



**Universidade Federal do Ceará**

**Mairton Cavalcante Romeu**

**Percolação invasiva entre múltiplos poços**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física da Matéria Condensada do Departamento de Física da UFC

Orientador : Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo  
Co-Orientador: Prof. Dr. José Soares Andrade Júnior

Fortaleza  
Setembro de 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**Universidade Federal do Ceará**

**Mairton Cavalcante Romeu**

**Percolação invasiva entre múltiplos poços**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Física da Matéria Condensada do Departamento de Física do Centro de Ciências da UFC. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Dr. Ascânio Dias Araújo**

Orientador

Departamento de Física — UFC

**Prof. Dr. José Soares Andrade Júnior**

Co-Orientador

Departamento de Física — UFC

**Prof. Dr. Uriel Medeiros de Souza Costa**

Departamento de Física – UFAL

Fortaleza, 28 de Setembro de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Mairton Cavalcante Romeu**

Graduou-se em Licenciatura Física na Universidade Estadual do Ceará e em Bacharelado Física na Universidade Federal do Ceará.

#### Ficha Catalográfica

R 672 p Romeu, Mairton Cavalcante

Percolação invasiva entre múltiplos poços / Mairton Cavalcante Romeu;- Fortaleza:[s,n ],2007.

61 f: il. ; 30,0 cm

1. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Física.

1. Física . 2. Teoria da percolação. 3. Percolação invasiva. I. Araújo, Ascânio Dias. II. Andrade, José Soares. III. Universidade Federal do Ceará. Departamento de Física. IV. Título.

CDD: 530.13

Aos meus pais

## **Agradecimentos**

Ao Professor Ascânio Dias Araújo pela orientação e imensa dedicação despendida durante este longo processo da minha formação.

Ao Professor Soares pelo apoio e orientação.

Ao Professor André pelas palavras tranquilizadoras e o incentivo a continuar.

Aos colegas de laboratório, em especial a Talita, Marcelo e Marilia Baquil pelo apoio, sugestões e ajudas.

Aos meus amigos de graduação: Handrey , Wally, Paulo Willyam, Herbert, João Claudio, Ellen Yoshie, Bruno Abagaro, Apiano, Bartolomeu e Cleilton. Vocês me ajuram muito nessa jornada.

Aos meus professores da UECE que me iniciaram nesse mundo fantástico que é a Física.

Ao professor Josué pelo incentivo a me aprofundar no mundo da Física.

A FUNCAP e ao CNPq.

## Resumo

Romeu, Mairton Cavalcante; Araújo, Ascânio Dias; Andrade, José Soares. **Percolação invasiva entre múltiplos poços**. Fortaleza, 2007. 48p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Física, Universidade Federal do Ceará.

Nesta dissertação, investigamos por meio de simulação numérica o processo de invasão que ocorre no interior de um meio poroso desordenado. Neste processo, a invasão começa em um poço denominado de injeção e se estende até atingir outros poços denominados de extração. Em nosso estudo, o poço de injeção está localizado no centro de uma rede quadrada de tamanho  $L$  e os quatro poços de extração estão situados simetricamente em torno do poço de injeção a uma distância  $r$  deste. Nós estudamos duas estratégias de exploração: (A) todos os poços são perfurados simultaneamente; (B) os poços de extração são perfurados, a medida que a produção através do poço perfurado previamente apresenta um declínio, ou seja, quando a frente de propagação atingir este poço. Quando o modelo de percolação invasiva é aplicado como um modelo simples para simular o deslocamento de um fluido viscoso por meio de um outro fluido menos viscoso, o comportamento da distribuição de massa dos agregados invadidos pertencem a diferentes classes de universalidade, dependendo do critério utilizado para finalizar o processo. Nossa análise considera o limite onde a pressão no poço de extração  $P_e$  é zero, em outras palavras, a produção para logo que o fluido invasor atingi o poço de extração. Nossos resultados mostram que, como esperado, a probabilidade de pararmos o processo de extração com pequenas quantidades de massa extraída é muito reduzida quando se considera múltiplos poços. Neste trabalho, mostramos também quando é mais eficiente perfurar ou não um poço de extração adicional. Mostramos que a probabilidade de aumentarmos a quantidade de fluido extraída pela adição de um novo poço ao processo depende da quantidade total extraída através do poço perfurado anteriormente. Os resultados obtidos aqui podem ser relevantes para determinar uma estratégia eficiente na exploração de petróleo.

## Palavras-chave

Teoria da percolação. Percolação invasiva.

## Abstract

Romeu, Mairton Cavalcante; Araújo, Ascânio Dias; Andrade, José Soares. **Invasion Percolation between multiples wells**. Fortaleza, 2007. 48p. MsC Thesis — Department of Física, Universidade Federal do Ceará.

In this dissertation we investigate by means of extensive numerical simulation the invasion process that occur in interior of disordered porous media. In this process, the invasion starts from a injection well, and the propagation front moves towards one, or several, extracting wells. In our study, we place the injection well in the center of a square lattice of size  $L$  and up to four extraction wells at a distance  $r$  of the central injection well and along the natural axes of the square lattice. We study the two following exploring strategies: (*A*) to bore all wells at the same time; (*B*) to bore each extracting well only after the oil obtained with the preceding well has been exhausted, that is, when the front reaches the previous well. When the invasion percolation model is applied as a simplified model for the displacement of a viscous fluid by a less viscous one, the distribution of displaced mass follows two distinct universality classes, depending on the criteria used to stop the displacement. Our analysis considers the limit where the pressure of the extraction well  $P_e$  is zero, in other words, production stops as soon as the less viscous fluid reaches that extraction well. Our results show that, as expected, the probability of stopping the production with small amounts of displaced mass is greatly reduced. We also investigate whether or not creating extra extraction wells is an efficient strategy. We show that the probability of increasing the amount of displaced fluid by adding an extra extraction well depends of the total recovered mass obtained before adding this well. The results presented here could be relevant to determine efficient strategies in oil exploration.

## Keywords

Invasion Percolation. Percolation Theory.



## Sumário

1	Fractais	4
1.1	Introdução	4
1.2	O modelo de Percolação	10
1.3	O comprimento de correlação	20
2	Modelos de Crescimento de Interface	<b>21</b>
2.1	Introdução	21
2.2	Deslocamento de Fluido em Meios Porosos	22
2.3	Percolação Invasiva entre dois pontos	30
3	Percolação Invasiva entre Múltiplos Poços	<b>35</b>
3.1	Introdução	35

## Lista de figuras

- 1.1 A curva  $(AB)$  é dividida em segmentos de linha de comprimento  $\delta$ . São necessários  $N(\delta)$  segmentos como este para cobri-la inteiramente . 5
- 1.2 A curva  $(AB)$  é coberta com elementos de área  $\delta^2$ . São necessários  $N(\delta)$  elementos como este para cobri-la inteiramente 6
- 1.3 Representação das primeiras gerações da curva triádica de Koch. Em cada segmento da curva, o iniciador é substituído pelo gerador  $n$ , formando o prefractal de comprimento  $L(\delta) = (4/3)^n$ . 8
- 1.4 Efeito do aumento da probabilidade de ocupação  $p$  para uma rede de tamanho  $L = 100$ . Os valores de probabilidades são (a)  $p = 0.4$ , (b)  $p = p_c$  e (c)  $p = 0.65$ . Nas figuras os agregados isolados (6) estão em azul e o agregado percolante em vermelho. 12
- 1.5 Rede de percolação típica (6) de tamanho  $L = 500$  no ponto crítico,  $p_c = 0.593$ . As cores indicam o intervalo de tamanho do agregado em ordem decrescente, começando com vermelho, verde oliva, cinza, preto, verde claro, verde escuro, azul claro e azul escuro. 13
- 1.6 Gráfico em escala para a distribuição de tamanhos de agregados  $P(m)$  para uma rede de percolação no ponto crítico de percolação. A linha sólida representa o ajuste linear obtido para o comportamento em lei de potência cujo expoente encontrado é  $\tau = -2.015 \pm 0.005$ . 14
- 1.7 Gráfico para o tempo de vida (duração) do fogo  $t_v$  em função da probabilidade de ocupação de árvores na rede  $p$ . Esta curva foi obtida a partir de uma média sobre 1000 realizações com uma rede de tamanho  $L = 1000$ . A linha pontilhada indica o ponto crítico de percolação de sítios  $p_c = 0.592$ . 15
- 1.8 Probabilidade de um sítio pertencer ao maior agregado em uma rede de tamanho  $L$  em função da probabilidade de ocupação da rede  $p$ . A curva contínua foi obtida para  $L = 100$  enquanto que a pontilhada para  $L = 1000$ . A linha vertical indica o valor de  $p = p_c \approx 0.59$ . 16
- 1.9 A massa do maior agregado  $M(L, p)$  como função da dimensão linear  $L$  da rede quadrada em  $p = p_c$ . A linha sólida é o ajuste linear com o expoente dado por  $D \approx 1.89$ . 18
- 1.10 A massa do maior agregado  $M(L, p)$  como função do logaritmo do tamanho  $L$  da rede quadrada, para  $p < p_c$ , com  $p = 0.5$ . A linha sólida foi construída ajustando-se os dados numéricos à expressão  $M(L) = A + B \ln(L)$ , com  $A = -455.6 \pm 0.3$  e  $B = 148.7 \pm 0.1$  18
- 2.1 Estrutura gerada por meio do modelo de DLA, a partir de uma solução de sulfato de cobre em uma célula de eletrodeposição. 24
- 2.2 Estrutura gerada por meio do modelo de DLA. 25
- 2.3 Representação esquemática das forças capilares atuantes sobre a interface de separação entre dois fluidos no interior de um tubo cilíndrico. A diferença de pressão entre os dois fluidos é determinada basicamente pelo inverso do raio do tubo. 28

- 2.4 Ilustração esquemática do processo de invasão para o modelo de percolação invasiva sem aprisionamento. Os sítios que aparecem em vermelho são os sítios possíveis de serem invadidos em cada realização da simulação. Estes sítios pertencem a fronteira que define a interface de separação entre os dois fluidos. A parte em preto na figura representa o avanço da interface através do meio poroso em cada realização da simulação. 29
- 2.5 Histograma da probabilidade  $P(p)$  de termos um sítio invadido em função do valor da probabilidade  $p$  associada a cada sítio da rede. A função probabilidade apresenta uma mudança de comportamento abrupta próxima ao valor de  $p_c$ , praticamente excluindo os sítios que apresentam um valor de probabilidade acima de  $p_c$  do processo de invasão. 30
- 2.6 Gráfico em escala log-log para a distribuição de tamanho de avalanche  $P(s)$  em função do tamanho da avalanche  $s$ . A linha sólida em vermelho representa o ajuste linear obtido para a região com comportamento em lei de potência, cujo o expoente é  $\tau = 1.47 \pm 0.03$ . 31
- 2.7 Configuração geométrica para uma estrutura de exploração considerando apenas dois poços. O poço de injeção  $W_1$  e o poço de extração  $W_2$ . Os poços estão localizados na parte central da rede a uma distância  $r$  um do outro. 32
- 2.8 Gráfico em escala log-log da distribuição de massa dos agregados invadidos  $M$  para uma rede  $L = 512$  e  $r = 4$  (círculos),  $r = 8$  (quadrados) e  $r = 16$  (triângulos). O valor da pressão  $p_2$  no poço de extração é especificado a partir de uma distribuição uniforme  $[0, 1]$ . As curvas foram escalonadas pelo valor da massa  $M_0$ , situada na posição da saliência próxima ao valor máximo da massa do agregado. A linha reta corresponde ao ajuste linear, sendo o valor obtido para a inclinação  $\alpha = 1.39 \pm 0.03$ . 33
- 2.9 Curva em escala logarítmica para a distribuição de massa dos agregados invadidos  $M$  para uma rede  $L = 512$  e  $r = 4$  (círculos),  $r = 8$  (quadrados) e  $r = 16$  (triângulos). A pressão  $p_2$  é constante e igual a  $p_c = 0.5927$ . A linha sólida indica a regressão linear com o expoente  $\alpha = 0.98 \pm 0.02$ . 34
- 3.1 Evolução temporal da frente de invasão entre o poço de injeção ( $W_0$ ) e os múltiplos poços ( $W_i$ ) onde  $i = 1, 2, 3, 4$ . O processo de invasão é identificado de acordo com a seqüência pela qual os poços de extração são atingidos. Os diversos tons de cinza, indicam quais sítios foram invadidos para um determinado tempo de interação no processo de invasão. Os tons de cinza vão escurecendo do primeiro poço até o último. 38

- 3.2 Gráfico em escala logarítmica da distribuição de massa do agregado até o momento em que cada um dos poços é atingido. Estes dados são referentes a estratégia *A*. Os diferentes estilos de linha no gráfico principal representa as três possíveis ordem na qual os poços podem ser atingidos. Estas distintas possibilidades são mostradas na legenda da figura. Está claro a partir da figura que as distribuições são independente da ordem em que os poços são atingidos. As distribuições apresentam comportamento em lei de potência com os seguintes expoentes controlando este decaimento:  $\alpha_1 = 2.45 \pm 0.07$ ,  $\alpha_2 = 1.74 \pm 0.05$ ,  $\alpha_3 = 1.34 \pm 0.05$ ,  $\alpha_4 = 1.04 \pm 0.03$ , correspondendo a cada um dos poços  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ , e  $W_4$  respectivamente. Em detalhe na figura, mostramos a massa média para os agregados invadidos como função do número do poço atingido pela frente de invasão, para diferentes distância entre os poços  $r$ . 39
- 3.3 Gráfico da distribuição de massa para os agregados invadidos considerando a estratégia *A*. Os diferentes símbolos representam a ordem na qual os poços foram atingidos. A linha sólida corresponde ao melhor ajuste obtido a partir da Eq. 3-1. O valor obtido para o parâmetro que controla o fim da região de escala é  $C_1 = 0.22$ . Os valores para os expoentes  $\alpha_i$  são os mesmos obtidos através de um ajuste linear dos dados, conforme mostrado na Figura 4.2. 41
- 3.4 Gráfico em escala log-log da distribuição de massa dos agregados invadidos  $P(M)$ , considerando  $L = 2048$ . Estes resultados são referente a estratégia *B*, na qual novos poços são perfurados após o poço previamente perfurado ter sido atingido pela frente de invasão. Para uma melhor comparação, os eventos com massa nula foram excluídos da estatística. Nós mostramos os resultados obtidos para a distribuição de massa  $P(M)$  para (a)  $r = 8$ , (b)  $r = 16$ , (c)  $r = 32$  e (d)  $r = 64$ . No caso da estratégia *B*, a calda das distribuições são fracamente afetadas pela ordem na qual os poços são atingidos. O efeito do parâmetro  $r$  sobre a distribuição é de deslocar a região de escala. 42
- 3.5 Gráfico em escala logarítmica para a distribuição de massa dos agregados invadidos para o segundo poço quando a estratégia *B* é utilizada. Nesta figura nós estudamos o efeito do tamanho do agregado formado durante o processo de invasão até a frente atingir o primeiro poço, sobre a distribuição de tamanho de agregados formado até a frente atingir o segundo poço. Estes resultados indicam que a distribuição de massa do agregado formado para o caso do segundo poço não depende da massa do agregado formado no evento anterior. Eventos com massa nula não são considerados nesta estatística, mas o efeito de tal evento é discutido na Figura 3.6. 43
- 3.6 Probabilidade de termos uma determinada massa considerando o segundo poço como função da massa obtida para o primeiro poço considerando diferentes distâncias  $r$ . Em detalhe na figura nós mostramos os dados originais sem colapso na figura principal nós temos os dados colapsados em função da distância característica  $r^{d_f}$ , com  $d_f = 1.89$  44

## Lista de tabelas

1.1	Probabilidades críticas no modelo de percolação	11
-----	---	----

*O que sabemos é uma gota, o que ignoramos  
é um oceano.*

**Isaac Newton .**

## Introdução

A característica desordenada de meios porosos naturais ou artificiais, representa um desafio importante para pesquisadores que buscam uma descrição realística, por meio de técnicas de modelagem e simulação, de fenômenos dos transporte que ocorrem nos espaços vazios destas estruturas.

O estudo do transporte de fluidos em meios porosos é de central importância no processo de aprimoramento das técnicas utilizadas na exploração e produção de petróleo (1, 2). Em problemas como este, além do conhecimento do processo físico envolvido, a desordem do espaço de poros torna a geometria do sistema não trivial. Dependendo do tipo de desordem, pode existir uma escala, ou seja, um comprimento característico, a partir do qual o sistema pode ser considerado homogêneo e, por consequência, propriedades intensivas podem ser mensuradas. Com a presença de heterogeneidade, no entanto, isso não será possível em nenhuma escala e o comportamento do sistema bem como suas propriedades físicas não serão passíveis de descrição sem o detalhamento de sua morfologia. Exemplos de tais sistemas incluem os objetos fractais e geometrias associadas à fenômenos críticos. É neste contexto que a teoria de percolação representa um paradigma simples e útil para estudar uma variedade de sistemas que apresentam desordem estrutural e auto-similaridade estatística (3).

Como já mencionado, a geometria associada a rochas porosas e campos petrolíferos pode ser muito complexa ao ponto de exibir características heterogêneas sobre um vasto intervalo de comprimentos de escala, indo desde centímetros até quilômetros (4). Uma questão aberta na modelagem de processos envolvendo exploração de petróleo diz respeito ao efeito da conectividade de um material poroso sobre a dinâmica de deslocamento de um fluido através deste meio. Se o espaço entre os poros é fracamente conectado ao ponto do meio poroso ser considerado macroscopicamente heterogêneo, devemos esperar ou não um comportamento anômalo quanto ao escoamento do fluido? Para responder esta pergunta, é crucial que modelos matemáticos contendo uma descrição detalhada do sistema sejam utilizados na sua representação física. Em outras palavras, para se compreender o comportamento e avaliar a dinâmica global de um sistema complexo como o escoamento em meios porosos des-

ordenados, é importante se conjugar consistentemente em um modelo teórico adequado, aspectos estruturais e fenomenológicos associados ao processo físico-químico em estudo.

No presente trabalho, empregaremos o modelo de percolação invasiva (5) e variantes de sua formulação tradicional para investigar propriedades de transporte e simular o escoamento de fluidos em meios porosos fracamente conectados, ou seja, nas proximidades do ponto crítico percolativo. No capítulo 1, introduzimos os conceitos básicos associados à teoria da percolação (6). Em especial, é dada ênfase ao aspecto heterogêneo dos agregados de percolação e à maneira como esta peculiaridade pode ser estudada através da teoria de escala. Mostramos que o agregado percolante e o seu esqueleto condutor são entidades invariantes de escala, e que a dependência de uma determinada grandeza associada a qualquer destas estruturas (por exemplo, a massa ou uma propriedade de transporte) com o seu tamanho deve ser na forma de uma lei de potência. Finalmente, apresentamos a noção de que os expoentes dessa lei devem ser característicos da sua classe de universalidade.

O método usualmente usado para extrair petróleo do interior da Terra (meio poroso) é por meio da injeção de um outro fluido, fazendo com que o petróleo seja expulso do interior da Terra, sendo então coletado na superfície. Este método tem como geometria básica, um ponto onde o fluido é injetado (poço de injeção) e um ponto onde o petróleo é coletado (poço de extração), localizado a uma determinada distância do poço de injeção. Configurações onde existem mais de um poço de extração, também são utilizadas, porém existe um custo adicional para cada novo poço perfurado. Para esta técnica de extração, o método sugere que a quantidade de petróleo que pode ser extraído do interior do meio poroso está relacionada com o tempo gasto pelo fluido invasor para atingir o ponto de extração. Quando a interface que separa o fluido invasor do fluido deslocado atingir o poço de extração, a produção de petróleo sofre um declínio. Surge então uma questão: Até que ponto seria vantajoso perfurar outro poço em um local situado a uma determinada distância do primeiro poço de extração? Qual seria a quantidade de petróleo extraído com a presença do segundo poço de extração? Para tentar responder estas questões alguns modelos de rede são utilizados (7) para simular o processo de deslocamento de um fluido através de um meio poroso, por meio da injeção de um outro fluido com propriedades físico-químicas diferentes.

No capítulo 2 alguns modelos de redes são apresentados e discutidos. Chamamos à atenção para dois modelos bastante discutidos na literatura, o modelo **DLA** (agregação limitada por difusão) e o modelo **NTIP** (percolação invasiva sem aprisionamento). As estruturas geométricas obtidas a partir da



dinâmica de invasão presente nestes modelos são analisadas e é feito um paralelo com os diversos fenômenos naturais que ocorrem na natureza. Um outro aspecto investigado, diz respeito às características presentes nestes modelos, que podem ajudar a elucidarmos algumas questões que surgem quando estamos interessados em estudar fenômenos de escoamento de fluidos em estruturas desordenadas. Também, neste capítulo discutimos um trabalho recente (8) onde os autores estudaram utilizando o modelo de percolação invasiva, o processo de deslocamento de um fluido através de um meio poroso desordenado na condição de dois poços, um de injeção e outro de extração.

Em seguida, no capítulo 3, utilizamos o modelo de percolação invasiva sem aprisionamento NTIP (5) para investigar a distribuição de massa dos agregados invadidos, na condição de um poço de injeção e vários poços de extração, supondo a existência de dois tipos de estratégia no que se refere ao método utilizado durante a exploração de petróleo. Na primeira estratégia, o poço de injeção e mais quatro poços de extração, simetricamente distribuídos em torno do poço de injeção são perfurados no início da simulação. Neste caso, analisamos a distribuição de massa dos agregados formados durante o processo de invasão, até a interface de separação entre os dois fluidos atingir, cada um dos quatro poços, sequencialmente. A outra estratégia consiste em perfurar um poço de injeção e um poço de extração inicialmente e os demais poços de extração são perfurados a medida que o processo de invasão vai ocorrendo. Em outras palavras, um novo poço de extração é perfurado após o processo de invasão atingir o poço previamente perfurado. Este último, é então fechado e o processo prossegue até a frente de invasão atingir este novo poço. Considerando a segunda estratégia, analisamos também a distribuição de massa dos agregados formados e se existe alguma mudança, quanto a forma das distribuições de massa para as duas estratégias consideradas.

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos nossas conclusões acerca de todo o trabalho desenvolvido, além de sugestões e recomendações para a realização de trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

# 1 Fractais

## 1.1 Introdução

Para modelar sistemas naturais se faz necessário o uso de ilustrações que permitam visualizá-los, manipulá-los e compreendê-los da maneira mais intuitiva possível. Devido a essa necessidade do ser humano compreender e representar a natureza em suas formas e configurações é que surgiu na antiguidade a Geometria. Esse conhecimento foi uma tentativa do homem de entender o espaço onde está inserido, analisar as proporções e mensurar suas dimensões. No início, a Geometria modelava o mundo tridimensional de maneira bem idealizada e simplificada com seus pontos, retas e planos. Essa formulação foi ordenada e sistematizada por Euclides e, em sua homenagem, foi denominada de *Geometria Euclidiana*, a qual perdurou até os dias contemporâneos.

A idéia de Geometria fractal surgiu da dificuldade em descrever detalhadamente, através da Geometria Euclidiana, certos fenômenos naturais, tais como os contornos de montanhas, nuvens e ilhas, trajetórias de partículas bem como linhas de escoamento hidrodinâmico. Originou-se, assim, uma Geometria mais abrangente, baseada em um conjunto de formas, denominadas *fractais*, capaz de descrever morfologias irregulares ou fragmentadas.

Conceitos geométricos que transcenderam a Geometria tradicional foram desenvolvidos previamente, formulando idéias isoladas sobre a compreensão da Geometria fractal na natureza. Contudo, estes conceitos não obtiveram aceitação científica imediata e, apenas alguns anos mais tarde, o matemático *Benoît B. Mandelbrot* (9) reuniu de forma coerente e original um conjunto de informações elementares, disseminando o estudo da Geometria fractal.

O termo fractal foi introduzido na década de 1970 por Benoît B. Mandelbrot (fractal, i.e., aquilo que pode ser infinitamente dividido, do latim *fractus*, derivado do verbo *frangere*, quebrar, fragmentar) . De acordo com a definição proposta por Mandelbrot, *fractal é uma estrutura feita de partes semelhantes ao todo, de alguma maneira*. Objetos fractais constituem uma importante ferramenta para a análise da morfologia de fenômenos naturais complexos em vários domínios científicos, devido à capacidade de reproduzir padrões fragmentados e irregulares.

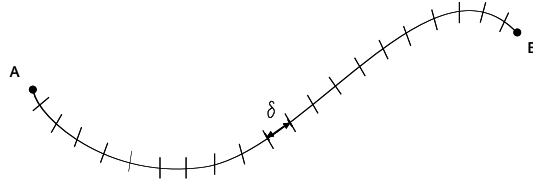


Figura 1.1: A curva  $(AB)$  é dividida em segmentos de linha de comprimento  $\delta$ . São necessários  $N(\delta)$  segmentos como este para cobri-la inteiramente .

A idéia de Geometria fractal está intimamente ligada à invariância de propriedades sob mudança de escala: fractais são estruturas que possuem a mesma morfologia sob diferentes escalas de observação, apresentando a mesma irregularidade em todas as escalas.

### 1.1.1 Dimensão Fractal

O conceito de distância entre dois pontos no espaço é primordial para a definição de dimensão fractal,  $D$ . Um método simples e usual empregado para fazer medidas de comprimento de curvas, área de superfícies ou volume de objetos consiste em dividir o espaço a ser medido em pequenos cubos de aresta  $\delta$ . Contando o número de cubos necessários para cobrir o conjunto de pontos, obtém-se uma medida do tamanho do conjunto.

O comprimento de uma curva ordinária, cuja extensão vai do ponto A ao ponto B, pode ser medido conhecendo-se o número  $N(\delta)$  de segmentos de linha de comprimento  $\delta$  necessários para cobri-la completamente conforme a Figura 1.1. O número de segmentos de linha é dado por  $N(\delta) = L_0/\delta$ , onde  $L_0$  é o comprimento da curva a ser medido. Portanto, o comprimento associado à curva,  $L$ , que pode ser escrito como

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta = L_0\delta^0 \quad (1-1)$$

torna-se assintoticamente igual ao comprimento da curva  $L_0$  no limite em que  $\delta$  tende para zero.

Uma outra maneira de medir o tamanho da curva  $AB$  baseia-se em associar uma área ao conjunto de pontos que definem a curva, de maneira que os elementos de área  $\delta^2$  estejam posicionados sobre toda a extensão da curva conforme a Figura 1.2. Logo, a área associada é definida como

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2 = L_0\delta^1. \quad (1-2)$$

Analogamente, é possível associar um volume,  $V$ , à curva, de maneira que

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^3 = L_0\delta^2. \quad (1-3)$$

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^3 = L_0\delta^2. \quad (1-4)$$

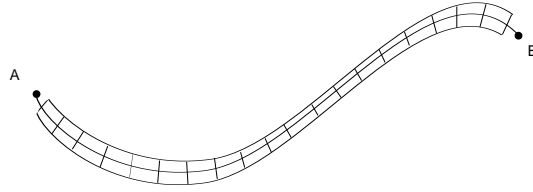


Figura 1.2: A curva  $(AB)$  é coberta com elementos de área  $\delta^2$ . São necessários  $N(\delta)$  elementos como este para cobri-la inteiramente

Para uma curva ordinária, tanto a área como o volume associados tendem a zero no limite em que  $\delta$  se aproxima de zero, o que mostra que, para representar curvas, é conveniente utilizar segmentos de linha. Empregando o mesmo procedimento, a área  $A$  associada a um conjunto de pontos que definem uma superfície é dada por

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^2 = A_0\delta^0. \quad (1-5)$$

No limite em que  $\delta$  tende para zero,  $A$  torna-se assintoticamente igual à área da superfície a ser medida,  $A_0$ . Analogamente, o volume associado à superfície  $A_0$  é dado por

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta^3 = A_0\delta^1. \quad (1-6)$$

Observamos que o volume associado  $V$  torna-se nulo no limite em que  $\delta$  tende para zero. O próximo passo será associar um comprimento à superfície. Formalmente, é possível escrever

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta)\delta = A_0\delta^{-1}. \quad (1-7)$$

Observando esta relação, percebe-se que o comprimento associado  $L$  diverge no limite em que  $\delta \rightarrow 0$ . Este resultado mostra que é impossível cobrir uma superfície com um número finito de segmentos de linha, o que leva a crer que a única medida útil de um conjunto de pontos que definem uma superfície no espaço tridimensional é a área. Contudo, existe um conjunto de curvas, chamadas *curvas de Peano*, capazes de preencher uma superfície, desde que estas linhas estejam suficientemente retorcidas, de modo a tornar seu comprimento infinito. Analogamente, há um conjunto de superfícies que, suficientemente dobradas, são capazes de preencher completamente um volume. Por exemplo, se utilizarmos uma função teste do tipo

$$h(\delta) = \gamma(d)\delta^d, \quad (1-8)$$

realizaremos medidas de objetos fragmentados de maneira mais adequada, sendo  $d$  a dimensão da medida e  $\gamma(d)$ , um fator geométrico. Para cubos, quadrados e linhas, o fator geométrico  $\gamma$  vale 1. Para esferas e discos,  $\gamma = \pi/6$  e  $\pi/4$ , respectivamente. A medida do objeto, denotada por  $M_d$ , está associada

à função teste  $h(\delta)$  através da soma

$$M_d = \sum h(\delta). \quad (1-9)$$

Comumente, a medida  $M_d$  assume valor zero ou infinito, de acordo com a escolha da dimensão  $d$  da medida. A dimensão de *Hausdorff-Besicovitch*,  $D$ , de um conjunto de pontos é definida como sendo a dimensão crítica para a qual a medida  $M_d$  passa de zero para infinito. Segundo a função teste  $h(\delta)$ , a medida  $M_d$  pode ser escrita na forma

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d, \quad (1-10)$$

de maneira que

$$M(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \gamma(d)N(\delta)\delta^d = \quad (1-11)$$

Esta asserção define a dimensão  $D$  como uma propriedade local, posto que esta mede propriedades de conjuntos de pontos no limite em que  $\delta$  tende a zero na função  $h(\delta)$ .

Segundo a definição 1-11, o parâmetro  $M_d$  pode assumir valores entre zero e infinito, para  $d = D$ , embora, usualmente, seja uma medida finita. A condição para que o produto na Eq. 1-11 não seja divergente ou tenda a zero é que, no limite assintótico em que  $\delta$  tende a zero, o número de elementos com tamanho finito seja

$$N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^D}. \quad (1-12)$$

Aplicando-se o logaritmo em ambos os membros da relação 1-12, encontraremos a seguinte expressão para a dimensão de Hausdorff-Besicovitch:

$$D \sim \frac{\log[N(\delta)]}{\log(\delta)}. \quad (1-13)$$

Para formas geométricas usuais como linhas ( $D = 1$ ), superfícies e planos ( $D = 2$ ) ou volumes finitos ( $D = 3$ ), a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é um valor inteiro. Contudo, para objetos fractais, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch não é um valor inteiro e  $D$  é exatamente a dimensão fractal do conjunto de pontos.

### 1.1.2 Fractais Determinísticos e Estatísticos

Existe uma divisão essencial quanto à lei de formação dos diversos fractais naturais ou artificiais. Os fractais classificados como *determinísticos*, são aqueles construídos a partir de uma lei de formação que pode ser expressa analiticamente. Conhecendo-se esta lei podemos inferir qual a sua dimensão fractal exatamente com base em cálculos exatos. Como exemplo de tais fractais

citamos a curva de Koch ( $D_f \simeq 1.26$ ) e o triângulo de Sierpinski ( $D_f \simeq 1.58$ ) (3, 5).

Para uma melhor compreensão de como podemos construir um fractal determinístico e determinar sua dimensão fractal, iremos analisar com detalhes a curva de Koch. A construção da curva de Koch tem início a partir de um segmento de linha reta com comprimento unitário  $L(1) = 1$ . Este segmento de reta, chamado iniciador, pode ser substituído por um polígono, para o caso da ilha de Koch. O processo de construção da curva avança através da substituição de cada segmento do iniciador por um gerador  $n$ , composto por quatro segmentos de comprimento  $1/3$ , seguindo a relação de recorrência ilustrada na Figura 1.3.

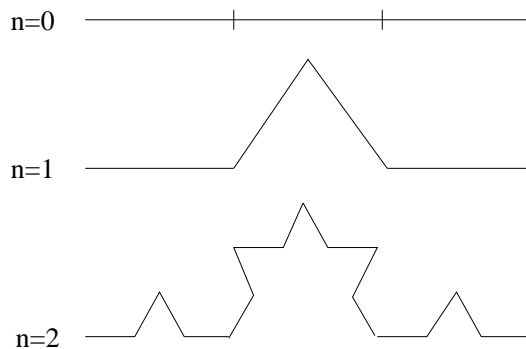


Figura 1.3: Representação das primeiras gerações da curva triádica de Koch. Em cada segmento da curva, o iniciador é substituído pelo gerador  $n$ , formando o prefractal de comprimento  $L(\delta) = (4/3)^n$ .

Portanto, após a primeira iteração, onde a curva coincide com o gerador, o comprimento da curva torna-se  $L(1/3) = 4/3$ . Ao fim da segunda iteração, que é obtida através da substituição de cada segmento de linha pela nova versão do gerador, o comprimento da curva, que consiste de 16 segmentos de comprimento  $\delta = 3^{-2} = 1/9$ , passa a ser  $L(1/9) = (4/3)^2 = 16/9$ . Aplicando um gerador reduzido a todos os segmentos de uma geração da curva, obtém-se uma nova curva, denominada *prefractal*. Ou seja, em uma dada iteração, a curva obtida não é estritamente um fractal, mas de acordo com o termo de Mandelbrot, um prefractal. *Um fractal é um objeto matemático obtido no limite de uma série de prefractais quando o número de iterações  $n$  tende ao infinito*. Para a  $n$ -ésima iteração, o comprimento do prefractal pode ser escrito como

$$L(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad (1-14)$$

onde o comprimento de cada segmento de linha é igual a  $\delta = 3^{-n}$ . Aplicando-se o logaritmo nos termos da igualdade anterior, o número da  $n$ -ésima geração pode ser reescrito como

$$n = -\ln \delta / \ln 3, \quad (1-15)$$

e, por conseguinte, o comprimento  $L(\delta)$  do prefractal pode ser expresso na forma

$$L(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^n = \exp \left[ \frac{-\ln(\delta)}{\ln 3} [\ln(4) - \ln(3)] \right] = \delta^{1-D}. \quad (1-16)$$

Este resultado segue o mesmo comportamento que a *lei de Richardson*, encontrada em 1961, por L.F. Richardson ao estudar as variações no comprimento aproximado de várias linhas costeiras em função das diversas medidas dos segmentos de linha padrões escolhidos. Richardson percebeu que, em um amplo intervalo de  $L(\delta)$ , o comprimento é regido por uma lei de potência em  $\delta$ , nomeadamente,

$$L(\delta) = \delta^{1-D}. \quad (1-17)$$

Fazendo uma comparação entre o comprimento do prefractal (Eq. 1-14) e a aproximação encontrada por Richardson (Eq. 1-17), a dimensão fractal  $D$  da curva triádica de Koch pode ser facilmente explicitada,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^{1-D} \quad (1-18)$$

$$(n) \ln \left(\frac{4}{3}\right) = n(1-D) \ln \left(\frac{1}{3}\right) \quad (1-19)$$

$$\ln(4) - \ln(3) = (D-1) \ln(3) \quad (1-20)$$

$$D = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \sim 1.2628, \quad (1-21)$$

e o número de segmentos,  $N(\delta) = 4^n = 4^{-\ln(\delta)/\ln(3)}$  pode então ser reescrito como

$$N(\delta) = \delta^{-D}. \quad (1-22)$$

Entretanto,  $\delta$  tende a zero quando o número de gerações torna-se alto, o que implica em uma divergência no comprimento da curva. Este impasse é facilmente resolvido se, ao invés da medida do comprimento, a função teste  $h(\delta) = \delta^d$  for utilizada para encontrar a medida  $M_d$ , em termos da dimensão fractal,

$$M_d = \sum h(\delta) = N(\delta)h(\delta) = \delta^{-D} \delta^d. \quad (1-23)$$

Esta medida  $M_d$  assume um valor finito somente quando a dimensão  $d$  da função teste  $h(\delta)$  é igual a  $D$ . A cada iteração da construção da curva de Koch, os prefractais podem ser “esticados”, de modo a formar uma linha reta. A dimensão topológica da curva triádica de Koch é, portanto,  $D_T = 1$  (5). Sendo a dimensão de Hausdorff-Besicovitch,  $D$ , para a curva de Kock

aproximadamente igual a  $D \sim 1.2628$  e, portanto, excedendo a dimensão topológica,  $D > D_T$ , pode-se concluir que a curva de Koch é um objeto fractal. De acordo com Mandelbrot (1982), *fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica* (5).

Fractais estatísticos são definidos como estruturas auto-similares e possuem comportamento fractal apenas quando a amostragem estatística do sistema é significativa. Isto implica que, observando uma única *realização*, a Geometria fractal não se manifestará. Apenas quando uma média estatística adequada é obtida, sobrepondo-se diversas estruturas de agregados distintos, a dimensão fractal do sistema poderá ser determinada. Como veremos adiante, agregados de percolação no ponto crítico são exemplos de estruturas que apresentam geometria fractal do ponto de vista estatístico.

## 1.2 O modelo de Percolação

O estudo da desordem estrutural é imprescindível para uma melhor compreensão de muitos processos físicos. Devido às suas inúmeras aplicações e grande interesse científico, sistemas desordenados vêm sendo investigados há muito tempo (3, 6, 10). Muitos experimentos foram feitos para melhor entender essa classe de sistemas e novos métodos teóricos foram desenvolvidos para a interpretação dos resultados experimentais. Entre estes métodos encontra-se uma poderosa ferramenta para modelagem de desordem que é a *teoria da percolação*.

A teoria da percolação foi primeiramente introduzida por *Broadbent* e *Hammersley* (11) em 1957 com o objetivo de estudar um fluido escoando através de uma estrutura desordenada. O termo percolação faz referência a um modelo de desordem binária onde a aleatoriedade está na distribuição de tipos de elementos numa rede, por exemplo, condutores ou isolantes. Uma característica bastante peculiar no modelo de percolação é a presença de um ponto crítico  $p_c$ , quando se faz variar a probabilidade de ocupação. Este valor crítico da probabilidade corresponde ao limiar abaixo do qual há perda global de conectividade da estrutura formada. Em  $p_c$  ocorre uma transição de fase de segunda ordem, por exemplo, na probabilidade de um sítio pertencer ao agregado infinito. O valor de  $p_c$  pode ser determinado exatamente para algumas formas de rede, sendo que para outras faz-se necessária a utilização de técnicas de simulação computacional para o cálculo aproximado desta grandeza (6), como mostra a tabela 1.1.

Devido à sua generalidade, o modelo de percolação pode ser implementado de muitas formas. As mais conhecidas são a percolação de sítios e a de



Tabela 1.1: Probabilidades críticas no modelo de percolação

Rede	Ligação	Sítio
Quadrada	$1/2^*$	0.5927
Triangular	$\simeq 0.652^*$	$1/2^*$
Hexagonal	$\simeq 0.3473^*$	0.6962
Cúbica	0.2488	0.3116

\* Resultados exatos

ligações. Nos deteremos aqui à descrição do modelo de percolação de sítios, sendo a extensão para ligações imediata. Consideremos o processo de alocação de sítios em uma rede com uma determinada probabilidade  $p$  de ocupação. A probabilidade de um sítio existir na rede é então dada por  $p$  e a deste mesmo sítio não existir é dada por  $(1 - p)$ . Se os sítios forem distribuídos aleatoriamente na rede, existe a possibilidade de diversos sítios serem alocados próximos uns dos outros ou seja, serem vizinhos formando um agregado de percolação. Este agregado deve assim ocupar uma parte cada vez maior da rede, à medida que esta probabilidade vai aumentando. Em um determinado valor de probabilidade  $p_c$ , o agregado apresenta ramificações que conseguem atingir quase todas as regiões da rede e desta forma conectar lados opostos da mesma. Neste ponto, caracteriza-se a formação de um *agregado percolante*. A condição de percolação é que o transporte não esteja confinado, ou seja, que exista um agregado condutor que atravesse toda a rede. Na probabilidade crítica, o processo de percolação sofre uma transição de um estado apenas localmente conectado para um estado onde a conexão se estende indefinidamente por toda rede. Mais precisamente, simulações com redes de tamanho suficientemente grande, indicam que a probabilidade de existir um agregado percolante vai a zero com  $L \rightarrow \infty$  quando  $p < p_c$ . No caso de transporte elétrico, considerando que os sítios sejam conectados com seus primeiros vizinhos através de ligações (condutoras) no ponto crítico,  $p_c = 0.5927$  (6), o agregado percolante formado permitirá que haja corrente elétrica fluindo através da rede quando aplicada uma diferença de potencial entre os extremos da mesma. Esta propriedade do agregado percolante justifica a sua utilização, por exemplo, como um "paradigma" para Geometria de meios porosos quando se tem interesse em estudos envolvendo fenômenos de transportes através de estruturas porosas desordenadas.

A Figura 1.4 mostra alguns agregados gerados utilizando o modelo de percolação de sítios para valores distintos da probabilidade  $p$ . Para baixos

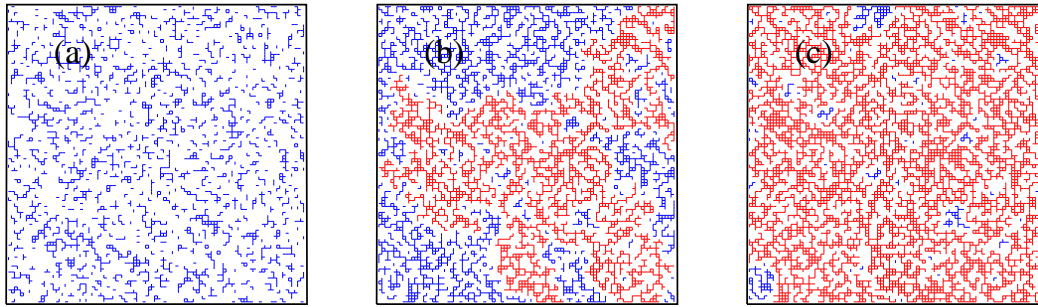


Figura 1.4: Efeito do aumento da probabilidade de ocupação  $p$  para uma rede de tamanho  $L = 100$ . Os valores de probabilidades são (a)  $p = 0.4$ , (b)  $p = p_c$  e (c)  $p = 0.65$ . Nas figuras os agregados isolados (6) estão em azul e o agregado percolante em vermelho.

valores de  $p$  formam-se apenas pequenos agregados. Quando a probabilidade atinge o seu valor crítico  $p = p_c$ , surge então um agregado percolante típico. Com a probabilidade acima de  $p_c$  temos o agregado percolante ocupando quase toda a extensão da rede.

Em  $p = p_c$  além do agregado percolante observam-se vários outros agregados de tamanho menor. A distribuição de tamanho dos agregados no ponto crítico de percolação segue uma lei de potência caracterizando a existência de agregados de todos os tamanhos possíveis (5). Podemos ilustrar este fato de uma forma qualitativa através da Figura 1.5 onde mostramos para uma rede de tamanho  $L = 500$  vários agregados com diferentes tamanhos. As cores correspondem aos diferentes intervalos de tamanhos. Do ponto de vista quantitativo mostramos na Figura 1.6 a distribuição de tamanho de agregados para uma simulação em uma rede quadrada de tamanho  $L = 1000$  onde a estatística é feita a partir de 10000 realizações de redes percolativas distintas para  $p = p_c$ . O expoente  $\tau = -2.015 \pm 0.005$  encontrado para o comportamento em lei de potência para a distribuição de tamanhos de agregados  $P(m)$  está em boa concordância com os valores para este expoente reportado na literatura (6)

Para ajudar na compreensão do fenômeno de criticalidade associado ao modelo de percolação, analisaremos um modelo simples que envolve uma dinâmica de propagação peculiar. Trata-se do modelo conhecido como *fogo na floresta* (6). Este modelo tem como Geometria básica uma rede tipo percolação, onde os sítios corresponderiam a “árvores” alocadas na rede segundo uma probabilidade de ocupação  $p$ . Desta forma, a “floresta” pode então ser representada por meio de uma rede quadrada bidimensional de tamanho  $L$ , composta de árvores no lugar de sítios. Como o próprio nome do processo sugere, estamos interessados em investigar a dinâmica de propagação de um “incêndio” nesta floresta. Mais precisamente, desejamos determinar o

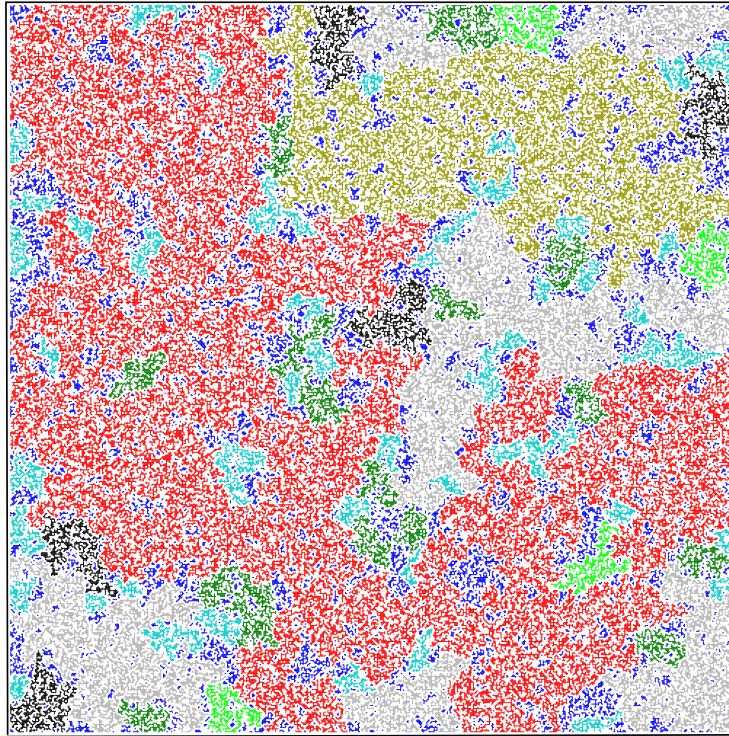


Figura 1.5: Rede de percolação típica (6) de tamanho  $L = 500$  no ponto crítico,  $p_c = 0.593$ . As cores indicam o intervalo de tamanho do agregado em ordem decrescente, começando com vermelho, verde oliva, cinza, preto, verde claro, verde escuro, azul claro e azul escuro.

tempo necessário para a completa extinção da floresta pelo fogo.

Uma possível resposta a esta pergunta está relacionada ao valor atribuído a probabilidade de ocupação da floresta  $p$  e ao critério estabelecido para a propagação do fogo entre as árvores. Para a realização desta dinâmica supomos válidas as seguintes proposições:

- Uma árvore incendiada só pode transferir o fogo para as árvores que estejam em sua vizinhança imediata, ou seja, empregamos a hipótese de interação entre primeiros vizinhos.
- Cada intervalo de tempo na simulação corresponde a uma varredura realizada sobre todas as árvores (sítios) da rede para se proceder com a atualização dos elementos que foram incendiados por seus vizinhos.
- Uma árvore permanece queimando durante apenas um intervalo de tempo.

Inicialmente ataremos fogo apenas nas árvores existentes na primeira linha da rede (floresta). Consideraremos o incêndio extinto caso ele consiga atingir o lado oposto da rede ou caso não haja mais árvores queimando dentro da floresta. O tempo de vida  $t_v$  da floresta é definido pelo número

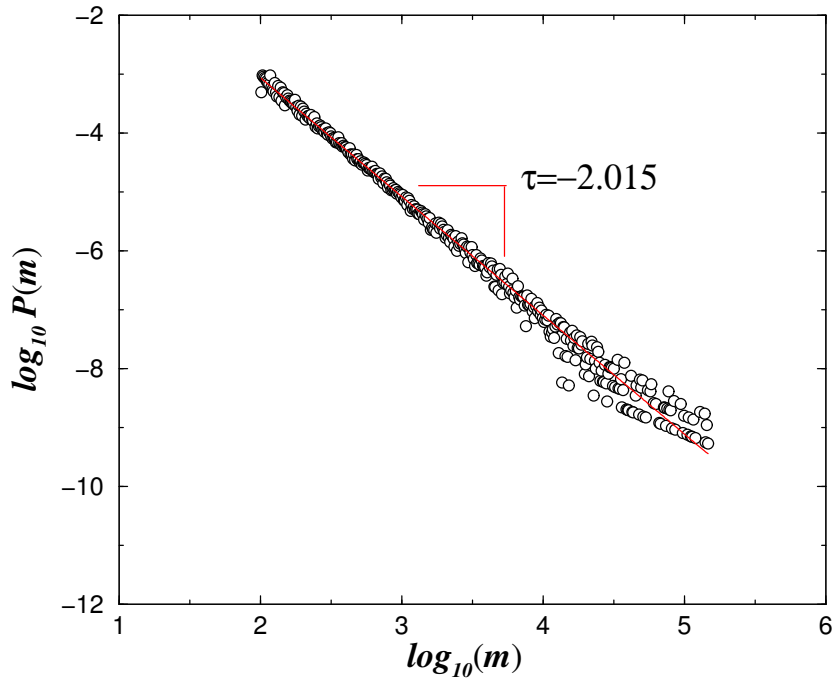


Figura 1.6: Gráfico em escala para a distribuição de tamanhos de agregados  $P(m)$  para uma rede de percolação no ponto crítico de percolação. A linha sólida representa o ajuste linear obtido para o comportamento em lei de potência cujo expoente encontrado é  $\tau = -2.015 \pm 0.005$ .

de varreduras realizadas sobre a rede e este processo é repetido com 1000 redes diferentes de tamanho  $L = 1000$ , para cada valor de probabilidade  $p$ . No final, calculamos a média sobre o tempo de vida  $t_v$  da floresta para vários valores das probabilidades.

Como resultado desta simulação, mostramos na Figura 1.7 o tempo de vida médio  $\langle t_v \rangle$  da floresta em função da probabilidade  $p$  de ocupação. Para pequenos valores da probabilidade  $p$ , o tempo de duração do fogo na floresta é muito curto pois existem poucas árvores disponíveis para a queima. Com o aumento da probabilidade, este tempo vai crescendo até atingir um valor máximo. O valor máximo de  $\langle t_v \rangle$  ocorre em  $p \approx 0.592$ , ou seja, nas proximidades do ponto crítico de percolação de sítios. Neste valor de probabilidade, a floresta apresenta-se como uma estrutura altamente ramificada, com árvores conectando os lados opostos do terreno exatamente como o agregado infinito de percolação. Esta distribuição permite que o fogo possa atingir regiões remotas dentro da rede, assegurando uma maior duração para o incêndio. Considerando o limite  $L \rightarrow \infty$ , o tempo de duração do incêndio diverge quando  $p = p_c$ , ou seja,  $\langle t_v \rangle \rightarrow \infty$ , caracterizando um comportamento tipicamente crítico. Com o aumento de  $p$  acima do ponto crítico, o tempo de duração do fogo passa a decrescer. Isto se deve ao fato da ocupação de

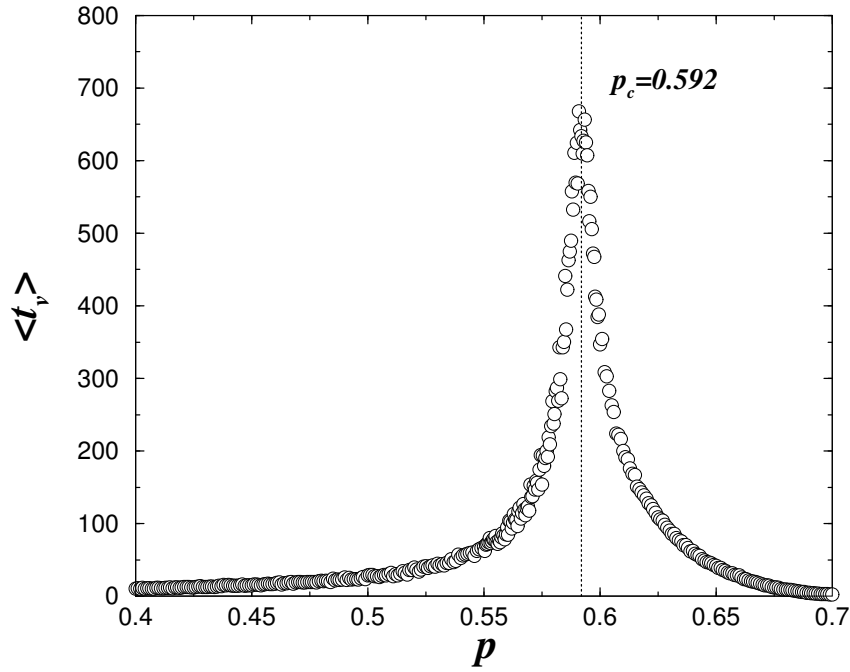


Figura 1.7: Gráfico para o tempo de vida (duração) do fogo  $t_v$  em função da probabilidade de ocupação de árvores na rede  $p$ . Esta curva foi obtida a partir de uma média sobre 1000 realizações com uma rede de tamanho  $L = 1000$ . A linha pontilhada indica o ponto crítico de percolação de sítios  $p_c = 0.592$ .

árvores ser suficientemente alta para permitir que o fogo avance rapidamente sobre a floresta, dizimando-a quase que totalmente nos primeiros instantes. Um outro comportamento interessante observado na curva apresentada na Figura 1.7 é que a curva de  $\langle t_v \rangle$  em função de  $p$  não apresenta simetria quanto ao seu comportamento nas vizinhanças do ponto crítico,  $p = p_c$ . Este fato tem analogia direta no estudo de transições de fase em fenômenos críticos envolvendo outros tipos de processos como, por exemplo, o calor específico nas proximidades da temperatura crítica (12).

No estudo de percolação podemos definir  $P(L, p)$  como a fração de sítios pertencentes ao agregado percolante numa rede de tamanho  $L$  e probabilidade de ocupação  $p$ . Para valores muito grandes de  $L$ , a probabilidade  $P(L, p)$  converge para um valor limite

$$P_\infty(p) = \lim_{L \rightarrow \infty} P(L, p). \quad (1-24)$$

Se  $P_\infty(p) \neq 0$ , o agregado percolante existe e ocupa uma fração finita da rede determinada pela razão entre o tamanho  $M(L, p)$  do agregado, quantificado pelo número de sítios pertencente a este agregado, e o número total de sítios na rede,  $L^d$ . Portanto, podemos escrever que

$$P_\infty(p) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M(L, p)}{L^d} \quad (1-25)$$

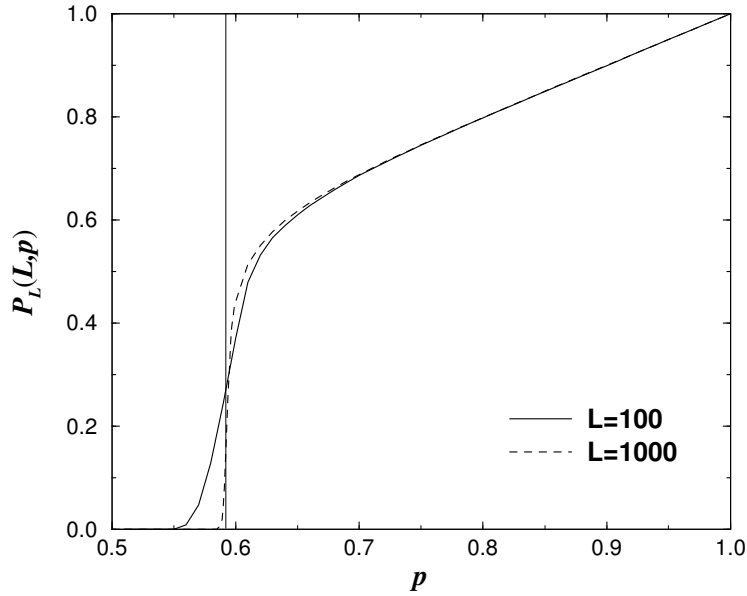


Figura 1.8: Probabilidade de um sítio pertencer ao maior agregado em uma rede de tamanho  $L$  em função da probabilidade de ocupação da rede  $p$ . A curva contínua foi obtida para  $L = 100$  enquanto que a pontilhada para  $L = 1000$ . A linha vertical indica o valor de  $p = p_c \approx 0.59$ .

onde  $d$  é dimensão topológica da rede. Como resultado desta última equação, é fácil perceber que

$$P_\infty(p) \neq 0 \Leftrightarrow M(L, p) \propto L^d ; L \rightarrow \infty, \quad (1-26)$$

ou seja, o agregado percolante escala da mesma forma que o número total de sítios da rede indicando que, para grandes tamanhos de rede, o agregado percolante é homogeneamente distribuído, ocupando igualmente toda rede. Para valores de ocupação próximos de 1, o agregado percolante ocupa toda a rede, indo a zero à medida que a probabilidade de ocupação diminui. A probabilidade crítica pode então ser redefinida como o maior valor de  $p$  para o qual  $P_\infty(p) = 0$ . Em torno de  $p_c$  observa-se um comportamento em lei de potência para  $P_\infty(p)$ ,

$$P_\infty(p) \propto |p - p_c|^\beta ; p \rightarrow p_c, \quad (1-27)$$

com  $\beta = 5/36$  para  $d = 2$  e  $\beta = 0.41$  para  $d = 3$  (6).

Para ilustrar o comportamento da função  $P_L(p)$ , determinamos por meio de simulação computacional o número de sítios  $M(L)$  pertencente ao maior agregado em uma rede de tamanho  $L \times L$  e estimamos o valor de  $P_L(p)$  como sendo igual a  $M(L)/L^2$  (5). Fazendo uma média sobre 10 000 realizações obtemos o gráfico mostrado na Figura 1.8. Para baixos valores da probabilidade  $p$ , a probabilidade  $P_L(p)$  é desprezível. Aumentando-se o valor de  $p$ , a probabilidade  $P_L(p)$  permanece praticamente nula até observamos um

crescimento abrupto nas proximidades de  $p \cong p_c$ .  $P_L(p)$  cresce rapidamente próximo de  $p_c = 0.593$ . Para valores de  $p$  acima de  $p_c$ ,  $P_L$  cresce quase que linearmente até atingir o valor unitário  $P_L(p = 1) = 1$ . A transição vai tornando-se ainda mais abrupta a medida que aumentamos o tamanho da rede, atingindo o seu valor crítico para redes de tamanho  $L \rightarrow \infty$ , sendo este limite o correspondente ao limite termodinâmico definido na mecânica estatística.

Ao estudarmos o modelo de percolação podemos verificar que a estrutura do agregado percolante apresenta um comportamento interessante com relação a variação da probabilidade de ocupação da rede. Uma questão que surge inicialmente diz respeito à maneira como a massa ou o número sítios  $M(L)$  do agregado percolante cresce com o tamanho da rede  $L$  para diferentes valores da probabilidade  $p$ . Para uma probabilidade de ocupação  $p > p_c$ , a massa do agregado em duas dimensões obedece a relação  $M(L) \simeq P_N(p) \times L^2$ , ou seja, a massa se apresenta como sendo proporcional ao produto da probabilidade de ocupação pelo número total de sítios na rede. À medida que  $p$  cresce, a massa do agregado aproxima-se do valor encontrado para uma rede homogênea. Para  $p < p_c$  não existe agregado percolante, mas pode-se interpretar  $M(L, p)$  como sendo o tamanho do maior agregado. Observa-se que neste caso  $M(L, p)$  cresce de forma logarítmica. Quando  $p = p_c$ , ou seja, no ponto crítico, a massa do agregado percolante, normalmente chamado de *agregado incipiente*, comporta-se de forma anômala com relação ao tamanho da rede. Na criticalidade, a massa  $M(L, p)$  cresce na forma de uma lei de potência, cujo expoente é a dimensão fractal  $D_f$  do agregado incipiente. Este expoente depende apenas da dimensão da rede  $d$  sendo  $D_f \simeq 1.89$  e  $2.53$  em duas e três dimensões, respectivamente. Em síntese, é possível expressar a dependência de  $M(L, p)$  para grandes tamanhos de rede na forma

$$M(L, p) \propto \begin{cases} \ln L & , p < p_c \\ L^{D_f} & , p = p_c \\ L^d & , p > p_c \end{cases} \quad (1-28)$$

Como mostrado nas Figs. 1.9 e 1.10, podemos confirmar estes comportamentos através de um gráfico em escala logarítmica de  $M(L)$  como função de  $L$  para uma rede quadrada de sítios, tomando-se a medida sobre  $10^5$  realizações para cada tamanho da rede.

O agregado de percolação no ponto crítico apresenta uma estrutura geométrica *fractal* que pode ser expressa quantitativamente na forma  $M \sim L^{D_f}$ , sendo o expoente  $D_f \cong 1.89$ . De acordo com a definição proposta por Mandelbrot, a principal característica das estruturas fractais é a invariância de escala, que se manifesta como consequência da auto-similaridade.

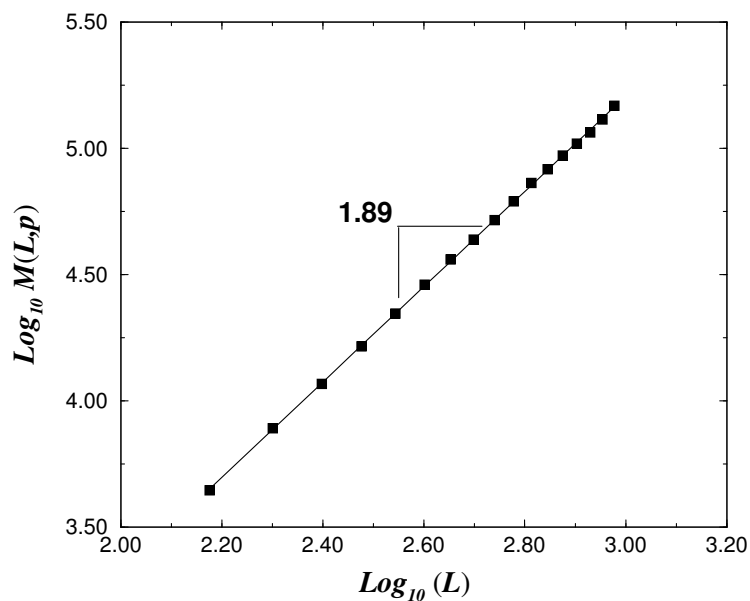


Figura 1.9: A massa do maior agregado  $M(L,p)$  como função da dimensão linear  $L$  da rede quadrada em  $p = p_c$ . A linha sólida é o ajuste linear com o expoente dado por  $D \approx 1.89$ .

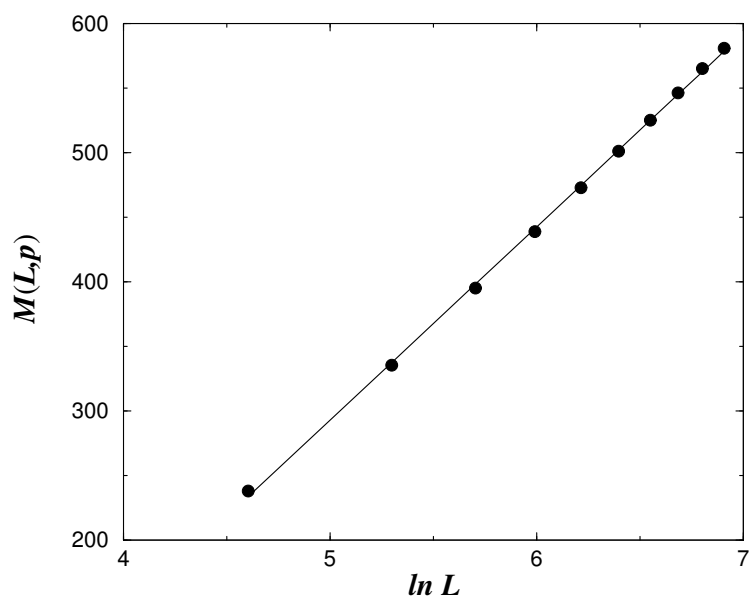


Figura 1.10: A massa do maior agregado  $M(L,p)$  como função do logaritmo do tamanho  $L$  da rede quadrada, para  $p < p_c$ , com  $p = 0.5$ . A linha sólida foi construída ajustando-se os dados numéricos à expressão  $M(L) = A + B \ln(L)$ , com  $A = -455.6 \pm 0.3$  e  $B = 148.7 \pm 0.1$



Isto significa que estes sistemas são auto-similares e conseqüentemente fractais apenas quando considerados sob o ponto de vista de uma média. Assim, certamente não perceberemos a característica auto-similar do sistema se considerarmos, por exemplo, apenas uma realização do meio desordenado. Entretanto, se encontrarmos uma média sobre várias realizações, ou seja, se sobrepusermos várias estruturas de agregados diferentes, o sistema parecerá auto-similar e sua dimensão fractal poderá ser determinada por meio do método de *finite-size scaling*. Este método é uma forma de calcular valores de expoentes críticos, observando como as quantidades medidas variam com o tamanho do sistema estudado.

O fato da auto-similaridade gerar uma invariância de escala no agregado de percolação no ponto crítico nos leva a concluir que a relação encontrada para o número de sítios pertencente ao agregado incipiente, ou seja a massa  $M(L, p)$  do agregado, também é válida para uma fração da massa do agregado obtida através do escalonamento do mesmo por um fator  $b$ , isto é,

$$M(L) = b^D M(L/b) . \quad (1-29)$$

Este comportamento é válido apenas assintoticamente, no limite de grandes valores de  $L$  e  $L/b$ . Entretanto, esta relação é válida para todos os valores de  $b$  consistentes com este limite. Supondo que  $M(L)$  seja uma *função homogênea*<sup>1</sup> e notando que o lado esquerdo da equação (1-29) independe de  $b$ , a única forma possível para o comportamento de  $M(L)$  é uma *lei de potência*,  $M(L) \sim L^D$ . Portanto, a Geometria fractal exibida pelo agregado incipiente e sua característica auto-similar estão quantitativamente relacionadas por meio da equação (1-29).

Com base em estudos realizados sobre a teoria da percolação, observa-se que diferentes modelos de percolação (sítio ou ligação) em diversas topologias de redes (triangular, quadrada, Voronoi, etc) apresentam pontos críticos  $p_c$  diferentes. Se a dimensão for a mesma, no entanto, tais sistemas comportam-se segundo os mesmos expoentes críticos. Diz-se então que esses modelos pertencem à mesma *classe de universalidade*. Porém é importante lembrar que um sistema pode ser fractal acima, abaixo ou entre um limite inferior e superior de um determinado comprimento de escala e Euclidiano para os demais comprimentos de escalas. Na próxima seção estudaremos o comprimento de escala associado ao agregado incipiente.

<sup>1</sup>Uma função é dita homogênea quando esta satisfaz a relação de homogeneidade,  $f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t)$ , para *todos* os valores positivos do fator de escala  $\lambda$ .

### 1.3 O comprimento de correlação

Diferentemente de funções como a exponencial e o logaritmo, não há como definir para uma lei de potência um comprimento característico que adimensionalize o seu argumento. O comportamento em lei de potência, típico de fractais, vem da auto-similaridade e da invariância de escala, onde não existe comprimento característico. No caso do modelo de percolação, a distância entre os sítios é um comprimento intrínseco evidente. No entanto, a forma fractal do agregado percolante impõe a inexistência de uma escala característica. Esta aparente contradição é explicada pelo fato de que a distância entre os sítios é uma escala microscópica do modelo enquanto que a auto-similaridade do agregado percolante está relacionada à escala macroscópica.

Uma propriedade fundamental do modelo de percolação é a existência de apenas uma escala característica no nível macroscópico, ou seja, o comprimento de correlação  $\xi$ . Em  $p_c$ ,  $\xi$  diverge para infinito, daí a invariância de escala do agregado percolante.

Pode-se observar que, próximo ao ponto crítico,  $\xi$  diverge como uma lei de potência,

$$\xi(p) \propto |p - p_c|^{-\nu} \quad , \quad (1-30)$$

onde o expoente de correlação  $\nu = 4/3$  para percolação em duas dimensões e  $\nu = 0.88$  para três dimensões (6).

## 2 Modelos de Crescimento de Interface

### 2.1 Introdução

O processo de deslocamento de um fluido por meio de um outro fluido com propriedades físico-químicas diferente, apresenta uma grande variedade de estruturas quando se muda as propriedades dos fluidos como por exemplo a viscosidade e a tensão interfacial (5). As diferentes estruturas obtidas podem ser classificadas em função das diferentes forças presentes no processo de deslocamento. Devido a complexidade envolvida no processo de escoamento de fluidos em Geometria desordenadas e a ausência de soluções analíticas, muitos modelos são propostos na tentativa de explicar a fenomenologia envolvida neste tipo de processo.

É sabido que grande parte do petróleo existente na Terra encontra-se retido no seu interior da mesma forma que, por exemplo, a água fica retida em uma esponja. Porém, para extrairmos a água de uma esponja podemos espreme-la, sendo que o mesmo método não pode ser utilizado para extrair o petróleo do interior da Terra. Um método usualmente utilizado para extração do petróleo consiste na injeção de um outro fluido (água ou metano) em um poço ou mais poços (chamado injeção), com o objetivo de retirar o petróleo contido no interior do meio poroso (rocha) através do poço de extração. O processo de extração persiste até o momento em que a interface de separação entre os dois fluidos atinge o poço de exploração. Neste momento, a queda na produção ocorre. Devido a interesses econômicos é importante determinar ou pelo menos estimar o tempo quando a quantidade extraída começa a cair.

Como conseqüência de sua aplicabilidade, o problema de transporte em meios porosos tem despertado muito interesse e muitos estudos vêm sendo desenvolvidos neste campo. De um ponto de vista teórico, por exemplo, o processo de escoamento é muito complexo e difícil de ser descrito em detalhes. Na tentativa de investigar estes fenômenos, modelos de rede têm sido empregados para representar o meio poroso e conceitos de teoria de percolação aplicados na modelagem do escoamento no interior do espaço de poros (3, 6, 13, 14, 15). Em especial, podemos destacar o fenômeno do deslocamento de um fluido utilizando-se de um outro fluido com propriedades

físico-químicas diferentes, através de estruturas percolativas no ponto crítico (16, 17).

Um modelo de rede bastante utilizado no estudo do fenômeno associado ao deslocamento de um fluido por um outro fluido com propriedades diferente, é o modelo de percolação invasiva. Este modelo foi proposto para tentar simular o processo de escoamento multifásico através de um meio poroso (13). Este fenômeno tem grande relevância envolvendo interesses científicos e industriais, haja visto que este tipo de processo encontra importantes aplicações na indústria, incluindo extração de petróleo e gás de reservatórios subterrâneos.

## 2.2 Deslocamento de Fluido em Meios Porosos

Quando tratamos com problemas que envolvem escoamento de fluidos através de meios porosos, os seguintes parâmetros são de fundamental relevância para a completa descrição da fenomenologia envolvida no processo:

- Número Capilar  $Ca \equiv u\mu/\sigma$
- Mobilidade  $M \equiv \mu_2/\mu_1$

onde  $\mu_2$  é a viscosidade do fluido deslocado,  $\mu_1$  é a viscosidade do fluido injetado,  $\sigma$  tensão superficial e  $u$  velocidade do escoamento. Considerando um meio poroso cuja Geometria é microscopicamente desordenada, porém, macroscopicamente homogênea. Neste, caso podemos afirmar que:

- Se  $Ca$  é baixo, as forças viscosas são desprezíveis durante o processo de escoamento e o sistema caracteriza-se como **IP** (Invasion Percolation).
- Se  $Ca$  é alto, as forças capilares relacionadas com a tensão superficial são desprezíveis durante o processo de escoamento e o sistema comporta-se como **DLA** (Diffusion-limited aggregation).

O número adimensional  $M$  define uma razão entre as viscosidades dos dois fluidos. Dependendo desta razão pode se definir qual modelo melhor se aplica na tentativa de descrever o escoamento. Por exemplo, quando  $M = 1$  a interface de separação entre os dois fluidos pode ser considerada como lisa e esta pode ser modelada aproximadamente por um conjunto de partículas sem massa, denominada de partículas traçadoras, que seguem exatamente as linhas de corrente no interior do meio poroso (18, 19, 20). Para valores diferentes de  $M$ , as estruturas geradas durante o deslocamento podem ser bastante complexas e outros modelos mais sofisticados devem ser empregados na tentativa de descrever melhor o escoamento bem como a Geometria da interface de separação entre os dois fluidos. Estudos recentes (21), sugerem

que o fenômeno de deslocamento viscoso através de estruturas percolativas pertencem a uma mesma classe de universalidade, independente da mobilidade  $M$ .

### 2.2.1 Agregação Limitada por Difusão

Quando a dinâmica de penetração ocorre com alto  $Ca$  as forças capilares relacionadas com a tensão superficial são desprezíveis e a estrutura gerada durante a penetração pode ser simulada por meio do modelo de **DLA**. Na prática os experimentos realizados utilizando **VF** (viscous fingers) (5) tem mostrado uma rica variedade de estruturas geradas quando se estuda o deslocamento de um fluido por meio da injeção de um outro fluido com viscosidade diferente, como por exemplo, na célula de Hele-Shaw (7).

A dinâmica de propagação da frente de separação entre os fluidos tem duas componentes principais. A distribuição de pressão global, controlada pela Lei de Darcy e a flutuação na Geometria dos poros (aleatoriedade). O resultado deste dois fatores é o crescimento de estruturas fractais. É sabido que esta frente de propagação é bastante instável e que esta interface apresenta reentrâncias sendo, uma estrutura difícil de ser estudada analiticamente. Portanto, modelos estatísticos tais como o **DLA** (Agregação limitada por difusão) são bastante utilizados com a finalidade de se compreender melhor as estruturas formadas durante o escoamento. Este modelo foi primeiramente proposto por Witten and Sander in 1981, e é aplicado ao processo de agregação que ocorre em qualquer sistema, desde que o principal mecanismo de transporte seja a difusão. O **DLA** pode ser observado em vários sistemas na natureza tais como eletrodeposição, deslocamento de fluido na célula de Hele-Shaw, deposição de minerais e em processos que envolvem quebra da rigidez dielétrica (5, 7). Na Figura 2.1, mostramos um agregado formado por meio do modelo **DLA**, a partir de uma solução de sulfato de cobre em uma célula de eletrodeposição (22).

O modelo de **DLA** representa um processo o qual, partículas são lançadas para caminhar aleatoriamente em uma rede até atingirem uma determinada região (superfície ou ponto) e serem capturadas (coladas) fazendo com que a estrutura cresça neste ponto de toque. As estruturas geradas com este modelo apresentam uma dimensão fractal  $d_f \approx 1.7$  que é muito similar as das estruturas observadas experimentalmente em vários experimentos de laboratórios e processos que ocorrem espontaneamente na natureza. Entretanto, em duas dimensões onde o modelo de **DLA** é mais estudado, sua natureza fractal é curiosamente frágil, ou seja, o valor da dimensão fractal da estrutura gerada é sensível a estrutura da rede para qual o problema é aplicado (23). Mostramos na Figura 2.2 a estrutura gerada através de uma simulação computacional para



Figura 2.1: Estrutura gerada por meio do modelo de DLA, a partir de uma solução de sulfato de cobre em uma célula de eletrodeposição.

o modelo de **DLA** onde foram lançadas aproximadamente  $10^5$  partículas em uma rede quadrada de tamanho  $L = 1000$ .

A estrutura gerada por este processo é altamente ramificada e fractal. A característica ramificada do agregado surge devido ao rápido crescimento de algumas partes do agregado, que acabam por inibir o crescimento das partes mais internas da estrutura. As partes mais internas da estrutura tornam-se menos acessíveis as partículas que são lançadas depois. Para estas partículas, é pouco provável que elas consigam penetrar nas reentrâncias da estrutura fazendo com que a parte mais interna do agregado sejam atingidas. Ou seja, as partes externas funcionam como uma blindagem para a região mais interna. Este processo ocorre em todos os comprimentos de escala gerando assim uma estrutura fractal.

A explicação para as estruturas geométricas obtidas (dimensão fractal) a partir de modelos estatísticos submetidos a condições de contornos específicas, podem ser encontradas quando se tenta analisar o sistema no limite do contínuo. Vale salientar que no limite do contínuo o caminhante aleatório é descrito pela equação da difusão. Tendo em vista esta semelhança podemos fazer uma conexão entre o modelo de DLA e a equação da difusão. Para proceder com esta análise, iremos obter a equação da difusão. Inicialmente, podemos escrever a equação que governa o fluxo de massa na forma

$$\mathbf{J} = -D\nabla C \quad (2-1)$$

onde  $\mathbf{J}$  é o fluxo de massa,  $C$  é a concentração e  $D$  é a constante de difusão. Utilizando a equação que expressa o princípio de conservação da massa do sistema,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2-2)$$

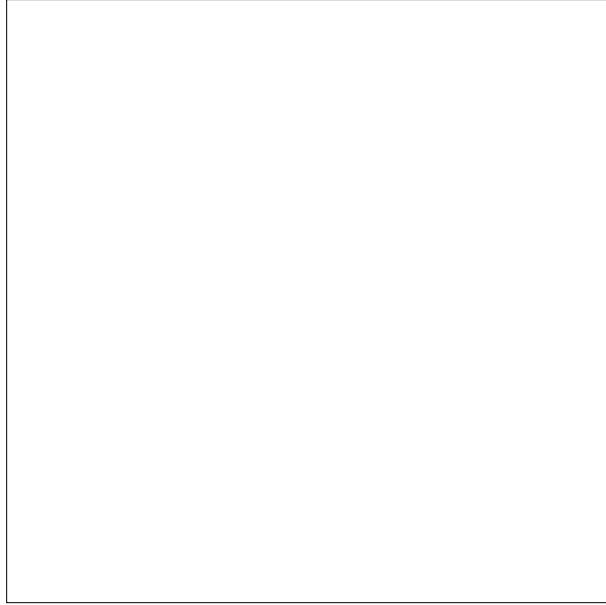


Figura 2.2: Estrutura gerada por meio do modelo de DLA.

podemos escrever que

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C \quad (2-3)$$

que é a equação da difusão.

Supondo que  $C(\mathbf{r}, t)$  é a concentração de partículas caminhante, podemos escrever que

$$\frac{\partial C(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\nabla^2 C(\mathbf{r}, t). \quad (2-4)$$

Supondo atingido o estado estacionário  $\partial C/\partial t = 0$  e a equação da difusão se resume a equação de Laplace.

$$\nabla^2 C(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2-5)$$

Portanto, o problema de um caminhante aleatório que depende de uma propriedade local pode ser governado por uma equação macroscópica. É claro que no caso de termos um substrato não homogêneo, como por exemplo um substrato fractal, a equação que governa o regime clássico necessita de algumas correções, pois neste regime temos a difusão anômala.

A conexão entre **DLA** e o **VF** fica mais evidente quando fazemos uma análise da equação de Darcy, aplicada a um tubo na horizontal. A equação de Darcy pode ser expressa, sem o termo de gravidade na seguinte forma:

$$\mathbf{U} = -\frac{k}{\mu} \nabla p. \quad (2-6)$$

onde  $p$  é a pressão,  $k$  é a permeabilidade do meio e  $\mu$  é a viscosidade do fluido.

Para um fluido incompressível a equação da continuidade é expressa na

forma

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (2-7)$$

Destas duas equações podemos obter que:

$$\nabla^2 p = 0. \quad (2-8)$$

Esta equação é de Laplace.

As duas equações obtidas são de Laplace. Isto confirma que os dois fenômenos são regidos pelo mesmo tipo de equação, justificando assim, a semelhança observada nas estruturas geradas. Podemos enfatizar que estes dois fenômenos pertencem a mesma classe de universalidade.

Na hipótese de baixos valores de  $Ca$ , as forças capilares dominam as forças viscosas e a dinâmica do processo de deslocamento é essencialmente determinada a nível de poros, ou seja, está vinculada a aspectos locais da Geometria do espaço poroso. Portanto, a heterogeneidade do meio poroso pode ser caracterizada através de um campo aleatório, representando a distribuição espacial de tamanhos de poro do meio. Nesta condição, o modelo de percolação invasiva (IP) é bastante apropriado para se estudar o deslocamento de um fluido no interior de uma matriz porosa.

### 2.2.2 Percolação Invasiva IP

O modelo de percolação invasiva trata-se de um processo de percolação dinâmica introduzido por Wilkinson e Willemsen (1983) motivado pelo estudo do escoamento de dois fluidos em um meio poroso e tem sido bastante estudado, despertando interesse de pesquisadores até os dias atuais. Neste modelo o fenômeno de deslocamento do fluido é representado por meio do crescimento de um agregado sobre a rede, supondo que a fronteira deste agregado (perímetro) representa a interface de separação entre os dois fluidos. Na simulação de percolação invasiva, usualmente, uma rede regular é utilizada como idealização do meio poroso, admitindo que os sítios desta rede representam poros.

O modelo de **IP** apresenta duas formas distintas. O modelo **NTIP** percolação invasiva sem aprisionamento onde o fluido deslocado é considerado perfeitamente compressível e pode penetrar em qualquer região do meio poroso ocupada pelo fluido a ser deslocado. No caso **TIP** percolação invasiva com aprisionamento, o fluido deslocado é considerado incompressível e o fluido injetado não pode acessar algumas regiões ocupadas pelo fluido deslocado (regiões aprisionadas). O agregado formado durante o processo de injeção é um fractal auto-similar com uma dimensão fractal diferente, dependendo do caso considerado **NTIP** ou **TIP**. No caso de **NTIP** em duas dimensões, a



massa do agregado  $M$  se relaciona com o tamanho do sistema  $L$  na forma  $M \sim L^{1.89}$  onde 1.89 é a dimensão fractal do agregado invadido. No modelo **TIP** em duas dimensões, a relação é na forma  $M \sim L^{1.82}$  sendo 1.82 a dimensão fractal da estrutura invadida. A razão para esta redução na dimensão fractal do agregado invadido é devido a presença de alguns buracos na estrutura invadida pelo fluido injetado (regiões aprisionadas) para o caso **TIP**. A diferença entre as estruturas obtidas nos dois casos, percolação invasiva com e sem aprisionamento, são cada vez mais desprezíveis a medida que aumentamos a dimensão topológica do espaço. A possibilidade de regiões de aprisionamento vai ficando cada vez menor com o aumento da dimensão. Aqui iremos utilizar o modelo de percolação invasiva sem aprisionamento.

Para descrever o processo de deslocamento através do meio poroso, considere o caso na qual um fluido molhante (óleo) é deslocado através de um meio poroso por meio da injeção de um outro fluido não molhante (água) com viscosidade diferente. Quando o processo de injeção é feito muito lentamente (quase estático) o processo ocorre no regime de baixo número Capilar  $Ca$ , os efeitos viscosos são negligenciados em cada tubo, comparados aos efeitos capilares. O deslocamento é controlado somente pela pressão capilar, isto é, a diferença de pressão  $\Delta p$  entre os dois fluidos através do menisco, conforme a seguinte equação

$$\Delta p = \frac{2(\sigma_{2S} - \sigma_{1S})}{r_p}, \quad (2-9)$$

onde  $r_p$  é o raio do poro.  $\sigma_{1S}$  é a tensão superficial entre o fluido 1 e a parede do poro e  $\sigma_{2S}$  é a tensão superficial entre o fluido 2 e a parede do poro. O avanço da interface de separação ocorrerá na região de menor valor de pressão capilar, que está associada ao raio do poro local  $r_p$ . A Figura 2.3 mostra a representação esquemática de como o processo de deslocamento ocorre no interior do tubo, considerando as várias forças que atuam no processo.

Os passos utilizados na modelagem do fenômeno de invasão são descritos a seguir.

- Um valor aleatório  $p_i$  é atribuído a cada sítio da rede, obtido a partir de uma distribuição uniforme limitada dentro do intervalo  $[0, 1]$ .
- Na configuração inicial, iteração  $i = 0$ , o fluido a ser deslocado ocupa todos os poros da rede, e o fluido invasor apenas um sítio da rede, denominado semente do crescimento do agregado.
- O próximo passo é determinar qual dos vizinhos deste sítio possui o menor valor de pressão  $p$ . Este sítio é então ocupado pelo fluido invasor.

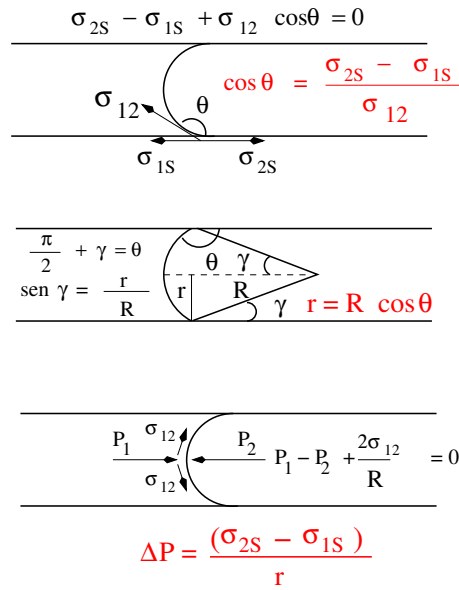


Figura 2.3: Representação esquemática das forças capilares atuantes sobre a interface de separação entre dois fluidos no interior de um tubo cilíndrico. A diferença de pressão entre os dois fluidos é determinada basicamente pelo inverso do raio do tubo.

O processo é executado novamente. Em cada estágio do processo de invasão, o perímetro constituído pela totalidade dos sítios não ocupados, que são vizinhos dos sítios já invadidos, é investigado e o sítio com o menor valor de pressão é invadido, passando a fazer parte do agregado invadido. Para uma melhor compreensão deste processo mostramos na Figura 2.4 um diagrama esquemático de como seria o procedimento de invasão em cada realização. Na Figura 2.4 estão representados em vermelho os sítios que são possíveis de serem invadidos. Podemos definir estes sítios como sendo aqueles pertencentes a fronteira que compõem a interface de separação entre os dois fluidos. Este procedimento é feito continuamente até o agregado invadido atingir as bordas do sistema ou algum sítio previamente definido. A massa do agregado é calculado como sendo o número de sítios invadidos pelo fluido injetado. Esta massa corresponderia a quantidade de fluido (óleo) deslocada do interior do meio poroso (rocha). A estrutura resultante obtida após o processo de invasão ou seja a massa do agregado invadido, conforme frisado anteriormente, apresenta propriedades de auto-similaridade, ou seja, uma parte do agregado apresenta as mesmas características do agregado como um todo. Outro fato que chama a atenção é que, embora o agregado invadido tenha crescido em uma estrutura bidimensional o mesmo apresenta uma dimensão menor que dois, característica de estruturas fractais.

Uma outra característica interessante que o modelo de percolação inva-

0.05	0.10	0.03	0.82	0.08	0.05	0.10	0.03	0.82	0.08	0.05	0.10	0.03	0.82	0.08	0.05	0.10	0.03	0.82	0.08
0.37	0.41	0.74	0.03	0.63	0.37	0.41	0.74	0.03	0.63	0.37	0.41	0.74		0.63	0.37	0.41	0.74		0.63
0.58	0.72		0.29	0.83	0.58	0.72			0.83	0.58	0.72			0.83	0.58	0.72			0.83
0.44	0.91	0.39	0.55	0.93	0.44	0.91	0.39	0.55	0.93	0.44	0.91	0.39	0.55	0.93	0.44	0.91		0.55	0.93
0.73	0.08	0.71	0.01	0.28	0.73	0.08	0.71	0.01	0.28	0.73	0.08	0.71	0.01	0.28	0.73	0.08	0.71	0.01	0.28

Figura 2.4: Ilustração esquemática do processo de invasão para o modelo de percolação invasiva sem aprisionamento. Os sítios que aparecem em vermelho são os sítios possíveis de serem invadidos em cada realização da simulação. Estes sítios pertencem a fronteira que define a interface de separação entre os dois fluidos. A parte em preto na figura representa o avanço da interface através do meio poroso em cada realização da simulação.

siva apresenta é a presença de criticalidade auto-organizada (24). Diferente do modelo de percolação tradicional, este modelo converge para uma probabilidade crítica de ocupação naturalmente. O sistema se auto regula para atingir este estado. Como confirmação desta notável propriedade mostramos na Figura 2.5 a fração de sítios invadidos da rede em função do valor da probabilidade associada a estes sítios. Conforme podemos observar na Figura 2.5, a função que representa a fração dos sítios invadidos apresenta uma transição abrupta nas proximidade de  $p = p_c$ , onde  $p_c = 0.592$  é a probabilidade crítica de percolação em duas dimensões. Ou seja, os sítios que apresentam uma probabilidade acima de  $p_c$  praticamente não contribuem para a massa da estrutura invadida. A própria dinâmica de invasão trata de escolher uma estrutura crítica, que naturalmente exclui os sítios que apresentam probabilidade acima do valor crítico de percolação.

Como parte do seu processo de auto-organização o modelo de percolação invasiva apresenta avalanches quando ocorre a invasão dos sítios da rede. O que seria uma avalanche no modelo de percolação invasiva? Uma avalanche ocorre quando um sítio  $j$ , cujo o valor da probabilidade associada a ele é  $p_j$  é invadido e uma série de sítios  $i$  conectados ao sítio  $j$  são sequencialmente invadidos com  $p_i < p_j$ . O número de sítios que são possíveis de serem invadidos, uma vez que possuem uma probabilidade  $p_i$  menor do que o sítio inicial  $j$ , define o tamanho  $s$  de uma avalanche. A distribuição de avalanches  $P(s)$  no modelo de percolação invasiva, apresenta um comportamento em lei de potência na forma  $P(s) \sim s^{-\tau}$ . Na Figura 2.6 mostramos este comportamento para várias realizações do processo de invasão obtido a partir de intensivas simulações em uma rede quadrada de lado  $L = 1024$ , considerando  $10^5$  realizações distintas

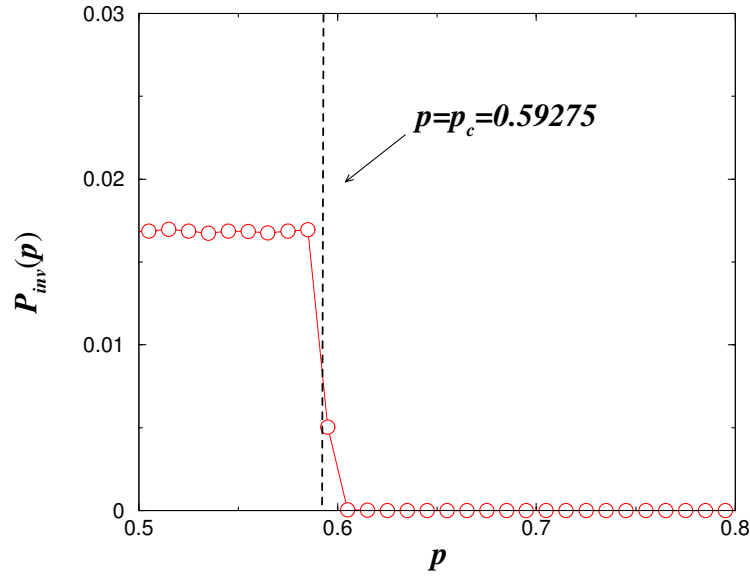


Figura 2.5: Histograma da probabilidade  $P(p)$  de termos um sítio invadido em função do valor da probabilidade  $p$  associada a cada sítio da rede. A função probabilidade apresenta uma mudança de comportamento abrupta próxima ao valor de  $p_c$ , praticamente excluindo os sítios que apresentam um valor de probabilidade acima de  $p_c$  do processo de invasão.

de meios porosos. O valor encontrado para o expoente  $\tau = 1.47 \pm 0.03$  está em boa concordância, dentro da barra de erro, com os valores reportado na literatura (25, 26).

A condição de contorno do problema de percolação invasiva pode ser diferente dependendo de qual sistema se queira estudar. Na condição em que se deseja simular a dinâmica de invasão aplicada a poços de petróleo, o processo de invasão começa em um sítio específico denominado de poço de injeção e termina quando a frente de invasão atingir um outro sítio previamente definido, denominado poço de extração, que se situa a uma distância  $r$  do poço de injeção conforme mostrado na Figura 2.7. Em outros casos podemos ter a invasão até que o limite da rede seja atingido, ou seja, a frente de invasão atinja as bordas que limitam o tamanho da rede.

### 2.3 Percolação Invasiva entre dois pontos

Em um estudo recente (8) o modelo de percolação invasiva foi utilizado para simular a evolução da interface de separação entre dois fluidos, considerando um ingrediente a mais, que consiste no fato da frente de propagação evoluir a partir de um sítio  $W_1$  (poço de injeção) através da rede até atingir um outro sítio  $W_2$  (poço de extração). Estes dois poços  $W_1$  e  $W_2$  estão localizados simetricamente entre os limites da rede e separados por uma distância  $r$ . Neste

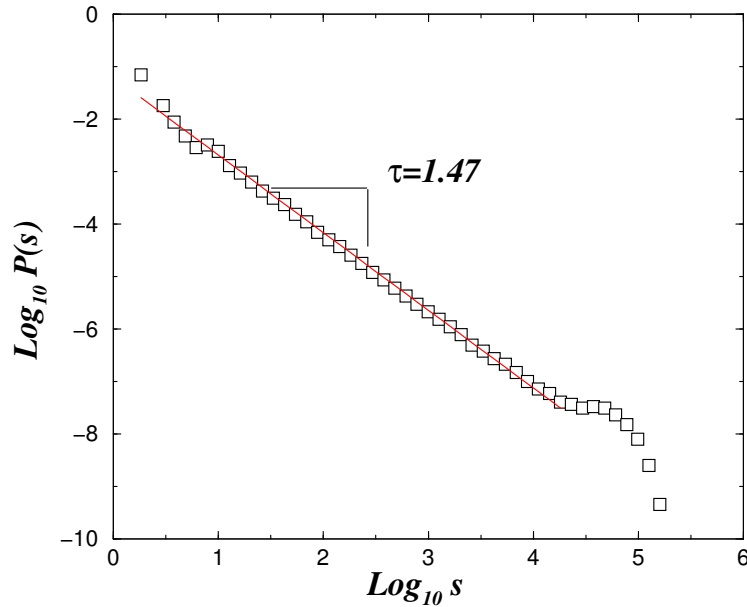


Figura 2.6: Gráfico em escala log-log para a distribuição de tamanho de avalanche  $P(s)$  em função do tamanho da avalanche  $s$ . A linha sólida em vermelho representa o ajuste linear obtido para a região com comportamento em lei de potência, cujo o expoente é  $\tau = 1.47 \pm 0.03$ .

trabalho, o objetivo foi investigar a dinâmica de penetração até o momento em que a interface de separação atinge o poço de extração  $W_2$ , supondo que o valor da pressão  $p_2$  do poço de extração é previamente estabelecido. No referido estudo, foi investigado a distribuição de tamanho de agregados ou sítio invadidos  $P(M)$  na condição de dois poços separados por uma distância  $r$  supondo que a pressão  $p_2$  no poço de extração é um parâmetro de controle. No primeiro caso o valor da pressão no poço de extração poderia assumir qualquer valor a partir de uma distribuição uniforme, ou seja estaria na mesma condição dos demais sítios da rede. Na outra condição, o sítio de extração teria o valor da pressão igual a  $p_c$ , ou seja, igual ao valor da probabilidade crítica para o modelo de percolação de sítios em uma rede quadrada.

Primeiramente, nós discutiremos o caso onde o valor da pressão  $p_2$  do poço de extração é especificado a partir de uma distribuição uniforme  $[0, 1]$ . Os resultados para a distribuição  $P(M)$  da massa do agregado invadido são mostrados na Figura 2.8. As curvas apresentadas indicam a existência de um limite inferior da ordem de  $r$  para o valor da massa do agregado invadido. Isto ocorre pois a massa mínima  $M_{min} = r$  atribuída ao agregado corresponde aos sítios perfeitamente alinhados conectando os dois poços  $W_1$  e  $W_2$ . A curva também apresenta uma elevação na região de grandes valores de massa, próximo ao valor máximo  $M_{max} = L^2$ , que denominaremos aqui  $M_0$ . Nesta

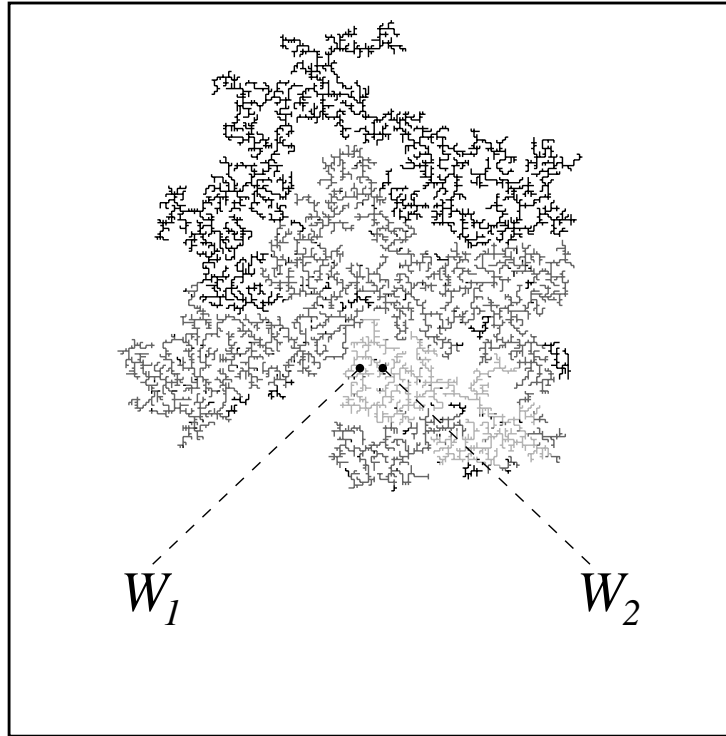


Figura 2.7: Configuração geométrica para uma estrutura de exploração considerando apenas dois poços. O poço de injeção  $W_1$  e o poço de extração  $W_2$ . Os poços estão localizados na parte central da rede a uma distância  $r$  um do outro.

situação, toda a rede é invadida antes que a interface possa atingir o poço de extração  $W_2$ . Os resultados sugerem que a distribuição de massa dos agregados invadidos  $P(M)$  apresenta um comportamento em lei de potência, ou seja

$$P(M) \sim M^{-\alpha} \quad (2-10)$$

com o expoente  $\alpha = 1.39 \pm 0.03$ . Reescalando cada uma destas curvas pelo seu máximo local  $M_0$  correspondente, observamos um colapso na região de escala. Em outra simulação realizada, atribuímos um valor constante para a pressão do sítio de extração  $p_2 = p_c$ , onde  $p_c = 0.5927$  corresponde ao limiar de percolação de sítios em uma rede quadrada (6). Neste caso, o sistema encontra-se sob o regime crítico. Os resultados para a distribuição de massa  $P(M)$  mostrados na Figura 2.9 confirmam a existência de um comportamento em lei de potência para massas intermediárias,  $P(M) \sim M^{-\alpha}$ , onde  $\alpha = 0.98 \pm 0.02$ . Comparado ao caso anterior, há uma variação significativa no valor do expoente  $\alpha$ . Este fato sugere uma possível mudança na classe de universalidade do processo em estudo. Vale salientar que o valor do expoente  $\alpha$  é o mesmo para qualquer valor  $p_2 < p_c$ , atribuído à pressão no poço de extração.

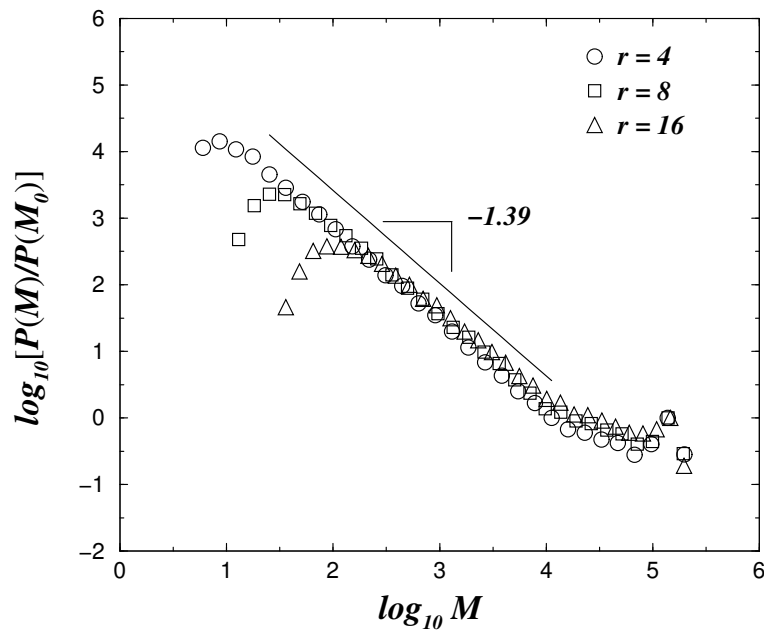


Figura 2.8: Gráfico em escala log-log da distribuição de massa dos agregados invadidos  $M$  para uma rede  $L = 512$  e  $r = 4$  (círculos),  $r = 8$  (quadrados) e  $r = 16$  (triângulos). O valor da pressão  $p_2$  no poço de extração é especificado a partir de uma distribuição uniforme  $[0, 1]$ . As curvas foram escalonadas pelo valor da massa  $M_0$ , situada na posição da saliência próxima ao valor máximo da massa do agregado. A linha reta corresponde ao ajuste linear, sendo o valor obtido para a inclinação  $\alpha = 1.39 \pm 0.03$ .

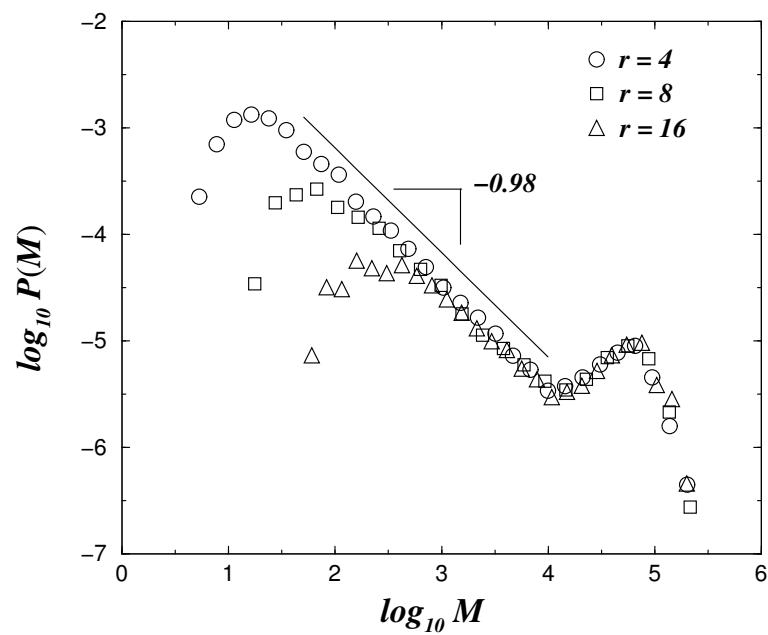


Figura 2.9: Curva em escala logarítmica para a distribuição de massa dos agregados invadidos  $M$  para uma rede  $L = 512$  e  $r = 4$  (círculos),  $r = 8$  (quadrados) e  $r = 16$  (triângulos). A pressão  $p_2$  é constante e igual a  $p_c = 0.5927$ . A linha sólida indica a regressão linear com o expoente  $\alpha = 0.98 \pm 0.02$ .



## 3 Percolação Invasiva entre Múltiplos Poços

### 3.1 Introdução

A investigação do escoamento multifásico em meios porosos (1, 2) tem como base vários conceitos que são presentes na teoria de percolação aplicada em uma rede discreta (5, 6, 15, 18). Para tratarmos o escoamento de um fluido através de um meio poroso, são necessária algumas simplificações com relação ao processo "realístico" do escoamento. Algumas destas simplificações são importantes para podermos fazer uma conexão entre o modelo proposto e o sistema real, uma vez que a inclusão de todos os ingredientes presentes em um escoamento real torna o estudo impraticável. Supondo que nossa atenção está voltada para o estudo do processo de exploração de petróleo e gás do interior da Terra, que ocorre em dois estágios. No primeiro estágio o petróleo é extraído por meio de um processo espontâneo que ocorre devido a pressões internas presente no reservatório. Já no segundo estágio, água ou outro fluido menos viscoso do que o petróleo é injetado no reservatório com o objetivo de deslocar o petróleo restante do interior do meio poroso (rocha). Neste trabalho iremos nos concentrar no estudo do segundo estágio deste processo de extração, quando se faz necessário injeção de um outro fluido para tentar deslocar o petróleo ou o gás do interior da rocha.

Conforme discutido no capítulo anterior, o processo de deslocamento de um fluido por meio da injeção de um outro fluido com propriedades diferentes é governado pelo balanço das forças superficiais que atuam sobre a interface de separação entre os dois fluidos. A diferença entre estas forças que atuam sobre a interface, geram um gradiente de pressão que é responsável pelo o avanço da interface de separação entre os fluidos através do meio poroso. Aqui trataremos o escoamento no regime de baixo número de Reynolds e baixo número Capilar. Neste regime, as forças capilares governam o escoamento e o parâmetro relevante é a Geometria local dos poros (raio dos poros) que compõem o meio poroso. O deslocamento da interface ocorre preferencialmente onde a pressão capilar é baixa. Tendo como base as simplificações proposta para este estudo, iremos utilizar o modelo de percolação invasiva sem aprisionamento para estimarmos a quantidade de fluido deslocada durante este processo.

A principal modificação incluída neste trabalho com relação aos trabalhos anteriores (8), é a possibilidade da inclusão de outros poços, denominados de poços de extração, no segundo estágio do processo de extração. A justificativa para esta investigação surge através de questões relacionadas com os possíveis caminhos que a interface de separação entre os dois fluidos podem seguir, até atingir qualquer um dos poços denominados de poços de extração. A primeira questão que surge se refere a decisão de trabalharmos com um ou mais poços de extração simultaneamente, ou optarmos pela decisão de incluirmos um novo poço de extração após o processo de extração por meio do poço previamente incluído ter atingido o limite de sua produção. Responder estas questões no contexto de um modelo simples como o modelo de percolação invasiva, pode ser relevante e muito útil tendo em vista a definição de estratégias de exploração em campos petrolíferos reais uma vez que, o custo para se cavar um novo poço é bastante significativo no processo de exploração como um todo.

### 3.1.1 O Modelo

Para simularmos o processo de deslocamento de um fluido por meio da injeção de um outro fluido com propriedades diferentes utilizaremos o modelo de percolação invasiva sem aprisionamento NTIP, discutido no capítulo anterior. Para este estudo iremos supor que o processo de invasão ocorre em uma rede quadrada, onde os sítios da rede representam uma série de tubos conectados completamente preenchidos com o fluido a ser deslocado, neste caso petróleo. O uso de um modelo em duas dimensões pode ser justificado quando consideramos o caso de reservatórios delgados (27). Também, podemos esperar que os resultados qualitativos são similares tendo em vista que as estruturas dos agregados obtidos bem como a dinâmica de invasão são semelhantes para o modelo de percolação invasiva em duas e três dimensões.

Neste modelo consideramos que o processo de invasão ocorre no limite de  $Ca \rightarrow 0$ , na qual é aproximadamente válido em uma situação onde água (ou outro fluido molhante) invade lentamente o meio poroso contendo petróleo. Neste limite, a interface entre os dois fluidos dentro do poro está sujeita a uma diferença de pressão expressa por meio de  $p_i$  que depende das propriedades físicas dos fluidos bem como dos aspectos geométricos dos poros que são diferentes para cada poro  $i$ . Supondo que todos os poros estão sujeitos a uma mesma pressão externa macroscópica, o poro com a menor pressão capilar, ou seja, o poro com o maior volume será o primeiro a ser invadido. Uma vez que um único poro é invadido por vez, o processo não apresenta correlação com eventos anteriores, não dependendo portanto da distribuição escolhida para o tamanho de poros. Este fato justifica a escolha por uma distribuição uniforme

para os tamanhos de poros na representação do meio poroso.

A dinâmica de invasão ocorre a medida que, a interface de separação evolui a partir de um poço, denominado poço de injeção, até atingir qualquer um dos poços, denominados poços de extração. Em nosso estudo, nós definimos o poço de injeção  $W_0$  no centro da rede de tamanho  $L$  e os demais poços de extração  $W_i$   $i = 1, 2, 3, 4$  estão localizados em quatro posições distribuídas simetricamente com relação ao poço de injeção a uma distância fixa  $r$  deste poço, conforme mostrado na Figura 3.1. Neste trabalho nós estudamos duas estratégias de exploração explicadas a seguir.

- Estratégia *A*: os quatro poços de extração são perfurados simultaneamente em conjunto com o poço de injeção.
- Estratégia *B*: o poço de injeção é perfurado e em seguida um primeiro poço de extração é perfurado e após o processo de extração do petróleo através deste poço ter atingido a sua saturação, ou seja, a produção de petróleo tenha se esgotado este poço é tampado e um novo poço de extração é então perfurado. Este processo segue até que tenhamos perfurado todos os quatro poços previstos. A produção é considerada esgotada para um dado poço, logo que a interface de separação tenha atingido este poço.

Embora a quantidade de petróleo extraída seja a mesma para ambas as estratégias *A* e *B*, a estratégia *B* permite que possamos escolher se iremos ou não perfurar um novo poço, dependendo da quantidade de petróleo extraída através do poço perfurado anteriormente.

Em nossa simulação a quantidade de petróleo extraída está associada com a massa  $M_i$  do agregado formado durante o processo de invasão, até o instante em que a interface de separação entre os dois fluidos tenha atingido um dos poços de extração. Esta massa, é basicamente o número total de sítios pertencente ao agregado formado durante este processo. Para a estratégia *A*, nós definimos a massa  $M_1$  como sendo o número de sítios invadidos até o processo de invasão atingir qualquer um dos quatro poços de extração. A massa  $M_2$  é definida como sendo igual ao número de sítios invadido após a interface ter atingido o primeiro poço e até esta interface atingir o segundo poço. As massas  $M_3$  e  $M_4$  seguem a mesma definição considerando os outros dois poços de extração, respectivamente. No caso da estratégia *B*, apenas um dos quatro poços é perfurado a cada vez. Para esta estratégia, a massa  $M_1$  é definida como sendo a massa total do agregado invadido quando este poço é atingido. Após o primeiro poço ser atingido pela frente de invasão, este poço é tampado e um segundo poço é então perfurado. O processo de invasão prossegue até este

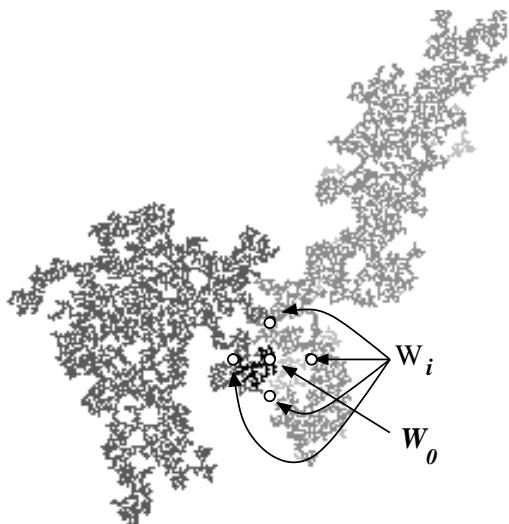


Figura 3.1: Evolução temporal da frente de invasão entre o poço de injeção ( $W_0$ ) e os múltiplos poços ( $W_i$ ) onde  $i = 1, 2, 3, 4$ . O processo de invasão é identificado de acordo com a seqüência pela qual os poços de extração são atingidos. Os diversos tons de cinza, indicam quais sítios foram invadidos para um determinado tempo de interação no processo de invasão. Os tons de cinza vão escurecendo do primeiro poço até o último.

novo poço ser atingido pela frente de invasão. A massa do agregado invadido nesta fase é então considerado como sendo igual a  $M_2$  e assim por diante para os demais valores de massa  $M_i$  até todos os quatro poços serem perfurados. Entretanto, existe a possibilidade de perfurarmos um poço em um ponto que já foi atingido pela frente de invasão. Neste caso este poço produz uma massa nula de petróleo, e o próximo poço pode então ser perfurado.

Este processo é repetido para várias realizações de redes distintas, com o objetivo de obtermos as distribuições de massa  $P_i(M)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  para os agregados invadidos.

### 3.1.2 Resultados e simulações

Iniciamos a análise dos resultados obtidos com a estratégia de exploração A. Uma típica realização do processo de invasão com múltiplos poços para esta estratégia, é ilustrada na Figura 3.1. Nesta figura mostramos os agregados invadidos, em diferentes tonalidades de cinza, quando a frente de invasão atingi os poços de 1 até 4, sucessivamente. O agregado como todo parece similar ao agregado obtido para a configuração de dois poços e apresenta a mesma dimensão fractal do agregado de percolação tradicional (13). Para obtermos a função densidade de probabilidade da massa do agregado invadido, nós realizamos várias simulações para este modelo em várias redes distintas

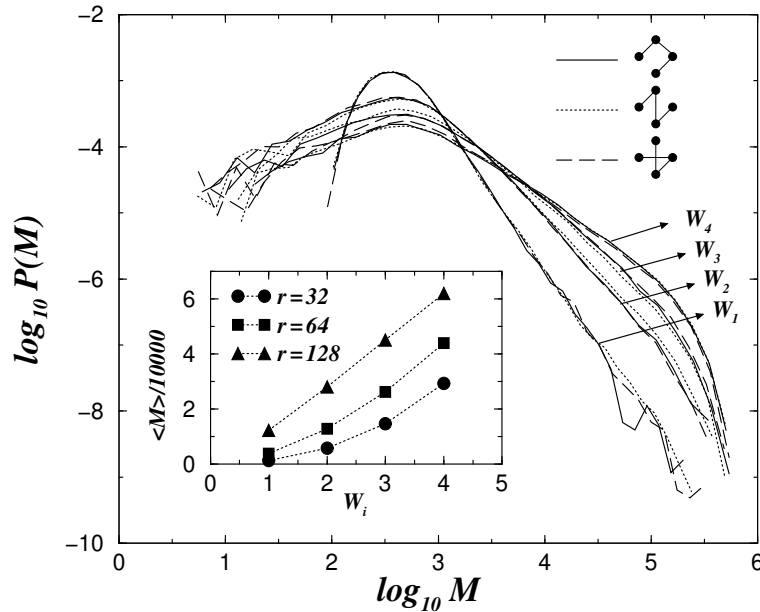


Figura 3.2: Gráfico em escala logarítmica da distribuição de massa do agregado até o momento em que cada um dos poços é atingido. Estes dados são referentes a estratégia A. Os diferentes estilos de linha no gráfico principal representa as três possíveis ordem na qual os poços podem ser atingidos. Estas distintas possibilidades são mostradas na legenda da figura. Está claro a partir da figura que as distribuições são independente da ordem em que os poços são atingidos. As distribuições apresentam comportamento em lei de potência com os seguintes expoentes controlando este decaimento:  $\alpha_1 = 2.45 \pm 0.07$ ,  $\alpha_2 = 1.74 \pm 0.05$ ,  $\alpha_3 = 1.34 \pm 0.05$ ,  $\alpha_4 = 1.04 \pm 0.03$ , correspondendo a cada um dos poços  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ , e  $W_4$  respectivamente. Em detalhe na figura, mostramos a massa média para os agregados invadidos como função do número do poço atingido pela frente de invasão, para diferentes distância entre os poços  $r$ .

e calculamos a massa do agregado invadido após a frente de invasão atingir cada um dos poços de extração. Este procedimento foi realizado para diferentes distância  $r$  entre o poço de injeção e os poços de extração. Para evitar efeitos de tamanho finito (8), nós descartamos todos os eventos, para o qual o agregado invadido toca as bordas da rede antes de atingir qualquer um dos poços de extração.

Como primeiro resultado de nossas simulações, mostramos na Figura 3.2 a distribuição de tamanho de agregados  $P_i(M)$  em um gráfico em escala logarítmica, associado a massa do agregado formado  $M_i^{(a)}$ ,  $i = 1, 4$ , para distintos valores de  $r$ . Neste caso, a massa  $M_i$  representa a massa do agregado formado após o poço  $W_{i-1}$  ter sido atingido e tampado, e até o instante em que o poço  $W_i$  foi atingido e tampado. A distribuição exibe um comportamento em lei de potência,  $P_i(M) \sim M^{-\alpha_i}$ , no intervalo de valores intermediário para a massa  $M$ . Estas curvas foram obtidas por meio de uma estatística sobre  $10^5$

realizações para um sistema de tamanho  $L = 2048$  e uma distância  $r = 32$  entre o poço de injeção e os poços de extração. A partir de um ajuste linear feito para a região em lei de escala obtemos os seguintes expoentes:  $\alpha_1 = 2.45 \pm 0.07$ ,  $\alpha_2 = 1.74 \pm 0.05$ ,  $\alpha_3 = 1.34 \pm 0.05$  e  $\alpha_4 = 1.04 \pm 0.03$  correspondendo a cada um dos poços de extração  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  e  $W_4$  respectivamente. Os expoentes que controlam o decaimento em lei de potência das distribuições, tornam-se menores do primeiro para o último poço, isto é, quando o último poço é atingido existe uma maior probabilidade do agregado formado ter uma massa maior do que os formados previamente. No gráfico inserido na mesma figura, podemos observar que o valor médio da massa dos agregados formado cresce com a ordem na qual os poços são atingidos e com a distância geométrica  $r$  entre os poços.

Quatro poços podem ser invadidos em 24 diferentes ordens, na qual, podem ser reduzidas a três diferentes conformações que são mostradas na Figura 3.2. Os resultados apresentados na Figura 3.2, indicam que a forma das distribuições não são afetadas pela ordem na qual os poços são atingidos durante o processo de extração.

Duas mudanças de comportamento podem ser observadas para cada distribuição, uma na região de pequenos valores de massa e outra na região de grandes valores de massa. Como discutido no trabalho (8), estas mudanças de comportamento são originárias de truncamentos exponenciais que estão relacionados com tamanhos característicos, intrínsecos do modelo utilizado. No limite de pequenos comprimento de escala, existe um tamanho natural que está relacionado com a distância entre os poços que pode ser expresso como  $r^{D_f}$ , onde  $D_f$  é a dimensão fractal do agregado de percolação. O efeito da mudança na distância  $r$  entre os poços, se reflete basicamente em um aumento ou deslocamento da região com comportamento em lei de potência. Similarmente, o decaimento exponencial observado na região de altos valores de massa  $M$  se deve a presença de um outro tamanho característico do sistema expresso como  $L^{D_f}$ , onde  $L$  é o tamanho natural da rede. Tendo como base estas características, descritas e observadas nas distribuições de massa, nós podemos inferir que a distribuição de massa  $P(M_i)$  segue a seguinte lei de escala:

$$P_i(M) \sim M^{-\alpha_i} \exp \left[ - \left( \frac{M}{C_1 L^{d_f}} \right)^2 \right], \quad (3-1)$$

onde  $\alpha_i$  são os expoentes de escala. Na Figura 3.3 nós mostramos um ajuste feito a partir da Eq. 3-1. Os expoentes  $\alpha_i$  obtidos estão em bom acordo com os observados na Figura 3.2 com um pequeno erro, que está dentro do desvio padrão obtido para este ajuste. O parâmetro  $C_1$  tem o mesmo valor para todas

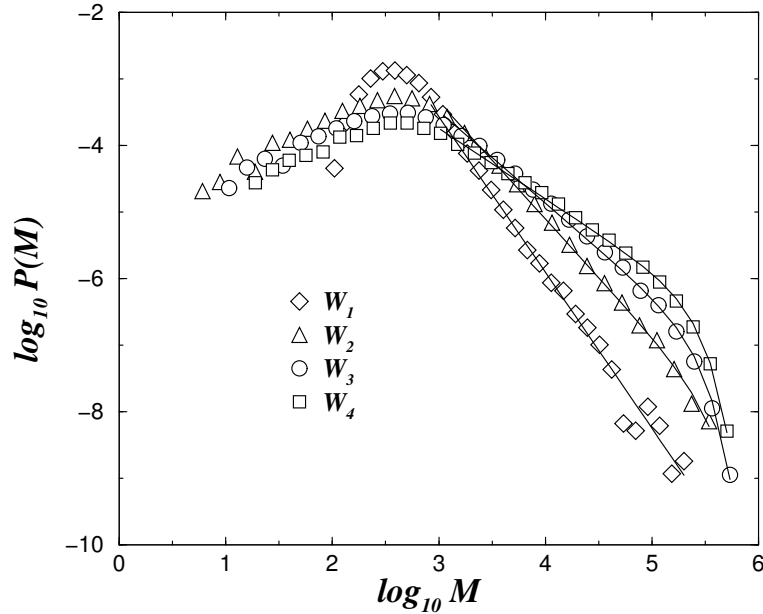


Figura 3.3: Gráfico da distribuição de massa para os agregados invadidos considerando a estratégia *A*. Os diferentes símbolos representam a ordem na qual os poços foram atingidos. A linha sólida corresponde ao melhor ajuste obtido a partir da Eq. 3-1. O valor obtido para o parâmetro que controla o fim da região de escala é  $C_1 = 0.22$ . Os valores para os expoentes  $\alpha_i$  são os mesmos obtidos através de um ajuste linear dos dados, conforme mostrado na Figura 4.2.

as distribuições.

Agora iremos analisar as distribuições de massa dos agregados formados durante o processo de invasão quando a estratégia *B* é utilizada. Neste caso, iniciamos o processo de extração com um único poço de extração. Uma vez que a frente de invasão atingi este poço o segundo poço é então, perfurado. Este processo de inclusão de novos poços de extração é continuado até termos todos os poços de extrações perfurados. Como mencionado antes, o poço de extração pode ser perfurado em um sítio que já foi invadido antes, neste caso a produção para este poço é considerado nula. Na prática, isto significa que no caso da estratégia *B*, nós temos uma ordem na qual os poços serão perfurados, enquanto que na estratégia *A*, todos os poços de extração são inicialmente perfurados e a ordem na qual estes poços são atingidos pela frente de invasão e posteriormente fechados é determinado apenas pelo processo de invasão. Então a massa  $M_1$  obtida na estratégia *B* pode ser considerada como a massa acumulada para qualquer um dos quatro estágios de invasão da estratégia *A*. Os resultados obtidos para a distribuição de massa  $P_i(M)$  dos agregados invadidos, considerando a estratégia *B* são mostrados na Figura 3.4 para diferentes distância entre os poços  $r$ . Novamente, as distribuições de massa apresentam um comportamento em lei de potência, sendo o valor do expoente

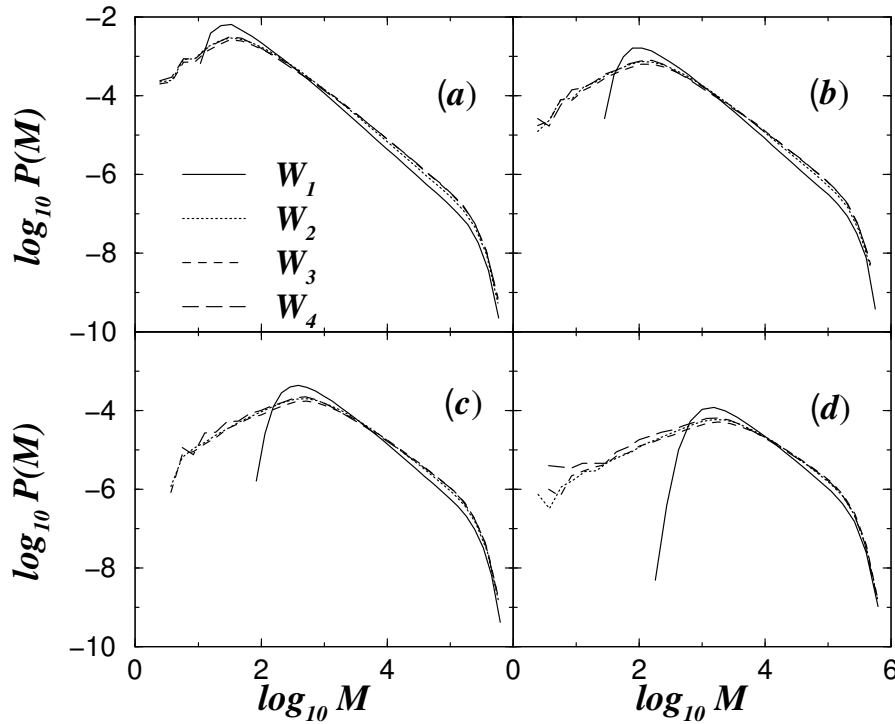


Figura 3.4: Gráfico em escala log-log da distribuição de massa dos agregados invadidos  $P(M)$ , considerando  $L = 2048$ . Estes resultados são referente a estratégia  $B$ , na qual novos poços são perfurados após o poço previamente perfurado ter sido atingido pela frente de invasão. Para uma melhor comparação, os eventos com massa nula foram excluídos da estatística. Nós mostramos os resultados obtidos para a distribuição de massa  $P(M)$  para (a)  $r = 8$ , (b)  $r = 16$ , (c)  $r = 32$  e (d)  $r = 64$ . No caso da estratégia  $B$ , a calda das distribuições são fracamente afetadas pela ordem na qual os poços são atingidos. O efeito do parâmetro  $r$  sobre a distribuição é de deslocar a região de escala.

obtido  $\alpha \simeq 1.39$ , para a distribuição de massa quando o primeiro poço é atingido semelhante ao encontrado para distribuição de massa na configuração de dois poços. As distribuições obtidas para os demais poços apresentam um menor decaimento. A variação nos valores dos expoentes obtidos com respeito a ordem  $i$  na qual os poços são atingidos é significativamente reduzida estando limitada ao intervalo  $[1.2, 1.4]$ . Note que, para uma melhor comparação a respeito das distribuições, nós excluímos da estatística para  $i = 2, 3, 4$ , todos os casos onde a massa do agregado é nula.

Considerando o caso onde os quatro poços de extração são perfurados, as estratégias  $A$  e  $B$  darão como resultado a mesma quantidade de petróleo extraída. Entretanto, a estratégia  $B$  oferece a opção de não perfurarmos o segundo ou terceiro poço dependendo da quantidade extraída até o momento. Alternativamente, a decisão pode ser de perfurar um novo poço a uma distância maior do poço de injeção. Esta decisão está relacionada com a probabilidade de perfurarmos um novo poço em uma região já invadida, o que resultará em uma produção nula. Outro fato interessante que devemos frisar é que, a



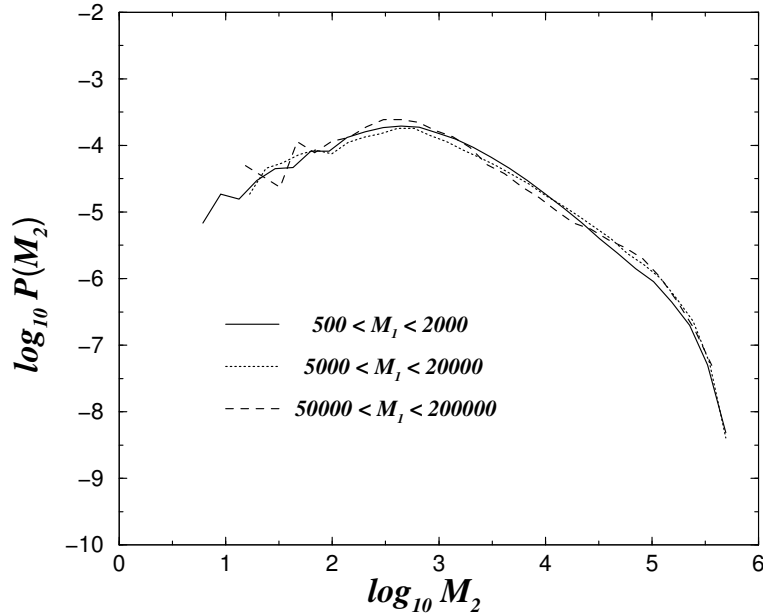


Figura 3.5: Gráfico em escala logarítmica para a distribuição de massa dos agregados invadidos para o segundo poço quando a estratégia  $B$  é utilizada. Nesta figura nós estudamos o efeito do tamanho do agregado formado durante o processo de invasão até a frente atingir o primeiro poço, sobre a distribuição de tamanho de agregados formado até a frente atingir o segundo poço. Estes resultados indicam que a distribuição de massa do agregado formado para o caso do segundo poço não depende da massa do agregado formado no evento anterior. Eventos com massa nula não são considerados nesta estatística, mas o efeito de tal evento é discutido na Figura 3.6.

distribuição de massa do agregado invadido é independente da quantidade de petróleo retirado em eventos anteriores, conforme podemos constatar na Figura 3.5. Já na Figura 3.6 nós analisamos a probabilidade de retirarmos um certa quantidade de petróleo como função da massa extraída através de um poço anterior e da distância  $r$  entre os poços. Em detalhe nesta figura, podemos observar que a probabilidade de perfurarmos um novo poço a uma distância suficientemente grande e este ponto pertencer a uma agregado já invadido é zero. Uma vez que a massa  $M_1$  é obtida, existe uma distância  $\xi$  além da qual torna-se improvável que um poço escolhido nesta posição faça parte de um agregado já invadido. Esta distância tem um comportamento em lei de escala na forma  $\xi \sim M_1^{1/d_f}$  onde  $d_f \approx 1.89$  é dimensão fractal do agregado de percolação tradicional (6). O resultado obtido a partir do colapso das funções utilizando este comprimento característico é mostrado na parte principal da Figura 3.6. É importante ressaltar que, dependendo da massa do agregado invadido no estágio anterior, pode ser mais eficiente escolher a posição para perfurar o próximo poço a uma distancia maior.

Com base nos resultados mostrados podemos garantir que a possibilidade

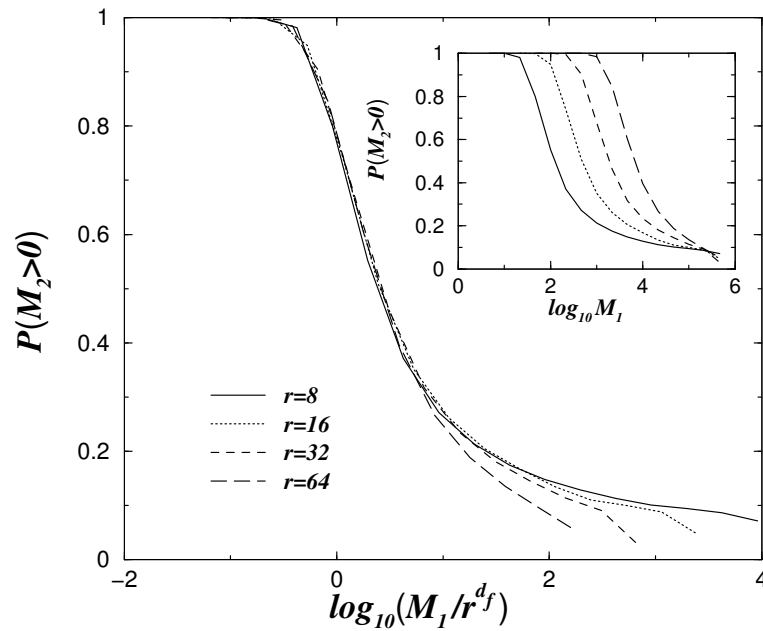


Figura 3.6: Probabilidade de termos uma determinada massa considerando o segundo poço como função da massa obtida para o primeiro poço considerando diferentes distâncias  $r$ . Em detalhe na figura nós mostramos os dados originais sem colapso na figura principal nós temos os dados colapsados em função da distância característica  $r^{d_f}$ , com  $d_f = 1.89$

de não perfurarmos poços adicionais tendo como base a distribuição de massa para o poço anterior, pode trazer uma boa economia no processo de exploração como todo. Devemos enfatizar que estes resultados são válidos considerando algumas aproximações que podem diferir um pouco de uma situação prática real.

## Conclusão

Na presente dissertação foi realizada uma série de investigações acerca do deslocamento de um fluido através de um meio poroso desordenado supondo uma configuração de poços semelhante a situações práticas encontradas em processos de exploração de petróleo e gás. O processo de exploração é feito por meio da injeção de um outro fluido com propriedades físico-químicas diferentes, através de um poço denominado de poço de injeção, com o objetivo de deslocar o fluido contido no interior do meio poroso até este atingir um ou mais poços denominados de poços de extração. Este estudo tem como objetivo principal melhorar a compreensão do efeito de uma Geometria desordenada sobre a dinâmica global neste tipo de processo.

Para simular o processo de invasão, utilizamos o modelo de percolação invasiva sem aprisionamento para uma configuração de cinco poços, onde um poço central é denominado de injeção e os demais poços denominados de extração. A configuração geométrica para este estudo, consiste basicamente de um poço de injeção localizado no centro de uma rede quadrada de tamanho  $L$ . Os demais poços denominados de extração, estão distribuídos simetricamente em torno do poço de injeção a uma distância  $r$ .

Inicialmente, estudamos as características de escala apresentadas pela distribuição da massa do agregado invadido durante o processo de invasão considerando duas estratégias para a exploração denominadas  $A$  e  $B$ . Na estratégia  $A$ , todos os poços são perfurados simultaneamente enquanto que na estratégia  $B$  os poços são perfurados em uma seqüência previamente definida. Conforme resultados obtidos a partir de simulações computacionais, encontramos que as distribuições de massa para os agregados invadidos apresentam comportamento em lei de potência para ambas as estratégias porém os expoentes dependem de qual estratégia foi utilizada. Mostramos também, que a quantidade de petróleo extraída independe de qual estratégia foi usada no processo,  $A$  ou  $B$ . No caso da estratégia  $B$ , nós encontramos que o expoente  $\alpha$  que controla o decaimento da distribuição é independente da seqüência na qual os poços foram atingidos pela frente de invasão, desde que estes não estejam localizados em uma região já invadida.

A decisão de perfurar outro poço de extração após o primeiro sofrer

um declínio na sua produção, dependerá sobre o valor da massa do agregado invadido até o presente momento, ou seja, do petróleo extraído através do poço perfurado anteriormente. Nossos resultados indicam que a produção é mais eficiente quando os poços perfurados a posteriori estão localizados a uma distância maior do que o tamanho característico do agregado invadido, que é proporcional a  $M^{1/D_f}$  onde  $D_f$  é a dimensão fractal do agregado de percolação tradicional.

Estas estratégias, não influenciam na quantidade de petróleo extraída de um determinado campo de petróleo, mas podem ser relevantes para a decisão de escolher uma ou outra estratégia para perfuração dos poços, uma vez que há um custo envolvido no processo de perfuração dos poços. A estratégia *B* permite uma escolha de continuar ou não o processo de exploração, em função da quantidade de petróleo já extraída. Isto pode propiciar uma apreciável economia no processo de exploração como um todo.

Apesar deste trabalho representar mais uma contribuição para o entendimento das propriedades de transportes em estruturas desordenadas, ele também tem o objetivo de iniciar uma série de estudos, especialmente no que diz respeito a fenômenos de transporte em geometrias complexas. Um passo natural a ser dado no futuro é a tentativa de estudarmos estes processos considerando a utilização de geometrias com outras topologias.

## Referências Bibliográficas

- [1] J. Bear, *Dynamics of Fluids in Porous Materials* (Elsevier, New York, 1972). (document), 3.1
- [2] F. A. Dullien, *Porous Media - Fluid Transport and Pore Structure* (Academic, New York, 1979). (document), 3.1
- [3] M. Sahimi, *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock* (VCH, Boston, 1995) and the extensive references therein. (document), 1.1.2, 1.2, 2.1
- [4] P. R. King, in *North Sea Oil and Gas Reservoirs III*, edited by A. T. Buller *et al.* (Graham and Trotman, London, 1990). (document)
- [5] J. Feder, *Fractals* (Plenum Press, New York, 1988). (document), 1.1.2, 1.1.2, 1.2, 1.2, 2.1, 2.2.1, 3.1
- [6] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor & Francis, Philadelphia, 1994). (document), 1.2, 1.2, 1.4, 1.2, 1.2, 1.5, 1.2, 1.3, 2.1, 2.3, 3.1, 3.1.2
- [7] T. Vicsek: *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapore, New Jersey, 1989). (document), 2.2.1
- [8] A. D. Araújo, T. F. Vasconcelos, A. A. Moreira, L. S. Lucena and J. S. Andrade Jr., Phys. Rev. E **72**, 041404 (2005). (document), 2.3, 3.1, 3.1.2, 3.1.2
- [9] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman and Company, 1982). 1.1
- [10] H. E. Stanley, *J. Phys. A* **10**, L211 (1977). 1.2
- [11] S. R. Broadbent and J.M. Hammersley, *Percolation Processes I. Crystals and Mazes*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **53**, 629-641, (1957). 1.2
- [12] H. E. Stanley *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971). 1.2

- [13] D. Wilkinson, J. F. Willemsen, J. Phys. A **16**, 3365 (1983). 2.1, 3.1.2
- [14] R. Chandler, J. Koplik, K. Lerman, J. F. Willemsen, J. Fluid Mech. **119**, 249 (1982). 2.1
- [15] *Fractals and Disordered Systems* 2nd ed., edited by A. Bunde and S. Havlin (Springer-Verlag, New York, 1996). 2.1, 3.1
- [16] M. Murat and A. Aharony, Phys. Rev. Lett. **57**, 1875 (1986). 2.1
- [17] J. P. Tian and K. L. Yao, Phys. Lett. A **251**, 259 (1999) 2.1
- [18] Y. Lee, J. S. Andrade, Jr., S. V. Buldyrev, N. V. Dokholyan, S. Havlin, P. R. King, G. Paul, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E. **60**, 3425 (1999). 2.2, 3.1
- [19] J. S. Andrade, Jr., S. V. Buldyrev, N. Dokholyan, S. Havlin, P. R. King, Y. Lee, G. Paul, and H. E. Stanley, Phys. Rev. E. **62**, 8270 (2000). 2.2
- [20] A. D. Araújo, A. A. Moreira, H. A. Makse, H. E. Stanley, and J. S. Andrade Jr., Phys. Rev. E **66**, 046304 (2002). 2.2
- [21] J. S. Andrade, Jr., A. D. Araújo, S. V. Buldyrev, S. Havlin, and H. E. Stanley Phys. Rev. E. **63**, 051403-1 (2001). 2.2
- [22] [http : //en.wikipedia.org/wiki/Diffusion – limited – aggregation](http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion%20-%20limited%20-%20aggregation) 2.2.1
- [23] [http : //www.aip.org/pt/vol – 53/iss – 11/p36.html](http://www.aip.org/pt/vol-53/iss-11/p36.html) 2.2.1
- [24] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld Phys. Rev. A **38**, 364 (1988). 2.2.2
- [25] S. Roux, E. Guyon, J. Phys. A **22**, 3693 (1989). 2.2.2
- [26] A. D. Araújo, J. S. Andrade Jr. and H. J. Herrmann, Phys. Rev. E **70**, 066150 (2004). 2.2.2
- [27] P. R. King, S. V. Buldyrev, N. V. Dokholyan, S. Havlin, E. Lopez, G. Paul, H. E. Stanley, Phys. A **314**, 103 (2002) 3.1.1

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)