UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO D MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

PROJETO DE REGULADORES FUZZY TAKAGI-SUGENO UTILIZANDO AS CONDIÇÕES INICIAIS DA PLANTA.

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista -UNESP, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Rafael Bellini Marques de Souza
Engenheiro Eletricista – FEIS / UNESP

Orientador: **Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira –** FEIS / UNESP

Ilha Solteira, Agosto de 2006.

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Dedico aos meus pais, irmãs e tios que sempre me apoiaram em todos os momentos difíceis da minha vida, pela confiança, carinho e amor por eles depositados.

Agradecimentos

Agradeço a Deus que sempre me deu força espiritual.

Aos meus pais Antenor e Vanilde que sempre confiaram e pelo amor.

Às minhas irmãs Larissa e Daniela que sempre me apoiaram.

Aos meus tios que sempre foram como pai e mãe me apoiando em todos os momentos em que necessitei.

Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, principalmente pela paciência, pela orientação e pelos ensinamentos humanos e científicos.

À Prof. Dr. Erica Regina Marani Daruichi Machado pelo apoio e conselhos muito valiosos.

À Prof. Dr. Neusa Augusto Pereira da Silva e ao Dr. Márcio Roberto Covacic pela ajuda com o Matlab.

Aos professores, técnicos e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica e da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.

Aos irmãos de república Edson, Fabio, Hernandes, Ivan, José Eduardo, Lucas, Marcos, Paulo, Ricardo, Rodrigo Camargo e Rodrigo Carvalho que sempre formaram a minha família durante os anos de faculdade e mestrado.

Aos amigos, cujos nomes não citarei, pelo motivo já consagrado do possível esquecimento de alguns, e todos que direta ou indiretamente contribuíram para a concretização deste trabalho.

“De tudo ficaram três coisas: a certeza de que estava sempre começando, a certeza de que era preciso continuar e a certeza de que seria interrompido antes de terminar. Fazer da interrupção um caminho novo. Fazer da queda um passo de dança, do medo uma escada, do sono uma ponte, da procura um encontro.”

(Fernando Sabino)

Resumo

Este trabalho aborda o problema de modelagem e controle de uma classe de sistemas não-lineares utilizando modelos *Fuzzy* Takagi-Sugeno (TS).

A contribuição principal foi a flexibilização dos ganhos do controlador, em função das condições iniciais da planta, tornando os controladores mais relaxados.

A matriz X, positiva definida, relacionada à função de Lyapunov $\mathbf{V}(x(t)) = x^T(t)\mathbf{X}^{-1}x(t)$ é relaxada utilizando o conceito de politopo, em relação ao politopo das condições iniciais. O controlador, descrito por modelos *fuzzy* TS do mesmo tipo da planta, apresenta seus ganhos dependentes das condições iniciais.

As análises de estabilidade e problemas de projetos de sistemas de controle são descritos através de Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities (LMIs)), que podem ser resolvidos eficientemente por técnicas de programação convexa.

As técnicas de projeto também permitem a especificação da resposta transitória através da taxa de decaimento e especificação de restrições nas entradas e saídas do sistema.

O projeto e a simulação do controle de um sistema bola-viga ilustram a aplicação das condições relaxadas de estabilidade para sistemas não-lineares.

Abstract

This work considers the problem of modeling and designing of a class of nonlinear systems, described by Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models.

The main contribution was the flexibility of the controller's gains, was a functions of the initial conditions of plant, making the controllers to be more relaxed.

The matrix X, positive definite, related to the Lyapunov function $\mathbf{V}(x(t)) = x^T(t)\mathbf{P}x(t)$ is relaxed using the concept of convex polytope, in relation to the polytope of the initial conditions. The controller, that is described by a Takagi-Sugeno model with the same structure of the plant, has its gains depending on the initial conditions of the plant.

The analysis of stability and problems of designing of control systems are described as the solution of LMIs (Linear Matrix Inequalities) that can be efficiently solved by convex programming techniques.

The design methods also allows the specification of the decay rate, constraints on control input and output.

One of the proposed methods system is applied in the control of a ball-beam.

Lista de Figuras

FIGURA 2.1. CONFIGURAÇÃO BÁSICA DE UM SISTEMA FUZZY TS. 8
FIGURA 2.2. ILUSTRAÇÃO DA APROXIMAÇÃO OBTIDA POR MODELOS FUZZY TS. 11
FIGURA 2.3. FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA TRIANGULAR. 12
FIGURA 2.4. FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA TRAPEZOIDAL. 12
FIGURA 2.5. FUNÇÃO DE PERTINÊNCIA EM FORMA DE SINO. 13
FIGURA 4.1. DIAGRAMA DE BLOCO DE UM SISTEMA SLIT. 20
FIGURA 4.2. POLITOPO DAS CONDIÇÕES INICIAIS DA PLANTA COM P = 4. 23
FIGURA 6.1. SISTEMA BOLA-VIGA. 57
FIGURA 6.2. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA A_IKX. 81
FIGURA 6.3. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA A_IKX_K. 81
FIGURA 6.4. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA A_IK_IX. 82
FIGURA 6.5. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_IK_IX_K$. 82
FIGURA 6.6. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA A_IK_KX. 83
FIGURA 6.7. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_IK_KX_K$. 83
FIGURA 6.8. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_IK_{IK}X$. 84
FIGURA 6.9. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_IK_{IK}X_K$. 84
FIGURA 6.10. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_{II}KX$. 85
FIGURA 6.11. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_{II}KX_K$. 86
FIGURA 6.12. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_{II}K_IX$. 86
FIGURA 6.13. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_{II}K_IX_K$. 87
FIGURA 6.14. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_{II}K_KX$. 87
FIGURA 6.15. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_{II}K_KX_K$. 88
FIGURA 6.16. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_{II}K_{IK}X$. 88
FIGURA 6.17. SIMULAÇÃO DO SISTEMA BOLA-VIGA PARA $A_{II}K_{IK}X_K$. 89
FIGURA A.1. INTERPRETAÇÃO DA ESTABILIDADE: A) ESTADO DE EQUILÍBRIO ESTÁVEL; B) ESTADO DE EQUILÍBRIO ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL E UMA TRAJETÓRIA REPRESENTATIVA; C) ESTADO DE EQUILÍBRIO INSTÁVEL E UMA TRAJETÓRIA REPRESENTATIVA. 98
FIGURA A.2. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO TEOREMA. 102

Lista de Tabelas

TABELA 6.1. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_i\mathbf{K}\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_i\mathbf{K}\mathbf{X}_k$ 69

TABELA 6.2. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}_k$ 70

TABELA 6.3. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_k\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_k\mathbf{X}_k$ 71

TABELA 6.4. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}_k$ 72

TABELA 6.5. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_i\mathbf{K}\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}_k$ 74

TABELA 6.6. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}\mathbf{X}_k$ 74

TABELA 6.7. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_i\mathbf{X}_k$ 75

TABELA 6.8. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_k\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_k\mathbf{X}_k$ 76

TABELA 6.9. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}_k$ 77

TABELA 6.10. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}_k$ 79

TABELA 7.1. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_i\mathbf{K}\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_i\mathbf{K}\mathbf{X}_k$ 91

TABELA 7.2. COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ E $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}_k$ 91

Sumário

1. INTRODUÇÃO 1

2. LÓGICA *FUZZY* 5

2.1. INTRODUÇÃO 5
2.2. SISTEMAS FUZZY PUROS 6
2.3. SISTEMAS COM FUZZIFICADOR E DEFUZZIFICADOR 7
2.4. SISTEMA FUZZY TAKAGI-SUGENO 8
2.4.1. Representação de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno 8
2.4.2. Função de Pertinência para Sistemas Fuzzy TS 10
2.4.3. Funções de Pertinência Tradicionais 11
2.5. MODELOS LOCAIS FUZZY 13
2.6. FORMA GENERALIZADA DO SISTEMA FUZZY TAKAGI-SUGENO 14

3. FUNÇÕES DE PERTINÊNCIAS E MODELAGEM 15

3.1. INTRODUÇÃO 15
3.2. FORMA GENERALIZADA DO SISTEMA FUZZY TS 15

4. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE QUADRÁTICA 19

4.1. RESTRIÇÃO DE ESTABILIDADE 19
4.2. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM GANHO K ÚNICO 20
4.3. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM GANHO K ÚNICO E X DEPENDENTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS 23
4.4. PLANTA E GANHO K DESCRITOS POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO 26
4.5. PLANTA E GANHO K DESCRITOS POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E A MATRIZ X DEPENDENTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS 29
4.6. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E O GANHO K DEPENDENTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS 31
4.7. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E O GANHO K E A MATRIZ X DEPENDENTES DAS CONDIÇÕES INICIAIS 32
4.8. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E O GANHO K DESCRITO POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E CONDIÇÕES INICIAIS 34
4.9. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO, O GANHO K DESCRITO POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E CONDIÇÕES INICIAIS E A MATRIZ X DEPENDENTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS.. 36
4.10. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS DO TIPO POLITÓPICAS COM GANHO K ÚNICO 38
4.11. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS DO TIPO POLITÓPICAS COM GANHO K ÚNICO E X DEPENDENTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS 40
4.12. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS DO TIPO POLITÓPICAS COM O GANHO K DEPENDENTE DE FUZZY TAKAGI-SUGENO 42
4.13. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS DO TIPO POLITÓPICAS, COM O GANHO K DEPENDENTE DE FUZZY TAKAGI-SUGENO E A MATRIZ X DEPENDENTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS 44
4.14. PLANTA DESCRITA PODE MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS DO TIPO POLITÓPICAS E O GANHO K DEPENDENTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS 46
4.15. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS DO TIPO POLITÓPICAS E O GANHO K E A MATRIZ X DEPENDENTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS 48
4.16. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS DO TIPO POLITÓPICAS E O GANHO K DESCRITO POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E CONDIÇÕES INICIAIS.... 50
4.17. PLANTA DESCRITA POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO COM INCERTEZAS DO TIPO, O GANHO K DESCRITO POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO E CONDIÇÕES INICIAIS E A MATRIZ X DEPENDENTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS 52

5. ÍNDICES DE DESEMPENHO PARA REGULADORES FUZZY 55

5.1.1. Taxa de Decaimento *55*
5.1.2. Restrição na Entrada *55*
5.1.3. Restrições na Saída *56*

6. SISTEMA BOLA-VIGA 57

6.1. O CONTROLE DE UM SISTEMA INCERTO 61
6.2. RESTRIÇÃO NA ENTRADA 68

7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS 90

7.1. CONCLUSÕES 90
7.2. PERSPECTIVAS 91

8. REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA 92

APÊNDICE A. ANÁLISE DA ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV 96

A.1. ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LYAPUNOV. 97
A.2. ANÁLISE DA ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV 101

APÊNDICE B. RESTRIÇÃO NOS VETORES DE ENTRADA E SAÍDA DA PLANTA ... 103

B.1. RESTRIÇÃO NO VETOR DE ENTRADA 103
B.2. RESTRIÇÃO NO VETOR DE SAÍDA 106

APÊNDICE C. COMPLEMENTO DE SCHUR 108

1. Introdução

Atualmente, a comunidade científica tem um crescente interesse em pesquisas de teoria e aplicações de controle com lógica *fuzzy*, que teve início em 1965, com Lofti A. Zadeh (Zadeh, 1965). Este interesse se deve à similaridade deste sistema com o comportamento humano na solução de problemas complexos, permitindo que o projetista utilize o conhecimento experimental para elaborar o projeto de controle do seu sistema.

Sistemas reais, em geral, são complexos devido ao surgimento de incertezas na forma de ambigüidades, e foi através da análise do comportamento humano diante de problemas, que pesquisadores começaram a questionar se o conceito de incertezas, ambigüidades e o conhecimento humano poderiam ser utilizados para completar a descrição e compreensão de sistemas reais complexos.

Duas razões principais motivam o estudo da teoria *fuzzy*. A primeira é pela capacidade de processar informação de natureza incerta ou qualitativa com a capacidade de aproximação universal (Campello (2002); Kosko (1997)). E a segunda está relacionada com as diferentes arquiteturas existentes, adequadas a diferentes tipos de aplicação. Este trabalho enfocou-se nos modelos *fuzzy* TS e estão relacionadas à aproximação e controle de sistemas não-lineares.

Uma ferramenta matemática chamada LMIs (*Linear Matrix Inequalities*, no português, Desigualdades Lineares Matriciais) tem sido amplamente difundida em sistemas de controle (Boyd et al., 1994). Problemas como a análise de estabilidade e o projeto de controle são reduzidos a problemas descritos por LMIs (Boyd et al., 1994). Numericamente, os problemas de LMIs podem ser resolvidos muito eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática convexa (Boyd et al., 1994). Desta forma, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs é equivalente a encontrar soluções para o problema original.

Uma das características mais importantes de qualquer sistema de controle inteligente é a habilidade para controlar um sistema em um ambiente incerto ou impreciso. Porém, para que um sistema seja controlado é necessário sua descrição por um modelo matemático, denominado “modelo de simulação”. Contudo, o modelo

verdadeiro é muito complexo para o projeto de sistemas de controles. Assim, utiliza-se um modelo simplificado, denominado “modelo de projeto” (Friedland (1996), Pietrobom (1999)). O modelo de projeto deve capturar as características essenciais do processo. Quando a planta do sistema é desconhecida, é necessário utilizar um processo de identificação dos parâmetros (Teixeira et al. (1996); Teixeira et al. (1998); Teixeira, Daruichi and Assunção (2000); Ioannou and Sun (1996)).

Para a obtenção de um modelo de projeto de plantas não-lineares a técnica mais comum é a de linearização da planta em um ponto de operação de interesse. Com este método o modelo de projeto é em geral um sistema linear invariante no tempo (SLIT), o projeto de reguladores é relativamente simples em muitos casos e a teoria é bastante desenvolvida, como, por exemplo, as técnicas baseadas no *root locus*, diagramas de Bode e Nyquist e na descrição através de variáveis de estado (Ogata (1997); Teixeira, Assunção and Daruichi (2003); Chen et al. (1999); Teixeira, Assunção and Avellar (2003)). Entretanto, este modelo de projeto descreve bem a dinâmica do sistema só em torno do ponto de operação em que o sistema foi linearizado.

No caso de sistemas que podem operar em regiões distantes do ponto de operação este modelo pode ser inadequado. Os modelos *fuzzy* TS (Takagi and Sugeno (1985), Sugeno and Kang (1988)) podem solucionar este problema facilmente. A idéia de modelos *fuzzy* TS consiste na descrição aproximada de um sistema não-linear como a combinação de certo número de modelos lineares (ou afins) invariantes no tempo locais, que descrevem aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados.

Uma fórmula para a obtenção dos modelos locais foi desenvolvida em Teixeira and Żak (1999). Com esta fórmula é possível obter resultados mais atraentes que a técnica de linearização, pois apresenta uma melhor aproximação do modelo *fuzzy* com respeito ao modelo de simulação.

Um novo método para determinar os modelos locais baseado na técnica de Teixeira and Żak (1999) foi proposto, onde os modelos possuem novos graus de liberdade e são obtidos a partir da solução de um problema de otimização baseado em LMIs (Daruichi, E.R.M., (2003)).

As funções de pertinência *fuzzy*, utilizadas para combinar os modelos locais, têm papel fundamental no desenvolvimento do projeto de controle, pois são elas que determinam, dados os modelos locais, a forma de aproximação do modelo *fuzzy* com relação ao modelo de simulação. As principais funções de pertinência utilizadas são as triangulares, trapezoidais e em forma de sino (gaussiana). Determinar as funções e os parâmetros que melhor se ajustam ao sistema nem sempre é uma tarefa trivial. Pode-se fazer a determinação através de uma forma sistemática. Estas funções são obtidas a partir de um problema de otimização que tem por objetivo minimizar o erro entre a aproximação *fuzzy* e o modelo verdadeiro.

Uma outra questão importante diz respeito ao erro de modelagem que é um fator determinante, pois ele define o número de modelos locais utilizados e suas localizações. Uma aproximação suficiente ou desejada para efetuar o projeto de um sistema de controle está relacionada com o erro de modelagem, pois quanto maior o número de modelos locais, melhor a aderência do modelo *fuzzy* ao modelo verdadeiro e menor se torna o erro. Um dos principais obstáculos à aplicação desses modelos em sistema de grande porte se dá devido ao excessivo número de modelos locais necessários para representar um sistema com determinada precisão por causa do aumento do número de entradas. A importância de se obter modelos *fuzzy* TS com poucos modelos locais é o aumento da factibilidade das LMIs e a facilidade de implementação no projeto de controladores.

Taniguchi e seus colaboradores apresentaram um método de representação exata de sistemas *fuzzy* com LMIs em Taniguchi et al. (2001). O método proporciona uma aproximação exata do sistema dentro de uma região de operação, utilizando 2s regras, sendo que “s” é o número de funções não-lineares presentes no sistema. As funções de pertinência são obtidas utilizando os modelos locais e as funções não-lineares.

A análise da estabilidade de sistemas de controle *fuzzy* é um dos conceitos mais importantes em sistemas de controle *fuzzy*. É possível projetar teoricamente um regulador *fuzzy* se for disponível um bom critério para a análise da estabilidade adequado a estes sistemas. Recentemente, muitos esforços têm sido feitos nesta área (Tanaka e Sugeno (1992); Cao, Rees e Feng (1996); Feng, Cao e Chak (1997); Tanaka, Ikeda e Wang (1998a); Teixeira e Żak (1999); Teixeira, Pietrobom e Assunção (2000); Kim e Lee (2000)).

O método de projeto baseado em LMIs para reguladores *fuzzy* é construído usando a Compensação Paralela Distribuída (CDP) (Tanaka and Sugeno, 1992), (Wang et al., 1996).

A motivação deste trabalho é em flexibilizar a matriz **X**, positiva definida, relacionada à função de Lyapunov $\mathbf{V}(x(t)) = x^T(t)\mathbf{X}^{-1}x(t)$, em função das condições iniciais de um politopo conhecido. Também a flexibilização dos controladores em função das condições iniciais é analisada. Essas situações são coerentes com aplicações práticas. As flexibilizações buscam melhorar os índices de desempenho do sistema, sendo esses índices a taxa de decaimento e a restrição do sinal de entrada do sistema.

O projeto e a simulação do controle do sistema bola-viga ilustram a aplicação de condições mais relaxadas de estabilidade para sistemas incertos.

O Capítulo 2 apresenta o modelo *fuzzy* proposto por Takagi-Sugeno. O Capítulo 3 introduz as funções de pertinências e modelagem. No Capítulo 4 introduz o regulador *fuzzy* e suas questões de estabilidade utilizando o modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno. O Capítulo 5 apresenta os índices de desempenho para reguladores *fuzzy*. No Capítulo 6 é abordado o projeto descrito por LMIs, de condições propostas nesta dissertação para o projeto de reguladores *fuzzy*. É apresentado o exemplo de aplicação utilizando o modelo bola-viga na forma contínua. No Capítulo 7 são discutidos resultados propostos e estudos comparativos realizados, além das perspectivas futuras.

2. Lógica *Fuzzy*

2.1. Introdução

Em meados de 1960, Zadeh pesquisava sobre formas de modelar alguns sistemas de natureza industrial, biológica ou química, que compreendessem situações ambíguas, não passíveis de processamento através da lógica computacional fundamentada na lógica booleana. A **Lógica *Fuzzy***, que ele desenvolveu, viola o conceito de que uma premissa é totalmente verdadeira ou totalmente falsa.

Em 1965, com uma publicação de Lotfi A. Zadeh ("*Fuzzy Sets*", *Information and Control*, Vol. 8, pp. 338-353) surgiu uma nova teoria de conjuntos. Zadeh criou uma teoria de conjuntos em que não há descontinuidades, ou seja, não há uma distinção abrupta entre elementos pertencentes e não pertencentes a um conjunto, que são os Conjuntos Nebulosos (*Fuzzy Sets*). Começava aí a se desenvolver a Teoria *Fuzzy* (Nebulosa), para tratar de variáveis "imprecisas", ou definidas de forma "vaga".

Zadeh percebeu que a modelagem de muitas atividades relacionadas a problemas industriais, biológicos ou químicos seria complexa demais se implementada da forma convencional. Os sistemas *fuzzy* foram utilizados, com sucesso, em algumas aplicações que se tornaram exemplos clássicos. A primeira aplicação que se tornou pública foi em 1974 na Inglaterra, onde o professor Mandani (Mandani, 1974) implementou um controle de uma máquina a vapor baseado em lógica *fuzzy*.

Com o tempo, outras aplicações foram surgindo. No oriente, os conceitos da lógica nebulosa foram aceitos com maior facilidade do que no mundo ocidental, investiu-se muito em soluções baseadas em modelagem e controle *fuzzy*. Inúmeras aplicações surgiram principalmente no Japão.

A Lógica *Fuzzy* ou Lógica Nebulosa é baseada no uso de aproximações, ao contrário da exatidão, com que estamos naturalmente acostumados a trabalhar. O princípio fundamental da Teoria *Fuzzy*, princípio da dualidade, estabelece que dois eventos opostos possam coexistir. Isto é, um elemento pode pertencer, em um certo grau, a um conjunto e, em um outro grau, a um outro conjunto. Nota-se isso em vários

casos na natureza e na vida cotidiana, principalmente quando se trata de conceitos abstratos.

Muitas vezes, quando se define um conjunto, encontram-se dificuldades em classificar elementos de sua fronteira, pois esses podem seguir algumas características do conjunto, mas não exatamente todas.

A principal característica de um sistema *fuzzy* é o conhecimento por regras *fuzzy* Se - Então. Uma regra *fuzzy* Se - Então é uma declaração na qual algumas palavras são descritas por funções contínuas, conhecidas como funções de pertinência. O Modelo Lingüístico é um modelo *fuzzy* proposto por Tong e é constituído por um conjunto de regras Se - Então (Tong, 1978). Este modelo é utilizado para identificar sistemas a partir de um conjunto de dados de suas entradas e saídas. O formato de uma regra do Modelo Lingüístico possui uma parte premissa e uma parte conseqüente do tipo:

Se x é **A** (premissa), (2.1)
Então y é **B** (conseqüente),

sendo x e y as variáveis de entrada e saída, respectivamente, e **A** e **B** são termos lingüísticos associados aos conjuntos *fuzzy* que descrevem lingüisticamente essas variáveis. Para um dado valor de entrada, a saída correspondente é calculada a partir do conjunto de regras através de um método de inferência.

Em geral há três tipos de sistemas *fuzzy* encontrados na literatura (Wang, 1997): os sistemas *fuzzy* puro, sistemas *fuzzy* com fuzzificador e defuzzificador e sistemas *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS).

2.2. Sistemas Fuzzy Puros

As regras *fuzzy* representam um conjunto de regras SE-ENTÃO. A inferência *fuzzy* combina estas regras *fuzzy* SE-ENTÃO em um mapeamento dos conjuntos *fuzzy* no espaço de entrada $U \subset \Re^n$ para conjuntos *fuzzy* no espaço de saída $V \subset \Re$ baseado nos princípios de lógica *fuzzy*.

A principal característica do sistema *fuzzy* puro é que suas entradas e saídas são conjuntos *fuzzy*.

2.3. Sistemas com fuzzificador e defuzzificador

Na teoria dos conjuntos nebulosos, o raciocínio exato corresponde a um caso limite do raciocínio aproximado e é interpretado como um caso particular de uma quantidade nebulosa. O valor verdade de uma proposição pertence a um conjunto parcialmente ordenado, ao contrário dos sistemas lógicos binários, onde o valor verdade só pode assumir dois valores: verdadeiro (1) ou falso (0).

O grau de pertinência dos elementos de um conjunto é especificado por um número: '1' para os estritamente membros, '0' para os não–membros e valores do intervalo]0,1[para representar a transição entre esses extremos. A chamada fuzzyficação consiste na atribuição de um grau de pertinência (do intervalo [0,1]) a uma variável, dentre um conjunto de elementos classificadores. Com isso classifica-se a variável com um termo lingüístico e cria-se uma semântica a partir de elementos matemáticos. A classificação da variável é feita por uma função de pertinência.

Controladores *fuzzy*, em geral, consistem de um estágio de entrada, um estágio de processamento, e um estágio de saída. O processamento verifica as regras, disparando um peso para cada uma (processo de inferência). O estágio de saída, finalmente, gera um resultado a partir das saídas das regras, combinando os resultados de cada uma por uma operação matemática que resulta em um valor *fuzzy* (nebuloso).

As medidas são convertidas em uma quantidade nebulosa (fuzzificada), processadas e transformadas, na saída do controlador, em valores não nebulosos (desfuzzificados) para o controle do processo.

Para definir o resultado de uma regra, um dos métodos mais comuns é o chamado método de inferência "max - min". A saída é dada pelo máximo entre as saídas das regras, que são obtidas pelos mínimos dos valores de suas variáveis lingüísticas. A desfuzzificação pode ser feita por vários métodos. O mais comum é chamado desfuzzificação pelo centróide: o "centro de massa" do resultado, obtido pelo método "max - min", fornece o valor da saída. Esse método favorece a regra com a saída de maior área.

2.4. Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno

Nos sistema *fuzzy* Takagi-Sugeno, as entradas e saídas são variáveis reais. Entretanto ao invés de considerar as regras *fuzzy* SE-ENTÃO no formato de regra do modelo lingüístico (2.1) (Takagi and Sugeno, 1985), estes sistemas usam as regras na seguinte forma (2.2):

$$\begin{aligned} &\text{Se } x \text{ é } \mathbf{A} \text{ (premissa),} \\ &\text{Então } y = cx \text{ (conseqüente).} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Comparando (2.1) e (2.2), verifica-se que a parte conseqüente muda de uma descrição que usa termos lingüísticos para uma simples fórmula matemática. Esta mudança torna mais fácil combinar as regras. Assim, no sistema *fuzzy* TS é obtido um peso médio dos valores nas partes ENTÃO das regras.

A Figura 2.1 mostra a configuração básica de um sistema *fuzzy* TS.

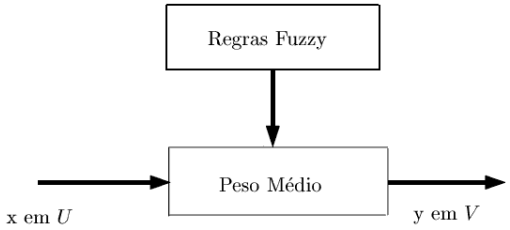

Figura 2.1. ***Configuração básica de um sistema fuzzy TS.***

2.4.1. Representação de Sistemas *Fuzzy* Takagi-Sugeno

Uma dada planta não-linear é representada pelo modelo *fuzzy* TS (Takagi and Sugeno, 1985) homogêneo através da conversão direta da equação não-linear do modelo físico.

A descrição local da planta dinâmica a ser controlada está disponível em termos dos modelos lineares locais:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_i x(t), \end{aligned}$$

sendo i = 1,2,...,r, o vetor de estado $\mathbf{x}(t) \in \Re^{n}$, o vetor de entrada $\mathbf{u}(t) \in \Re^{m}$, o vetor de saída $\mathbf{y}(t) \in \Re^{q}$, $\mathbf{A}_i \in \Re^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in \Re^{n \times m}$ e $\mathbf{C}_i \in \Re^{q \times n}$. A informação acima é

então fundida com as regras Se - Então disponíveis, sendo que a *i*-ésima regra pode ter a forma:

$$\text{Regra } i\text{: Se } z_1(t) \text{ é } M^i{}_1 \text{ E . . . E } z_p(t) \text{ é } M^i{}_p,$$
$$\text{Então } \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_i x(t), \end{cases} \tag{2.3}$$

$M^i{}_j$, j = 1,2,...,p é o conjunto *fuzzy* j da regra i e $z_1(t),...,z_p(t)$ são as variáveis premissas.

Seja $\mu^i_j(z_j(t))$ a função de pertinência do conjunto *fuzzy* $M^i{}_j$, definindo $w^i(z(t))$ como sendo (Tanaka et al., (1998a)):

$$w^i = \prod_{j=1}^{p} \mu_j^i\left(z'_j\right)$$

e $z(t)= [z_1(t)\ \ z_2(t) \ . \ . \ . \ \ z_p(t)]$.

Como $\mu^i_j(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para i = 1,2,...,r,

$$w^i(z(t)) \geq 0 \ \text{ e } \ \sum_{i=1}^{r} w^i(z(t)) > 0.$$

Uma escolha natural para a obtenção de um modelo *fuzzy* TS para sistemas não-lineares é adotar $z(t) = x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor estado do sistema não-linear.

Desta forma, dado um par ($x(t)$, $u(t)$), o sistema *fuzzy* resultante é obtido como a média ponderada dos modelos locais, e para i = 1,2,...r, tem a forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(x(t))(\mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^i(x(t))} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t))(\mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t))\mathbf{A}_i\right)x(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t))\mathbf{B}_i\right)u(t) \\ &= \mathbf{A}(\alpha)x(t) + \mathbf{B}(\alpha)u(t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

A saída é dada por:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^{r} w^i(x(t))\mathbf{C}_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^i(x(t))} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t))\mathbf{C}_i x(t) \\
&= \mathbf{C}(\alpha)x(t).
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Para i = 1,2,...,r,

$$
\alpha_i(x(t)) = \frac{w^i(x(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^i(x(t))} \geq 0, \text{ e } \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x(t)) = 1. \tag{2.6}
$$

2.4.2. Função de Pertinência para Sistemas Fuzzy TS

O modelo *fuzzy* global TS pode fornecer uma aproximação satisfatória do sistema não-linear até mesmo quando os modelos locais afins constituintes não são convencionalmente linearizados. Na prática, os modelos TS são construídos interpolando os parâmetros dos modelos locais constituintes usando inferência *fuzzy*. A escolha da função de pertinência é de importância crucial neste procedimento (Leith and Leithead, 1999). Esta escolha deve ser feita para fornecer tanta precisão do sistema dinâmico quanto possível. Entretanto, em algumas aplicações, funções de pertinência escolhidas para aproximar as dinâmicas globais podem ser inadequadas quando o modelo é linearizado.

A Figura 2.2 apresenta uma ilustração simplificada do modelo TS. Uma aproximação de uma função $f(x)$: $\Re \rightarrow \Re$ é feita com dois modelos locais lineares definidas pelas constantes a_1 e a_2 combinados com as funções de pertinência α_1(x) e α_2(x) (Daruichi, 2003).

Considere a função não-linear $f(x)$ descrita na Figura 2.2. Note que esta função pode ser aproximada, para $x \approx x_0$, por $f_1(x) = a_1x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$.

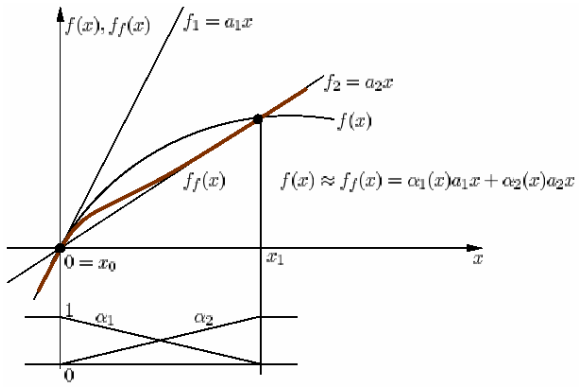

Figura 2.2. ***Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.***

Uma aproximação linear para esta função, representando $x \approx x_1$, por $f_2(x) = a_2x$; observe que esta segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois $f_2(x_0)=0$ e $f_2(x_1) \neq 0$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ definidas na Figura 2.2 (observe que $\alpha_1(x)+ \alpha_2(x) = 1$), um modelo *fuzzy* TS para $f(x)$ seria $f_f(x) = \alpha_1(x)f_1(x) + \alpha_2(x)f_2(x)$, como ilustrado na Figura 2.5. Pode-se observar que para $x \approx x_0$, então $\alpha_1 \approx 1$, $\alpha_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, então $\alpha_2 \approx 1$, $\alpha_1 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_2(x)$. Finalmente, verifique que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de operação) ou $f_2(x)$, por exemplo, para $x_0 \leq x \leq x_1$. Se aumentarmos o número de modelos locais, a aproximação torna-se melhor. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos *fuzzy* TS, no tratamento de funções e/ou de sistemas não lineares.

Os modelos *fuzzy* TS têm sido úteis na descrição aproximada de sistemas não-lineares. No caso do modelo *fuzzy* TS, quanto maior o número de modelos locais, melhor será a aderência do modelo à equação diferencial não-linear da planta.

2.4.3. Funções de Pertinência Tradicionais

Um conjunto *fuzzy A* em um universo *U* é caracterizado por uma função de pertinência μ_A que tem valores compreendidos no intervalo [0,1].

As principais funções de pertinência encontradas na literatura são as triangulares, trapezoidais e em forma de sino (gaussianas). Estas funções estão representadas nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5 respectivamente.

Os parâmetros da função de pertinência triangular são definidos por v_1, v_2 e v_3.

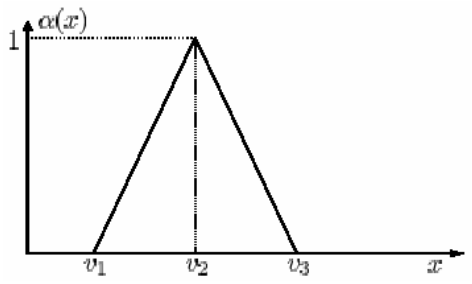

Figura 2.3. ***Função de pertinência triangular.***

Matematicamente, a função de pertinência triangular é definida por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x - v_1}{v_2 - v_1}, v_1 \le x \le v_2, \\ \dfrac{v_3 - x}{v_3 - v_2}, v_2 \le x \le v_3, \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Os parâmetros da função de pertinência trapezoidal são definidos por v_1, v_2, v_3 e v_4.

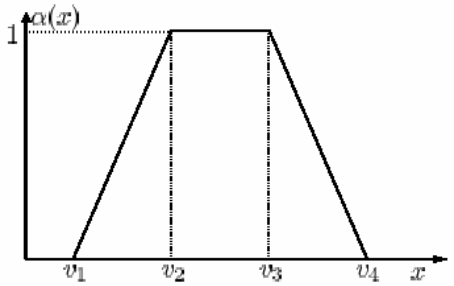

Figura 2.4. ***Função de pertinência trapezoidal.***

Matematicamente, a função de pertinência trapezoidal é definida por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x - v_1}{v_2 - v_1}, v_1 \le x \le v_2, \\ 1, v_2 \le x \le v_3, \\ \dfrac{v_4 - x}{v_4 - v_3}, v_3 \le x \le v_4, \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.8}$$

As funções de pertinência em forma de sino são definidas pelos parâmetros x_p, w_p e m_p como descrito a seguir:

$$\alpha(x) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\left|x - x_p\right|^{2m_p}}{w_p}\right)\right)} \tag{2.9}$$

sendo x_p o ponto médio, w_p a largura da função sino e $m_p \geq 1$, descrevem a convexidade da função sino.

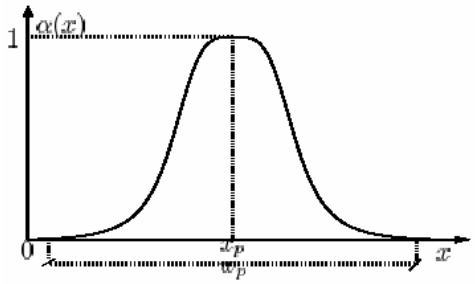

Figura 2.5. ***Função de pertinência em forma de sino.***

2.5. Modelos Locais Fuzzy

O primeiro passo no projeto de um sistema de controle é a construção de um "modelo de simulação" do sistema dinâmico a ser controlado. Este modelo deve representar o comportamento do sistema por meio de equações diferenciais lineares ou não-lineares e representar todas as características que possam ser obtidas do sistema físico.

O passo seguinte, após obter o modelo de simulação do sistema dinâmico, é obter o "modelo de projeto". Este modelo deve ser mais simples que o modelo de simulação e deve considerar apenas as características essenciais do projeto. Um modo de se obter o modelo de projeto é por meio da técnica de linearização por Taylor, apesar de não ser a técnica mais adequada para linearizar pontos distantes da origem (que não são pontos de equilíbrio).

Na literatura há dois métodos utilizados para a determinação dos modelos locais lineares. O primeiro foi elaborado em Teixeira and Żak (1999) e o segundo em Taniguchi et al. (2001).

O método proposto em Taniguchi et al. (2001) é um método de representação exata e será utilizada para a obtenção do modelos locais.

2.6. Forma Generalizada do Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno

No método proposto em Taniguchi et al. (2001) para determinar os modelos locais, a seguinte classe de sistemas não-lineares foi considerada:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(x(t))u_k(t) \tag{2.10}$$

sendo que i = 1,2,...,r, n e m denotam, respectivamente, o número de estados e entradas e $\tilde{f}_{ij}(x(t))$ e $g_{ik}(x(t))$ são funções de **x**(t), sendo **x**(t) = $[x_1(t) \ldots x_n(t)]^T$.

Para obter a forma generalizada deste método, considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{ij1} &\equiv \max_{x(t)} \left\{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \right\}, \\ a_{ij2} &\equiv \min_{x(t)} \left\{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \right\}, \\ b_{ik1} &\equiv \max_{x(t)} \left\{ g_{ik}(x(t)) \right\}, \\ b_{ik2} &\equiv \min_{x(t)} \left\{ g_{ik}(x(t)) \right\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Logo, para representar o sistema de simulação com a forma generalizada são necessários 2^s modelos locais, sendo s o número de não-linearidades existentes no sistema (Taniguchi et al., 2001).

O método proposto em Taniguchi et al. (2001), valoriza os modelos *fuzzy* TS, pois ele mostra que é possível modelar exatamente uma grande classe de sistemas não-lineares com modelos *fuzzy* TS, com um número finito de modelos locais. Entretanto, uma crítica a este método é o elevado número de modelos locais necessários, à medida que o número de não linearidades cresce, o que pode dificultar o projeto e/ou a implementação prática de sistemas de controle.

No Capítulo 6 será apresentada a aplicação deste método na modelagem de um sistema bola-viga não-linear e incerto.

3. Funções de Pertinências e Modelagem

3.1. Introdução

Funções de pertinência são funções utilizadas para relacionar os modelos locais, na descrição de sistemas dinâmicos através de modelos *fuzzy* TS.

Estas funções possuem duas características importantes. A primeira é que seus valores devem sempre estar entre 0 e 1, [0,1]. A segunda é que a soma dos valores de várias funções em um determinado ponto deve ser sempre igual a 1.

As funções de pertinência determinam o grau de aderência das funções obtidas com modelos *fuzzy* às funções do modelo de simulação e tem influência direta na estabilização do sistema.

Para a modelagem completa é necessário determinar o número de modelos locais e a localização destes modelos na região de operação. Existem algumas técnicas para a determinação desses fatores. A técnica que é um pouco mais elaborada é a que acrescenta modelos locais nas regiões onde as não-linearidades são mais fortes e reduz nas regiões com poucas não-linearidades.

Em Daruichi (2003) foi proposto um novo método para determinar as funções de pertinência de forma ótima. Neste método as funções são obtidas por meio de um problema de otimização que tem por objetivo diminuir o erro de modelagem em cada ponto da região de operação. No mesmo trabalho (Daruichi, 2003) foi apresentada uma solução analítica para o problema e uma solução por meio de LMIs.

Neste trabalho não será utilizado o método proposto por Daruichi (Daruichi, 2003), somente a modelagem exata proposta por Taniguchi (Taniguchi et al., 2001).

3.2. Forma Generalizada do Sistema Fuzzy TS

Para a forma generalizada dos sistemas *fuzzy* TS utilizou-se o método proposto em Taniguchi et al. (2001).

Considere a classe de sistemas do sistema (2.10) proposta em Taniguchi et al. (2001):

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{ij}(x(t))x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(x(t))u_k(t),\ i = 1,\ldots,n$$

A forma generalizada é obtida expressando as variáveis $\tilde{f}_{ij}(x(t))$ e $g_{ij}(x(t))$ como

$$\tilde{f}_{ij}(x(t)) = \sum_{\ell^a_{(i,k)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(x(t))a_{ij\ell^a_{(i,j)}},$$

$$g_{ik}(x(t)) = \sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(x(t))b_{ik\ell^b_{(i,k)}},$$

sendo que $\sigma_{ij1}(x(t)) \geq 0$, $\sigma_{ij2}(x(t)) \geq 0$, $\xi_{ik1}(x(t)) \geq 0$ e $\xi_{ik2}(x(t)) \geq 0$ possuem as seguintes características:

$$\sum_{\ell^a_{(i,k)}=1}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}(x(t)) = 1,$$

$$\sum_{\ell^b_{(i,k)}=1}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}(x(t)) = 1,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij1}(x(t)) &= \frac{\tilde{f}_{ij}(x(t)) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \\
\sigma_{ij2}(x(t)) &= \frac{a_{ij1} - \tilde{f}_{ij}(x(t))}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \\
\xi_{ik1}(x(t)) &= \frac{g_{ik}(x(t)) - b_{ik2}}{b_{ik1} - b_{ik2}}, \\
\xi_{ik2}(x(t)) &= \frac{b_{ik1} - g_{ik}(x(t))}{b_{ik1} - b_{ik2}}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Os elementos $\ell^a_{(i,j)}$ e $\ell^b_{(i,k)}$ estão relacionados com os limites de máximo e mínimo das funções $\tilde{f}_{ij}(x(t))$ e $g_{ij}(x(t))$. Sempre assumirão valores 1, relacionado ao máximo, ou 2, relacionado ao mínimo.

Usando a representação com modelos *fuzzy*, (2.10) é reescrita como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{ij}\left(x(t)\right)x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{ik}\left(x(t)\right)u_k(t) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell^a_{(i,k)=1}}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}\left(x(t)\right)a_{ij\ell^a_{(i,j)}} x_j(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell^b_{(i,k)=1}}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}\left(x(t)\right)b_{ik\ell^b_{(i,k)}}, u_k(t).\end{aligned}$$

A forma generalizada do sistema *fuzzy* TS na forma matricial é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell^a_{(i,k)=1}}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}\left(x(t)\right)a_{ij\ell^a_{(i,j)}} U^A_{ij} x(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell^b_{(i,k)=1}}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}\left(x(t)\right)b_{ik\ell^b_{(i,k)}} U^B_{ik} u(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell^a_{(i,k)=1}}^{2} \sigma_{ij\ell^a_{(i,j)}}\left(x(t)\right)A_{ij\ell^a_{(i,j)}} x(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell^b_{(i,k)=1}}^{2} \xi_{ik\ell^b_{(i,k)}}\left(x(t)\right)B_{ik\ell^b_{(i,k)}} u(t)\end{aligned} \tag{3.2}$$

sendo:

$$U^A_{ij} = i\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \text{j} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\end{array} \text{ e } U^B_{ik} = i\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \text{k} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\end{array}.$$

$$A^a_{ij} = i\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \text{j} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij\ell^a_{(i,j)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\end{array} \text{ e } B^b_{ik} = i\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \text{k} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{ik\ell^b_{(i,k)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

para $\ell^a_{(i,j)=1} = 1,2$ e $\ell^b_{(i,k)=1} = 1,2$ sendo que $U^A_{ij} \in \Re^{(nxn)}$ e $U^B_{ik} \in \Re^{(nxm)}$. Os elementos $a^a_{ij\ell_{(i,j)}}$ e $b^b_{ik\ell_{(i,k)}}$ desempenham um importante papel na redução de regras. A forma generalizada (3.2) é uma estrutura conveniente para a redução do número de regras.

Na literatura é possível encontrar assuntos a respeito da redução de regras (Taniguchi et al., 2001), bem como de funções de pertinência otimizadas (Teixeira and Żak, 1999), simetria das funções de pertinência (Daruichi, 2003) e solução por LMIs (Daruichi, 2003).

4. Critério de estabilidade quadrática

4.1. Restrição de estabilidade

Seja a o sistema autônomo, linear, incerto e invariante no tempo dado por:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\beta)x(t),\ \beta = \begin{bmatrix}\beta_1 & \dots & \beta_s\end{bmatrix} \tag{4.1}$$

sendo $x(t) \in \Re^n$ o vetor de n estados, β um vetor constante mas desconhecido e $\mathbf{A}(\beta) \in \Re^{nxn}$ a matriz que representa a dinâmica da planta do sistema incerto, dada pela combinação convexa (4.2) (Boyd et al., 1994):

$$\mathbf{A}(\beta) = \sum_{j=1}^{s} \beta_j \mathbf{A}_j. \tag{4.2}$$

O índice j varia entre os valores de 1 a s, sendo s dado pela relação $s=2^{\eta}$ e η é o número de parâmetros incertos da planta **A**. Por se tratar de uma combinação convexa, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{s} \beta_j = 1,\ \beta_j \geq 0 \text{ e } j = 1,\dots,s. \tag{4.3}$$

Dada a função candidata de Lyapunov, Apêndice A, (Ogata, 1997), dada em (4.4), quadrática, positiva definida ($\mathbf{V}(x(t)) > 0$ para $\forall x(t) \neq 0$ e $\mathbf{V}(0) = 0$). Deseja-se que a derivada em relação ao tempo, dada por (4.5), seja negativa definida ($\dot{\mathbf{V}}(x(t)) < 0$ para $\forall x(t) \neq 0$ e $\dot{\mathbf{V}}(0) = 0$), então, substituindo (4.1) em (4.5) e sendo $A(\beta)$ incerto, tem-se (4.6):

$$\mathbf{V}(x(t)) = x(t)^T \mathbf{P} x(t) > 0. \tag{4.4}$$

$$\dot{\mathbf{V}}(x(t)) = \dot{x}(t)^T \mathbf{P} x(t) + x(t)^T \mathbf{P} \dot{x}(t) < 0. \tag{4.5}$$

$$\dot{\mathbf{V}}(x(t),\alpha) = \dot{x}(t)^T \left(\mathbf{A}(\beta)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}(\beta)\right) x(t) < 0. \tag{4.6}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda a desigualdade (4.6), que satisfaça a desigualdade matricial linear (LMI):

$$\mathbf{A}(\beta)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}(\beta) < 0. \tag{4.7}$$

O Lema 4.1 enunciado abaixo, objetiva através do princípio da dualidade, padronizar a restrição de estabilidade quadrática em relação às outras restrições que serão discutidas a seguir. Tal princípio possibilita mudar a matriz **P** por sua inversa **X** sem alterar, essencialmente, a negatividade da restrição de estabilidade quadrática.

Lema 4.1: *O sistema dinâmico (4.1), com incertezas politópicas descritas em (4.2), é quadraticamente estável (Barmish, 1985), se e somente se, as seguintes LMIs forem satisfeitas simultaneamente:*

$$(\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T) < 0;\ i:1,...,r\ . \tag{4.8}$$

Prova: (Rampazzo, 2004).

Se as LMIs dadas em (4.8) forem factíveis, então, o sistema é assintoticamente estável. Neste caso, é necessário que as LMIs sejam factíveis em conjunto.

4.2. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com ganho K único

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.9):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.9}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha)$ a planta do sistema incerto descrito por modelos *fuzzy* TS, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.10) pelo laço de realimentação mostrado pela Figura 4.1.

$$u(t) = -\mathbf{K}x(t). \tag{4.10}$$

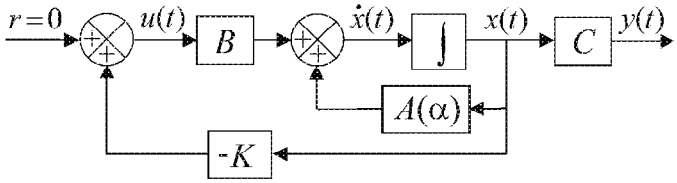

Figura 4.1. Diagrama de bloco de um sistema SLIT.

Logo, substituindo (4.10) em (4.9), obtém-se a relação (4.11):

$$\dot{x}(t) = (\mathbf{A}(\alpha) - \mathbf{BK})x(t). \tag{4.11}$$

Podemos escrever a equação (4.11) dependente de modelos *fuzzy* TS representada por:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i \ , \tag{4.12}$$

sendo:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1; \ \alpha_i \geq 0 \ \text{ e } \ i = 1,...,r. \tag{4.13}$$

Utilizando o critério de estabilidade quadrática (Boyd et al., 1994) e as LMIs necessárias para a obtenção dos ganhos K únicos, verificamos que podemos escrever a equação (4.11) da seguinte forma (Souza et al., 2006):

$$\dot{x}(t) = \overline{\mathbf{A}}\, x(t). \tag{4.14}$$

onde:

$$\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}(\alpha) - \mathbf{BK}). \tag{4.15}$$

Sendo $x(t) \in \Re^n$ o vetor de n estados e $\mathbf{A}(\alpha) \in \Re^{nxn}$ a matriz que representa a dinâmica da planta do sistema incerto, dada pela combinação convexa (4.12) (Boyd et al., 1994).

O índice i varia entre os valores de 1 a r, sendo r dado pela relação $r=2^{\eta}$ e η é o número de parâmetros incertos da planta **A**. Por se tratar de uma combinação convexa, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1; \ \alpha_i \geq 0 \ \text{ e } \ i = 1,...,r.$$

Através da função candidata de Lyapunov (Ogata, 1997), dada em (4.16), quadrática, positiva definida ($\mathbf{V}(x(t)) > 0$ para $\forall x(t) \neq 0$ e $\mathbf{V}(0) = 0$) com sua derivada em relação ao tempo, dada por (4.17), negativa definida ($\dot{\mathbf{V}}(x(t)) < 0$ para $\forall x(t) \neq 0$ e $\dot{\mathbf{V}}(0) = 0$), então, substituindo (4.14) em (4.17) e sendo $\mathbf{A}(\alpha)$ incerto, tem-se (4.18).

$$\mathbf{V}\big(x(t)\big) = x(t)^T \mathbf{P} x(t) > 0. \tag{4.16}$$

$$\dot{\mathbf{V}}\big(x(t)\big) = \dot{x}(t)^T \mathbf{P} x(t) + x(t)^T \mathbf{P} \dot{x}(t) < 0. \tag{4.17}$$

$$\dot{\mathbf{V}}\big(x(t), \alpha\big) = \dot{x}(t)^T \big(\overline{\mathbf{A}}(\alpha)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\overline{\mathbf{A}}(\alpha)\big) x(t) < 0. \tag{4.18}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda a desigualdade (4.19), quando a planta for $\overline{\mathbf{A}}(\alpha)$.

$$\overline{\mathbf{A}}(\alpha)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\overline{\mathbf{A}}(\alpha) < 0. \tag{4.19}$$

Rearranjando as equações acima e sabendo que $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{P}$ e fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{KX}$ igual a $\mathbf{R}$ ($\mathbf{KX} = \mathbf{R}$) linear, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i [\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - (\mathbf{BR} + \mathbf{R}^T \mathbf{B}^T)] < 0. \tag{4.20}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.20) é que exista uma matriz $\mathbf{X}$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R} \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs (4.21) sejam satisfeitas simultaneamente.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1 \mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_1^T - (\mathbf{BR} + \mathbf{R}^T \mathbf{B}^T) < 0, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - (\mathbf{BR} + \mathbf{R}^T \mathbf{B}^T) < 0, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_r^T - (\mathbf{BR} + \mathbf{R}^T \mathbf{B}^T) < 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X} > 0, \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \\
&\mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - (\mathbf{BR} + \mathbf{R}^T \mathbf{B}^T) < 0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, o ganho do controlador pode ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{X}^{-1}. \tag{4.23}$$

4.3. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com ganho K único e X dependente das condições iniciais

Defina o conjunto convexo (politopo) das condições iniciais por $x(0)=\sum_{k=1}^{p}\gamma_k x_{0k}$, $\sum_{k=1}^{p}\gamma_k=1$, $\gamma_k \geq 0$, $k=1,...,p$, sendo que os vetores x_{0k}, $k=1,...,p$ são conhecidos. Para ilustrar esta expressão, considere o caso no qual p = 4, representado graficamente na figura 4.2.

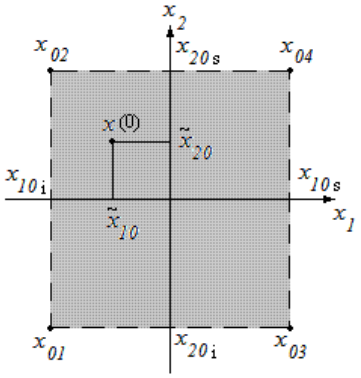

Figura 4.2. Politopo das condições iniciais da planta com p = 4.

Agora será mostrado, para esse exemplo, uma forma para a obtenção de γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4, dados $x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}$ e $x(0)$. Considere uma condição inicial arbitrária $x(0)=[\tilde{x}_{01} \quad \tilde{x}_{02}]^T$, representada na figura 4.2. Então, como $x_{10}\in[x_{10i} \quad x_{10s}]$ e $x_{20}\in[x_{20i} \quad x_{20s}]$, existem $\sigma_{1i}, \sigma_{1s}, \sigma_{2i}, \sigma_{2s}\in\Re$ tais que:

$$\tilde{x}_{10}=\sigma_{1i}x_{10i}+\sigma_{1s}x_{10s}, \sigma_{1i}+\sigma_{1s}=1, \sigma_{1i}\ \mathbf{e}\ \sigma_{1s}\in[0,1],$$
$$\tilde{x}_{20}=\sigma_{2i}x_{20i}+\sigma_{2s}x_{20s}, \sigma_{2i}+\sigma_{2s}=1, \sigma_{2i}\ \mathbf{e}\ \sigma_{2s}\in[0,1].$$

Para comprovar esse fato, note que:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{10}&=\sigma_{1i}x_{10i}+(1-\sigma_{1i})x_{10s}, \sigma_{1i}=\frac{\tilde{x}_{10}-x_{10s}}{x_{10i}-x_{10s}}\in[0,1], \sigma_{1s}=1-\sigma_{1i}\in[0,1]\ \mathbf{e}\\ \tilde{x}_{20}&=\sigma_{2i}x_{20i}+(1-\sigma_{2i})x_{20s}, \sigma_{2i}=\frac{\tilde{x}_{20}-x_{20s}}{x_{20i}-x_{20s}}\in[0,1], \sigma_{2s}=1-\sigma_{2i}\in[0,1].\end{aligned} \tag{4.24}$$

Assim, $x(0)$ pode ser representada da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \left[\tilde{x}_{10} \quad \tilde{x}_{20}\right]^T = \left[\left(\sigma_{1i}x_{10i} + \sigma_{1s}x_{10s}\right) \quad \left(\sigma_{2i}x_{20i} + \sigma_{2s}x_{20s}\right)\right]^T \\
&= \left[\left(\sigma_{2i} + \sigma_{2s}\right)\left(\sigma_{1i}x_{10i} + \sigma_{1s}x_{10s}\right) \quad \left(\sigma_{1i} + \sigma_{1s}\right)\left(\sigma_{2i}x_{20i} + \sigma_{2s}x_{20s}\right)\right]^T \\
&= \sigma_{2i}\sigma_{1i}\left[x_{10i} \quad x_{20i}\right]^T + \sigma_{2i}\sigma_{1s}\left[x_{10s} \quad x_{20i}\right]^T \\
&\quad + \sigma_{2s}\sigma_{1i}\left[x_{10i} \quad x_{20s}\right]^T + \sigma_{2s}\sigma_{1s}\left[x_{10s} \quad x_{20s}\right]^T.
\end{aligned}
$$

Definindo-se:

$$\gamma_1 = \sigma_{2i}\sigma_{1i}, \gamma_2 = \sigma_{2i}\sigma_{1s}, \gamma_3 = \sigma_{2s}\sigma_{1i} \textbf{ e } \gamma_4 = \sigma_{2s}\sigma_{1s},$$

observe que γ_1, γ_2, γ_3 e $\gamma_4 \geq 0$ ainda que $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = \left(\sigma_{1i} + \sigma_{1s}\right)\left(\sigma_{2i} + \sigma_{2s}\right) = 1$.

Finalmente a expressão:

$$x(0) = \sum_{k=1}^{4} \gamma_k x_{0k}$$

é obtida, considerando-se que:

$$
\begin{aligned}
x_{01} &= \left[x_{10i} \quad x_{02i}\right], \; x_{02} = \left[x_{10s} \quad x_{02i}\right], \\
x_{03} &= \left[x_{10i} \quad x_{02s}\right], \; x_{04} = \left[x_{10s} \quad x_{02s}\right].
\end{aligned}
$$

Observe a representação gráfica de x_{01}, x_{02}, x_{03} e x_{04} na figura 4.2. A análise acima pode ser generalizada para qualquer $p \in \{3,4,5,...\}$.

Na aplicação dos métodos propostos nesta dissertação, dada a condição $x(0)$ e os vértices x_{0k}, k = 1,...,p, então inicialmente é necessária a determinação dos parâmetros γ_k, k = 1,...,p. Tomando novamente o exemplo da figura 4.2, então dado $x(0) = \left[\tilde{x}_{10} \quad \tilde{x}_{20}\right]$, é possível obter σ_{1i}, σ_{1s}, σ_{2i}, σ_{2s} da forma descrita anteriormente. A seguir, calcula-se γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4 com as expressões também descritas acima.

Então, seja o sistema dado pela equação (4.9), sendo *u(t)* definida em (4.10) e considerando a matriz $\mathbf{X}$ depende das condições iniciais dada por:

$$\mathbf{X}(\gamma) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \; . \tag{4.25}$$

onde:

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 1; \; \gamma_k \geq 0 \text{ e } k = 1,..., p \; . \tag{4.26}$$

Logo, temos a relação (4.27):

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{BK} \right) x(t). \tag{4.27}$$

De modo semelhante ao anterior e se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.28) e (4.29).

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{BK} \right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{BK} \right)^T < 0\,, \tag{4.28}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left[\left(\mathbf{A}_i - \mathbf{BK} \right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\mathbf{A}_i - \mathbf{BK} \right)^T \right] < 0\,, \tag{4.29}$$

onde:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0\,; \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 1;\ \gamma_k \geq 0\,; \\ i = 1,\ldots,r \ \text{ e } \ k = 1,\ldots,p\,. \end{gathered} \tag{4.30}$$

Podemos escrever (4.29) como:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{A}_i - \mathbf{BK} \right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\mathbf{A}_i - \mathbf{BK} \right)^T < 0 \\ &\mathbf{A}_i \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k - \mathbf{BK} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \mathbf{A}_i^{\,T} - \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T < 0\,. \\ &\mathbf{A}_i \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \mathbf{A}_i^{\,T} - \mathbf{BK} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k - \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T < 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k$ igual a **R**, ou seja:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k\,, \tag{4.32}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k \mathbf{A}_i^{\,T} - \mathbf{BR} - \mathbf{R}^T \mathbf{B}^T < 0\,. \tag{4.33}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.33) é que exista uma matriz $\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R} \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.33) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_k > 0, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^T \\ &\mathbf{A}_i\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_i^T - \mathbf{BR} - \mathbf{R}^T\mathbf{B}^T < 0 \end{aligned}, \tag{4.34}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, o ganho do controlador pode ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\left(\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k\right)^{-1}. \tag{4.35}$$

4.4. Planta e ganho K descritos por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.36a):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.36a}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha)$ a planta do sistema incerto descrito por modelos *fuzzy* TS.

Utilizou-se o conceito de Compensação Distribuída Paralela (CPD) (Tanaka and Sugeno, 1992) para projetar reguladores *fuzzy* para estabilizar sistemas não-lineares descritos por modelos *fuzzy*. A idéia é projetar um compensador para cada regra do modelo *fuzzy*. Para cada regra, são utilizadas técnicas de projeto de controle linear. O regulador *fuzzy* global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação *fuzzy* de cada regulador linear individual. A CDP oferece um procedimento para projetar um regulador para modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno, onde cada regra de controle é projetada a partir da correspondente regra de um modelo TS da planta. O regulador *fuzzy* projetado compartilha os mesmos conjuntos de regras com o modelo *fuzzy* nas partes premissas. Para os modelos *fuzzy* (2.3), sendo i=1,...,r, os reguladores *fuzzy* via CDP possuem a seguinte estrutura:

Regra i: SE $x_1(t)$ é M_1^i E ... E $x_p(t)$ é M_p^i,

ENTÃO

$$u(t) = -\mathbf{K}_i x(t). \tag{4.36b}$$

Logo, o regulador *fuzzy* é dado por:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^{r} \omega^i(z(t))\mathbf{K}_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} \omega^i(z(t))} \\ &= -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(z(t))\mathbf{K}_i x(t) \\ &= -\mathbf{K}(\alpha)x(t) \end{aligned} \tag{4.36c}$$

sendo $\alpha = [\alpha_1, ..., \alpha_r]^T$.

Assim o ganho do controlador é:

$$\mathbf{K}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i\,. \tag{4.37}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i x(t). \tag{4.38}$$

Substituindo (4.38) em (4.36a), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right) x(t). \tag{4.39}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.40).

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right)^T < 0\,, \tag{4.40}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left[(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i)\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i)^T \right] < 0 \,, \tag{4.41}$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1; \ \alpha_i \geq 0 \ \text{ e } \ i = 1,...,r \,. \tag{4.42}$$

Podemos escrever (4.41) como:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i)\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i)^T < 0 \,, \\ &\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{X}\mathbf{K}_i^T\mathbf{B}^T < 0, \\ &\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{K}_i^T\mathbf{B}^T < 0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ igual a $\mathbf{R}_i$, ou seja:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{K}_i\mathbf{X} \,, \tag{4.44}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i^T\mathbf{B}^T < 0 \,. \tag{4.45}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.45) é que exista uma matriz $\mathbf{X}$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_i \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.45) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X} > 0, \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \\ &\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i^T\mathbf{B}^T < 0 \end{aligned} \,, \tag{4.46}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtidos pela expressão:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{R}_i\mathbf{X}^{-1}. \tag{4.47}$$

4.5. Planta e ganho K descritos por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e a matriz X dependente das condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.48):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.48}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha)$ a planta do sistema incerto descrita por modelos *fuzzy* TS, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.49).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\alpha)x(t), \tag{4.49}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \ . \tag{4.50}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i x(t). \tag{4.51}$$

Substituindo (4.51) em (4.48), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right) x(t). \tag{4.52}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.53).

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right)^T < 0 \ , \tag{4.53}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left[(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i)^T \right] < 0 \ , \tag{4.54}$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0;\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = 1;\ \gamma_k \geq 0;$$
$$i = 1,\ldots,r \text{ e } k = 1,\ldots,p\,. \tag{4.55}$$

Podemos escrever (4.54) como:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\right)\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\left(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\right)^T < 0\\
&\mathbf{A}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_i^{\ T} - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0\,.\\
&\mathbf{A}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_i^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k$ igual a $\mathbf{R}_i$, ou seja:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{K}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\ , \tag{4.57}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_i^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0\,. \tag{4.58}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.58) é que exista uma matriz $\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_i \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.58) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_k > 0, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^T\\
&\mathbf{A}_i\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_i^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned}, \tag{4.59}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtidos pela expressão:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{R}_i\left(\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\right)^{-1}. \tag{4.60}$$

4.6. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e o ganho K dependente das condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.61):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.61}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha)$ a planta do sistema incerto descrita por modelos *fuzzy* TS, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.62).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\gamma)x(t), \tag{4.62}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\gamma) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \ . \tag{4.63}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k x(t). \tag{4.64}$$

Substituindo (4.64) em (4.61), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right) x(t). \tag{4.65}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.66).

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right)^T < 0\,, \tag{4.66}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i \gamma_k \left[(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_k)\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_k)^T \right] < 0\,, \tag{4.67}$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0;\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = 1;\ \gamma_k \geq 0;$$
$$i = 1,\ldots,r \text{ e } k = 1,\ldots,p\,. \tag{4.68}$$

Podemos escrever (4.67) como:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_k)\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_k)^T < 0\\
&\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{X}\mathbf{K}_k^T\mathbf{B}^T < 0\,.\\
&\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{K}_k^T\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_k\mathbf{X}$ igual a $\mathbf{R}_k$, ou seja:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{K}_k\mathbf{X}, \tag{4.70}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^T\mathbf{B}^T < 0\,. \tag{4.71}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.71) é que exista uma matriz **X** positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_k \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.71) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X} > 0, \mathbf{X} = \mathbf{X}^T\\
&\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^T\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned}, \tag{4.72}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtidos pela expressão:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{R}_k\mathbf{X}^{-1}. \tag{4.73}$$

4.7. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e o ganho K e a matriz X dependentes das condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.74):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.74}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha)$ a planta do sistema incerto descrita por modelos *fuzzy* TS, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.75).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\gamma)x(t), \tag{4.75}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\gamma) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \ . \tag{4.76}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k x(t). \tag{4.77}$$

Substituindo (4.77) em (4.74), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right) x(t). \tag{4.78}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.79).

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right)^T < 0, \tag{4.79}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{p} \alpha_i \gamma_k \left[(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_k) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_k)^T \right] < 0 \ , \tag{4.80}$$

onde:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1; \ \alpha_i \geq 0 \, ; \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 1; \ \gamma_k \geq 0 \, ; \\ i = 1,\ldots,r \ \text{ e } \ k = 1,\ldots,p \ . \end{gathered} \tag{4.81}$$

Podemos escrever (4.80) como:

$$\left(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\right)\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k\left(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\right)^T < 0$$

$$\mathbf{A}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k \mathbf{A}_i^T - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{B}^T < 0\,. \tag{4.82}$$

$$\mathbf{A}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k \mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k \mathbf{K}_k^T \mathbf{B}^T < 0$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_k\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k$ igual a $\mathbf{R}_k$, ou seja:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{K}_k\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k\,, \tag{4.83}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^T\mathbf{B}^T < 0\,. \tag{4.84}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.84) é que exista uma matriz $\mathbf{X}_k$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_k \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.84) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_k > 0, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^T \\ &\mathbf{A}_i\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^T\mathbf{B}^T < 0 \end{aligned}, \tag{4.85}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtidos pela expressão:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{R}_k\left(\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k\right)^{-1}. \tag{4.86}$$

4.8. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e o ganho K descrito por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.87):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.87}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha)$ a planta do sistema incerto descrita por modelos *fuzzy* TS, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.88).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\alpha, \gamma)x(t), \tag{4.88}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\alpha, \gamma) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i \gamma_k \mathbf{K}_{ik} \ . \tag{4.89}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i \gamma_k \mathbf{K}_{ik} x(t). \tag{4.90}$$

Substituindo (4.90) em (4.87), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i \gamma_k \mathbf{K}_{ik} \right) x(t). \tag{4.91}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.92).

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i \gamma_k \mathbf{K}_{ik} \right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{A}_i - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i \gamma_k \mathbf{K}_{ik} \right)^T < 0, \tag{4.92}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i \gamma_k \left[(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_{ik})\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_{ik})^T \right] < 0, \tag{4.93}$$

onde:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0;\ \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 1;\ \gamma_k \geq 0; \\ i = 1,\ldots,r \ \text{ e } \ k = 1,\ldots,p\ . \end{gathered} \tag{4.94}$$

Podemos escrever (4.93) como:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_{ik})\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}\mathbf{K}_{ik})^T < 0 \\ &\mathbf{A}_i\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{X}\mathbf{K}_{ik}^T\mathbf{B}^T < 0\ . \\ &\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{K}_{ik}^T\mathbf{B}^T < 0 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}$ igual a $\mathbf{R}_{ik}$, ou seja:

$$\mathbf{R}_{ik} = \mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}, \tag{4.96}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{R}_{ik} - \mathbf{R}_{ik}^T\mathbf{B}^T < 0. \tag{4.97}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.97) é que exista uma matriz $\mathbf{X}$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_{ik} \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.97) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X} > 0, \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \\ &\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i^T - \mathbf{B}\mathbf{R}_{ik} - \mathbf{R}_{ik}^T\mathbf{B}^T < 0 \end{aligned}, \tag{4.98}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtidos pela expressão:

$$\mathbf{K}_{ik} = \mathbf{R}_{ik}\mathbf{X}^{-1}. \tag{4.99}$$

4.9. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno, o ganho K descrito por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e condições iniciais e a matriz X dependente das condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.100):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.100}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha)$ a planta do sistema incerto descrita por modelos *fuzzy* TS, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.101).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\alpha, \gamma)x(t), \tag{4.101}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\alpha,\gamma)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\ . \tag{4.102}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t)=-\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}x(t). \tag{4.103}$$

Substituindo (4.103) em (4.100), obtemos:

$$\dot{x}(t)=\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\mathbf{A}_i-\mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\right)x(t). \tag{4.104}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P}\in\Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.105).

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\mathbf{A}_i-\mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\right)\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k+\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\mathbf{A}_i-\mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\right)^T<0 \tag{4.105}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\left[(\mathbf{A}_i-\mathbf{B}\mathbf{K}_{ik})\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k+\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k(\mathbf{A}_i-\mathbf{B}\mathbf{K}_{ik})^T\right]<0\ , \tag{4.106}$$

onde:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=1;\ \alpha_i\geq 0\,;\sum_{k=1}^{p}\gamma_k=1;\ \gamma_k\geq 0\,;\\ i=1,\ldots,r\ \text{ e }\ k=1,\ldots,p\ .\end{gathered} \tag{4.107}$$

Podemos escrever (4.106) como:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{A}_i-\mathbf{B}\mathbf{K}_{ik})\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k+\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k(\mathbf{A}_i-\mathbf{B}\mathbf{K}_{ik})^T<0\\ &\mathbf{A}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k-\mathbf{B}\mathbf{K}_{ik}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k+\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_i^T-\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_{ik}^T\mathbf{B}^T<0\,.\\ &\mathbf{A}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k+\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_i^T-\mathbf{B}\mathbf{K}_{ik}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k-\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_{ik}^T\mathbf{B}^T<0\end{aligned} \tag{4.108}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_{ik}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k$ igual a $\mathbf{R}_{ik}$, ou seja:

$$\mathbf{R}_{ik} = \mathbf{K}_{ik} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \ , \tag{4.109}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_i \mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k \mathbf{A}_i^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_{ik} - \mathbf{R}_{ik}^{\ T} \mathbf{B}^T < 0 \ . \tag{4.110}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.110) é que exista uma matriz $\mathbf{X}_k$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_{ik} \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.110) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_k > \ 0, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^T \\ &\mathbf{A}_i \mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k \mathbf{A}_i^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_{ik} - \mathbf{R}_{ik}^{\ T} \mathbf{B}^T < 0 \end{aligned} , \tag{4.111}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtidos pela expressão:

$$\mathbf{K}_{ik} = \mathbf{R}_{ik} \left(\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \right)^{-1} . \tag{4.112}$$

4.10. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com incertezas do tipo politópicas com ganho K único

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.113):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha, \beta) x(t) + \mathbf{B} u(t). \tag{4.113}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha, \beta)$ a planta do sistema incerto, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.114).

$$u(t) = -\mathbf{K} x(t). \tag{4.114}$$

Substituindo (4.114) em (4.113), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K} \right) x(t). \tag{4.115}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.116).

$$\begin{gathered}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}\right)\mathbf{X}+\mathbf{X}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}\right)^T<0,\\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}\right)\mathbf{X}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i}^{s}\alpha_i\beta_j\mathbf{X}\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}\right)^T<0\end{gathered} \tag{4.116}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\left[\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}\right)\mathbf{X}+\mathbf{X}\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}\right)^T\right]<0, \tag{4.117}$$

onde:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=1;\ \alpha_i\geq 0;\sum_{j=1}^{s}\beta_j=1;\ \beta_j\geq 0;\\ i=1,\ldots,r\ \text{ e }\ j=1,\ldots,s.\end{gathered} \tag{4.118}$$

Podemos escrever (4.117) como:

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}\right)\mathbf{X}+\mathbf{X}\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}\right)^T<0\\ \mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}-\mathbf{BKX}+\mathbf{XA}_{ij}^{\ T}-\mathbf{XK}^T\mathbf{B}^T<0.\\ \mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}+\mathbf{XA}_{ij}^{\ T}-\mathbf{BKX}-\mathbf{XK}^T\mathbf{B}^T<0\end{gathered} \tag{4.119}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{KX}$ igual a **R**, ou seja:

$$\mathbf{R}=\mathbf{KX}, \tag{4.120}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}+\mathbf{XA}_{ij}^{\ T}-\mathbf{BR}-\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T<0. \tag{4.121}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.121) é que exista uma matriz **X** positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}\in\Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.121) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{gathered}\mathbf{X}>\ 0,\mathbf{X}=\mathbf{X}^T\\ \mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}+\mathbf{XA}_{ij}^{\ T}-\mathbf{BR}-\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T<0\end{gathered}, \tag{4.122}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, o ganho do controlador pode ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{X}^{-1}. \tag{4.123}$$

4.11. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com incertezas do tipo politópicas com ganho K único e X dependente das condições iniciais

Seja o sistema dado pela equação (4.113), sendo *u(t)* definida em (4.114) e considerando a matriz $\mathbf{X}$ depende das condições iniciais dada por:

$$\mathbf{X}(\gamma) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \ , \tag{4.124}$$

onde:

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 1; \ \gamma_k \geq 0 \ \text{ e } k = 1,..., p \ . \tag{4.125}$$

Logo, temos a relação (4.126):

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK} \right) x(t). \tag{4.126}$$

De modo semelhante ao anterior e se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.127) e (4.128).

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK} \right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK} \right)^T < 0 , \tag{4.127}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \left[\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK} \right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK} \right)^T \right] < 0 , \tag{4.128}$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0;\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 1;\ \beta_j \geq 0;\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = 1;\ \gamma_k \geq 0;$$
$$i = 1,...,r;\ \ j = 1,...,s \text{ e } k = 1,...,p\,. \tag{4.129}$$

Podemos escrever (4.128) como:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK}\right)\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK}\right)^T < 0\\
&\mathbf{A}_{ij}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k - \mathbf{BK}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}^T\mathbf{B}^T < 0\,.\\
&\mathbf{A}_{ij}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{BK}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}^T\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned} \tag{4.130}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k$ igual a *R*, ou seja:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\ , \tag{4.131}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{BR} - \mathbf{R}^T\mathbf{B}^T < 0\,. \tag{4.132}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.132) é que exista uma matriz $\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R} \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.132) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_k > \ 0, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^T\\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{BR} - \mathbf{R}^T\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned}, \tag{4.133}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, o ganho do controlador pode ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\left(\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\right)^{-1}. \tag{4.134}$$

4.12. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com incertezas do tipo politópicas com o ganho K dependente de Fuzzy Takagi-Sugeno

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.135):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha, \beta)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.135}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha, \beta)$ a planta do sistema incerto, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.136).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\alpha)x(t), \tag{4.136}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \ . \tag{4.137}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i x(t). \tag{4.138}$$

Substituindo (4.138) em (4.135), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right) x(t). \tag{4.139}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.140).

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right) \mathbf{X} + \mathbf{X} \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right)^T < 0 \ , \tag{4.140}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \left[(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i)\mathbf{X} + \mathbf{X}(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i)^T \right] < 0 \ , \tag{4.141}$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0;\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 1;\ \beta_j \geq 0;$$
$$i = 1,...,r \text{ e } j = 1,...,s. \tag{4.142}$$

Podemos escrever (4.141) como:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\right)^T < 0 \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{X}\mathbf{K}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0. \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{K}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned} \tag{4.143}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ igual a $\mathbf{R}_i$, ou seja:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{K}_i\mathbf{X}, \tag{4.144}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0. \tag{4.145}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.145) é que exista uma matriz **X** positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_i \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.145) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X} > 0, \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned}, \tag{4.146}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{R}_i\mathbf{X}^{-1}. \tag{4.147}$$

4.13. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com incertezas do tipo politópicas, com o ganho K dependente de Fuzzy Takagi-Sugeno e a matriz X dependente das condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.148):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha,\beta)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.148}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ a planta do sistema incerto, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.149).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\alpha)x(t), \tag{4.149}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \,. \tag{4.150}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i x(t). \tag{4.151}$$

Substituindo (4.151) em (4.148), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right) x(t). \tag{4.152}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.153).

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{K}_i \right)^T < 0 \tag{4.153}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \left[\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_i\right)^T \right] < 0 \,, \tag{4.154}$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0;\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 1;\ \beta_j \geq 0;\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = 1;\ \gamma_k \geq 0;$$
$$i = 1,...,r;\ j = 1,...,s \text{ e } k = 1,...,p. \tag{4.155}$$

Podemos escrever (4.154) como:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK}_i\right)\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK}_i\right)^T < 0 \\
&\mathbf{A}_{ij}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k - \mathbf{BK}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0. \\
&\mathbf{A}_{ij}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{BK}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned} \tag{4.156}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k$ igual a $\mathbf{R}_i$, ou seja:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{K}_i\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\ , \tag{4.157}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{BR}_i - \mathbf{R}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0. \tag{4.158}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.158) é que exista uma matriz $\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_i \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.158) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_k > 0, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^T \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{BR}_i - \mathbf{R}_i^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned}, \tag{4.159}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{R}_i\left(\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\right)^{-1}. \tag{4.160}$$

4.14. Planta descrita pode modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com incertezas do tipo politópicas e o ganho K dependente das condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.161):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha, \beta)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.161}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha, \beta)$ a planta do sistema incerto, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.162).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\gamma)x(t), \tag{4.162}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\gamma) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \ . \tag{4.163}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k x(t). \tag{4.164}$$

Substituindo (4.164) em (4.161), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right) x(t). \tag{4.165}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.166).

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right) \mathbf{X} + \mathbf{X} \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right)^T < 0 , \tag{4.166}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{p} \alpha_i \beta_j \gamma_k \left[\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k \right) \mathbf{X} + \mathbf{X} \left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k \right)^T \right] < 0 , \tag{4.167}$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0;\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 1;\ \beta_j \geq 0;\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = 1;\ \gamma_k \geq 0;$$
$$i = 1,...,r;\ j = 1,...,s \text{ e } k = 1,...,p. \tag{4.168}$$

Podemos escrever (4.167) como:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\right)^T < 0 \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{X}\mathbf{K}_k^{\ T}\mathbf{B}^T < 0. \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{K}_k^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned} \tag{4.169}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_k\mathbf{X}$ igual a $\mathbf{R}_k$, ou seja:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{K}_k\mathbf{X}, \tag{4.170}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^{\ T}\mathbf{B}^T < 0. \tag{4.171}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.171) é que exista uma matriz **X** positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_k \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.171) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X} > 0, \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned}, \tag{4.172}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{R}_k\mathbf{X}^{-1}. \tag{4.173}$$

4.15. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com incertezas do tipo politópicas e o ganho K e a matriz X dependente das condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.174):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha,\beta)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.174}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ a planta do sistema incerto, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.175).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\gamma)x(t), \tag{4.175}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\gamma) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \ . \tag{4.176}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k x(t). \tag{4.177}$$

Substituindo (4.177) em (4.174), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right) x(t). \tag{4.178}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.179).

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \alpha_i \beta_j \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{K}_k \right)^T < 0 \ , \tag{4.179}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{p} \alpha_i \beta_j \gamma_k \left[\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\right) \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k \left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\right)^T \right] < 0 \ , \tag{4.180}$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0;\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 1;\ \beta_j \geq 0;\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = 1;\ \gamma_k \geq 0;$$
$$i = 1,\ldots,r;\ j = 1,\ldots,s \text{ e } k = 1,\ldots,p. \tag{4.181}$$

Podemos escrever (4.180) como:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\right)\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\right)^T < 0\\
&\mathbf{A}_{ij}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_k^{\ T}\mathbf{B}^T < 0.\\
&\mathbf{A}_{ij}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{K}_k\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k - \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_k^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned} \tag{4.182}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_k\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k$ igual a $\mathbf{R}_k$, ou seja:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{K}_k\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\ , \tag{4.183}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^{\ T}\mathbf{B}^T < 0. \tag{4.184}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.184) é que exista uma matriz $\mathbf{X}_k$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_k \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.184) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}_k > 0, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^T\\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}_k + \mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}^{\ T} - \mathbf{B}\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^{\ T}\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned}, \tag{4.185}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{R}_k\left(\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\right)^{-1}. \tag{4.186}$$

4.16. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com incertezas do tipo politópicas e o ganho K descrito por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.187):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha,\beta)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.187}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ a planta do sistema incerto, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.188).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\alpha,\gamma)x(t), \tag{4.188}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\alpha,\gamma) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\ . \tag{4.189}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}x(t). \tag{4.190}$$

Substituindo (4.190) em (4.187), obtemos:

$$\dot{x}_p(t) = \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\right)x_p(t). \tag{4.191}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.192).

$$\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\right)^T < 0\ , \tag{4.192}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\beta_j\gamma_k\left[\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{ik}\right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{ik}\right)^T\right] < 0\ , \tag{4.193}$$

onde:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1;\ \alpha_i \geq 0;\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 1;\ \beta_j \geq 0;\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = 1;\ \gamma_k \geq 0;$$
$$i = 1,...,r;\ j = 1,...,s \text{ e } k = 1,...,p. \tag{4.194}$$

Podemos escrever (4.193) como:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK}_{ik}\right)\mathbf{X} + \mathbf{X}\left(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{BK}_{ik}\right)^T < 0 \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} - \mathbf{BK}_{ik}\mathbf{X} + \mathbf{XA}_{ij}{}^T - \mathbf{XK}_{ik}{}^T\mathbf{B}^T < 0. \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} + \mathbf{XA}_{ij}{}^T - \mathbf{BK}_{ik}\mathbf{X} - \mathbf{XK}_{ik}{}^T\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned} \tag{4.195}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}$ igual a $\mathbf{R}_{ik}$, ou seja:

$$\mathbf{R}_{ik} = \mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}, \tag{4.196}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} + \mathbf{XA}_{ij}{}^T - \mathbf{BR}_{ik} - \mathbf{R}_{ik}{}^T\mathbf{B}^T < 0. \tag{4.197}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.197) é que exista uma matriz $\mathbf{X}$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_{ik} \in \Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.197) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X} > 0, \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \\
&\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X} + \mathbf{XA}_{ij}{}^T - \mathbf{BR}_{ik} - \mathbf{R}_{ik}{}^T\mathbf{B}^T < 0
\end{aligned}, \tag{4.198}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K}_{ik} = \mathbf{R}_{ik}\mathbf{X}^{-1}. \tag{4.199}$$

4.17. Planta descrita por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno com incertezas do tipo, o ganho K descrito por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e condições iniciais e a matriz X dependente das condições iniciais

Seja o sistema dado pela seguinte equação (4.200):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}(\alpha,\beta)x(t) + \mathbf{B}u(t). \tag{4.200}$$

Sendo $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ a planta do sistema incerto, e seja a entrada *u(t)*, definida em (4.201).

$$u(t) = -\mathbf{K}(\alpha,\gamma)x(t), \tag{4.201}$$

onde:

$$\mathbf{K}(\alpha,\gamma) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\ . \tag{4.202}$$

Assim a entrada *u(t)* é:

$$u(t) = -\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}x(t). \tag{4.203}$$

Substituindo (4.203) em (4.200), obtemos:

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\right)x(t). \tag{4.204}$$

Se o método de estabilidade de Lyapunov, equação 4.5, for satisfeito para uma função quadrática, então existirá uma $\mathbf{P} \in \Re^{nxn}$ simétrica, positiva definida e que atenda as desigualdades de (4.205).

$$\begin{gathered}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\right)\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k + \\ \sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\alpha_i\beta_j\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\gamma_k\mathbf{K}_{ik}\right)^T < 0\end{gathered}, \tag{4.205}$$

ou ainda:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{p}\alpha_i\beta_j\gamma_k\left[\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}_{ik}\right)\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k+\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}_{ik}\right)^T\right]<0\,, \tag{4.206}$$

onde:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=1;\ \alpha_i\geq 0;\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j=1;\ \beta_j\geq 0;\sum_{k=1}^{p}\gamma_k=1;\ \gamma_k\geq 0;\\ i=1,\ldots,r;\ \ j=1,\ldots,s \text{ e } k=1,\ldots,p\,.\end{gathered} \tag{4.207}$$

Podemos escrever (4.206) como:

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}_{ik}\right)\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k+\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\left(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{BK}_{ik}\right)^T<0\\ &\mathbf{A}_{ij}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k-\mathbf{BK}_{ik}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k+\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}{}^T-\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_{ik}{}^T\mathbf{B}^T<0\,.\\ &\mathbf{A}_{ij}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k+\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}{}^T-\mathbf{BK}_{ik}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k-\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\mathbf{K}_{ik}{}^T\mathbf{B}^T<0\end{aligned} \tag{4.208}$$

Fazendo o produto não-linear de variáveis $\mathbf{K}_{ik}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k$ igual a $\mathbf{R}_{ik}$, ou seja:

$$\mathbf{R}_{ik}=\mathbf{K}_{ik}\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\mathbf{X}_k\,, \tag{4.209}$$

obtém-se:

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}_k+\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}{}^T-\mathbf{BR}_{ik}-\mathbf{R}_{ik}{}^T\mathbf{B}^T<0\,. \tag{4.210}$$

A condição suficiente para a solução da desigualdade (4.210) é que exista uma matriz $\mathbf{X}_k$ positiva definida e uma matriz $\mathbf{R}_{ik}\in\Re^n$, tais que, todas as LMIs de (4.210) sejam satisfeitas simultaneamente.

Desse modo, as LMIs para estabilidade quadrática são as seguintes:

$$\begin{aligned}&\mathbf{X}_k>\ 0,\mathbf{X}_k=\mathbf{X}_k^T\\ &\mathbf{A}_{ij}\mathbf{X}_k+\mathbf{X}_k\mathbf{A}_{ij}{}^T-\mathbf{BR}_{ik}-\mathbf{R}_{ik}{}^T\mathbf{B}^T<0\end{aligned}, \tag{4.211}$$

Quando as LMIs acima são factíveis, os ganhos do controlador podem ser obtido pela expressão:

$$\mathbf{K}_{ik} = \mathbf{R}_{ik}\left(\sum_{k=1}^{p}\gamma_k \mathbf{X}_k\right)^{-1}. \tag{4.212}$$

Todos os casos possíveis foram desenvolvidos e no Capítulo 6 serão aplicadas todas as análises para o sistema bola-viga.

5. Índices de Desempenho para Reguladores Fuzzy

Além da estabilidade o projetista pode especificar o sistema de controle utilizando outros índices de desempenho, tais como a taxa de decaimento, restrição na entrada e restrição na saída.

5.1.1. Taxa de Decaimento

É relevante considerar não apenas a estabilidade, mas também outros índices de desempenho do sistema controlado tais como a velocidade de resposta e restrições de entrada e saída. A velocidade de resposta está relacionada com a taxa de decaimento β.

Considere uma candidata da função de Lyapunov $\mathbf{V}(x(t)) = x^T \mathbf{X}^{-1} x$ e que $\dot{\mathbf{V}}(x(t)) < 0$, para todo x ≠ 0. A taxa de decaimento β, β > 0, é obtida se a condição $\dot{\mathbf{V}}(x(t)) \leq -2\beta \mathbf{V}(x(t))$ (Tanaka, Ikeda and Wang, 1998c) é satisfeita para toda a trajetória.

5.1.2. Restrição na Entrada

Assuma que a condição inicial **x**(0) é conhecida e **u**(*t*) descrito por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -\frac{\sum_{i=1}^{r} \omega^i(\mathbf{z}(t))\mathbf{F_i}\mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^{r} \omega^i(\mathbf{z}(t))} \\ &= -\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{F_i}\mathbf{x}(t) \qquad (5.1) \\ &= -F(\alpha)x(t), \end{aligned}$$

A restrição $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$ é imposta para todo o tempo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (5.2)$$

e

$$\begin{bmatrix} X & M_i^T \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.3}$$

se mantém sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{M}_i = \mathbf{K}_i\mathbf{X}$.

Estendendo para o caso mais amplo, onde temos os ganhos dependentes das condições iniciais e descrito por modelos *fuzzy* TS, sendo $x(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0) \quad x_4(0)]$ de modo semelhante ao definido na Seção 4.3, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{0k}(0)^T \\ x_{0k}(0) & X_k \end{bmatrix} \geq 0, k = 1,2,..., p \tag{5.4}$$

e

$$\sum_{k=1}^{p} \begin{bmatrix} X_k & R_{ik}^T \\ R_{ik} & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} X_k & R_{ik}^T \\ R_{ik} & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.5}$$

se mantém sendo $\mathbf{R}_{ik} = \mathbf{K}_{ik} \sum_{k=1}^{p} \gamma_k \mathbf{X}_k$.

5.1.3. Restrições na Saída

Assuma que a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é conhecida e defina $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t)$.

A restrição $||\mathbf{y}(t)||_2 \leq \lambda$ é imposta para todo $t \geq 0$ se as LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.6}$$

e

$$\begin{bmatrix} X & XC_i^T \\ C_i X & \lambda^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5.7}$$

se mantêm sendo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$.

6. Sistema Bola-viga

Um sistema bola-viga consiste de uma viga com o ângulo de inclinação que pode variar, e uma bola sobre esta. O objetivo do sistema de controle é ajustar o ângulo da viga de modo que a bola permaneça próximo ao centro da viga, dada uma perturbação na posição da bola.

Este tipo de sistema, além de ser um problema clássico de engenharia de sistemas de controle, tem usos possíveis nas áreas como a aeronáutica (Marín, R.C., 2004).

Considere o sistema bola-viga mostrado na Figura 6.1 (Silva, 2005):

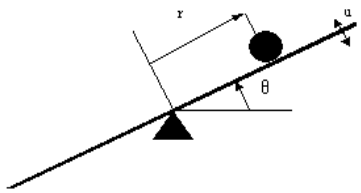

Figura 6.1. Sistema Bola-viga.

com equações dadas por:

$$\begin{aligned} &\ddot{r}(t) - \alpha\, r(t)\dot{\theta}^2(t) + \alpha\, \beta\, \mathbf{sen}(\theta(t)) = 0, \\ &\ddot{\theta}(t) = u(t). \end{aligned} \tag{6.1}$$

A dinâmica do sistema (Wang, 1997, pg.217) pode ser descrita como sendo:

$r(t)$: posição da bola,

$\theta(t)$: ângulo da viga,

$u(t)$: sinal de controle,

$\alpha,\ \beta$: parâmetros, $\alpha = 0.7143$ e $\beta = 9.81$.

Considerando as variáveis de estado do sistema como: $x_1(t) = r(t)$; $x_2(t) = \dot{r}(t)$; $x_3(t) = \theta(t)$; $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ e a saída do sistema $y(t) = x_1(t)$, as equações de estado do sistema são descritas por:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)\,, \tag{6.2}$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha\, x_1(t) x_4{}^2(t) - \alpha\beta\, sen(x_3(t)), \tag{6.3}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t), \tag{6.4}$$

$$\dot{x}_4(t) = u(t). \tag{6.5}$$

Supõe-se que:

$$-1 \le x_1(t) \le 1;\ -1 \le x_2(t) \le 1;\ -\frac{\pi}{12} \le x_3(t) \le \frac{\pi}{12};\ -2 \le x_4(t) \le 2.$$

A seguir, o sistema não-linear (6.2)-(6.5) será transformado na forma generalizada do sistema *fuzzy* TS (Taniguchi et al., 2001).

O sistema *fuzzy* TS generalizado pode ser construído de (6.2)-(6.5) reescrevendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\alpha\beta sen(x_3(t))}{x_3(t)} & \alpha x_1(t) x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{6.6}$$

sendo:

$$\boldsymbol{x}_p(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\tilde{f}_{23}(\boldsymbol{x}_p(t)) = \frac{-\alpha\beta\, sen\,(x_3(t))}{x_3(t)};\ \tilde{f}_{24}(\boldsymbol{x}_p(t)) = \alpha\, x_1(t) x_4(t) \tag{6.7}$$

as funções que contém as não-linearidades do sistema.

Então (6.6) é representado como:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \tag{6.8}$$

$$\dot{x}_2(t) = \tilde{f}_{23}(\boldsymbol{x}_p(t)) x_3(t) + \tilde{f}_{24}(\boldsymbol{x}_p(t)) x_4(t), \tag{6.9}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t), \tag{6.10}$$

$$\dot{x}_4(t) = u(t). \tag{6.11}$$

Para obter a forma generalizada, é necessário determinar os valores máximo e mínimo das funções $\tilde{f}_{23}(\boldsymbol{x}_p(t))$ e $\tilde{f}_{24}(\boldsymbol{x}_p(t))$ no conjunto considerado (Taniguchi et al., 2001; Silva, 2005). Sejam:

$$\begin{aligned}
a_{231} &= \underset{x(t)}{máx}\{\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)\} = -6.9275;\\
a_{232} &= \underset{x(t)}{mín}\{\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)\} = -7.0073;\\
a_{241} &= \underset{x(t)}{máx}\{\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t)\} = 1.4286;\\
a_{242} &= \underset{x(t)}{mín}\{\tilde{f}_{24}(\mathbf{x}_p(t)\} = -1.4285.
\end{aligned}$$

Segundo o método proposto por Taniguchi et al. (2001), a função não-linear $\tilde{f}_{23}(\boldsymbol{x}_p(t))$ pode ser representada, de forma exata, através de modelo *fuzzy* TS, considerando dois modelos locais: a_{231} e a_{232}, ou seja existem $\sigma_{231}(\boldsymbol{x}_p(t))$ e $\sigma_{232}(\boldsymbol{x}_p(t))$ tais que (Silva, 2005):

$$\tilde{f}_{23}(\boldsymbol{x}_p(t)) = \sigma_{231}(\boldsymbol{x}_p(t))a_{231} + \sigma_{232}(\boldsymbol{x}_p(t))a_{232}, \tag{6.12}$$

sendo:

$$\begin{gathered}
0 \le \sigma_{231}(\boldsymbol{x}_p(t)), \sigma_{232}(\boldsymbol{x}_p(t)) \le 1,\\
\sigma_{231}(\boldsymbol{x}_p(t)) + \sigma_{232}(\boldsymbol{x}_p(t)) = 1,\\
\sigma_{231}(\boldsymbol{x}_p(t)) = \frac{\tilde{f}_{23}(\boldsymbol{x}_p(t)) - a_{232}}{a_{231} - a_{232}}.
\end{gathered}$$

Da mesma forma a função $\tilde{f}_{24}(\boldsymbol{x}_p(t))$ pode ser representada exatamente por:

$$\tilde{f}_{24}(\boldsymbol{x}_p(t)) = \xi_{241}(\boldsymbol{x}_p(t))a_{241} + \xi_{242}(\boldsymbol{x}_p(t))a_{242}, \tag{6.13}$$

sendo que $\xi_{241}(\boldsymbol{x}_p(t))$ e $\xi_{242}(\boldsymbol{x}_p(t))$ satisfazem:

$$0 \le \xi_{241}(\boldsymbol{x}_p(t)), \xi_{242}(\boldsymbol{x}_p(t)) \le 1,\ \xi_{241}(\boldsymbol{x}_p(t)) + \xi_{242}(\boldsymbol{x}_p(t)) = 1.$$

Então, tem-se:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{23}(\mathbf{x}_p(t)) &= (\xi_{241}(\mathbf{x}_p(t)) + \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t)))(\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t))a_{231} + \sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t))a_{232})\\
&= \xi_{241}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t))a_{231} + \xi_{241}(\mathbf{x}_p(t)\sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t))a_{232}\\
&\quad + \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{231}(\mathbf{x}_p(t))a_{231} + \xi_{242}(\mathbf{x}_p(t))\sigma_{232}(\mathbf{x}_p(t))a_{232}
\end{aligned}.$$

Agora, defina:

$$\alpha_1(\boldsymbol{x}_p(t)) = \xi_{241}(\boldsymbol{x}_p(t))\sigma_{231}(\boldsymbol{x}_p(t)),\ \alpha_2(\boldsymbol{x}_p(t)) = \xi_{241}(\boldsymbol{x}_p(t)\sigma_{231}(\boldsymbol{x}_p(t)), \tag{6.14a}$$

$$\alpha_3(\boldsymbol{x}_p(t)) = \xi_{241}(\boldsymbol{x}_p(t))\sigma_{232}(\boldsymbol{x}_p(t)),\ \alpha_4(\boldsymbol{x}_p(t)) = \xi_{242}(\boldsymbol{x}_p(t))\sigma_{232}(\boldsymbol{x}_p(t)). \tag{6.14b}$$

Assim,

$$\tilde{f}_{23}(\boldsymbol{x}_p(t)) = \alpha_1(\boldsymbol{x}_p(t))a_{231} + \alpha_2(\boldsymbol{x}_p(t))a_{232} + \alpha_3(\boldsymbol{x}_p(t))a_{231} + \alpha_4(\boldsymbol{x}_p(t))a_{232}. \tag{6.14c}$$

Usando os passos descritos acima para a função $\tilde{f}_{24}(\boldsymbol{x}(t))$, tem-se:

$$\tilde{f}_{24}(\boldsymbol{x}_p(t)) = \alpha_1(\boldsymbol{x}_p(t))a_{241} + \alpha_2(\boldsymbol{x}_p(t))a_{242} + \alpha_3(\boldsymbol{x}_p(t))a_{241} + \alpha_4(\boldsymbol{x}_p(t))a_{242}. \tag{6.14d}$$

Substituindo (6.14c)-(6.14d) em (6.6) pode-se obter uma representação exata do sistema (6.2)–(6.5) com os modelos *fuzzy* TS:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p(t) = \left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(\boldsymbol{x}_p(t))\,\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}}\right)\boldsymbol{x}_p(t) + \left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i(\boldsymbol{x}_p(t))\boldsymbol{B}_i\right)u(t),$$

sendo

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23i} & a_{24i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

com $i = 1, 2, 3, 4$; com $\alpha_i(\boldsymbol{x}_p(t))$ dadas por (6.14a)-(6.14b). Portanto os modelos locais são:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0073 & 1.4285 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.9275 & 1.4285 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{6.14e}$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7.0073 & -1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.9275 & -1.4286 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.14e}$$

De uma maneira geral segundo este método, se o sistema apresentar s funções não-lineares, serão necessários 2^s modelos locais para a sua representação exata através de modelos TS.

$$\left\{ \dot{\mathbf{x}}_p(t) = \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i(\mathbf{x}_p(t))\, \mathbf{A_i} \right) \mathbf{x}_p(t) + \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \mathbf{B}_i \right) u(t), \right. \tag{6.15}$$

sendo:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ \alpha_i(\mathbf{x}_p(t)) \in [0,1],\ i = 1,\ldots,4\ ;\ \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(\boldsymbol{x}_p(t)) = 1 \text{ e } u(t) \in \Re.$$

Observação 6.1:

(1) Em todos os modelos locais, as matrizes $\boldsymbol{A}_i$, $i = 1,2,3,4$ (equação (6.14e)) possuem a primeira coluna nula. Para obter essa condição, na construção do sistema *fuzzy* TS generalizado do sistema bola-viga, as equações (6.2)-(6.5), foram reescritas como em (6.6) (Silva, 2005):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\alpha\beta sen x_3(t)}{x_3(t)} & \alpha x_1(t) x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

e não como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha x_4{}^2(t) & 0 & \dfrac{-\alpha\beta sen x_3(t)}{x_3(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)\ .$$

Portanto, durante a modelagem pode-se escolher a realização *fuzzy* adequada.

A seguir será mostrado que se no exemplo anterior existirem incertezas do tipo politópicas nos parâmetros da planta, a metodologia proposta anteriormente também se aplica.

6.1. O Controle de um Sistema Incerto

Considere o sistema bola-viga como mostrado na Figura 6.1.

A dinâmica do sistema (Wang, 1997, pg.217) pode ser descrita como sendo:

$$\begin{aligned} &\ddot{r}(t) - \alpha\, r(t)\dot{\theta}^2(t) + \alpha\, \beta\, sen(\theta(t)) = 0, \\ &\ddot{\theta}(t) = u(t), \end{aligned} \tag{6.16}$$

onde:

$r(t)$: posição da bola,

$\theta(t)$: ângulo da viga,

$u(t)$: sinal de controle,

$\alpha,\ \beta$: parâmetros constantes do sistema.

Suponha que os parâmetros α e β possuam incertezas do tipo politópicas, ou seja, $\alpha \in [0.2,1.2]$ e $\beta \in [9.6,10.0]$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha &= \overline{\alpha}_1 0.2 + \overline{\alpha}_2 1.2 \\ \beta &= \overline{\beta}_1 9.6 + \overline{\beta}_2 10 \end{aligned}, \tag{6.17a}$$

sendo:

$$\begin{aligned} &\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2 \geq 0 \text{ e } \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 = 1, \\ &\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2 \geq 0 \text{ e } \overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 = 1. \end{aligned} \tag{6.17b}$$

Supondo as variáveis de estado do sistema como: $x_1(t) = r(t)$; $x_2(t) = \dot{r}(t)$; $x_3(t) = \theta(t)$; $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$ e a saída do sistema $y(t) = x_1(t)$, as equações de estado do sistema são descritas por:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \tag{6.18}$$

$$\dot{x}_2(t) = \alpha\, x_1(t) x_4{}^2(t) - \alpha\beta\, \mathrm{sen}(x_3(t)), \tag{6.19}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t), \tag{6.20}$$

$$\dot{x}_4(t) = u(t). \tag{6.21}$$

Supõe-se que durante a operação:

$$-1 \leq x_1(t) \leq 1;\ -1 \leq x_2(t) \leq 1;\ -\frac{\pi}{12} \leq x_3(t) \leq \frac{\pi}{12};\ -2 \leq x_4(t) \leq 2. \tag{6.21a}$$

A seguir, o sistema não-linear (6.18)–(6.21) será transformado na forma generalizada do sistema *fuzzy* TS (Taniguchi et al., 2001) com incertezas do tipo politópicas.

O sistema *fuzzy* TS generalizado pode ser construído descrevendo (6.18)–(6.21) como mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\alpha\beta\, sen(x_3(t))}{x_3(t)} & \alpha x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{6.22}$$

A representação das incertezas dos parâmetros do sistema na forma politópica supõe que a estrutura do sistema incerto varia de acordo com uma combinação convexa dos dois sistemas vértices que delimitam o politopo, ou seja, de (6.17a)–(6.17b) pode-se representar a equação (6.22) como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = {} & \overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\beta}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-0.2 \cdot 9.6 \cdot sen(x_3(t))}{x_3(t)} & 0.2x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \right) \\ & + \overline{\alpha}_1 \cdot \overline{\beta}_2 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-0.2 \cdot 10 \cdot sen(x_3(t))}{x_3(t)} & 0.2x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \right) \\ & + \overline{\alpha}_2 \cdot \overline{\beta}_1 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1.2 \cdot 9.6 \cdot sen(x_3(t))}{x_3(t)} & 1.2x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \right) \\ & + \overline{\alpha}_2 \cdot \overline{\beta}_2 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-1.2 \cdot 10 \cdot sen(x_3(t))}{x_3(t)} & 1.2x_1(t)x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \right) \end{aligned} \tag{6.23}$$

com

$$\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2 \geq 0 \text{ e } \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 = 1,$$

$$\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2 \geq 0 \text{ e } \overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 = 1.$$

Assim, o sistema dinâmico não-linear (6.23) com incertezas do tipo politópica pode ser descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} \overline{\alpha}_m \overline{\beta}_n \left(\mathbf{A}_{mn}(\mathbf{x}_p(t))\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_{mn}u(t)\right),$$

sendo

$$\boldsymbol{x}_p(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{A}_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-\overline{\alpha}_m \overline{\beta}_n \cdot \mathrm{sen}(x_3(t))}{x_3(t)} & \overline{\alpha}_m x_1(t) x_4(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} m = 1,2; \\ n = 1,2; \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} \overline{\alpha}_1 = 0.2; \\ \overline{\alpha}_2 = 1.2; \\ \overline{\beta}_1 = 9.6; \\ \overline{\beta}_2 = 10.0. \end{matrix}$$

Para cada sistema vértice correspondente a $\mathbf{A}_{mn}$ $(m = 1,2; n = 1,2)$, será utilizado o método proposto por Taniguchi et al., (2001) para a obtenção dos modelos lineares locais. As funções que contém as não-linearidades de cada sistema vértice são:

$$\tilde{f}_{2311}(\mathbf{x}_p(t)) = \frac{-0.2 \cdot 9.6 \cdot \mathrm{sen}\,(x_3(t))}{x_3(t)}; \;\; \tilde{f}_{2411}(\mathbf{x}_p(t)) = 0.2\, x_1(t) x_4(t). \tag{6.24a}$$

$$\tilde{f}_{2312}(\mathbf{x}_p(t)) = \frac{-0.2 \cdot 10 \cdot \mathrm{sen}\,(x_3(t))}{x_3(t)}; \;\; \tilde{f}_{2412}(\mathbf{x}_p(t)) = \tilde{f}_{2411}(\mathbf{x}_p(t)). \tag{6.24b}$$

$$\tilde{f}_{2321}(\mathbf{x}_p(t)) = \frac{-1.2 \cdot 9.6 \cdot \mathrm{sen}\,(x_3(t))}{x_3(t)}; \;\; \tilde{f}_{2421}(\mathbf{x}_p(t)) = 1.2\, x_1(t) x_4(t). \tag{6.24c}$$

$$\tilde{f}_{2322}(\mathbf{x}_p(t)) = \frac{-1.2 \cdot 10 \cdot \mathrm{sen}\,(x_3(t))}{x_3(t)}; \;\; \tilde{f}_{2422}(\mathbf{x}_p(t)) = \tilde{f}_{2421}(\mathbf{x}_p(t)). \tag{6.24d}$$

Para obter a forma generalizada, obtiveram-se os valores máximos e mínimos destas funções no conjunto considerado em (6.21a):

$$\begin{aligned}
a_{23111} &= \underset{x(t)}{máx}\{\tilde{f}_{2311}(\mathbf{x}_p(t)\} = -1.8981;\\
a_{23112} &= \underset{x(t)}{mín}\{\tilde{f}_{2311}(\mathbf{x}_p(t)\} = -1.9200;\\
a_{24111} &= \underset{x(t)}{máx}\{\tilde{f}_{2411}(\mathbf{x}_p(t)\} = 0.4000;\\
a_{24112} &= \underset{x(t)}{mín}\{\tilde{f}_{2411}(\mathbf{x}_p(t)\} = -0.4000.
\end{aligned} \tag{6.25a}$$

$$\begin{aligned}
a_{23121} &= \underset{x(t)}{máx}\{\tilde{f}_{2312}(\mathbf{x}(t)\} = -1.9772;\\
a_{23122} &= \underset{x(t)}{mín}\{\tilde{f}_{2312}(\mathbf{x}(t)\} = -2.0000;\\
a_{24121} &= a_{24111} = 0.4000;\\
a_{24122} &= a_{24112} = -0.4000.
\end{aligned} \tag{6.25b}$$

$$\begin{aligned}
a_{23211} &= \underset{x(t)}{máx}\{\tilde{f}_{2321}(\mathbf{x}_p(t)\} = -11.3889;\\
a_{23212} &= \underset{x(t)}{mín}\{\tilde{f}_{2321}(\mathbf{x}_p(t)\} = -11.5200;\\
a_{24211} &= \underset{x(t)}{máx}\{\tilde{f}_{2421}(\mathbf{x}_p(t)\} = 2.4000;\\
a_{24212} &= \underset{x(t)}{mín}\{\tilde{f}_{2421}(\mathbf{x}_p(t)\} = -2.4000;
\end{aligned} \tag{6.25c}$$

$$\begin{aligned}
a_{23221} &= \underset{x(t)}{máx}\{\tilde{f}_{232}(\mathbf{x}(t)\} = -11.8634;\\
a_{23222} &= \underset{x(t)}{mín}\{\tilde{f}_{232}(\mathbf{x}(t)\} = -12.0000;\\
a_{24221} &= a_{24211} = 2.4000;\\
a_{24222} &= a_{24212} = -2.4000.
\end{aligned} \tag{6.25d}$$

Usando os passos descritos nas equações (6.12) – (6.14d) obtém-se:

$$\tilde{f}_{2311}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{23111} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{23112} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{23111} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{23112}$$

$$\tilde{f}_{2411}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{24111} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{24112} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{24111} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{24112}$$

$$\tilde{f}_{2312}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{23121} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{23122} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{23121} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{23122}$$

$$\tilde{f}_{2412}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{24121} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{24122} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{24121} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{24122}$$

$$\tilde{f}_{2321}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{23211} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{23212} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{23211} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{23212}$$

$$\tilde{f}_{2421}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{24211} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{24212} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{24211} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{24212}$$

$$\tilde{f}_{2322}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{23221} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{23222} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{23221} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{23222}$$

$$\tilde{f}_{2422}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_1(\mathbf{x}_p(t))a_{24221} + \alpha_2(\mathbf{x}_p(t))a_{24222} + \alpha_3(\mathbf{x}_p(t))a_{24221} + \alpha_4(\mathbf{x}_p(t))a_{24222}$$

sendo as funções de pertinência $\alpha_i(\boldsymbol{x}_p(t))$, $i = 1,2,3,4$ dadas pelas equações (6.12) e (6.14a) – (6.14b).

Os modelos locais para o primeiro sistema vértice são:

$$\mathbf{A}_{1pq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2311p} & a_{2411q} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{1pq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{6.26}$$

para o segundo:

$$\mathbf{A}_{2pq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2312p} & a_{2412q} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{2pq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{6.27}$$

para o terceiro:

$$\mathbf{A}_{3pq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2321p} & a_{2421q} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{3pq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{6.28}$$

e para o quarto:

$$\mathbf{A}_{4pq} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2322p} & a_{2422q} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{4pq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \tag{6.29}$$

Desta forma, das equações (6.25) – (6.29) resultam:

$$\mathbf{A}_{111} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8981 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{112} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.98981 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{6.30a}$$

$$\mathbf{A}_{121}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1.92 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{A}_{122}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1.92 & -0.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \tag{6.30b}$$

$$\mathbf{A}_{211}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1.9772 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{A}_{212}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1.9772 & -0.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \tag{6.30c}$$

$$\mathbf{A}_{221}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2.0 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{A}_{222}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2.0 & -0.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \tag{6.30d}$$

$$\mathbf{A}_{311}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -11.3889 & 2.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{A}_{312}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -11.3889 & -2.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \tag{6.30e}$$

$$\mathbf{A}_{321}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -11.52 & 2.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{A}_{322}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -11.52 & -2.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \tag{6.30f}$$

$$\mathbf{A}_{411}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -11.8634 & 2.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{A}_{412}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -11.8634 & -2.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \tag{6.30g}$$

$$\mathbf{A}_{421}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -12.0 & 2.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{A}_{422}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -12.0 & -2.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}; \tag{6.30h}$$

$$\mathbf{B}_{ipq}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \text{ para } i=1,2,3,4\ ,\ \ p=1,2 \text{ e } q=1,2\ . \tag{6.31}$$

Então, um modelo *fuzzy* TS com incertezas do tipo politópicas para o sistema (6.23) pode ser representado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\ \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(\mathbf{x}_p(t))\,\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}\overline{\beta}_n\left(\mathbf{A}_{imn}\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_{imn}u(t)\right), \tag{6.32}$$

sendo: $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2 \geq 0$; $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2 \geq 0$; $\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 = 1$; $\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 = 1$ $\alpha_i(\boldsymbol{x}_p(t))$, $i = 1,2,3,4$ descritas pelas equações (6.12), (6.13) e (6.14a) – (6.14b); as matrizes $\mathbf{A}_{imn}$ e $\mathbf{B}_{imn}$, $i = 1,2,3,4$; $m = 1,2$ e $n = 1,2$ dadas pelas equações (6.30a) – (6.30h) e (6.31) respectivamente.

Definindo $\phi_{imn}(\mathbf{x}_p(t)) = \alpha_i(\mathbf{x}_p(t))\,\overline{\alpha}_{\mathrm{m}}\overline{\beta}_n$, tem-se de (6.32):

$$\dot{\mathbf{x}}_p(t) = \sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{i=1}^{4} \phi_{imn}(\mathbf{x}_p(t))\left(\mathbf{A}_{imn}\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{B}_{imn}u(t)\right), \tag{6.33}$$

com $\phi_{imn}(\mathbf{x}_p(t)) \geq 0$ e $\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}\sum_{i=1}^{4} \phi_{imn}(\mathbf{x}_p(t)) = 1$.

Assim podemos considerar o sistema dependente de *fuzzy* TS e das condições iniciais da planta sendo representado pela forma $\mathbf{A}(\alpha, \beta)$, considerando que os parâmetros incertos sejam representados somente por β para simplificação.

6.2. Restrição na Entrada

Através dos casos apresentados no Capítulo 4, dada uma taxa de decaimento, foi feito a busca dos valores ótimos da restrição na entrada dada pelas LMIs (4.7) e (4.8) para cada caso. Para isso, foi utilizado o MATLAB com o *toolbox* LMI Control. Simultaneamente encontrou-se as matrizes de ganho para cada caso.

As Tabelas abaixo apresentam os valores ótimos das restrições na entrada para cada caso e o erro entre a restrição na entrada devido as matrizes **X**, positiva definida, que não dependem das condições iniciais da planta e das matrizes **X** que dependem das condições iniciais da planta.

Na Tabela 6.1, foram utilizadas as equações (4.22), (4.23), (4.33) e (4.34), sendo a planta descrita por modelos *fuzzy* TS, o ganho **K** único, a matriz **X**, positiva definida, única e também dependente do politopo das condições iniciais dado por:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & x_3(0) & x_4(0) \end{bmatrix}^T \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned} x_{01i} &= -1; \\ x_{01s} &= 1; \\ x_{03i} &= 0.1745; \quad 10^o \\ x_{03s} &= 0.2618; \quad 15^o \end{aligned} \tag{6.35}$$

$$x_{01}(0) = \begin{bmatrix} x_{01i} & 0 & x_{03i} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{6.36a}$$

$$x_{02}(0) = \begin{bmatrix} x_{01i} & 0 & x_{03s} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{6.36b}$$

$$x_{03}(0) = \begin{bmatrix} x_{01s} & 0 & x_{03i} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{6.36c}$$

$$x_{04}(0) = \begin{bmatrix} x_{01s} & 0 & x_{03s} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{6.36d}$$

Assim tem-se:

Tabela 6.1. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_i\mathbf{KX}$ ***e*** $\mathbf{A}_i\mathbf{KX}_k$ **.**

	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.4125	μ=1.2162	13.90 %
$\beta = 10.0$	μ=3.5848	μ=3.0558	14.76 %

onde β é a taxa de decaimento e μ a restrição na entrada.

A matriz de ganho para o caso $\mathbf{A}_i\mathbf{KX}$ com $\beta = 2.0$ é:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.6181 & -1.4167 & 10.6471 & 3.8377 \end{bmatrix},$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.6928 & -1.5835 & 11.7523 & 4.1439 \end{bmatrix}.$$

Já para $\mathbf{A}_i\mathbf{KX}_k$ com $\beta = 2.0$ tem-se:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.7670 & -1.6454 & 11.5715 & 3.6160 \end{bmatrix},$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.7289 & -1.5595 & 11.0522 & 3.4888 \end{bmatrix}.$$

Na Tabela 6.2 foi considerada a planta descrita por modelos *fuzzy* TS, o ganho **K** descrito por modelos *fuzzy* TS, a matriz **X**, positiva definida, única e também

dependente do politopo das condições iniciais, equações (4.46), (4.47), (4.59) e (4.60). Assim:

Tabela 6.2. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ ***e*** $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}_k$ **.**

	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}_i\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}_i\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.4124	μ=1.2161	13.90 %
$\beta = 10.0$	μ=3.5845	μ=3.0555	14.76 %

A matriz de ganho para o caso $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ com $\beta = 2.0$ é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.3663 & -0.8487 & 7.3932 & 2.6783 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.3661 & -0.8463 & 7.3765 & 2.6772 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.5153 & -1.2320 & 8.4802 & 3.3107 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.5171 & -1.2314 & 8.4748 & 3.3142 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.4115 & -0.9535 & 8.0393 & 2.7755 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.4114 & -0.9507 & 8.0218 & 2.7749 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.5298 & -1.2709 & 8.8987 & 3.4410 \end{bmatrix}. \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.5299 & -1.2719 & 8.8821 & 3.4422 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Já para $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}_k$ com $\beta = 2.0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.3699 & -0.8496 & 7.4954 & 2.4602 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.3695 & -0.8462 & 7.4760 & 2.4588 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.5654 & -1.3650 & 8.9673 & 3.2168 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.5661 & -1.3647 & 8.9524 & 3.2171 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.3916 & -0.8971 & 7.7549 & 2.5017 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.3911 & -0.8935 & 7.7341 & 2.5004 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.5522 & -1.3331 & 8.8806 & 3.2080 \end{bmatrix}. \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.5530 & -1.3331 & 8.8671 & 3.2086 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Na Tabela 6.3 foi considerada a planta descrita por modelos *fuzzy* TS, o ganho **K** dependente do politopo das condições iniciais, a matriz **X**, positiva definida, única e também dependente do politopo das condições iniciais, equações (4.72), (4.73), (4.85) e (4.86). Assim:

Tabela 6.3. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_k\mathbf{X}$ ***e*** $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_k\mathbf{X}_k$ **.**

	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}_k\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}_k\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.4125	μ=1.2112	14.25 %
$\beta = 10.0$	μ=3.5848	μ=3.0431	15.11 %

A matriz de ganho para o caso $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_k\mathbf{X}$ com $\beta = 2.0$ é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.6403 & -1.5656 & 12.2483 & 4.4891 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.6403 & -1.5656 & 12.2483 & 4.4891 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.6403 & -1.5656 & 12.2483 & 4.4891 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.6403 & -1.5656 & 12.2483 & 4.4891 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.6411 & -1.5463 & 12.0715 & 4.4717 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.6411 & -1.5463 & 12.0715 & 4.4717 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.6411 & -1.5463 & 12.0715 & 4.4717 \end{bmatrix}. \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.6411 & -1.5463 & 12.0715 & 4.4717 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Já para $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_k\mathbf{X}_k$ com $\beta = 2.0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.7328 & -1.5632 & 11.1528 & 3.4917 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.7329 & -1.5647 & 11.2073 & 3.4902 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.7369 & -1.5716 & 11.3133 & 3.5055 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.7476 & -1.6123 & 11.3640 & 3.5634 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.7918 & -1.6854 & 11.8954 & 3.6724 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.7885 & -1.6772 & 11.9093 & 3.6571 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.7872 & -1.6743 & 11.9787 & 3.6627 \end{bmatrix}. \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.7886 & -1.6960 & 11.9295 & 3.6936 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Na Tabela 6.4 foi considerada a planta descrita por modelos *fuzzy* TS, o ganho **K** descrita por modelos *fuzzy* TS e dependente do politopo das condições iniciais, a matriz **X**, positiva definida, única e também dependente do politopo das condições iniciais, equações (4.98), (4.99), (4.111) e (4.112). Assim:

Tabela 6.4. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}$ ***e*** $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}_k$.

	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}_{ik}\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}_{ik}\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.4124	μ=1.2111	14.25 %
$\beta = 10.0$	μ=3.5845	μ=3.0439	15.11 %

A matriz de ganho para o caso $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}$ com $\beta = 2.0$ é:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} -0.3500 & -0.8169 & 7.2885 & 2.6742 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -0.3498 & -0.8149 & 7.2722 & 2.6736 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{31} = \begin{bmatrix} -0.4755 & -1.1657 & 8.2485 & 3.3018 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{41} = \begin{bmatrix} -0.4761 & -1.1657 & 8.2365 & 3.3025 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -0.3500 & -0.8169 & 7.2885 & 2.6742 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} -0.3498 & -0.8149 & 7.2722 & 2.6736 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{32} = \begin{bmatrix} -0.4755 & -1.1657 & 8.2485 & 3.3018 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{42} = \begin{bmatrix} -0.4761 & -1.1657 & 8.2365 & 3.3025 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{13} = \begin{bmatrix} -0.3500 & -0.8169 & 7.2885 & 2.6742 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} -0.3498 & -0.8149 & 7.2722 & 2.6736 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} -0.4755 & -1.1657 & 8.2485 & 3.3018 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{43} = \begin{bmatrix} -0.4761 & -1.1657 & 8.2365 & 3.3025 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{14} = \begin{bmatrix} -0.3500 & -0.8169 & 7.2885 & 2.6742 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{24} = \begin{bmatrix} -0.3498 & -0.8149 & 7.2722 & 2.6736 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} -0.4755 & -1.1657 & 8.2485 & 3.3018 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{44} = \begin{bmatrix} -0.4761 & -1.1657 & 8.2365 & 3.3025 \end{bmatrix}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} -0.3407 & -0.7912 & 7.1389 & 2.6395 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -0.3404 & -0.7893 & 7.1227 & 2.6388 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{31} = \begin{bmatrix} -0.4702 & -1.1512 & 8.1245 & 3.2588 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{41} = \begin{bmatrix} -0.4709 & -1.1513 & 8.1128 & 3.2595 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -0.3407 & -0.7912 & 7.1389 & 2.6395 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} -0.3404 & -0.7893 & 7.1227 & 2.6388 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{32} = \begin{bmatrix} -0.4702 & -1.1512 & 8.1245 & 3.2588 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{42} = \begin{bmatrix} -0.4709 & -1.1513 & 8.1128 & 3.2595 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{13} = \begin{bmatrix} -0.3407 & -0.7912 & 7.1389 & 2.6395 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} -0.3404 & -0.7893 & 7.1227 & 2.6388 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} -0.4702 & -1.1512 & 8.1245 & 3.2588 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{43} = \begin{bmatrix} -0.4709 & -1.1513 & 8.1128 & 3.2595 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{14} = \begin{bmatrix} -0.3407 & -0.7912 & 7.1389 & 2.6395 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{24} = \begin{bmatrix} -0.3404 & -0.7893 & 7.1227 & 2.6388 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} -0.4702 & -1.1512 & 8.1245 & 3.2588 \end{bmatrix}.$$
$$\mathbf{K}_{44} = \begin{bmatrix} -0.4709 & -1.1513 & 8.1128 & 3.2595 \end{bmatrix}$$

Já para $\mathbf{A}_i \mathbf{K}_{ik} \mathbf{X}_k$ com $\beta = 2.0$ tem-se:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} -0.3711 & -0.8543 & 7.5065 & 2.4676 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -0.3707 & -0.8509 & 7.4872 & 2.4661 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{31} = \begin{bmatrix} -0.5672 & -1.3738 & 8.9869 & 3.2257 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{41} = \begin{bmatrix} -0.5679 & -1.3735 & 8.9722 & 3.2260 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -0.3703 & -0.8515 & 7.4973 & 2.4641 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} -0.3698 & -0.8480 & 7.4777 & 2.4627 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{32} = \begin{bmatrix} -0.5669 & -1.3705 & 8.9850 & 3.2247 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{42} = \begin{bmatrix} -0.5676 & -1.3702 & 8.9704 & 3.2250 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{13} = \begin{bmatrix} -0.3700 & -0.8495 & 7.4919 & 2.4613 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} -0.3695 & -0.8461 & 7.4722 & 2.4600 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} -0.5661 & -1.3665 & 8.9759 & 3.2211 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{43} = \begin{bmatrix} -0.5668 & -1.3662 & 8.9611 & 3.2214 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{14} = \begin{bmatrix} -0.3700 & -0.8491 & 7.4935 & 2.4591 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{24} = \begin{bmatrix} -0.3695 & -0.8458 & 7.4736 & 2.4578 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} -0.5652 & -1.3624 & 8.9651 & 3.2162 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{K}_{44} = \begin{bmatrix} -0.5659 & -1.3619 & 8.9497 & 3.2164 \end{bmatrix}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} -0.3979 & -0.9131 & 7.7819 & 2.5333 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -0.3973 & -0.9095 & 7.7616 & 2.5319 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{31} = \begin{bmatrix} -0.5644 & -1.3723 & 8.9792 & 3.2569 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{41} = \begin{bmatrix} -0.5652 & -1.3725 & 8.9660 & 3.2576 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{12} &= \begin{bmatrix} -0.3964 & -0.9099 & 7.7837 & 2.5252 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix} -0.3958 & -0.9063 & 7.7632 & 2.5238 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{32} &= \begin{bmatrix} -0.5593 & -1.3554 & 8.9425 & 3.2426 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{42} &= \begin{bmatrix} -0.5602 & -1.3556 & 8.9294 & 3.2433 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{13} &= \begin{bmatrix} -0.3948 & -0.9060 & 7.7813 & 2.5162 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{23} &= \begin{bmatrix} -0.3942 & -0.9024 & 7.7604 & 2.5150 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{33} &= \begin{bmatrix} -0.5539 & -1.3383 & 8.8977 & 3.2269 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{43} &= \begin{bmatrix} -0.5547 & -1.3382 & 8.8841 & 3.2275 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{14} &= \begin{bmatrix} -0.3931 & -0.9015 & 7.7739 & 2.5067 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{24} &= \begin{bmatrix} -0.3626 & -0.8978 & 7.7527 & 2.5055 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{34} &= \begin{bmatrix} -0.5484 & -1.3213 & 8.8474 & 3.2100 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{44} &= \begin{bmatrix} -0.5492 & -1.3207 & 8.8327 & 3.2106 \end{bmatrix}
\end{aligned}.$$

Comparando os sistemas para a planta descrita por modelos *fuzzy* TS, com o ganho **K** único e a matriz **X** única e a planta descrita por modelos *fuzzy* TS com o ganho descrito por modelos *fuzzy* TS e dependente do politopo das condições iniciais, e a matriz **X** dependente do politopo das condições iniciais, tem-se a tabela 6.5:

Tabela 6.5. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_i\mathbf{KX}$ ***e*** $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}_k$.

	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}_{ik}\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.4125	μ=1.2111	16.62 %
$\beta = 10.0$	μ=3.5848	μ=3.0439	17.77 %

Na Tabela 6.6 foi considerada a planta descrita por modelos *fuzzy* TS e incertezas do tipo politópica, o ganho **K** único, a matriz **X**, positiva definida, única e também dependente do politopo das condições iniciais, equações (4.122), (4.123), (4.133) e (4.134). Assim:

Tabela 6.6. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{KX}$ ***e*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{KX}_k$.

	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.9404	μ=1.6140	16.82 %
$\beta = 10.0$	μ=5.0402	μ=4.0650	19.35 %

A matriz de ganho para o caso $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{KX}$ com $\beta = 2.0$ é:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.9906 & -6.3286 & 40.5946 & 9.2473 \end{bmatrix},$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0.9533 & -6.0072 & 38.3240 & 8.8535 \end{bmatrix}.$$

Já para $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}\mathbf{X}_k$ com $\beta = 2.0$ tem-se:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1.4576 & -7.7050 & 46.3208 & 9.3212 \end{bmatrix},$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1.3510 & -7.1607 & 43.0009 & 8.9080 \end{bmatrix}.$$

Na Tabela 6.7 foi considerada a planta descrita por modelos *fuzzy* TS e incertezas do tipo politópica, o ganho **K** descrito por modelos *fuzzy* TS, a matriz **X**, positiva definida, única e também dependente do politopo das condições iniciais, equações (4.146), (4.147), (4.159) e (4.160). Assim:

Tabela 6.7. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ ***e*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_i\mathbf{X}_k$.

	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}_i\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}_i\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.9395	μ=1.6139	16.79 %
$\beta = 10.0$	μ=5.0353	μ=4.0648	19.27 %

A matriz de ganho para o caso $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ com $\beta = 2.0$ é:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.8125 & -4.6225 & 29.5824 & 7.4518 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.8161 & -4.6463 & 29.7556 & 7.4450 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.7406 & -4.2280 & 30.0636 & 7.2748 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.7385 & -4.2188 & 30.1228 & 7.2411 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.8697 & -4.9583 & 31.6520 & 7.8247 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.8738 & -4.9848 & 31.8435 & 7.8205 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.7900 & -4.5184 & 31.9027 & 7.6103 \end{bmatrix}. \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.7885 & -4.5122 & 31.9499 & 7.5755 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Já para $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_i\mathbf{X}_k$ com $\beta = 2.0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.8932 & -4.6329 & 28.7964 & 6.9762 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.8975 & -4.6598 & 28.9776 & 6.9545 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.8359 & -4.3459 & 29.9228 & 6.9208 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.8353 & -4.3455 & 30.0661 & 6.9041 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.8982 & -4.6323 & 28.6456 & 6.9563 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.9022 & -4.6580 & 28.8192 & 6.9353 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.8367 & -4.3255 & 29.6799 & 6.8950 \end{bmatrix}. \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.8357 & -4.3233 & 29.8141 & 6.8781 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Na Tabela 6.8 foi considerada a planta descrita por modelos *fuzzy* TS e incertezas do tipo politópica, o ganho **K** dependente do politopo das condições iniciais, a matriz **X**, positiva definida, única e também dependente do politopo das condições iniciais, equações (4.172), (4.173), (4.185) e (4.186). Assim:

Tabela 6.8. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_k\mathbf{X}$ ***e*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_k\mathbf{X}_k$ **.**

	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}_k\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}_k\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.9404	μ=1.6058	17.24 %
$\beta = 10.0$	μ=5.0402	μ=4.0441	19.76 %

A matriz de ganho para o caso $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_k\mathbf{X}$ com $\beta = 2.0$ é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.9221 & -7.0545 & 45.9839 & 10.4020 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.9221 & -7.0545 & 45.9839 & 10.4020 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.9221 & -7.0545 & 45.9839 & 10.4020 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.9221 & -7.0545 & 45.9839 & 10.4020 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -0.9779 & -7.5045 & 48.8293 & 10.9084 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -0.9779 & -7.5045 & 48.8293 & 10.9084 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -0.9779 & -7.5045 & 48.8293 & 10.9084 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -0.9779 & -7.5045 & 48.8293 & 10.9084 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Já para $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_k\mathbf{X}_k$ com $\beta = 2.0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix}-1.4946 & -7.8618 & 46.9249 & 9.5972\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix}-1.5028 & -7.9006 & 47.1659 & 9.6413\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix}-1.4786 & -7.7760 & 46.4179 & 9.5008\end{bmatrix}, \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix}-1.4497 & -7.6282 & 45.5065 & 9.3232\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix}-1.4258 & -7.5074 & 44.3037 & 9.2658\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix}-1.4280 & -7.5142 & 44.3688 & 9.2691\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix}-1.4234 & -7.4888 & 44.2525 & 9.2538\end{bmatrix}. \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix}-1.4054 & -7.4006 & 43.7313 & 9.1872\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Na Tabela 6.9 foi considerada a planta descrita por modelos *fuzzy* TS e incertezas do tipo politópica, o ganho **K** descrito por modelos *fuzzy* TS e dependente do politopo das condições iniciais, a matriz **X**, positiva definida, única e também dependente do politopo das condições iniciais, equações (4.198), (4.199), (4.211) e (4.212). Assim:

Tabela 6.9. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}$ ***e*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}_k$ **.**

	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}_{ik}\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}_{ik}\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.9395	μ=1.6058	17.20 %
$\beta = 10.0$	μ=5.0353	μ=4.0440	19.69 %

A matriz de ganho para o caso $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}$ com $\beta = 2.0$ é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix}-0.7702 & -4.5584 & 29.3492 & 7.5022\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{21} &= \begin{bmatrix}-0.7718 & -4.5701 & 29.4520 & 7.4914\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{31} &= \begin{bmatrix}-0.6974 & -4.1436 & 29.7338 & 7.3543\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{41} &= \begin{bmatrix}-0.6961 & -4.1379 & 29.8450 & 7.3362\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{12} &= \begin{bmatrix}-0.7702 & -4.5584 & 29.3492 & 7.5022\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix}-0.7718 & -4.5701 & 29.4520 & 7.4914\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{32} &= \begin{bmatrix}-0.6974 & -4.1436 & 29.7338 & 7.3543\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{42} &= \begin{bmatrix}-0.6961 & -4.1379 & 29.8450 & 7.3362\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{13} &= \begin{bmatrix}-0.7702 & -4.5584 & 29.3492 & 7.5022\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{23} &= \begin{bmatrix}-0.7718 & -4.5701 & 29.4520 & 7.4914\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{33} &= \begin{bmatrix}-0.6974 & -4.1436 & 29.7338 & 7.3543\end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_{43} &= \begin{bmatrix}-0.6961 & -4.1379 & 29.8450 & 7.3362\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{14} = \begin{bmatrix} -0.7702 & -4.5584 & 29.3492 & 7.5022 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{24} = \begin{bmatrix} -0.7718 & -4.5701 & 29.4520 & 7.4914 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} -0.6974 & -4.1436 & 29.7338 & 7.3543 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{K}_{44} = \begin{bmatrix} -0.6961 & -4.1379 & 29.8450 & 7.3362 \end{bmatrix}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} -0.7804 & -4.5761 & 29.2341 & 7.5052 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -0.7819 & -4.5874 & 29.3336 & 7.4955 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{31} = \begin{bmatrix} -0.7063 & -4.1589 & 29.6469 & 7.3753 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{41} = \begin{bmatrix} -0.7048 & -4.1522 & 29.7543 & 7.3576 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -0.7804 & -4.5761 & 29.2341 & 7.5052 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} -0.7819 & -4.5874 & 29.3336 & 7.4955 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{32} = \begin{bmatrix} -0.7063 & -4.1589 & 29.6469 & 7.3753 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{42} = \begin{bmatrix} -0.7048 & -4.1522 & 29.7543 & 7.3576 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{13} = \begin{bmatrix} -0.7804 & -4.5761 & 29.2341 & 7.5052 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} -0.7819 & -4.5874 & 29.3336 & 7.4955 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} -0.7063 & -4.1589 & 29.6469 & 7.3753 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{43} = \begin{bmatrix} -0.7048 & -4.1522 & 29.7543 & 7.3576 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{14} = \begin{bmatrix} -0.7804 & -4.5761 & 29.2341 & 7.5052 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{24} = \begin{bmatrix} -0.7819 & -4.5874 & 29.3336 & 7.4955 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} -0.7063 & -4.1589 & 29.6469 & 7.3753 \end{bmatrix}.$$
$$\mathbf{K}_{44} = \begin{bmatrix} -0.7048 & -4.1522 & 29.7543 & 7.3576 \end{bmatrix}$$

Já para $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}_k$ com $\beta = 2.0$ tem-se:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} -0.8957 & -4.6663 & 29.0573 & 7.0438 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -0.9002 & -4.6948 & 29.2492 & 7.0242 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{31} = \begin{bmatrix} -0.8465 & -4.4199 & 30.4393 & 7.0370 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{41} = \begin{bmatrix} -0.8457 & -4.4185 & 30.5790 & 7.0206 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -0.8939 & -4.6526 & 28.9856 & 7.0356 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} -0.8985 & -4.6819 & 29.1817 & 7.0156 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{32} = \begin{bmatrix} -0.8457 & -4.4125 & 30.4010 & 7.0243 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{42} = \begin{bmatrix} -0.8451 & -4.4119 & 30.5441 & 7.0077 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{13} = \begin{bmatrix} -0.8902 & -4.6302 & 28.8583 & 7.0118 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} -0.8950 & -4.6605 & 29.0595 & 6.9918 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} -0.8430 & -4.3953 & 30.3012 & 6.9986 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{43} = \begin{bmatrix} -0.8424 & -4.3954 & 30.4475 & 6.9817 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{14} = \begin{bmatrix} -0.8857 & -4.6030 & 28.7033 & 6.9792 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{24} = \begin{bmatrix} -0.8906 & -4.6340 & 28.9086 & 6.9595 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} -0.8386 & -4.3697 & 30.1475 & 6.9613 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{K}_{44} = \begin{bmatrix} -0.8381 & -4.3705 & 30.2967 & 6.9442 \end{bmatrix}$$

e com $\beta = 10.0$:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} -0.9047 & -4.6913 & 29.0858 & 7.0488 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} -0.9092 & -4.7192 & 29.2739 & 7.0302 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{31} = \begin{bmatrix} -0.8516 & -4.4265 & 30.3792 & 7.0345 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{41} = \begin{bmatrix} -0.8507 & -4.4239 & 30.5131 & 7.0179 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -0.9038 & -4.6831 & 29.0455 & 7.0471 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} -0.9084 & -4.7116 & 29.2369 & 7.0281 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{32} = \begin{bmatrix} -0.8517 & -4.4237 & 30.3687 & 7.0283 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{42} = \begin{bmatrix} -0.8508 & -4.4217 & 30.5046 & 7.0115 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{13} = \begin{bmatrix} -0.9007 & -4.6646 & 28.9402 & 7.0276 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} -0.9055 & -4.6940 & 29.1364 & 7.0086 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{33} = \begin{bmatrix} -0.8496 & -4.4103 & 30.2918 & 7.0083 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{43} = \begin{bmatrix} -0.8487 & -4.4087 & 30.4299 & 6.9914 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{14} = \begin{bmatrix} -0.8964 & -4.6393 & 28.7948 & 6.9966 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{24} = \begin{bmatrix} -0.9013 & -4.6696 & 28.9958 & 6.9779 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} -0.8456 & -4.3876 & 30.1560 & 6.9757 \end{bmatrix}.$$
$$\mathbf{K}_{44} = \begin{bmatrix} -0.8448 & -4.3865 & 30.2962 & 6.9586 \end{bmatrix}$$

Comparando os sistemas para a planta descrita por modelos *fuzzy* TS, com o ganho **K** único e a matriz **X** única e a planta descrita por modelos *fuzzy* TS com o ganho descrito por modelos *fuzzy* TS e incertezas politópicas, e a matriz **X** dependente do politopo das condições iniciais, tem-se a tabela 6.10:

Tabela 6.10. ***Comparação entre os sistemas*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{KX}$ ***e*** $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{K}_{ik}\mathbf{X}_k$.

	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_{ij}\ \mathbf{K}_{ik}\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \dfrac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.9404	μ=1.6058	17.24 %
$\beta = 10.0$	μ=5.0402	μ=4.0440	19.77 %

As Figuras 6.2 - 6.17 mostra a resposta do sistema em função do tempo para as LMIs mostradas no Capítulo 4 considerando a minimização na restrição de entrada no projeto do controlador. Foram testadas todas as combinações considerando a planta **A** descrita por modelos *fuzzy* TS e do politopo apresentado; os ganhos descritos por modelos *fuzzy* TS e das condições iniciais $x(0)$; e por fim da matriz **X** positiva definida única e dependente das condições iniciais. Nas simulações a taxa de decaimento foi igual a 10 ($\beta = 10$), e a condição inicial $x(0) = [0.5 \quad 0 \quad 0.1745 \quad 0]^T$.

De (6.35), (6.36a)-(6.36d), $x(0) = [0.5 \quad 0 \quad 0.1745 \quad 0]^T$ e da análise efetuada na Seção 4.3, então:

$$\tilde{x}_{10} = 0.5 = \sigma_{1i}(-1) + \sigma_{1s}(1), \sigma_{1i} + \sigma_{1s} = 1, \sigma_{1i} \textbf{ e } \sigma_{1s} \in [0,1].$$

Logo,

$$0.5 = -\sigma_{1i} + (1 - \sigma_{1i}) \Rightarrow \sigma_{1i} = 0.25 \textbf{ e } \sigma_{1s} = 0.75 .$$

Analogamente,

$$\tilde{x}_{20} = 0.1745 = \sigma_{2i}(0.1745) + \sigma_{2s}(0.2618), \sigma_{2i} + \sigma_{2s} = 1, \sigma_{2i} \textbf{ e } \sigma_{2s} \in [0,1].$$

Logo,

$$\sigma_{2i} = 1 \textbf{ e } \sigma_{2s} = 0 .$$

Da análise acima e (6.35), (6.36a)-(6.36d), observa-se que:

$$\begin{aligned}
x(0) &= [0.5 \quad 0 \quad 0.1745 \quad 0]^T \\
&= \sigma_{2i}\sigma_{1i}[x_{01i} \quad 0 \quad x_{03i} \quad 0]^T + \sigma_{2s}\sigma_{1i}[x_{01i} \quad 0 \quad x_{03s} \quad 0]^T \\
&\quad + \sigma_{2i}\sigma_{1s}[x_{01s} \quad 0 \quad x_{03i} \quad 0]^T + \sigma_{2s}\sigma_{1s}[x_{01s} \quad 0 \quad x_{03s} \quad 0]^T , \\
&= \gamma_1 x_{01} + \gamma_2 x_{02} + \gamma_3 x_{03} + \gamma_4 x_{04} \\
&= \sum_{k=1}^{4} \gamma_k x_{ok}
\end{aligned}$$

sendo que:

$$\gamma_1 = \sigma_{2i}\sigma_{1i} = 1 \cdot 0.25 = 0.25$$
$$\gamma_2 = \sigma_{2s}\sigma_{1i} = 0 \cdot 0.25 = 0$$
$$\gamma_3 = \sigma_{2i}\sigma_{1s} = 1 \cdot 0.75 = 0.75$$
$$\gamma_4 = \sigma_{2s}\sigma_{1s} = 0 \cdot 0.75 = 0$$

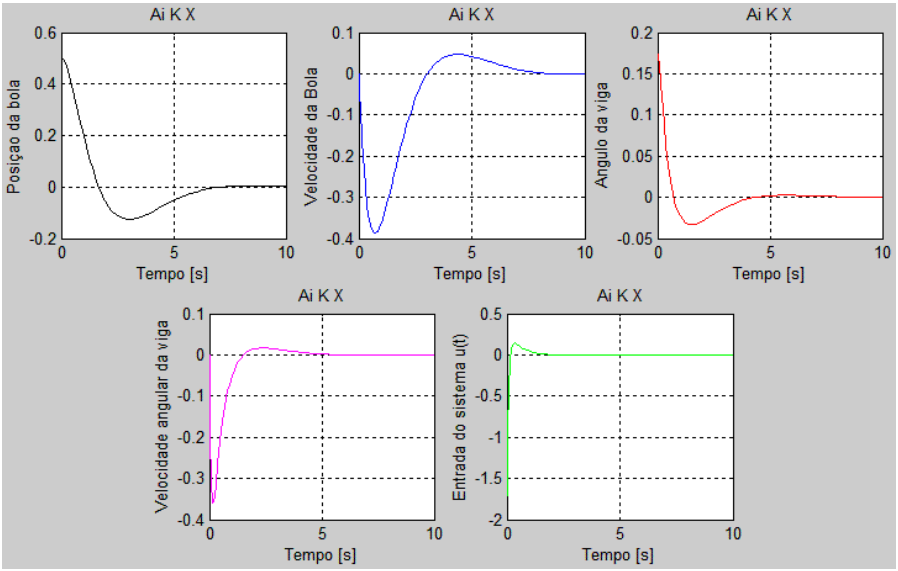

Figura 6.2. Simulação do sistema bola-viga para A_iKX.

Pode-se observar pela simulação acima que a modelagem satisfaz o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). Outro fato relevante ao trabalho é que a entrada do sistema satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 3.5848$.

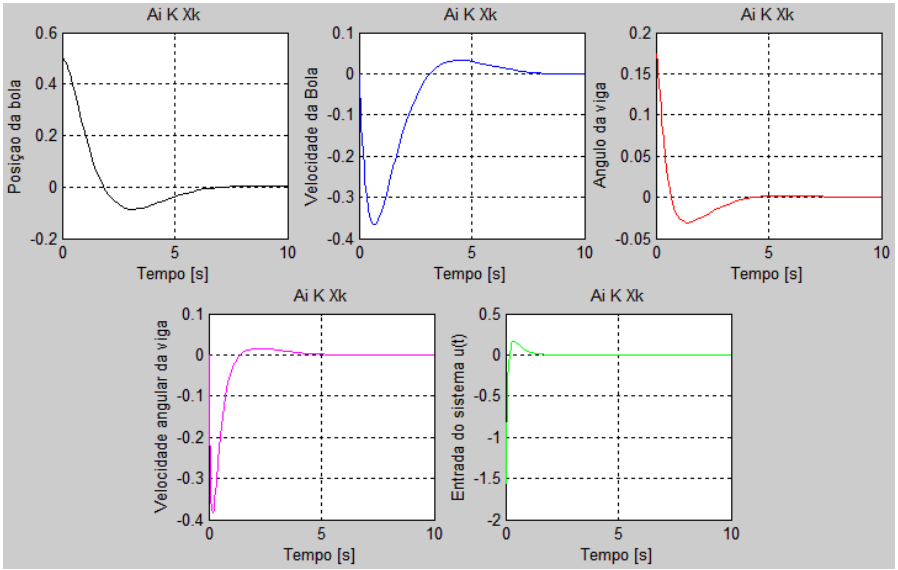

Figura 6.3. Simulação do sistema bola-viga para A_iKX_k.

Neste caso também é possível observar pela simulação, Figura 6.3, que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 3.0558$.

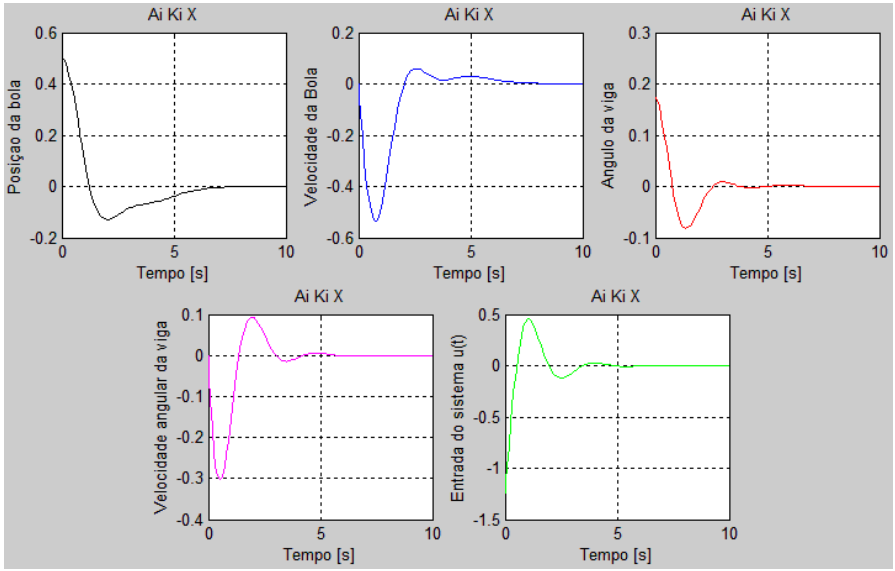

Figura 6.4. Simulação do sistema bola-viga para A_iK_iX.

Neste caso também é possível observar pela simulação, Figura 6.4, que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 3.5845$.

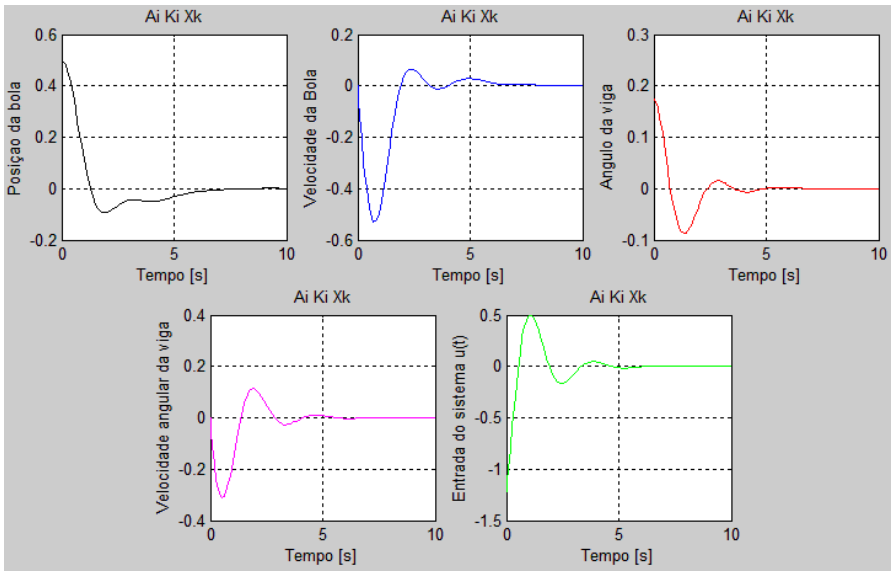

Figura 6.5. Simulação do sistema bola-viga para $A_iK_iX_k$.

Neste caso também é possível observar pela simulação, Figura 6.5, que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 3.0555$.

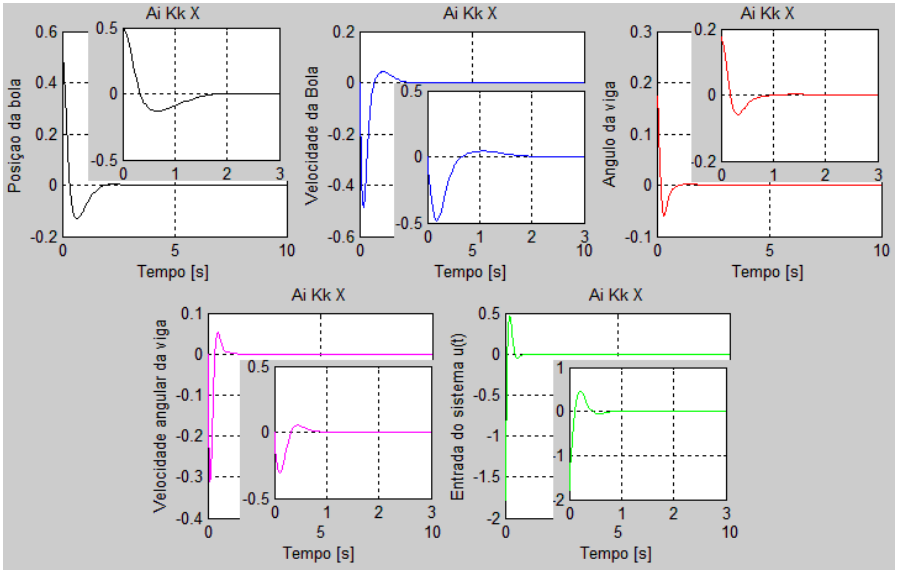

Figura 6.6. Simulação do sistema bola-viga para A_iK_kX.

Neste caso também é possível observar pela simulação, Figura 6.6, que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 3.5848$.

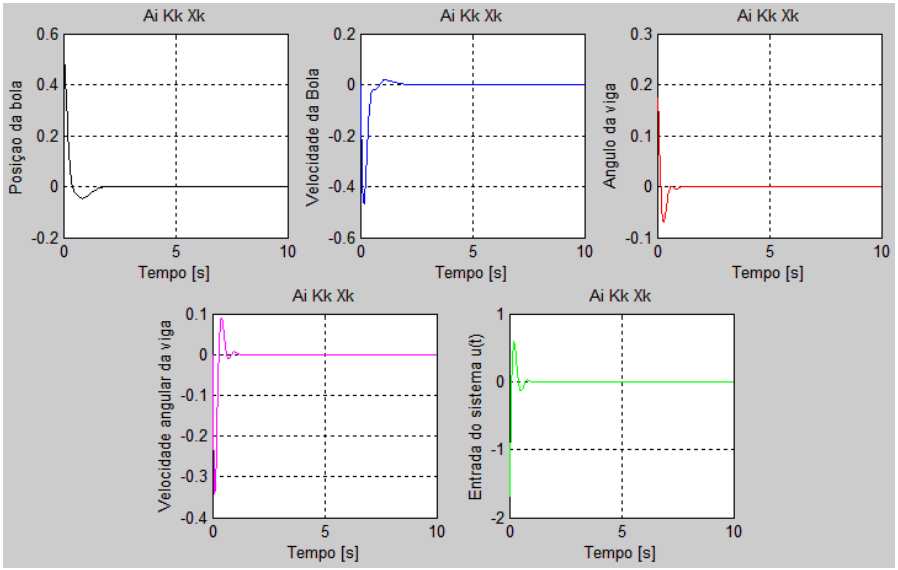

Figura 6.7. Simulação do sistema bola-viga para $A_iK_kX_k$.

Neste caso também é possível observar pela simulação, Figura 6.7, que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 3.0431$.

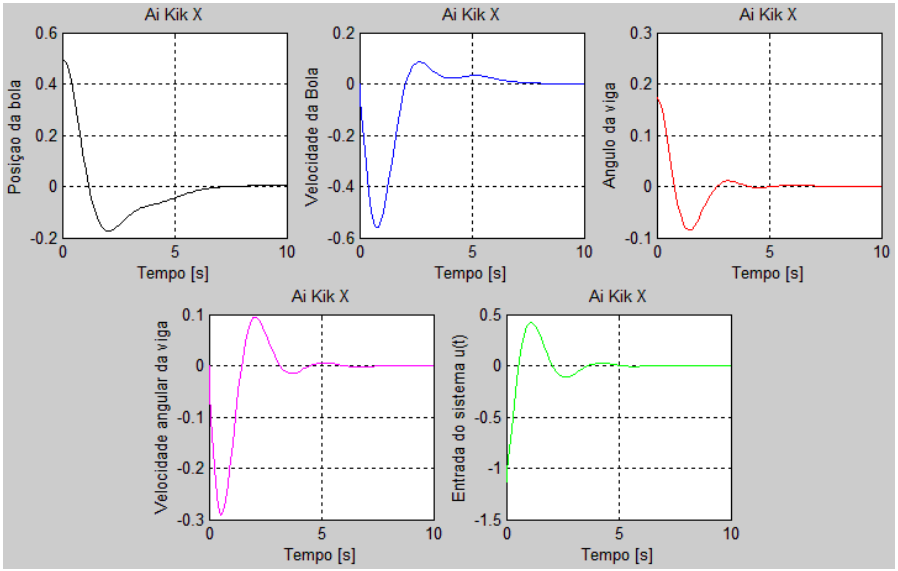

Figura 6.8. Simulação do sistema bola-viga para $A_iK_{ik}X$.

Neste caso também é possível observar pela simulação, Figura 6.8, que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 3.5845$.

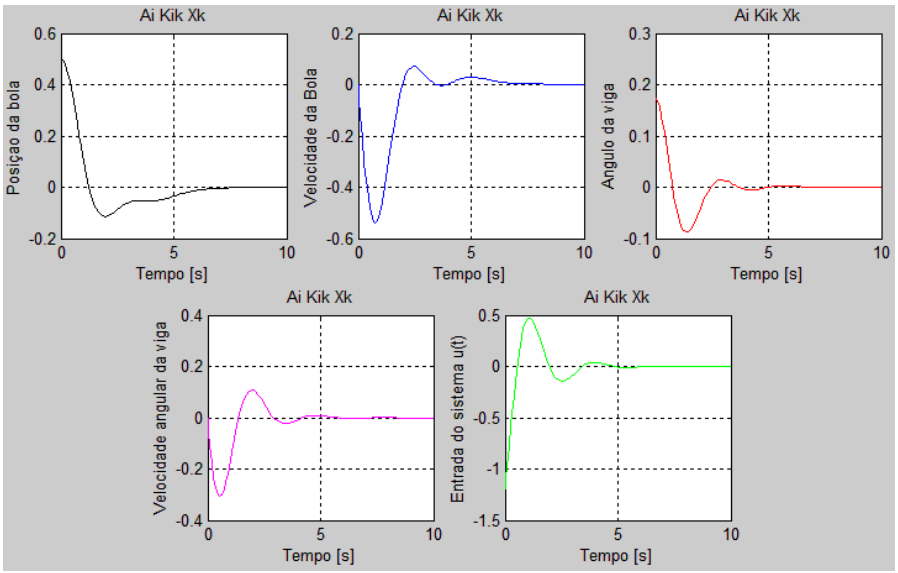

Figura 6.9. Simulação do sistema bola-viga para $A_iK_{ik}X_k$.

Neste caso também é possível observar pela simulação, Figura 6.9, que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 3.0439$.

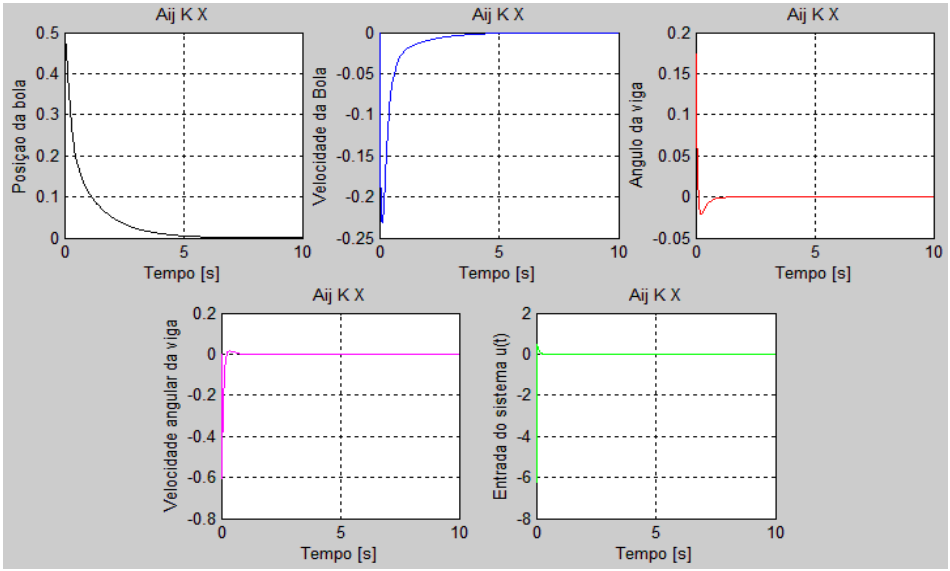

Figura 6.10. Simulação do sistema bola-viga para $A_{ij}KX$.

Nos casos onde a planta é descrita por modelos *fuzzy* TS e incertezas do tipo politópica observa-se pela simulação, figura 6.10, que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 5.0402$. Devido a resposta do sistema ser rápida e para manter a mesma escala dos gráficos, foi feito a simulação diminuindo o tempo de análise, mostrada no interior de gráfico da dinâmica do sistema.

No caso de simulação mostrada a seguir, Figura 6.11, nota-se que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 4.0650$.

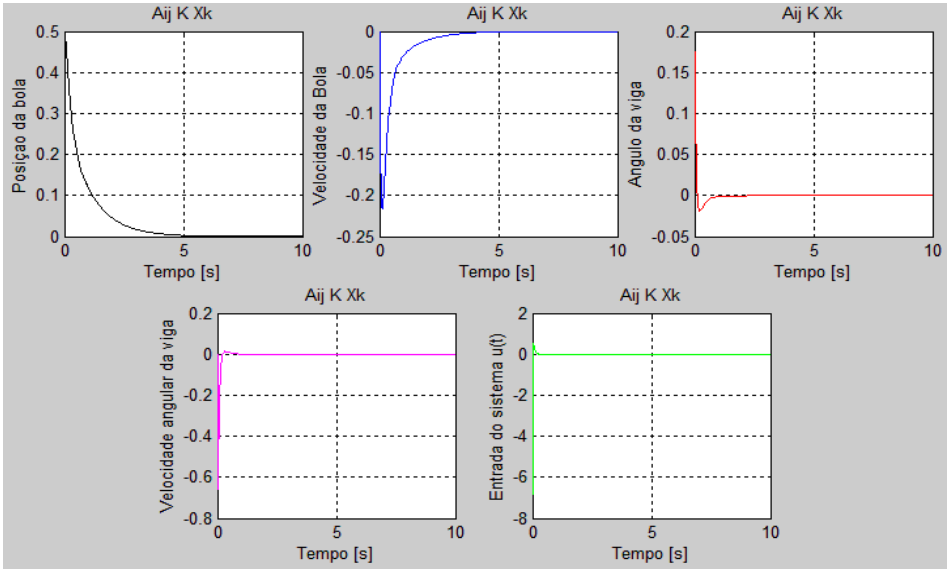

Figura 6.11. Simulação do sistema bola-viga para $A_{ij}KX_k$.

No caso de simulação mostrada a seguir, Figura 6.12, nota-se que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 5.0353$.

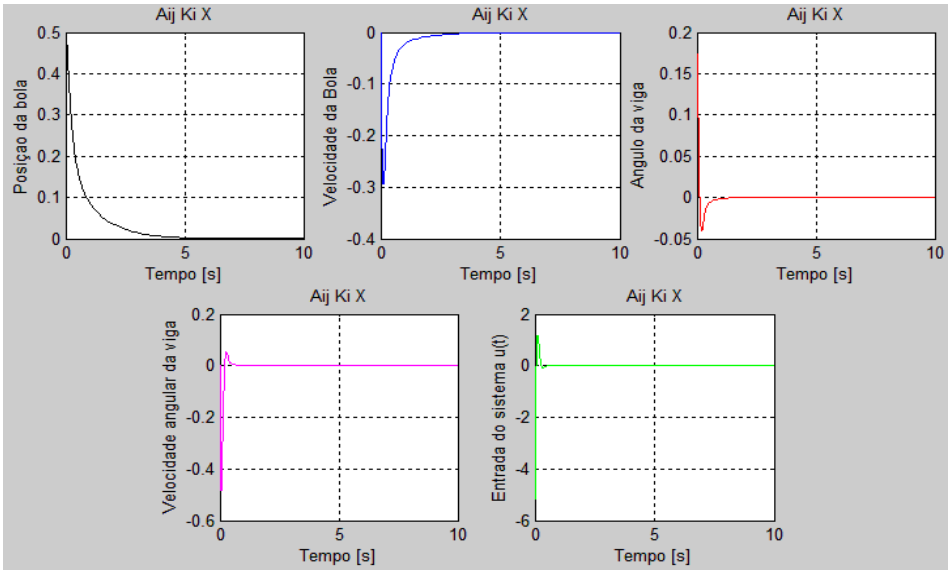

Figura 6.12. Simulação do sistema bola-viga para $A_{ij}K_iX$.

No caso de simulação mostrada a seguir, Figura 6.13, nota-se que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 4.0648$.

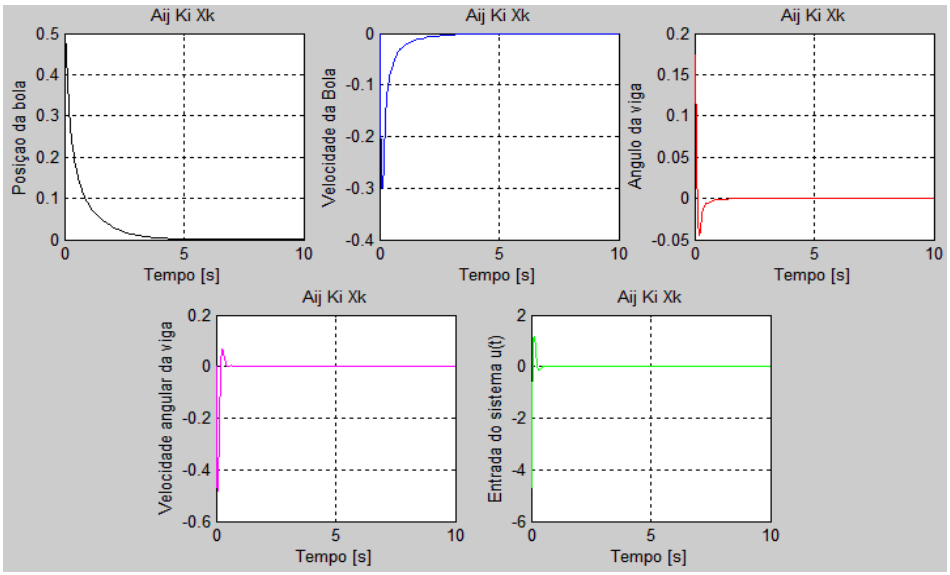

Figura 6.13. Simulação do sistema bola-viga para $A_{ij}K_iX_k$.

No caso de simulação mostrada a seguir, Figura 6.14, nota-se que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 5.0402$.

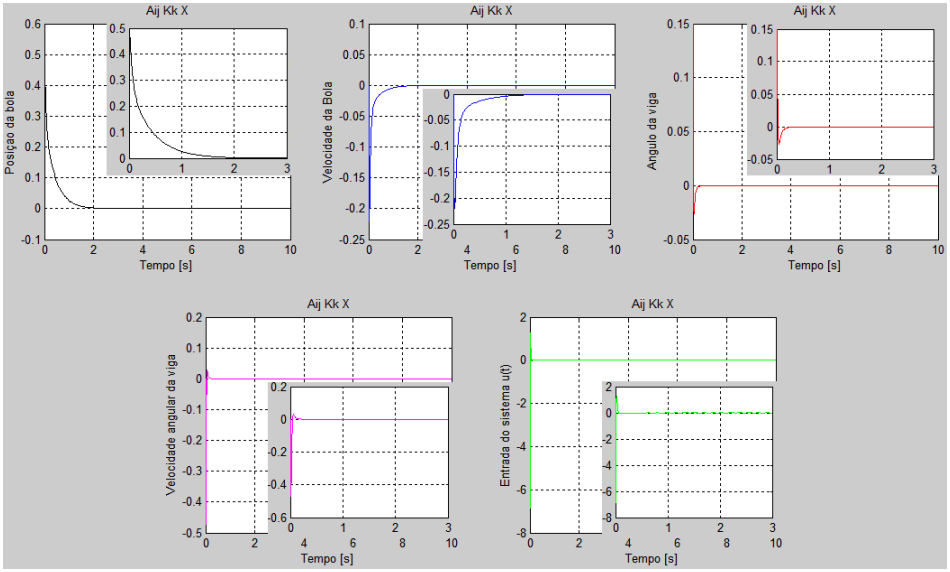

Figura 6.14. Simulação do sistema bola-viga para $A_{ij}K_kX$.

No caso de simulação mostrada a seguir, Figura 6.15, nota-se que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 4.0441$.

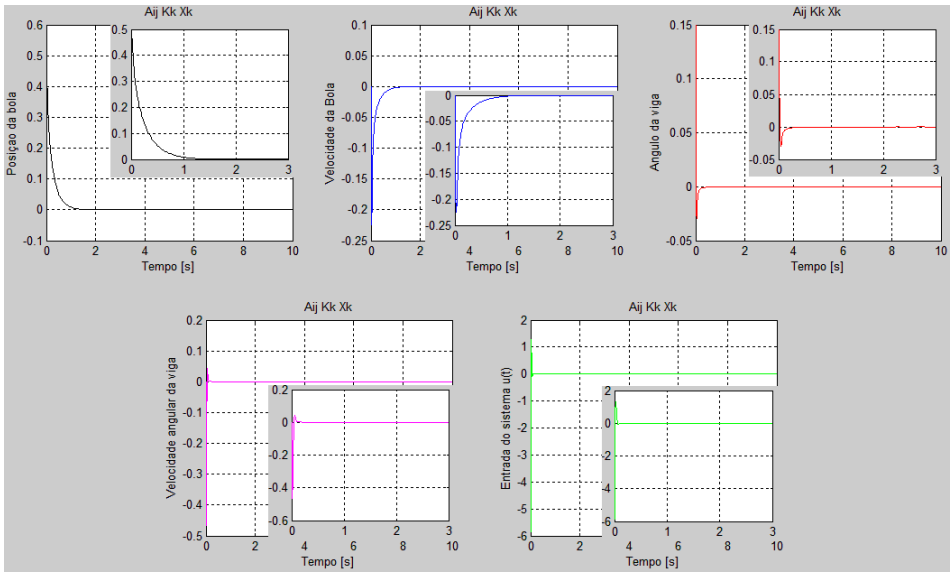

Figura 6.15. Simulação do sistema bola-viga para $A_{ij}K_kX_k$.

No caso de simulação mostrada a seguir, Figura 6.16, nota-se que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 5.0353$.

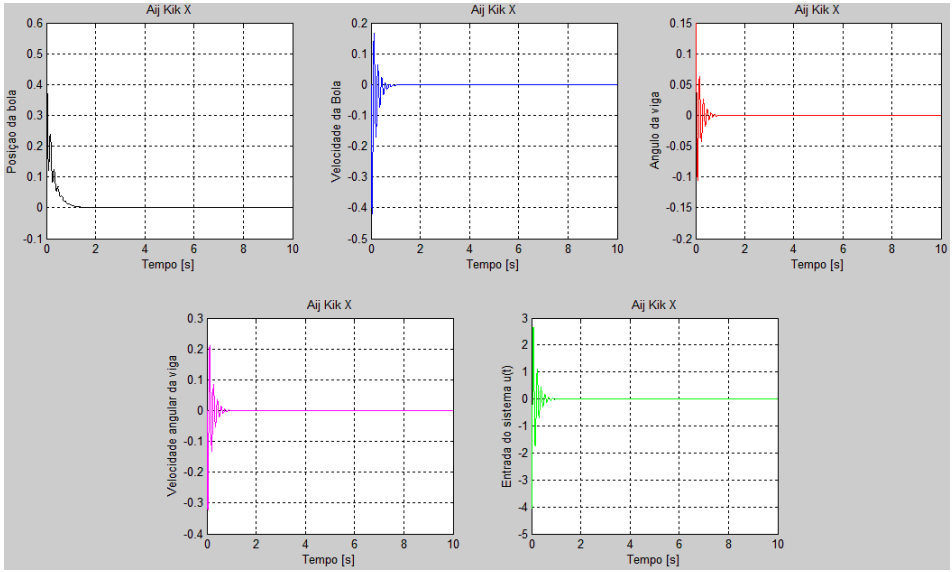

Figura 6.16. Simulação do sistema bola-viga para $A_{ij}K_{ik}X$.

Na última simulação mostrada a seguir, Figura 6.17, nota-se que a modelagem satisfez o intervalo de operação para a dinâmica do sistema, sendo o intervalo de operação apresentado em (6.21a). A entrada do sistema também satisfez a restrição de entrada dada por $\|\mathbf{u}(t)\|_2 \leq \mu$, sendo $\mu = 4.0440$.

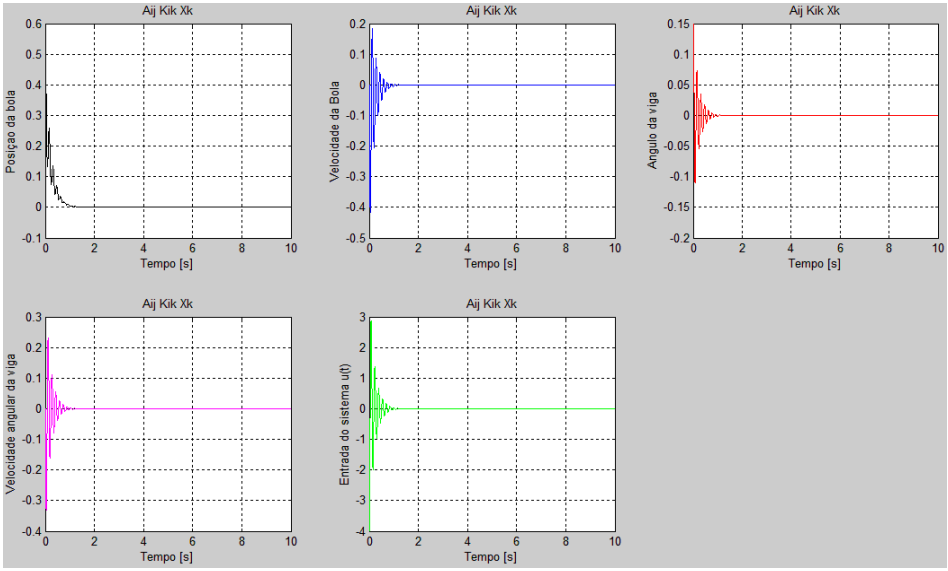

Figura 6.17. Simulação do sistema bola-viga para $A_{ij}K_{ik}X_k$.

Através das tabelas e das simulações nota-se que para a planta descrita somente por modelos *fuzzy* TS, a flexibilização dos ganhos e da matriz **X** retornou para a restrição de entrada valores melhores ou pelo menos iguais de μ. O mesmo ocorre quando a planta é descrita por modelos *fuzzy* TS com incertezas politópicas.

7. Conclusões e Perspectivas

7.1. Conclusões

Explorou-se o conhecimento das condições iniciais da planta, consideradas em um politopo conhecido, no projeto de reguladores para plantas não-lineares descritas por modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno.

Foram propostos métodos de análise utilizando funções de Lyapunov do tipo $\mathbf{V}(x(t)) = x^T(t)\mathbf{X}^{-1}x(t)$, sendo **X** dependente das condições iniciais da planta. Os ganhos do controlador também foram projetados em função das condições iniciais da planta.

O método proposto é baseado em LMIs, que permite a existência de incertezas politópicas na planta, a especificação da taxa de decaimento e restrições na entrada e saída.

A análise comparativa dos resultados realizada teve por objetivo verificar a possibilidade de aumentar o grau de liberdade para as LMIs de estabilidade quadrática, taxa de decaimento, restrições na entrada e saída (Ogata, 1997), para sistemas incertos.

Nota-se que o aumento da ordem da matriz **A** associada a um grande número de incertezas, quanto ao controlador **K** associado a *fuzzy* TS, às condições iniciais $x(0)$ e também a **X** associada as condições iniciais, pode gerar um número muito grande de combinações e com isto, um esforço computacional excessivo. Entretanto, este fato não limita o projeto dos controladores **K**.

A flexibilização da matriz **X** para $\mathbf{X}(\gamma)$, dependente das condições iniciais, bem como a flexibilização do controlador **K** descrito por modelos *fuzzy* TS por $\mathbf{K}(\alpha)$ e $\mathbf{K}(\alpha,\gamma)$, propostas deste trabalho, adicionaram ao critério de estabilidade mais liberdade no sentido de atender o conjunto de todas as restrições impostas ao sistema. Um fato observado foi que quando se tem a flexibilização do ganho do controlador descrito por modelos *fuzzy* TS comparado com o ganho do controlador sem ser descrito por modelos *fuzzy* TS, não é obtida grande redução dos níveis da restrição de entrada. Foi observado nas simulações que o ganho no desempenho do sistema ocorre quando se flexibiliza a matriz **X** considerando-se as condições iniciais da planta. Com

isto, os níveis da restrição de entrada, foram reduzidos, chegando ao pior caso a valores de até 14%, como mostra as Tabelas da Seção 6.2.

Tabela 7.1. Comparação entre os sistemas $\mathbf{A}_i\mathbf{KX}$ e $\mathbf{A}_i\mathbf{KX}_k$.

	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \frac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.4125	μ=1.2162	13.90 %
$\beta = 10.0$	μ=3.5848	μ=3.0558	14.76 %

Tabela 7.2. Comparação entre os sistemas $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}$ e $\mathbf{A}_i\mathbf{K}_i\mathbf{X}_k$.

	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}_i\ \mathbf{X}$	$\mathbf{A}_i\ \mathbf{K}_i\ \mathbf{X}_k$	$\mathbf{Erro(\%)} = \frac{\mu_{SCI} - \mu_{CCI}}{\mu_{SCI}} \cdot 100$
$\beta = 2.0$	μ=1.4124	μ=1.2161	13.90 %
$\beta = 10.0$	μ=3.5845	μ=3.0555	14.76 %

Pela comparação entre as Tabelas 7.1 e 7.2, nota-se que o controlador descrito por modelos *fuzzy* TS é o controlador **K** único não retorna resultados relevantes com relação ao índice de desempenho da restrição de entrada. Porém, para o caso que se tem a matriz **X** flexibilizada tem-se a melhora na restrição da entrada.

Esse fato foi observado em todas as tabelas apresentadas na Seção 6.2. Então, a flexibilização da matriz **X** retorna mais benefícios do que quando se descreve o controlador por modelos *fuzzy* TS e dependente das condições iniciais.

Quando a planta foi descrita por modelos *fuzzy* TS e considerando também incertezas do tipo politópicas na planta, observou-se que o mesmo ocorreu quando se teve a flexibilização da matriz **X**.

7.2. Perspectivas

A análise foi feita somente para sistemas contínuos e bons resultados foram constatados a favor da flexibilização da matriz **X** e do controlador **K** considerando a taxa de decaimento e a restrição na entrada. Portanto, como perspectivas futuras, tem-se a adição de novas restrições, como por exemplo, restrição do sinal de saída, restrição de índice de desempenho baseada na norma H_∞, além da possibilidade de confrontar a estabilidade quadrática com a estabilidade projetiva (Apkarian et al., 2001). Há ainda a possibilidade do desenvolvimento do estudo para o caso discreto.

8. Referência Bibliográfica

Apkarian, P.; Tuan, H. D. e Bernussou, J., “Continuous-Time Analysis, Eigenstructure Assignment, and H2 Synthesis with Enhanced Linear Matrix Inequalities(LMI) Characterization”, IEEE Transactions on Automatic Control, v. 46, n. 12, pp. 1941-1946, 2001.

Barmish, B. R., “Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System”, Journal of Optimization Theory and Application, v. 46, n. 4, pp. 399-408, 1985.

Bell, D. J., Mathematics of Linear and Nonlinear Systems, New York: Oxford University Press Inc.,pp. 1-14,1990.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.

Campello, R. J. G. B. (2002). Arquiteturas e metodologia para modelagem e controle de sistemas complexos utilizando ferramentas clássicas e modernas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação de Campinas – UNICAMP, Campinas – SP. Tese de Doutorado.

Cao, S. G., Rees, N. W. and Feng, G. (1996). Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control system, International Journal of System Science 27(2): 193-203.

Chen, B. S., Tseng, C. S. and Uang, H. J. (1999). Robustness design of nonlinear dynamic system via fuzzy linear control, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 7(5): 571-585.

Covacic, M.R. (2006). Síntese de sistemas ERP baseada em LMIs e controle com estrutura variável, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Ilha Solteira – SP. Tese de Doutorado.

Daruichi, E.R.M. (2003). Modelagem e Controle de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Ilha Solteira – SP. Tese de Doutorado.

Feng, G., Cao, S. G., Rees, N. W. and Chak, C. K. (1997), Design of fuzzy control systems with guaranteed stability, Fuzzy Sets and Systems 85: 1-10.

Friedland, B. (1996). Advanced Control Systems Design, Prentice-Hall, New Jersey – USA.

Ioannou, P. and Sun, J. (1996). Robust adaptive control, Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey – USA.

Kim, E. and Lee, H. (2000). New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8(5): 523-534.

Kosko, B. (1997). Fuzzy engineering, Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice-Hall, USA.

Leith, D. and Leithead, W. E. (1999). Analytic framework for blended multiple model systems using local linear models, International Journal Control 72: 605-619.

Mandani, E.H. (1974). Application of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant. Proc. IEE, vol. 121, no.12, December 1974.

Marín, R.C. (2004). Diseño de un sistema “bola y viga” utilzando un microcontrolador y reglas de lógica difusa.

Ogata, K. (1997). Modern Control Engineering, Prentice-Hall, New Jersey – USA.

Ogata, K. , “Engenharia de Controle Moderno”, 2º .ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1994.

Pietrobom, H. C. (1999). Controle de sistemas não-lineares baseados em LMI utilizando modelos fuzzy, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Ilha Solteira – SP. Tese de Mestrado.

Rampazzo J., E.J. (2004) Estabilidade e Síntese de Controladores para Sistemas Lineares Incertos, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Ilha Solteira – SP. Tese de Mestrado.

Silva, N.A.P. (2005). Projeto de Controladores Automáticos com Atualização das Condições Iniciais, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Ilha Solteira – SP. Tese de Doutorado.

Souza, R.B.M., Teixeira, M.C.M, Machado, E.R.M.D., Assunção, E. Projeto de reguladores *fuzzy* Takagi-Sugeno utilizando as condições iniciais da planta. 5th DINCON 2006, Guaratinguetá – SP – Brasil.

Sugeno, M. and Kang, G. T. (1988). Structure identification of fuzzy model, Fuzzy Sets and Systems 28: 15-33.

Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics SMC-15(1): 116-132.

Tanaka, K and Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems, Fuzzy Sets and Systems 45(2): 136-156.

Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. (1998a). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 6(2): 250-265.

Tanaka, K. Ikeda, T. and Wang, H. (1998b). Fuzzy control of chaotic system using LMIs: regulation, synchronization and chaos model following, IEEE Conference on Fuzzy Systems, Alaska, pp. 434-439.

Tanaka, K. Ikeda, T. and Wang, H. (1998c). A unified approach to controlling chaos via an LMI-based fuzzy control system design, IEEE Transactions on Circuits and Systems 45(10): 1021-1040.

Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohatake, H. and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 9(4): 525-537.

Teixeira, M. C. M. and Żak, S. H. (1999). Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 7(2): 133-142.

Teixeira, M., Assunção, E. and Avellar, R. (2003). On Relaxed LMI-Based Designs for Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 11(5): 613-623.

Teixeira, M., Assunção, E. and Daruichi, E. (2003). A method for plotting complementary root locus using the root locus (positive gains) rules, IEEE Transactions on Education.

Teixeira, M., Daruichi, E. and Assunção, E. (1996). Identificação rápida de sistemas dinâmicos com redes neurais de Hopfield, Proceedings of the 11th Brazilian Automatic Control Conference – CBA, São Paulo, pp. 543-548.

Teixeira, M., Daruichi, E. and Assunção, E. (1998). Identificação rápida de sistemas dinâmicos com condições iniciais não nulas, Proceedings of the 12th Brazilian Automatic Control Conference – CBA, Uberlândia, pp. 1261-1266.

Teixeira, M., Daruichi, E. and Assunção, E. (2000). Identificação rápida de sistemas dinâmicos com entrada e saída da planta, Proceedings of the 13th Brazilian Automatic Control Conference – CBA, Florianópolis, pp. 2282-2287.

Teixeira, M., Pietrobom, H. and Assunção, E. (2000). Novos resultados para o projeto de reguladores fuzzy utilizando LMIs, Controle e Automação 11: 37-48.

Tong, R. (1978). Synthesis of fuzzy models for industrial processes-some recent result, International Journal General Systems 4: 143-162.

VanAntwerp, J. G. e Braatz, R. D., “A Tutorial on Linear and Bilinear Matriz Inequalities”, Journal of Process Control, v. 10, n. 22, pp. 363-385, 2000.

Wang, H., Tanaka, K. and Griffin, M. F. (1996). An Approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 4: 14-23.

Wang. L. (1997). A course in fuzzy systems and control, Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, USA.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets, Information and Control 8: 338-353.

Apêndice A. Análise da Estabilidade Segundo Lyapunov

Uma das mais importantes exigências a ser determinada em um sistema de controle é a sua estabilidade. Para sistemas lineares invariantes no tempo, as ferramentas da teoria clássica de controle podem ser aplicadas, dentre elas: o critério de estabilidade de Routh e o critério de estabilidade de Nyquist. Porém, esses critérios não podem ser aplicados nos casos em que o sistema é não-linear, ou linear, mas variante no tempo (Ogata, 1994).

Por volta de 1892, A.M. Lyapunov apresentou dois métodos para se determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos descritos por meio de equações diferenciais. O Primeiro Método, assim denominado, consiste na utilização das formas explícitas das soluções das equações diferenciais para verificação da estabilidade. Já o segundo, denominado Segundo Método de Liapunov, não necessita do conhecimento das soluções das equações diferenciais, ou seja, não é necessário resolver as equações de estado para a análise de estabilidade. Este método apresenta, portanto, maior abrangência em relação aos métodos da teoria de controle convencional, pois permite estender a análise de estabilidade à classe de sistemas não-lineares, ou lineares, mas variantes no tempo.

Conceitos Básicos. As definições a seguir fazem parte da teoria de estabilidade de Lyapunov e são fundamentais à compreensão dos teoremas de estabilidade.

Sistema. A representação a ser considerada aqui é

$$\dot{x} = f(x), \tag{A.1}$$

sendo $\mathbf{x}$ o vetor de estado (n-dimensional) e $f(t)$ um vetor de dimensão n cujas componentes são funções de $x_1, x_2, ..., x_n$ e t. A solução começando em uma dada condição inicial $x = x_0$ em $t = t_0$ será designada por $\Phi(t, x_0)$.

Estado de Equilíbrio. No sistema considerado em (A.1), um estado x_e para o qual

$$f(x_e) = 0, \tag{A.2}$$

é denominado um estado de equilíbrio do sistema. Estes estados correspondem às soluções constantes das equações de estado. A determinação dos estados de equilíbrio não envolve a solução das equações diferenciais do sistema, mas apenas a solução da equação (A.2).

A.1. Estabilidade no sentido de Lyapunov.

É necessário definir uma região esférica de raio k em torno de um estado de equilíbrio x_e por

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x_e}\| \leq k \tag{A.3}$$

sendo que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x_e}\|$ é chamada de norma Euclidiana e é definida por:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x_e}\| = \left\{(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \cdots + (x_n - x_{ne})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Seja $S(\delta)$ a região que consiste em todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta .$$

Sendo x_0 o estado inicial, e seja $S(\xi)$ a região que consiste em todos os pontos para os quais

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \xi \text{, para todo } t \geq t_0 .$$

Um estado de equilíbrio x_e do sistema é dito estável no sentido de Lyapunov se, correspondendo a cada $S(\xi)$ houver uma $S(\delta)$ tal que as trajetórias iniciadas em $S(\delta)$ não deixem $S(\xi)$ à medida que t cresce.

Estabilidade assintótica. Um estado de equilíbrio x_e é dito assintoticamente estável no sentido de Lyapunov se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução começando em $S(\delta)$ converge para x_e, sem deixar $S(\xi)$, à medida que t aumenta. Na prática a estabilidade assintótica é mais importante do que a mera estabilidade. Também como estabilidade assintótica é um conceito local, a simples

confirmação da estabilidade assintótica pode não significar que o sistema vai operar adequadamente. Algum conhecimento do tamanho da máxima região de estabilidade assintótica é geralmente necessário. Esta região é chamada de domínio de atração. Este domínio é parte do espaço-de-estados em que se originam trajetórias assintoticamente estáveis. Em outras palavras, toda trajetória que se origina no domínio de atração é assintoticamente estável.

Estabilidade assintótica global. Se a estabilidade assintótica se mantém para todos os pontos do espaço de estados a partir dos quais se originam trajetórias, o estado de equilíbrio é dito assintoticamente estável globalmente.

Instabilidade. Um estado de equilíbrio x_e do sistema é dito instável se, para algum número real $\xi > 0$ e todo número real $\delta > 0$, não importando quão pequeno ele seja, há sempre um estado x_0 em $S(\delta)$ tal que a trajetória começando neste estado deixa a região $S(\xi)$.

Funções escalares positivas definidas. Uma função escalar $V(\mathbf{x})$ é dita definida positiva em uma região Ω (incluindo a origem do espaço de estados) se $V(\mathbf{x}) > 0$ para todos os estados não nulos $\mathbf{x}$ na região Ω e $V(0) = 0$.

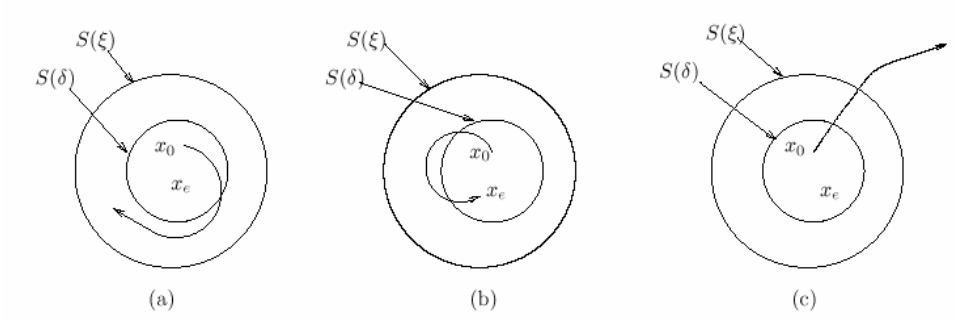

Figura A.1. Interpretação da estabilidade: a) estado de equilíbrio estável; b) estado de equilíbrio assintoticamente estável e uma trajetória representativa; c) estado de equilíbrio instável e uma trajetória representativa.

Uma função variando no tempo $V(x,t)$ é dita definida positiva em uma região Ω (incluindo a origem do espaço de estados) se for limitada inferiormente por uma função positiva definida invariante no tempo, isto é, se existir uma função positiva definida $V(x)$ tal que:

$$V(x,t) > V(x) \text{ para todo } t \geq t_0$$

$$V(0,t) = 0 \text{ para todo } t \geq t_0$$

Funções escalares negativas definidas. Uma função escalar $V(\mathbf{x})$ é dita negativa definida se $-V(\mathbf{x})$ for positiva definida.

Funções escalares positivas semidefinidas. Uma função escalar $V(\mathbf{x})$ é dita positiva semidefinida ser for positiva em todos os estados de uma região Ω, exceto na origem, e em outros estados onde seu valor é zero, $V(\mathbf{x}) \geq 0$.

Funções escalares negativas semidefinidas. Uma função $V(\mathbf{x})$ é dita negativa semidefinida se $-V(\mathbf{x})$ for positiva semidefinida.

Forma quadrática. A forma quadrática constitui uma classe de funções escalares que desempenham um papel importante na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos, a forma geral é da por:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

sendo $\mathbf{x}$ um vetor real e P uma matriz simétrica real.

Segundo (Bell, D. J., 1990), a condição necessária e suficiente para a definição positiva da forma quadrática é que todos os determinantes menores principais sucessivos de P sejam positivos, ou seja,

$$p_{11} > 0, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Em (Feng et al., 1997), também é estabelecido um outro critério para a determinação da positividade da forma quadrática. Estudando os autovalores de P é possível verificar a definição positiva de $V(x) = x^T P x$. Desde que os autovalores de

P, que são reais pois P é simétrica, sejam todos positivos, então se pode concluir que P é positiva definida.

Teorema 1. Suponha-se que um sistema seja definido por

$$\dot{x} = f(x),$$

com

$$f(0) = 0.$$

Se existir uma função $V(x)$ que possui primeiras derivadas parciais contínuas e satisfaz às condições:

$V(x)$ é definida positiva;

$\dot{V}(x)$ é negativa definida;

Então o estado de equilíbrio na origem é assintoticamente estável uniformemente.

Teorema 2. Suponha-se que um sistema seja definido por

$$\dot{x} = f(x),$$

com

$$f(0) = 0.$$

Se existir uma função escalar $V(x)$ que possui primeiras derivadas parciais contínuas e satisfaz às condições:

$V(x)$é definida positiva;

$\dot{V}(x)$ é negativa semidefinida;

$\dot{V}(\Phi(t;x_0))$ não se anula em $t \geq 0$ e qualquer $x_0 \neq 0$, onde denota a trajetória ou solução partindo de x_0 em t_0, então, o estado de equilíbrio na origem do sistema é uniforme e assintoticamente estável globalmente.

Teorema 3. Suponha-se que um sistema seja definido por

$$\dot{x} = f(x),$$

com

$$f(0) = 0 .$$

Se existir uma função escalar $W(x)$ que possui primeiras derivadas parciais contínuas e satisfaz às condições:

$W(x)$ é definida positiva em alguma região em torno da origem;

$\dot{W}(t)$ é positiva definida na mesma região.

Então o estado de equilíbrio na origem é instável.

A.2. Análise da estabilidade segundo Lyapunov

Considere o sistema autônomo

$$\dot{x} = \mathbf{A}x , \qquad \text{(A.4)}$$

sendo x o vetor de estados e A uma matriz constante. Se A é não-singular, o único estado de equilíbrio é a origem x=0.

Para este sistema defina uma função de Liapunov:

$$\mathbf{V}(x) = x^T \mathbf{P} x > 0$$

A derivada em relação ao tempo é:

$$\dot{\mathbf{V}}(x) = \dot{x}^T \mathbf{P} x + x^T \mathbf{P} \dot{x} = (\mathbf{A}x)^T \mathbf{P} x + x^T \mathbf{P} \mathbf{A} x = x^T \left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\right)\mathbf{x}$$

Como $\mathbf{V}(x)$ foi escolhida sendo positiva definida, para se ter estabilidade assintótica é necessário que **V**(x) seja negativa definida.

$$\dot{\mathbf{V}}(x) < 0 .$$

Então é necessário para a estabilidade de (A.4) que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < 0 \qquad (1)$$

Teorema 1. Considere o sistema autônomo descrito em (A.4), sendo que x é um vetor de estado e **A** é uma matriz nxn constante e não singular. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio seja assintoticamente estável é que exista uma matriz **P**, positiva definida, simétrica, tal que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < 0$$

Interpretação geométrica: na Figura A.2 mostramos uma função $\mathbf{V}(x)$ e o caminho da evolução dos estados do sistema relaxado (A.4), sendo que os estados estão restritos ao lugar geométrico delineado por $\mathbf{V}(x)$, ou seja, pela função Lyapunov escolhida. Note que $\dot{\mathbf{V}}(x)$ é sempre negativa ao longo de $\mathbf{V}(x)$, mostrando que $\mathbf{V}(x)$ decresce ao longo do tempo, o que implica que o sistema é assintoticamente estável.

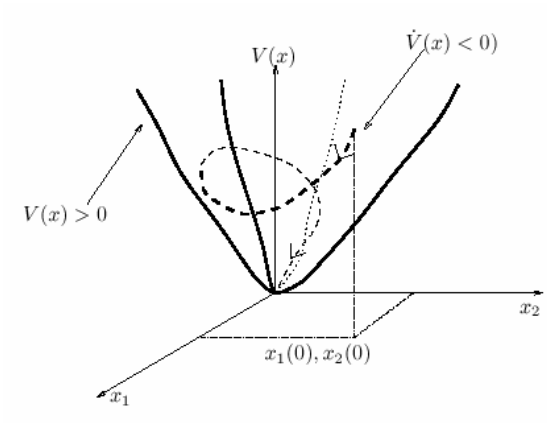

Figura A.2. Interpretação geométrica do teorema.

Apêndice B. Restrição nos Vetores de Entrada e Saída da Planta

B.1. Restrição no Vetor de Entrada

Admita que um SLIT (Sistema Linear Invariante no Tempo) possua a seguinte representação em variáveis de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{B.1}$$

sendo $x \in \Re^n$ o vetor de estado, $u \in \Re^m$ a entrada de controle, $y \in \Re^p$ a saída do sistema ($p \geq m$), $A \in \Re^{n \times n}$ a matriz característica do sistema, $B \in \Re^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema e $C \in \Re^{p \times n}$ a matriz de saída do sistema.

O problema da restrição no vetor de entrada *u* consiste em especificar LMI, de modo a assegurar que (Cavacic, 2006):

$$\max_{t \geq 0} \|u\| \leq \mu_0,$$

sendo μ_0 uma especificação considerada no projeto do controlador. Para a lei de controle $u = Kx$, tem-se:

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

Considera-se, então, uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática $V(x) = x^T Px$, na qual P é uma matriz real simétrica definida positiva. A derivação desta função em relação ao tempo, ao longo de qualquer trajetória, é descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} \\ &= x^T (A + BK)^T Px + x^T P(A + BK)x \\ &= x^T (A^T P + K^T B^T P)x + x^T (PA + PBK)x \\ &= x^T (PA + A^T P + PBK + K^T B^T P)x \\ &= x^T PP^{-1}(PA + A^T P + PBK + K^T B^T P)P^{-1}Px \\ &= x^T P(AP^{-1} + P^{-1}A^T + BKP^{-1} + P^{-1}K^T B^T)Px \end{aligned} \tag{B.2}$$

Definindo-se $X = P^{-1}$ e $F = KP^{-1} = KX$, tem-se:

$$\dot{V}(x) = x^T P(AX + XA^T + BF + F^T B^T)Px$$

Como $V(x)$ foi escolhida sendo definida positiva, para que se tenha estabilidade assintótica, é suficiente que $\dot{V}(x)$ seja definida negativa. Logo,

$$AX + XA + BF + F^T B^T < 0$$

Então, as condições para a estabilidade são a existência de X e F, tais que:

$$AX + XA + BF + F^T B^T < 0 \text{ e } X = X^T > 0, \tag{B.3}$$

que são LMI em X e F.

Quando uma determinada condição inicial $x(0)$ é conhecida, é possível encontrar um limite superior para a norma euclidiana da entrada de controle u (Boyd et al., 1994). Considera-se, inicialmente, que $X = X^T > 0$ satisfaça:

$$x(0)^T X^{-1} x(0) < 1 \tag{B.4}$$

Esta condição não restringe a solução de (B.3), pois limita apenas a norma de X^{-1} e (C.3) não impõe outras restrições à matriz X.

Segundo VanAntwerp e Braatz (2000), a idéia básica do complemento de Schur diz que a LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \tag{B.5}$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x, é equivalente a:

$$R(x) > 0 \text{ e } Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0,$$

isto é, este conjunto de inequacões não-lineares pode ser representado através da LMI (B.5). O Apêndice C mostra a demonstração do complemento de Schur.

Logo, pelo complemento de Schur, (B.4) possui a seguinte equivalência:

$$1 - x(0)^T X^{-1} x(0) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} > 0 \tag{B.6}$$

Como $K=FX^{-1}$ e definindo-se $z = X^{-\frac{1}{2}} x$, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\max_{t\geq 0}\|u\|_2 = \max_{t\geq 0}\|Kx\|_2 \\
&= \max_{t\geq 0}\|FX^{-1}x\|_2 \\
&= \max_{t\geq 0}\left\|FX^{-1}X^{\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}x\right\|_2 \\
&= \max_{t\geq 0}\left\|FX^{-\frac{1}{2}}z\right\|_2
\end{aligned} \tag{B.7}$$

De (B.4), tem-se:

$$\begin{aligned}
&\|z(0)\|_2^2 = \left\|X^{-\frac{1}{2}}x(0)\right\|_2^2 \\
&= x(0)^T X^{-\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}x(0) \\
&= x(0)^T X^{-1}x(0) \leq 1.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Como para $V(x) = x^T X^{-1}x, \dot{V}(x) < 0$, para $x \neq 0$, então (B.8) é satisfeita para todo x, $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\|z\|_2^2 = \left\|X^{-\frac{1}{2}}x\right\|_2^2 \\
&= x^T X^{-\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{2}}x \\
&= x^T X^{-1}x \leq 1
\end{aligned} \tag{B.9}$$

De (B.7) e (B.8),

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0}\left\|FX^{-\frac{1}{2}}z\right\|_2 &= \max_{t\geq 0}\sqrt{z^T X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}}z} \\
&= \sqrt{\lambda_{\max}\left(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}}\right)z^T z} \\
&= \sqrt{\lambda_{\max}\left(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}}\right)}.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Assim,

$$\max_{t\geq 0}\left\|FX^{-\frac{1}{2}}z\right\|_2^2 < \mu_0^2 \Rightarrow \lambda_{\max}\left(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}}\right) < \mu_0^2 .$$

Esta condição é equivalente a:

$$X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I < 0, \tag{B.11}$$

pois:

$$z^T\left(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}} - \mu_0^2 I\right)z \le z^T z\left(\lambda_{\max}\left(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}}\right) - \mu_0^2\right).$$

Multiplicando-se (B.11), em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&X^{\frac{1}{2}}\left(X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}}\right)X^{\frac{1}{2}} - X^{\frac{1}{2}}\mu_0^2 IX^{\frac{1}{2}} < 0,\\
&F^T F - \mu_0 X < 0,\\
&\mu_0^2 X - F^T F > 0,\\
&X - F^T\left(\mu_0^{-2} I\right)F > 0.
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Logo, pelo complemento de Schur, (B.12) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{-\frac{1}{2}}F^T FX^{-\frac{1}{2}} + \mu_0^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & F^T \\ F & \mu_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{B.13}$$

Portanto, as LMIs (B.6) e (B.13) solucionam o problema.

B.2. Restrição no Vetor de Saída

O problema da restrição no vetor de saída *y* consiste em especificar LMI, de modo a assegurar que:

$$\max_{t\ge 0}\|y\| \le \xi_0,$$

sendo ξ_0 uma especificação considerada no projeto do controlador.

A análise a seguir é semelhante àquela efetuado no estudo da restrição no vetor de entrada. Para isso, considera-se, novamente, o SLIT descrito em (B.1). Como $x = X^{\frac{1}{2}}z$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\max_{t\geq 0}\|y\|_2^2 &= \max_{t\geq 0}\|Cx\|_2^2 \\
&= \max_{t\geq 0}\left\|CX^{\frac{1}{2}}z\right\|_2^2 \\
&= \max_{t\geq 0}\sqrt{z^T X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}} z} \\
&= \sqrt{\lambda_{\max}\left(X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}} z^T z\right)} \\
&= \sqrt{\lambda_{\max}\left(X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}}\right)}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Portanto, analogamente ao desenvolvimento realizado anteriormente em (B.11), (B.12) e (B.13), tem-se que:

$$\max\left\|CX^{\frac{1}{2}}z\right\|_2^2 < \xi_0^2 \Rightarrow \lambda_{\max}\left(X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}}\right) < \xi_0^2.$$

Esta condição é equivalente a:

$$X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I < 0 \tag{B.15}$$

pois,

$$z^T\left(X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}} - \xi_0^2 I\right)z \leq z^T z\left(\lambda_{\max}\left(X^{\frac{1}{2}} C^T C - \xi^2 X^{\frac{1}{2}}\right) - \xi_0^2\right).$$

Multiplicando-se (B.15), em ambos os lados, por $X^{\frac{1}{2}}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&XC^T CX - \xi_0^2 X < 0, \\
&\xi_0^2 X - XC^T CX > 0, \\
&X - XC^T\left(\xi_0^{-2} I\right)CX > 0.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Logo, pelo complemento de Schur, (B.16) possui a seguinte equivalência:

$$-X^{\frac{1}{2}} C^T C X^{\frac{1}{2}} + \xi_0^2 I > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & XC^T \\ CX & \xi_0^2 I \end{bmatrix} > 0. \tag{B.17}$$

Portanto, as LMIs (B.6) e (B.17) solucionam o problema.

Apêndice C. Complemento de Schur

A idéia básica do complemento de Schur (VanAntwerp e Braatz, 2000) diz que a LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \succ 0,$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x e é equivalente a:

$$R(x) \succ 0 \text{ e } Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \succ 0.$$

($\Rightarrow$) Suponha que a desigualdade matricial (C.1) seja verdadeira.

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \succ 0. \tag{C.1}$$

Seja definida $F(u,v)$ segundo a igualdade (C.2).

$$F(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{C.2}$$

Então têm-se que:

$$F(u,v) > 0,\ \forall [u,v] \neq 0. \tag{C.3}$$

Considere, inicialmente $u = 0$, então em (C.2) obtém-se (C.4).

$$F(0,v) = v^T R(x) v > 0,\ \forall v \neq 0 \Rightarrow R(x) \succ 0. \tag{C.4}$$

Adote agora v como sendo:

$$v = -R(x)^{-1} S(x)^T u.$$

com $u \neq 0$. Seja $F(u,v)$ dado da seguinte forma:

$$F(u,v) = u^T [Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)]u > 0,\ \forall u \neq 0,$$
$$\Rightarrow Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \succ 0.$$

($\Leftarrow$) Suponha que:

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x) \succ 0,\ \ R(x) \succ 0. \tag{C.5}$$

Fixando u e otimizando em termos de $vF(u,v)$ definido em (C.2), obtém-se:

$$\nabla_V F^T = 2R(x)v + 2S(x)^T u = 0. \qquad \text{(C.6)}$$

Desde que $R(x) > 0$, de (C.6), segue que:

$$v = -R(x)^{-1} S(x)^T u. \qquad \text{(C.7)}$$

Substituindo (C.7) em (C.2), então:

$$F(u) = u^T [Q(x) - S(x)R(x)^{-1} S(x)^T] u.$$

Desde que $[Q(x) - S(x)R(x)^{-1} S(x) \succ 0,\ R(x)] \succ 0$, o mínimo de $F(u)$ ocorre para $u = 0$, que também implica que $v = 0$. Então, o mínimo de $F(u,v)$ ocorre em (0,0) e é igual a zero. Portanto, $F(u,v) > 0,\ \forall [u,v] \neq 0$, isto é:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \succ 0.$$

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo