalmente, se a contagem de Borda for utilizada, o vencedor será o candidato D !

Como vimos no exemplo acima, com a população expressando sua opinião da mesma maneira, o resultado da eleição está fortemente relacionado com o sistema escolhido para determinar o vencedor. Surgem então algumas importantes questões: como escolher um método? Qual método melhor representa a opinião da sociedade? Existe um método mais “justo” que outro?

Um passo concreto na busca de um método para determinar um vencedor de uma eleição é estabelecer que propriedades são necessárias para estabelecermos um método justo que representa bem a opinião da sociedade. A idéia é determinar estas propriedades para então podermos encontrar um método que as satisfaça.

1.5 Teorema de Arrow

O teorema de Arrow (26) é um resultado muito discutido tanto por ser de grande aplicação quanto por ser bastante contra intuitivo. Sua conclusão é algo surpreendente sobre os métodos de votação com mais de dois candidatos e que obedecem as condições de Domínio irrestrito, Eficiência de Pareto e a Independência das alternativas irrelevantes (27). Veremos a seguir o que significa cada uma destas condições.

- 1 Domínio irrestrito: a opinião de cada eleitor é representada por uma lista onde ele ordena os candidatos de acordo com a sua preferência. Esta lista deve ser completa (deve conter todos os candidatos). Deve ser transitiva (se $A > B$ e $B > C$, implica que $A > C$). Não permite indiferença entre os candidatos. (Não permite $B = C$ por exemplo). Não há nenhuma outra restrição na forma em que o eleitor pode ordenar seus candidatos.
- 2 Eficiência de Pareto: se todos os eleitores preferem A a B , então no resultado da eleição, A tem que estar melhor colocado que B .
- 3 Independência das alternativas irrelevantes: se A é preferido a B dentre as opções $\{A, B\}$, o fato de introduzirmos uma terceira alternativa X , não pode fazer com que B fique melhor colocado que A quando as opções são $\{A, B, X\}$

O primeiro requerimento assegura a liberdade de escolha de cada eleitor. A eficiência de Pareto permite que no caso de uma unanimidade, a vontade coletiva seja respeitada.

A seguir mostramos um exemplo da independência das alternativas irrelevantes.

Um cliente vai a uma venda comprar uma fruta e pergunta: quais as frutas que estão disponíveis? O atendente diz que tem abacaxi e banana. Ele escolhe abacaxi. Depois de um instante, o atendente volta e diz que além dessas duas opções, também tem cajá. Então o cliente diz: sendo assim, eu quero uma banana. Neste exemplo a independência das alternativas irrelevantes não foi satisfeita. Inicialmente a preferência era abacaxi a banana, depois que foi introduzida uma terceira alternativa (Cajá) isso mudou. Passou-se a preferir banana a abacaxi.

Estas três condições são requerimentos básicos para que um método de votação possa ser considerado “justo”. Verificar se elas se aplicam pode ser um bom começo na busca de um método para determinar o vencedor.

Em 1951 Kenneth Arrow (28), provou um teorema que diz que o único método de votação (uma função de bem estar social), quando há mais de dois eleitores e que satisfaz as três condições acima é ditatorial. Por ditatorial Arrow se refere a um método no qual existe um indivíduo, o ditador, onde o resultado da eleição é sempre igual a sua opinião. Independente da opinião dos demais.

Após a grande contribuição de Arrow, surgiu um crescente interesse em uma descrição mais teórica sobre as eleições e suas propriedades. Na década de 60, muitos trabalhos se dedicaram a estudar as propriedades estratégicas das regras de eleições e surgiram algumas conclusões a respeito de mecanismos e desenhos estratégicos que dependiam das regras utilizadas (29). A questão sobre a existência de uma regra a prova de estratégias só veio a ser respondida na década seguinte com o teorema de Gibbard-Satterthwaite que será descrito na próxima seção.

1.6 Teorema de Gibbard-Satterthwaite

O teorema de Gibbard-Satterthwaite (30, 31) garante que para toda eleição onde os eleitores ordenam os candidatos em uma lista de preferência e que haja mais de dois candidatos, pelo menos uma das afirmações a seguir deve ser verdadeira:

- 1 A regra é ditatorial.
- 2 Existe um candidato que não pode vencer em nenhuma condição.
- 3 A regra é susceptível a voto tático.

Por susceptível a voto tático, se quer dizer que existem condições nas quais um eleitor com total conhecimento sobre as regras da eleição e de como os demais eleitores irão votar são incentivados a votar de uma maneira que seu voto não reflita sua real preferência.

Regras que proíbem um certo candidato de vencer ou onde a escolha final depende exclusivamente da opinião de um ditador não se aplicam a situações reais. A conclusão do teorema é que todos os métodos estão sujeitos a votos táticos!

O voto tático, também chamado de voto estratégico, ocorre quando um eleitor não expressa sua preferência de maneira sincera, com o intuito de prevenir um possível resultado que ele considera pior. Muitos autores criticam o voto tático e consideram que é dever do estado incentivar os eleitores a expressarem suas opiniões de maneira sincera.

1.6.1 Alguns exemplos de votos táticos

Vimos na seção anterior que na prática todos os métodos de eleição, de alguma maneira, incentivam os eleitores a votar de maneira estratégica. Porém dependendo do método, um tipo de voto estratégico pode vir a ser mais conveniente que outros. Um exemplo de voto tático muito comum no método de Condorcet e na contagem de Borda é aquele em que o eleitor, de maneira que não representa sua classificação sincera, opta por classificar muito mal um candidato que ele acredita ter grande chance de vencer com objetivo de que seu favorito possa derrotá-lo. Outro exemplo do uso de votos táticos se dá em eleições com mais de um turno. Nestes casos é comum que alguns eleitores que tenham seu candidato favorito bem colocado, optem por classificar melhor um candidato que ele acredite que seja mais fraco para que então, no turno seguinte, seu favorito dispute com o candidato mais fraco que ele promoveu no turno anterior. Em eleições onde os eleitores podem votar no número de candidatos que desejarem (votação por aprovação) uma situação de voto tático acontece quando o eleitor deixa de votar em alguns candidatos que ele aprova, com o intuito de promover seu candidato favorito.

O tipo de voto tático mais comum é o voto útil. Ele é muito utilizado em votações do tipo plural e se concretiza quando o eleitor decide votar em um candidato que não é a sua primeira escolha, na esperança de vê-lo eleito. Por exemplo, um eleitor de esquerda percebendo que seu candidato favorito não tem muita chance de vitória, escolhe votar em um candidato de centro com mais chances com o intuito de prevenir a vitória de um candidato de direita que ele considera que tem boas chances.

1.7 Lei de Duverger

A Lei de Duverger (32) é um princípio empírico que afirma que em uma eleição do tipo plural a disputa fica em torno de apenas dois candidatos. Este fato é consequência da grande quantidade de votos úteis. Esta lei é bastante conhecida entre os cientistas políticos e é um grande indicativo de que sistemas plurais favorecem os grandes partidos enquanto votações do tipo proporcional favorecem mais os pequenos partidos (33).

1.8 Física e eleições

Nesta seção iremos nos focar em uma abordagem para as eleições nos moldes da física estatística. Iremos descrever o modelo do votante majoritário (34, 35) que é uma tentativa de usar ferramentas de física para modelar um processo de votação. Esse modelo é estocástico, definido em uma rede (grafo) onde cada sítio (nó) i pode assumir um valor binário $\sigma_i = \pm 1$ que representa um indivíduo ser a favor ($\sigma = 1$) ou contra ($\sigma = -1$) uma determinada questão. Com o passar do tempo, os indivíduos mudam suas opiniões conforme a opinião dos seus vizinhos. Um indivíduo passa a ser favorável ao assunto em questão quando a maioria em sua vizinhança for favorável, e contra se a maioria for contra. Um parâmetro q descreve a probabilidade de um indivíduo ir contra a maioria de seus vizinhos. Apesar de sua simplicidade, este modelo apresenta transição de fase em duas ou mais dimensões onde para valores de $q \ll 1$ o sistema está em uma fase ferromagnética onde há um consenso na população. Para $q > q_c$, onde q_c é uma probabilidade crítica, o sistema passa para uma fase paramagnética onde em média há o mesmo número de indivíduos a favor ou contra. Para o caso de uma rede quadrada o ponto crítico se dá quando aproximadamente 8% da população for do tipo que vai contra a maioria: $q_c \approx 0.076$.

Este modelo do votante majoritário possui uma regra específica para uma dinâmica de opinião. Além da regra descritas acima, existe uma grande quantidade de regras possíveis. Este fato, juntamente com o enorme avanço na compreensão de processos que ocorrem em estruturas não regulares como por exemplo em redes complexas, fizeram com que muitos trabalhos surgissem explorando idéias similares a do modelo do votante majoritário. Contudo, esses trabalhos apresentam outras regras para a dinâmica e são modelados nas mais diversas geometrias. Alguns exemplos de trabalhos nesta linha se encontram em (36–40).

Uma outra técnica bastante utilizada para análise de modelos de votação é a técnica de Monte Carlo (16). Além da simulação computacional, existem modelos que abordam eleições de um ponto de vista mais teórico utilizando conceitos da mecânica estatística. Dentre eles podemos citar (1, 9, 41, 42).

Uma outra linha teórica para o estudo das eleições é puramente estatística. A partir dos dados empíricos se observa padrões nos resultados da eleição e os compara com outras regularidades similares que são observadas nas estatísticas de sistemas complexos e fora do equilíbrio.

O primeiro trabalho nesta linha que reúne dados reais de uma votação aconteceu somente em 1999 (20) e teve uma boa repercussão (43). Neste trabalho, os autores fazem uma análise estatística sobre as eleições proporcionais realizada no Brasil no ano de 1998. Uma análise similar também foi feita para as eleições de 2002 (21). Um estudo de um comportamento generalizado para a distribuição de votos pode ser vista em (44). O objetivo da consulta popular estudada em (20) foi escolher quem iria ocupar os mandatos de presidente, deputado federal, senador, governador, deputado estadual e deputado distrital. O estudo focou-se nos resultados para deputado estadual, isso se deve ao fato de que a disputa para esse cargo possui um maior número de candidatos em todos os 26 estados brasileiros, possibilitando uma melhor análise estatística. A idéia do trabalho foi classificar os candidatos de acordo com os seus desempenhos. Para isso foi medido em cada estado o número de candidatos que receberam um determinado percentual de votos. A figura 1 mostra um histograma $N(\nu)$ da fração dos votos ν obtidos pelos candidatos a deputado estadual em São Paulo. Podemos observar que a quantidade de candidatos que receberam poucos votos é enorme, enquanto existem poucos candidatos que receberam muitos votos. No caso particular do estado de São Paulo, 1253 candidatos concorreram a vagas para deputado estadual nesta eleição. O mais bem votado obteve aproximadamente 1% do total dos votos e foram poucos candidatos que obtiveram mais de 0.10%. A grande maioria recebeu bem menos que isso.

A forma em que o histograma da figura 1 foi feito não é a mais precisa para representar funções que decrescem rapidamente. Uma maneira mais adequada de construir um histograma para estes dados é fazê-lo em escala logarítmica e com as largura das "caixas" não sendo mais uniformes. Seus intervalos são logarítmicos. Este procedimento é comum em análise deste tipo de função e permite que possamos visualizar melhor o comportamento da curva, já que fica mais fácil inferir sobre a velocidade com que as frequências diminuem à medida que a fração de votos aumenta.

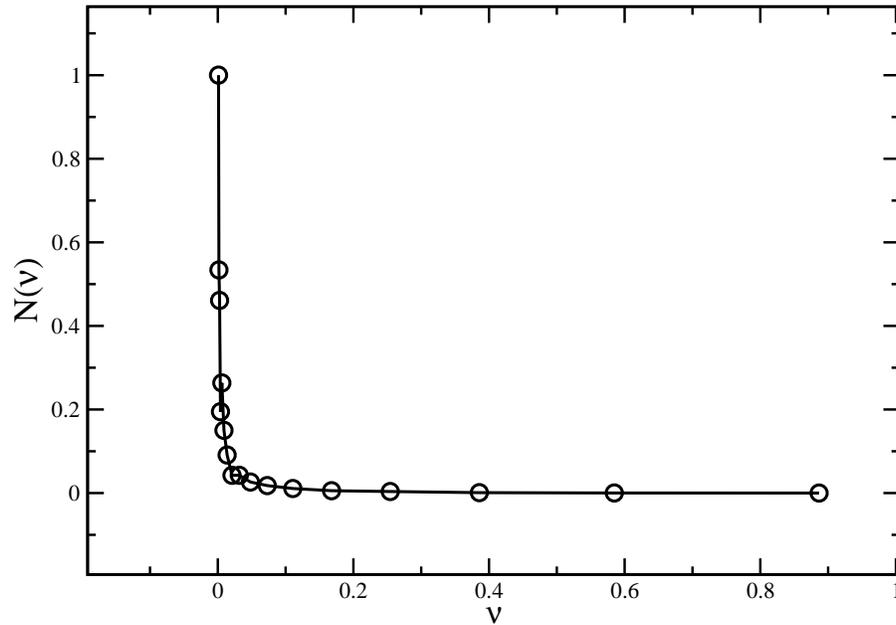


Figura 1: Histograma em escala linear do percentual de votos dos candidatos a deputado estadual no estado de São Paulo em 1998. Quando mostrado desta forma, não fica claro uma informação importante que diz respeito a velocidade do decaimento da curva. Um gráfico dessa forma não representa a melhor maneira de se observar este tipo de curva.

A figura 2 mostra um gráfico na escala log-log dos mesmos dados referentes a figura 1. Nesse novo gráfico podemos ver mais claramente que existe uma região intermediária das frações dos votos onde o comportamento da curva segue a uma lei de potência, $P(\nu) \propto \nu^\alpha$. Este comportamento para a distribuição da fração de votos é bastante interessante. Isso devido ao fato de que o expoente observado é $\alpha = -1.00$, indicando que a distribuição da fração de votos obedece a lei de Zipf e pertence a uma classe de universalidade bem conhecida.

O fato do expoente da distribuição pertencer a mesma classe de universalidade de alguns processos e modelos cuja dinâmica já é bem compreendida é bastante interessante, pois estes fenômenos ocorrem em contextos bastante diferentes.

Com o resultado mostrado aqui, uma questão que surge naturalmente é de que maneira as características regionais se manifestam na distribuição das frações de votos. Com o intuito de comparação entre os estados, também analisamos as eleições no estado do Piauí, onde no ano de 1998 houveram 170 candidatos a deputado estadual. Apesar deste número ser bem mais baixo do que o número de candidatos em São Paulo, é importante fazer a comparação devido aos grandes contrastes, sociais, econômica e geográfica entre estes dois estados. A figura 3 mostra o histograma da fração de votos dos candidatos a deputado

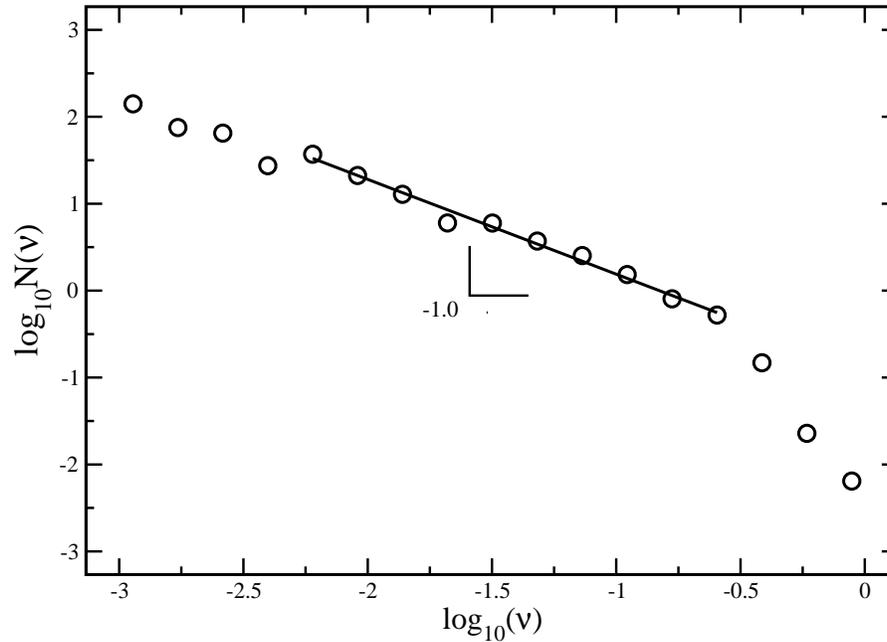


Figura 2: Histograma em escala logaritma do percentual de votos dos candidatos a deputado estadual no estado de São Paulo em 1998. Desta forma podemos observar melhor o comportamento da curva. Em uma região intermediária de votos a distribuição segue uma lei de potência com o expoente $\alpha = -1.00$. Já para as frações maiores há um *crossover* do tipo exponencial.

estadual no Piauí em 1998. Podemos observar que apesar da estatística não ser tão boa quanto a da figura anterior, ainda podemos observar um comportamento do tipo lei de potência com o mesmo expoente $\alpha = -1.00$. Isso indica que apesar das diferenças entre os estados, há algo de universal na distribuição dos votos.

Com o intuito de mostrar um resultado único para todo o país, fizemos um histograma contando o número N de candidatos que obtiveram uma fração ν dos votos de seus estados. No total 9927 pessoas se candidataram a deputado estadual nas eleições de 1998. Um histograma com estes dados está mostrado na figura 4. Verificamos que esta distribuição de votos também segue uma lei de potência que se estende por mais de duas ordens de magnitude e com expoente $\alpha = -1.00 \pm 0.05$ (20).

Após a eleição de 1998 ocorreram outras duas eleições para os mesmos cargos no Brasil. Uma em 2002 e a outra mais recentemente em 2006. Durante este intervalo de oito anos muitas mudanças ocorreram no país. Apesar disso, a distribuição de votos nas eleições proporcionais é exatamente a mesma em todas as eleições. Na figura 5 podemos ver que a distribuição tem um comportamento do tipo lei de potência para os valores intermediários da fração de votos. O expoente é $\alpha \approx -1.00$ e a curva apresenta uma

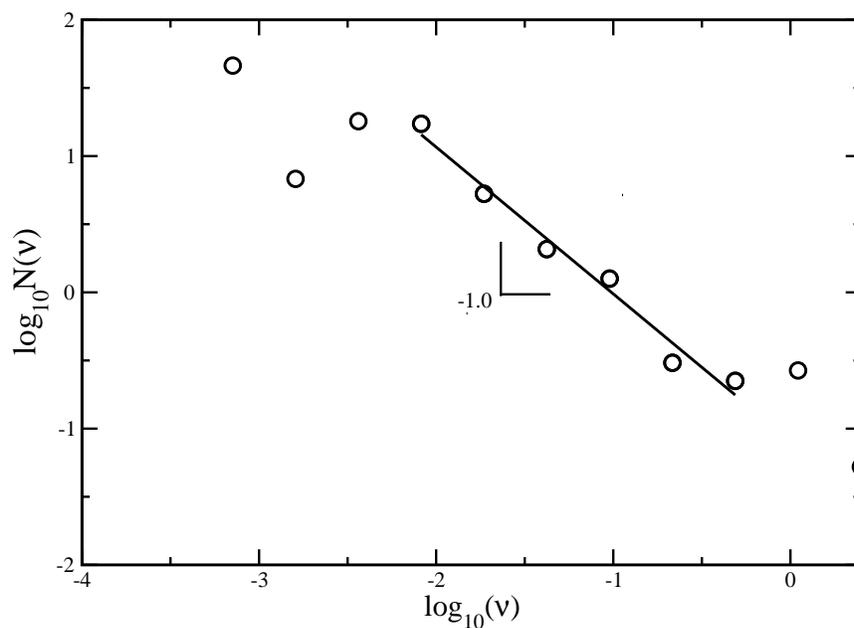


Figura 3: Histograma com número de candidatos a deputado estadual que receberam uma fração ν de votos no estado do Piauí nas eleições de 1998. Apesar da estatística um tanto pobre (houveram “apenas” 170 candidatos) ainda podemos observar uma região em lei de potência com o mesmo expoente observado no estado de São Paulo.

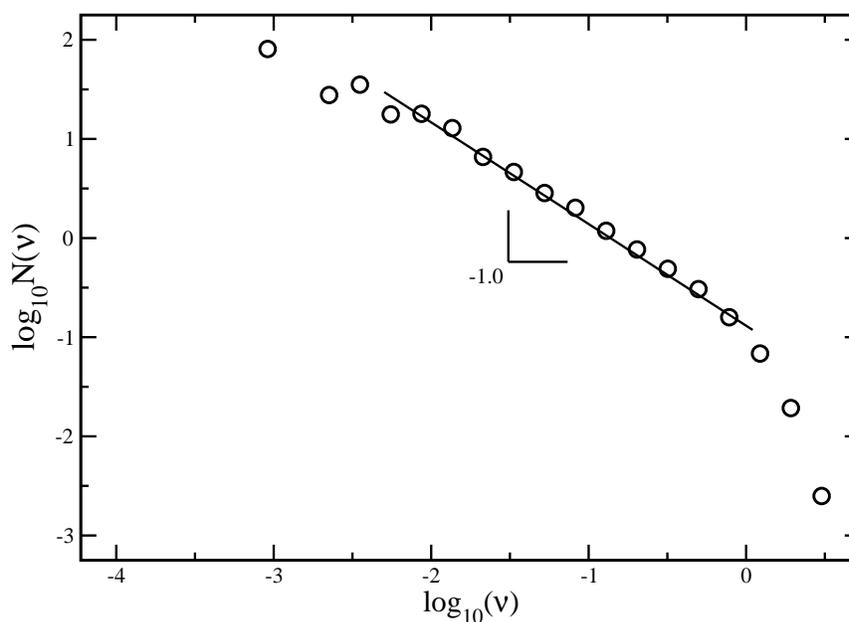


Figura 4: Histograma contando o número N de candidatos que obtiveram uma fração ν dos votos de seus estados nas eleições para deputado estadual no Brasil em 1998. A distribuição de votos segue uma lei de potência que se estende por mais de duas ordens de magnitude e com expoente $\alpha = -1.00 \pm 0.05$.

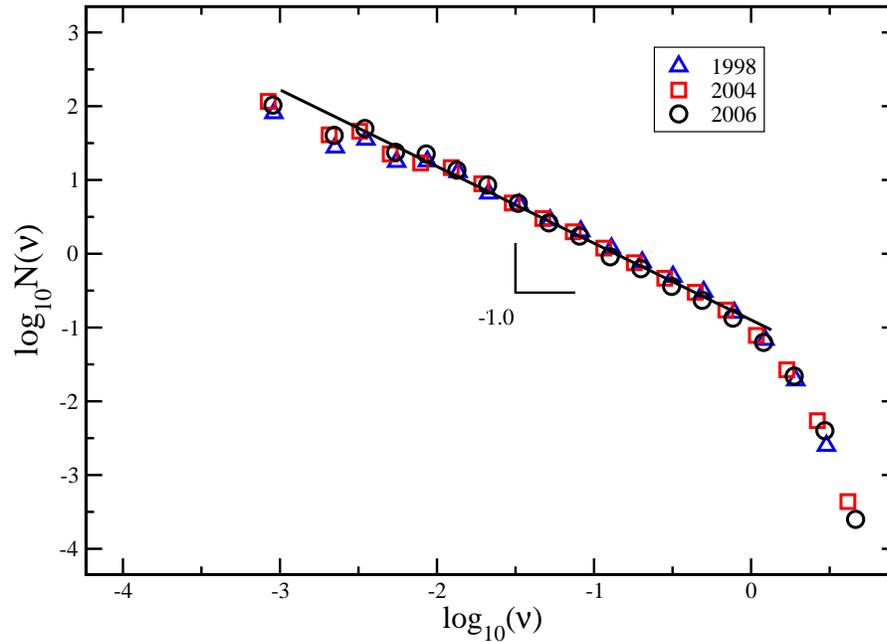


Figura 5: Distribuição de votos dos candidatos a deputado estadual nas eleições de 1998, 2002 e 2006. Em todos os casos as curvas mostram o mesmo comportamento o que indica haver um comportamento universal no processo de escolha. Em todos os casos o expoente foi -1.00 ± 0.05 . A linha sólida mostra a regressão para a região intermediária da fração dos votos.

cauda do tipo exponencial para as frações mais altas. Este comportamento não é visto apenas ao analisarmos o histograma do país todo. Em cada estado e em cada eleição, o comportamento também é o mesmo.

Resumindo os resultados mostrados até aqui, vimos que a distribuição da fração de votos segue uma lei de potência bem definida que é robusta para todos os estados e em diferentes períodos de tempo. A explicação para a distribuição de votos seguir uma lei de potência é descrita na referência (20) e sugere que o sucesso ou fracasso de um candidato ocorre devido a um processo multiplicativo (45). Mais precisamente, isso sugere que um candidato possui várias atribuições como por exemplo: recursos financeiros, militância política, marketing, etc. Uma boa votação seria necessariamente uma condição onde essas atribuições mencionadas acima fossem satisfeitas plenamente. Seria o equivalente a atribuímos um peso p a cada uma dessas características, e o produto delas fosse o maior possível. Por exemplo, não adianta que ele tenha muitos recursos financeiros e falhe drasticamente no seu marketing. Pois a sua qualificação geral, que depende do produto será baixo se uma parcela for próximo a zero. Esta interpretação foi sugerida na Ref. (45).

A nossa análise dos dados das eleições no Brasil confirmou que a distribuição da fração dos votos tem um comportamento universal, e que é robusto para as mais diversas regiões do país e para diferentes eleições. Uma comparação com resultados de outros países também foi feita. Por exemplo, o resultado das eleições da Índia, maior democracia do planeta, foram analisados e uma distribuição do mesmo tipo da observada no Brasil foi encontrada (37). Este resultado sugere que a distribuição é universal e deve se aplicar a qualquer eleição do tipo proporcional.

Recentemente Fortunato e Castellano (46) fizeram uma análise dos resultados das eleições na Itália, Polônia e Finlândia. Os autores verificaram que a distribuição de votos nas eleições desses países não é universal, como pode ser visto na figura 6. O argumento para a falta de universalidade, segundo os autores, é devido a forma com que a análise foi feita até aqui. Basicamente, a discordância se reside na forma que o histograma foi feito, ou seja, em função da fração ν de votos recebidos. Eles sugerem que nas eleições desses países europeus os partidos políticos são os responsáveis pela falta de universalidade da distribuição dos votos feita de acordo com a Ref. (20). Dessa forma, para cada partido eles definiram nova variável $v_0 = N/Q$ onde N é o número de votos que este partido recebeu e Q é o número de candidato deste partido. Esta variável v_0 é o número médio de votos obtidos pelos candidatos em um dado partido. Com o intuito de excluir o papel do partido na votação de cada candidato, eles fazem um histograma $N(v/v_0)$ onde v é o numero de votos recebido por um candidato. A variável vQ/N é uma medida do desempenho do candidato comparado com os demais de seu partido. Se $v/v_0 < 1$, significa que ele recebeu menos votos que a média do seu partido e se $v/v_0 \gg 1$ quer dizer que o candidato se saiu bem melhor que a média do seu partido.

Já foi comentado que os autores de (46) sugerem que a falta de universalidade na distribuição de votos é devido ao histograma ter sido feito em ν . Eles dizem que para haver uma curva universal é necessário que o histograma seja feito contando a frequência de v/v_0 . A figura 7 mostra o colapso das curvas para diferentes países em uma única curva universal quando a frequência é medida com esta nova variável. O melhor ajuste encontrado para as curvas da figura 7 é uma lognormal do tipo

$$F(vQ/N) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma vQ}} e^{-(\log(vQ/N)-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Um gráfico desta função em escala linear e com os parâmetros encontrados na referência (46) está mostrado na figura 8.

Da maneira que o histograma foi construído na referência (20), se mediu a frequência

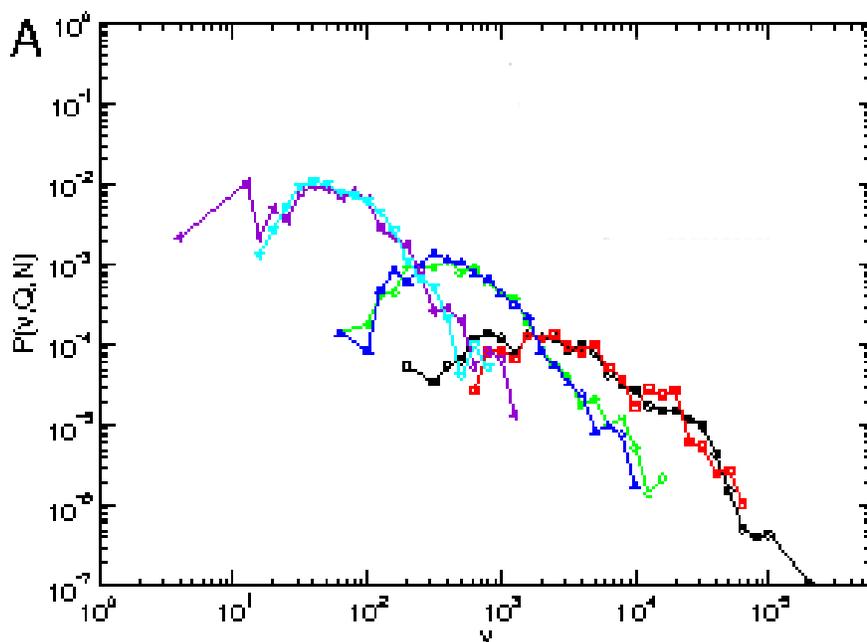


Figura 6: Gráfico A) Distribuição da fração de votos em eleições em alguns países europeus. Podemos ver diferenças entre as curvas para os diferentes países, indicando a ausência de um comportamento universal. Figura retirada da referência (46).

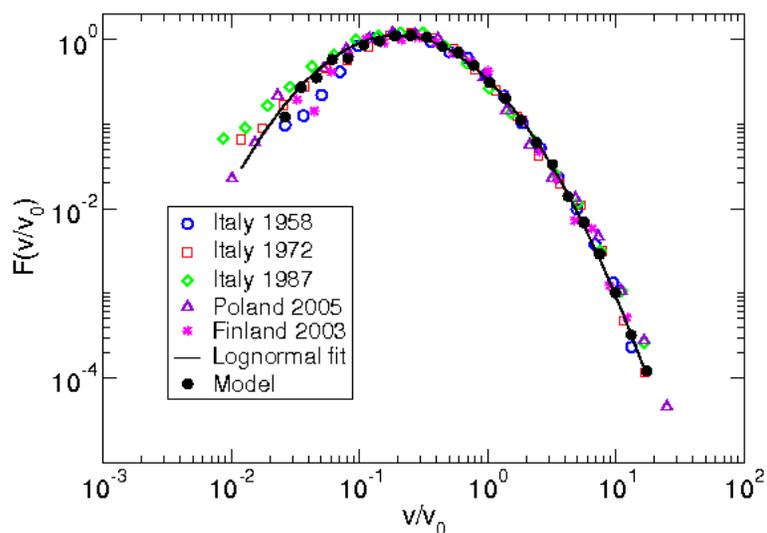


Figura 7: Apenas quando o histograma é feito sobre a variável vQ/N se é possível se observar uma curva universal que seja robusta para os diferentes países e diferentes épocas. Os autores observam que a distribuição segue uma log-normal. Figura retirada da referência (46).

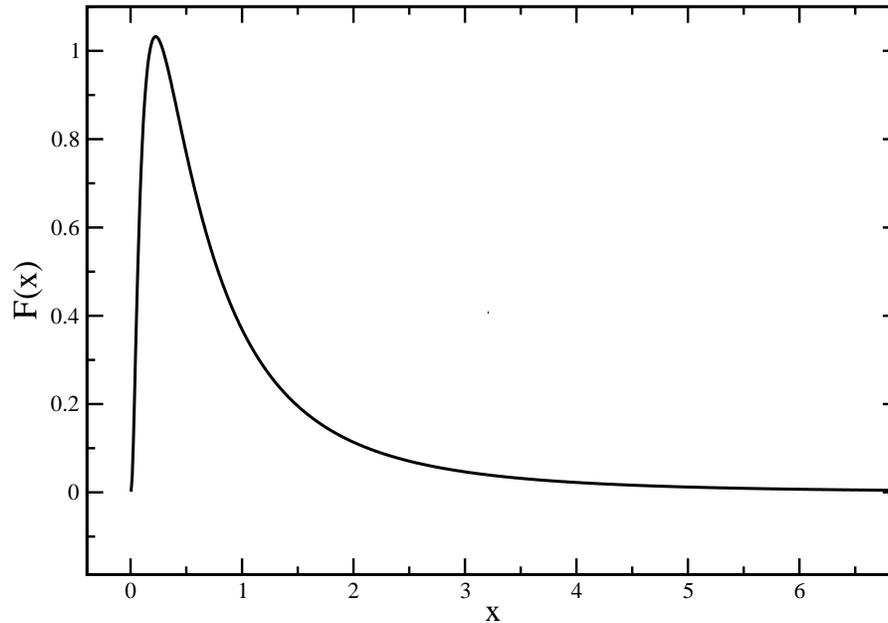


Figura 8: Curva log-normal. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-(\log(x)-\mu)^2/2\sigma^2}$. Com os parâmetros $\mu = -0.541$ e $\sigma^2 = -2\mu = 1.082$ sendo os mesmos encontrados em (46).

em que candidatos tiveram um certo desempenho com relação a população como um todo. Isto é, a fração dos votos que o candidato conseguiu receber. A análise dos dados feita desta forma mostrou que as eleições em diferentes regiões do Brasil e diferentes épocas, exibem uma distribuição de votos do tipo lei de potência $N(\nu) \propto 1/\nu$ para as frações intermediárias de ν , seguido de um decaimento do tipo exponencial para as maiores frações de votos. Nesta distribuição existem dois limites óbvios: um superior pois não é possível que candidatos recebam mais de 100% dos votos; e um limite inferior pois não é possível que algum candidato receba menos do que zero votos.

A análise das eleições dos países Europeus citados em (46) têm um aspecto interessante pois mostra que a influência partidária no comportamento da distribuição também é importante. Pois, dependendo da regra da eleição, se um partido recebe uma fração f do total de votos, este partido terá um número de vagas (assentos nas camaras ou congressos, etc...) proporcional a f . A escolha para determinar quem irá ocupar estas vagas depende do sistema eleitoral de cada país e dos partidos, mas em geral a decisão é tomada com base em quais foram os candidatos que receberam mais votos dentro do partido.

Enquanto a idéia de um histograma da fração dos votos é clara, pois fica fácil visualizar a votação do candidato, o método proposto em (46) modifica a curva da fração dos votos completamente. A curva apresentada em (46) fica centrada entorno de $\nu Q/N \approx 1$. Isso acontece porque esse novo histograma mostra o quanto um candidato se afasta da média

de votos do seu partido. Onde o valor de $vQ/N = 1$ representa um desempenho na média de seu partido.

O numerador N na nova variável vQ/N traz muita informação sobre o partido e pode variar bastante de partido a partido. No sentido de facilitar a interpretação tanto do histograma que conta a frequência em que candidatos receberam uma fração de votos ν , quanto o histograma que conta a frequência de candidatos com um desempenho vQ/N dentro de seu partido, vamos exemplificar algumas situações: para o histograma da distribuição simples de votos, um candidato que recebe uma grande quantidade de votos contribui com um ponto à direita da curva do histograma da fração de votos. Colaborando para o aumento da frequência dos candidatos muito bem votados. Após uma transformação para a nova variável vQ/N , a posição do ponto relativo a esse candidato agora é incerta pois mesmo tendo tido uma grande votação, esse ponto depende agora do número de votos do partido por número de candidatos. No caso do ajuste da figura 7 foi encontrado $\mu = -0.541$.

Recapitulando, a contagem da frequência de candidatos que receberam uma fração ν , como a feita em (20), leva a conclusão que o desempenho dos candidatos em receber votos segue uma lei de escala do tipo $N(\nu) \propto 1/\nu$. Uma distribuição sem comprimento característico, enquanto que a contagem da frequência do número de candidatos que tiveram um certo desempenho dentro de seu partido, segue uma distribuição log-normal em países como Itália, Polônia e Finlândia.

Com o intuito de comparação, verificamos a distribuição do desempenho dos candidatos dentro dos seus partidos assim como feito por S. Fortunato e C. Castellano. A figura 9 mostra o histograma $N(vQ/N)$ para as eleições a deputado estadual em São Paulo nos anos de 1998, 2002 e 2006. Uma curva lognormal como a observada nos países europeus também foi esboçada. A distribuição encontrada por nós é diferente da propostas por eles. Claramente as curvas das diferentes eleições no Brasil têm o mesmo comportamento entre si e não concordam com a lognormal observada na referência (46). Podemos notar nesta figura um efeito interessante; existe a tendência de nas eleições mais recentes no estado de São Paulo que o número de candidatos que tiveram um desempenho realmente muito abaixo da média de seu partido tem diminuído.

A figura 10 mostra o histograma de vQ/N para 3 eleições no Brasil. Um esboço com os mesmos dados também é mostrado na figura 11, porém desta vez em escala linear. Podemos observar que para valores de vQ/N maiores que 1 a curva apresenta um decaimento rápido indicando ser raro que alguém tenha um desempenho bem acima da

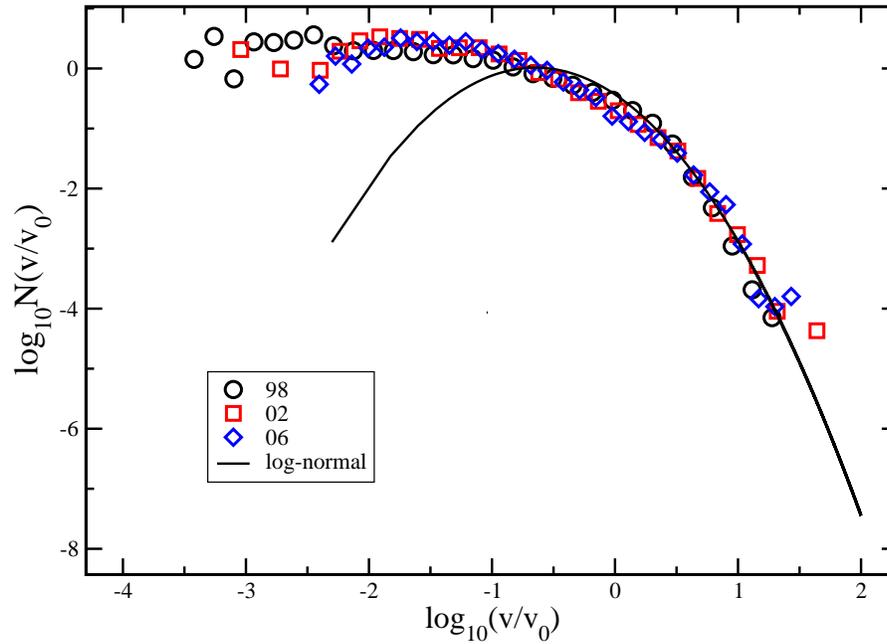


Figura 9: Distribuição do desempenho dos candidatos em seus partidos para várias eleições no estado de São Paulo. A curva sólida é uma log-normal que representa o melhor ajuste para os dados encontrados em outros países. A discordância é clara para valores de v/v_0 pequenos.

média de seu partido. Já para os valores de vQ/N próximos a 1 é onde se encontra a maioria dos candidatos. A análise feita aqui não se restringe aos candidatos eleitos. Os histogramas construídos se referem a todos os candidatos que participaram da eleição. Nas eleições brasileiras é comum que uma grande quantidade de candidatos tenha um desempenho realmente muito ruim. Recebendo uma quantia irrisória de votos e tendo um desempenho em relação ao partido próximo de zero. A curva da figura 10 mostra que o número de candidatos que tem o desempenho entre $0.0001 \leq nQ/N \leq 0.1$ é alto e praticamente não decresce a medida que vQ/N aumenta. Já os candidatos que obtiveram $vQ/N > 1$ são mais raros e a probabilidade de se encontrar candidatos com um desempenho extraordinário cai rapidamente.

A princípio, a diferença entre os resultados obtidos em (46) e os verificados aqui podem ter suas raízes na diferença da estrutura partidária dos países europeus para os Brasileiros. No Brasil é muito comum candidatos com menos de 10 votos e até mesmo candidatos com zero votos surgem não muito raramente. Isso também justifica que candidatos com $vQ/N \ll 1$ sejam bem mais comuns aqui no Brasil do que nos demais países analisados em (46). Essa investigação é importante e pode nos dar alguma informação que ajude a compreender melhor as diferenças entre a estrutura política partidária do Brasil e de

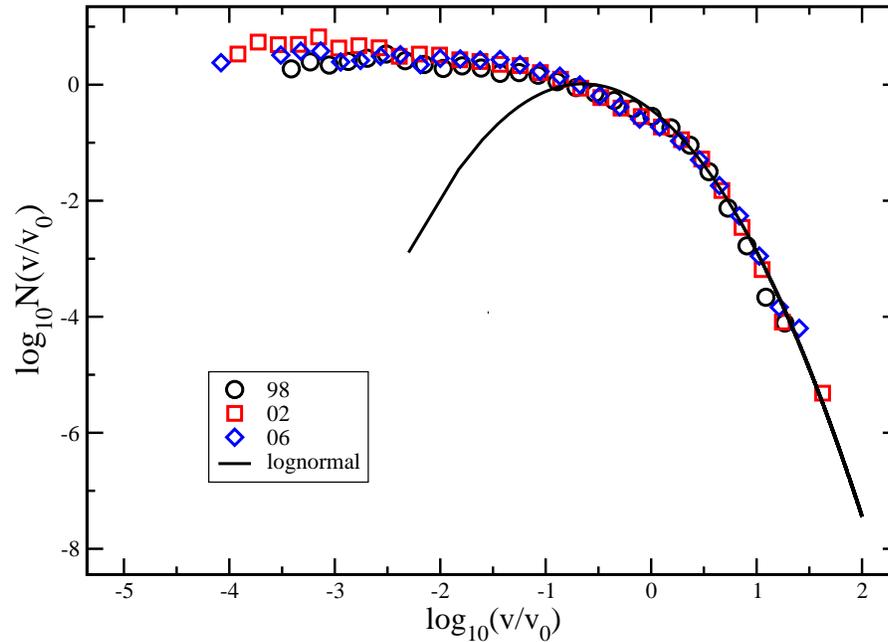


Figura 10: Distribuição do desempenho dos candidatos em seus partidos, para várias eleições ocorridas no Brasil. A curva sólida é uma log-normal que representa o melhor ajuste para os dados encontrados em outros países. A discordância entre as curvas é clara para valores de v/v_0 pequenos.

alguns países europeus. Um outro fator que também pode ter contribuído para estas diferenças é que no Brasil os eleitores, aparentemente, dão mais importância ao apelo pessoal do candidato do que as propostas que são os alicerces de seu partido político. Uma indicação de que o partido não desempenha um papel tão forte é o grande número de políticos mudando de partido conforme as conveniências momentâneas e independente de princípios ideológicos. Porém, existe um outro efeito no qual o partido desempenha um grande papel. É o caso onde os votos recebidos por um candidato muito bem votado, auxilia a eleger alguns outros candidatos do seu partido que não foram tão bem.

Dando continuidade a uma análise do processo eleitoral Brasileiro, iremos agora investigar as eleições majoritárias. Nos analisamos o resultado das eleições municipais brasileiras realizadas em 2004 onde um total de 102.817.864 eleitores votaram e elegeram 5562 prefeitos. Alguns municípios tiveram até 14 candidatos concorrendo ao cargo de prefeito. Nosso interesse foi medir com que frequência os candidatos receberam uma fração ν de votos. Por exemplo, qual o histograma da fração de votos obtidos pelos primeiros colocados, pelos segundos, e assim por diante. Estas distribuições dependem do número de candidatos envolvidos na disputa.

Os dados empíricos desta eleição (47) concordam com a lei de Duverger que afirma

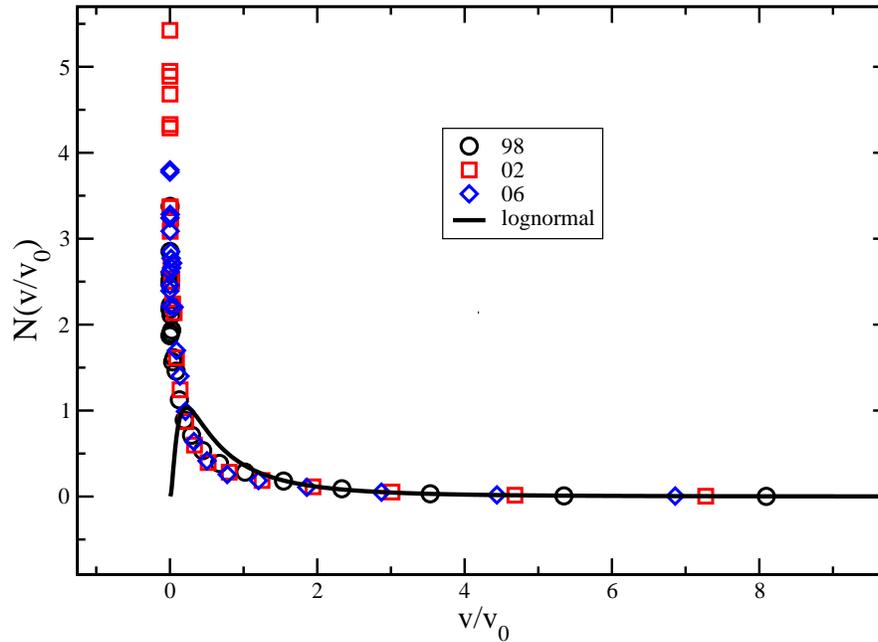


Figura 11: Distribuição em escala linear do desempenho dos candidatos em seus partidos para várias eleições ocorridas no Brasil . A curva sólida é uma log-normal que representa o melhor ajuste para os dados encontrados em outros países.

que em eleições plurais a disputa costuma ficar centrada entre apenas 2 partidos, no nosso caso dois candidatos (ver secção 1.7). A figura 12 mostra um histograma com a fração de votos obtidos pelos primeiros colocados em eleições onde concorreram três e quatro candidatos. Podemos perceber claramente que as frações próximas de 50% são bem mais frequentes.

A figura 13 mostra o percentual de votos obtidos pelo segundo colocado em eleições onde concorreram 2, 3 e 4 candidatos. Podemos ver que mesmo para os casos onde mais de dois candidatos estiveram na corrida o percentual próximo a 50% é bastante frequente. Indicando que a disputa fica realmente centrada em dois candidatos como proposto pela lei de Duverger.

Numa tentativa de modelar os resultados empíricos acima obtidos, recorreremos a um trabalho teórico de B. Derrida e H. Flyvbjerg (48) onde eles analisaram as propriedades estatísticas de objetos quebrados aleatoriamente e dos múltiplos pontos de equilíbrio metaestáveis em sistemas desordenados. Utilizamos as idéias deste trabalho, mais especificamente o modelo de quebra aleatória para compreendermos melhor o resultado das eleições plurais realizadas no Brasil em 2004 (22). Os dados utilizados estão disponíveis em (47).

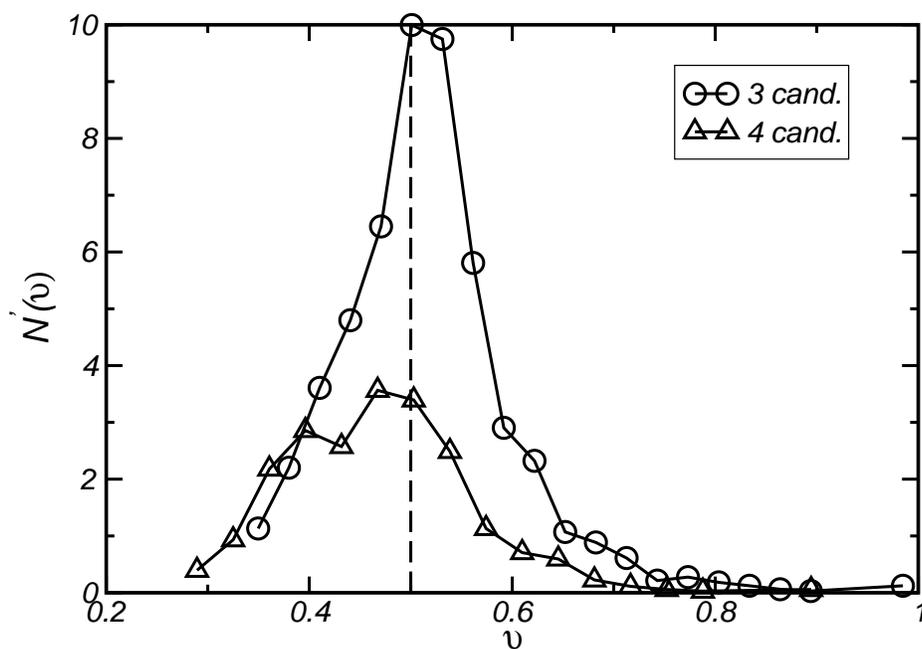


Figura 12: Histograma obtido empiricamente que mostra o desempenho dos primeiros colocados em eleições onde concorreram 3 e 4 candidatos. Ambas as curvas tem um pico em $\nu \approx 0.5$. Mostrando que na maioria das vezes é mais provável que o primeiro colocado receba a metade dos votos.

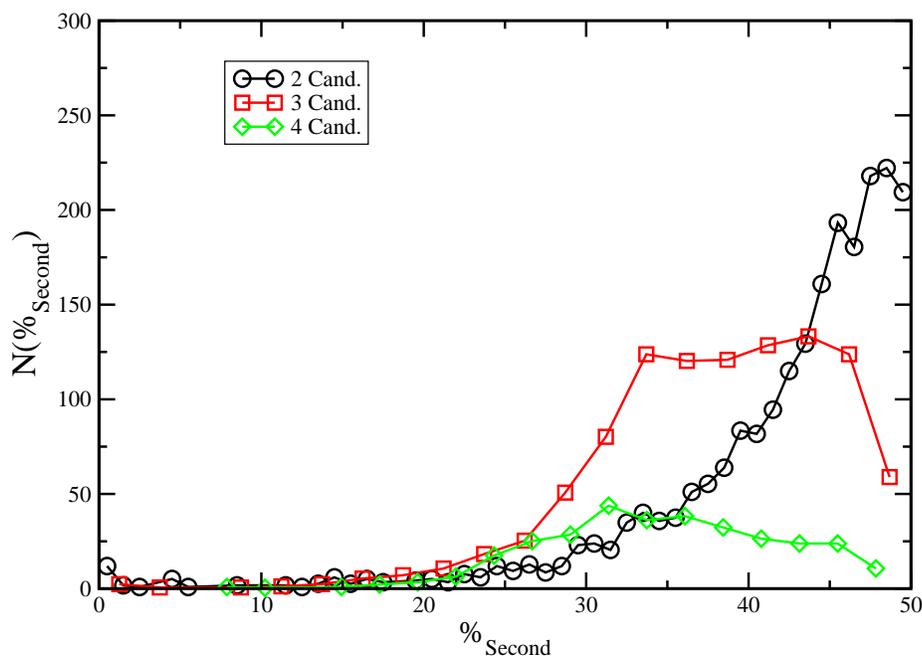


Figura 13: Distribuição do percentual de votos obtidos pelo segundo colocado em eleições onde concorreram 2, 3 e 4 candidatos.

Existem inúmeras formas em que se pode particionar um segmento unitário. O modelo de quebra proposto em (48) é definido como segue: inicialmente se quebra o intervalo $[0, 1]$ em dois pedaços. Um de tamanho W_1 e o outro $W = 1 - W_1$, o pedaço W_1 é mantido intacto, e em um segundo estágio do processo, W é quebrado em mais dois pedaços. Um de tamanho W_2 e outro de tamanho $W' = W - W_2$ e assim por diante.

Após um número infinito de quebras, o segmento se transforma em uma infinidade de pedaços com tamanhos:

$$W_1 = x_1 \tag{1.1}$$

$$W_2 = (1 - x_1)x_2 \tag{1.2}$$

$$W_3 = (1 - x_1)(1 - x_2)x_3 \tag{1.3}$$

$$\vdots \tag{1.4}$$

$$W_n = (1 - x_1)\dots(1 - x_{n-1})x_n \tag{1.5}$$

$$\vdots \tag{1.6}$$

onde os números x_1, x_2, \dots, x_n são gerados aleatoriamente de acordo com a distribuição de probabilidade $\rho(x)$. Nesse trabalho os autores (48) investigaram através de simulação numéricas a forma da distribuição do maior pedaço $P(W_{max})$ após infinitas quebras.

A figura 14 mostra a frequência do tamanho do maior segmento após diferentes números de cortes. Este resultado foi obtido se utilizando uma distribuição uniforme $\rho(x) = 1$ e após 10^6 realizações ². Podemos ver que no caso de apenas um corte a distribuição inicial é recuperada, porém com o domínio modificado já que estamos analisando a estatística do maior segmento. A comparação entre a curva de 5 e 50 cortes mostra que a frequência dos cortes de tamanho $W_{max} > 0.5$ é praticamente a mesma. De modo geral as curvas como um todo são bastante similares, havendo diferenças apenas para os menores valores de W_{max} . O fato das curvas de 5 e 50 cortes serem similares mostra que o maior pedaço geralmente surge (e não é mais dividido) logo nos primeiros cortes. Apenas em casos muito raros se obtém maiores pedaços com tamanhos $W_{max} < 0.2$.

Utilizamos um modelo de quebra como o de Derrida (48) para particionarmos o eleitorado. A idéia é quebrar o segmento unitário em um número de segmentos iguais ao número de candidatos. E então atribuir o tamanho de cada segmento a fração de votos obtidos por cada candidato. É oportuno enfatizar que em um modelo como este está excluído qualquer efeito devido a votos estratégicos, o desempenho dos candidatos só

²Por uma realização me refiro a se fazer n cortes no segmento.

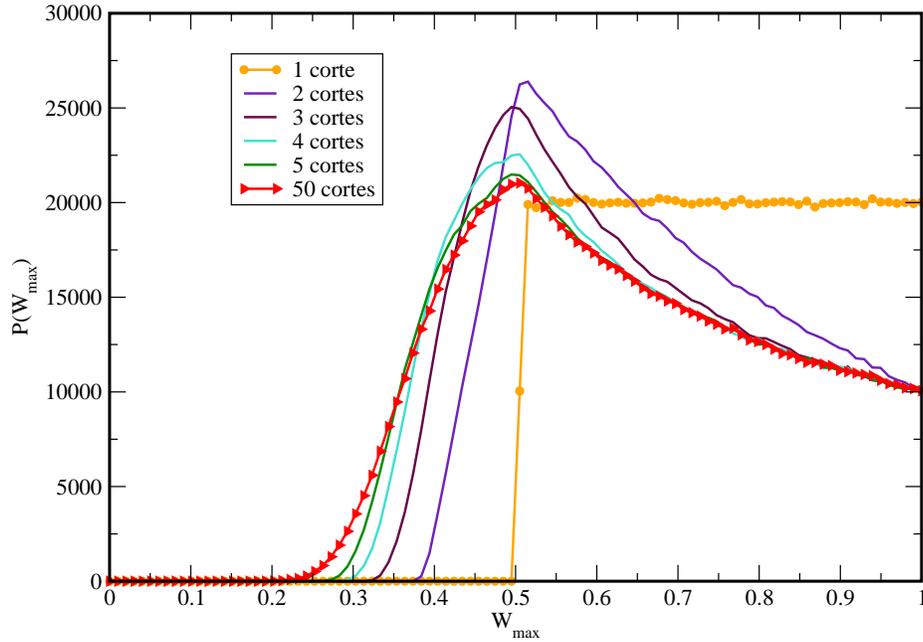


Figura 14: Distribuição do tamanho do maior segmento para o caso de uma distribuição do tipo $\rho(x) = 1$ onde foram feitos diferentes número de cortes.

depende da aleatoriedade em que o segmento é particionado.

A figura 15 mostra a distribuição empírica da fração de votos ν para os vencedores (círculos) e os perdedores (triângulos) em eleições onde houveram apenas dois candidatos. A linha pontilhada representa $\nu = 0.5$. Podemos ver que a curva é bem diferente de uma distribuição uniforme e tem um pico bastante pronunciado em $\nu \approx 0.5$ o que indica que a situação próxima a um empate é bem mais provável do que um resultado onde um candidato bate o outro com muita facilidade. A linha sólida da curva representa o melhor ajuste encontrado e é dado pela exponencial

$$N'(\nu) \propto \exp\left(\frac{-|\nu - 0.5|}{\lambda}\right) \quad (1.7)$$

com o parâmetro $\lambda \approx 0.08$. Esta distribuição também foi utilizada como uma aproximação para $\rho(x)$.

A figura 16 mostra o resultado dos dados empíricos para os vencedores em eleições onde concorreram 3 e 4 candidatos. A linha cheia representa o histograma do maior segmento observado no processo de quebra quando houveram 2 e 3 cortes. A concordância entre o modelo e os dados empíricos é muito boa tanto para a região onde o candidato obteve uma grande fração dos votos, quanto para a região de baixas frações. Além desta concordância nas “caldas” da distribuição, o pico em $\nu \approx 0.5$ também é fielmente reproduzido pelo

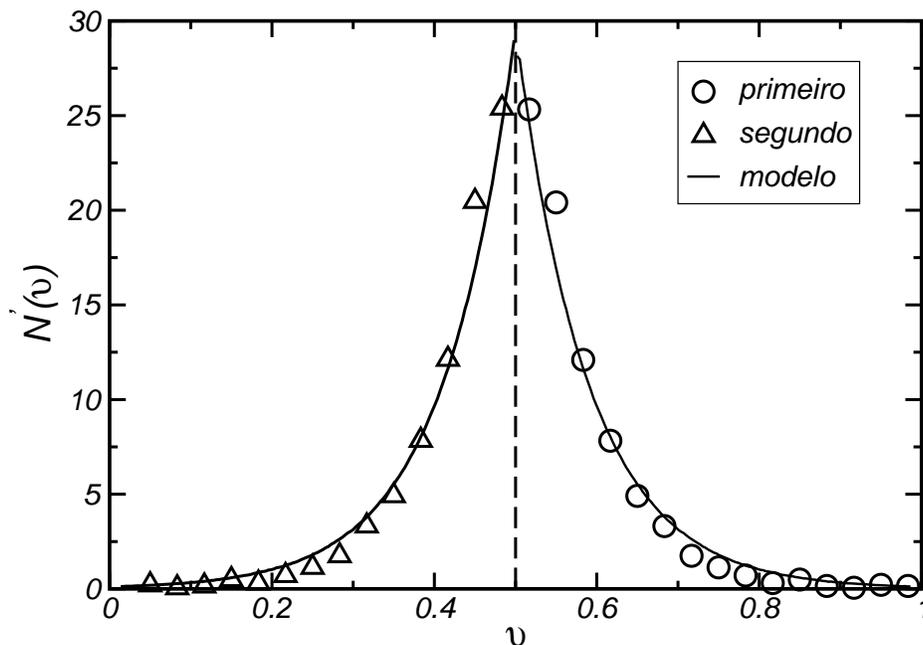


Figura 15: Distribuição do percentual de votos obtidos pelos primeiros (círculos) e segundos (triângulos) colocados em eleições onde concorreram apenas dois candidatos. A linha sólida é dado pela equação 1.7.

modelo.

A próxima análise que faremos é sobre o desempenho do segundo colocado. A figura 17 mostra os dados empíricos (círculos) do histograma da fração de votos recebidos pelo segundo colocado quando estiveram na disputa três candidatos. A linha cheia é a previsão do modelo quando foram feitas 2 quebras. Podemos ver que o modelo é capaz de reproduzir a curva empírica em sua forma. Porém, há um deslocamento entre a curva dos dados empíricos e as do modelo. A justificativa deste deslocamento é que o modelo da quebra como foi utilizado certamente exclui qualquer efeito devido a votos táticos. Ao fazermos um pequeno desvio de 0.1 dos dados do modelo para a direita, vimos que se passa a ter uma boa concordância com o resultado das urnas.

Segundo o teorema de Gibbard-Satterthwaite (seção 1.6) os votos estratégicos sempre estão presentes. No caso das eleições plurais ele se manifesta pelo chamado voto útil onde o eleitor escolhe votar em um candidato que não é o seu favorito com o intuito de tentar ajudar um candidato que tenha mais chance de vitória e assim prevenir o trunfo de um outro candidato que esteja bem posicionado nas pesquisas. A amplitude do deslocamento da curva do segundo colocado representa a quantidade de votos úteis recebidos. Para confirmar a transferência de votos devido ao voto útil, iremos analisar o desempenho do último colocado em eleições onde concorreram 3 candidatos. Devemos verificar nesta curva

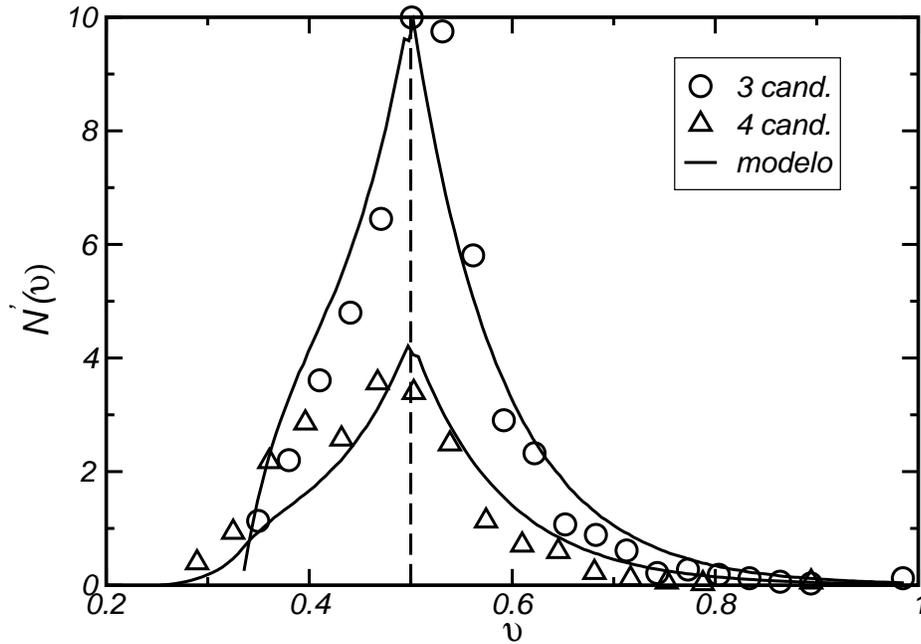


Figura 16: Distribuição do percentual do vencedor em eleições onde concorreram 3 e 4 candidatos. A linha sólida é o resultado do modelo de partição.

um desvio oposto no histograma já que algumas pessoas deixam de votar neste candidato por perceberem que ele tem poucas chances de vitória, deixando a disputa entre apenas 2 candidatos, confirmando a lei de Duverger. Este desvio na curva do terceiro colocado está ilustrado na figura 18. A figura 19 mostra a evolução temporal da intensão de voto no estado de São Paulo.

Neste trabalho utilizamos um modelo de quebra aleatória (48) na tentativa de reproduzir os resultados das eleições municipais para prefeito realizada no Brasil em 2004 (47). Observamos que o modelo, que exclui qualquer tipo de voto tático, é capaz de reproduzir bem os resultados empíricos na forma dos histogramas. Exceto para um pequeno deslocamento. O teorema de Gibbard-Satterthwaite afirma que os votos estratégicos estão sempre presentes em qualquer eleição. No caso das eleições plurais ele se manifesta abundantemente pelo voto útil. O uso deste voto útil é o que justifica a disputa ficar entre apenas 2 candidatos, fato conhecido como a lei de Duverger.

Acreditamos que este nosso trabalho serve como uma forma de se mensurar, através da amplitude do deslocamento, a quantidade de pessoas que estão fazendo uso de votos estratégicos.

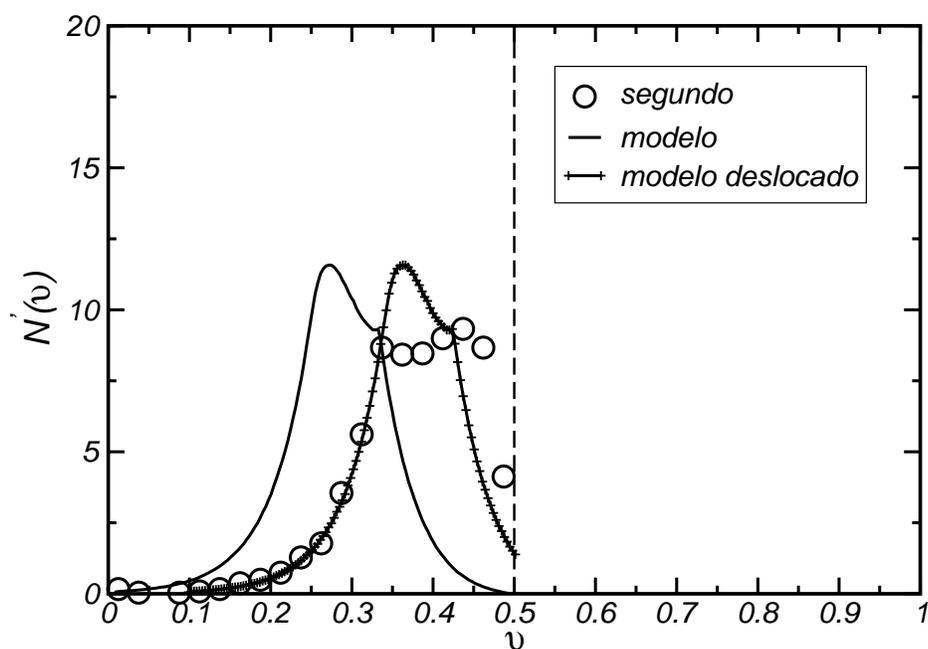


Figura 17: Distribuição do percentual do segundo colocado em eleições onde concorreram 3 candidatos (círculos) e o resultado do modelo da quebra (linha sólida). Para que haja uma concordância entre o modelo e os dados empíricos, é necessário um deslocamento de 0.1% que é justificado pelos votos úteis.

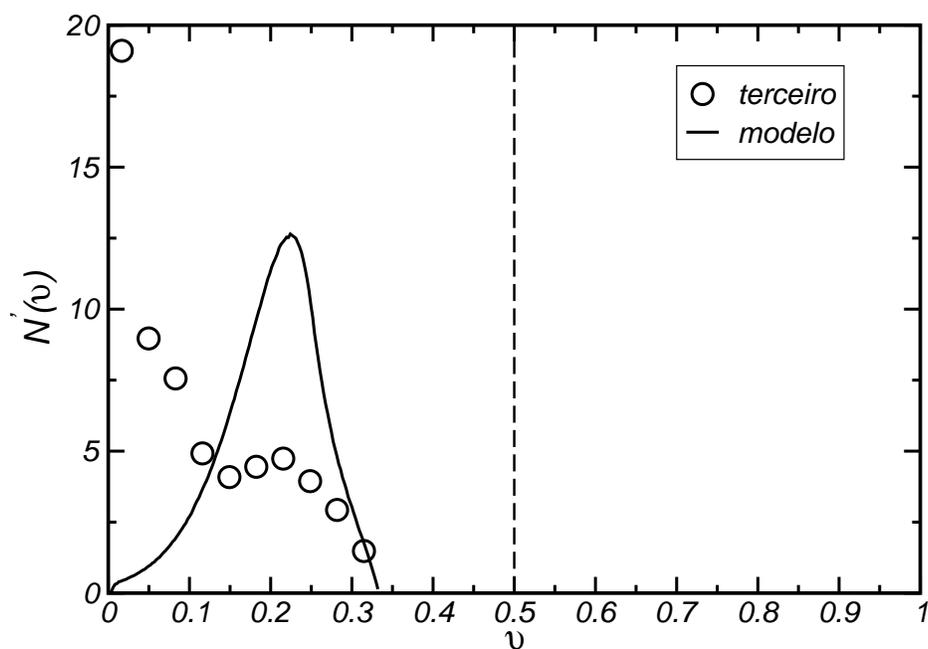


Figura 18: Distribuição da fração de votos obtidos pelo ultimo colocado (círculos) e a predição do modelo de quebra (linha sólida).

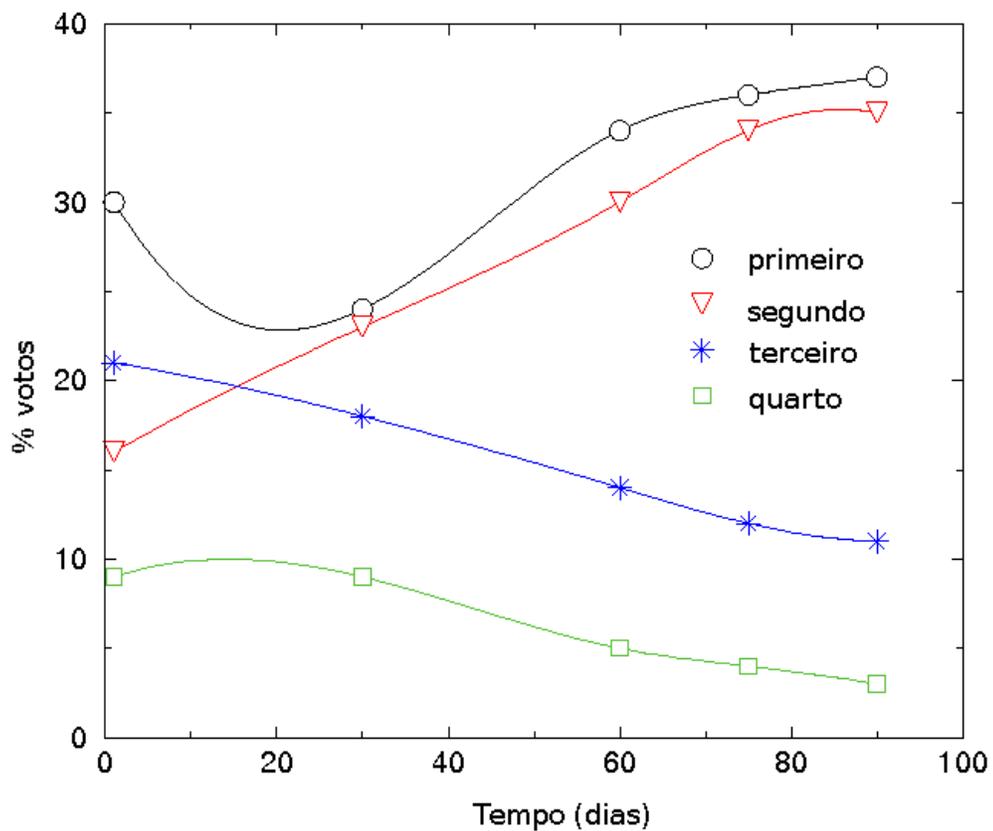


Figura 19: Evolução temporal da intensão de voto para os candidatos a prefeito no município de São Paulo. O efeito do voto útil pode ser visto.

2 TEORIA DOS JOGOS

2.1 Introdução

A teoria de jogos é um ramo da matemática aplicada que nos permite estudar de uma maneira formal e consistente problemas onde uma população de agentes que interagem entre si precisam tomar decisões. Seus conceitos nos servem como uma linguagem formal que permite formular, analisar e entender situações complexas onde as escolhas das possíveis estratégias a serem tomadas desempenham um importante papel.

As situações onde decisões precisam ser tomadas estão presentes no nosso dia a dia nas mais diversas áreas e situações. Para ilustrar o caráter interdisciplinar da teoria dos jogos citamos abaixo alguns trabalhos nas mais diversas áreas do conhecimento. Em ciências exatas (49), biológicas (50, 51), economia (52, 53) e em ciências sociais (54, 55). Além de textos sobre ética (56) e até mesmo política (57).

O objeto de estudo da teoria dos jogos é o jogo em si (53). Este estudo é definido como um modelo formal para uma situação de interação entre os agentes onde a resultado da ação de cada indivíduo esta fortemente relacionada com a ação dos demais. Neste capítulo mostraremos alguns conceitos que são muito utilizados na teoria dos jogos. E discutir alguns conceitos que costumam surgir em estudos sobre comportamentos coletivos.

Iremos descrever um jogo teoricamente, e mostraremos como resolver um problema que tenha sido modelado através da teoria dos jogos. Segue também a definição da representação de um jogo na sua forma formal, assim como o conceito de estratégias claramente inferiores. Veremos que alguns jogos podem ser resolvidos usando a idéia de que jogadores racionais não utilizam estratégias claramente inferiores. E finalmente, veremos um conceito de solução, o equilíbrio de Nash.

2.2 Jogos estáticos e com informação completa

Nesta seção trataremos os jogos na sua forma mais simples. Os chamados jogos estáticos de informação completa. Nestes jogos os jogadores escolhem suas ações simultaneamente para depois então receberem suas recompensas, que dependem da combinação destas ações. Estes jogos são chamados de estáticos devido ao fato de que os jogadores escolhem suas ações de forma simultânea. Um jogo é dito de informação completa quando a função recompensa de cada jogador é de conhecimento de todos os demais.

Veremos a seguir um exemplo de um jogo estático e de informação completa que nos serve para descrever conceitos como o equilíbrio de Nash; estratégias claramente inferiores e a representação na forma normal.

2.3 O Dilema do prisioneiro

O dilema do prisioneiro (DP) é certamente o jogo teórico mais estudado de todos os tempos. Uma boa referência a este jogo pode ser encontrada em (58). A grande fama do DP se dá devido a este ser um jogo simples (há apenas 4 combinações de possíveis estratégias a serem tomadas) e por representar uma formulação abstrata de uma situação muito comum e de grande interesse que é a questão da conveniência, ou não, de uma atitude de cooperação entre os jogadores.

O dilema do prisioneiro, em sua forma tradicional, é um jogo entre 2 jogadores onde cada jogador tem como objetivo maximizar seu ganho (também chamado de utilidade e recompensa), independente de qual será o ganho do seu adversário. Formalmente este jogo se classifica como estático, de informação completa e de soma diferente de zero¹.

O dilema do prisioneiro pode ser descrito da seguinte forma: dois suspeitos de terem cometido um crime são capturados pela polícia. A polícia mantém os presos separados em duas salas para um interrogatório. Então, para cada acusado, é feita a pergunta se o outro participou do dito crime. Como resposta eles podem ficar calados (cooperar), ou acusar o outro (delatar). As consequências da decisão que eles vão tomar é explicada a cada um deles como segue.

- Se ambos acusarem um ao outro (delatar); ambos ficaram seis meses na prisão.

¹Um jogo é dito de soma diferente de zero quando a soma dos ganhos de cada jogador é diferente de zero. Os jogos de soma zero são aqueles em que um vence e o outro perde. Este não é o caso do dilema do prisioneiro, é possível que ambos se saiam bem, ou que ambos se saiam mal, ou que um seja recompensado melhor que outro.

		Prisioneiro 2	
		Cooperar	Delatar
Prisioneiro 1	Cooperar	-1 , -1	-9 , 0
	Delatar	0 , -9	-6 , -6

- Se nenhum delatar, ambos serão condenados a uma pena menor e ficarão um mês na prisão.
- Se um delatar e o outro não, aquele que delatou será posto em liberdade imediatamente enquanto o outro passará nove meses na prisão. Seis pelo crime e mais três por obstruir o trabalho da polícia.

O dilema do prisioneiro pode ser melhor representado pela bi-matriz acima. Como em uma matriz, uma bi-matriz pode ter um número qualquer de linhas e colunas. O prefixo “bi” se refere ao fato que em um jogo entre 2 jogadores, há dois números em cada célula da matriz. Estes números representam os ganhos dos jogadores.

Como mencionado acima, neste jogo cada jogador pode escolher entre duas estratégias: ficar calado (cooperar) ou acusar o outro (delatar). O ganho de cada jogador quando um determinado par de estratégia é escolhido está descrito na célula apropriada. Por definição, o ganho do jogador linha (prisioneiro 1) é o primeiro ganho descrito na célula seguido do ganho do jogador coluna (prisioneiro 2). Desta forma se o prisioneiro 1 decidir ficar calado e o prisioneiro 2 decidir delatar, então o prisioneiro 1 receberá uma pena de -9 (representando 9 meses na prisão) enquanto o prisioneiro 2 receberá 0 (representando a liberdade imediata).

O dilema surge pelo fato de que o resultado do ganho de cada jogador, além de depender da escolha da sua estratégia a ser seguida, também depende da estratégia adotada

pelo outro prisioneiro. Além disso, cada um deles escolhe o que fazer sem saber qual será a escolha do outro.

2.4 Representação de jogos na forma-normal

Existe uma maneira formal e compacta na qual os jogos costumam ser representados. Esta forma é chamada de representação na forma estratégica ou forma-normal. Essa representação consiste em especificar:

- Os jogadores envolvidos no jogo.
- As estratégias disponíveis para cada jogador.
- A recompensa de cada jogador para todas as possíveis combinações de estratégias que podem ser utilizadas.

De uma maneira mais geral, em um jogo envolvendo n jogadores, chamaremos de i um jogador arbitrário. Seja S_i um conjunto onde os elementos são as estratégias disponíveis ao jogador i . s_i representa um elemento do conjunto S_i (uma estratégia disponível ao jogador i). O conjunto (s_1, \dots, s_n) representa uma combinação de estratégias (uma para cada jogador). E finalmente, seja $u_i(s_1, \dots, s_n)$ o ganho do jogador i quando as estratégias escolhidas foram (s_1, \dots, s_n) .

A descrição na forma-normal de um jogo entre n jogadores, onde os conjuntos das estratégias disponíveis para cada jogador são S_1, \dots, S_n e as funções ganho são u_1, \dots, u_n é

$$G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$$

2.5 Estratégias claramente inferiores e conceitos de soluções

Um conceito útil na teoria dos jogos é o de estratégias claramente inferiores. Em um jogo na forma normal $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$ seja s'_i e s''_i duas estratégias possíveis para o jogador i . A estratégia s'_i é dita claramente dominada pela estratégia s''_i se para cada uma das possíveis combinações das estratégias assumidas pelos outros jogadores, o ganho

do jogador i usando a estratégia s'_i é menor do que seu ganho quando ele joga s''_i :

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Para cada $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ que pode ser construído a partir do espaço de estratégias dos demais jogadores. $S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n$.

A pouco vimos como descrever um jogo de uma maneira formal. Agora veremos conceitos de soluções para os jogos. Um atrativo que faz com que o dilema do prisioneiro seja um exemplo bastante didático para a teoria dos jogos é que ele é de fácil resolução. Para resolver o dilema do prisioneiro vamos considerar que os jogadores envolvidos são racionais. Por definição, jogadores racionais são aqueles que não utilizam estratégias claramente inferiores. Eles jogam de maneira a tentar maximizar seus ganhos.

Vamos analisar qual a melhor estratégia a ser tomada. Para isso devemos imaginar situações com todas as possíveis estratégias adotadas por cada um dos prisioneiros. Se o prisioneiro A escolher delatar, então será melhor para o prisioneiro B delatar também. Pois neste caso os 6 meses na cadeia é uma recompensa melhor que os 9 meses que o prisioneiro B receberia caso escolhesse ficar calado enquanto o outro delatava. Repetindo, caso um prisioneiro escolha delatar o melhor que o outro prisioneiro tem a fazer é delatar também. Agora vamos supor que o prisioneiro A resolva ficar calado. Neste caso, o melhor que o prisioneiro B tem a fazer é delatar. Pois desta forma o prisioneiro B será posto em liberdade imediatamente, enquanto que se ele escolher ficar calado, ele terá como recompensa um mês na prisão. Então, caso um prisioneiro resolva ficar calado, o melhor que o outro tem a fazer é delatar. Desta forma podemos concluir que a estratégia ficar calado é claramente inferior a delatar. Como não há distinção entre os jogadores, o prisioneiro A deve seguir o mesmo raciocínio e chegar a mesma conclusão que delatar é a melhor coisa a ser feita. Desta forma o resultado do jogo é o uso das estratégias (delatar, delatar).

A escolha dos valores das recompensas no jogo do dilema do prisioneiro usado na tabela 2.3 $(0, -1, -6, -9)$ é apenas uma das infinitas escolhas possíveis. De uma maneira mais geral podemos representar os ganhos por E, R, P e T , com $E > R > P > T$ onde os ganhos representam uma recompensa Excelente, Ruim, Péssima e Terrível.

Um ponto importante a ser observado neste momento é que apesar de toda a generalidade que um jogo como o dilema do prisioneiro apresenta, sem muitos detalhes específicos, apenas colocando a conveniência ou não da cooperação entre os jogadores, ele nos diz que o resultado de uma interação deste tipo é ruim para ambos os jogadores. Ruim no sentido

		Jogador 2		
		esquerda	meio	direita
Jogador 1	cima	1 , 0	1 , 2	0 , 1
	baixo	0 , 3	0 , 1	2 , 0

que havia um par de estratégias que era melhor para ambos (ficar calado, ficar calado). Os jogadores envolvidos não tinham nenhum tipo de remorso um com o outro, jogavam apenas pensando em maximizar seus próprios ganhos. Do ponto de vista do bem estar de um grupo como um todo, o resultado que o dilema do prisioneiro traz é muito ruim. Ele indica que a cooperação é uma estratégia inferior.

Veremos a seguir outro exemplo de um jogo que assim como o dilema do prisioneiro, também pode ser resolvido se utilizarmos a mesma hipótese de que jogadores racionais não utilizam estratégias claramente inferiores.

Considere um jogo entre 2 jogadores cuja a bi-matriz das recompensas esta descrita na tabela. Novamente o primeiro número de cada célula se refere ao ganho do jogador 1, enquanto o segundo número se refere ao jogador 2.

Neste jogo o jogador 1 pode escolher entre duas estratégias. Enquanto o jogador 2 escolhe entre três: $S_1 = \{Cima, Baixo\}$ e $S_2 = \{Esquerda, Meio, Direita\}$. Para o jogador 1 nenhuma das suas estratégias é claramente inferior. Cima é melhor que Baixo caso o jogador 2 jogue Esquerda (pois $1 > 0$), mas Baixo é melhor que Cima se o jogador 2 jogar Direita (pois $2 > 0$). Já para o jogador 2, a estratégia Direita é claramente inferior a estratégia Meio (pois $2 > 1$ e $1 > 0$). Desta forma, se o jogador 2 for racional ele não jogará Direita. Se o jogador 1 sabe que o jogador 2 é racional então ele pode eliminar Direita das estratégias do jogador 2. Desta forma, se o jogador 1 sabe que o jogador 2 é racional ele pode jogar o jogo descrito pela tabela anterior como se ele fosse:

		Jogador 2	
		esquerda	meio
Jogador 1	cima	1 , 0	1 , 2
	baixo	0 , 3	0 , 1

Na tabela acima a estratégia do jogador 1 Baixo é claramente inferior a Cima (pois $1 > 0$). Então se o jogador 2 sabe que o jogador 1 é racional, e se o jogador 2 sabe que o jogador 1 sabe que o jogador 2 é racional (isto é, se ele sabe que a tabela acima se aplica) então o jogador 2 pode eliminar a estratégia Baixo das alternativas disponíveis ao jogador 1. Deixando o jogo na forma:

Neste caso a estratégia do jogador 2 Esquerda é inferior a Meio ($2 > 0$). Logo o resultado deste jogo é o uso da estratégia (Cima e Meio).

Este processo para se achar a solução que foi descrito acima, é chamado de eliminação das estratégias claramente inferiores. Apesar dele ser fundamentado no fato que os jogadores não utilizam estratégias claramente inferiores ele apresenta dois problemas. O primeiro é que cada passo na eliminação das estratégias fracas, exige que consideremos algo a respeito da racionalidade dos jogadores envolvidos. Se quisermos utilizar um arbitrário número de passos deste processo de eliminação, precisamos considerar que é um conhecimento comum que os jogadores são racionais. Isto é, não nos basta considerar que todos os jogadores são racionais, é preciso considerar que todo jogador sabe que o outro é racional, e que todo jogador sabe que todo jogador sabe que todo jogador é racional, e assim por diante, *ad. infinintum* (59). O segundo ponto fraco deste método é que ele nem sempre é capaz de indicar a solução. Algumas vezes, na verdade várias vezes, os jogos não apresentam estratégias claramente inferiores para serem eliminadas, o que faz com

		Jogador 2	
		esquerda	meio
Jogador 1	cima	1, 0	1, 2

que esse processo não leve a nenhuma solução, e nos dê a previsão do resultado de uma maneira muito pouca precisa. O jogo descrito na matriz a seguir é um exemplo onde a eliminação das estratégias inferiores não levam a nada.

2.6 O equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash é um conceito de solução que permite prever o resultado de uma grande variedade de jogos. Ele é um conceito mais robusto que a eliminação das estratégias inferiores no sentido de que se um conjunto de estratégias estiverem no equilíbrio de Nash, então estas nunca serão eliminadas através do método da eliminação das estratégias inferiores. Vamos a definição formal do equilíbrio de Nash.

Seja um jogo envolvendo n jogadores descrito na forma-normal $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, as estratégias (s_1^j, \dots, s_n^k) formam o equilíbrio de Nash se, para cada jogador i , não existir estratégia melhor que s_i^j em resposta as estratégias $(s_1^j, \dots, s_{i-1}^k, s_{i+1}^l, \dots, s_n^m)$:

$$u_i(s_1^j, \dots, s_{i-1}^k, s_i^y, s_{i+1}^l, \dots, s_n^m) \geq u_i(s_1^j, \dots, s_{i-1}^k, s_i^{y'}, s_{i+1}^l, \dots, s_n^m)$$

Para qualquer estratégia s_i no conjunto S_i . Em outras palavras, s_i^y é solução de

$$\max_{s_i^{y'} \in S_i} u_i(s_1^j, \dots, s_{i-1}^k, s_i^{y'}, s_{i+1}^l, \dots, s_n^m).$$

Uma forma não muito precisa de encontrar as estratégias que formam o equilíbrio

		Jogador 2		
		esquerda	centro	direita
Jogador 1	cima	0 , 4	4 , 0	5 , 3
	meio	4 , 0	0 , 4	5 , 3
	baixo	3 , 5	3 , 5	6 , 6

		Jogador 2		
		esquerda	centro	direita
Jogador 1	cima	0 , <u>4</u>	<u>4</u> , 0	5 , 3
	meio	<u>4</u> , 0	0 , <u>4</u>	5 , 3
	baixo	3 , 5	3 , 5	<u>6</u> , <u>6</u>

de Nash é verificar em que condições cada uma das possíveis combinações satisfaz o equilíbrio de Nash descrito na definição acima. Em um jogo com 2 jogadores isso pode ser visto da seguinte forma: para cada jogador, e para cada estratégia acessível a este, devemos determinar a estratégia do outro jogador que melhor responda a estratégia de seu adversário. A tabela da página anterior mostra isso no caso do jogo descrito na tabela acima. O ganho sublinhado indica a melhor estratégia de um jogador em resposta a todas as possíveis estratégias do outro. Por exemplo, se o jogador coluna vai jogar esquerda, então a melhor resposta do jogador linha é Meio (pois $4 > 3$ e $4 > 0$, então a recompensa do jogador linha na célula (*Meio, Esquerda*) é sublinhado. Um par de estratégias satisfaz a condição de Nash se a estratégia de cada jogador é a melhor resposta para a estratégia adotada pelo outro. Isto é, se existem 2 ganhos sublinhados na mesma célula este par de estratégia representa um equilíbrio de Nash.

Vimos que o processo de eliminação das estratégias claramente inferiores é um método que pode levar a solução de alguns jogos e que o equilíbrio de Nash é um conceito formal de solução. Mas como esses conceitos se relacionam? O que podemos dizer a respeito disso é o seguinte: se o processo de eliminação das estratégias claramente inferiores elimina todas as possíveis combinações das estratégias de modo que sobre apenas (s_1^j, \dots, s_n^m) , então estas estratégias formam o único que dá o equilíbrio de Nash deste jogo. Outra afirmação que podemos fazer é que se um conjunto de estratégias (s_1^*, \dots, s_n^*) é um equilíbrio de Nash, então estas estratégias sobrevivem ao processo de eliminação das estratégias claramente inferiores. Apesar de o oposto não ser verdade, podem existir estratégias que resistam ao processo de eliminação e que não resultem em equilíbrio de Nash.

Com relação a existência de uma solução para um jogo, Nash (60) provou que em qualquer jogo finito (um jogo onde o número de jogadores e os conjuntos das estratégias S_1, \dots, S_n são ambos finitos) existe pelo menos um equilíbrio de Nash, provavelmente envolvendo estratégias mistas (60). Com relação a unicidade da solução, veremos a seguir o exemplo de jogo onde há mais de um conjunto de estratégias que são equilíbrio de Nash. Este jogo é conhecido como a batalha dos sexos e representa a decisão de um casal para um programa a noite. Os jogadores são um homem e uma mulher que preferem passar a noite juntos do que separados. Só que o homem quer ir assistir uma luta, enquanto a mulher quer ir ver um balé. Os ganhos estão representados na matriz acima.

Neste jogo tanto (Balé, Balé) quanto (Luta, Luta) são equilíbrios de Nash. Isso mostra que existem jogos no qual a teoria dos jogos não fornece uma solução única. Nestes casos o equilíbrio de Nash não é muito informativo com relação de como o jogo será jogado.

		Ele	
		Balé	Luta
Ela	Balé	2 , 1	0 , 0
	Luta	0 , 0	1 , 2

		Jogador Coluna	
		Cara	Coroa
Jogador Linha	Cara	-1 , 1	1 , -1
	Coroa	1 , -1	-1 , 1

Um outro jogo entre 2 jogadores que mostra uma característica interessante é o que segue: cada jogador tem uma moeda e uma face da moeda tem que ser escolhida para mostrar para o adversário. Se as faces coincidirem o jogador coluna ganha a moeda do jogador linha e se as faces mostradas forem diferentes, será o jogador linha que ganhará a moeda do jogador coluna. Como explicado na matriz abaixo.

O interessante deste jogo é que ele não tem um equilíbrio de Nash (na forma que o equilíbrio de Nash foi definido até aqui). Se as faces coincidirem; o jogador linha vai ter um incentivo para mudar de estratégia, se as faces não coincidirem será o jogador coluna que irá mudar de estratégia. Há uma incerteza em que estratégia cada jogador irá adotar. Essa incerteza é representada formalmente pelo conceito de estratégia mista.

Uma estratégia mista para um jogador i é uma distribuição de probabilidade sobre

todas, ou algumas, das estratégias em S_i . Vamos chamar de estratégia pura do jogador i cada uma das estratégias em S_i . Isto é, cada uma das ações que o jogador i pode escolher tomar. No caso do dilema do prisioneiro, S_i consiste de duas estratégias puras, ficar calado ou delatar. De um modo mais geral, suponha que um jogador i tenha a seu alcance K estratégias puras: $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iK}\}$. Então uma estratégia mista é uma distribuição de probabilidade (p_{i1}, \dots, p_{iK}) , onde p_{ik} é a probabilidade que o jogador i jogue s_{ik} , para $k = 1, \dots, K$. Já que p_{ik} é uma probabilidade, temos que $0 \leq p_{ik} \leq 1$ e $\sum_{j=1}^K p_{ij} = 1$

2.7 A tragédia dos comuns

Em 1968 Garrett Hardin publicou um trabalho revolucionário (54) sobre os conflitos entre os interesses privados e o uso dos bens públicos. Este trabalho é conhecido como a tragédia dos comuns.

Em uma vila n pastores de ovelhas criam ovelhas que pastam em uma área pública. O número de ovelhas que pertencem ao pastor i é g_i e o número total de ovelhas na vila é $G = g_1 + \dots + g_n$. Para comprar e manter uma ovelha cada pastor gasta c , independentemente de quantas ovelhas ele já tenha. O valor ganho por cada pastor em cuidar de uma ovelha quando existem no total G ovelhas é $v(G)$, por ovelha. Já que uma ovelha necessita de pelo menos uma certa quantidade de grama para sobreviver, existe um número máximo de ovelhas $G_{max.}$ que podem ser criadas no pasto da vila. $v(G) > 0$ para $G < G_{max.}$ e $v(G) = 0$ para $G > G_{max.}$. Quando existem poucas ovelhas, adicionar mais uma não afeta muito a condição de existência do rebanho. Porém quando existem muitas ovelhas, (quando G é quase igual a $G_{max.}$) adicionar mais uma causa um grande prejuízo para as demais. Para $G < G_{max.}$, $v'(G) < 0$ e $v''(G) < 0$. Onde v' e v'' são as derivadas de v . Como mostrado na figura 20.

A estratégia de cada pastor é escolher quantas ovelhas ele vai criar. O benefício do pastor i em cuidar de g_i ovelhas quando os outros pastores criam $(g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n)$ animais é a diferença entre o valor de cada animal menos o seu custo:

$$B(g_i, v) = g_i v(g_1 + \dots + g_{i-1} + g_i + g_{i+1} + \dots + g_n) - c g_i. \quad (2.1)$$

Dessa forma, se (g_1^*, \dots, g_n^*) é o equilíbrio de Nash, para cada pastor i a equação 2.1 deve ser

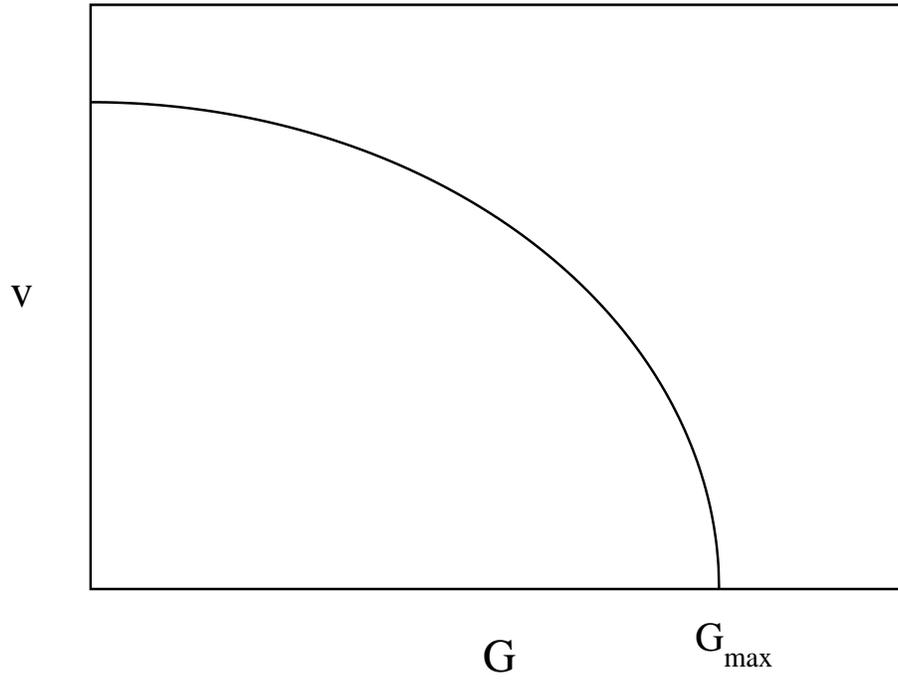


Figura 20: O valor ganho por cada pastor v em função do número de ovelhas G que são criadas na comunidade. Uma função cuja a derivada primeira e segunda são negativas. v' e $v'' < 0$

maximizada dado que os outros jogadores usarão as estratégias $(g_1^*, \dots, g_{i-1}^*, g_{i+1}^*, \dots, g_n^*)$.

$$\frac{dB}{dg_i dv} = 0$$

$$v(g_i + g_{-i}^*) + g_i v'(g_i + g_{-i}^*) - c = 0, \quad (2.2)$$

onde g_{-i}^* representa $g_1^* + \dots + g_{i-1}^* + g_{i+1}^* + \dots + g_n^*$. Substituindo g_i^* em 2.2 teremos para cada pastor i :

$$v(G^*) + g_i^* v'(G^*) - c = 0,$$

onde $G^* = g_1^* + \dots + g_n^*$; somando para todos os pastores e dividindo por n ,

$$v(G^*) + \frac{G^*}{n} v'(G^*) - c = 0. \quad (2.3)$$

Esta equação foi obtida apartir da maximização de cada pastor. Veremos agora qual o número ótimo de ovelhas, G^{**} , do ponto de vista da sociedade como um todo.

$$\max_{0 \leq G \leq \infty} Gv(G) - Gc$$

$$v(G^{**}) + G^{**} v'(G^{**}) - c = 0. \quad (2.4)$$

Comparando as equações 2.3 e 2.4 vamos supor que $G^* \leq G^{**}$. Então $v(G^*) \geq v(G^{**})$,

já que $v' < 0$. Assim como $0 > v'(G^*) \geq v'(G^{**})$, já que $v'' < 0$. Dessa forma o lado esquerdo da equação 2.3 é maior que o lado esquerdo da 2.4, o que é um absurdo já que ambas são iguais a zero. Isso mostra que a suposição de que $G^* \leq G^{**}$ estava errada. Na verdade $G^* > G^{**}$.

Isso mostra que no equilíbrio de Nash há mais ovelhas sendo criadas (G^*) do que o número ideal do ponto de vista social (G^{**}). O recurso comum a sociedade, neste exemplo o pasto das ovelhas, será superutilizado pois cada pastor considera somente o seu próprio incentivo em adicionar mais uma cabeça de ovelha ao seu rebanho, sem considerar o efeito que isso trará aos demais criadores. É por isso que na equação de maximização do ponto de vista individual, eq. 2.3, há um termo em $G^*v'(G^*)/n$, enquanto na equação do ponto de vista social, equação 2.4, o termo que aparece é $G^{**}v'(G^{**})$.

O resultado que a tragédia dos comuns nos mostra é que a ausência de uma política para o uso dos bens comuns, os recursos naturais por exemplo, leva a uma situação muito ruim para a população como um todo.

2.8 Jogos dinâmicos de informação completa

Vimos anteriormente que uma grande variedade de situações reais podem ser modeladas com o uso de jogos estáticos e de informação completa. Nesta seção iremos introduzir uma nova classe de jogos, chamada de jogos dinâmicos e de informação completa. No caso dos jogos estáticos, os jogadores escolham as estratégias de forma simultânea. Nos dinâmicos, as ações não são escolhidas simultaneamente.

Os jogos dinâmicos capturam bem uma característica muito importante e comum nas relações interpessoais: a credibilidade. Esta característica pode ser facilmente modelada com estes tipo de jogos pois as ações são tomadas após a observação de como os demais jogadores agiram no passado.

2.9 Jogos dinâmicos de informação completa e perfeita

Nesta seção vamos analisar não apenas os jogos de informação completa, mas também de informação perfeita. Se diz que um jogo é de informação completa quando a função de recompensa dos jogadores envolvidos é de conhecimento geral (53). Já a qualificação de informação perfeita é usada para designar jogos onde em cada movimento, o jogador da

vez tem memória de quais estratégias foram utilizada pelos demais jogadores até ali (53).

Os jogos dinâmicos de informação completa e perfeita mais simples são da forma que segue:

- O jogador 1 escolhe uma ação a_1 dentre as possíveis ações do conjunto A_1 .
- O jogador 2 observa a_1 e então escolhe uma ação a_2 dentre as possíveis em A_2 ².
- Os ganhos são representados por $u_1(a_1, a_2)$ e $u_2(a_1, a_2)$

As principais características de jogos dinâmicos de informação completa e perfeita são: (i) as ações ocorrem em seqüência, (ii) todas as ações anteriores são observadas antes de uma nova decisão ser tomada, (iii) e as funções recompensa para todas as possíveis combinações das ações são de conhecimento de todos os jogadores.

2.10 Solução pelo método da indução por retrocesso.

O método da indução por retrocesso é utilizado para resolver jogos descritos na subseção anterior. A linha de raciocínio é a seguinte: quando é a vez do jogador 2 jogar, isto é, no segundo estágio do jogo, ele se depara com a seguinte questão: dado que o jogador 1 escolheu a ação a_1 no estágio inicial do jogo, qual ação a_2 resolve:

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2). \quad (2.5)$$

Considerando que para cada a_1 em A_1 , a otimização acima encarada pelo jogador 2 tenha apenas uma solução $R_2(a_1)$. Esta solução é a reação (ou melhor resposta) do jogador 2 para a ação do jogador 1. Já que o jogador 1 pode resolver o problema de otimização da mesma forma que o jogador 2 o fez, então o jogador 1 deve se antecipar a reação do jogador 2 para a sua atitude a_1 . Desta forma, no primeiro estágio do jogo, o jogador 1 se depara com o problema:

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R_2(a_1)). \quad (2.6)$$

Assumindo que esta otimização também tenha só uma solução, que é determinada por a_1^* . O par de ações $(a_1^*, R_2(a_1^*))$ é o resultado do jogo obtido pelo método da indução por retrocesso.

²O conjunto das ações disponíveis para o jogador 2 pode depender da ação tomada pelo jogador 1, esta dependência pode ser escrita como $A_2(a_1)$. Ou pode ser incorporada pela função recompensa atribuindo $u_2(a_1, a_2) = -\infty$ para todas as estratégias a_2 que não são permitidas após o jogador 1 ter jogado a_1 .

2.11 A representação dos jogos na forma extensiva.

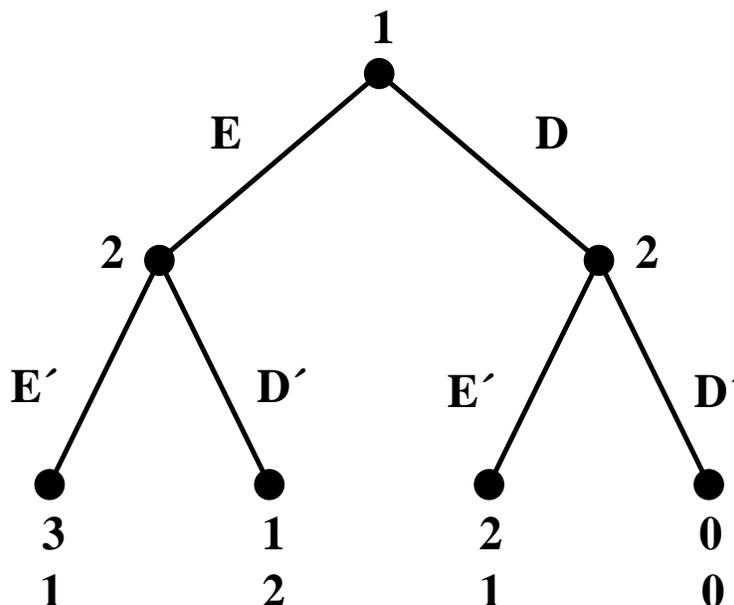
Vimos anteriormente que a forma normal é uma maneira precisa de se descrever um jogo e que ela foi muito eficiente para descrever jogos estáticos. Nesta seção, analisaremos os jogos dinâmicos através da forma extensiva. Tanto jogos dinâmicos podem ser descritos pela forma normal, quanto os jogos estáticos também podem ser descritos pela forma extensiva. Porém, para alguns jogos uma forma pode vir a ser bem mais conveniente do que outra. Geralmente é mais simples descrever jogos dinâmicos utilizando-se a forma extensiva, enquanto os estáticos são mais adequados a forma normal

Em uma representação na forma normal era especificado: (1) os jogadores envolvidos no jogo, (2) as estratégias disponíveis para cada jogador e (3) a função recompensa para cada jogador, para todas as possíveis combinações de estratégias disponíveis. Para representar um jogo na forma extensiva, precisamos especificar: (1) os jogadores envolvidos no jogo, (2a) quando é a vez de cada jogador jogar, (2b) o que cada jogador pode fazer em cada uma das suas participações no jogo, (2c) o que cada jogador sabe em cada momento da sua participação e (3) a função recompensa para cada jogador, para todas as possíveis combinações de estratégias disponíveis.

Jogos na forma extensiva são facilmente compreendidos com o auxílio de uma representação gráfica ramificada. Como exemplo desta forma gráfica, vamos ver a seguir a representação na forma extensiva de jogos dinâmicos e de informação completa bastante simples e com as seguintes características:

- 1 O jogador 1 escolhe uma ação a_1 dentre as possíveis no conjunto $A_1 = \{E, D\}$.
- 2 O jogador 2 observa a_1 e então escolhe uma ação a_2 dentro do conjunto $A_2 = \{E', D'\}$.
- 3 As recompensas são $u_1(a_1, a_2)$ e $u_2(a_1, a_2)$, como mostrado pelo gráfico abaixo.

A leitura deste gráfico deve ser feito da seguinte forma: os nós representam pontos onde as decisões devem ser tomadas. O número de cada nó representa o jogador. O jogo começa pelo nó 1, onde o jogador 1 deve escolher entre E ou D . Se o jogador 1 escolheu E , então o nó 2 é alcançado, neste ponto o jogador 2 deve escolher entre E' ou D' . Da mesma maneira, se o jogador 1 tiver escolhido D ; outro nó que representa o momento de decisão do jogador 2 é alcançado, onde ele deve escolher entre E' ou D' . Após qualquer escolha do jogador 2, um nó terminal é alcançado e as recompensas são escritas abaixo destes nós terminais.



2.12 Equilíbrio perfeito dos subjogos

O equilíbrio perfeito dos subjogos é uma solução que é obtida por um método similar ao da indução por retrocesso. Vamos considerar jogos que tenham estágios seqüenciais. Isto é, jogos do tipo:

- 1 Os jogadores 1 e 2, de forma simultânea, escolhem as ação a_1 e a_2 dentre as acessíveis em A_1 e A_2 .
- 2 Os jogadores 3 e 4 observam as ações escolhidas por 1 e 2 (a_1, a_2) e então, de maneira simultânea, escolhem a_3 e a_4 dentre A_3 e A_4
- 3 As funções recompensas são $u_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

A solução para estes tipos de jogos segue uma idéia similar a utilizada no método da indução por retrocesso. Porém, o primeiro estágio deste processo (a análise do fim do jogo) consiste em resolver um jogo (o jogo entre os jogadores 3 e 4 no segundo estágio, dado o resultado do primeiro estágio) em vez de resolver um problema de otimização para um único jogador.

Por simplicidade devemos assumir que para qualquer resultado no primeiro estágio, (a_1, a_2) , o jogo do segundo estágio (envolvendo os jogadores 3 e 4) tem um único equilíbrio de Nash $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$. Se os jogadores 1 e 2 antecipam que no segundo estágio as estratégias escolhida por 3 e 4 serão $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$, então o primeiro estágio do jogo será encarado pelos jogadores 1 e 2 da seguinte forma:

- 1 Os jogadores 1 e 2, de forma simultânea escolhem uma ação a_1 e a_2 dentre as acessíveis em A_1 e A_2 .
- 2 as recompensas são $u_i(a_1, a_2, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$ para $i = 1, 2$.

Se (a_1^*, a_2^*) for o equilíbrio de Nash deste jogo, então $(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*))$ é o que é chamado de equilíbrio perfeito dos subjogos deste jogo de dois estágios. Este resultado é o análogo da indução por retrocesso que foi utilizado para jogos dinâmicos de informação completa e perfeita. Porém se aplica a jogos dinâmicos de informação completa e imperfeita. Onde os movimentos simultâneos é o que torna as informações imperfeitas.

2.13 Jogando jogos repetidamente.

Nesta seção analisamos os jogos que são jogados por mais de uma vez. Em tais situações, qualidades como a confiança e trapaçadas desempenham uma grande papel em como o jogo será jogado. Situações interpessoais que se repetem são bastantes comuns tanto nas empresas quanto para as pessoas físicas, o que faz com que a modelagem de situações deste tipo seja de grande utilidade.

Já vimos que um jogo estático de informação completa $G = \{A_1, \dots, A_n; u_1, \dots, u_n\}$ é um jogo onde os jogadores de 1 a n escolhem de forma simultânea as ações a_1, \dots, a_n dentre as possíveis em A_1, \dots, A_n e com as recompensas $u_1(a_1, \dots, a_n), \dots, u_n(a_1, \dots, a_n)$ sendo de conhecimento geral. Este jogo será chamado de jogo de um estágio.

Seja um jogo de um estágio representado por G . A notação $G(T)$ será utilizada para representar um jogo que é jogado repetidamente por um número finito de vezes e que tenha a característica de que o resultado de cada estágio é observado pelos jogadores antes do novo estágio se iniciar. As recompensas de $G(T)$ são a soma das recompensas obtidas nos T jogos de um estágio.

Uma consequência importante dos jogos que são jogados repetidamente por um número finito de vezes é que se o jogo de um estágio tem um único equilíbrio de Nash, então o jogo $G(T)$ tem apenas um equilíbrio perfeito que é o equilíbrio de Nash do jogo G jogado a cada estágio.

Quando consideramos que um jogo será jogado repetidamente infinitas vezes, isso permite algumas conclusões e teoremas bem particulares (53). A representação destes jogos envolve a definição do conceito do fator de desconto δ . Este fator permite que as recompensas não sejam as mesmas em todos os estágios do jogo. Outra definição necessária para

a caracterização de jogos infinitos é a do presente valor da função recompensa, definida como sendo a soma nos estágios anteriores.

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t \quad (2.7)$$

onde π_1, π_2, \dots é a recompensa de um determinado jogador no estágio 1, 2,³

A descrição de um jogo que será jogado infinitamente é: seja um jogo de um estágio G , então $G(\infty, \delta)$ representa um jogo que será jogado infinitamente e com um fator de desconto δ . Para cada estágio t , as ações dos $t - 1$ estágios anteriores é de conhecimento geral dos jogadores antes que o estágio t comece. A recompensa de cada jogador em $G(\infty, \delta)$ é o seu presente valor da função recompensa.

O fator de desconto também pode ser utilizado para incorporar uma incerteza de quando o jogo termina. Situações nas quais os jogadores não sabem até quando o jogo será jogado são bem mais comuns do que as situações modeladas por jogos infinitos. Se um jogo tem uma chance aleatória p de terminar no próximo estágio, o fator de desconto pode ser redefinido com: $\delta^* = (1 - p)\delta$. Vamos representar jogos deste tipo como $G(?, \delta^*)$ onde o símbolo ? indica a idéia da incerteza de quando o jogo termina.

2.14 O Torneio de Axelrod

Em 1981 Robert Axelrod e William D. Hamilton publicaram um trabalho com uma análise profunda e surpreendente sobre o jogo do dilema do prisioneiro quando jogado repetidamente (61). Uma exposição mais detalhada e mais comentada deste trabalho pode ser encontrada no livro “The evolution of co-operation” (62).

A questão que Axelrod se propõe a responder em seu livro é: como? Por que? E em que condições a cooperação pode surgir entre agentes que interagem sem uma autoridade central que force este comportamento. Em suas considerações os agentes são egoístas, no sentido de que eles jogam com o intuito de maximizar suas recompensas. Ele também observa que situações onde a cooperação ocorre é muito freqüente em nossa sociedade e que de certa forma, vários princípios éticos que são padrões na nossa sociedade, tendem a promover a cooperação.

Axelrod também propôs um torneio computacional onde várias estratégias foram co-

³Cada jogador tem o seu presente valor da função recompensa. Já que cada jogador j pode ter uma diferente recompensa π_n^j no estágio n . Os índices j foram omitidos para tornar a notação menos carregada.

locadas para jogar o dilema do prisioneiro repetidamente e com o fator de desconto alto⁴. Podemos descrever o torneio da seguinte forma: participaram do torneio um número ϕ de jogadores. Os jogadores são caracterizados por suas estratégias. Cada jogador joga o jogo $G(?, \delta^*)$ n vezes (n partidas), sendo seu adversário em cada partida escolhido aleatoriamente. Ao fim das $n\phi/2$ partidas, o escore total de cada jogador não é o número de partidas em que ele venceu o seu adversário, mas sim a soma dos seus pontos obtidos em cada partida. A tabela recompensa utilizada no torneio é a mesma apresentada anteriormente para o dilema do prisioneiro⁵ e em cada estágio do jogo as ações dos jogadores naquela partida é de conhecimento geral dos demais.

Como exemplo das estratégias utilizadas pelos jogadores do torneio podemos citar: a escolha aleatória entre cooperar e delatar; sempre cooperar; sempre delatar; cooperar nos k primeiros estágios e depois seguir aleatório; iniciar aleatoriamente e depois sempre fazer o contrário que o adversário fez; iniciar o jogo colaborando e depois repetir a ação do outro jogador no estágio anterior; dentre várias outras estratégias possíveis.

A idéia de que os jogadores interagem com vários outros que utilizam diferentes estratégias, torna o torneio bem interessante e captura a idéia de um indivíduo se relacionando socialmente. É comum que algumas estratégias se saiam muito bem enquanto jogam contra uma determinada estratégia x e muito mal contra uma outra estratégia y . A primeira conclusão que é feita com relação a eficiência das estratégias é que se o fator de desconto for suficientemente alto, não existe uma estratégia superior que não depende da estratégia usada pelo adversário. Para tentar entender melhor esta situação, se suponha jogando o jogo contra um adversário que esteja usando a estratégia de delatar sempre. Nesta situação, o melhor a fazer é também usar a estratégia delatar sempre, para então receber $P = -6$ em vez de receber $T = -9$ em cada lance. Porém, se o adversário estiver usando uma estratégia que nunca perdoa, isto é, uma estratégia que começa cooperando e após a primeira delação de seu adversário, seus próximos passos será a delação sempre. A melhor estratégia nesta situação é nunca delatar. Pois desta forma você receberá em cada lance a recompensa $R = -1$. Isso deve ser melhor do que delatar e desta forma, receber $E = 0$ no primeiro lance e a partir daí receber $P = -6$ em todos os lances seguintes. Sendo assim, quando será melhor cooperar ou não, até mesmo no primeiro estágio, depende do que o seu adversário irá fazer (o que não é do seu conhecimento). Portanto,

⁴Fator de desconto alto significa grandes chances de que o jogo venha a ser jogado novamente em um próximo estágio.

⁵Axelrod impõe uma restrição na tabela de recompensa. Para que várias conclusões de seu livro sejam válidas é necessário que as possíveis recompensas obedeçam a desigualdade $R > (E + T)/2$. O que é o caso da tabela 2.3

quando o fator de desconto é alto, não existe uma estratégia superior.

O principal resultado do torneio foi que dentre as estratégias que participaram (62), a que se saiu melhor foi uma em que no primeiro estágio de cada partida utilizava a estratégia cooperar e depois repetia a ação tomada pelo adversário no estágio anterior. O curioso é que esta foi uma das estratégias mais simples submetidas para participar do torneio. Podemos dizer que ela é simples por sua descrição ser bastante curta, por ela não se propor a “descobrir” qual será o próximo lance do seu adversário e por não utilizar o que foi feito pelo adversário em um passado distante (ela só olha para o último lance). Um outro fato curioso da vitória desta estratégia é que se analisarmos o seu desempenho do ponto de vista de cada partida, observamos que ela nunca pode conseguir uma pontuação melhor do que a do seu adversário. O máximo que ela consegue é um empate (ela promove a cooperação).

De uma maneira geral, o desempenho das chamadas estratégias cordiais foi superior ao das não cordiais. Uma estratégia na linguagem do torneio é dita cordial se ela nunca é a primeira a utilizar a estratégia delatar.

Axelrod aponta algumas características importantes da estratégia vencedora: (1) Ela é uma estratégia que evita conflitos desnecessários (por ser uma estratégia cordial). (2) Ela não evita em usar “delatar” caso o adversário tenha sido hostil. De fato faz isso imediatamente após cada retaliação do adversário. (3) Ela tem a capacidade de perdoar após uma provocação, e faz isso ao retribuir imediatamente uma cooperação por parte do adversário. (4) Ela tem um comportamento simples que permite que seu adversário a compreenda e possa se adaptar as suas atitudes. Estratégias muito complicadas que consideram vários fatores para determinar sua ação, podem ficar parecendo aleatória aos olhos dos adversários.

2.15 Experimentos e o jogo do ultimato

As soluções encontradas na teoria dos jogos geralmente levam em consideração que os jogadores envolvidos nos jogos são racionais e não sentem emoções. Estas considerações são muito fortes e fogem bastante da realidade onde as pessoas têm racionalidade limitada e sentimentos. Devido a isso, é muito comum que o resultado teórico previsto para alguns jogos seja bem diferente do que é observado na realidade. Um estudo sobre experimentos envolvendo jogos teóricos pode ser encontrado em (63). Para exemplificar a diferença comportamental entre a teoria e a prática iremos expor o chamado jogo do ultimato.

O jogo do ultimato (64) descreve a seguinte situação entre 2 jogadores: o jogador 1 tem a sua disposição uma quantia de dinheiro \$ e tem que oferecer uma fração f desta quantia ao jogador 2. O jogador 2, por sua vez, pode aceitar ou não a quantia $f\$$ proposta por 1. Caso o jogador 2 aceite a oferta proposta por 1 ele receberá uma recompensa $\mu_2 = f\$$ e o jogador 1 ficará com a diferença $\mu_1 = (1 - f)\$$. Porém se o jogador 2 rejeitar a oferta proposta por 1, nenhum deles receberá nada e $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

A solução teórica deste jogo segue o raciocínio: para o jogador 2 é mais conveniente aceitar qualquer fração $f \neq 0$, pois desta forma ele receberá $\mu_2 = f\$ \neq 0$. Se o jogador 1 souber que o jogador 2 aceitará qualquer proposta $f \neq 0$, ele irá propor a menor quantia possível (1 centavo) pois desta forma ele estará maximizando sua recompensa $\mu_1 = \lim_{f \rightarrow 0} (1 - f)\$$.

Este resultado é bastante diferente do observado empiricamente onde em algumas sociedades a quantia \$ é geralmente dividida meio a meio ($f = 1/2$) e quantias menores que 0.2\$ são comumente rejeitadas (65). Este problema motivou o surgimento de um novo sub-ramo da economia chamada de economia experimental onde métodos de laboratório são utilizados para se testar a validade de previsões teóricas.

3 JOGOS DA MINORIA

3.1 Introdução

São poucos os modelos teóricos em física estatística que podem ser resolvidos analiticamente (15). Contudo, quando o método de solução de um desses modelos abre um novo caminho para a resolução de outros problemas isso torna esse modelo um clássico como é o caso do modelo de Ising (15) e do dilema do prisioneiro (62). Em particular, o jogo da minoria foi idealizado para estudar as transações especulativas feitas no mercado financeiro, isto é situações onde os agentes compram e vendem “bens” com a única intenção de se beneficiar devido as flutuações dos preços. A idéia básica é que quando a maioria dos negociadores está comprando, é mais conveniente vender e vice-versa, dessa forma é desejável se estar no grupo da minoria. A primeira publicação sobre o jogo da minoria (66) trata do rico cenário observado nas simulações das diversas possibilidades do jogo. Este trabalho é muito importante e impulsionou o estudo da chamada econofísica (67) para uma linha diferente da abordada em outros textos como por exemplo em (68) onde se analisa o mercado financeiro como um sistema complexo com foco nas correlações dos índices temporais e também difere da abordagem seguida em (69). O jogo da minoria segue uma linha bastante diferente destas e utiliza conceitos de teoria dos jogos para modelar um sistema onde agentes evolucionários (70, 71) competem por recursos limitados.

Hoje se pode afirmar que o jogo da minoria é um exemplo clássico de um modelo teórico e que as ferramentas matemáticas utilizadas para a sua solução, provindas dos recentes avanços na física de sistemas fora do equilíbrio (72) e de sistemas desordenados (14), abrem caminhos para a solução de outros problemas. A bibliografia sobre este jogo é muito extensa apesar de sua existência ter menos de dez anos. Para uma revisão detalhada ver (73) e o sítio (67) onde há uma extensa bibliografia sobre o assunto e um aplicativo onde é possível se jogar o jogo da minoria. Uma abordagem matemática deste problema envolvendo integrais de caminho pode ser encontrada em (74).

O jogo da minoria é um modelo simples que nos informa sobre o comportamento coletivo de um sistema de agentes adaptivos e heterogêneos que interagem entre si e competem por recursos limitados. O jogo consegue prever propriedades macroscópicas do sistema (flutuações, previsibilidade, eficiência e etc.) a partir do comportamento microscópico dos agentes. Alguns trabalhos mostram que o jogo da minoria assim como suas variações reproduzem bem algumas realidades empíricas observadas no mercado financeiro (67, 75).

O jogo consiste de N (ímpar) jogadores onde a cada passo de tempo eles têm que escolher entre duas alternativas A ou B ¹. Aqueles que optarem pela alternativa escolhida pela minoria, vencem. Apesar da aparente simplicidade, um jogo deste tipo mostra uma característica interessante: se todos os jogadores analisarem a situação da mesma forma, todos irão tomar a mesma decisão e desta forma todos sairão perdendo. Isso sugere que os jogadores devem ser heterogêneos na maneira que eles decidem fazer a escolha A ou B . Além disso, em um jogo como este existe frustração (76), no sentido de que não é possível que todos os jogadores vençam em uma mesma rodada do jogo.

3.2 Jogo da minoria

O jogo da minoria analisado em (66) é um jogo onde os agentes dispõem de racionalidade limitada (77) e de uma informação parcial sobre o que ocorreu no passado. Estes agentes baseiam suas decisões nos últimos M resultados do jogo que é chamado de história. Se $M = 1$ a informação disponível aos agentes é a de que se na rodada anterior houve mais gente comprando (+) ou vendendo (-). Se considerarmos $M = 2$ teremos 4 possíveis histórias: $\{+, +\}$, $\{+, -\}$, $\{-, +\}$ e $\{-, -\}$. De um modo geral existem 2^M possíveis histórias, para cada uma delas os agentes decidem tomar uma ação, A ou B . Uma estratégia é uma regra, que em função da história tenta prever o resultado da próxima rodada. Cada estratégia tem uma pontuação, que é o total de vezes que esta estratégia foi vencedora.

O jogo da minoria é jogado entre N agentes, onde o índice i será utilizado para designar um determinado agente. A informação externa que é acessível aos jogadores a cada passo de tempo é chamada de μ . Ele representa a história das últimas M rodadas e pode assumir $\mu \in \{1, \dots, \alpha N\}$ com $\alpha \equiv \frac{2^M}{N}$. A cada passo de tempo $t = 1, 2, \dots$ uma história é sorteada aleatoriamente dentre $\{1, \dots, \alpha N\}$ e então os agentes passam a ter acesso a essa informação pública. Cada agente tem a sua disposição S estratégias (representadas pelo

¹Estas alternativas podem ser interpretadas como comprar ou vender ações, ir ou não a um clube etc.

índice g) para poder converter a informação $\mu(t)$ em uma decisão. Estas estratégias serão representadas por vetores em αN dimensões.

$$\vec{a}_{ig} = \{a_{ig}^\mu\}_{1 \leq \mu \leq \alpha N} \in \{-1, 1\}^{\alpha N}.$$

A componente $a_{ig}^\mu \in \{-1, 1\}$ pode ser interpretada como a indicação de vender ou comprar algo na bolsa de valores, ir ou não a um clube etc. Cada componente a_{ig}^μ é escolhida inicialmente para assumir os valores $\{-1, 1\}$ de forma aleatória² para todos os valores de i , g e μ e tem seu valor mantido fixo no decorrer do jogo. Essa é a fonte da "desordem congelada" (14) do modelo.

Para cada estratégia g de cada agente i , é dado uma pontuação inicial $p_{ig}(0)$ que é atualizada ao fim de cada rodada do jogo. O valor de $p_{ig}(t)$ mede o sucesso da estratégia g no instante t . No início do round t , dado uma história $\mu(t)$, cada agente escolhe utilizar a estratégia g^* que tenha a melhor pontuação

$$g^*(t) = \arg \max p_{ig}(t), \quad (3.1)$$

e de acordo com a estratégia escolhida, os agentes tomam suas decisões $b_i(t) = a_{ig^*(t)}^{\mu(t)}$. O resultado da ação tomada pela sociedade como um todo em um determinado tempo t , também é chamado de demanda em excesso e pode ser expressa como

$$A(t) \equiv A^{\mu(t)} = \sum_{i=1}^N b_i(t). \quad (3.2)$$

A ação tomada pela minoria no instante t é dada por $-\text{sign}(A(t))$ ³.

Finalmente, para todo jogador i e toda estratégia g a pontuação p_{ig} é atualizada conforme

$$p_{ig}(t+1) = p_{ig}(t) - a_{ig}^{\mu(t)} \frac{A(t)}{N}. \quad (3.3)$$

Dessa forma, se a ação tomada pelo jogador i ao usar a estratégia g quando recebeu a informação $\mu(t)$ tiver o sinal diferente de $A(t)$, isso quer dizer que o agente ficou no lado da minoria e então os pontos da estratégia g devem ser aumentados. Caso o sinal de $a_{ig}^{\mu(t)}$ seja igual a $A(t)$ isso quer dizer que o agente escolheu a opção da maioria e a pontuação da estratégia que indicou a decisão errada será diminuída. A equação 3.3 descreve um aprendizado dos agentes de como utilizar melhor suas estratégias com base na informação μ disponível.

²Uniforme e independente.

³ $\text{sign}(x) = 1$ se $x > 0$ e -1 se $x < 0$

As principais características macroscópicas que podemos observar com este modelo são: a média temporal de $A(t)$ (equação 3.2) no estado estacionário (alcançado em t_0).

$$\langle A \rangle_{tempo} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L - t_0} \sum_{k=t_0}^L A(k); \quad (3.4)$$

a a volatilidade definida como

$$\sigma^2 \equiv \langle A^2 \rangle_{tempo} - \langle A \rangle_{tempo}^2. \quad (3.5)$$

A média temporal das ações mede o excesso de jogadores em uma dada alternativa A ou B . E a volatilidade é uma medida da magnitude da flutuação. Ela informa sobre a qualidade da cooperação entre os agentes pois quantifica a quantidade de oportunidades perdidas, isto é, o tanto de pessoas que perderam a oportunidade de ficar na minoria. Quanto menor σ^2 mais próximo de $N/2$ é o tamanho da minoria

Em economia se diz que um mercado financeiro é eficiente quando a média temporal das ações é zero, $\langle A \rangle_{tempo} = 0$ e a volatilidade é pequena. Devido a simetria do jogo da minoria, temos que $\langle A \rangle_{tempo} = 0$. Desta forma a volatilidade fica

$$\sigma^2 = \langle A^2 \rangle_{tempo} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L - t_0} \sum_{k=t_0}^L A(k)^2. \quad (3.6)$$

No caso dos agentes escolherem suas ações de forma puramente aleatória significa que teremos $\langle A \rangle_{tempo} = 0$ e $\sigma^2/N = 1$. Desta forma o mercado é dito eficiente se $\sigma^2/N < 1$.

Os resultados empíricos obtido das simulações numéricas do jogo da minoria surgiram antes de um tratamento analítico. Apesar da simplicidade deste jogo ele apresenta um comportamento muito rico como veremos a seguir. Os resultados observados nas simulações numéricas feitas em (66, 78) ao se utilizar como condição inicial $y_i(0) = 0$ para todos os agentes das equações da pontuação 3.12 mostra que a volatilidade σ^2/N tem uma dependência muito rica com o parâmetro α que mede o tamanho do espaço das possíveis histórias 2^M normalizado pelo número N de agentes ($\alpha = \frac{2^M}{N}$). Quando $\alpha \gg 1$ as informações que chegam aos agentes é muito complicada e eles terminam agindo de maneira aleatória e o valor da volatilidade $\sigma^2/N \approx 1$. A medida em que α diminui, o que significa que M diminuiu ou que N aumentou, σ^2/N diminui, indicando que de alguma maneira os agentes estão sendo capazes de fazer uso da informação recebida para agir de maneira mais eficiente. Quando $\alpha = \alpha_c$ a volatilidade σ^2/N tem seu valor mínimo. E para $\alpha < \alpha_c$ temos que σ^2/N passa a crescer rapidamente. Considerando M fixo, foi

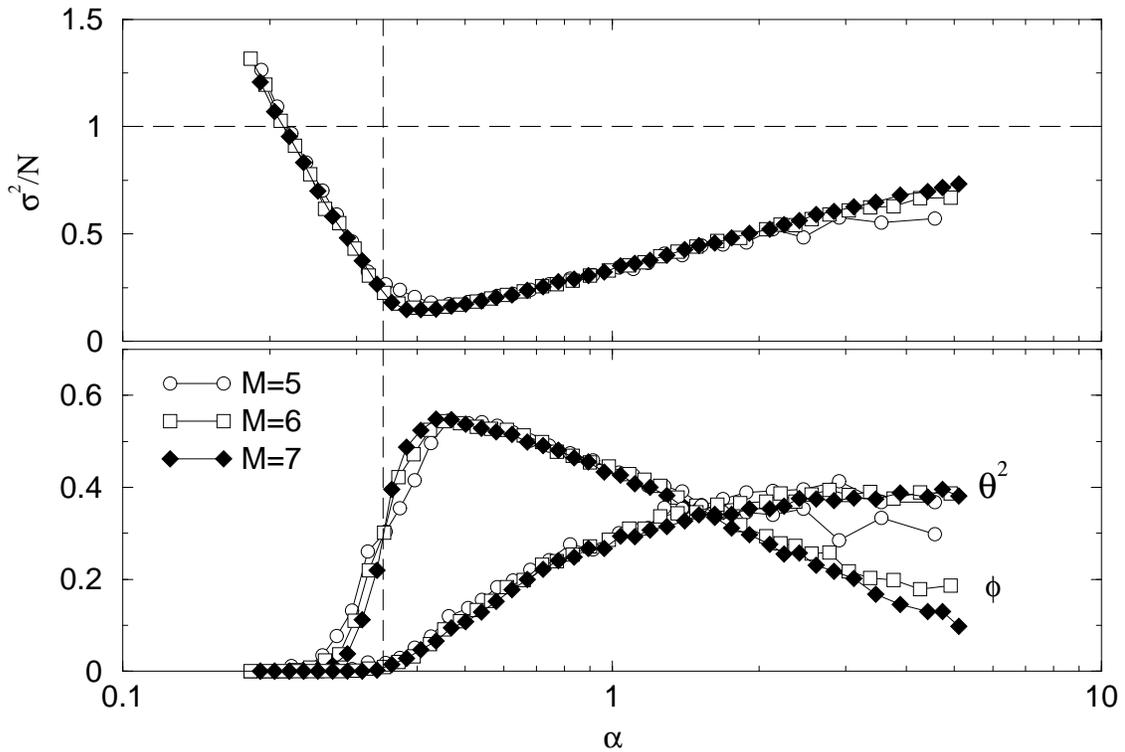


Figura 21: Gráfico de cima: Comportamento da volatilidade σ^2/N em função do parâmetro $\alpha = 2^M/N$ para diferentes valores da memória M obtidos nas simulações numéricas com condição inicial $y_i(0) = 0 \forall i$. Quando α é grande, $\sigma^2/N \rightarrow 1$ e para valores de α pequenos temos que $\sigma^2/N > 1$. No gráfico de baixo está mostrado o comportamento de $\theta^2 \equiv H/N$ onde H é a previsibilidade, assim como também o número de agentes congelados Φ , ambos em função de α . Podemos ver que em um certo valor de $\alpha = \alpha_c$, θ^2 e Φ passam a ser diferentes de zero indicando que existe uma região de $\alpha > \alpha_c$ onde é possível prever algo com respeito do sistema e que existe agentes jogando a mesma estratégia para um dado μ . Figura retirada da referência (78). A linha pontilhada vertical é $\alpha = \alpha_c = 0.34$ no caso de 2 estratégias para cada agente.

observado que σ^2 cresce linearmente com N quando $N \ll 2^M$ enquanto $\sigma^2 \sim N^2$ quando $N \gg 2^M$. O gráfico da parte de cima da figura 21 mostra o comportamento de σ^2/N em função de α . Existem três regimes para o jogo da minoria, quando $\alpha \gg 1$ os agentes não são capazes de fazer um bom uso da informação disponível e terminam agindo de uma maneira descoordenada e aleatória. A medida que α diminui, a volatilidade σ^2/N passa a diminuir e o jogo entra em uma fase de cooperação onde os agentes são aptos a agregar corretamente as informações recebidas. A volatilidade σ^2/N alcança seu valor mínimo em $\alpha = \alpha_c$ e para valores de $\alpha < \alpha_c$ ela aumenta rapidamente e alcança valores bem maiores dos que aqueles se os agentes estivessem agindo aleatoriamente. Esta fase é dita como uma fase de superlotação e nesta situação as ações dos agentes estão fortemente correlacionadas.

Uma outra grandeza macroscópica de grande utilidade e que ajuda na busca por uma solução exata (um diagrama de fase) para o jogo da minoria é a previsibilidade que é definida como

$$P^\mu = \langle \Theta(A) | \mu \rangle \quad (3.7)$$

onde $\Theta(x) = 0$ para $x < 0$ e 1 nos outros casos. A previsibilidade é a probabilidade de que a minoria esteja em um determinado lado dado que a história foi μ . O símbolo $\langle \dots | \mu \rangle$ quer dizer a média temporal de \dots nas situações onde $\mu(t) = \mu$. O valor de $P = 1/2$ significa que, para um dado padrão μ , a minoria ficou em ambos os lados com a mesma frequência. E quando $P \neq 1/2$ significa que dado o padrão μ , é mais frequente que a minoria esteja em um determinado lado. No caso de $\alpha \ll 1$, se observa que $P_\mu = 1/2$ o que quer dizer que o padrão não é previsível. Porém, quando $\alpha \gg 1$ $P^\mu \neq 1/2$ o que quer dizer que dependendo do padrão da história μ , é mais provável que a minoria esteja em um determinado lado.

Na fase assimétrica ($\alpha > \alpha_c$) temos que $\langle A | \mu \rangle \neq 0$ para pelo menos uma história μ . Desta forma, conhecer a história $\mu(t)$ em um tempo t torna o sinal de A previsível de um ponto de vista estatístico. Uma medida do grau de previsibilidade pode ser descrita por

$$H = \frac{1}{2^M} \sum_{\mu=1}^{2^M} \langle A | \mu \rangle^2 = \overline{\langle A \rangle^2}, \quad (3.8)$$

onde a barra em \overline{X} representa a média de X sobre todas as possíveis 2^M histórias μ

Foi observado numericamente que a função H , para M fixo, decresce com N . Isto está mostrado na parte de baixo da figura 21 onde $\theta^2 \equiv H/N$. A fração dos agentes Φ que usam sempre a mesma estratégia para um dado padrão μ , também está mostrado na

figura 21. Claramente, as grandezas θ , Φ e σ sofrem uma mudança abrupta em $\alpha = \alpha_c$. Na fase simétrica ($\alpha < \alpha_c$) a flutuação σ^2 é grande; os agentes não jogam sempre a mesma estratégia e não é possível se dizer que a minoria deverá estar em um dado lado com base na informação recebida μ . Já na fase assimétrica ($\alpha > \alpha_c$) a flutuação $\sigma^2 < 1$, existem jogadores preferindo uma estratégia a outra tornando possível se fazer uma previsão de qual lado a minoria estará com base na informação recebida. No caso de só haver duas estratégias para cada agente ($S = 2$) foi observado que a transição de fase ocorre em $\alpha_c \approx 0.34$. A linha pontilhada na figura 21 é $\alpha = \alpha_c = 0.34$.

Vamos analisar agora o caso onde os agentes tem apenas duas estratégias disponíveis ($S = 2$). Para isso definimos uma variável $s_i(t)$ que assume valores 1 se no instante t o agente i utilizar a estratégia 1 e $s_i(t) = -1$ se utilizar a estratégia 2. Desta forma podemos explicitar a desordem congelada decompondo a_{ig}^μ

$$a_{ig}^\mu = \omega_i^\mu + s_i \xi_i^\mu \quad (3.9)$$

onde $\omega_i^\mu \equiv (a_{i1}^\mu + a_{i2}^\mu)/2$ e $\xi_i^\mu \equiv (a_{i1}^\mu - a_{i2}^\mu)/2$. Nos jogos binários $|a_{ig}^\mu| = 1$ o que implica que as variáveis ω_i^μ e ξ_i^μ podem assumir ± 1 e 0, enquanto o produto $\omega_i^\mu \xi_i^\mu = 0$ sempre. O fato de que para um dado μ existem agentes os quais suas estratégias prevêm a mesma ação é importante para o surgimento de um regime de cooperação.

Após a decomposição feita na equação 3.9 podemos escrever $A(t)$ de forma a depender explicitamente da desordem ω_i^μ e ξ_i^μ assim como da variável dinâmica $s_i(t)$, desta forma a equação 3.2 se torna

$$A(t) = \Omega^{\mu(t)} + \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu(t)} s_i(t) \quad (3.10)$$

onde $\Omega^{\mu(t)} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{\mu(t)}$

Uma outra definição útil é a da diferença dos pontos das duas estratégias

$$y_i(t) \equiv \frac{1}{2}[p_{i1}(t) - p_{i2}(t)] \quad (3.11)$$

esta variável $y_i(t)$ se relaciona com s_i da forma $s_i(t) = \text{sign}[y_i(t)]$. A dinâmica da pontuação das estratégias descrita na equação 3.3 pode então ser descrita por

$$y_i(t+1) = y_i(t) - \frac{1}{N} \xi_i^{\mu(t)} A(t) \quad (3.12)$$

Uma das maiores dificuldades em se resolver analiticamente este modelo se deve a singularidade de $s_i(t) = \text{sign}(y_i(t))$ na equação 3.10. Para remover esta dificuldade, se

diz que a probabilidade de se escolher uma dada estratégia depende da pontuação da seguinte forma

$$Prob\{g_i^*(t) = g\} = Ce^{\Gamma p_{ig}}. \quad (3.13)$$

A grandeza Γ indica a taxa de aprendizagem dos agentes e funciona como o inverso da temperatura. $\Gamma = 0$ significa que os agentes não aprendem como melhor utilizar suas estratégias e representa os agentes agindo aleatoriamente. $\Gamma \rightarrow \infty$ significa o caso de melhor aprendizagem que é dado pela equação 3.3, isso permite que a variável $s_i(t) = sign(y_i(t)) \in \{-1, 1\}$ possa ser substituída por $m_i(t) \equiv \langle s_i(t) \rangle = tanh(\Gamma y_i(t))$. A variável $m_i(t)$ é chamada de soft spin e a média $\langle X \rangle$ se referem a média estatística de X com distribuição de probabilidade dado pela equação 3.13

Fazendo a média da pontuação 3.12 no estado estacionário se obtém uma equação dinâmica para a pontuação $\langle y_i \rangle$. A solução que se procura para o regime estacionário é que a diferença entre a qualidade das estratégias deve ser linear com o tempo, $\langle y_i \rangle \propto v_i t$.

Já que a grandeza H definida em 3.8 indica o grau de previsibilidade, podemos dizer que os agentes do jogo da minoria jogam de maneira a tornar o sistema o mais imprevisível possível. Para compreender isso melhor, basta ver que se o agente pode prever algo a respeito do mercado, ele poderá mudar sua atitude de modo a aproveitar esta informação, dessa forma, no estado estacionário, os agentes ou não têm condições de prever nada a respeito do mercado ou já utilizaram toda a informação que estava acessível.

3.3 Mecânica estatística para o Jogo da Minoria

Pode ser demonstrado que H funciona como uma função de Lyapunov para o sistema dinâmico da equação 3.12 (73). A solução do problema no estado estacionário podem ser resumidas ao se encontrar o conjunto $\{m_i\}$ que minimize

$$min_{\{m_i\}} H, \quad m_i \in [-1, 1] \quad \forall i \quad (3.14)$$

onde H (equação 3.8) pode ser escrita como

$$H = \overline{\langle A \rangle^2} = \frac{1}{2^M} \sum_{\mu=1}^{2^M} \left[\Omega^\mu + \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu m_i \right]^2 \quad (3.15)$$

Mapeando o problema através da equação 3.14 temos o jogo da minoria em uma forma que permite que ele possa ser analisado por técnicas da mecânica estatística. De fato se pensarmos na previsibilidade H como um hamiltoniano de um sistema de soft

spins, temos que as propriedades do estado fundamental deste sistema pode ser associada com a solução da equação 3.14. Para isso devemos escrever uma função de partição de onde todas as propriedades serão extraídas.

$$Z(\beta, \Xi) = \text{Tr}_m e^{\beta H(m_i, \Xi)} \quad (3.16)$$

onde β é o inverso da temperatura; $\Xi = \{a_{ig}^\mu\}$ representa a desordem do sistema e Tr_m se refere a integral de -1 a 1 sobre m_i para todo $i = 1, \dots, N$. Já que estamos interessados no estado estacionário, devemos ter $\beta \rightarrow \infty$. A equação 3.14 pode ser escrita como

$$\min_{\{m_i\}} H(m_i, \Xi) = F = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta, \Xi) \quad (3.17)$$

Esta é a equação para a energia livre em função de uma desordem específica Ξ . Estamos interessados em obter um comportamento típico, que seja robusto e que mostre as características do sistema sem a dependência de uma desordem específica Ξ . Para isso devemos fazer uma média sobre todas as possíveis desordens Ξ na equação 3.17. Calcular esta média não é fácil pois é necessário se tirar a média do logaritmo de uma função de uma variável aleatória Z . O método da réplica reduz esta dificuldade e será visto a seguir.

3.4 Método da réplica

Os sistemas desordenados apresentam muitas peculiaridades, vínculos e frustrações quando observados em uma escala microscópica. Porém é esperado que algumas grandezas macroscópicas tenham um comportamento médio bem definido dentro das mais possíveis desordens. Se o comportamento médio de uma grandeza satisfaz esta condição dizemos que esta grandeza é “*self-averaging*”.

O método da réplica é um procedimento matemático que permite o cálculo da média de observáveis macroscópicos sobre a desordem congelada tão presentes nos sistemas desordenados (79). Se a desordem no sistema é pequena podemos separar o hamiltoniano $H(x)$ em uma parte não aleatória H_{det} e em uma perturbação aleatória $\delta H_{aleat.}$. Podemos expandir H em potências de $\delta H_{aleat.}$ e então tirar a média termo a termo. Porém, em vidros de spin e particularmente no jogo da minoria a desordem desempenha um importante papel e uma expansão em potências de δH não é uma boa aproximação. Suponha que de modo geral tenhamos um hamiltoniano $H_J(\mathbf{s})$ que depende da configuração \mathbf{s} dos spins e de um conjunto de variáveis de controle J , que é distribuída de acordo com uma distribuição $P(J)$. Tradicionalmente o que se faz em mecânica estatística é, para cada

escolha das variáveis J calcular uma função de partição

$$Z_J = \sum_{\{s\}} \exp\{-\beta H_J(\mathbf{s})\} \quad (3.18)$$

e uma densidade de energia livre

$$f_J = -1/(\beta N) \ln Z_J \quad (3.19)$$

onde N é o numero de variáveis s . Para se obter propriedades que não dependam das peculiaridades de cada desordem devemos esperar que os observáveis macroscópicos apresentem (pelo menos em suas médias) um comportamento robusto aos detalhes das desordens. Desta forma o que precisamos é de

$$\langle f \rangle_{\Xi} \equiv \sum_J P(J) f_J. \quad (3.20)$$

O cálculo desta média não é fácil pois geralmente pouco se sabe a respeito da distribuição de $P(J)$. A identidade

$$\log Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n} \quad (3.21)$$

juntamente com o truque das réplicas (14) reduz a dificuldade de se calcular $\langle \ln Z \rangle_{\Xi}$ e permite escrever

$$\langle \ln Z \rangle_{\Xi} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z^n \rangle_{\Xi} \quad (3.22)$$

substituindo a necessidade de calcular $\langle \ln Z \rangle_{\Xi}$ por se calcular $\langle Z^n \rangle_{\Xi}$, o que é mais fácil.

A idéia fundamental do truque da réplica é considerar um sistema formado por n réplicas não interagentes do sistema original. Desta forma Z^n representa a função de partição deste novo sistema e está definido como uma função para n inteiro. O truque da réplica estende a definição da função Z^n para ser uma função analítica de n e então se passa o limite $n \rightarrow 0$ da equação 3.22. Cada réplica é idêntica ao sistema inicial e contém exatamente a mesma desordem, porém para cada réplica a existe um conjunto $\{m_i^a\}$ para as variáveis dinâmicas.

A função de partição do sistema replicado é

$$Z^n = (\text{Tr}_m e^{-\beta H(m, \Xi)})^n = \prod_{a=1}^n \text{Tr}_{m^a} e^{-\beta H(m^a, \Xi)} = \text{Tr}_{m^1} \cdots \text{Tr}_{m^n} e^{-\beta \sum_{a=1}^n H(m^a, \Xi)} \quad (3.23)$$

como já foi dito, cada termo $H(m^a, \Xi)$ contém a mesma desordem Ξ do hamiltoniano original. Desta forma $\sum_{a=1}^n H(m^a, \Xi)$ pode ser visto como o hamiltoniano de um sistema

com n cópias não interagentes do sistema original. O cálculo da média sobre a desordem na equação 3.23 é de certo modo um procedimento padrão no estudo de vidros de spin e se reduz a integral no espaço $n \times n$ das matrizes \hat{Q} e \hat{R} (80)

$$\langle Z^n \rangle_{\Xi} \propto \int d\hat{Q} d\hat{R} e^{-\beta N n f(\hat{Q}, \hat{R})} \simeq e^{-\beta N n f(\hat{Q}^*, \hat{R}^*)} \quad (3.24)$$

onde a matriz \hat{R} é um multiplicador de Lagrange e \hat{Q} é uma matriz com os parâmetros de ordem

$$Q_{c,d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_{i,c} m_{i,d} \quad (3.25)$$

onde os índices c e d se referem as replicas. A energia livre é dada por

$$f(\hat{Q}, \hat{R}) = \frac{\alpha}{2n\beta} \text{Tr} \log \left[\hat{1} + \frac{\beta}{\alpha} (1 + \hat{Q}) \right] + \frac{\alpha\beta}{2n} \sum_{c \leq d} r_{c,d} Q_{c,d} - \frac{1}{n\beta} \log \left[\text{Tr} e^{(\alpha\beta^2/2) \sum_{c \leq d} r_{c,d} m_c m_d} \right]. \quad (3.26)$$

Para hamiltonianos não negativos como é o caso de $H = \overline{\langle A \rangle}$, as matrizes Q^* e R^* que dominam a integral 3.24 no limite $\beta N \rightarrow \infty$ têm uma forma simétrica para as replicas

$$Q_{a,b}^* = q + (Q - q)\delta_{a,b}, \quad R_{a,b}^* = r + (R - r)\delta_{a,b}. \quad (3.27)$$

Com o *ansatz* 3.27 podemos calcular a energia livre e passar o limite $n \rightarrow 0$.

$$f^{(SR)}(Q, q, R, r) = \frac{\alpha}{2\beta} \log \left[1 + \frac{\beta(Q - q)}{\alpha} \right] + \frac{\alpha}{2} \frac{1 + q}{\alpha + \beta(Q - q)} \quad (3.28)$$

$$+ \frac{\alpha\beta}{2} (RQ - rq) - \frac{1}{\beta} \langle \log \int_{-1}^1 dm e^{-\beta V_z(m)} \rangle_z \quad (3.29)$$

onde

$$V_z(m) = -\frac{\alpha\beta(R - r)}{2} m^2 - \sqrt{\alpha r} z m \quad (3.30)$$

e a média no último termo é definido pela integral gaussiana $\langle \dots \rangle_z = \int_{-\infty}^{\infty} dz \dots e^{-z^2/\sqrt{2\pi}}$.

Os parâmetros Q , q , R e r são obtidos resolvendo a equação de ponto de sela $\partial f^{(SR)}/\partial X = 0$ onde $X = Q, q, R, r$. Maiores detalhes deste cálculo podem ser encontrados no apêndice C da referência (80) e em (81).

4 AGENTES ADAPTATIVOS EM UM JOGO DE PREVISÃO E EM FERRAMENTAS DE BUSCA

4.1 Introdução

A riqueza e complexidade na forma em que alguns animais se organizam socialmente é um aspecto de grande interesse. O fato de algumas espécies, incluindo os seres humanos, viverem em sociedade e se organizarem em grupos traz vantagens e desvantagens. Um dos principais benefícios é poder observar o que os demais membros da comunidade fazem quando submetidos a uma determinada situação. Esse poder de observação e a possibilidade de acompanhar a maioria já foram explorados em alguns modelos científicos para prever alguns fatos observados empiricamente em mercados financeiros (82, 83). A idéia do jogo de previsão é descrever a população como um grupo de agentes que interagem entre si onde cada indivíduo quer fazer uma previsão correta a respeito de um acontecimento (variável) de conhecimento público. Um exemplo dessa variável pública é a informação de que houve um maior número de pessoas vendendo ou comprando no jogo da minoria, ou a audiência em uma dado dia em um restaurante ou um bar(18). A decisão de cada indivíduo pode ser determinada, ou por sua experiência pessoal, ou pela observação do que a maioria está fazendo. Nesse último caso a eficiência desta estratégia depende de uma maneira não trivial da fração de agentes que a utilizam. Os resultados para este jogo podem ser vista em (84).

Neste capítulo também vamos descrever e analisar uma possível aplicação das idéias utilizadas no jogo da previsão. Iremos utilizar agentes adaptivos com o intuito de refinar os resultados fornecidos por ferramentas de busca na internet como Google ou Yahoo.

4.2 O Jogo da previsão

Aos agentes deste jogo estão disponíveis duas estratégias que devem ser utilizadas para a previsão de um evento. A idéia é verificar a eficiência de cada estratégia em função da fração de agentes que as utilizam. Uma descrição mais precisa do modelo da previsão (84) segue abaixo.

Os agentes de uma população com N indivíduos têm que tomar uma decisão sobre um evento binário $E \in \{\pm 1\}$. Para isso, cada agente pode escolher entre duas estratégias. Estratégia I ou estratégia H . O caso de um agente $i \in I$ significa que ele toma suas decisões baseadas em sua informação privada $\theta_i \in \{\pm 1\}$ sobre o evento E . Inicialmente, θ_i é escolhido de forma aleatória e independente $\forall i \in I$ com probabilidade $P\{\theta_i = 1\} = p > 1/2$ de que o sinal privado de i lhe de uma informação correta com relação ao evento E^1 . Após esta inicialização os θ_i são mantidos constantes $\forall i \in I$. Os agentes que utilizam a estratégia H , recebem uma informação privada $\theta_i = \pm 1$. $P\{\theta_i = \pm 1\} = 1/2$ para todo $\forall i \in H$.

Cada agente $i \in H$ tem um grupo de vizinhos G_i com K elementos escolhidos aleatoriamente. Para determinar a sua opinião, ele observa o sinal dos seus vizinhos e então, atualiza a sua opinião de modo a concordar com a maioria ².

Inicialmente as previsões θ_i são todas inicializadas e então um jogador $i \in H$ é escolhido aleatoriamente e seu palpite é atualizado como definido a seguir.

$$\theta_i \rightarrow \theta'_i = \text{sgn} \sum_{j \in G_i} \theta_j \quad (4.1)$$

onde

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Tendo sido definida a probabilidade de um agente do tipo I fazer uma previsão correta como p , iremos definir para os agentes H a chance de uma previsão correta como:

¹Por definição, $\theta_i = 1$ será dita a escolha correta.

² K deve ser ímpar

$$q \equiv \frac{1}{\eta N} \sum_{i \in H} \delta_{\theta_i, 1} \simeq P\{\theta_i = 1 | i \in H\}, \quad (4.3)$$

onde η é a fração de jogadores que utilizam a estratégia H .

4.3 Resultados

O principal resultado que pretendemos com este modelo é verificar sob que condições a estratégia H é mais eficiente que a estratégia I . De uma maneira mais geral, como a probabilidade q se comporta em função da fração η .

Tendo sido definido η como a fração dos jogadores utilizando H , p a chance de um jogador que utiliza I fazer a previsão correta; e q a chance de um jogador H fazer a previsão correta, podemos escrever a chance de um jogador escolhido aleatoriamente fazer uma previsão correta como

$$\pi = (1 - \eta)p + \eta q, \quad (4.4)$$

Conforme a regra de atualização do modelo, também podemos dizer que a chance de um agente do tipo H fazer a escolha correta é

$$q = \sum_{j=(K+1)/2}^K \binom{K}{j} \pi^j (1 - \pi)^{K-j}. \quad (4.5)$$

o termo $\binom{K}{j}$ determina o número de possibilidades de um dado agente H ter a maioria j dos seus K vizinhos fazendo a escolha correta. As equações 4.4 e 4.5 formam um par de equações auto-consistentes para q , pois π é uma função de q . As equações 4.4 e 4.5 podem ser obtidas através de um cálculo do tipo campo médio utilizando-se de uma função de informação a respeito do número de pontos fixos alcançados. Devido a sua extensão esse cálculo foi desenvolvido no apêndice. Para um dado valor de p as equações 4.4 e 4.5 têm solução única para $\eta < \eta_c(p, K)$. Para $\eta > \eta_c(p, K)$ existem 3 soluções como podemos ver na figura 22. Estas soluções são chamadas de $q_+ > q_u > q_-$. Onde q_u é uma solução instável que separa os pontos fixos q_{\pm} . O ponto crítico η_c é uma função dos parâmetros p e K . η_c aumenta com p e diminui com K .

O resultado de poucas realizações da simulação numérica deste modelo para uma população de tamanho $N = 10.000$ e com $p = 0.55$ e $K = 11$ está mostrado na figura 23. Podemos ver que a partir de um certo valor de η começa a surgir valores de q próximos a zero. Estas soluções são chamadas de q_- . Há também algumas poucas soluções q_u

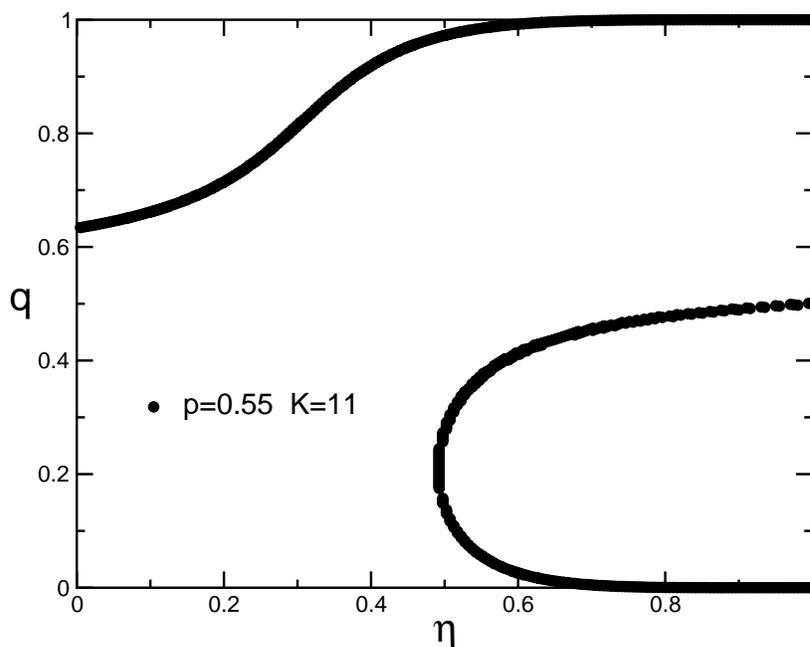


Figura 22: Solução numérica das equações 4.4 e 4.5 com $p = 0.55$ e $K = 11$. Acima de um η crítico ($\eta_c \approx 0.48$), além das soluções $q_+ \approx 1$, passam a existir outras 2 soluções q_- e q_u .

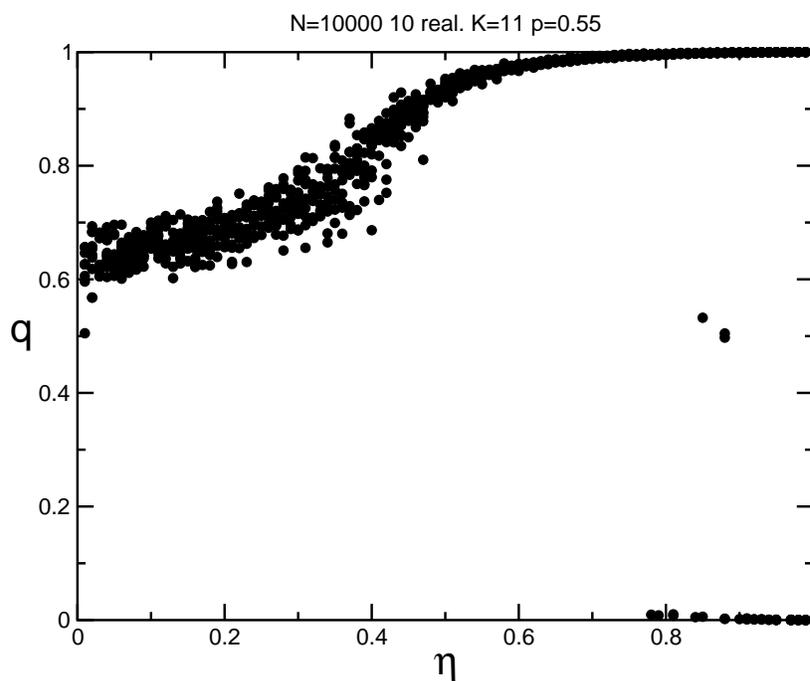


Figura 23: Resultados numéricos de 10 simulações. Quando a fração de agentes jogando H é grande, a solução q_+ passa a coexistir com outras duas soluções. $q_- \approx 0$ e q_u . Em algumas realizações a probabilidade de acerto q é próxima a 1 enquanto em outras, q é próximo de zero. Também podemos ver algumas poucas soluções q_u .

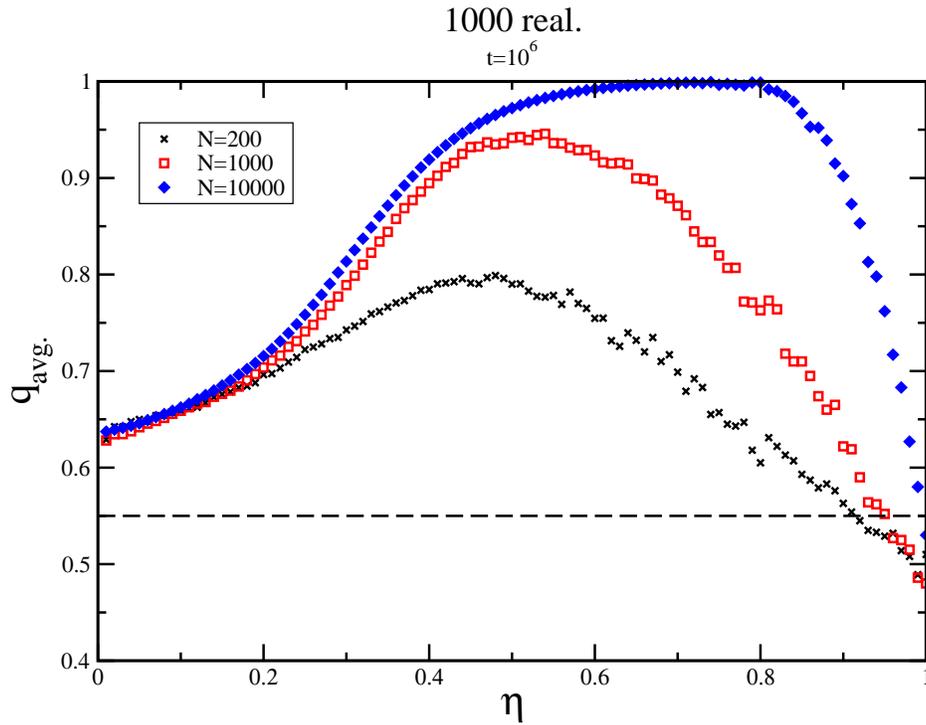


Figura 24: Resultado da simulações de diversos tamanhos N e com os parâmetros $p = 0.55$ e $K = 11$. A linha pontilhada representa $q_{avg} = p = 0.55$. A medida que η aumenta, a estratégia H vai ser tornando mais eficiente. Porém, acima de η_c o valor médio de q passa a diminuir devido as realizações onde a chance de acerto de um jogador H são muito pequenas. Na região de $\eta \approx 1$, existe uma coexistência entre duas fases. Uma onde os jogadores H são bem sucedidos em prever o evento corretamente e outra onde eles não se saem bem na previsão.

próximo a 0.5.

Após várias realizações, para cada valor da fração η calculamos o valor médio de q , $q_{avg} = \langle q \rangle_{real}$. A figura 24 mostra a curva de $\langle q \rangle$ em função de η para populações de diferentes tamanhos. Podemos ver que a medida em que a fração η de jogadores do tipo H cresce, a probabilidade de acerto q também cresce até atingir um máximo, para então começar a decrescer e chegar até mesmo a ter valores de $q_{avg} < p$ quando $\eta \approx 1$. Isso ocorre porque a medida com que η aumenta as soluções q_- passam a ser mais freqüentes e contribuem para a diminuição de q_{avg} . A principal informação transmitida pela figura 24 é que quando a grande maioria da população está tomando sua decisão em função do que os outros estão fazendo, a probabilidade de uma previsão correta é baixa e a estratégia H tem um desempenho inferior ao da estratégia I .

De modo a tentar obter um resultado analítico que concorde com as simulações vamos definir p_- como a probabilidade de que o sistema convirja para o ponto fixo q_- . Em outras

palavras, p_- é a probabilidade de que a evolução do sistema no estado $q(0)$ termine abaixo de q_u . Dado que θ_i é atribuído aleatoriamente para todo $i \in H$ no início do jogo, temos que $q(0)$ pode ser aproximado por uma variável gaussiana cuja função geratriz tem média $1/2$ e variância $1/(\eta N)$. Desta forma podemos escrever

$$p_- \equiv P\{q(0) < q_u\} \cong \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\eta N/2}(1 - 2q_u)) \quad (4.6)$$

onde erfc é a função complementar da função erro³.

Uma interpretação da função erro é que para um conjunto de variáveis geradas por uma distribuição normal com média zero e variância σ a probabilidade do erro de uma medida estar entre $-a$ e a é dado por $\operatorname{erfc}(\frac{a}{\sigma\sqrt{2}})$. $1 - \operatorname{erfc}(x)$ é a chance do erro estar fora deste intervalo.

A dinâmica de $q(\tau)$ esta sujeita a um ruído da ordem de $1/\sqrt{N}$ o que causa freqüentes transições por q_u nos estágios iniciais da dinâmica quando N é pequeno. No caso onde a grande maioria dos agentes estão jogando H , ($\eta \approx 1$), fazendo uma expansão, podemos escrever que a solução instável é

$$q_u \cong \frac{1}{2} - \frac{(p - 1/2)K!!}{K!! - (K - 1)!!}(1 - \eta) + O(1 - \eta)^2 \quad (4.7)$$

o que mostra que existe um intervalo de tamanho $1/\sqrt{N}$ próximo de $\eta = 1$ onde a probabilidade p_- não é desprezível. A medida que N cresce, a queda de $\langle q \rangle$ se torna mais abrupta nesta região como podemos ver na figura 24.

O valor médio de q pode ser escrito em função de p_- da seguinte forma

$$\langle q \rangle = p_- q_- + (1 - p_-) q_+ \quad (4.8)$$

A figura 25 mostra o comportamento da equação 4.8 em função de η . Para sua resolução foi utilizado a equação 4.6 e das soluções de 4.4 e 4.5 q_+ e q_- . Os símbolos representam o resultado obtido através das simulações numéricas. A concordância entre os dois métodos é muito boa.

Até este momento o modelo analisado considera o caso onde uma fração fixa η de agentes utilizando a estratégia H enquanto os demais adotam I . Uma análise mais sofisticada trata este modelo como um jogo teórico onde cada agente escolhe sua estratégia de modo a maximizar a sua recompensa. Por simplicidade, é considerado que os agen-

³ $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt$

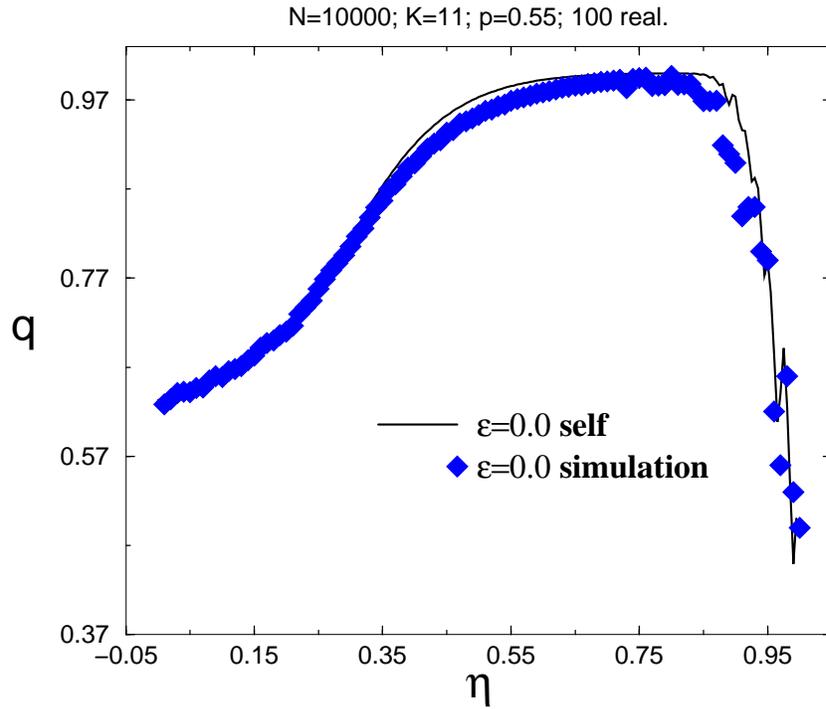


Figura 25: Comparação do valor médio de q em função de η obtido tanto na simulação numérica quanto pela solução da equação 4.8. Os parâmetros estão indicados na figura. A concordância entre os métodos é muito boa.

tes querem fazer a previsão correta; isto pode ser modelado como a recompensa deles sendo proporcional a probabilidade de uma previsão correta (probabilidade de $\theta_i = 1$). O jogo é jogado repetidamente e a cada rodada os resultados da rodada anterior é de conhecimento geral dos jogadores. Na prática o que acontece é o seguinte: se na rodada anterior $\langle q \rangle > p$, os agentes que estão jogando I acharão mais conveniente passar para H . E se $\langle q \rangle < p$ serão os agentes H que mudarão para I . Desta forma, é esperado que a população se auto-organize em um estado η^* onde nenhum agente terá incentivo para mudar de estratégia. Um estado onde $\langle q \rangle = p$ é chamado de equilíbrio de Nash. Vimos anteriormente que neste modelo o equilíbrio de Nash é alcançado quando quase todos os jogadores jogam H (uma fração η^*), e uma fração $1 - \eta^* \approx N^{-1/2}$ jogam I . Nesta região $q_+ \cong 1$ e $q_- \cong 0$. Desta forma, com a equação 4.8 podemos concluir que $p_- \cong 1 - p$. Isso significa que a população como um todo adota a previsão errada com probabilidade $1 - p$, como se fosse um único indivíduo tentando prever o evento através da estratégia I . Quando $p \approx 1/2$ implica que p_- é uma probabilidade significativamente alta.

Uma modelagem com mais detalhes permite que haja heterogeneidade entre os agentes. Heterogeneidade no sentido de que os agentes da população possam ter diferentes capacidades de previsão p_i . Dentre as inúmeras escolhas possíveis para a distribuição

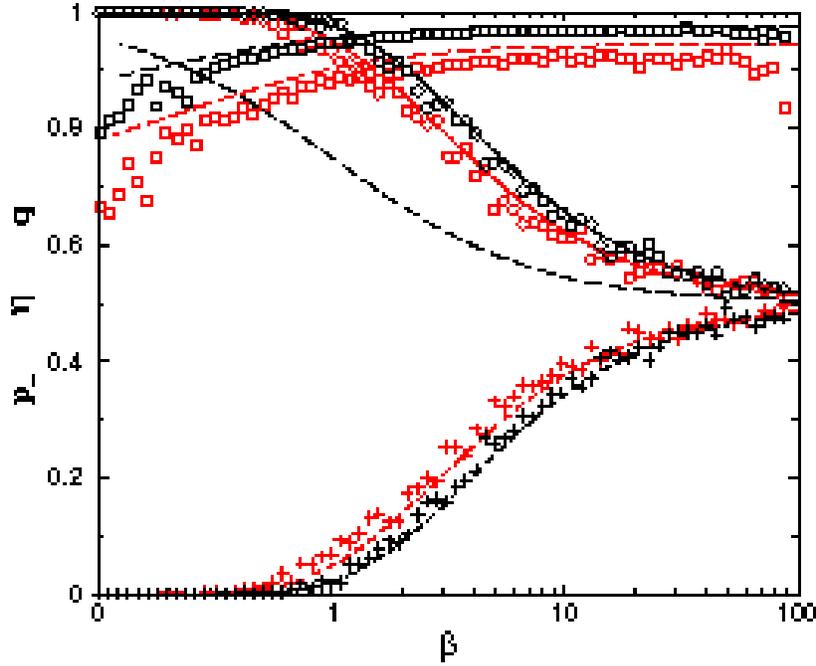


Figura 26: Probabilidade p_- , fração η de jogadores jogando H no estado estacionário e a probabilidade de acerto q , todos em função do parâmetro β que controla a heterogeneidade. β grande significa pouca heterogeneidade e que a probabilidade de uma previsão errada $p_- \simeq 1/2$ é grande; $\eta \rightarrow 1$; e $q \simeq 1/2$. Já quando β diminui, o número de agentes com $p > 0.5$ aumenta e desta maneira a performance da população como um todo também aumenta (q aumenta e p_- diminui). Figura retirada da referência (84).

das capacidades de previsão dos agentes, definida como $\phi(p)$, a utilizada em (84) foi $\phi(p) = \beta/2(1-p)^{\beta-1}$ com p definido no intervalo $p \in [\frac{1}{2}, 1]$.

A figura 26 mostra a probabilidade p_- , a fração η e a probabilidade q , todas essas variáveis em função de β . Em $\beta = 0$, a curva de baixo é p_- , a do meio η e a de cima q . O caso de β grande significa pouca heterogeneidade e $p_i \simeq 1/2$ para todos os agentes I . Isso significa que neste caso a probabilidade de uma previsão errada $p_- \simeq 1/2$ é grande; quase todos os agentes preferem utilizar a estratégia H ($\eta \rightarrow 1$); e o desempenho da população como um todo é baixo ($q \simeq 1/2$). Quando β diminui, o número de especialistas, isto é agentes com $p_i > \langle q \rangle$, aumenta. E desta maneira a performance da população como um todo também aumenta (q aumenta e p_- diminui). Este resultado é bastante interessante e sugere que é muito importante que os agentes que formam a população tenham características heterogêneas.

4.4 Aplicação em ferramentas de busca

As idéias por trás do modelo da previsão e do jogo da minoria que foram expostas até aqui podem nos servir como uma base de idéias para um grande número de situações além da abordagem social e econômica que foram apresentadas anteriormente. Uma aplicação de grande importância prática é o uso de agentes adaptivos para o refinamento na busca de informações na internet (85).

A quantidade de informação armazenada nas páginas da internet é enorme. Os mais eficientes algoritmos de busca utilizam um esquema de pontuação para classificar as páginas que ele exhibe, sempre na tentativa de retornar páginas que tragam conteúdo similar as palavras chaves fornecidas pelo usuário. Esta pontuação é o critério que determina que página deve ser exibida primeiro. O esquema de atribuir pontuação não é utilizado apenas pelos algoritmos de busca, sites de compras como o mercado livre, amazon, ebay, etc., onde os compradores podem observar a reputação dos vendedores, também utilizam um esquema similar.

4.5 Descrição do problema e modelo

Assim como no problema anterior, o modelo a ser estudado agora também se utiliza de conceitos da teoria dos jogos em uma população de agentes que interagem e se adaptam. Nesta aplicação veremos as estratégias como ferramentas de busca e o objetivo dos agentes é retornar o melhor resultado para um determinado conjunto de palavras chaves que tenham sido dadas como entrada. A idéia é utilizar agentes adaptivos para verificar em que condições eles podem propiciar um refinamento no resultado das buscas.

Antes de descrever o problema mais detalhadamente se faz necessário apresentar algumas definições e parâmetros que serão utilizados.

- D é a dimensão em que o problema está definido.
- Objetos são vetores unitários de dimensão D .
- Uma entrada \vec{q} é um objeto gerado aleatoriamente.
- N número de agentes.
- P designa o número de objetos e um conjunto de objetos.

- η fração de agentes que utilizam a estratégia G .
- R tamanho da lista privada de cada agente.
- S designa uma estratégia e o número de objetos escolhidos aleatoriamente por cada agente do tipo S no momento de sua busca.
- ϵ chance de um objeto ser substituído.

A cada passo de tempo, cada agente gera uma entrada \vec{q} . A partir daí os agentes irão procurar dentro de um universo P os objetos que mais se assemelhem com a entrada gerada⁴. Para isso eles dispõem de duas estratégias de busca: S e G .

Caso o agente utilize a estratégia S , a busca é feita da seguinte forma: ele escolhe aleatoriamente S elementos do universo P e então procura o elemento que mais se assemelha com \vec{q} . Esta procura é feita ao se escolher o elemento que maximiza a utilidade μ :

$$\mu_S(\vec{q}) = \max_{j \in S} \vec{q} \cdot \vec{O}_j, \quad (4.9)$$

onde \vec{O}_j é cada um dos S objetos escolhidos.

Cada agente tem uma lista privada com R elementos onde ficam armazenados os objetos que obtiveram as melhores utilidades μ . Se μ de um determinado vetor for maior que a menor utilidade presente na lista, este vetor substitui o de menor utilidade.

A outra estratégia disponível é chamada de G em referência a uma busca mais global como a feita pelo Google. Os agentes que a usam em vez de fazer uma busca sobre S elementos escolhidos aleatoriamente, fazem através das listas privadas dos demais agentes.

$$\mu_G(\vec{q}) = \max_{j \in G} \vec{q} \cdot \vec{O}_j, \quad (4.10)$$

onde G é um conjunto de objetos que contém todos os elementos presentes das listas privadas. $G = \cup_{i=1}^N R_i$.

A cada passo de tempo um vetor escolhido aleatoriamente pode ser substituído por um novo, isso ocorre com probabilidade ϵ . Este parâmetro é muito importante pois regula a taxa com que novos objetos surgem.

⁴O termo "universo P " se refere a um grande conjunto de vetores unitários em D dimensões e gerados aleatoriamente.

4.6 Resultados

O número de objetos conhecidos é definido como o número de objetos diferentes que estão presentes nas listas privadas, este conceito é o ponto chave deste modelo. A figura 27 mostra o número de objetos conhecidos em função do tempo. Podemos ver que após alguns passos de simulação o número de objetos conhecidos passa a ser constante, indicando que o sistema está em um regime estacionário.

As estratégias G e S têm características bem diferentes. Os agentes que utilizam S são responsáveis por “descobrir” novos objetos, são estes agentes que permitem o surgimento de novos elementos na lista dos objetos conhecidos. Já que suas buscas por objetos que maximizem a utilidade de uma dada entrada é feita em todo universo P . Enquanto que os agentes do tipo G fazem suas buscas nas listas privadas, desta forma eles não contribuem com o descobrimento de novos objetos. Se a maioria dos agentes utiliza a estratégia G então o número de objetos conhecidos é baixo e a chance de aparecerem novos objetos é remota. A figura 28 mostra a fração dos objetos que são conhecidos em função da fração η de jogadores que utilizam a estratégia G . Como esperado, conforme η aumenta o número de objetos conhecidos diminuem. A linha sólida é uma parábola e representa o melhor ajuste da curva.

Assim como fizemos no modelo da previsão, nesta aplicação para as ferramentas de busca o que pretendemos é: comparar a eficiência das estratégias que estão disponíveis aos agentes em função da fração da população que as usam. Para analisar a eficiência destas estratégias simulamos situações onde uma fração η da população utilizava G enquanto os demais usavam S para diferentes valores dos parâmetros. É intuitivo se pensar que a estratégia G deve ser mais eficiente em encontrar objetos com boas utilidades, porém veremos que isso nem sempre é verdade. A figura 29 mostra o gráfico da eficiência média das estratégias S e G em função de η obtidos em simulações onde os parâmetros escolhidos foram $D = 5$, $S = 10$ e $R = 3$. Podemos ver que a eficiência da estratégia S (círculos) se mantém constante para todos os valores de η e que suas flutuações são maiores quando η é grande, pois nesta região existem poucos agentes utilizando S . Ao analisar a estratégia G (triângulo) vimos que seu desempenho depende da fração η . Para valores de η pequenos a eficiência de G decai muito lentamente com η , se mantendo praticamente constante, porém quando $\eta \approx 1$ a eficiência de G começa a decair mais rapidamente. Em outras palavras nunca é possível se tornar a estratégia G mais eficiente simplesmente se aumentando a fração de jogadores que a utilizam. No caso da figura 29 temos que a estratégia G é mais eficiente que S para todos os valores da frações η .

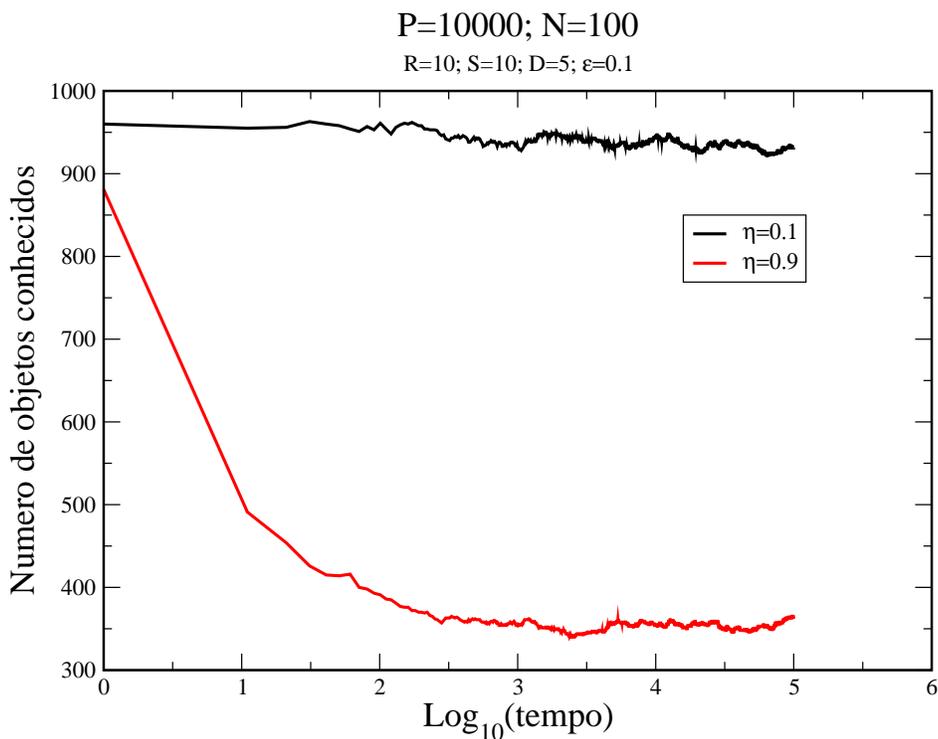


Figura 27: Número de objetos conhecidos em função do tempo para diferentes valores da fração η . Podemos ver que a partir de um certo estágio o número de objetos conhecidos fica constante indicando que o sistema atingiu um estado estacionário.

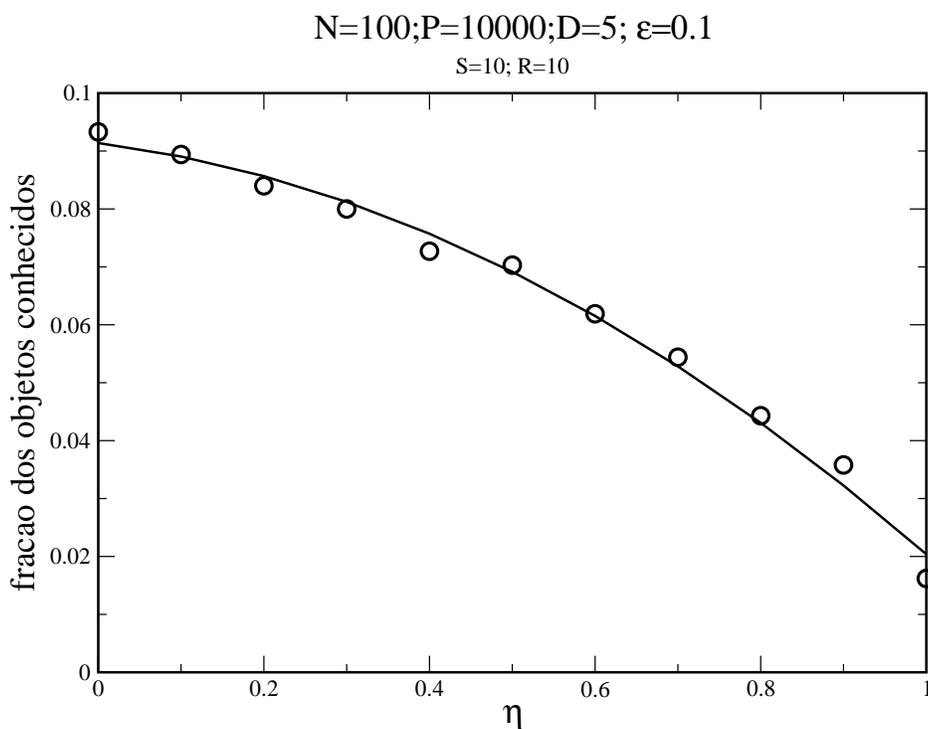


Figura 28: Número de objetos diferentes presentes nas listas privadas em função de η . Conforme η aumenta o número de objetos conhecidos diminui de maneira quadrática.

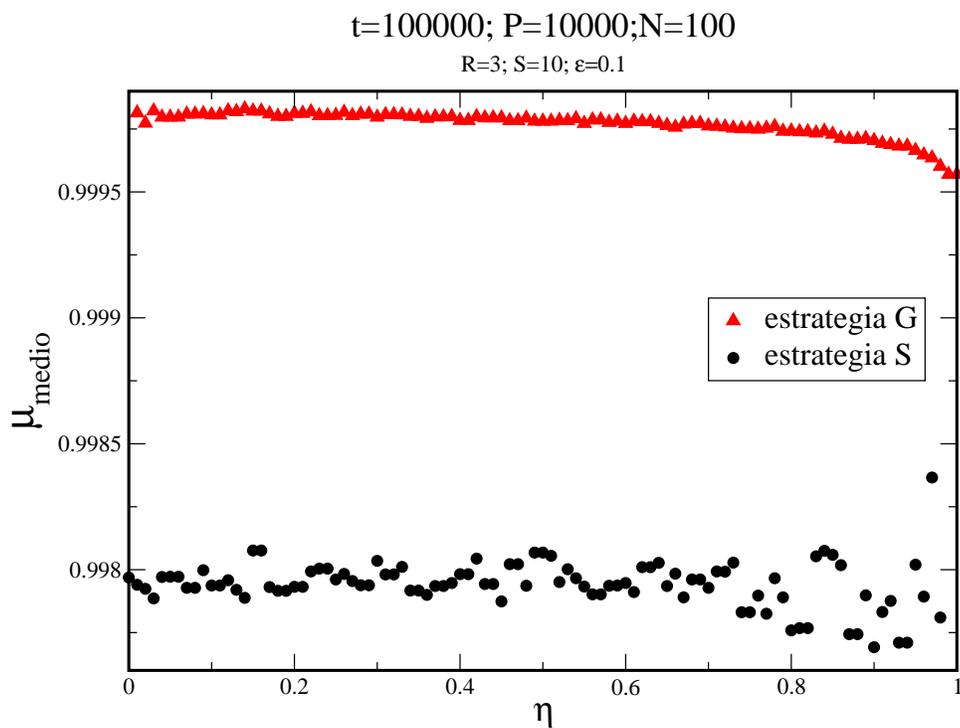


Figura 29: Utilidade média das eficiências dos vetores armazenados nas listas privadas tanto dos agentes que utilizam a estratégia S (círculos) e a estratégia G (triângulos) em função de η . Para valores de η grande a estratégia G tem uma leve diminuição na sua eficiência mas mesmo assim, a estratégia G é sempre mais eficiente do que S .

A probabilidade de um determinado objeto ser substituído pode ser escrita como

$$P_r \simeq \epsilon/P.$$

E a probabilidade de que um objeto entre para o universo dos objetos conhecidos é

$$P_d \simeq (1 - \eta)S/P.$$

É intuitivo se pensar que a estratégia S se torne mais eficiente quando $P_d \gg P_r$. Dessa forma, a estratégia S deve ser mais eficiente quando

$$(1 - \eta)S \gg \epsilon. \quad (4.11)$$

A figura 30 também mostra o gráfico da eficiência das estratégias S e G em função de η porém desta vez com os parâmetros $D = 5$, $S = 100$, $R = 3$ e $\epsilon = 0.1$. Para valores de η pequenos a eficiência G é sempre superior a S , porém acima de um determinado valor de η a eficiência de G começa a decair mais rapidamente e próximo a $\eta \approx 1$ a estratégia S passa a ser mais eficiente. Em outras palavras, se a grande maioria dos agentes se utiliza da estratégia G esta passa a ser bastante ineficiente e chega até mesmo a ter um desempenho inferior ao da estratégia S . Como já foi dito, o único mecanismo para que novos elementos apareçam nas listas privadas é através dos agentes S ou da probabilidade ϵ . Como em $\eta \approx 1$ há poucos agentes utilizando S então praticamente não surgem elementos novos nas listas e a estratégia G se torna pouco eficiente, pois suas buscas ficam sempre limitadas a serem feitas sobre os mesmos objetos.

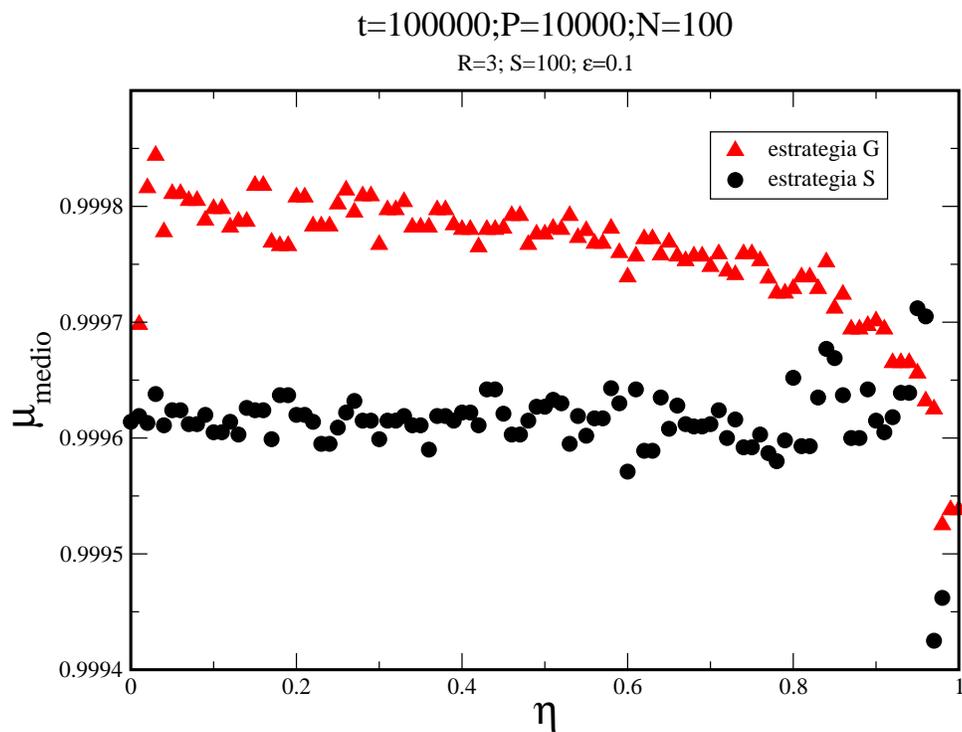


Figura 30: Utilidade média das eficiências dos vetores armazenados nas listas privadas tanto dos agentes que utilizam a estratégia S (círculos) quanto dos que utilizam a estratégia G (triângulos). Para este conjunto de parâmetro a estratégia S passa a ser mais eficiente do que G .

4.7 Conclusões e perspectivas

O modelo da previsão estudado aqui explora situações onde é (ou não) eficiente o uso de uma estratégia baseada apenas na informação privada (estratégia I). Assim como as situações onde a estratégia H que faz uso da informação dos outros agentes é mais eficiente. Vimos que o uso destas estratégias levam a fenômenos coletivos não triviais e a medida com que a fração η de jogadores H aumenta, o modelo exhibe uma transição de fase, para a qual acima de η_c há coexistência entre um estado onde quase toda a população faz a escolha correta e um outro estado onde a escolha errada é feita por quase todos, isso pode ser observado na figura 23. Quando uma pequena fração η dos agentes usam H , esta estratégia é bastante eficiente em agregar a informação que está dispersa entre os demais agentes. Isso faz com que a estratégia H passe a ser utilizada por quase toda a população, o que leva o sistema para uma região de coexistência onde a população como um todo ou adota o forecasting correto ou o errado. Isso indica que os agentes tendem muito mais a concordar entre si do que com o que eles pretendiam prever inicialmente.

O uso de idéias similares as do jogo da previsão também foram utilizadas em um modelo para as ferramentas de busca na internet. Neste caso as estratégias eram 2 mecanismos de busca enquanto que no jogo da previsão as estratégias foram: seguir a maioria ou seguir uma informação privada. Assim como no jogo da previsão, a aplicação nas ferramentas de busca também mostrou um rico cenário. Conforme variamos a fração de jogadores em uma dada estratégia podemos ter que uma estratégia passe a ser mais eficiente que a outra. Também verificamos que o número de objetos conhecidos é um ponto importante neste modelo. Para os dados utilizados, obtemos que seu comportamento é quadrático com a fração η . A análise feita até aqui com as ferramentas de busca é considerada estática de uma certa maneira. Pois não foi permitido aos agentes mudarem de estratégia de acordo com a sua conveniência. Estamos trabalhando no caso onde é permitido que os agentes possam se adaptar a situações através da mudança de estratégia e desta forma, o sistema alcançará um ponto onde os agentes não mais terão incentivos para mudar. O estudo do caso onde os agentes da população podem fazer a busca de uma maneira heterogênea, no sentido de se utilizar uma distribuição $\phi(S)$ para os agentes do tipo S ainda é uma alternativa a ser estudada. Além disso, uma outra possível continuação desse trabalho é utilização de vetores não unitários. Podemos atribuir ao módulo dos vetores-objetos alguma característica até então ausente. Como por exemplo incluir a idéia da quantidade de informação.

CONCLUSÃO

Analisamos nesta tese algumas manifestações coletivas que surgem em sistemas sócio-econômicos. Mais precisamente, investigamos essas manifestações nas eleições brasileiras de 1998 a 2006 e em jogos baseados em agentes adaptativos. Tais agentes pertencem a populações ou grupos sociais e interagem entre si e que têm a sua disposição as mais diversas informações sobre eventos que são importantes para o seu grupo como: candidatos a algum cargo eletivo, a qualidade de um restaurante e etc. Essa interação entre os agentes da população e/ou a informação disponível a eles desempenha um importante papel no comportamento macroscópico desses grupos sociais.

No sentido do que foi escrito acima, o processo eleitoral brasileiro nos dá um ótimo campo de estudos para o comportamento coletivo da sociedade. Isso porque temos um universo de mais de 100 milhões de eleitores que votam compulsoriamente. Assim temos enormes grupos sociais que participam de um mesmo evento (ou jogo). As escolhas feitas pelas pessoas nesse jogo obedecem a regras e estratégias não escritas. Contudo, o seu resultado apresenta propriedades ou regularidades estatísticas que são bastante peculiares.

Com relação à análise estatística que foi feita das eleições brasileiras, em particular para o resultado da votação para deputados estaduais dos anos de 1998, 2002 e 2006, podemos afirmar que a distribuição da fração de votos dos candidatos segue uma lei de potência $N(\nu) \propto \nu^\alpha$ com expoente $\alpha \approx -1.00$ para as regiões intermediárias de votos, seguido de um decaimento do tipo exponencial para a frequência dos candidatos muito bem votados. O curioso da comparação entre as três eleições é que a distribuição é exatamente a mesma para todas as eleições analisadas, independente do ano de sua realização. Além disso, esse comportamento também é universal com relação aos diferentes estados do país. Este resultado confirma a análise feita inicialmente por Costa Filho et al. (20) onde é mostrado uma universalidade na distribuição da fração de votos que é robusta e permanece nas eleições seguintes. O trabalho não revela nenhuma fórmula mágica para que um candidato seja bem sucedido numa campanha eleitoral. Contudo, o resultado mostra que o processo de escolha dos eleitores para votar num determinado candidato é simplesmente o produto de muitas sub-decisões. É importante mencionar que a lei de potência encontrada nesse trabalho também é vista em diversos fenômenos naturais, como

por exemplo, na relação entre a frequência dos terremotos e sua magnitude (terremotos mais fortes são menos freqüentes), ou na relação entre o tamanho e a frequência de deslizamento de terra ou erupções vulcânicas.

Depois do estudo das eleições proporcionais, passamos a analisar o resultado de uma eleição majoritária. Para isso utilizamos um modelo de quebra proposto por Derrida et al., para estudar especificamente o resultado das eleições municipais brasileiras de 2004. Verificamos que a lei de Duverger foi respeitada, ou seja, observamos que mesmo nos municípios onde três ou mais candidatos concorreram ao cargo de prefeito a disputa ficou, na maioria das vezes, apenas entre dois candidatos, e com uma disputa bem apertada entre eles. Utilizamos um modelo de quebra, que exclui completamente o efeito de qualquer tipo de voto estratégico, para tentar reproduzir os resultados reais desta eleição. O modelo de quebra utilizado por nós reproduz bem a forma das curvas dos histogramas dos desempenhos dos candidatos.

Porém, o modelo mostra uma discrepância com o resultado empírico quando tentamos reproduzir o resultado de eleições com três ou mais candidatos. Para que haja uma concordância é necessário adicionarmos um pequeno deslocamento nas curvas geradas pelo modelo de quebra. A nossa conclusão é que o modelo de Derrida não é capaz de mostrar o efeito do voto estratégico no processo eleitoral quando temos mais de dois candidatos. Mas ao mesmo tempo, essa incapacidade do modelo nos mostra um meio de se medir à quantidade de votos estratégicos que foi utilizado em uma dada eleição.

Além de uma análise do desempenho individual dos candidatos a deputado estadual, também investigamos o desempenho dos candidatos com relação aos demais candidatos de seu próprio partido, como sugerido por Castellano et al.. Esse tipo de análise é bastante relevante, pois sugere o quanto o partido influencia ou não na eleição de um candidato. Verificamos que a distribuição de votos, calculada levando em consideração uma espécie de coeficiente eleitoral, encontrada em alguns países europeus difere bastante da que observamos aqui no Brasil. A discordância ocorre principalmente para os candidatos com baixo desempenho. Este resultado é interessante, e pode ser usado para mensurar de que maneira as diferenças de natureza política/partidária entre estes países se manifestam nas eleições.

No sentido de fazer um estudo mais abrangente sobre o comportamento de grupos sociais utilizamos um modelo baseado em agentes adaptativos para duas situações distintas. Primeiro estudamos um jogo de previsão e em seguida fizemos uma aplicação desse jogo a um processo de busca na internet. Vimos que jogos como o jogo da minoria e o jogo da

previsão são uma ótima abordagem para se compreender melhor os fenômenos coletivos e o surgimento de regimes de cooperação entre os jogadores. Com o jogo da previsão concluímos que o desempenho da estratégia baseada na observação dos demais (estratégia H) é bastante eficiente quando uma fração η de agentes que a utilizam é pequena. Porém, quando η se aproxima de 1 o desempenho desta estratégia têm uma diminuição drástica, vindo a ser inclusive menos eficiente do que a estratégia que utiliza uma informação privada. Quando o jogo é jogado repetidamente e é permitido aos agentes se adaptarem mudando de estratégia conforme a conveniência, temos que o sistema se auto organiza em um equilíbrio de Nash em $\eta^* \approx 1$ onde os agentes não têm mais incentivo para mudar de estratégia. Com os parâmetros utilizados observamos que este equilíbrio é alcançado quando quase todos os jogadores jogam H (uma fração η^*), e uma fração $1 - \eta^* \approx N^{-1/2}$ jogam I . Nesta região a população como um todo escolhe a previsão errada com probabilidade $1 - p$, como se fosse um único indivíduo tentando prever o evento através da estratégia I . Quando $p \approx 1/2$ temos que p_- é uma probabilidade significativamente alta. Outra conclusão importante com o jogo da previsão é que quando há pouca heterogeneidade entre os elementos da população, a probabilidade de uma previsão errada $p_- \simeq 1/2$ é grande; a fração de agentes utilizando H é alta $\eta^* \rightarrow 1$; e a probabilidade de uma previsão correta é $q \simeq 1/2$. Já quando há muita heterogeneidade entre os agentes, o número de agentes especialistas aumenta e o desempenho da população como um todo também aumenta (q aumenta e p_- diminui).

A aplicação de agentes para o refinamento do resultado promovido por sites de busca é uma importante aplicação tecnológica. Vimos que dentre as duas estratégias de busca disponíveis no modelo (S e G), dependendo da fração η de agentes utilizando G temos que uma estratégia pode ser mais eficiente que a outra. Apenas quando a fração de agentes usando G é grande, é quando a estratégia S é mais eficiente.

O comportamento individual de elementos que formam um grupo social não é suficiente para prever o surgimento de características observadas macroscopicamente, da mesma forma que não se procura encontrar estas características ao estudar o comportamento isolado de um átomo ou de uma molécula em um gás. Contudo, quando fazemos um estudo do comportamento médio de um grupo de átomos ou moléculas, conseguimos através das técnicas de mecânica estatística obter uma boa previsão do comportamento das propriedades macroscópicas desse sistema físico. O principal resultado desse trabalho é o de mostrar que algo semelhante pode ser feito no plano social. O comportamento do indivíduo isolado não é estudado, mas sim a sua interação com os outros elementos de seu grupo. Em resumo, mostramos que alguns comportamentos de grupos sociais podem

ser analisados através de técnicas da mecânica estatística.

APÊNDICE A – Obtenção das equações que regem o modelo da predição

A.1 Introdução

Neste apêndice, a partir de um cálculo do tipo campo médio, utilizando-se de uma função de informação a respeito do número de pontos fixos alcançados e de algumas propriedades da função delta de Dirac irei obter as equações que regem o modelo da predição, equações 4.4 e 4.5. Apesar de ser um cálculo um pouco extenso ele não é difícil de ser compreendido e pode facilmente ser adaptado para uma grande variedade de modelos.

A.2 Cálculos

A opção S_i de cada agente é dada por

$$S_i = \operatorname{sgn} \left(\sum_{j \in G_i} S_j \right) \quad \forall i \in H \quad (\text{A.1})$$

$$S_i = +1 \quad c.p. \quad p \quad \forall i \in I \quad (\text{A.2})$$

Com $S_j = \pm 1$. A soma se estende a todos os agentes pertencentes ao grupo dos vizinhos G_i do agente i . Desta forma podemos definir uma função informação para os agentes H

$$I\{S_i\}_{i \in H} = I_H = \prod_{i \in H} \Theta \left(S_i \sum_{j \in G_i} S_j \right) \quad (\text{A.3})$$

onde $\Theta(x)$ é a função degrau de Heaviside definida como

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > \theta, \\ 0 & \text{se } x < \theta. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

No caso do modelo da predição

$$\Theta\left(S_i \sum_{j \in G_i} S_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{se o agente } i \text{ alcançou um ponto fixo,} \\ 0 & \text{caso não.} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Já para os agentes que usam a informao privada

$$I\{S_i\}_{i \in I} = I_I = \prod_{i \in I} \left[p \frac{S_i + 1}{2} + (1 - p) \frac{1 - S_i}{2} \right] \quad (\text{A.6})$$

ou

$$I_I = \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1 - 2p}{2} S_i \right] \quad (\text{A.7})$$

Podemos definir o número médio de agentes que alcançaram um ponto fixo como

$$\mathcal{N} = \langle \text{Tr}_S I_H I_I \rangle_K. \quad (\text{A.8})$$

Definindo a variável g_i relativa a vizinhança do jogador i como

$$g_i = \sum_{j \in G_i} S_j \quad (\text{A.9})$$

ao introduzir um traço da funo delta de Dirac podemos escrever a equao A.3 da seguinte forma

$$I_H = \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \delta_{g_i, \sum_{j \in G_i} S_j} \right] \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\text{Tr}_g = \sum_{g_1 = -k}^k \cdots \sum_{g_N = -k}^k, \quad (\text{A.11})$$

e desta forma o número médio de pontos fixos alcançados A.8 fica

$$\mathcal{N} = \left\langle \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \delta_{g_i, \sum_{j \in G_i} S_j} \right] \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1 - 2p}{2} S_i \right] \right\rangle_K \quad (\text{A.12})$$

Usando a seguinte propriedade da delta de Dirac

$$\delta_{g_i, \sum_{j \in G_i} S_j} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} e^{iz_i(g_i - \sum_{j \in G_i} S_j)}, \quad (\text{A.13})$$

têm-se

$$\mathcal{N} = \left\langle \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} e^{iz_i g_i} e^{-iz_i \sum_{j \in G_i} S_j} \right] \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S_i \right] \right\rangle_K. \quad (\text{A.14})$$

A segunda exponencial no kernel da integral é onde está descrita a aleatoriedade nas conexões dos vizinhos dos agentes H . Esta aleatoriedade pode ser decomposta como

$$\sum_{j \in G_i} S_j = \sum_{j=1}^N a_{ij} S_j \quad (\text{A.15})$$

onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ está conectado a um agente } j \in G_i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Já que todos os agentes do tipo H têm um número fixo k de vizinhos, podemos dizer que a distribuição da probabilidade dos a_{ij} é

$$P(\{a_{ij}\}) \propto \delta_{\sum_{j=1}^N a_{ij}, k} \quad (\text{A.17})$$

Para tornar explícito a dependência das variáveis aleatórias a_{ij} na equação do número de pontos fixos, iremos mais uma vez utilizar a propriedade da função delta e introduzir mais uma integral, desta vez em y , isto é,

$$P(\{a_{ij}\}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{iy_i(\sum_{j=1}^N a_{ij} - k)}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{N} = \left\langle \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{iz_i g_i} e^{-i \sum_{j=1}^N z_i a_{ij} S_j} e^{iy_i(\sum_{j=1}^N a_{ij} - k)} \right] \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S_i \right] \right\rangle_K.$$

$$\mathcal{N} = \left\langle \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{iz_i g_i} e^{-iy_i k} e^{-i \sum_{j=1}^N (z_i S_j - y_i) a_{ij}} \right] \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S_i \right] \right\rangle_K. \quad (\text{A.19})$$

Aqui, a exponencial do integrando se torna um produto,

$$e^{-i \sum_{j=1}^N (z_i S_j - y_i) a_{ij}} = \prod_j e^{-i(z_i S_j - y_i) a_{ij}}, \quad (\text{A.20})$$

e desta forma podemos tirar a média apenas do termo contendo a aleatoriedade a_{ij} :

$$\mathcal{N} = \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{iz_i g_i - iy_i k} \prod_j \langle e^{-i(z_i S_j - y_i) a_{ij}} \rangle_K \right] \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S_i \right]. \quad (\text{A.21})$$

Lidando com a desordem através de um cálculo do tipo campo médio

$$\gamma = \prod_j \langle e^{-i(z_i S_j - y_i) a_{ij}} \rangle_k. \quad (\text{A.22})$$

As variáveis a_{ij} podem assumir valores 0 ou 1. A chance de um par estar conectado ($a_{ij} = 1$) é proporcional a k/N enquanto a probabilidade de não existir conexão entre i e j ($a_{ij} = 0$) é $1 - k/N$, desta forma a média pode ser aproximada como:

$$\begin{aligned} \gamma &= \prod_j \left(1 - \frac{k}{N} + \frac{k}{N} e^{-i(z_i S_j - y_i)} \right) \\ &\simeq e^{\sum_j \left(-\frac{k}{N} + \frac{k}{N} e^{-i(z_i S_j - y_i)} \right)} \\ &\simeq e^{-k + k e^{iy_i} \frac{1}{N} \sum_j e^{-iz_i S_j}} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\mathcal{N} = \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{iz_i g_i - iy_i k - k + k e^{iy_i} \frac{1}{N} \sum_j e^{-iz_i S_j}} \right] \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S_i \right]. \quad (\text{A.24})$$

O último termo da exponencial que aparece no integrando pode ser associado com o parâmetro $\phi(z_i)$ definido como

$$\phi(z_i) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-iz_i S_j}. \quad (\text{A.25})$$

Sabendo que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi_i}{2\pi} \delta \left(\phi_i - \frac{1}{N} \sum_j e^{-iz_i S_j} \right) = 1 \quad (\text{A.26})$$

podemos introduzir esta expressão na equação do número de pontos fixos

$$\mathcal{N} = \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi_i}{2\pi} \delta \left(\phi_i - \frac{1}{N} \sum_j e^{-iz_i S_j} \right) e^{iz_i g_i - iy_i k - k + k e^{iy_i} \frac{1}{N} \sum_j e^{-iz_i S_j}} \right] I_I. \quad (\text{A.27})$$

e daí

$$\mathcal{N} = \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{iz_i g_i - iy_i k - k + k e^{iy_i \phi(z_i)}} \right] \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S_i \right]. \quad (\text{A.28})$$

Para resolver a integral em y devemos reorganizar a equação A.28 da seguinte forma

$$\mathcal{N} = \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} e^{-k} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} e^{iz_i g_i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{-iy_i k + k e^{iy_i \phi(z_i)}} \right] \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S_i \right]. \quad (\text{A.29})$$

Devemos resolver inicialmente

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{-iy_i k + k e^{iy_i \phi(z_i)}} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{-iy_i k} e^{k e^{iy_i \phi(z_i)}} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

usando a expansão

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{A.31})$$

teremos

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{-iy_i k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[k \phi(z_i) e^{iy_i}]^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n \phi(z_i)^n}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{-iy_i k} e^{iny_i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n \phi(z_i)^n}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{iy_i(n-k)} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

e

$$\delta(n-k) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dy_i}{2\pi} e^{iy_i(n-k)} \quad (\text{A.33})$$

A integral em y_i se resume a

$$\Gamma = \frac{k^k \phi(z_i)^k}{k!} \quad (\text{A.34})$$

e desta forma

$$\mathcal{N} = \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \frac{e^{-k} k^k}{k!} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} e^{iz_i g_i} \phi(z_i)^k \right] \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S_i \right]. \quad (\text{A.35})$$

Utilizando a relação trigonométrica

$$e^{-iz_i S_j} = \cos z_i - i S_j \sin z_i, \quad (\text{A.36})$$

podemos reescrever $\phi(z_i)$ da seguinte forma

$$\phi(z_i) = \frac{1}{N} \sum_j e^{-iz_i S_j} = \cos z_i - i \frac{1}{N} \sum_j S_j \sin z_i \quad (\text{A.37})$$

Definindo um novo parâmetro

$$m \equiv \frac{1}{N} \sum_j S_j \quad (\text{A.38})$$

para poder resolver a integral em z , temos

$$\int_{-1}^1 dm \delta \left(m - \frac{1}{N} \sum_j S_j \right) = 1 \quad (\text{A.39})$$

e daí

$$\mathcal{N} = \left(\frac{e^{-k} k^k}{k!} \right)^{\eta N} \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-1}^1 dm \delta \left(m - \frac{1}{N} \sum_j S_j \right) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} e^{iz_i g_i} [\cos z_i - im \sin z_i]^k \right] I_I. \quad (\text{A.40})$$

Utilizando as seguintes propriedades da função delta de Dirac

$$\delta \left(m - \frac{1}{N} \sum_j S_j \right) = N \delta \left(Nm - \sum_j S_j \right) \quad (\text{A.41})$$

$$\delta \left(m - \frac{1}{N} \sum_j S_j \right) = N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{m}}{2\pi} e^{iNm\hat{m}} e^{-i\hat{m} \sum_j S_j}, \quad (\text{A.42})$$

temos

$$\mathcal{N} = \left(\frac{e^{-k} k^k}{k!} N \right)^{\eta N} \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \left[\Theta(S_i g_i) \int_{-1}^1 dm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{m}}{2\pi} e^{iNm\hat{m}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} e^{iz_i g_i} [\cos z_i - im \sin z_i]^k \right] e^{-i\hat{m} \sum_j S_j} I_I. \quad (\text{A.43})$$

Usando a identidade trigonométrica

$$[\cos z_i - im \sin z_i]^k = \left[e^{iz_i} \left(\frac{1-m}{2} \right) + e^{-iz_i} \left(\frac{1+m}{2} \right) \right]^k, \quad (\text{A.44})$$

a integral em z se torna

$$\Delta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} e^{iz_i g_i} \left[e^{iz_i} \left(\frac{1-m}{2} \right) + e^{-iz_i} \left(\frac{1+m}{2} \right) \right]^k. \quad (\text{A.45})$$

Levando em conta a expansão binomial

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k} \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned} \left[e^{-iz_i} \left(\frac{1+m}{2} \right) + e^{iz_i} \left(\frac{1-m}{2} \right) \right]^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[e^{-iz_i} \left(\frac{1+m}{2} \right) \right]^j \left[e^{iz_i} \left(\frac{1-m}{2} \right) \right]^{(k-j)} \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[\left(\frac{1+m}{2} \right) \right]^j \left[\left(\frac{1-m}{2} \right) \right]^{k-j} e^{-iz_i j} e^{iz_i (k-j)}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{j_i=0}^k \binom{k}{j_i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} e^{iz_i g_i} e^{iz_i (k-2j_i)} \left(\frac{1+m}{2} \right)^{j_i} \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j_i} \\ &= \sum_{j_i=0}^k \binom{k}{j_i} \left(\frac{1+m}{2} \right)^{j_i} \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j_i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dz_i}{2\pi} e^{iz_i [g_i - (2j_i - k)]} \\ &= \sum_{j_i=0}^k \binom{k}{j_i} \left(\frac{1+m}{2} \right)^{j_i} \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j_i} \delta [g_i - (2j_i - k)]. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Assim,

$$\mathcal{N} = A \int_{-1}^1 dm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{m}}{2\pi} e^{iN m \hat{m}} \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \Theta(S_i g_i) \sum_{j_i=0}^k \binom{k}{j_i} \left(\frac{1+m}{2} \right)^{j_i} \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j_i} \delta [g_i, (2j_i - k)] e^{-i\hat{m} \sum_j S_j I_I}. \quad (\text{A.48})$$

onde

$$A \equiv \left(\frac{e^{-k} k^k}{k!} N \right)^{\eta N} \quad (\text{A.49})$$

e usando ainda

$$\beta(g_i) \equiv \sum_{j_i=0}^k \binom{k}{j_i} \left(\frac{1+m}{2} \right)^{j_i} \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j_i} \delta [g_i, (2j_i - k)] \quad (\text{A.50})$$

teremos

$$\mathcal{N} = A \int_{-1}^1 dm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{m}}{2\pi} e^{iN m \hat{m}} \text{Tr}_S \text{Tr}_g \prod_{i \in H} \Theta(S_i g_i) \beta(g_i) e^{-i\hat{m} \sum_j S_j} \prod_{i \in I} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S_i \right]. \quad (\text{A.51})$$

Explicitando os traços e fazendo o produto dos dois grupos.

$$\mathcal{N} = A \int_{-1}^1 dm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{m}}{2\pi} e^{iNm\hat{m}} \left[\sum_{S=\pm 1} \sum_{g=-k}^k \Theta(Sg) \beta(g_i) e^{-i\hat{m}S} \right]^{\eta N} \left\{ \sum_{S=\pm 1} e^{-i\hat{m}S} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S \right] \right\}^{(1-\eta)N}. \quad (\text{A.52})$$

$$\mathcal{N} = A \int_{-1}^1 dm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{m}}{2\pi} e^{iNm\hat{m}} A_1 A_2. \quad (\text{A.53})$$

onde

$$A_1 \equiv \left[\sum_{S=\pm 1} \sum_{g=-k}^k \Theta(Sg) \beta(g_i) e^{-i\hat{m}S} \right]^{\eta N} \quad (\text{A.54})$$

e

$$A_2 \equiv \left\{ \sum_{S=\pm 1} e^{-i\hat{m}S} \left[\frac{1}{2} - \frac{1-2p}{2} S \right] \right\}^{(1-\eta)N} \quad (\text{A.55})$$

Por sua vez,

$$A_1 = \left[\sum_{S=\pm 1} \sum_{g=-k}^k \Theta(Sg) \sum_{j_i=0}^k \binom{k}{j_i} \left(\frac{1+m}{2} \right)^{j_i} \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j_i} \delta [g_i, (2j_i - k)] e^{-i\hat{m}S} \right]^{\eta N} \quad (\text{A.56})$$

$$A_1 = \left[\sum_{S=\pm 1} \sum_{j=0}^k \Theta(S(2j - k)) \binom{k}{j} \left(\frac{1+m}{2} \right)^j \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j} e^{-i\hat{m}S} \right]^{\eta N}, \quad (\text{A.57})$$

e fazendo a soma em S

$$A_1 = \left[\sum_{j>k/2}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1+m}{2} \right)^j \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j} e^{-i\hat{m}} + \sum_{j<k/2}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1+m}{2} \right)^j \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j} e^{i\hat{m}} \right]^{\eta N}$$

$$A_1 = \left\{ \sum_{j>k/2}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1+m}{2} \right)^j \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j} e^{-i\hat{m}} + \left[1 - \sum_{j>k/2}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1+m}{2} \right)^j \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j} \right] e^{i\hat{m}} \right\}^{\eta N}$$

$$A_1 = \left[e^{i\hat{m}} - 2i \sin \hat{m} \sum_{j>k/2}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1+m}{2} \right)^j \left(\frac{1-m}{2} \right)^{k-j} \right]^{\eta N}. \quad (\text{A.58})$$

para a soma em S em A_2 , teremos

$$\begin{aligned}
A_2 &= [e^{-i\hat{m}p} + e^{i\hat{m}(1-p)}]^{(1-\eta)N} \\
&= [\cos \hat{m}p - i \sin \hat{m}p + \cos \hat{m}(1-p) + i \sin \hat{m}(1-p)]^{(1-\eta)N} \\
&= [\cos \hat{m} - i(2p-1) \sin \hat{m}]^{(1-\eta)N}.
\end{aligned} \tag{A.59}$$

Reescrevendo A_1 e A_2 como

$$A_1 = e^{\log \left\{ \left[e^{i\hat{m} - 2i \sin \hat{m} \sum_{j>k/2}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1+m}{2}\right)^j \left(\frac{1-m}{2}\right)^{k-j} \right]^{\eta N} \right\}} \tag{A.60}$$

e

$$A_2 = e^{\log \left\{ [\cos \hat{m} - i(2p-1) \sin \hat{m}]^{(1-\eta)N} \right\}}, \tag{A.61}$$

a expressão final para o número médio de pontos fixos $\langle \mathcal{N} \rangle$ é

$$\langle \mathcal{N} \rangle = \int_{-1}^1 dm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{m}}{2\pi} e^{NF(m, \hat{m})}, \tag{A.62}$$

onde $F(m, \hat{m})$ é dado por

$$F(m, \hat{m}) = \log A + \log A_1 + \log A_2 + im\hat{m}$$

$$\begin{aligned}
F(m, \hat{m}) &= \eta \log \left(\frac{e^{-k} k^k}{k!} N \right) + \eta \log \left[e^{i\hat{m} - 2i \sin \hat{m} \sum_{j>k/2}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1+m}{2}\right)^j \left(\frac{1-m}{2}\right)^{k-j} \right] \\
&\quad + (1-\eta) \log [\cos \hat{m} - i(2p-1) \sin \hat{m}] + im\hat{m}
\end{aligned}$$

$$F(m, \hat{m}) = \eta \log \left(\frac{e^{-k} k^k}{k!} N \right) + \eta \log [e^{i\hat{m} - 2i \sin \hat{m} \Phi(m)}] + (1-\eta) \log [\cos \hat{m} - i(2p-1) \sin \hat{m}] + im\hat{m} \tag{A.63}$$

Forçando as condições

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 0 \tag{A.64}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{m}} = 0 \quad (\text{A.65})$$

temos

$$\frac{\partial F}{\partial m} = i\hat{m} + \eta \frac{-2i \sin \hat{m} \Phi'(m)}{e^{i\hat{m}} - 2i \sin \hat{m} \Phi(m)} = 0 \quad (\text{A.66})$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{m}} = im + \eta \frac{ie^{i\hat{m}} - 2i \cos \hat{m} \Phi(m)}{e^{i\hat{m}} - 2i \sin \hat{m} \Phi(m)} + (1 - \eta) \frac{-\sin \hat{m} - i(2p - 1) \cos \hat{m}}{\cos \hat{m} - i(2p - 1) \sin \hat{m}} = 0. \quad (\text{A.67})$$

Uma solução trivial da Eq.A.66 é $\hat{m} = 0$. Substituindo isso na equação para m , teremos:

$$im + \eta(i - 2i\Phi(m)) - i(1 - \eta)(2p - 1) = 0, \quad (\text{A.68})$$

$$m = \eta(2\Phi(m) - 1) + (1 - \eta)(2p - 1) \quad (\text{A.69})$$

ou ainda

$$\frac{m + 1}{2} = p(\eta - 1) + \Phi(m)\eta. \quad (\text{A.70})$$

Se usarmos $q = \Phi(m)$ e

$$\pi = \frac{m + 1}{2} \quad (\text{A.71})$$

obtemos o par de equações

$$\pi = p(\eta - 1) + q\eta \quad (\text{A.72})$$

e

$$q = \sum_{j > k/2}^k \binom{k}{j} (\pi)^j (1 - \pi)^{k-j}, \quad (\text{A.73})$$

que são as 4.4 e 4.5.

APÊNDICE B – Funções homogêneas, leis de potência, processos multiplicativos e criticalidade auto-organizada

B.1 Funções homogêneas

As funções homogêneas apresentam um comportamento de escala que é claramente identificado na sua definição. Uma função é dita homogênea se ela exhibe a seguinte propriedade

$$f(\lambda x) = g(\lambda)f(x).$$

Estas funções têm a característica de que sendo conhecido o seu valor em um ponto $f(x_0)$ e sabendo a forma da função $g(\lambda)$, podemos conhecer o seu valor em qualquer ponto x , já que através de uma mudança de escala podemos escrever x como λx_0 .

Para verificar a forma matemática da função $g(\lambda)$ vamos considerar duas transformações,

$$f(\lambda(\mu x)) = g(\lambda)f(\mu x) = g(\lambda)g(\mu)f(x). \quad (\text{B.1})$$

O mesmo pode ser obtido considerando uma única transformação,

$$f((\lambda\mu)x) = g(\lambda\mu)f(x). \quad (\text{B.2})$$

Isto implica que

$$g(\lambda\mu) = g(\lambda)g(\mu), \quad (\text{B.3})$$

deste modo, a função $g(\lambda)$ deve ter a forma de uma lei de potência,

$$g(\lambda) = \lambda^\alpha, \quad (\text{B.4})$$

onde o parâmetro α define o grau da homogeneidade (11).

Funções homogêneas são utilizadas para descrever transições de fase na termodinâmica. A hipótese de escala de Widom supõe que a energia livre de Helmholtz $F(T)$ é uma função deste tipo (11). Essa suposição implica que outros potenciais termodinâmicos também são funções homogêneas. A energia livre de Helmholtz escala da seguinte forma

$$F_c(\lambda t) = \lambda^{(2-\alpha)} F_c(t), \quad (\text{B.5})$$

onde t é a temperatura reduzida, $t \equiv |T_c - T|/T_c$, sendo T_c a temperatura crítica.

Se o fator de escala λ for do tipo

$$\lambda = \frac{1}{t}, \quad (\text{B.6})$$

teremos

$$F_c(t) = t^{(2-\alpha)} F_c(1). \quad (\text{B.7})$$

Uma propriedade macroscópica importante de um sistema físico é o calor específico, esta propriedade é uma função do potencial termodinâmico F ,

$$C = -T \partial^2 F / \partial t^2. \quad (\text{B.8})$$

Para temperaturas próximas da temperatura crítica ($T \rightarrow T_c$) teremos que o calor específico escala da seguinte forma

$$C \propto t^{-\alpha}. \quad (\text{B.9})$$

Apesar deste resultado ter sido obtido com o uso da hipótese que os potenciais termodinâmicos são funções homogêneas, ele é rigorosamente confirmado por experimentos (86). Além disso, comportamentos de escala desta mesma natureza também são observados na teoria da percolação (87), onde existe uma probabilidade crítica para o qual o sistema sofre uma transição.

B.2 Lei de potência

George Kingsley Zipf (88), comparou a população de cidades e chegou a uma lei muito interessante. Ao classificar as cidades de acordo com sua população, ele observou que a população da segunda maior cidade era 1/2 da maior, enquanto a terceira maior tinha

1/3, a quarta 1/4 e assim por diante, ou seja,

$$P(n) \propto \frac{1}{n}.$$

Após o trabalho de Zipf, foram muitos os que nas mais diversas áreas mostraram processos que também exibiam uma distribuição do tipo lei de potência (89).

B.2.1 Processos multiplicativos

Em algumas distribuições que envolvem variáveis independentes, é comum ver uma mudança de comportamento na distribuição dessas variáveis. Em alguns casos, na região onde isso acontece a distribuição apresenta um comportamento do tipo lei de potência. Para explicar esse comportamento, suponha que inicialmente tenhamos um distribuição $g(x/\bar{x})$ do tipo normal, onde \bar{x} é o valor médio de x , excluído a contribuição da região onde a distribuição têm um comportamento anômalo. Se um evento (uma amplificação) ocorre com uma probabilidade p , de tal modo que o novo valor médio seja $N\bar{x}$, isto resulta em uma nova distribuição, $g(\xi)d\xi \rightarrow g(\xi/N)d\xi/N$, onde $\xi \equiv x/\bar{x}$. Se uma nova amplificação ocorre, esta tem probabilidade p^2 e o novo valor médio \bar{x} é $N^2\bar{x}$. A distribuição após algumas destas amplificações é dada por (45)

$$G(\xi) = (1 - p) \left(g(\xi) + \frac{p}{N}g(\xi/N) + \frac{p^2}{N^2}g(\xi/N^2) + \dots \right). \quad (\text{B.10})$$

Esta equação pode ser escrita de uma forma recursiva,

$$G(\xi) = (1 - p)g(\xi) + \frac{p}{N}G\left(\frac{\xi}{N}\right). \quad (\text{B.11})$$

Se a probabilidade $p \rightarrow 0$ não há nenhuma amplificação e $G(\xi) \rightarrow g(\xi)$. Se a probabilidade p é pequena e a amplificação é considerável, o segundo termo da equação (B.11) pode ser desprezado de modo que $G(\xi) \rightarrow g(\xi)$. Porém, se ξ é grande, isto é, houve uma grande ampliação, $g(\xi) \rightarrow 0$. Se considerarmos que este decaimento é mais rápido do que o de $G(\xi)$ teremos que o comportamento assintótico de $G(\xi)$ tem uma forma de escala do tipo

$$G(\xi) = \frac{p}{N}G(\xi/N). \quad (\text{B.12})$$

Se considerarmos que a solução desta equação é da forma

$$G(\xi) = \frac{A(\xi)}{\xi^{\mu+1}}, \quad (\text{B.13})$$

onde $\mu \equiv \ln(1/p)/\ln(N)$ e $A(\xi) = A(\xi/N)$ isto é, $A(\xi)$ é uma função oscilatória.

Processos desta natureza dão uma dica a respeito da dinâmica que leva a distribuições do tipo lei de potência.

B.2.2 Criticalidade auto-organizada

Per Bak (90) propôs que alguns sistemas de forma espontânea, isto é, sem o ajuste de nenhum parâmetro, tendem para um estado crítico que é caracterizado por apresentar correlação de longo alcance, tanto espacial quanto temporal, ou seja, uma pequena modificação no sistema pode gerar perturbações suficientes para tirar o sistema do seu equilíbrio. Ele chamou esta propriedade de criticalidade auto-organizada (*self-organized criticality*).

O exemplo utilizado por Bak foi o de avalanches em pilhas de areia. Ele verificou que quando a inclinação de uma pilha de areia atinge um valor maior ou igual que um valor crítico θ_c , ocorrem de forma espontânea avalanches. Essas avalanches reduzem o a inclinação da pilha de areia até ela atingir o valor crítico novamente. O tamanho de uma avalanche é quantificado pelo número de grãos que participaram desta. Para inclinações próximas de θ_c , é verificado que o tamanho das avalanches obedece uma lei de potência do tipo $A(g) \sim g^\alpha$ (90).

Mais uma vez encontramos um modelo que apresenta uma distribuição do tipo lei de potência. Como na subseção anterior, temos outro modelo que pode ser utilizado para explicar os resultados encontrados nas estatísticas das eleições.

Referências

- 1 DURLAUF, S. N. How can statistical mechanics contribute to social science? *Proceedings of the National Academy of Science*, v. 96, n. 19, p. 10582–10584, 1999.
- 2 MARTINO, A. D.; MARSILI, M. Statistical mechanics of socio-economic systems with heterogeneous agents. *Journal of Physics A - Mathematical and General*, v. 39, n. 43, p. R465–R540, 2006.
- 3 HELBING, D. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of Modern Physics*, v. 73, n. 4, p. 1067–1141, 2001.
- 4 HELBING, D.; FARKAS, I.; VICSEK, T. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, v. 407, n. 6803, p. 487–490, 2000.
- 5 TONER, J.; TU, Y. H. Long-range order in a 2-dimensional dynamical xy model - how birds fly together. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 23, p. 4326–4329, 1995.
- 6 TONER, J.; TU, Y. H. Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking. *Physical Review E*, v. 58, n. 4, p. 4828–4858, 1998.
- 7 NEWMAN, M. E. J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, v. 45, n. 2, p. 167–256, 2003.
- 8 STANLEY, H. E.; AMARAL, L. A. N.; CANNING, D.; GOPIKRISHNAN, P.; LEE, Y.; LIU, Y. Econophysics: Can physicists contribute to the science of economics? *Physica A*, v. 269, p. 156–169, 1999.
- 9 MEYER, D. A.; BROWN, T. A. Statistical mechanics of voting. *Physical Review Letters*, v. 81, n. 8, p. 1718–1721, 1998.
- 10 CARBONE, A.; KANIADAKIS, G.; SCARFONE, A. M. Tails and ties - editorial: Topical issue on physics in society. *European Physical Journal B*, v. 57, n. 2, p. 121–125, 2007.
- 11 STANLEY, H. E. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. First edition. London: Oxford University Press, 1971.
- 12 BINNEY, J. J.; DOWRICK, N. J.; FISHER, A. J.; NEWMAN, M. E. J. *The Theory of Critical Phenomena: An Introduction to the Renormalization Group*. First edition. Oxford: Clarendon Press, 1992.
- 13 FISCHER, K. H.; HERTZ, J. A. *Spin Glasses*. First edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- 14 MEZARD, M.; PARISI, G.; VIRASORO, M. *Spin Glass Theory and Beyond*. First edition. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1987.

- 15 BAXTER, R. J. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. First edition. USA: Academic Press, 1982.
- 16 NEWMAN, M. E. J.; BARKEMA, G. T. *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. First edition. USA: Oxford University Press, 1999.
- 17 MARSILI, M. Toy models and stylized realities. *European Physical Journal B*, v. 55, n. 2, p. 169–173, Jan 2007.
- 18 ARTHUR, W. B. Inductive reasoning and bounded rationality. *American Economic Review*, v. 84, n. 2, p. 406–411, 1994.
- 19 FARMER, J. D.; PATELLI, P.; ZOVKO, I. I. The predictive power of zero intelligence in financial markets. *Proceedings of the National Academy of Science*, v. 102, n. 11, p. 2254–2259, 2005.
- 20 COSTA, R. N.; ALMEIDA, M. P.; ANDRADE, J. S.; MOREIRA, J. E. Scaling behavior in a proportional voting process. *Physical Review E*, v. 60, n. 1, p. 1067–1068, 1999.
- 21 COSTA, R. N.; ALMEIDA, M. P.; ANDRADE, J. S. Brazilian elections: voting for a scaling democracy. *Physica A*, v. 322, n. 1-4, p. 698–700, 2003.
- 22 ARARIPE, L. E.; COSTA, R. N.; HERRMANN, H. J.; ANDRADE, J. S. Plurality voting: The statistical laws of democracy in Brazil. *International Journal of Modern Physics C*, v. 17, n. 12, p. 1809–1813, 2006.
- 23 SAARI, D. G. *Decisions and Elections: Explaining the unexpected*. First edition. USA: Cambridge University Press, 2001.
- 24 SAARI, D. G. *Chaotic Elections!: A mathematician looks at voting*. First edition. USA: American Mathematical Society, 2001.
- 25 WIKIPEDIA. *Voting System*. 2007. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Voting_system>.
- 26 ARROW, K. J. *Social Choice and Individual Values*. Second edition. New York: Wiley, 1963.
- 27 WIKIPEDIA. *Arrow's impossibility theorem*. 2007. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Arrow's_impossibility_theorem>.
- 28 ARROW, K. J. A difficulty in the concept of social welfare. *Journal of Political Economy*, v. 58, n. 4, p. 328–346, 1951.
- 29 RIKER, W. H.; ORDESHOOK, P. C. Theory of calculus of voting. *American Political Science Review*, v. 62, n. 1, p. 25–42, 1968.
- 30 GIBBARD, A. Manipulation of voting schemes: a general result. *Econometrica*, v. 41, n. 4, p. 587–601, 1973.
- 31 SATTERTHWAIT, M. A. Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, p. 187–217, 1975.

- 32 DUVERGER, M. Factors in a two-party and multiparty system. *Party Politics and Pressure Groups*, p. 23–32, 1972.
- 33 RANGEVOTING. *Duverger's law of 2-party domination*. 2007. Disponível em: <<http://rangevoting.org/Duverger.html>>.
- 34 OLIVEIRA, M. J. de. Isotropic majority-vote model on a square lattice. *Journal of Statistical Physics*, v. 66, p. 273–281, 1992.
- 35 TOME, T.; OLIVEIRA, M. J. de. *Dinâmica estocástica e Irreversibilidade*. Primeira edição. USP - São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2001.
- 36 TRAVIESO, G.; COSTA, L. D. Spread of opinions and proportional voting. *Physical Review E*, v. 74, n. 3, p. 036112, 2006.
- 37 GONZALEZ, M. C.; SOUSA, A. O.; HERRMANN, H. J. Opinion formation on a deterministic pseudo-fractal network. *International Journal of Modern Physics C*, v. 15, n. 1, p. 45 – 57, 2004.
- 38 BERNARDES, A. T.; STAUFFER, D.; KERTESZ, J. Opinion formation on a deterministic pseudo-fractal network. *European Physical Journal B*, v. 25, n. 1, p. 123–127, 2002.
- 39 SZNAJD-WERON, K.; SZNAJD, J. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics C*, v. 11, n. 6, p. 1157–1165, 2000.
- 40 GALAM, S. Minority opinion spreading in random geometry. *European Physical Journal B*, v. 25, n. 4, p. 403–406, 2002.
- 41 GALAM, S. Rational group decision making: A random field ising model at $t=0$. *Physica A*, v. 238, n. 1-4, p. 66–80, 1997.
- 42 RAFFAELLI, G.; MARSILI, M. Statistical mechanics model for the emergence of consensus. *Physical Review E*, v. 72, n. 1, p. 016114, 2005.
- 43 BALL, P. Putting democracy to the test. *News@Nature*, 1999.
- 44 LYRA, M.; COSTA, U. M.; COSTA, R. N.; ANDRADE, J. S. Generalized zipf's law in proportional voting processes. *Europhysics Letters*, v. 62, n. 1, p. 131–137, 2003.
- 45 WEST, B. J.; SHLESINGER, M. F. *International Journal of Modern Physics B*, 1989.
- 46 FORTUNATO, S.; CASTELLANO, C. Scaling and universality in proportional elections. *arXiv:physics/0612140v2*, 2007.
- 47 TSE. *Tribunal Superior Eleitoral*. 2007. Disponível em: <<http://www.tse.gov.br>>.
- 48 DERRIDA, B.; FLYVBJERG, H. Statistical properties of randomly broken objects and of multivalley structures in disordered-systems. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, v. 20, n. 15, p. 5273–5288, 1987.
- 49 BLUME, L. E. The statistical-mechanics of strategic interaction. *Games and Economic Behavior*, v. 5, n. 3, p. 387–424, 1993.

- 50 NOWAK, M. A.; SIGMUND, K. Evolutionary dynamics of biological games. *Science*, v. 303, n. 5659, p. 793–799, 2004.
- 51 HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. *Evolutionary games and population dynamics*. First edition. Cambridge: University Press, 1998.
- 52 NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Commemorative edition. New York: Princeton Press, 2007.
- 53 GIBBONS, R. *A Primer in Game Theory*. First edition. Great Britain: Harvester Wheatsheaf, 1992.
- 54 HARDIN, G. The tragedy of the commons. *Science*, v. 162, n. 3859, p. 1243–1248, 1968.
- 55 SHUBIK, M. *Game theory in the social sciences: concepts and solutions*. Second edition. Cambridge: MIT, 1985.
- 56 ZALTA, E. N. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy: Game Theory and Ethics*. 2007. Disponível em: <<http://plato.stanford.edu/entries/game-ethics/>>.
- 57 BRAMS, S. J. *Game theory and politics*. First edition. New York: Free Press, 1975.
- 58 POUNDSTONE, W. *Prisoner's Dilemma*. First edition. New York: Doubleday, 1992.
- 59 AUMANN, R. J. Agreeing to disagree. *Annals of statistics*, v. 4, n. 6, p. 1236–1239, 1976.
- 60 NASH, J. F. Equilibrium points in n -person games. *Proceedings of the National Academy of Science*, v. 36, p. 48–49, 1950.
- 61 AXELROD, R.; HAMILTON, W. The evolution of cooperation. *Science*, v. 211, p. 1390–1396, 1981.
- 62 AXELROD, R. *The Evolution of Cooperation*. First edition. New York: Basic Books, 1984.
- 63 COLIN, F. *Behavioral game theory: experiments in strategic interaction*. First edition. New York: Princeton University Press, 2003.
- 64 GUTH, W.; SCHMITTBERGER, R.; SCHWARZE, B. An experimental analysis of ultimatum bargaining. *Journal of Economic Behavior and Organization*, v. 3, n. 4, p. 367–388, 1982.
- 65 OOSTERBEEK, H.; SLOOF, R.; KUILEN, G. V. de. Cultural differences in ultimatum game experiments: Evidence from a meta-analysis. *Experimental Economics*, v. 7, n. 2, p. 171–188, 2004.
- 66 CHALLET, D.; ZHANG, Y.-C. Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game. *Physica A*, v. 247, p. 407–418, 1997.
- 67 CHALLET, D. *Econophysics Forum*. 2007. Disponível em: <<http://www.unifr.ch/econophysics/>>.

- 68 MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. First edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- 69 BOUCHAUD, J.-P.; POTTERS, M. *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management*. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- 70 VEGA-REDONDO, F. *Game Theory and Economic Applications*. First edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- 71 VEGA-REDONDO, F. *Evolution, Games, and Economic Behaviour*. Second edition. Oxford: Oxford University Press, 1996.
- 72 MARRO, J.; DICKMAN, R. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. First edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- 73 CHALLET, D.; MARSILI, M.; ZHANG, Y.-C. *Minority Games: Interacting Agents in Financial Markets*. First edition. Oxford: Oxford Finance, 2005.
- 74 COOLEN, A. C. *The Mathematical Theory of Minority Games: Statistical Mechanics of Interacting Agents*. First edition. Oxford: Oxford Finance, 2005.
- 75 ZHANG, Y.-C. Modeling market mechanism with evolutionary games. *Europhysics News* 29, 51, v. 29, n. 51, 2000.
- 76 TOULOUSE, G. Theory of frustration effect in spin glasses. *Communications on physics* 2, v. 4, p. 115–119, 1977.
- 77 RUBINSTEIN, A. *Modeling Bounded Rationality*. First edition. United States of America: MIT university press, 1998.
- 78 CHALLET, D.; MARSILI, M. Phase transition and simetry breaking in the minority game. *Physical Review E*, v. 60, n. 6, p. R6271–R6274, 1999.
- 79 DOTSENKO, V. *Introduction to the Replica Theory of Disordered Statistical Systems*. First edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- 80 CHALLET, D.; MARSILI, M.; ZHANG, Y.-C. Modeling market mechanism with minority game. *Physica A*, v. 276, n. 1-2, p. 284–315, 2000.
- 81 CHALLET, D.; MARSILI, M.; ZECCHINA, R. Statistical mechanics of systems with heterogeneous agents: Minority games. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 8, p. 1824–1827, 2000.
- 82 ZHENG, B.; QIU, T.; REN, F. Two-phase phenomena, minority games, and herding models. *Physical Review E*, v. 69, n. 4, p. 046115, 2004.
- 83 EGUILUZ, V. M.; ZIMMERMANN, M. G. Transmission of information and herd behavior: An application to financial markets. *Physical Review Letters*, v. 85, n. 26, p. 5659–5662, 2000.
- 84 CURTY, P.; MARSILI, M. Phase coexistence in a forecasting game. *JSAT. Journal of Statistical Mechanicas: Theory and Experiment*, p. 03013, March 2006.

- 85 LAURETI, P.; MORET, L.; ZHANG, Y.-C.; YU, Y.-K. Information filtering via iterative refinement. *Europhysics Letters*, v. 75, n. 6, p. 1006–1012, 2006.
- 86 KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics*. Fourth edition. Philadelphia: Taylor & Francis, 1996.
- 87 STAUFFER, D.; AHARONY, A. *Introduction to Percolation Theory*. First edition. Philadelphia: Taylor & Francis, 1994.
- 88 ZIPF, G. K. *Human Behavior and the Principle of Last effort*. First edition. New York: Addison-Wesley, 1949.
- 89 NEWMAN, M. E. J. Power laws, pareto distributions and zipf's law. *journal Contemporary Physics*, v. 46, n. 5, p. 323 – 351, 2003.
- 90 BAK, P. *How Nature Works*. First edition. New York: Copernicus, 1996.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)