

André Luís Müller

**Análise numérica da estabilidade de poços de petróleo
considerando a variabilidade espacial e acoplamento
fluido-mecânico**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de concentração: Estruturas.

Orientadores: Eurípedes do Amaral Vargas Jr.
Luiz Eloy Vaz

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

André Luís Müller

**Análise numérica da estabilidade de poços de petróleo
considerando a variabilidade espacial e acoplamento
fluido-mecânico**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Eurípedes do Amaral Vargas Jr.

Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Luiz Eloy Vaz

Coorientador

Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas - UFRJ

Luiz Fernando Campos Ramos Martha

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Deane de Mesquita Roehl

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Roberto Francisco de Azevedo

Departamento de Engenharia Civil - UFV

Armando Prestes de Menezes Filho

CEMPES/PETROBRAS

José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 20 de abril de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

André Luís Müller

Engenheiro Civil Graduado pela Universidade de Passo Fundo RS. Mestrado em engenharia civil na área de estruturas pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Müller, André Luís

Análise numérica da estabilidade de poços de petróleo considerando a variabilidade espacial e acoplamento fluido-mecânico / André Luís Muller ; orientadores: Eurípedes do Amaral Vargas Jr., Luiz Eloy Vaz. – 2007.

163 f. : il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Civil)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Poços de petróleo. 3. Variabilidade espacial. 4. Análise numérica. I. Vargas Júnior, Eurípedes do Amaral. II. Vaz, Luiz Eloy. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

CDD: 624

A minha esposa Luciane e ao meu filho Lucas.

Agradecimentos

Aos meus orientadores Eurípedes do Amaral Vargas Jr. e Luiz Eloy Vaz pelo estímulo, orientação, oportunidades, convivência e amizade para a realização deste trabalho.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

Aos professores Luiz Fernando Campos Ramos Martha, Deane Mesquita Roehl e João Luiz Elias Campos pela colaboração no exame de qualificação e na avaliação da proposta de tese.

A FAPERJ pelos auxílios financeiros concedidos através do programa de bolsa de doutorado aluno nota 10.

A Petrobrás e aos pesquisadores do Cenpes que contribuíram no desenvolvimento desse trabalho.

A todos os amigos e colegas, em especial aos colegas da sala 609, Diego Frederico e Igor e ao engenheiro José Roberto Silvestre.

Resumo

Müller, André Luís; Vargas Jr, Eurípedes do Amaral; Vaz, Luiz Eloy. **Análise numérica da estabilidade de poços de petróleo considerando a variabilidade espacial e acoplamento fluido-mecânico.** Rio de Janeiro, 2007. 163p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em geral, a análise da estabilidade e a análise das respostas de poços de petróleo são realizadas de forma determinística em relação às propriedades mecânicas e hidráulicas do meio rochoso. No entanto, sabe-se que os meios rochosos e em particular rochas sedimentares, podem mostrar um considerável grau de heterogeneidades, em micro, meso e macro-escala. Essas heterogeneidades produzem variabilidade espacial nas propriedades mecânicas e hidráulicas dos meios rochosos. Essa variabilidade mostra em geral um caráter espacial pronunciado. O presente estudo propõe o desenvolvimento de procedimentos de análise numérica, utilizando elementos finitos, de processos fluido mecânicos acoplados, monofásicos e bifásicos, que levem em conta a variabilidade espacial de propriedades hidráulicas e mecânicas e a variabilidade das condições iniciais de tensões e poro pressões. Nesse estudo, empregam-se os procedimentos numéricos desenvolvidos em duas fases distintas. Na análise probabilística da estabilidade de poços e na análise probabilística das respostas dos poços durante a produção, considerando o acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico.

Palavras-chave

Poços de petróleo; Variabilidade espacial; Análise numérica.

Abstract

Müller, André Luís; Vargas Jr, Eurípedes do Amaral; Vaz, Luiz Eloy. **Numerical borehole stability analysis considering spatial variability and fluid-mechanical coupling.** Rio de Janeiro, 2007. 163p. DSc. Thesis - Department of Civil Engineering, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In general, borehole stability analysis and borehole response analysis are carried out considering that both hydraulic and mechanical parameters of the rock mass are deterministic. However, it is a well known fact, that rock masses and in particular sedimentary rock masses may show a considerable degree of heterogeneity, in micro, meso and macro scale. These heterogeneities produce spatial variability in mechanical and hydraulic properties of the rock medium. This variability can be very pronounced. The present work proposes the development of numerical analysis procedures, using finite elements, in order to analyze single and two phases flow, coupled fluid mechanical processes that take into account the spatial variability of hydraulic and mechanical properties and the variability of the initial stresses and pore pressures. In this study, the developed numerical procedures are used in two distinct phases. In the borehole stochastic stability analysis and in the borehole stochastic response analysis during the production, considering fluid mechanical coupling and two phase flow.

Keywords

Borehole; Spatial variability; Numerical analysis.

Sumário

1	Introdução	21
1.1.	Descrição do problema	21
1.2.	Revisão bibliográfica	23
1.3.	Escopo do trabalho	26
2	Formulação determinística para problemas de acoplamento fluido mecânico	31
2.1.	Introdução	31
2.2.	Modelo físico	31
2.3.	Equação de equilíbrio	34
2.4.	Equação de fluxo	36
2.4.1.	Fluxo trifásico	36
2.4.2.	Fluxo bifásico	39
2.4.3.	Fluxo monofásico	40
2.5.	Solução do problema de valor de contorno	40
2.6.	Formulação em elementos finitos	41
2.6.1.	Acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico	41
2.6.2.	Acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico	43
2.7.	Discretização no tempo	46
2.7.1.	Propriedades numéricas da discretização no tempo	46
3	Análise não linear	49
3.1.	Introdução	49
3.2.	Análise não linear local (modelos constitutivos e análise elastoplástica)	49
3.2.1.	Princípio da máxima dissipação plástica	49
3.2.2.	Método de solução do problema de programação matemática	53
3.2.3.	Função de escoamento (critério de Mohr Coulomb)	56
3.2.4.	Função de escoamento (critério de Von Mises)	57
3.3.	Modelo constitutivo para permeabilidade	57

3.4. Análise não linear global	58
3.4.1. Acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico	58
3.4.2. Acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico	60
4 Procedimentos de solução	65
4.1. Procedimento totalmente acoplado	65
4.2. Procedimento <i>staggered</i>	67
4.2.1. Procedimento <i>staggered</i> para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico	67
4.2.2. Procedimento <i>staggered</i> para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico	69
5 Exemplos de análise determinística	72
5.1. Introdução	72
5.2. Exemplo 1: adensamento unidimensional	73
5.3. Exemplo 2: poço vertical	77
5.3.1. Comparação entre os procedimentos de solução	80
5.4. Exemplo 3: fluxo bifásico unidimensional	82
5.5. Exemplo 4: acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico	83
5.5.1. Comparação entre os procedimentos de solução	85
6 Formulação probabilística para problemas de acoplamento fluido mecânico	88
6.1. Introdução	88
6.2. Alguns fundamentos da probabilidade e da estatística	88
6.2.1. Algumas hipóteses consideradas para as variáveis aleatórias	89
6.2.2. Fundamentos da probabilidade e da estatística para funções de variáveis aleatórias	90
6.2.3. Funções de covariância	91
6.2.4. Geração de variáveis aleatórias independentes	93
6.2.5. Funções densidade de probabilidade e transformação de variáveis	95
6.2.6. Geração de campos aleatórios	96
6.3. Variabilidade espacial das curvas $P_c - S_w$	101
6.4. Métodos de análise probabilística	102

6.4.1. Simulação de Monte Carlo (MC)	102
6.4.2. Expansão de Neumann (NE)	103
6.4.3. Método das perturbações	105
6.5. Análise de confiabilidade	107
6.6. Procedimento numérico para determinação de PI	109
7 Análise de sensibilidade	112
7.1. Introdução	112
7.2. Método de diferenciação direto	112
7.3. Método de diferenciação adjunto	114
7.4. Aproximação por diferenças finitas	115
7.5. Análise de sensibilidade para o procedimento <i>staggered</i>	117
7.6. Análise de sensibilidade para o procedimento totalmente acoplado	119
7.7. Análise de sensibilidade das tensões	120
7.8. Exemplo de análise de sensibilidade	120
8 Exemplos	127
8.1. Introdução	127
8.1.1. Exemplo 1: determinação de PI considerando comportamento determinístico	128
8.1.2. Exemplo 2: análise probabilística para uma determinada PI	129
8.1.3. Exemplo 3: determinação de PI considerando comportamento probabilístico	141
8.1.4. Exemplo 4: análise probabilística de um poço horizontal considerando fluxo bifásico	143
9 Conclusões e sugestões	150
10 Referências bibliográficas	154

Lista de figuras

Figura 1.1 Poço vertical para análise probabilística da estabilidade	27
Figura 1.2 Poço horizontal para análise estatística considerando fluxo bifásico	27
Figura 2.1 Volume elementar representativo	32
Figura 2.2 Volume de controle para balanço de massa do fluido.	37
Figura 5.1 Coluna poroelástica.	73
Figura 5.2 Poro pressão na base da coluna poroelástica	76
Figura 5.3 Poro pressão ao longo da coluna poroelástica	76
Figura 5.4 Deslocamento no topo da coluna poroelástica	77
Figura 5.5 Malha de elementos finitos e detalhe do poço vertical	78
Figura 5.6 Poro pressões, solução analítica x solução numérica	79
Figura 5.7 Tensão total σ_{yy} , solução analítica x solução numérica	79
Figura 5.8 Região plastificada para PI =5 (MPa) (a) e PI =20 (MPa) (b)	81
Figura 5.9 Coluna de solo sob fluxo bifásico	82
Figura 5.10 Saturação da fase molhante na coluna ao longo do tempo	83
Figura 5.11 Malha de elementos finitos e detalhe do poço horizontal	85
Figura 5.12 Tempo relativo de análise para os procedimentos de solução	86
Figura 6.1 Funções de covariância com comprimento de correlação	93
Figura 6.2 Hipercubo latino (ilustração)	95
Figura 6.3 Campo aleatório exponencial para permeabilidade	100
Figura 6.5 Campo aleatório esférico para permeabilidade	101
Figura 6.6 Curva $P_c - S_w$ para diferentes valores ξ .	102
Figura 7.1 Coluna poroelástica e elemento de referência para análise de sensibilidade	121
Figura 7.2 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à K, (1 segundo)	122
Figura 7.3 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à K, (100 segundos)	122
Figura 7.4 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à G, (1 segundo)	123

Figura 7.5 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à G, (100 segundos)	123
Figura 7.6 Sensibilidade das poro pressões em relação à K, (1 segundo)	124
Figura 7.7 Sensibilidade das poro pressões em relação à K, (100 segundos)	124
Figura 7.8 Sensibilidade das poro pressões em relação à G, (1 segundo)	124
Figura 7.9 Sensibilidade das poro pressões em relação à G, (100 segundos)	125
Além da verificação dos resultados obtidos com a formulação proposta, constatou-se com o exemplo analisado que as respostas em deslocamentos e poro pressões são mais sensíveis às variações da permeabilidade intrínseca do que às variações do módulo de elasticidade transversal. Verificou-se também o caráter transiente das respostas obtidas, ou seja, as sensibilidades variam consideravelmente no tempo.	125
Figura 8.1 Limites de PI considerando comportamento determinístico	129
Figura 8.2 Média de σ_{yy} para $Cv = 0.10$ em $\beta = 0^0$	130
Figura 8.3 Média de σ_{yy} para $Cv = 0.20$ em $\beta = 0^0$	131
Figura 8.4 Desvio padrão de σ_{yy} para $Cv = 0.10$ em $\beta = 0^0$	132
Figura 8.5 Desvio padrão de σ_{yy} para $Cv = 0.20$ em $\beta = 0^0$	133
Figura 8.6 Média da poro pressão para $Cv = 0.10$ em $\beta = 0^0$	133
Figura 8.7 Média da poro pressão para $Cv = 0.20$ em $\beta = 0^0$	134
Figura 8.8 Desvio padrão da poro pressão para $Cv = 0.10$ em $\beta = 0^0$	134
Figura 8.9 Desvio padrão da poro pressão para $Cv = 0.20$ em $\beta = 0^0$	135
Figura 8.11 Desvio padrão de σ_{yy} para $Cv = 0.10$ e $Cv = 0.20$ em $\beta = 0^0$	137
Figura 8.12 Desvio padrão da poro pressão para $Cv = 0.10$ (a) e $Cv = 0.20$ (b)	137
Figura 8.13 Desvio padrão da poro pressão para $Cv = 0.10$ e $Cv = 0.20$ em $\beta = 0^0$	138
Figura 8.14 Probabilidade de plastificação para $Cv = 0.10$ (a) e $Cv = 0.20$ (b)	138
Figura 8.15 Probabilidade de plastificação para $Cv = 0.10$ e $Cv = 0.20$ em	

$\beta = 0^0$	139
Figura 8.16 Campo aleatório para k e gráfico para k normalizada	140
Figura 8.17 Campo aleatório para G e gráfico para G normalizado	140
Figura 8.18 Campo aleatório para c e gráfico para c normalizada	140
Figura 8.19 Campo aleatório para Φ e gráfico para Φ normalizado	140
Figura 8.20 Área plastificada para uma determinada simulação de Monte Carlo	141
Figura 8.21 Probabilidade de falha x Pressão interna	142
Figura 8.22 Região com probabilidade de falha para $Cv=0.10$ e $P_{f_{target}} = 0.01$	142
Figura 8.23 Média da saturação de fluido molhante	145
Figura 8.24 Desvio padrão da saturação de fluido molhante	145
Figura 8.25 Média da tensão principal S1 no ponto A	146
Figura 8.26 Média da tensão principal S1 no ponto B	147
Figura 8.27 Desvio padrão da tensão principal S1 no ponto A	148
Figura 8.28 Desvio padrão da tensão principal S1 no ponto B	148
Figura 8.29 Probabilidade de plastificação	149

Lista de tabelas

Tabela 5.1 Dados da coluna poroelástica	75
Tabela 5.2 Dados do poço vertical	78
Tabela 5.3 Procedimento e tempo relativo de análise para o caso A	80
Tabela 5.4 Procedimento e tempo relativo de análise para o caso B	81
Tabela 5.5 Dados da coluna de solo sob fluxo bifásico	82
Tabela 5.6 Dados do poço horizontal	84
Tabela 7.1 Tempo relativo para análise de sensibilidade	126
Tabela 8.1 Dados dos exemplos 1, 2 e 3	128
Tabela 8.2 Tempo relativo para análise do problema	136
Tabela 8.3 Dados do exemplo 4	144

Lista de símbolos

g	Aceleração da gravidade, função
Φ	Ângulo de atrito
\mathbf{B}^0	Aproximação da Hessiana da função de Lagrange
A_{lim}	Área limite
A_p	Área plastificada
$A_{p_{\text{target}}}$	Área plastificada pré-estabelecida
λ	Autovetores
\mathbf{y}	Campo aleatório correlacionado
h	Carga de elevação
α	Coefficiente de Biot
ρ	Coefficiente de correlação
C_v	Coefficiente de variação
ν	Coefficientes de Poisson drenado
ν_u	Coefficientes de Poisson não drenado
c	Coesão, coeficiente de difusividade
λ_i	Comprimento de correlação na direção i
φ_n	Conjunto aleatório
Ψ	Conjunto de autovetores
Γ	Contorno
Cov	Covariância
F_{VM}	Crítério de escoamento de Von Mises
F_{MC}	Crítério de escoamento do Mohr Coulomb
ρ_π	Densidade do fluido
\mathbf{u}	Deslocamentos
s	Desvio padrão
\mathbf{d}	Direção de busca
D^p	Dissipação plástica
L	Distância

Ω	Domínio
W^e	Energia de deformação elástica
W^p	Energia de deformação plástica
ϵ^T	Erro por truncamento
ξ	Escala de Leverett
\mathcal{E}_σ	Espaço das tensões admissíveis
H	Expoente de Hurst
w	Fase molhante
nw	Fase não molhante
F	Fator de correção
$R_{s\pi}$	Fator de dissolução de gás no líquido
B	Fator de variação de volume
\mathbf{b}	Forças de corpo
\mathbf{t}	Forças de superfície
$P(Z = z_j(\mathbf{x}_k))$	Função cumulativa de probabilidade
F, S	Função de falha
\mathcal{L}	Função de Lagrange
ϖ	Função de penalidade
$\vartheta(r_j(\mathbf{x}_k))$	Função densidade de probabilidade
S_{ff}	Função densidade espectral
I, IF, IS	Função indicadora de falha
$f(\mathbf{x})$	Função objetivo
C_{rr}	Funções de covariância
$\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_p$	Funções de forma
$f_i(r_j(\mathbf{x}_k))$	Funções de variáveis aleatórias
\mathbf{g}^k	Gradiente da função objetivo
S	Grau de saturação
Δt	Incremento de tempo
β	Índice para o tamanho dos poros, coeficiente de Skempton

PI_l	Limite inferior para pressão interna
PI_u	Limite superior para pressão interna
m_π	Massa de fluido
L	Matriz de acoplamento fluido mecânico, matriz de transformação
G	Matriz de armazenamento
B	Matriz de compatibilidade, matriz Hessiana
C_{ff}	Matriz de covariância das respostas
C_{rr}	Matriz de covariância das variáveis aleatórias
H_w	Matriz de fluxo da fase molhante
H_{nw}	Matriz de fluxo da fase não molhante
H	Matriz de fluxo, matriz Hessiana
k	Matriz de permeabilidade, vetor de número de ondas
K	Matriz de rigidez
A^k	Matriz dos gradientes das restrições
W^k	Matriz hessiana da função de Lagrange
L_c, L_{nw}, L_w	Matrizes de acoplamento fluido mecânico
G_w, G_{nw}	Matrizes de armazenamento
$O_w, O_{nw}, M_w, M_{nw}, P_w,$	Matrizes para o problema de fluxo bifásico
P_{nw}	
χ	Média volumétrica
G	Módulo de elasticidade transversal
G	Módulo plástico generalizado
K_T	Módulo volumétrico do esqueleto
K_π	Módulo volumétrico do fluido
K_s	Módulo volumétrico dos grãos
K_u	Módulo volumétrico não drenado
γ	Multiplicadores de Lagrange
N	Número de simulação de Monte Carlo
∇	Operador de derivação

θ	Parâmetro de integração
b^0	Parâmetro para aproximação da Hessiana
nr	Parâmetro para L-BFGS
l	Penalidades
k	Permeabilidade
$k_{r\pi}$	Permeabilidade relativa
k_{rw}	Permeabilidade relativa da fase molhante
k_{rmw}	Permeabilidade relativa da fase não molhante
η	Perturbação relativa
\mathbf{p}	Porosidade
ϕ	Porosidade
\mathbf{x}_k	Posição k
p_c	Pressão capilar
p_c^{ref}	Pressão capilar de referência
\mathbf{p}_w	Pressão da fase molhante
\mathbf{p}_{mw}	Pressão da fase não molhante
P_d	Pressão de deslocamento
p^f	Pressão de fluido
PI	Pressão interna
PI_{limit}	Pressão interna limite
J_1	Primeiro invariante das tensões
P_f	Probabilidade de falha
P_{fcalc}	Probabilidade de falha calculada
$P_{ftarget}$	Probabilidade de falha pré-estabelecida
$Z_f(\mathbf{k})$	Processo aleatório
π	Representação de uma fase π
\mathbf{F}_u	Resíduo para equação de equilíbrio
\mathbf{F}_p	Resíduo para equação de fluxo
\mathbf{F}_{pmw}	Resíduo para pressão da fase não molhante

\mathbf{F}_{Sw}	Resíduo para saturação da fase molhante
T_0	Resistência à tração
$\mathbf{c}(\mathbf{x})$	Restrição
r_i	Restrições
S_w	Saturação da fase molhante
S_{nw}	Saturação da fase não molhante
S_e	Saturação efetiva
S_{rw}	Saturação residual da fase molhante
S_{rnw}	Saturação residual da fase não molhante
J_{2D}	Segundo invariante das tensões desviadoras
t	Tamanho do passo
t	Tempo
σ_y	Tensão de escoamento
$\sigma_{P \max}$	Tensão principal máxima
τ	Tensões cisalhantes
\mathbf{D}	Tensor constitutivo elástico
\mathbf{D}_T	Tensor constitutivo elasto-plástico
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\boldsymbol{\sigma}'$	Tensor de tensões efetivas
J_{3D}	Terceiro invariante das tensões desviadoras
tol	Tolerância
\mathcal{F}	Transformada de Fourier
Var	Variância
\mathbf{a}	Variáveis internas
r_j	Variável aleatória
q	Vazão
\mathbf{m}	Vetor auxiliar
\mathbf{n}	Vetor auxiliar
\mathbf{q}, \mathbf{X}	Vetor de incógnitas

R	Vetor de resíduos
z	Vetor de variáveis aleatórias independentes
x	Vetor solução
μ_w	Viscosidade da fase molhante
μ_{nw}	Viscosidade da fase não molhante
μ	Viscosidade dinâmica
<i>V</i>	Volume
<i>VER</i>	Volume elementar representativo

1 Introdução

1.1. Descrição do problema

Um meio poroso é composto basicamente de um esqueleto sólido e fluido (no caso de poços de petróleo os fluidos são: água; gás; óleo ou então a combinação destes). A resposta mecânica do meio poroso pode ser alterada devido à presença de fluido e inversamente, a resposta do fluxo de fluido pode ser alterada devido às modificações no comportamento mecânico do meio poroso. Estes fenômenos acoplados, no comportamento do meio poroso, têm um caráter transiente.

De uma forma geral, os problemas relacionados à análise das respostas de poços de petróleo, estão ligados aos efeitos físicos, químicos ou de temperatura. Esses mecanismos por sua vez não devem ser tratados de forma isolada, dado os efeitos que causam uns aos outros. O acoplamento desses efeitos é de grande importância para uma predição das respostas envolvidas nos problemas de análise de tensões, pressões, saturações, regiões danificadas, entre outras, em poços de petróleo.

Um poço de petróleo, durante sua vida útil, passa por diferentes fases. Num primeiro momento dá-se ênfase à avaliação das questões relativas à estabilidade do poço, numa etapa seguinte, a ênfase é voltada a fatores relacionados à produção.

Os problemas de instabilidade, verificados na grande maioria das vezes na fase de perfuração do poço, podem ocorrer devido à alteração das tensões *in situ*. O meio poroso onde se efetua a perfuração de um poço de petróleo encontra-se em estado de equilíbrio. Ao se iniciar o processo de perfuração, devido à retirada de material sólido, o estado de equilíbrio é perturbado. Busca-se restabelecer o estado inicial de equilíbrio substituindo o material retirado por um fluido (fluido

de perfuração). Entretanto, a pressão que o fluido de perfuração exerce sobre a parede do poço dificilmente reproduz exatamente o estado de tensões original.

Nesse novo cenário, verifica-se geralmente, uma concentração de tensões na região ao redor do poço, que se estende desde a parede até uma distância equivalente a alguns diâmetros de poço. Além de uma zona de concentração de tensões, algumas propriedades mecânicas do meio podem ser alteradas devido a essas modificações. Outra consideração refere-se à possibilidade do fluido de perfuração reagir quimicamente com a formação porosa, alterando as propriedades do meio ou penetrando no meio poroso, alterando a pressão de poros na região adjacente ao poço.

Estabelecido esse panorama durante a perfuração, apontam-se dois mecanismos principais que levam à perda de estabilidade de poços. Num primeiro mecanismo, classifica-se a perda de estabilidade por tração. Esse mecanismo, representa o evento em que tensões de tração ultrapassam a resistência à tração do material que compõem o meio poroso, causando assim a ruptura da formação. Num segundo mecanismo, classifica-se a perda de estabilidade por cisalhamento, também referenciado como perda de estabilidade por compressão. Esse mecanismo geralmente contempla os aspectos relacionados ao aparecimento de regiões plastificadas. Tanto a perda de estabilidade por tração quanto à perda de estabilidade por cisalhamento, dividem-se em dois modos distintos, modo inferior e modo superior. O primeiro modo, refere-se ao que ocorre quando a pressão do fluido de perfuração é baixa. Já o segundo, ocorre quando a pressão do fluido de perfuração é excessivamente alta.

Na etapa de produção, problemas de produção de areia, dano no revestimento do poço, produtividade baixa, entre outros, geralmente são verificados. A mudança de fluxo monofásico para fluxo bifásico também se dá geralmente nessa fase, seja pela chegada de um frente de água devido à injeção (procedimento corriqueiramente empregado) ou pela entrada de água advinda das proximidades do poço.

A entrada de água pode alterar algumas propriedades do meio poroso, devido principalmente a reações químicas. As condições de produção do poço também podem ser alteradas, uma vez que além de óleo o poço passará a produzir água. Além disso, o meio poroso, que se encontrava em equilíbrio, com comportamento de fluxo permanente, passa mais uma vez a apresentar respostas

de caráter transiente, verificando-se alterações nos campos de tensões e pressões, que por sua vez podem gerar outros danos, tanto na formação quanto no revestimento do poço.

Em geral, a análise das respostas de poços é realizada de forma determinística em relação às propriedades mecânicas e hidráulicas do meio poroso. No entanto, sabe-se que os meios porosos e em particular rochas sedimentares, mostram heterogeneidades tanto em micro, meso e macro-escala. Essas heterogeneidades produzem variabilidade nas propriedades mecânicas e hidráulicas dos meios porosos. Essa variabilidade mostra em geral um caráter espacial pronunciado. Dessa forma, as respostas, tais como deslocamentos, poro pressões, graus de saturação, tensões e região plastificada ou danificada, são também aleatórias, podendo ser expressas em termos de valores médios, dispersões e probabilidades de ocorrência.

Da mesma forma, a análise de estabilidade de poços é usualmente realizada de forma determinística, estimando-se uma janela operacional de valores de pressão de fluido de perfuração. Os modelos geralmente usados para essa finalidade são soluções analíticas simplificadas ou análises numéricas não muito sofisticadas com o método dos elementos finitos. Como executado hoje em dia, os resultados dessas análises podem apresentar discrepâncias quando comparados com o comportamento real observado nos poços de petróleo. Uma vez que as propriedades do meio são aleatórias e que as respostas, por esse motivo, também apresentam variações, pode-se pressupor que os critérios de estabilidade, descritos geralmente em função das respostas do problema entre outras hipóteses, também apresentam variabilidade, gerando com isso, limites operacionais de pressão de fluido de perfuração também aleatórios. Dadas essas características, análises probabilísticas de estabilidade de poços podem ser efetuadas.

1.2. Revisão bibliográfica

A modelagem probabilística, no contexto hidrológico impulsionou-se no trabalho de Freeze (1975), embora Shvidler (1962) e Matheron (1967) tivessem, *apud* Dagan (2002), apresentado desenvolvimentos teóricos sobre esse assunto em seus trabalhos.

De acordo com Dai (2004), a modelagem probabilística de problemas hidrológicos se consolidou com os estudos de Dagan (1982), sendo esses, base para trabalhos realizados por Gelhar (1993), Neumann (1997), Rubin (1997), Rubin *et al* (1999) e Zhang (2002).

Dagan (2002) também cita que a modelagem probabilística de problemas hidrológicos se desenvolveu consideravelmente nas duas últimas décadas e muito conhecimento tem se acumulado. Entretanto, apesar desse desenvolvimento, ainda não se tornou rotina a inclusão desse conhecimento nas ferramentas de modelagem hidrológica.

Conforme Glasgow *et al* (2003), vários tipos de aproximações vem sendo propostas para incorporar as incertezas inerentes aos parâmetros hidráulicos na modelagem de problemas hidrológicos. Grande parte dessas aproximações e procedimentos são apresentados no trabalho de Gelhar (1993) e nas publicações de Rubin (2003) e Zhang (2002).

Segundo Jain *et al* (2002), Lu e Zhang (2003) e Dagan (2002), as aproximações mais difundidas são as de simulação e os métodos de perturbação.

O método de Monte Carlo destaca-se dentre os métodos de simulação. O Método de Monte Carlo é um método conceitualmente direto. A principal vantagem da utilização do método de Monte Carlo é de acordo com Jain *et al* (2002), Lu e Zhang (2003), a sua aplicação tanto a problemas lineares quanto a problemas não lineares. As vantagens do método de simulação de Monte Carlo apontadas por Dagan (2002) referem-se à simplicidade conceitual do método, generalidade e a simples caracterização da solução.

Os métodos de simulação requerem um grande número de análises determinísticas. Posteriormente, com o processamento dessas informações são obtidas respostas estatísticas e probabilísticas. A necessidade de um elevado número de análises gera um considerável acréscimo no esforço computacional.

Os métodos de perturbação por sua vez, apresentam-se como aproximações razoáveis para problemas com pequena variabilidade. Além dessa limitação, necessitam de análises de sensibilidade, que para determinadas classes de problemas podem tornar essa aproximação também muito dispendiosa computacionalmente. Os métodos de perturbação fornecem respostas estatísticas, sobretudo os dois primeiros momentos, respostas probabilísticas não são obtidas

com esses métodos. Conforme Alvarado *et al* (1998) e Hart (1982), os métodos de perturbação diferenciam-se basicamente pela forma de linearização das equações.

Uma série de alternativas deriva das formas originais dessas aproximações, buscando-se com isso, formas mais eficientes e apropriadas de solução das equações envolvidas. Citam-se entre essas alternativas os métodos de simulação com expansão de Neumann, sugerido em Ghanem e Spanos (2003) e expansão de Karhunen-Loeve, como apresentado por Chen *et al* (2005).

Ao se considerar os tipos de problemas hidrológicos analisados contemplando-se a variabilidade dos parâmetros envolvidos, salienta-se que se tem dado grande ênfase à modelagem probabilística de problemas de fluxo e transporte, sendo ainda pouco explorada a análise probabilística de problemas acoplados, principalmente no que tange a análise de estabilidade de poços de petróleo e problemas de acoplamento com fluxo bifásico.

Zhang e Lu (2003), propuseram uma aproximação por perturbação de alta ordem para fluxo em meios porosos heterogêneos e saturados, comparando os resultados obtidos com diferentes métodos de simulação. Chen *et al* (2005), apresentaram a modelagem estatística do problema de fluxo bifásico em meios porosos considerando a variabilidade da permeabilidade intrínseca e da porosidade. Ghanem e Dham (1998) realizaram análises estatísticas para problemas de fluxo em meios porosos heterogêneos usando o método de elementos finitos, sendo adotada a permeabilidade intrínseca do meio poroso com variabilidade espacial. Wu *et al* (2003), apresentaram um procedimento numérico para problemas tridimensionais de fluxo e transporte de solutos em meios com condutividade não estacionária. Amir e Neuman (2004) apresentaram uma aproximação para solução do problema de fluxo em regime transiente considerando as incertezas das propriedades dos solos. Jain *et al* (2002) modelaram o fluxo de fluido através de meios porosos utilizando o método de Monte Carlo. Lu e Zhang (2003) também utilizaram o método de Monte Carlo para efetuar análises de problemas de fluxo e transporte em meios porosos. Entretanto, utilizaram à idéia do método de importância, que considera que algumas propriedades aleatórias do meio são mais significativas que outras. Fossereau *et al* (2000) desenvolveram soluções analíticas para prever o transporte de solutos inertes em meios porosos heterogêneos parcialmente saturados sujeitos a condições de contorno aleatórias.

Como citado anteriormente, apesar do grande número de publicações relacionadas à análise probabilística em meios porosos, não tem sido despendido grande esforço em problemas que envolvem o acoplamento fluido mecânico. Pode-se nesse sentido, citar os trabalhos de Frias *et al* (2001 e 2004). Frias *et al* (2001) apresentaram uma modelagem computacional estocástica da compactação e subsidência de reservatórios devido à retirada de fluido, considerou-se nesse estudo a variabilidade espacial da permeabilidade intrínseca do meio poroso. Frias *et al* (2004), trataram esse mesmo problema, considerando entretanto, a hipótese de grandes comprimentos de correlação e características fractais para a permeabilidade intrínseca do meio poroso.

Assim como se verificou para o estudo de problemas de acoplamento fluido mecânico é bastante restrita a consideração de incertezas na análise de estabilidade de poços de petróleo. Poucos foram os estudos efetuados nesse sentido, podendo-se citar os trabalhos de Dumans (1995), Morita (1995), Fontoura *et al* (2002) e Mos *et al* (2003). A respeito desses trabalhos salientam-se aspectos como a utilização de procedimentos e hipóteses bastante simplificadas para realização das análises, desconsideração da variabilidade espacial e da correlação entre as variáveis aleatórias.

1.3. Escopo do trabalho

Apresentado o cenário a respeito dos problemas envolvidos e dos estudos efetuados para consideração da variabilidade na análise de poços de petróleo, se desenvolve esse estudo.

Propõe-se o desenvolvimento de procedimentos de análise numérica, utilizando elementos finitos, de processos fluido mecânicos acoplados, monofásicos e bifásicos, que levem em conta a variabilidade espacial de propriedades hidráulicas e mecânicas e a variabilidade das condições iniciais de tensões e pressões. Efetiva-se o desenvolvimento desses procedimentos através da implementação de um programa de computador. Nesse estudo, empregam-se os procedimentos numéricos desenvolvidos, em duas fases distintas. Na análise probabilística da estabilidade de poços e na análise estatística durante a produção, considerando o acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico. As figuras

Introdução

seguintes ilustram de forma simplificada os problemas a serem analisados. A Figura 1.1 mostra o esquema de um poço vertical para análise probabilística da estabilidade.

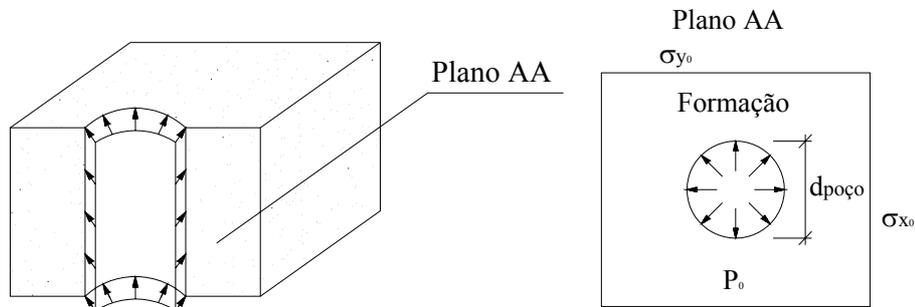


Figura 1.1 Poço vertical para análise probabilística da estabilidade

A Figura 1.2 apresenta o esquema de um poço horizontal, com revestimento metálico e *gravel pack*, na fase de produção.

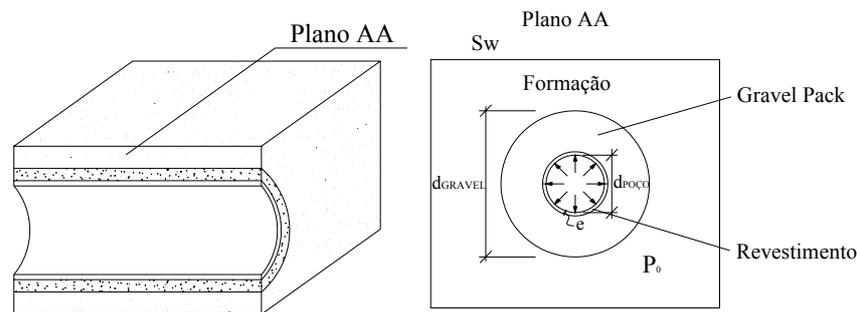


Figura 1.2 Poço horizontal para análise estatística considerando fluxo bifásico

A análise considerando o acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico se aplicará para obtenção de respostas estatísticas e para análise probabilística da estabilidade de poços. Salienta-se que não é objetivo do trabalho indicar ou estabelecer critérios de falha, e sim empregar alguns critérios usualmente utilizados para descrever a perda de estabilidade de poços. Também não é objetivo do estudo determinar quais os modelos constitutivos que melhor descrevem o comportamento dos meios porosos.

A análise considerando o acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico será efetuada para verificação de alguns efeitos gerados pela entrada de água no meio poroso além de se avaliar os efeitos da variabilidade espacial das

propriedades nessas respostas. Nesse item não são discutidos aspectos a respeito das possíveis formas de descrição das tensões efetivas, sendo apenas apresentadas as hipóteses adotadas nesse trabalho.

A fim de situar de maneira objetiva esse estudo no que se refere aos acoplamentos envolvidos, cita-se que não se contemplam os acoplamentos referentes aos fenômenos químicos e de temperatura. Agora, com os objetivos do trabalho estabelecidos, apontam-se as principais contribuições desse estudo, acentuando-se algumas diferenças em relação a outros trabalhos já realizados.

- Consideração do acoplamento fluido mecânico e da variabilidade espacial de propriedades hidráulicas e mecânicas. De forma geral, os estudos já desenvolvidos, que levam em conta a variabilidade espacial, ou tratam dos problemas de fluxo ou tratam dos problemas mecânicos. A consideração do acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico é tratada em poucos trabalhos, não sendo nesses casos, empregada para análise da estabilidade de poços de petróleo. A consideração do acoplamento fluido mecânico com de fluxo bifásico em conjunto com a consideração da variabilidade espacial é praticamente inexistente.
- Estudos relacionados aos métodos para obtenção das respostas estatísticas dos problemas de acoplamento tratados nesse trabalho.
- Apresentação e avaliação de diferentes procedimentos numéricos para solução dos problemas de acoplamento fluido mecânico (monofásico e bifásico).
- Avaliação dos valores limites de pressão interna na análise da estabilidade de poços de petróleo, considerando critérios probabilísticos de estabilidade. De maneira geral, os estudos já efetuados nesse sentido, utilizam procedimentos de análise simplificados e desconsideram a variabilidade espacial das propriedades. No presente trabalho, além da consideração de critérios probabilísticos de estabilidade e da variabilidade espacial das propriedades, descreve-se um procedimento numérico para determinação automática dos valores limites de pressão interna.

Inicialmente apresentam-se no capítulo 2 as equações e as considerações utilizadas para a descrição do problema poroelastoplástico sob uma visão

determinística. Descrevem-se as equações governantes dos problemas de fluxo trifásico e os casos particulares de fluxo bifásico e monofásico em meios porosos deformáveis. Num passo seguinte, descrevem-se essas equações segundo o método dos elementos finitos e alguns tópicos como discretização no tempo e suas propriedades são discutidas.

No capítulo 3 apresentam-se alguns tópicos relevantes sobre análise não linear. Esses tópicos referem-se à análise não linear local (modelo constitutivo e algoritmo de retorno) e à análise não linear global.

Após a apresentação da formulação do problema, descrevem-se no capítulo 4 dois procedimentos de solução dos problemas de acoplamento com fluxo monofásico e fluxo bifásico (sendo o primeiro procedimento dito totalmente acoplado e o segundo conhecido como *staggered*).

No capítulo 5 efetua-se a validação do modelo numérico determinístico através de alguns exemplos. Apresentam-se algumas comparações entre os resultados obtidos com os procedimentos numéricos descritos nos capítulos anteriores com soluções analíticas.

Após a apresentação dos procedimentos utilizados para análise segundo comportamento determinístico, descrevem-se no capítulo 6 alguns tópicos para possibilitar a análise estatística dos problemas tratados nesse trabalho. Para isso, apresentam-se alguns conceitos fundamentais da probabilidade e da estatística, bem como métodos para a obtenção das respostas estatísticas dos problemas de acoplamento. Apresentam-se métodos de simulação (Monte Carlo e Neumann) e um método de perturbação.

Após a apresentação dos métodos de análise, descrevem-se alguns itens relacionados à análise de confiabilidade. Esses itens descrevem os critérios utilizados nesse trabalho para verificação da instabilidade ou falha de poços de petróleo. Em conjunto com esse item apresenta-se um procedimento numérico para obtenção dos valores operacionais de pressão de fluido de perfuração considerando os comportamentos determinístico e probabilístico.

No capítulo 7 apresentam-se itens relativos à análise de sensibilidade, sendo apresentados tópicos gerais desse assunto, formulação específica para o estudo efetuado nesse trabalho e algumas comparações entre as respostas obtidas com esses métodos. Por fim apresentam-se alguns tópicos referentes à eficiência de cada método de análise.

Assim como para a análise determinística, apresentam-se no capítulo 8, exemplos de análise probabilística, verificando-se com eles as implementações efetuadas e os resultados gerados por cada método. Por fim, no capítulo 9, com base nos resultados obtidos, descrevem-se as conclusões do trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2

Formulação determinística para problemas de acoplamento fluido mecânico

2.1. Introdução

Apresentam-se nesse capítulo as equações fundamentais para descrição e formulação determinística dos problemas de acoplamento fluido mecânico tratados nesse trabalho. Inicialmente, descrevem-se algumas hipóteses assumidas para definição do modelo físico e das equações governantes dos problemas. Posteriormente, as equações governantes dos problemas são descritas sob a formulação de elementos finitos e algumas propriedades sobre a discretização dessas equações no domínio do tempo são apresentadas.

2.2. Modelo físico

Inicia-se a definição do modelo físico com a exposição dos conceitos de média volumétrica e média volumétrica intrínseca. Esses conceitos mostram-se úteis dada à dificuldade de descrição dos problemas no nível microscópico. Um volume elementar representativo (*VER*) de volume total $V = \sum_{\pi} V_{\pi}$ é utilizado para definição de média volumétrica. A Figura 2.1 representa um *VER*, sendo V_{π} o volume ocupado por uma fase π . A média volumétrica de uma grandeza χ para uma fase π é dada por (2.1)

$$\langle \chi_{\pi} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \chi_{\pi} dV \quad (2.1)$$

E a média volumétrica intrínseca dada por (2.2)

$$\langle \chi_{\pi} \rangle^{\pi} = \frac{1}{V_{\pi}} \int_{V_{\pi}} \chi_{\pi} dV = \frac{V}{V_{\pi}} \langle \chi_{\pi} \rangle \quad (2.2)$$

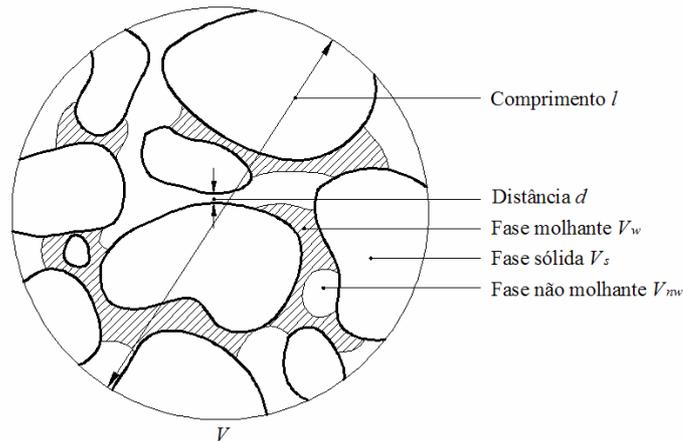


Figura 2.1 Volume elementar representativo

De acordo com Whitaker (1968) *apud* Lewis e Schrefler (1998) os resultados obtidos com o processo da média volumétrica apresentam-se válidos quando a relação (2.3) é satisfeita

$$d \ll l \ll L \quad (2.3)$$

Sendo L um comprimento característico associado ao meio poroso numa escala macroscópica, d um comprimento associado aos poros e l o comprimento característico do VER. Com essa relação satisfeita, espera-se também, que a média volumétrica seja independente do tempo e da posição no meio poroso.

De maneira geral, os vazios do meio poroso são preenchidos com fluidos e uma mistura de ar (vapor d'água, gás, etc.). Considerando-se a hipótese do meio poroso estar totalmente preenchido por duas fases de fluido (fase molhante w e fase não molhante nw), o grau de saturação de uma fase π é dado pela razão entre o volume de poros ocupados pelo fluido π , V_π e o volume total de poros de um volume elementar representativo, V_f .

$$S_\pi = \frac{V_\pi}{V_f} \quad (2.4)$$

Sendo $V_f = V_w + V_{nw}$. Dessa maneira $S_w + S_{nw} = 1$. Sendo S_w o grau de saturação da fase molhante e S_{nw} o grau de saturação da fase não molhante.

A porosidade do meio é definida pela razão entre o volume total de poros e o volume total do VER.

$$\phi = \frac{V_f}{V} \quad (2.5)$$

Prossegue-se a definição do modelo físico pela descrição das tensões. Assume-se: tração positiva, na fase sólida σ_s e compressão positiva para poro pressão na fase fluida σ_f . Aplicando-se o conceito de média volumétrica intrínseca podem ser obtidas as tensões totais médias, ou seja

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \sigma dV = \frac{1}{V} \left(\int_{V_s} \sigma dV + \int_{V_f} \sigma dV \right) \\ \langle \sigma \rangle &= \frac{V_s}{V} \langle \sigma_s \rangle^s + \frac{V_f}{V} \left(\frac{V_{mw}}{V_f} \langle \sigma_{mw} \rangle^{mw} + \frac{V_w}{V_f} \langle \sigma_w \rangle^w \right) \\ \langle \sigma \rangle &= (1-\phi) \langle \sigma_s \rangle^s + \phi \left(S_{mw} \langle \sigma_{mw} \rangle^{mw} + S_w \langle \sigma_w \rangle^w \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

σ_π representa o tensor de tensões médias da fase π . Para a fase de fluido o tensor de tensões é expresso de acordo com (2.7)

$$\sigma_\pi = \tau_\pi - \mathbf{m} p_\pi \quad (2.7)$$

Onde τ_π representa as tensões cisalhantes e \mathbf{m} é um vetor contendo valores iguais a 1 para tensões normais e 0 para os componentes de tensão cisalhante.

$$\mathbf{m} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (2.8)$$

Negligenciando a parcela referente às tensões de cisalhamento para fluidos, pode-se escrever (2.9)

$$\langle \sigma \rangle = (1-\phi) \langle \sigma_s \rangle^s + \phi \mathbf{m} \left(S_{mw} \langle p_{mw} \rangle^{mw} + S_w \langle p_w \rangle^w \right) \quad (2.9)$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= (1-\phi) \langle \sigma_s \rangle^s + \phi \mathbf{m} \langle p^f \rangle^f \\ \langle p^f \rangle^f &= S_{mw} \langle p_{mw} \rangle^{mw} + S_w \langle p_w \rangle^w \end{aligned} \quad (2.10)$$

Onde $\langle p^f \rangle^f$ é a poro pressão média proveniente das fases molhante e não molhante.

Verifica-se que o tensor das tensões é dividido em duas componentes: uma que representa o efeito das poro pressões e outra que deforma o esqueleto sólido, tensões efetivas σ' .

$$\langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle = (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma}_s \rangle^s + \mathbf{m} \langle p^f \rangle^f \quad (2.11)$$

Omitindo o símbolo $\langle \cdot \rangle$ e representando p^f apenas por p pode-se descrever o tensor de tensões totais por (2.12), sendo essa representação condizente com a definição de Terzaghi.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m}p \quad (2.12)$$

As pressões das fases molhante e não molhante são relacionadas pela pressão capilar p_c .

$$p_c = p_{mw} - p_w \quad (2.13)$$

A pressão capilar para um meio isotérmico é função do grau de saturação da fase molhante.

Após a descrição do modelo físico assumido para representação do meio poroso, podem ser estabelecidas as equações governantes dos problemas de acoplamento fluido mecânico, tratados nesse trabalho.

2.3. Equação de equilíbrio

Apresentam-se neste item as equações que governam o comportamento mecânico em meios porosos deformáveis.

A equação de equilíbrio é determinada utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais para problemas quase estáticos, equação (2.14). Esta equação relaciona as velocidades das grandezas estáticas reais, como a tensão total $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ as forças de corpo $\dot{\mathbf{b}}$ e as forças de superfície $\dot{\mathbf{t}}$ com as grandezas cinemáticas virtuais como as deformações virtuais $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ e os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (2.14)$$

As velocidades das tensões totais podem ser expressas em termos das velocidades das tensões efetivas e das velocidades das poro pressões. Essa relação é demonstrada na equação (2.15).

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{m} \dot{p} \quad (2.15)$$

Onde: $\dot{\sigma}'$ é a velocidade da tensão efetiva, \dot{p} a velocidade das poro pressões.

A descrição da relação constitutiva, em termos de velocidades, pode ser dada pela equação (2.16)

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{D}_T (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_c - \dot{\varepsilon}_p - \dot{\varepsilon}_o) + \dot{\sigma}'_0 \quad (2.16)$$

Na equação (2.16), $\dot{\varepsilon}$ representa a velocidade de deformação total do esqueleto, $\dot{\varepsilon}_c$ a velocidade das deformações devido à fluência (expressa por uma função de fluência c , dependente do nível e da trajetória de tensões), $\dot{\varepsilon}_p$ a velocidade das deformações volumétricas (a qual considera a deformabilidade dos grãos), $\dot{\varepsilon}_o$ que representa outras velocidades de deformação, como as provocadas por fenômenos térmicos e químicos e por fim $\dot{\sigma}'_0$ que representa a velocidade da tensão efetiva inicial. A matriz \mathbf{D}_T é dependente do nível e da trajetória de tensões e vários modelos constitutivos podem ser utilizados para defini-la.

$$\dot{\varepsilon}_c = c(\sigma') dt$$

$$\dot{\varepsilon}_p = -\mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{D}_T = \mathbf{D}_T(\sigma', \varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

Em (2.17), K_s representa o módulo volumétrico dos grãos.

Omitindo, por simplificação, as parcelas $\dot{\varepsilon}_c$ e $\dot{\varepsilon}_o$ da equação (2.16), a mesma pode ser escrita como:

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{D}_T \dot{\varepsilon} + \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} + \dot{\sigma}'_0 \quad (2.18)$$

Conseqüentemente a equação (2.15) pode ser escrita como:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_T \dot{\varepsilon} + \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} + \dot{\sigma}'_0 - \mathbf{m} \dot{p} \quad (2.19)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}'' + \mathbf{D}_T \mathbf{m} \frac{\dot{p}}{3K_s} - \mathbf{m} \dot{p} \quad (2.20)$$

Onde $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_0$ representa a velocidade da tensão responsável por toda deformação da fase sólida.

Considerando-se a hipótese de linearidade geométrica pode-se descrever a relação entre velocidades de deslocamentos e velocidades de deformações infinitesimais como a equação (2.21).

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} \right) \quad (2.21)$$

Com as definições apresentadas reescreve-se a equação (2.14) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \dot{p} \frac{1}{3K_s} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}'_0 d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{m} \dot{p} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.4. Equação de fluxo

Inicia-se esse item do trabalho com a descrição da equação de fluxo para o caso trifásico, sendo posteriormente apresentadas as equações para os casos particulares de fluxo bifásico e monofásico.

2.4.1. Fluxo trifásico

Descrevem-se neste item as equações que governam o fluxo trifásico em meios porosos.

Em um meio poroso, o fluxo de fluido deve satisfazer a conservação de massa de fluido. Para efetuar o balanço de massa de fluido, toma-se como volume de controle um cubo elementar constituído de material poroso, Figura 2.2

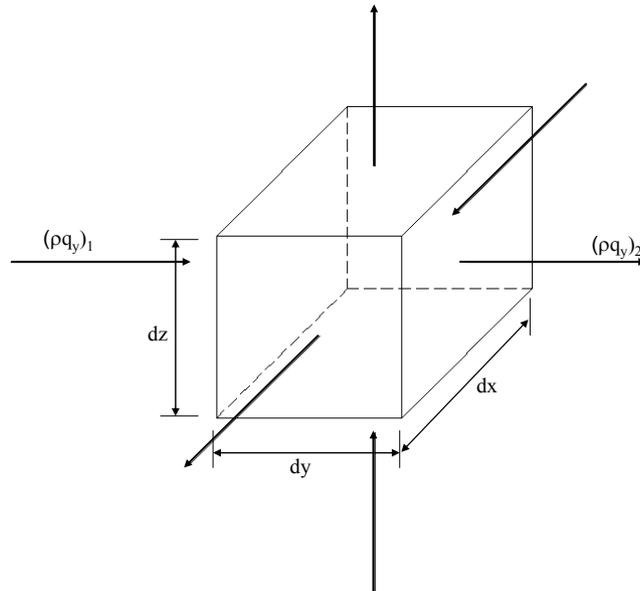


Figura 2.2 Volume de controle para balanço de massa do fluido.

Tomando-se inicialmente o fluxo na direção d_y através da face $d_x d_z$, tem-se como fluxo de massa de fluido, $(\rho q_y)_1 d_x d_z$ e $(\rho q_y)_2 d_x d_z$. Sendo ρ e q densidade do fluido e vazão, respectivamente. Considerando-se que (ρq_y) seja uma função contínua e diferenciável, pode-se escrever

$$(\rho q_y)_2 = (\rho q_y)_1 + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} d_y \quad (2.23)$$

Dessa forma, o fluxo na direção y gera uma diminuição na massa de fluido igual a:

$$(\rho q_y)_2 - (\rho q_y)_1 = \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} d_y \quad (2.24)$$

Adotando-se o mesmo procedimento para as demais direções e fazendo-se o somatório das três parcelas resultantes, obtém-se o balanço de massa de fluido devido o fluxo, equação (2.25)

$$\left(\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} \right) d_x d_y d_z = \nabla^T (\rho q) d_x d_y d_z \quad (2.25)$$

Podendo-se então, representar o balanço de massa de fluido no meio poroso, equação da continuidade, pela equação (2.26)

$$\nabla^T (\rho q) d_x d_y d_z + \frac{d}{dt} (m_\pi d_x d_y d_z) = 0 \quad (2.26)$$

$$\nabla^T (\rho q) + \dot{m}_\pi = 0$$

Onde \dot{m}_π representa o incremento de massa de fluido numa parcela infinitesimal do meio poroso por unidade de tempo.

Tomando-se a equação de Darcy para representar o fluxo de fluido, pode-se de uma forma geral expressar a equação da continuidade por

$$-\nabla^T [T_m \nabla (p_\pi + \rho_\pi g h)] + \frac{\phi}{B_\pi} \frac{\partial S_\pi}{\partial t} + \phi S_\pi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_\pi} \right) + \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R_{s\pi} S_\pi}{B_\pi} \right) + \lambda_f \quad (2.27)$$

$$\left[\left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \dot{p} \right] = 0$$

Onde:

$$T_m = \mathbf{k} \left(\frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi} + R_{s\pi} \frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi} \right) \quad (2.28)$$

$$\lambda_f = \frac{S_\pi}{B_\pi} + \frac{R_{s\pi} S_\pi}{B_\pi}$$

Sendo \mathbf{k} a matriz de permeabilidade intrínseca do meio poroso, p a poro pressão como descrito em (2.10), ϕ a porosidade do meio, g a aceleração da gravidade, h a carga de elevação, $k_{r\pi}$ a permeabilidade relativa, μ a viscosidade dinâmica, S o grau de saturação, B o fator de variação de volume, $R_{s\pi}$ o fator de dissolução de gás no líquido, todos referentes à fase π e ∇ o operador de derivação,

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T.$$

Cabe salientar que a permeabilidade relativa de cada fase é função da pressão capilar que por sua vez é função do grau de saturação do meio. Entretanto, para simplificação da notação da formulação, a permeabilidade relativa de cada fase será representada apenas por $k_{r\pi}$.

O fator de variação de volume B descreve a razão entre o volume da fase π medido nas condições de pressão em questão e o volume medido nas condições

$$\text{padrão (STC)} \quad B_\pi = \frac{V_\pi}{V_{\pi STC}}.$$

O fator de dissolução de gás no líquido $R_{s\pi}$ relaciona o volume de gás medido nas condições padrão, dissolvido nas condições de pressão padrão.

$$R_{s\pi} = \frac{V_{dgSTC}}{V_{\pi STC}}.$$

$\left(\frac{\phi}{B_\pi} \frac{\partial S_\pi}{\partial t} \right)$ descreve a velocidade de variação da saturação da fase π .

$\left[\phi S_\pi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_\pi} \right) + \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{R_{s\pi} S_\pi}{B_\pi} \right) \right]$ representa a velocidade de variação da

densidade de fluido, também da fase π .

$\left(\mathbf{m}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right)$ representa a velocidade de variação volumétrica do esqueleto

sólido.

$\left(\frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \dot{p} - \frac{(1-\phi)}{K_s} \dot{p} \right)$ determina a velocidade de

variação do volume de grãos devido às tensões efetivas.

A partir do caso trifásico obtêm-se as equações de fluxo particularizadas para as condições de fluxo bifásico e monofásico.

2.4.2. Fluxo bifásico

Para o caso particular de fluxo de fluido molhante e fluido não molhante a equação da continuidade pode ser expressa da seguinte forma

$$-\nabla^T [T_m \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh)] + \frac{\phi}{B_\pi} \frac{\partial S_\pi}{\partial t} + \phi S_\pi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_\pi} \right) + \lambda_f. \quad (2.29)$$

$$\left[\left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \dot{p} \right] = 0$$

Com:

$$T_m = \mathbf{k} \left(\frac{k_{r\pi}}{\mu_\pi B_\pi} \right) \quad (2.30)$$

$$\lambda_f = \frac{S_\pi}{B_\pi}$$

2.4.3. Fluxo monofásico

A equação da continuidade para fluxo monofásico de água ou óleo pode ser expressa da seguinte maneira

$$\left[\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left[\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_\pi} \right] \dot{p} - \nabla^T [T_m \nabla (p_\pi + \rho_\pi g h)] = 0 \quad (2.31)$$

Com $T_m = \mathbf{k} / \mu_\pi$.

Nota-se que a variação da densidade de fluido nesse caso é representada por $\frac{\phi}{K_\pi} \dot{p}$, sendo K_π o módulo volumétrico do fluido.

2.5. Solução do problema de valor de contorno

Um problema de valor de contorno requer que suas equações sejam satisfeitas em todos os pontos do domínio (Ω) e que suas condições de contorno sejam satisfeitas no contorno do domínio (Γ). Na equação (2.22) as condições de contorno são atendidas naturalmente. Entretanto, na equação da continuidade, as condições de contorno devem satisfazer o seguinte:

(a) A continuidade do fluxo através do contorno;

$$-\mathbf{n}^T T_m - q = 0 \quad (2.32)$$

Onde, \mathbf{n} é um vetor unitário na direção da normal à superfície de contorno e q é o fluxo por unidade de área da superfície de contorno.

(b) As poro pressões prescritas p^b ;

$$p = p^b \quad (2.33)$$

Designando a equação da continuidade de $\bar{\mathbf{A}}$ e a condição de contorno (2.32) de $\bar{\mathbf{B}}$, é requerida, para o problema de valor de contorno, que se atenda a seguinte condição:

$$\int_{\Omega} \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{A}} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{B}} d\Gamma = 0 \quad (2.34)$$

Na equação (2.34) \mathbf{a} e \mathbf{b} representam funções arbitrárias.

2.6. Formulação em elementos finitos

Apresenta-se nesse item do trabalho, a formulação em elementos finitos das equações que descrevem o fluxo monofásico e o fluxo bifásico, em problemas de acoplamento fluido mecânico. As equações são descritas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com um contorno Γ para um tempo $t \in [0, T]$.

2.6.1. Acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico

2.6.1.1. Formulação em elementos finitos das equações governantes

Considerando-se a hipótese de fluxo monofásico a equação (2.34) apresenta em $\bar{\mathbf{A}}$ a segunda derivada da parcela $(p_\pi + \rho_\pi gh)$. De acordo com Lewis e Schrefler (1998), é necessária uma distribuição suave no espaço dessa parcela devido à integração. Em ordem dessa limitação, pode-se escrever a parcela com derivada segunda da equação (2.34) sob uma forma fraca, utilizando-se o teorema de Green, descrito a seguir:

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \psi n_x d\Gamma \quad (2.35)$$

Onde n_x é o cosseno diretor entre a normal e a direção x .

Com essas substituições efetuadas escreve-se a equação (2.34) como:

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathbf{a}^T \left[\left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_\pi} \right) \dot{p} \right] \right\} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh) d\Omega - \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{a}^T \mathbf{n}^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh) + \mathbf{b}^T \mathbf{n}^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh) + \mathbf{b}^T q \right\} d\Gamma = 0 \quad (2.36)$$

Pode-se assumir que $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$, dado que essas são funções arbitrárias. Assim escreve-se a equação (2.36) como:

$$\int_{\Omega} \left\{ \mathbf{a}^T \left[\left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_\pi} \right) \dot{p} \right] \right\} d\Omega + \quad (2.37)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla (p_\pi + \rho_\pi gh) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{a}^T q d\Gamma = 0$$

Aplicando-se agora o método dos elementos finitos nas equações (2.21) e (2.37), em termos de deslocamentos e poro pressões (incógnitas do problema), utilizando-se as transformações apresentadas em (2.38) e representando o vetor de poro pressões simplesmente por \mathbf{p} determinam-se as equações de equilíbrio e fluxo monofásico segundo o método de elementos finitos.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}_u \mathbf{u}^* \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{p} &= \mathbf{N}_p \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (2.38)$$

\mathbf{N}_u e \mathbf{N}_p são respectivamente, as funções de forma para deslocamentos e poro pressões, \mathbf{B} é a matriz de compatibilidade que relaciona deslocamentos e deformações e o símbolo $(.)^*$ faz referência ao ponto nodal. Assim, a equação (2.22) é descrita por

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}^*}{dt} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}^*}{dt} \right\} - \\ \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{d\mathbf{b}}{dt} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{d\mathbf{t}}{dt} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}'_0}{dt} d\Omega \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

E a equação (2.37) como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}^* + \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} + \\ \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_\pi} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}^*}{dt} + \\ \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \nabla^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_\pi} \nabla \rho_\pi gh d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{a}^T q d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

O método de Galerkin pode ser aplicado na equação (2.40), dessa maneira substituem-se as funções \mathbf{a} pelas funções de forma \mathbf{N}_u ou \mathbf{N}_p .

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}^* + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_{\pi}} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{dp^*}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \nabla^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \rho_{\pi} g h d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T q d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.41}$$

2.6.2. Acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico

2.6.2.1. Formulação em elementos finitos das equações governantes

A partir da equação (2.10), a velocidade de p pode ser expressa da seguinte forma

$$\dot{p} = \dot{S}_w p_w + S_w \dot{p}_w + \dot{S}_{nw} p_{nw} + S_{nw} \dot{p}_{nw} \tag{2.42}$$

Considerando a definição de pressão capilar e assumindo como variáveis do problema de fluxo bifásico a pressão de fluido da fase não molhante e o grau de saturação da fase molhante, escreve-se

$$\dot{p} = \dot{p}_{nw} - S_w \dot{p}_c + \dot{S}_w p_c \tag{2.43}$$

Com essas considerações, descrevem-se a partir de (2.21) e (2.29) as equações de equilíbrio e a equação de fluxo bifásico. A equação de equilíbrio sob formulação de elementos finitos é dada por (2.44)

$$\begin{aligned}
& \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} - \int_{\Omega} (1 - S_{nw}) \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{dp_c^*}{dt} \right\} \\
& + \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} p_c \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{dS_w^*}{dt} \right\} \\
& - \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{dp_{nw}^*}{dt} \right\} \\
& - \delta \mathbf{u}^T \left\{ \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{d\mathbf{b}}{dt} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{d\mathbf{t}}{dt} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}'_0}{dt} d\Omega \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

As transformações utilizadas são as apresentadas em (2.38) e o símbolo (*) faz referência ao ponto nodal.

A equação de fluxo para fase não molhante pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
 & -\nabla^T \left[\mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{mw} B_{nw}} \nabla (\mathbf{p}_{mw}^* + \rho_{mw} gh) \right] - \frac{\phi}{B_{mw}} \frac{\partial S_w}{\partial t} - \phi S_w \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{mw}} \right) + \\
 & \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left[\left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - (1 - S_{mw}) \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{d\mathbf{p}_c^*}{dt} \right] + \\
 & \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left[\left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{d\mathbf{p}_{mw}^*}{dt} - p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{dS_w^*}{dt} \right] = 0
 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Utilizando-se a condição apresentada em (2.34) para solução do problema de valor de contorno e o teorema de Green para descrever a parcela com derivada segunda, reescreve-se (2.45), eliminando o símbolo $(\cdot)^*$ por simplificação da notação, como

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left[-\frac{\phi}{B_{mw}} \frac{\partial S_w}{\partial t} - \phi S_w \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{mw}} \right) \right] d\Omega + \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left\{ \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left[\left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] \right\} d\Omega + \\
 & \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \left\{ \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left[\left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \left(\frac{d\mathbf{p}_{mw}}{dt} - p_c \frac{dS_w}{dt} - (1 - S_{mw}) \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} \right) \right] \right\} d\Omega + \\
 & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \left[\mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{mw} B_{nw}} \nabla (\mathbf{p}_{mw} + \rho_{mw} gh) \right] d\Omega - \\
 & \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{a}^T \mathbf{n}^T \left[\mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{mw} B_{nw}} \nabla (\mathbf{p}_{mw} + \rho_{mw} gh) \right] \right\} d\Gamma - \\
 & \int_{\Gamma} \left\{ \mathbf{b}^T \mathbf{n}^T \left[\mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{mw} B_{nw}} \nabla (\mathbf{p}_{mw} + \rho_{mw} gh) \right] + \mathbf{b}^T \mathbf{q}_{mw} \right\} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Fazendo-se $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ e utilizando as transformações apresentadas em (2.38), a equação para o fluxo da fase não molhante sob formulação de elementos finitos é descrita por

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{S}_w - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[(1-S_{nw}) \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{S}_w}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{S_{nw}}{B_{nw}} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_{nw}}{dt} + \\
& \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_{nw} B_{nw}} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{nw} g h d\Omega - \\
& \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_{nw} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

A equação para saturação da fase molhante é obtida de maneira análoga, sendo descrita por

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\partial \mathbf{S}_w}{\partial t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{S}_w - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[(1-S_{nw}) \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_w}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_c}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{S}_w}{dt} + \\
& \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{(1-S_{nw})}{B_w} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{d\mathbf{p}_{nw}}{dt} + \\
& \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_{nw} - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_c - \\
& \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p \rho_w g h d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_w d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Como se verificou, empregou-se para formulação em elementos finitos o método de Galerkin. Para a equação da pressão a formulação de Galerkin é suficiente para se obter uma aproximação razoável da solução. Entretanto, devido

às características da equação da saturação (equação parabólica-hiperbólica), a formulação de Galerkin pode se mostrar instável, apresentando oscilações numéricas em problemas que apresentam grandes velocidades. De acordo com Brooks e Hughes (1982), para que essas possíveis oscilações não ocorram empregam-se métodos que utilizam uma formulação estabilizada, refina-se a malha de elementos finitos ou se controlam os incrementos de tempo.

Para formulação estabilizada, geralmente utilizam-se métodos da família Petrov-Galerkin. Dentre esses se destaca o método SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin), apresentado numa série de trabalhos desenvolvidos por Hughes e outros, se destacando os trabalhos que apresentam a generalização do SUPG, Hughes e Mallet (1986) e onde se demonstra a convergência do método, Hughes *et al* (1987).

No presente estudo, para se evitar possíveis oscilações se utilizará malhas suficientemente refinadas ou incrementos de tempo pequenos.

2.7. Discretização no tempo

Para solução do problema de valor inicial, Lewis e Schrefler (1998), sugerem a utilização de um esquema em diferenças finitas. Sendo $\mathbf{q} = \{\mathbf{u} \ \mathbf{p}\}^T$ para fluxo monofásico, $\mathbf{q} = \{\mathbf{u} \ \mathbf{p}_{mw} \ \mathbf{S}_w\}^T$ para fluxo bifásico e $\mathbf{q} = (\mathbf{q}^{t+\Delta t} - \mathbf{q}^t) / \Delta t$. Utiliza-se o método trapezoidal generalizado para discretização no domínio do tempo, assim:

$$\mathbf{q}^{t+\theta} = (1 - \theta) \mathbf{q}^t + \theta \mathbf{q}^{t+\Delta t} \quad (2.49)$$

Onde Δt é o tamanho do passo de tempo, \mathbf{q}^t e $\mathbf{q}^{t+\Delta t}$ correspondem ao vetor \mathbf{q} nos instantes t e $t + \Delta t$ respectivamente e θ é um parâmetro de integração limitado por $0 \leq \theta \leq 1$.

2.7.1. Propriedades numéricas da discretização no tempo

A escolha do parâmetro de integração θ deve ser tal que garanta as condições de consistência e estabilidade da solução. Faz-se a seguir, de acordo

com Hughes (1977), um estudo sobre esse parâmetro para um problema quase estático não linear, descrito de forma compacta pela equação seguinte.

$${}^{t+\theta} \mathbf{A}(\theta) \dot{\mathbf{X}} + {}^{t+\theta} \mathbf{B}(\theta) \mathbf{X} = {}^{t+\theta} \mathbf{C} \quad (2.50)$$

\mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes de coeficientes e \mathbf{X} um vetor de incógnitas. Assumi-se que a solução da equação (2.50) pode ser dada por

$${}^{t+\theta} \mathbf{X} = \boldsymbol{\Psi} {}^{t+\theta} \mathbf{y} \quad (2.51)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{y}} \quad (2.52)$$

Sendo $y_i = e^{s_i t}$, $s_i = \text{constante}$ e $\boldsymbol{\Psi}$ um conjunto de autovetores da matriz ${}^{t+\theta} \mathbf{A}^{-1} {}^{t+\theta} \mathbf{B}$. Substituindo \mathbf{X} e $\dot{\mathbf{X}}$ dados em (2.51) e (2.52) na equação (2.50) e a premultiplicando por $\boldsymbol{\Psi}^T$, tem-se:

$$\boldsymbol{\Psi}^T {}^{t+\theta} \mathbf{A}(\theta) \boldsymbol{\Psi} \dot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Psi}^T {}^{t+\theta} \mathbf{B}(\theta) \boldsymbol{\Psi} {}^{t+\theta} \mathbf{y} = \boldsymbol{\Psi}^T {}^{t+\theta} \mathbf{C} \quad (2.53)$$

A partir da equação (2.53) pode-se representar o problema, para um grau de liberdade, da seguinte maneira

$$y_i + {}^{t+\theta} \lambda ({}^{t+\theta} X_i) \dot{y}_i = {}^{t+\theta} m_i \quad (2.54)$$

Onde ${}^{t+\theta} \lambda$ é o maior autovalor da matriz ${}^{t+\theta} \mathbf{A}^{-1} {}^{t+\theta} \mathbf{B}$. Descrevendo-se (2.54) sob a forma sugerida no item referente à discretização no tempo, tem-se

$${}^{t+\Delta t} y_i = (1 - \theta) {}^t y_i + \theta {}^{t+\Delta t} y_i \text{ e } \dot{y}_i = \frac{({}^{t+\Delta t} y_i - {}^t y_i)}{\Delta t} \quad (2.55)$$

Após essas considerações, a seguinte forma de recorrência pode ser escrita

$${}^{t+\Delta t} y_i = \frac{1 - (1 - \theta) \Delta t {}^{t+\theta} \lambda} {1 + \Delta t \theta {}^{t+\theta} \lambda} {}^t y_i + (1 - \theta) {}^t m_i + \theta {}^{t+\Delta t} m_i \quad (2.56)$$

Para estabilidade da solução é requerido que

$$\left| \frac{1 - (1 - \theta) \Delta t {}^{t+\theta} \lambda} {1 + \Delta t \theta {}^{t+\theta} \lambda} \right| \leq 1 \quad (2.57)$$

Para $\theta \geq 0,5$ o algoritmo de integração é incondicionalmente estável, tanto para problemas lineares quanto para não lineares. Para $\theta = 0,5$ tem-se precisão de segunda ordem. No caso de $\theta < 0,5$, o algoritmo em questão é incondicionalmente estável se

$${}^{t+\theta} \lambda \Delta t \leq \frac{2}{(1-2\theta)} \quad (2.58)$$

A partir dessas observações será utilizado nesse trabalho $\theta = 0,5$.

3

Análise não linear

3.1. Introdução

Descrevem-se nesse capítulo aspectos sobre análise não linear (análise não linear local e análise não linear global). Apresenta-se o problema não linear local como um problema de programação matemática. Os modelos constitutivos adotados para fase sólida e o modelo constitutivo utilizado para descrição da permeabilidade relativa são descritos nesse capítulo. Por fim, alguns aspectos sobre análise não linear global são apresentados.

3.2. Análise não linear local (modelos constitutivos e análise elastoplástica)

Apresentam-se neste item alguns conceitos para o entendimento da análise não linear local, análise elastoplástica, assim como se descrevem os modelos constitutivos adotados nesse trabalho (modelo de Mohr Coulomb e modelo de Von Mises).

3.2.1. Princípio da máxima dissipação plástica

O princípio da máxima dissipação plástica é atribuído a Von Mises e Taylor, sendo posteriormente considerado por outros autores como Mandel (1964) e Lubliner (1984,1986), *apud* Simo (1997). O princípio da máxima dissipação plástica é a base da formulação matemática das leis de evolução da teoria da plasticidade e está fundamentada na hipótese de que a deformação plástica se dá de modo que a energia dissipada seja máxima. A plastificação é um processo dissipativo irreversível, ou seja, há perda de energia do sistema. O princípio da máxima dissipação plástica, *PMDP*, pode ser posto da seguinte maneira: para uma

dada taxa de deformação plástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ e uma taxa de variação das variáveis internas $\dot{\mathbf{a}}$, entre todos os estados finais $(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)$ admissíveis, o estado real $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$, é o que leva a máxima dissipação plástica.

Para descrição matemática do *PMDP* parte-se do conceito de energia de dissipação plástica, dado como sendo a taxa de variação da energia interna em relação às variáveis plásticas com o sinal trocado.

$$D^p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = - \left[\frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \right] \quad (3.1)$$

A energia interna de um sistema em repouso, é composta por duas parcelas: uma parcela de energia capaz de realizar trabalho, energia livre e uma parcela de energia proveniente de um processo térmico. A energia livre, pode por sua vez, ser representada pela decomposição aditiva de uma parcela elástica e outra plástica. De forma semelhante, as deformações totais também podem ser assim representadas.

$$W = W^e + W^p \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.2)$$

Diz-se que a energia de deformação elástica $W^e = W^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e)$ e que a parcela plástica $W^p = W^p(\mathbf{a})$, é função somente das variáveis internas. Assim, é possível escrever

$$W = W^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + W^p(\mathbf{a}) = W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + W^p(\mathbf{a}) \quad (3.3)$$

Dessa maneira representa-se a dissipação plástica como

$$D^p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = - \frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \quad (3.4)$$

Do conceito do tensor de tensões elástico e, utilizando-se a regra da cadeia, pode-se escrever

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = - \frac{\partial W^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad (3.5)$$

Assim, a dissipação plástica pode ser rescrita como

$$D^p(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) = \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \quad (3.6)$$

Para facilitar a aplicação dos métodos de programação matemática utilizados para solução dos problemas de otimização, se escreve o *PMDP* como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} &: -D^p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \\ \text{sujeito} &: F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

A restrição $F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a})$ é neste problema igual à função de escoamento, descrita segundo algum modelo constitutivo condizente com o material do domínio analisado. O problema de minimização com restrições pode ser escrito como um problema sem restrições introduzindo-se os multiplicadores de Lagrange. A função de Lagrange correspondente ao problema é

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*, \gamma, \boldsymbol{\varepsilon}^*, \mathbf{a}^*) = -\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* + \frac{\partial W^p}{\partial \mathbf{a}^*} \cdot \mathbf{a}^* + \gamma F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) \quad (3.8)$$

O símbolo $(\cdot)^*$ indica ser um ponto corrente que atende necessariamente as condições de Kuhn-Tucker. Escrevendo-se agora as condições de Kuhn-Tucker, condições necessárias para existência de um valor extremo, tem-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = -\boldsymbol{\varepsilon}^* + \gamma \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^* = \gamma \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}^*} = \frac{\partial^2 W^p}{\partial \mathbf{a}^* \partial \mathbf{a}^*} \cdot \mathbf{a}^* + \gamma \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \mathbf{a}^*} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}^* = -\gamma \mathbf{G} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*)}{\partial \mathbf{a}^*} \quad (3.10)$$

$$F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) \leq 0 \quad (3.11)$$

$$\gamma F(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{a}^*) = 0 \quad (3.12)$$

$$\gamma \geq 0$$

em (3.10) $\mathbf{G} = \left(\frac{\partial^2 W^p}{\partial \mathbf{a}^* \partial \mathbf{a}^*} \right)^{-1}$

Nota-se que as condições apresentadas acima, condições da plasticidade associada, surgem como consequência do *PMDP*. Da equação (3.9) tem-se a lei de escoamento associada, da equação (3.10) tem-se a lei de encruamento. Em (3.11) se verifica a condição de consistência e em (3.12) através da condição de complementariedade se verifica a condição de carregamento/descarregamento. Simo e Hughes (1997) citam que o *PMDP* implica em: fluxo associado no espaço das tensões, condição chamada de normalidade; condição de carregamento/descarregamento dada pela condição de complementariedade de Kuhn-Tucker e convexidade do espaço das tensões.

O problema apresentado em (3.7) pode ser reescrito, de acordo com Simo e Hughes (1997), sob a seguinte forma

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{i+1}, \mathbf{a}^{i+1}\} = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) \in \mathcal{E}_\sigma \left\{ \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}^{teste} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \mathbf{D}^{-1} + \frac{1}{2} \|\mathbf{a}^i - \mathbf{a}\|^2 \mathbf{G}^{-1} \right\} \quad (3.13)$$

sujeito : $F(\boldsymbol{\sigma}^{i+1}, \mathbf{a}^{i+1}) \leq 0$

Onde \mathbf{D} é o tensor constitutivo elástico, \mathbf{G} é módulo plástico generalizado, ambos assumidos constantes, $\boldsymbol{\sigma}^{teste}$ é o tensor das tensões teste (geralmente assume-se o elástico) e \mathcal{E}_σ é o espaço das tensões admissíveis. $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{D}^{-1}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}}$ pode ser visto como uma norma da energia e $\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{G}^{-1}} = \sqrt{\mathbf{a} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{a}}$ como uma norma induzida por \mathbf{G}^{-1} . Para o caso de plasticidade perfeita o segundo termo entre chaves da equação (3.13) é nulo, e a interpretação geométrica do problema pode ser representada pela Figura 3.1

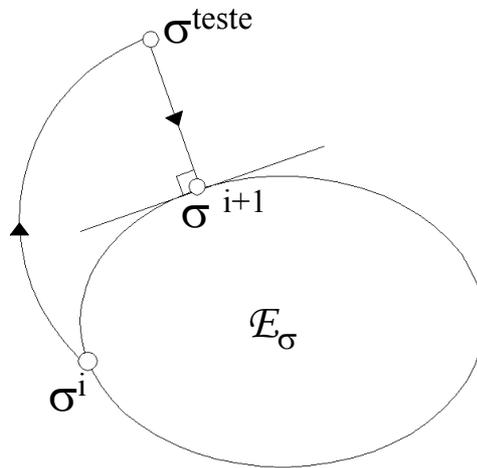


Figura 3.1 Ilustração geométrica do conceito de projeção ao ponto mais próximo

Concluindo, $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$ é a projeção ao ponto mais próximo de $\boldsymbol{\sigma}^{teste}$ na superfície de escoamento.

Verificou-se nas equações que descrevem o problema de acoplamento fluido mecânico a presença do tensor constitutivo tangente ou elastoplástico \mathbf{D}_T . Este pode ser avaliado da seguinte maneira

$$\mathbf{D}_T = \mathbf{D} - \left(\mathbf{D} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \right) \frac{1}{H} \quad (3.14)$$

$$H = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \mathbf{g} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{h}$$

Sendo \mathbf{g} e \mathbf{h} , respectivamente, funções que definem a direção do fluxo plástico e a evolução de \mathbf{a} . Para plasticidade associada $\mathbf{g} = \partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}$.

3.2.2. Método de solução do problema de programação matemática

Os algoritmos de programação não-linear, com ou sem restrições, são procedimentos iterativos em que novos pontos \mathbf{x}^k são obtidos a partir de pontos correntes \mathbf{x}^{k-1} através da seguinte expressão

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + t\mathbf{d} \quad (3.15)$$

Dessa forma, os algoritmos em geral dividem-se em duas etapas principais: a primeira etapa é a determinação da direção de busca \mathbf{d} e a segunda é a avaliação do parâmetro escalar t , que representa o tamanho do passo a ser dado ao longo da direção de busca. A partir da expressão (3.15) diversos algoritmos podem ser construídos utilizando diferentes técnicas para a determinação da direção de busca e do tamanho do passo.

Nesse trabalho utiliza-se o algoritmo de Han-Powell – Programação quadrática seqüencial (*SQP*). O algoritmo de otimização de Han-Powell foi proposto por Han em 1976 e 1977 e por Powell em 1978, *apud* Eboli (1989). Este algoritmo utiliza a técnica de Programação Quadrática Seqüencial (*SQP*) através da solução de um subproblema quadrático (*QP*).

O método *SQP* pode ser considerado como o resultado da aplicação do método de Newton à minimização de uma aproximação quadrática da função Lagrangiana do problema. Este método fornece a cada iteração os vetores \mathbf{d} , para se fazer a correção de \mathbf{x} e $\Delta\boldsymbol{\gamma}$, para correção dos multiplicadores de Lagrange. Para sua demonstração considera-se o seguinte problema de minimização com restrição de igualdade:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeito a } \mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

A função de Lagrange do problema é dada por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

Desenvolvendo $\nabla\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\gamma})$ em série de Taylor em torno de $(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k)$ até termos de primeira ordem, tem-se

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^k + \mathbf{d}^{k+1}, \boldsymbol{\gamma}^k + \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1}) = \nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k) + [\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k)] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Considerando $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$ e $\Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1} = \boldsymbol{\gamma}^{k+1} - \boldsymbol{\gamma}^k$, aplicando-se a condição de estacionariedade em (3.18) no ponto $(\mathbf{x}^k + \mathbf{d}^{k+1}, \boldsymbol{\gamma}^k + \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1})$ se obtém

$$[\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k)] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\gamma}^k) \quad (3.19)$$

ou, sob a forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^k & \mathbf{A}^{kT} \\ \mathbf{A}^k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^k + \mathbf{A}^k \boldsymbol{\gamma}^k \\ \mathbf{c}^k \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Substituindo $\boldsymbol{\gamma}^{k+1}$ por $\boldsymbol{\gamma}^k + \Delta \boldsymbol{\gamma}^{k+1}$ se escreve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^k & \mathbf{A}^{kT} \\ \mathbf{A}^k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{k+1} \\ \boldsymbol{\gamma}^{k+1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^k \\ \mathbf{c}^k \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Onde \mathbf{W}^k é a matriz Hessiana da função de Lagrange, \mathbf{A}^k é a matriz dos gradientes das restrições e \mathbf{g}^k é o gradiente da função objetivo, todos avaliados em \mathbf{x}^k .

Escrevendo-se as condições de Kuhn-Tucker do problema de programação quadrática (QP)

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \mathbf{g}^{kT} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{W} \mathbf{d} \\ &\text{sujeito a } \mathbf{c}^k + \mathbf{A}^{kT} \mathbf{d} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Verifica-se que essas condições são idênticas à expressão (3.21). Conclui-se dessa maneira que, em cada iteração k do problema original, a solução é aproximada pela solução do (QP), obtido pela linearização das restrições e pela expansão quadrática representada na função objetivo do problema definido em (3.22). Vanderplaats (1984) apresenta o caso de restrições de desigualdade.

3.2.2.1. Etapas do algoritmo de Han-Powell

Parente (2000) descreve o algoritmo Han-Powell com as seguintes etapas:

1. Dado um ponto inicial \mathbf{x}^0 e uma aproximação da Hessiana da função de Lagrange \mathbf{B}^0 , fazer $k = 0$. \mathbf{B}^0 é dada pela seguinte função:

$$\mathbf{B}^0 = b^0 \mathbf{I} \quad (3.23)$$

onde b^0 é um parâmetro definido pelo usuário do algoritmo. O número de reinícios da matriz \mathbf{B} é controlado pelo parâmetro nr definido pelo usuário. O reinício de \mathbf{B} serve para descartar a influência de pontos muito distantes do ponto corrente e também para limitar o uso de memória, caracterizando assim o método *L-BFGS*.

2. Para $k = k+1$, montar e resolver o problema de programação quadrática QP , definido pela equação (3.22) determinando os vetores \mathbf{d}^k e γ^k .

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \mathbf{g}^{k-1T} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{B}^{k-1} \mathbf{d} \\ & \text{sujeito a } \mathbf{c}^{k-1} + \mathbf{A}^{k-1T} \mathbf{d} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Onde \mathbf{B}^{k-1} é a matriz Hessiana da função de Lagrange, \mathbf{A}^{k-1} é a matriz dos gradientes das restrições e \mathbf{g}^{k-1} é o gradiente da função objetivo, todos avaliados em \mathbf{x}^{k-1} .

3. Verificar os critérios de convergência do algoritmo:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{g}^{k-1T} \mathbf{d} \right| \leq tol_1 \\ & \max(c_i^k) \leq tol_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde o primeiro critério representa a variação da função objetivo na direção \mathbf{d} e o segundo critério verifica explicitamente o valor da restrição mais violada.

4. Verificar também os critérios de parada tais como: número de avaliações da função objetivo e número de iterações.
5. Se os critérios de convergência e/ou de parada não são atendidos, faz-se uma busca linear unidimensional para determinar o tamanho do passo t , na direção \mathbf{d} de forma que o novo estimador da solução seja um ponto que contribua para o decréscimo da função objetivo. A busca é feita sobre a função de penalidade (ϖ), construída no intuito de impor um alto custo à violação das restrições. Esta função é definida por

$$\varpi(t) = \varpi(\mathbf{x} + t\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l r_i \max(c_i, 0) \quad (3.26)$$

onde r_i são os fatores de penalidades das l restrições c_i . A busca é aproximada, isto é, a solução obtida não é necessariamente o mínimo de

$\varpi(t)$, mas atende certo decréscimo pré-estipulado em $\varpi(t)$ considerado satisfatório.

6. Atualização da matriz \mathbf{B}^k do subproblema quadrático através do método *L-BFGS*.
7. Retorno à etapa 2.

3.2.3. Função de escoamento (critério de Mohr Coulomb)

O critério de Mohr Coulomb é um dos mais simples e utilizados em problemas da mecânica das rochas, sendo descrito em termos dos invariantes de tensões por

$$F_{MC} = \frac{J_1}{3} \text{sen}\Phi + \sqrt{J_{2D}} \cos\theta - \sqrt{\frac{J_{2D}}{3}} \text{sen}\phi \text{sen}\theta - c \cos\Phi \quad (3.27)$$

J_1 representa o primeiro invariante das tensões, J_{2D} representa o segundo invariante das tensões desviadoras, Φ e c (propriedades do material), são respectivamente o ângulo de atrito e a coesão. O ângulo θ é dado por

$$\theta = \frac{1}{3} \text{sen}^{-1} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \text{ onde } -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \quad (3.28)$$

J_{3D} representa o terceiro invariante das tensões desviadoras.

Como se verificou anteriormente, é necessário para solução do problema de programação matemática o gradiente das restrições. Nesse trabalho, assumindo-se o caso de plasticidade perfeita obtém-se $\partial F_{MC} / \partial \boldsymbol{\sigma}$ com (3.29).

$$\frac{\partial F_{MC}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F_{MC}}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_{MC}}{\partial \sqrt{J_{2D}}} \frac{\partial \sqrt{J_{2D}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_{MC}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.29)$$

A superfície de escoamento de Mohr Coulomb tem como característica a presença de cantos, podendo-se com isso, dificultar a obtenção de (3.29). Por esse motivo, adotou-se um arredondamento da superfície de escoamento para $|\theta| > 29^\circ$, conforme apresentado em Owen (1980).

3.2.4. Função de escoamento (critério de Von Mises)

O critério de Von Mises é descrito em termos do segundo invariante das tensões desviadoras e da tensão de escoamento do material. Esse critério é fundamentalmente empregado para representação de metais.

$$F_{VM} = \sqrt{2J_{2D}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y \quad (3.30)$$

A derivada da função de escoamento com relação às tensões é obtida da seguinte forma

$$\frac{\partial F_{VM}}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_{VM}}{\partial \sqrt{2J_{2D}}} \frac{\partial \sqrt{2J_{2D}}}{\partial \sigma} \quad (3.31)$$

3.3. Modelo constitutivo para permeabilidade

No capítulo 2 apresentou-se a relação entre pressão capilar e as pressões das fases molhante e não molhante. Citou-se também, que num meio isotérmico a pressão capilar é uma função do grau de saturação. Para descrição da relação entre pressão capilar e grau de saturação descrevem-se curvas, denominadas curvas de pressão capilar, $P_c - S_w$. Algumas expressões semi-empíricas são utilizadas para descrição das curvas de pressão capilar sendo usualmente empregados os modelos de Brooks e Corey (1964), Van Genuchten (1980), Bradford e Leij (1996) e Assouline *et al* (1988 e 2000).

Utiliza-se nesse estudo o modelo de Brooks e Corey (1964) dado por (3.32).

$$S_e = \left(\frac{p_c}{P_d} \right)^{-\beta} \quad \text{para } p_c \geq P_d \quad (3.32)$$

P_d é a pressão de deslocamento e β um índice relacionado ao tamanho dos poros. O parâmetro S_e é a saturação efetiva dada por (3.33)

$$S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{1 - S_{rw} - S_{rmw}} \quad (3.33)$$

Sendo S_{rw} a saturação residual da fase molhante e S_{rmw} a saturação residual da fase não molhante.

De maneira semelhante à pressão capilar, a permeabilidade relativa de cada fase, é função do grau de saturação do meio. As expressões habitualmente utilizadas para descrição da permeabilidade relativa são derivadas das equações das curvas $P_c - S_w$.

Para o modelo de Brooks e Corey (1964) a permeabilidade relativa da fase molhante é descrita pela equação (3.34)

$$k_{rw} = S_e^{[(2+3\beta)/\beta]} \quad (3.34)$$

E a permeabilidade relativa da fase não molhante descrita pela equação (3.35)

$$k_{rnw} = (1 - S_e)^2 (1 - S_e^{[(2+\beta)/\beta]}) \quad (3.35)$$

3.4. Análise não linear global

Apresentam-se nesse item alguns aspectos sobre análise não linear global. De maneira geral, sendo conhecidos os campos iniciais de deslocamentos, poro pressões, saturações e tensões, $({}^t \mathbf{u}, {}^t \mathbf{p}, {}^t \mathbf{S}, {}^t \boldsymbol{\sigma})$ o problema a ser resolvido consiste em se determinar os respectivos campos num instante $t + \Delta t$, para os quais o resíduo seja nulo. Logicamente, o problema não linear local apresentado no item anterior deve ser atendido.

Descrevem-se a seguir os vetores resíduos, inicialmente para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico e posteriormente para o problema com fluxo bifásico. A partir disso, colocam-se os problemas conforme a equação de Newton apontando-se algumas formas de solução.

3.4.1. Acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico

Considerando-se a simplificação utilizada para discretização no tempo, podem-se descrever, a partir das equações (2.39) e (2.41), os resíduos para as equações de equilíbrio e fluxo num instante $t + \Delta t$ numa iteração i como

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i = \left[\begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{\mathbf{b}}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{\mathbf{t}}{\Delta t} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{\boldsymbol{\sigma}'_0}{\Delta t} d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} - \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} \end{array} \right]^i \quad (3.36)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i = \left[\begin{array}{l} \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T q d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \rho_{\pi} g h d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_{\pi}} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} - \\ \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{p} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \left(\mathbf{m}^T - \frac{\mathbf{m} \mathbf{D}_T}{3K_s} \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} \end{array} \right]^i \quad (3.37)$$

Para uma notação compacta descrevem-se os resíduos num instante $t + \Delta t$ numa iteração i como

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}) \text{ sendo } \mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

Assumindo-se um processo iterativo, e conhecendo-se as incógnitas do problema num instante $t + \Delta t$ numa iteração i , fazendo-se uma expansão em série de Taylor até termos de primeira ordem dos vetores resíduos tem-se

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^{i+1}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i + \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} = 0 \quad (3.39)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^{i+1}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i + \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} = 0 \quad (3.40)$$

Ou, numa representação matricial

$$\left[\begin{array}{cc} -\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}^i} \\ -\frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t, \mathbf{p}^i} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

Sendo os incrementos de deslocamentos e poro pressões:

$$\begin{aligned} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^i \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^i \end{aligned} \quad (3.42)$$

Do sistema de equações (3.41) se obtém:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \Delta t \theta \mathbf{H} + \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \\ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{L} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{H} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu_{\pi}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{G} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} + \frac{\phi}{K_{\pi}} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \end{aligned} \quad (3.44)$$

3.4.2. Acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico

De maneira análoga ao apresentado para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico trata-se agora o problema com fluxo bifásico. Das equações (2.44), (2.47) e (2.48) descrevem-se os resíduos para as equações de equilíbrio, pressão da fase não molhante e saturação da fase molhante num instante $t + \Delta t$ numa iteração i

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{\mathbf{b}}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \frac{\mathbf{t}}{\Delta t} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \frac{\boldsymbol{\sigma}'_0}{\Delta t} d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_{nw}}{\Delta t} - \\ \int_{\Omega} p_c \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} + \\ \int_{\Omega} (1 - S_{nw}) \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_c}{\Delta t} \end{pmatrix}^i \quad (3.45)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i = \left[\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_{nw} d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{mw}}{\mu_{nw} B_{mw}} \nabla \mathbf{N}_p \rho_{mw} g h d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{S}_w + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[(1 - S_{nw}) \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_c}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_{nw}}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{S_{nw}}{B_{mw}} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_{mw}}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{mw}}{\mu_{nw} B_{mw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{p}_{mw} \end{aligned} \right]^i \quad (3.46)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i = \left[\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_w d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p \rho_w g h d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{S}_w + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[(1 - S_{nw}) \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{S_w}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_c}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{(1 - S_{nw})}{B_w} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} + \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(1 - S_{nw})}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{S}_w}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{(1 - S_{nw})}{B_w} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \frac{\mathbf{p}_{mw}}{\Delta t} - \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{p}_{mw} + \\ & \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \theta \mathbf{p}_c \end{aligned} \right]^i \quad (3.47)$$

Assim como para o caso monofásico escreve-se um vetor de resíduos.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}) \text{ sendo } \mathbf{q} = \left\{ \begin{aligned} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ & {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ & {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

E faz-se uma expansão em série de Taylor até termos de primeira ordem dos vetores resíduos

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \\ &\left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{S}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \\ &\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{S}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} + \\ &\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{S}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ou, numa representação matricial

$$\begin{bmatrix} -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} & -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \mathbf{S}_w} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \\ -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} & -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{p_{nw}}}{\partial \mathbf{S}_w} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \\ -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{u}^i} & -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{p}_{nw}} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{p}_{nw}^i} & -\left. \frac{\partial \mathbf{F}_{S_w}}{\partial \mathbf{S}_w} \right|_{t+\Delta t, \mathbf{S}_w^i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Sendo os incrementos de deslocamentos, poro pressões e saturações:

$$\begin{aligned} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^i \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^i \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^i \end{aligned} \quad (3.53)$$

Como mostrado anteriormente as permeabilidades relativas são funções não lineares das poro pressões e das saturações. Desconsiderando as derivadas dessas parcelas em relação às incógnitas do problema obtém-se, do sistema de equações (3.52):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} & \mathbf{L}_c \\ \mathbf{L}_{nw} & \mathbf{G}_{nw} + \Delta t \theta \mathbf{H}_{nw} & \mathbf{O}_{nw} - \Delta t \theta \mathbf{M}_{nw} - \mathbf{P}_{nw} \\ \mathbf{L}_w & \mathbf{G}_w + \Delta t \theta \mathbf{H}_w & \mathbf{O}_w - \Delta t \theta \mathbf{M}_w - \mathbf{P}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \\ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{nw}, \mathbf{S}_w, t) \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{L} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}_p d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{L}_c &= \int_{\Omega} p_c \mathbf{B}^T \left(\mathbf{m} - \mathbf{D}_T \frac{\mathbf{m}}{3K_s} \right) \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{L}_{nw} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{L}_w &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \frac{(1-S_{mw})}{B_w} \left(\mathbf{m}^T - \frac{1}{3K_s} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \right) \mathbf{B} d\Omega \\ \mathbf{H}_w &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{H}_{nw} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} \frac{k_{rmw}}{\mu_{nw} B_{mw}} \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{G}_w &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{(1-S_{mw})}{B_w} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{G}_{nw} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\frac{S_{mw}}{B_{mw}} \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{O}_w &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{O}_{nw} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[-\frac{\phi}{B_{mw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega \\ \mathbf{M}_w &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_w} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{M}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{B_{nw}} \right) \right] \mathbf{N}_p d\Omega$$

$$\mathbf{P}_w = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(1-S_{nw})}{B_w} \right] \mathbf{N}_p d\Omega$$

$$\mathbf{P}_{nw} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \left[p_c \left(\frac{(1-\phi)}{K_s} - \frac{1}{9K_s^2} \mathbf{m}^T \mathbf{D}_T \mathbf{m} \right) \frac{(S_{nw})}{B_{nw}} \right] \mathbf{N}_p d\Omega$$

Cabe salientar que as matrizes apresentadas acima são matrizes tangentes.

Para o tratamento das condições de contorno essenciais (deslocamentos, poro pressões e saturações prescritas) utilizou-se o método das penalidades descrito por Bathe (1982).

Os sistemas de equações (3.43) e (3.54) podem ser escritos numa forma compacta como a equação de Newton

$${}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}^{i+1} = {}^{t+\Delta t} [\mathbf{H}(\mathbf{q}^i)^{-1}] {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}^i) \quad (3.56)$$

Onde $\delta \mathbf{q}$ é o incremento das variáveis, \mathbf{H} a matriz Hessiana e \mathbf{R} o vetor dos gradientes.

No método de Newton a equação (3.56) é resolvida calculando-se a matriz Hessiana exatamente, obtendo-se dessa forma uma convergência quadrática. O cálculo exato da matriz Hessiana pode ter um custo computacional elevado, principalmente em problemas com muitas variáveis. Para contrapor essa característica os métodos Quase Newton apresentam-se como alternativa. Nesses métodos, uma aproximação da Hessiana, ou de sua inversa, é construída a partir dos valores dos gradientes ao longo das iterações. Esses métodos, dos quais o *BFGS* é o mais popular, são amplamente utilizados.

O sistema de equações (3.54) tem por sua vez, uma matriz não simétrica, devido essa característica, o método *BFGS* não pode ser empregado, dado que a atualização da inversa da matriz Hessiana no método *BFGS*, constrói por definição matrizes simétricas.

4 Procedimentos de solução

De acordo com Lewis e Schrefler (1998), os problemas de acoplamento fluido mecânico podem ser resolvidos através de estratégias acopladas ou desacopladas. As soluções acopladas dividem-se em soluções totalmente acopladas e soluções particionadas. Nesse trabalho as soluções desacopladas não serão estudadas. Estudos referentes a soluções desacopladas são encontrados em Corapcioglu (1984).

Apresentam-se a seguir duas estratégias de solução acopladas. A primeira totalmente acoplada, e designada nesse trabalho pelo mesmo nome e a segunda particionada, conhecida como procedimento *staggered*. De maneira geral, os resultados obtidos com esses procedimentos são similares, já, o esforço computacional requerido pode ser bastante diferente. A escolha do procedimento mais adequado de solução depende das características do problema, fluxo monofásico ou bifásico, problema mecânico linear ou não linear, número de equações envolvidas, etc. Alguns comentários a respeito desses aspectos serão apresentados nesse capítulo do trabalho.

4.1.Procedimento totalmente acoplado

Quando se resolve os sistemas de equações como apresentados em (3.43) ou (3.54), diz-se que as soluções são totalmente acopladas. A esse respeito, verifica-se para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico, um sistema de equações algébricas resultante da discretização, simétrico. Nota-se também, que a matriz \mathbf{H} é constante no tempo, uma vez que na descrição no modelo físico a permeabilidade e a viscosidade dinâmica são constantes. A matriz \mathbf{K} , pode ser constante ou não, dependendo do comportamento do meio, elástico, plástico, etc.

Considerando essas características, para a solução de problemas governados por equações lineares e com um número de equações relativamente pequeno, os métodos de solução direta (decomposição LU, decomposição de Choleski, Gauss entre outros) são atrativos. Entretanto, em problemas não lineares o uso de um método direto pode ser antieconômico pois, dependendo do método de solução do problema não linear o sistema algébrico terá que ser resolvido diversas vezes. Além disso, visando uma solução mais precisa, pode-se utilizar um maior número de pontos nodais, o que resulta na solução de um número maior de equações algébricas. O número de equações algébricas também cresce substancialmente quando a dimensão do problema passa do espaço bidimensional para o tridimensional.

Como alternativa ao uso de métodos diretos podem ser utilizados métodos iterativos. Métodos iterativos consistem em aplicações repetidas de um algoritmo utilizando duas etapas: (1) prever, (2) corrigir. Uma vantagem desses métodos é a menor necessidade de armazenamento requerida. Todavia, diferentes métodos iterativos implicarão em diferentes números de iterações com base numa mesma malha, ou seja, uns convergirão mais rapidamente que outros. Além disso, o número de iterações necessário para convergência, cresce com o número de equações algébricas do sistema.

Dentre os métodos iterativos destaca-se o método do gradiente conjugado, que busca a direção de maiores variações e caminha nesta direção para otimizar a velocidade de convergência. Habitualmente, para melhorar o método, empregam-se aceleradores, geralmente pré-condicionadores. O método multigrid também é muito utilizado, podendo ser uma alternativa bastante eficiente.

Para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico o sistema de equações algébricas resultante da discretização é não simétrico. O método do gradiente bi-conjugado estabilizado, apresentado por Van der Vorst (1992), é amplamente utilizado para solução desse tipo de sistema de equações, sendo esse utilizado nesse trabalho. Diferente do verificado para o problema com fluxo monofásico, no problema com fluxo bifásico a permeabilidade varia no tempo, pronunciando ainda mais a não linearidade do problema.

4.2. Procedimento *staggered*

As formas particionadas de solução podem ser alternativas interessantes para problemas acoplados. O *staggered* é um exemplo de procedimento de solução particionada. Lewis e Schrefler (1998), Simoni e Schrefler (1991), Turska e Schrefler (1992) e Ferreira (1996) apresentam alguns estudos sobre a utilização desse procedimento para solução de problemas de acoplamento fluido mecânico. Nesses estudos, mostra-se que o procedimento *staggered* apresenta resultados equivalentes aos obtidos com o procedimento totalmente acoplado.

Ferreira (1996) realizou uma série de comparações a respeito do esforço computacional requerido por cada procedimento de solução na análise de problemas de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico e material com comportamento elástico linear. Para essa classe de problemas evidenciou-se que, o esforço computacional despendido no procedimento *staggered* é superior ao requerido no procedimento totalmente acoplado. Esse tipo de constatação pode ser esperado, uma vez que para essas condições as matrizes são constantes no tempo.

Lewis e Schrefler (1998), Simoni e Schrefler (1991), Turska e Schrefler (1992), citam que o esforço computacional no procedimento *staggered* pode ser inferior ao necessário no procedimento totalmente acoplado, entretanto, não é explicitado para quais casos ou condições essa característica é verificada.

Ao se utilizar o procedimento *staggered* é possível se obter problemas que isoladamente são melhor compreendidos e com soluções mais simples do que os obtidos com o procedimento totalmente acoplado. Além disso, procedimentos de solução de sistemas de equações, diferentes dos utilizados nos problemas totalmente acoplados podem ser empregados. Para se confirmar essa afirmativa, apresentam-se a seguir os procedimentos adotados nesse trabalho para solução dos problemas de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico e fluxo bifásico, com a utilização do procedimento *staggered*.

4.2.1. Procedimento *staggered* para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico

Para a equação de equilíbrio do problema com fluxo monofásico tem-se:

$$[\mathbf{K}]\{\delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1}\} = \{\Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(t+\Delta t, \mathbf{u}^i, \mathbf{p}^{i+1}, t)\} \quad (4.1)$$

E para a equação de fluxo:

$$[\Delta t \theta \mathbf{H} + \mathbf{G}]\{\delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1}\} = \{\Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_p^i(t+\Delta t, \mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{p}^i, t)\} \quad (4.2)$$

Verifica-se nos sistemas de equações (4.1) e (4.2) que os valores de \mathbf{u} e \mathbf{p} são conhecidos no passo de tempo anterior e que para se avaliar o sistema de equações (4.1) os valores de ${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{i+1}$ são fixos e para se avaliar o sistema de equações (4.2) os valores de ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1}$ são fixos.

Adotando os campos de deslocamentos e poro pressões para verificação da convergência da solução, descreve-se um algoritmo para solução do problema num instante $t + \Delta t$, como:

Instante $t + \Delta t$ Estimativa inicial ${}^{t+\Delta t} \mathbf{p} = {}^t \mathbf{p}$	Etapa 1
Procedimento <i>staggered</i> iteração: $j+1$	Etapa 2
Avalia-se \mathbf{u}^{j+1} com (4.1) e verifica-se a convergência dos deslocamentos com: $\left \frac{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{j+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^j }{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{j+1} } \right \leq tol$	Etapa 3
Com o vetor \mathbf{u} obtido na etapa 3 avalia-se \mathbf{p}^{j+1} com (4.2) e verifica-se a convergência das poro pressões com: $\left \frac{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{j+1} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^j }{ {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{j+1} } \right \leq tol$	Etapa 4
Se as desigualdades das etapas 3 e 4 não forem atendidas, retorna-se a etapa 2 com os valores atualizados de \mathbf{p} . Caso contrário, faz-se $j=0$ e um novo passo se inicia na Etapa 1.	Etapa 5

De acordo com o modelo físico empregado e o procedimento de solução apresentado nesse trabalho o sistema de equações (4.1) é não linear, enquanto o sistema de equações (4.2) é eminentemente linear. Já, no procedimento totalmente acoplado, em decorrência da não linearidade do problema mecânico, todo o problema é não linear.

4.2.2. Procedimento *staggered* para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico

Para o problema com fluxo bifásico adotou-se a seguinte estratégia de solução: particionou-se o problema em duas partes, problema mecânico e problema de pressão-saturação.

Conhecendo-se as incógnitas do problema num instante t , tem-se para a equação de equilíbrio:

$$[\mathbf{K}]\{\delta^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{i+1}\} = \{\Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_u^i(t+\Delta t, \mathbf{u}^i, \mathbf{p}_{nw}^{i+1}, \mathbf{S}_w^{i+1}, t)\} \quad (4.3)$$

Sendo $\mathbf{F}_u^i(t+\Delta t, \mathbf{u}^i, \mathbf{p}_{nw}^{i+1}, \mathbf{S}_w^{i+1}, t)$ obtido com (3.45).

Para as equações de pressão da fase não molhante e saturação da fase molhante, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{nw} + \Delta t \theta \mathbf{H}_{nw} & \mathbf{O}_{nw} - \Delta t \theta \mathbf{M}_{nw} - \mathbf{P}_{nw} \\ \mathbf{G}_w + \Delta t \theta \mathbf{H}_w & \mathbf{O}_w - \Delta t \theta \mathbf{M}_w - \mathbf{P}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{nw}^{i+1} \\ \delta^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{p_{nw}}^i(t+\Delta t, \mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{p}_{nw}^i, \mathbf{S}_w^i, t) \\ \Delta t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{S_w}^i(t+\Delta t, \mathbf{u}^{i+1}, \mathbf{p}_{nw}^i, \mathbf{S}_w^i, t) \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Nota-se que para a solução do sistema de equações (4.3) os valores de \mathbf{p}_{nw}^{i+1} e \mathbf{S}_w^{i+1} são fixos. Já, para a solução do sistema de equações (4.4) fixam-se os valores de \mathbf{u}^{i+1} .

Adotando os campos de deslocamentos e saturações da fase molhante para verificação da convergência da solução, descreve-se um algoritmo para solução do problema num instante $t + \Delta t$, como:

Instante $t + \Delta t$ Estimativa inicial $\mathbf{p}_{nw}^{t+\Delta t} = {}^t \mathbf{p}_{nw}$ e $\mathbf{S}_w^{t+\Delta t} = {}^t \mathbf{S}_w$	Etapa 1
Procedimento <i>staggered</i> iteração: $j+1$	Etapa 2
Avalia-se \mathbf{u}^{j+1} com (4.3) e verifica-se a convergência dos deslocamentos com: $\left \frac{ \mathbf{u}^{j+1} - \mathbf{u}^j }{ \mathbf{u}^{j+1} } \right \leq tol$	Etapa 3
Com o vetor \mathbf{u} obtido na etapa 3 avalia-se \mathbf{p}_{nw}^{j+1} e \mathbf{S}_w^{j+1} com (4.4) e verifica-se a convergência das saturações da fase molhante com:	Etapa 4

$\left \frac{ ^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{j+1} - ^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^j }{ ^{t+\Delta t} \mathbf{S}_w^{j+1} } \right \leq tol$	
<p>Se as desigualdades das etapas 3 e 4 não forem atendidas, retorna-se a etapa 2 com os valores atualizados de \mathbf{p}_{nw} e \mathbf{S}_w</p> <p>Caso contrário, faz-se $j=0$ e um novo passo se inicia na Etapa 1.</p>	<p>Etapa 5</p>

Nota-se no problema com fluxo bifásico, que os sistemas de equações (4.3) e (4.4), são sistemas não lineares. Ao se resolver (4.3) isoladamente é possível utilizar algum procedimento de solução para sistemas simétricos. Para o sistema de equações (4.4) se faz necessário um procedimento de solução de sistemas não simétricos. No caso da solução totalmente acoplada todo sistema de equações é não simétrico.

Outra observação importante, que agrega vantagens ao procedimento de solução particionado, é verificada com a maior flexibilidade para imposição de condições de contorno. Por exemplo, pode-se desejar impor uma condição de contorno de vazão, que por sua vez, irá gerar valores de pressões e saturações dependentes da condição de contorno de vazão imposta. Com essa condição, não se conhece a priori os valores de pressões e saturações, que são necessários para correta descrição do problema mecânico. Ou seja, numa estratégia totalmente acoplada essa característica geraria uma dificuldade adicional. Entretanto, numa solução particionada essa dificuldade é transposta com mais facilidade, pois, a cada solução do problema de fluxo as pressões e saturações são atualizadas e suas influências no problema mecânico podem ser facilmente consideradas.

Nos procedimentos anteriormente apresentados, a tolerância estimada para verificação da convergência deve ser pequena o suficiente para gerar resultados semelhantes aos obtidos com a solução totalmente acoplada. A adoção de valores excessivamente pequenos para tol pode propiciar uma perda na eficiência computacional (mais tempo para análise), em contra partida, valores grandes para tol , podem gerar respostas com erros significativos.

No procedimento *staggered*, para solução dos problemas isolados, deve-se levar em conta todos os comentários a respeito dos métodos de solução de sistemas de equações apresentados no item sobre o procedimento totalmente acoplado, além dos apontamentos referentes à solução do problema não linear global. Por exemplo, ao se resolver o problema com fluxo bifásico com o

procedimento *staggered* é possível utilizar o método *BFGS* para solução da equação de equilíbrio. Já, para solução totalmente acoplada, devido a não simetria, esse método não pode ser empregado.

5

Exemplos de análise determinística

5.1. Introdução

Para validação dos modelos numéricos determinísticos e comparações entre os procedimentos de solução, são efetuadas análises de quatro exemplos. O primeiro exemplo refere-se ao adensamento unidimensional e trata por sua vez do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico com comportamento elástico linear. A simplicidade desse problema leva a uma solução analítica também simples, descrita por Detournay e Cheng (1993) e amplamente difundida e utilizada para validação do problema de acoplamento em questão. O segundo exemplo trata do mesmo problema de acoplamento, entretanto para o caso específico de poço de petróleo. Para esse problema a solução analítica proposta por Detournay e Cheng (1988), utilizada para comparações, não é simples e bem estabelecida como no problema de adensamento unidimensional, mas é também muito utilizada. O detalhamento dessa solução não é apresentado, sendo o mesmo encontrado na referência citada ou em outros trabalhos como no de Silvestre (2004). Os resultados e os dados desse exemplo serão empregados para comparações nos capítulos subsequentes desse trabalho. Esse exemplo será utilizado para efetuar algumas comparações a cerca dos procedimentos de solução dos problemas de acoplamento fluido mecânico. O terceiro exemplo apresentado refere-se ao problema de fluxo bifásico unidimensional (coluna de solo rígida). Uma solução analítica desse problema é sugerida por McWhorter e Sunada (1990) e utilizada na validação dos resultados numéricos obtidos por Kueper e Frind (1991). No presente trabalho a solução analítica proposta por McWhorter e Sunada (1990) não é detalhada, utilizando-se para as comparações, os resultados analíticos obtidos com essa solução, apresentados por Kueper e Frind (1991). A ausência de uma solução analítica bem estabelecida, para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico, faz com que não sejam

apresentados exemplos de validação desse problema. A análise de um problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico, exemplo 4 será apresentada para comparação dos procedimentos de solução desse tipo de problema. Nos exemplos analisados, onde se faz necessário, utiliza-se o método *L-BFGS*.

5.2. Exemplo 1: adensamento unidimensional

Considera-se uma coluna poroelástica de altura L , sobre uma base rígida e impermeável, Figura 5.1. Assume-se para o material a condição de isotropia e considera-se o meio poroso completamente saturado por um único fluido. Aplica-se no topo desta coluna, sob condições drenadas, um carregamento constante p^* . As condições de contorno para o modelo são: $\sigma_{xx} = p^* H(t)$, sendo $H(t)$ uma função delta de Dirac; $p = 0$ em $x = 0$; $u_x = 0$ e $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ em $x = L$.

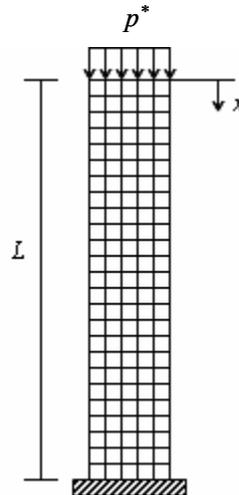


Figura 5.1 Coluna poroelástica.

Para a consideração de tensão constante, a equação da difusividade para pressão de poros é dada por:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (5.1)$$

$$c = \frac{2kG(1-\nu)(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu)^2(1-\nu_u)}$$

Sendo c o coeficiente de difusividade.

Na expressão anterior G é o módulo de elasticidade transversal, k é a permeabilidade do meio, ν e ν_u são os coeficientes de Poisson drenado e não drenado respectivamente e, α o coeficiente de Biot, que é expresso da seguinte forma:

$$\alpha = 1 - \frac{K_T}{K_s} \quad (5.2)$$

K_T é o módulo volumétrico de todo o esqueleto e K_s , dos grãos. O coeficiente de Poisson não drenado pode ser representado como:

$$\nu_u = \frac{3K_u - 2G}{2(3K_u + G)} \quad (5.3)$$

Onde K_u , módulo volumétrico não drenado, é obtido por:

$$K_u = K \left(1 + \frac{\alpha^2 K_\pi}{(1 - \alpha)(\alpha - \phi)K_\pi + \phi K} \right) \quad (5.4)$$

Sendo K_π o módulo volumétrico do fluido e ϕ a porosidade.

A pressão de poros gerada instantaneamente após o carregamento, p^u , é obtida com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} p^u &= \frac{\eta p^*}{GS} \\ \eta &= \frac{\alpha(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \\ S &= \frac{3\eta(1 - \nu_u)}{G\beta(1 + \nu_u)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Onde β representa o coeficiente de Skempton, obtido por:

$$\beta = \frac{\alpha K_\pi}{[\alpha - \phi(1 - \alpha)]K_\pi + \phi K} \quad (5.6)$$

Usualmente os campos de deslocamento e pressões são representados em termos da coordenada normalizada $\chi = \frac{x}{L}$ e do tempo adimensional $\tau = \frac{ct}{4L^2}$. A solução da equação (5.1), após aplicação das condições de contorno é expressa da seguinte forma:

$$p = \frac{\eta p^*}{GS} [1 - F_1(\chi, \tau)] \quad (5.7)$$

Com:

$$F_1(\chi, \tau) = 1 - \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi\chi}{2}\right) e^{(-m^2\pi^2\tau)} \quad (5.8)$$

Já, o deslocamento u_x pode ser expresso em duas parcelas, uma referente ao deslocamento elástico não drenado inicial, u_x^u , e outra dependente do tempo, Δu_x .

$$u_x^u = \frac{p^* L(1 - 2\nu_u)}{2G(1 - \nu_u)} (1 - \chi) \quad (5.9)$$

$$\Delta u_x = \frac{p^* L(\nu_u - \nu)}{2G(1 - \nu)(1 - \nu_u)} F_2(\chi, \tau)$$

Com:

$$F_2(\chi, \tau) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{8}{m^2\pi^2} \cos\left(\frac{m\pi\chi}{2}\right) \left(1 - e^{(-m^2\pi^2\tau)}\right) \quad (5.10)$$

No modelo numérico, para geração da malha de elementos finitos, utilizam-se elementos isoparamétricos de 4 nós (bi-lineares), com igual interpolação para deslocamentos e poro pressões ($\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_p$) e integração numérica com quadratura de Gauss de 2x2 pontos. Considera-se também para o modelo, estado plano de deformações e material com comportamento elástico linear. O incremento de tempo utilizado é de 1 segundo.

Os dados utilizados no exemplo de adensamento unidimensional são descritos na Tabela 5.1:

Tabela 5.1 Dados da coluna poroelástica

Parâmetros	Valor
G (MPa)	6000.00
ν	0.20
K_s (MPa)	36000.00
K_π (MPa)	2887.00
ϕ	0.19
k (m^2)	1.90E-13
μ_π (MPa s)	1.00E-9
p^* (MPa)	1.00
L (m)	7.0

As Figura 5.2 e Figura 5.3 apresentam os resultados obtidos para poro pressão na base da coluna ao longo do tempo e poro pressão ao longo da coluna para diferentes instantes. A Figura 5.4 mostra os resultados para os deslocamentos no topo da coluna ao longo do tempo. Verifica-se a concordância dos resultados obtidos pelos métodos numéricos com a solução analítica do problema. Salienta-se que os resultados numéricos obtidos com os procedimentos totalmente acoplado e *staggered* foram idênticos.

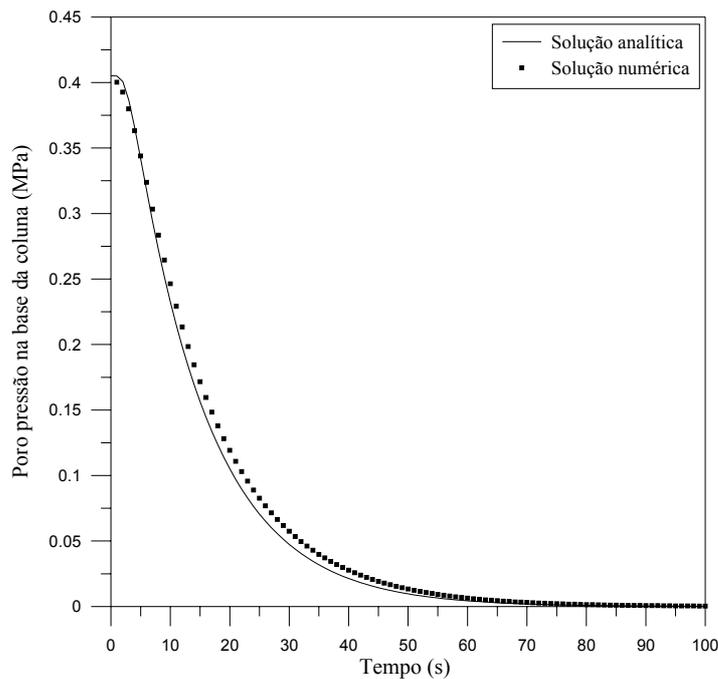


Figura 5.2 Poro pressão na base da coluna poroelástica

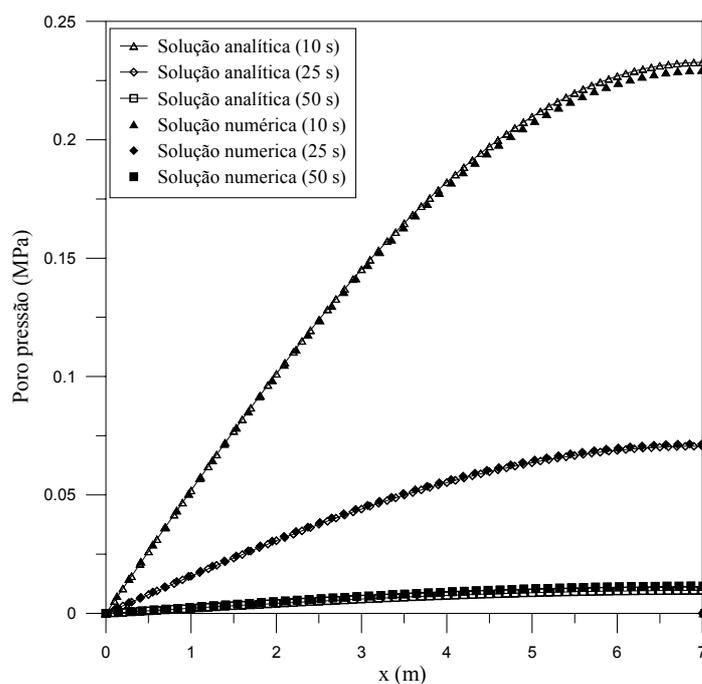


Figura 5.3 Poro pressão ao longo da coluna poroelástica

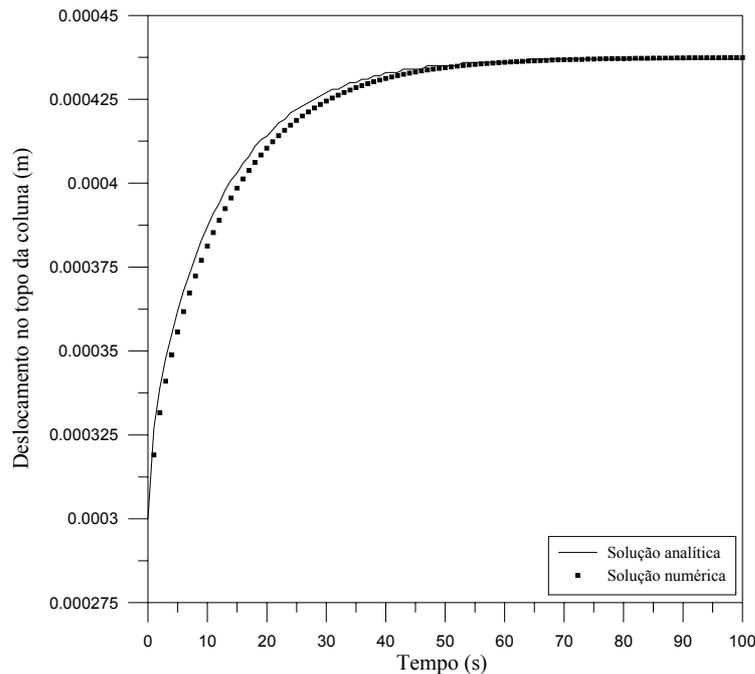


Figura 5.4 Deslocamento no topo da coluna poroelástica

5.3. Exemplo 2: poço vertical

Em continuidade a verificação dos resultados obtidos com os procedimentos numéricos sugeridos, faz-se a análise de um poço vertical. O material do meio poroso comporta-se segundo regime elástico linear, é considerado isotrópico e completamente saturado por um único fluido. O meio está submetido a um estado de tensões e poro pressões iniciais. O processo de perfuração do poço é modelado considerando que a escavação é realizada instantaneamente.

A solução analítica, proposta por Detournay e Cheng (1988), é utilizada para comparação dos resultados obtidos com a análise numérica. Na solução analítica as equações acopladas são resolvidas usando o espaço de transformada de Laplace, assumindo o estado de deformações planas para o plano perpendicular ao eixo do poço.

Para modelagem numérica do problema, utilizam-se elementos finitos isoparamétricos de 4 nós (bi-lineares), com igual interpolação para deslocamentos e poro pressões ($\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_p$), integração numérica com quadratura de Gauss de 2x2 pontos e a condição de estado plano de deformações. A malha de elementos finitos é composta 4800 elementos e 4960 nós. A Figura 5.5 mostra a malha de

elementos finitos utilizada na análise numérica. O detalhe apresentado nessa figura corresponde à região próxima ao poço. O ângulo β será utilizado como referência para apresentação de alguns resultados. O diâmetro do poço é de $0,20\text{ m}$ e os demais dados do problema apresentam-se na Tabela 5.2. Os resultados apresentados referem-se aos obtidos para um ângulo $\beta = 0^\circ$.

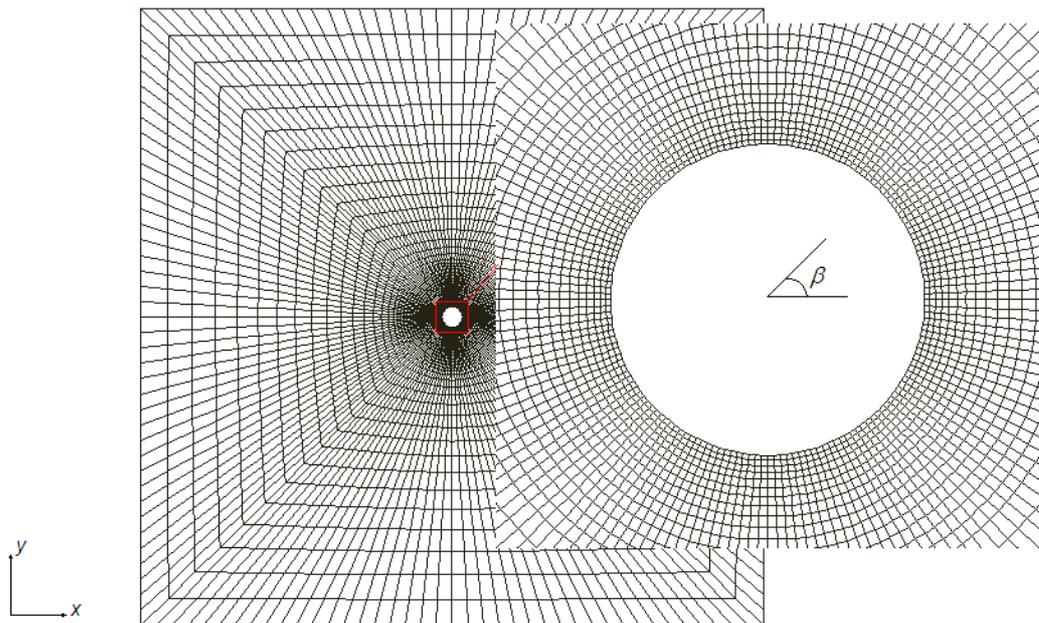


Figura 5.5 Malha de elementos finitos e detalhe do poço vertical

Tabela 5.2 Dados do poço vertical

Parâmetros	Valor
G (MPa)	6000.00
ν	0.20
K_s (MPa)	38000.00
K_π (MPa)	2884.00
ϕ	0.19
k (m^2)	$1.90\text{E-}15$
μ_π (MPa s)	$1.00\text{E-}9$
$\sigma_{0_{xx}}$ (MPa)	-30.00
$\sigma_{0_{yy}}$ (MPa)	-50.00
p_0 (MPa)	15.00

Na Figura 5.6 a distribuição de poro pressões corresponde aos resultados obtidos com as análises numérica e analítica para diferentes instantes. Verificam-se com essas respostas resultados muito semelhantes.

Similarmente, na Figura 5.7 a distribuição de tensão total σ_{yy} , no instante 10 segundos é apresentada. Os resultados obtidos nesse caso também são bastante semelhantes. Esse mesmo comportamento se verifica em para outros tempos de análise.

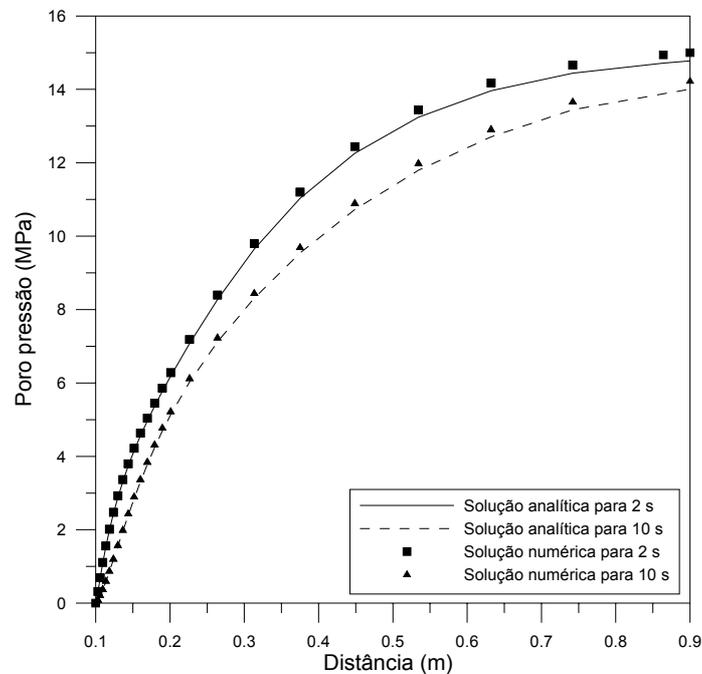


Figura 5.6 Poro pressões, solução analítica x solução numérica

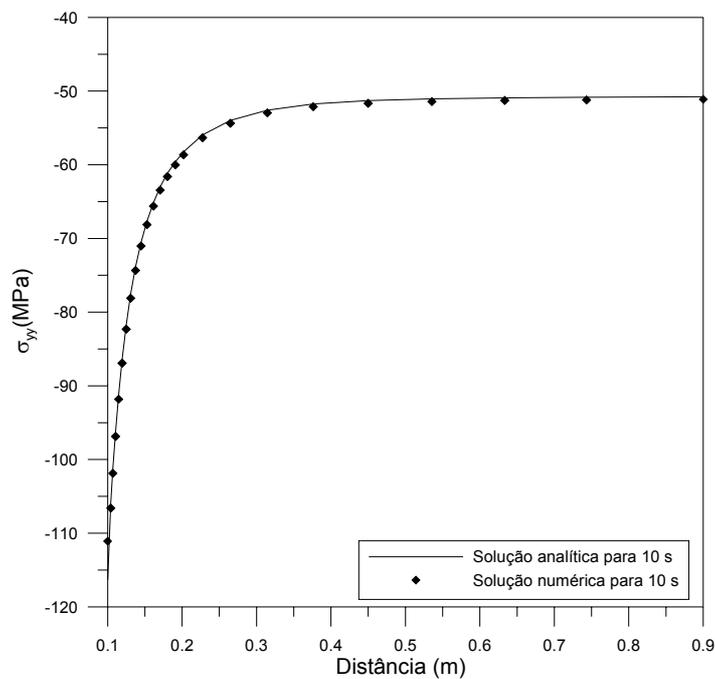


Figura 5.7 Tensão total σ_{yy} , solução analítica x solução numérica

5.3.1. Comparação entre os procedimentos de solução

No capítulo anterior citou-se que, embora as respostas obtidas com os procedimentos de solução, totalmente acoplado e *staggered* sejam semelhantes, o tempo para análise, requerido por cada procedimento, pode ser distinto. Essas diferenças são geradas por diversos fatores, como número de equações a serem resolvidas e número de vezes que serão resolvidas nos procedimentos iterativos para solução dos problemas não lineares, entre outros.

Considerando-se o fato do procedimento de solução totalmente acoplado ser comprovadamente mais eficiente para solução dos problemas lineares, faz-se a análise do exemplo 2 considerando o material com comportamento elástico perfeitamente plástico condicionado ao critério de Mohr Coulomb. O ângulo de atrito Φ assumido é igual a 30^0 e a coesão igual a 10 (MPa). Para se avaliar o comportamento dos procedimentos para diferentes níveis de não linearidade, consideram-se 3 diferentes valores de pressão interna PI , aplicadas na parede do poço. Para uma pressão interna igual a 5 (MPa) tem-se uma região plastificada relativamente grande, sendo essa região muito inferior para uma pressão interna de 20 (MPa) e nula (problema linear) para uma pressão interna de 35 (MPa). A Figura 5.8 mostra a região plastificada para os dois primeiros casos após 60 segundos de análise.

Para efetuar uma comparação dos resultados obtidos para números diferentes de equações a serem resolvidas, adota-se para um primeiro caso (caso A), 14880 graus de liberdade (Ngl) e para um segundo caso (caso B) 7533 graus de liberdade. Nas tabelas seguintes (Tabela 5.3 e Tabela 5.4) apresentam-se os valores obtidos para o tempo relativo de análise desses problemas.

Tabela 5.3 Procedimento e tempo relativo de análise para o caso A

Caso	PI (MPa)	Procedimento e tempo relativo de análise	
		Totalmente acoplado	<i>staggered</i>
A	5	1.00	0.83
	20	0.60	0.58
	35	0.11	0.34

Tabela 5.4 Procedimento e tempo relativo de análise para o caso B

Caso	PI (MPa)	Procedimento e tempo relativo de análise	
		Totalmente acoplado	<i>staggered</i>
B	5	1.00	0.87
	20	0.56	0.59
	35	0.08	0.33

Com base nos resultados apresentados constata-se que o procedimento *staggered* mostra-se mais eficiente para a condição de não linearidade mais acentuada. Uma redução considerável no tempo de análise foi obtida com esse procedimento, sendo essa redução mais significativa para o problema com um número de graus de liberdade maior. Para uma pressão interna de 20 (MPa) o tempo de análise requerido pelos dois procedimentos de análise foi muito semelhante. O tempo necessário com o procedimento *staggered* no problema com 14880 graus de liberdade foi ligeiramente inferior ao necessário pelo procedimento totalmente acoplado. No problema com 7533 graus de liberdade o tempo de análise do procedimento *staggered* foi um pouco superior ao verificado com o procedimento totalmente acoplado. Já, no último caso (problema linear), confirmando a afirmativa exposta anteriormente, o procedimento totalmente acoplado mostrou-se muito mais eficiente para solução do problema.

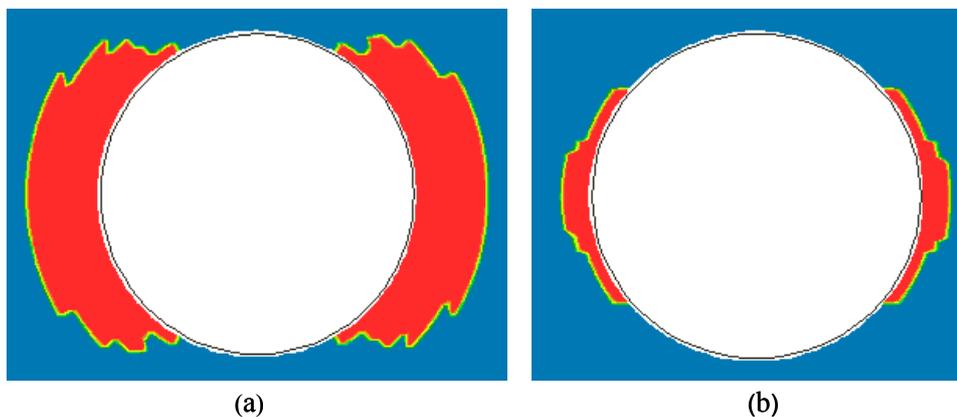


Figura 5.8 Região plastificada para PI =5 (MPa) (a) e PI =20 (MPa) (b)

Com base nos resultados obtidos no decorrer desse trabalho, se verificou que geralmente, em problemas não lineares, o procedimento *staggered* apresenta-se mais eficiente que o procedimento totalmente acoplado. Essa eficiência tende a crescer à medida que o número de graus de liberdade e as não linearidades dos problemas crescem.

5.4.Exemplo 3: fluxo bifásico unidimensional

Considera-se uma coluna de solo rígida, Figura 5.9, na qual se injeta um fluido não molhante em uma de suas extremidades. A coluna de solo está submetida a uma condição inicial de $S_w = 1$ e as seguintes condições de contorno: $S_w = 0.525$ para $x = 0m$ e $t > 0$; $p_w = 0$ para $x = 10m$ e $t > 0$.



Figura 5.9 Coluna de solo sob fluxo bifásico

Na Tabela 5.5, apresenta-se os dados do problema. O modelo de Brooks e Corey (1964) é utilizado para descrição da curva $P_c - S_w$. O tempo total de análise é de 900000 segundos e as comparações dos resultados obtidos para a saturação da fase molhante em diferentes instantes apresentam-se na Figura 5.10.

No modelo numérico, para geração da malha de elementos finitos, utilizam-se 320 elementos isoparamétricos de 4 nós (bi-lineares), distribuídos uniformemente, com integração numérica com quadratura de Gauss de 2x2 pontos.

Tabela 5.5 Dados da coluna de solo sob fluxo bifásico

Variáveis	Valor
S_{rw}	0.05
S_{rmw}	0.00
β	2.00
P_d (Pa)	2000.00
ϕ	0.35
k (m^2)	5.0×10^{-11}
μ_w (Pa s)	1.0×10^{-3}
μ_{mw} (Pa s)	0.5×10^{-3}

Verifica-se através da Figura 5.10 que bons resultados foram obtidos com os procedimentos propostos nesse trabalho. A ligeira diferença entre os resultados

numéricos e analíticos é aceitável e comumente encontrada quando se emprega o método de elementos finitos.

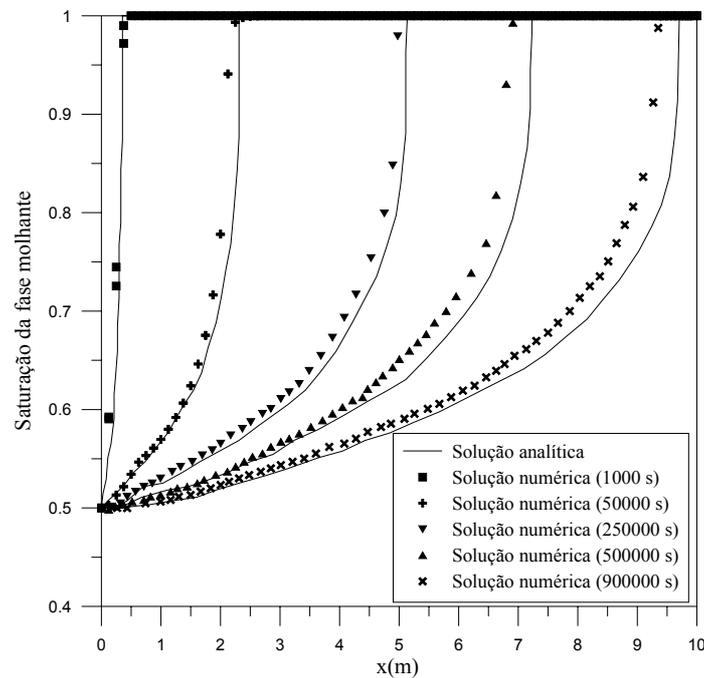


Figura 5.10 Saturação da fase molhante na coluna ao longo do tempo

Salienta-se que soluções analíticas bem estabelecidas para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico são de grande importância. Essas soluções proporcionariam condições para comparação entre resultados analíticos e numéricos. Nesse trabalho, considerando-se que bons resultados são obtidos na solução de problemas de fluxo bifásico e também na solução de problemas mecânicos, assume-se que o acoplamento dessas soluções como apresentado anteriormente também irá gerar bons resultados.

5.5. Exemplo 4: acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico

Para avaliação do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico, analisa-se um poço horizontal durante a fase de produção. O meio a ser analisado é constituído por 3 materiais diferentes, conforme esquema apresentado no primeiro capítulo desse trabalho. O diâmetro do poço é de 0.17 m , o revestimento possui espessura de 0.008 m e o gravel uma espessura de 0.031 m . Considera-se para o revestimento o critério de Von Mises e para o meio poroso

(gravel e formação) o critério de Mohr Coulomb na condição de plasticidade perfeita. Os dados utilizados para descrição do modelo numérico apresentam-se na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 Dados do poço horizontal

	Variáveis	Valor
Revestimento	E (MPa)	2.0E5
	σ_y (MPa)	758.00
	ν	0.29
Gravel	G (MPa)	8334.00
	ν	0.20
	c (MPa)	2.00
	Φ (graus)	30.00
	k (m ²)	6.9E-14
Formação	G (MPa)	17500.00
	ν	0.20
	c (MPa)	5.00
	Φ (graus)	30.00
	k (m ²)	6.9E-15
	P_d (MPa)	5.00
	ϕ	0.19
	β	2.00
	μ_w (MPa s)	0.4E-9
	μ_{nw} (MPa s)	1.0E-9
	K_s (MPa)	38000.00
	K_π (MPa)	2884.00

Como condição inicial do problema, considera-se que o meio poroso está completo por um fluido não molhante com pressão $p_{m_0} = 36$ (MPa) e sob um estado de tensões de -65 (MPa) e -40 (MPa) respectivamente para $\sigma_{0,yy}$ e $\sigma_{0,xx}$. Impõem-se para $t \geq 0$, a uma distância de 3 m do poço, $S_w = 0.60$, $p_{nw} = p_{m_0}$ e no poço uma pressão de fluido não molhante $p_{nw} = 30$ (MPa).

Para modelagem numérica do problema, utilizam-se elementos finitos isoparamétricos de 4 nós (bi-lineares), com igual interpolação para deslocamentos e poro pressões ($\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_p$), integração numérica com quadratura de Gauss de 2x2 pontos e a condição de estado plano de deformações. A malha de elementos finitos é composta 2560 elementos e 2640 nós. A Figura 5.11 mostra a malha de elementos finitos utilizada na análise numérica. O detalhe apresentado nessa

figura representa além da malha, a distribuição dos materiais na região próxima ao poço. Os pontos A e B serão utilizados posteriormente para apresentação de alguns resultados.

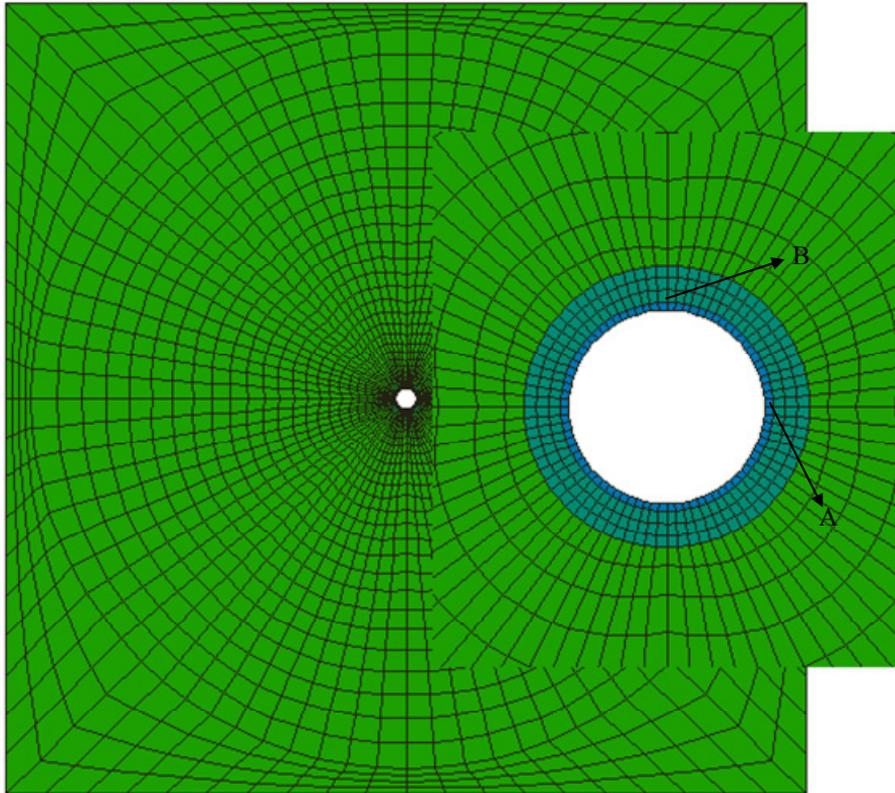


Figura 5.11 Malha de elementos finitos e detalhe do poço horizontal

5.5.1. Comparação entre os procedimentos de solução

A fim de avaliar alguns aspectos a respeito dos procedimentos de solução do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico, analisa-se o exemplo descrito no item anterior, com os procedimentos de solução totalmente acoplado e *staggered*. Além de analisar o problema para a malha de elementos finitos, com 10560 graus de liberdade, apresentada na Figura 5.11 (caso A), também se analisa o problema para uma malha com 5412 graus de liberdade, 1280 elementos e 1353 nós (caso B). Além disso, utilizam-se dois incrementos de tempo distintos para análise. Os incrementos de tempo da segunda metade da análise são 50% superiores aos utilizados na primeira metade. Ainda que o exemplo não seja utilizado nesse momento para quantificar as repostas obtidas é importante ressaltar que uma região considerável do gravel e da formação se

plastifica, ou seja, as não linearidades apresentam-se tanto no problema mecânico quanto no problema de fluxo bifásico.

Na Figura 5.12, onde T_{total} e P_{total} são respectivamente o tempo total de análise e o número total de passos de tempo, apresentam-se os resultados obtidos. Verifica-se com esses resultados, que o procedimento de solução *staggered* apresentou um melhor desempenho para análise desse exemplo. Nota-se que a diferença relativa entre os dois procedimentos cresceu quando se aumentou o tamanho do problema.

Verifica-se, em relação à utilização de incrementos de tempo distintos, que o comportamento das soluções foi ligeiramente diferente. Para o caso B, a adoção de um incremento de tempo maior não afetou de maneira significativa o tempo de análise, sendo isso também verificado para o caso A, para uma análise com o procedimento totalmente acoplado. Entretanto, para o caso A com o procedimento *staggered* se verificou um suave decréscimo no tempo de análise.

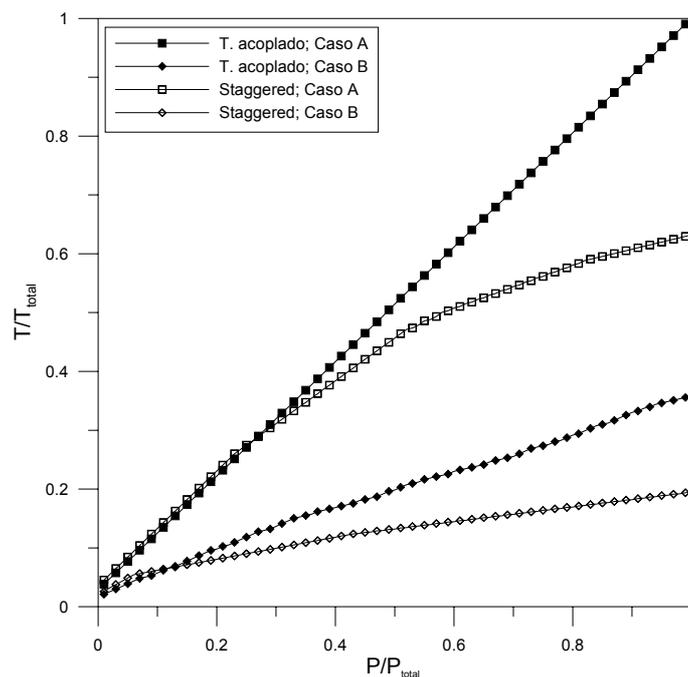


Figura 5.12 Tempo relativo de análise para os procedimentos de solução

Assim como relatado para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico, o procedimento de solução *staggered* mostra-se como uma alternativa eficiente para solução do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico. Essa tendência se verificou para uma série de análises

efetuadas no decorrer desse trabalho. Não se descarta porém, que o procedimento totalmente acoplado pode se mostrar mais eficiente, dependendo das características do problema.

Além da questão referente ao tempo de análise, outro aspecto importante, mencionado anteriormente, refere-se à vantagem de utilização do procedimento *staggered* quando se deseja analisar problemas com condições de contorno mais complexas, que podem ser descritas com maior facilidade quando os problemas mecânico e de fluxo são resolvidos de forma particionada.

6

Formulação probabilística para problemas de acoplamento fluido mecânico

6.1. Introdução

Nesse capítulo do trabalho apresenta-se a formulação probabilística para problemas de acoplamento fluido mecânico. Num primeiro momento são descritos alguns conceitos básicos da probabilidade e estatística. Apresentam-se algumas funções de covariância utilizadas nesse trabalho e alguns métodos de geração de campos aleatórios. A seguir, apresentam-se alguns métodos de análise probabilística, descrevendo suas particularidades. Esses métodos são descritos de forma geral podendo ser empregados tanto para solução de problemas com fluxo monofásico quanto para problemas com fluxo bifásico. Após essa parte do capítulo descrevem-se alguns itens referentes à análise de confiabilidade: determinação da probabilidade de plastificação de uma determinada região; descrição de funções de falha e avaliação da probabilidade de perda de estabilidade de poços de petróleo na fase de perfuração; avaliação automática da pressão interna para se evitar problemas de perda de estabilidade previamente estabelecidos.

6.2. Alguns fundamentos da probabilidade e da estatística

Nesse item apresentam-se alguns conceitos da probabilidade e da estatística, imprescindíveis ao entendimento e ao desenvolvimento da formulação probabilística para problemas de acoplamento fluido mecânico. Os conceitos são apresentados para funções $f_i(r_j(\mathbf{x}_k))$, que na análise probabilística podem ser identificadas, como sendo, as respostas em poro pressões, saturações, deslocamentos e tensões.

As funções f_i são dependentes das variáveis aleatórias r_j (módulo de elasticidade, permeabilidade, coesão, entre outras) que por sua vez dependem do vetor posição no espaço cartesiano \mathbf{x}_k .

6.2.1. Algumas hipóteses consideradas para as variáveis aleatórias

Seja uma região D , onde em certas posições, \mathbf{x}_k , foram extraídas amostras e feitas medidas de variáveis de interesse. Destas amostras, resulta um conjunto de dados espacialmente distribuídos, ou seja, medidas de um atributo $r_j(\mathbf{x})$. As coordenadas \mathbf{x}_k permitem o cálculo de distâncias (euclidianas) entre os pontos observados. Para cada ponto amostrado tem-se uma variável aleatória r_j distinta.

Observa-se que o resultado da amostragem para cada variável aleatória é composto de uma única realização em cada ponto, o que torna impossível qualquer tipo de inferência sobre este processo. Isso faz com que algum tipo de estacionariedade, condizente com o problema em questão, seja assumida, de forma a possibilitar a estimação ao menos dos dois primeiros momentos da distribuição da variável aleatória, que em geral estão relacionados com as propriedades de interesse, tais como: média, correlação, covariância e semivariância.

Segundo Calvete e Ramirez (1990) e Gelhar (1993) uma variável aleatória $r_j(\mathbf{x}_k)$ possui estacionariedade se sua lei espacial é invariante à translação, isto é $r_j(\mathbf{x}_k)$ e $r_j(\mathbf{x}_k + \xi)$ tem a mesma lei de distribuição independente da distância $|\xi|$. Para hipótese de estacionariedade de segunda ordem isotrópica admite-se que a covariância entre os pares $r_j(\mathbf{x}_k)$ e $r_j(\mathbf{x}_k + \xi)$, separados por uma distância $|\xi|$, existe e depende somente de $|\xi|$. Para o caso anisotrópico admite-se que a covariância depende também da direção de ξ .

6.2.2. Fundamentos da probabilidade e da estatística para funções de variáveis aleatórias

6.2.2.1. Média de funções de variáveis aleatórias

A média (primeiro momento) para funções de variáveis aleatórias $f_i(r_j(\mathbf{x}_k))$ é obtida calculando-se a esperança da função.

$$\bar{f}_i(r_j(\mathbf{x}_k)) = E\langle f_i(r_j(\mathbf{x}_k)) \rangle = \int_{r_j(\mathbf{x}_k)=-\infty}^{+\infty} f_i(r_j(\mathbf{x}_k)) \mathfrak{g}(r_j(\mathbf{x}_k)) dr_j(\mathbf{x}_k) \quad (6.1)$$

Onde $\mathfrak{g}(r_j(\mathbf{x}_k))$ é uma função densidade de probabilidade.

6.2.2.2. Covariância de funções de variáveis aleatórias

A covariância (segundo momento) de funções de variáveis aleatórias $f_{i,l}(r_{j,m}(\mathbf{x}_{k,n}))$ é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Cov(f_i(r_j(\mathbf{x}_k)), f_l(r_m(\mathbf{x}_n))) &= \int_{r_j(\mathbf{x}_k)=-\infty}^{+\infty} \int_{r_m(\mathbf{x}_n)=-\infty}^{+\infty} \left(f_i(r_j(\mathbf{x}_k)) - \bar{f}_i(r_j(\mathbf{x}_k)) \right) \\ &\left(f_l(r_m(\mathbf{x}_n)) - \bar{f}_l(r_m(\mathbf{x}_n)) \right) \mathfrak{g}(r_j(\mathbf{x}_k), r_m(\mathbf{x}_n)) dr_j(\mathbf{x}_k) dr_m(\mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (6.2)$$

A Variância de funções de variáveis aleatórias $f_i(r_j(\mathbf{x}_k))$ é um caso particular da covariância. Calcula-se a variância de funções de variáveis aleatórias $f_i(r_j(\mathbf{x}_k))$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Var(f_i(r_j(\mathbf{x}_k))) &= Cov(f_i(r_j(\mathbf{x}_k)), f_i(r_j(\mathbf{x}_k))) \equiv \\ &\int_{r_j(\mathbf{x}_k)=-\infty}^{+\infty} \left(f_i(r_j(\mathbf{x}_k)) - \bar{f}_i(r_j(\mathbf{x}_k)) \right)^2 \mathfrak{g}(r_j(\mathbf{x}_k)) dr_j(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.2.2.3. Desvio padrão de funções de variáveis aleatórias

Assim como para variáveis aleatórias $r_j(\mathbf{x}_k)$, o desvio padrão de funções de variáveis aleatórias $f_i(r_j(\mathbf{x}_k))$ é igual raiz quadrada da variância.

$$s(f_i(r_j(\mathbf{x}_k))) = +\sqrt{Var(f_i(r_j(\mathbf{x}_k)))} \quad (6.4)$$

6.2.2.4. Coeficiente de correlação de funções de variáveis aleatórias

O coeficiente de correlação é dado por

$$\rho(f_i(r_j(\mathbf{x}_k)), f_l(r_m(\mathbf{x}_n))) = \frac{\text{Cov}(f_i(r_j(\mathbf{x}_k)), f_l(r_m(\mathbf{x}_n)))}{s(f_i(r_j(\mathbf{x}_k)))s(f_l(r_m(\mathbf{x}_n)))} \quad (6.5)$$

6.2.3. Funções de covariância

As funções de covariância C_{rr} mais comuns e utilizadas com maior frequência são expressas em função das distâncias de separação (comprimento de correlação). Além desses modelos, empregam-se também funções do tipo potência, que não são descritas em função de comprimentos de correlação. Nos itens seguintes apresentam-se os principais modelos expostos por Rubin (2003). As funções são descritas considerando duas localizações \mathbf{x}_k e $\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\xi}$ com $\boldsymbol{\xi} = \xi_i, i = 1, 2, 3$. Após a descrição dessas funções apresenta-se o modelo de potência.

6.2.3.1. Função de covariância exponencial

$$C_{rr} = s^2 \exp(-h) \quad (6.6)$$

$$h = \left| \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\xi_i}{\lambda_i} \right)^2} \right|$$

Onde $\lambda_i > 0$ é o comprimento de correlação na direção i .

6.2.3.2. Função de covariância gaussiana

$$C_{rr} = s^2 \exp(-h^2) \quad (6.7)$$

6.2.3.3. Função de covariância esférica

$$C_{rr} = s^2(1 - 3h/2 + h^3/2); h \leq 1$$

$$C_{rr} = 0, h > 1$$
(6.8)

6.2.3.4. Função de covariância potência

A descrição da covariância pela lei de potência é geralmente utilizada quando se deseja representar a variabilidade em diversas escalas (fractal ou auto-similar). A lei de potência pode ser dada da seguinte maneira

$$C_{rr} = s^2|\xi|^H, H < 0$$
(6.9)

Onde H é o expoente de Hurst. O expoente de Hurst quantifica a importância das heterogeneidades nas grandes ou pequenas escalas de comprimento. As escalas pequenas são caracterizadas por valores pequenos de H , enquanto as grandes escalas caracterizam-se com valores grandes de H . Para o caso de $H = -\infty$, obtém-se o caso de variáveis independentes. Verifica-se que para distâncias próximas a zero o modelo de potência apresenta singularidades. Essa característica geralmente leva à necessidade de métodos especiais para geração de campos aleatórios, sendo esse problema resolvido parcialmente quando se utiliza uma malha de elementos finitos para geração dos campos aleatórios. De qualquer forma, é um aspecto a ser considerado quando se utiliza esse modelo. Glimm *et al* (1993) apresentam alguns comentários a respeito da utilização desse modelo para representação da variabilidade espacial de propriedades hidráulicas.

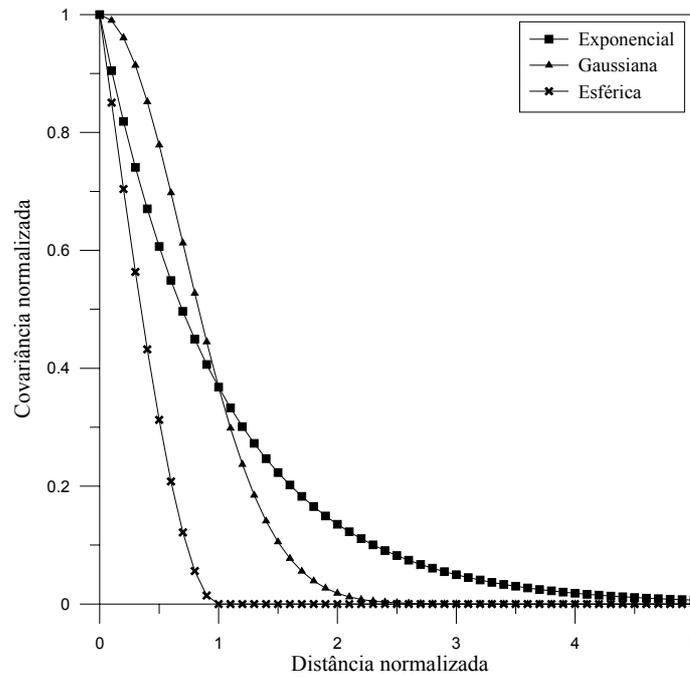


Figura 6.1 Funções de covariância com comprimento de correlação

6.2.4. Geração de variáveis aleatórias independentes

De forma geral, a obtenção de variáveis aleatórias independentes se dá em duas etapas. Primeiro faz-se a geração dessas variáveis aleatórias para uma função densidade de probabilidade uniforme com intervalo entre 0 e 1. Após, transformam-se essas variáveis em novas variáveis aleatórias correspondentes a uma nova função de densidade.

Considerando-se $v_j(\mathbf{x}_k)$ uma variável aleatória para uma função densidade de probabilidade uniforme numa posição \mathbf{x}_k e $z_j(\mathbf{x}_k)$ uma variável aleatória para uma nova função densidade de probabilidade $\mathcal{G}(z_j(\mathbf{x}_k))$ na mesma posição \mathbf{x}_k , obtém-se a relação entre as duas variáveis resolvendo o seguinte problema

$$P(Z = z_j(\mathbf{x}_k)) = \int_{-\infty}^{z_j(\mathbf{x}_k)} \mathcal{G}(z_j(\mathbf{x}_k)) dz_j(\mathbf{x}_k) = v_j(\mathbf{x}_k) \quad (6.10)$$

Sendo $P(Z = z_j(\mathbf{x}_k))$ uma função cumulativa de probabilidade.

6.2.4.1. Hipercubo latino

A idéia inicial de amostragem segundo o hipercubo latino foi proposta por Mckay *et al* (1979) *apud* Olsson *et al* (2003). O hipercubo latino é uma ferramenta que busca melhorar a eficiência do método de Monte Carlo (apresentado a seguir) através da geração de variáveis aleatórias melhor distribuídas no espaço possível das variáveis aleatórias.

Considerando ser m o número de simulações realizadas no método de Monte Carlo e k o número de variáveis aleatórias (o espaço das variáveis aleatórias possui dimensão k), descreve-se uma matriz P_{mk} onde cada coluna k é constituída por uma permutação aleatória de $1,2,3\dots m$, e uma matriz R_{mk} formada por números aleatórios distribuídos uniformemente entre 0 e 1. Essas matrizes formam o espaço básico das variáveis aleatórias, representado por

$$\mathbf{S} = \frac{1}{m}(\mathbf{P} - \mathbf{R}) \quad (6.11)$$

Uma aplicação ilustrativa do hipercubo latino pode ser apresentada para um problema com duas variáveis aleatórias e cinco simulações.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,62 & 0,47 \\ 0,27 & 0,11 \\ 0,69 & 0,51 \\ 0,32 & 0,58 \\ 0,83 & 0,42 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0,076 & 0,306 \\ 0,346 & 0,778 \\ 0,462 & 0,498 \\ 0,736 & 0,084 \\ 0,834 & 0,916 \end{bmatrix}$$

Na Figura 6.2 pode-se visualizar, no espaço das variáveis, a distribuição original e a distribuição das variáveis após a aplicação do hipercubo latino. Nota-se na distribuição original das variáveis que estas ocupam uma região bastante reduzida do espaço das variáveis, sobretudo a variável 2. Após a aplicação do hipercubo latino as variáveis apresentam uma distribuição mais ampla, ocupando todo o espaço possível das variáveis aleatórias. Entende-se, que uma melhor distribuição das variáveis, pode proporcionar uma redução no número total de simulação a serem efetuadas nos métodos de simulação.

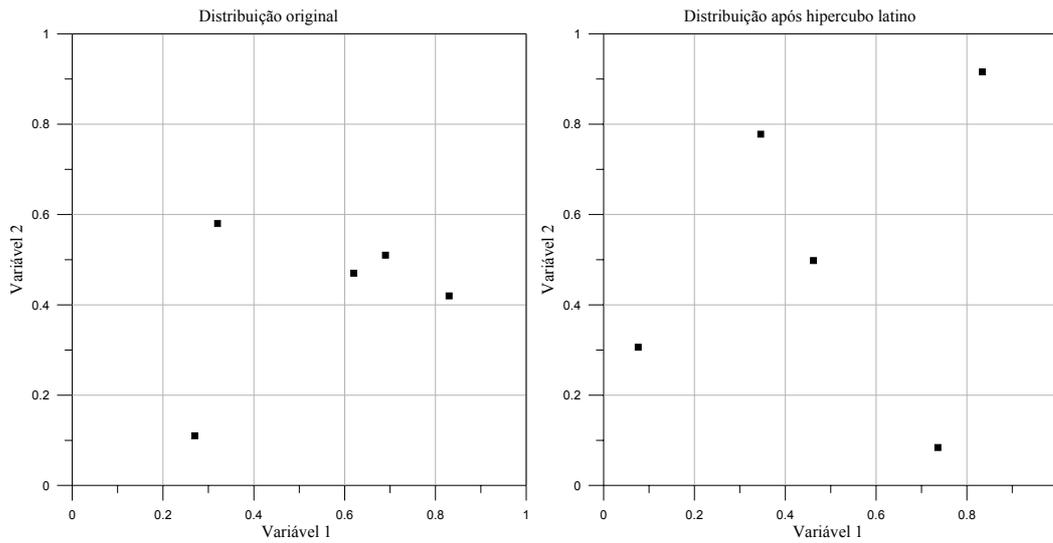


Figura 6.2 Hipercubo latino (ilustração)

6.2.5. Funções densidade de probabilidade e transformação de variáveis

Apresentam-se nesse item as funções densidade de probabilidade utilizadas nesse trabalho. Alguns apontamentos sobre transformação de variáveis também são descritos.

A função densidade de probabilidade normal para uma variável aleatória r_j numa posição (\mathbf{x}_k) é descrita como

$$g(r_j(\mathbf{x}_k)) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{r_j(\mathbf{x}_k) - \bar{r}_j(\mathbf{x}_k)}{s}\right)^2\right\} \quad (6.12)$$

Sendo s o desvio padrão da variável aleatória $r_j(\mathbf{x}_k)$.

A função densidade de probabilidade lognormal é descrita como

$$g(r_j(\mathbf{x}_k)) = \frac{1}{\varsigma r_j(\mathbf{x}_k)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(r_j(\mathbf{x}_k)) - \lambda}{\varsigma}\right)^2\right\} \quad (6.13)$$

Onde λ é o valor esperado de $\ln(r_j(\mathbf{x}_k))$ e ς é o desvio padrão de $\ln(r_j(\mathbf{x}_k))$.

Para transformação de uma variável aleatória $r_j^{LN}(\mathbf{x}_k)$ lognormal em uma variável aleatória normal equivalente $r_j^N(\mathbf{x}_k)$ são suficientes as seguintes relações

$$\bar{r}_j^N(\mathbf{x}_k) = \bar{r}_j^{LN}(\mathbf{x}_k)[1 - \ln(\bar{r}_j^{LN}(\mathbf{x}_k)) + \lambda] \quad (6.14)$$

$$s^N = r_j^{-LN}(\mathbf{x}_k)\zeta, \text{ com:}$$

$$\zeta = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{s^{LN^2}}{r_j^{-LN}(\mathbf{x}_k)^2}\right)}, \text{ e:}$$

$$\lambda = \ln(r_j^{-LN}(\mathbf{x}_k)) - \frac{1}{2}\zeta^2$$

Essas transformações são importantes nesse trabalho, uma vez que, para geração de campos aleatórios, consideram-se variáveis do tipo normal.

De acordo com Melcher (1999), ao se trabalhar com variáveis aleatórias correlacionadas que apresentem distribuições diferentes é necessária uma correção dos valores dos coeficientes de correlação quando da transformação dessas variáveis em normais equivalentes. Essa correção é efetuada por um fator \mathbb{F} dependente somente do coeficiente de correlação e dos coeficientes de variação das variáveis aleatórias envolvidas. Kiureghian e Liu (1986), *apud* Melcher (1999), desenvolveram expressões analíticas para determinação do fator \mathbb{F} .

Para uma variável aleatória normal $r_j^N(\mathbf{x}_k)$ e uma variável aleatória lognormal $r_j^{LN}(\mathbf{x}_k)$, tem-se:

$$\mathbb{F} = v_i / [\ln(1 + Cv_i^2)]^{1/2} \quad (6.15)$$

Onde Cv_i é o coeficiente de variação de $r_j^N(\mathbf{x}_k)$.

Para duas variáveis aleatórias lognormais $r_j^{LN}(\mathbf{x}_k)$ e $r_l^{LN}(\mathbf{x}_k)$, tem-se:

$$\mathbb{F} = \ln(1 + \rho Cv_i Cv_l) / \left[\rho \sqrt{\ln(1 + Cv_i^2) \ln(1 + Cv_l^2)} \right] \quad (6.16)$$

Sendo ρ o coeficiente de correlação.

6.2.6. Geração de campos aleatórios

Segundo Zhang (2002) os métodos mais utilizados para geração de campos aleatórios são: método de decomposição, método das bandas e o método espectral. O método de decomposição gera campos aleatórios correlacionados. Os dois últimos métodos geram campos aleatórios independentes, sendo necessário um tratamento posterior para obtenção de campos aleatórios correlacionados. Uma

breve descrição desses métodos é apresentada nos itens seguintes. De acordo com Borges *et al* (2004) e Frias *et al* (2004), além desses, outros métodos, como os métodos da convolução e da soma sucessiva de campos gaussianos independentes, podem ser utilizados para geração de campos aleatórios, em especial para campos aleatórios fractais.

6.2.6.1. Método de decomposição

O método de decomposição é assim chamado pois utiliza uma matriz triangular superior \mathbf{L} (matriz de transformação), gerada a partir de uma decomposição de Choleski da matriz de covariância das variáveis aleatórias \mathbf{C}_{rr} .

$$\mathbf{C}_{rr} = \mathbf{L}\mathbf{C}_d\mathbf{L}^T \quad (6.17)$$

\mathbf{C}_d é uma matriz diagonal.

O campo aleatório correlacionado \mathbf{y} é obtido com

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}\mathbf{z} \quad (6.18)$$

Sendo \mathbf{z} um vetor de variáveis aleatórias independentes.

A propriedade apresentada em (6.18) é bastante interessante, dado que gera campos aleatórios correlacionados sendo necessário se conhecer apenas a matriz de covariância da variáveis aleatórias. Por exemplo, pode se considerar a correlação entre o módulo de elasticidade e a coesão de um material.

Conforme Bruining *et al.* (1997), alguns cuidados devem ser tomados quando se utiliza o método de decomposição para geração de campos aleatórios com leis de potência.

6.2.6.2. Método das bandas

O método das bandas, Calvete e Ramirez (1990), consiste em gerar campos aleatórios unidimensionais ao longo de linhas distribuídas uniformemente no espaço. A função de covariância ao longo dessas linhas se deriva da função de covariância no espaço original. A partir das simulações em cada linha, a simulação de um ponto arbitrário é obtida pelo somatório das projeções do referido ponto sobre as linhas. Os campos aleatórios gerados nesse método são

independentes. Para a obtenção de campos correlacionados aplica-se a condição apresentada em (6.18).

A principal vantagem do método das bandas está no fato de ser necessário somente a geração de campos aleatórios unidimensionais. Entre as desvantagens, cabe destacar, que a obtenção da função de covariância unidimensional pode não ser trivial e que a escolha da orientação das linhas apresenta algumas dificuldades no caso tridimensional. Entretanto, para esse trabalho, a maior desvantagem apresentada pelo método das bandas refere-se ao fato de gerar campos aleatórios independentes.

6.2.6.3. Método espectral

Os métodos espectrais se baseiam na representação espectral de um processo aleatório. Todo processo aleatório estacionário $f(\mathbf{x})$ pode ser representado em termos de um processo aleatório complexo $Z_f(\mathbf{k})$ mediante a seguinte integral de Fourier-Stieltjes

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} dZ_f(\mathbf{k}) \quad (6.19)$$

Sendo \mathbf{x} o vetor posição, \mathbf{k} o vetor de número de ondas com componentes $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\}^T$.

Shinozuka e Deodatis (1996) sugerem a seguinte expressão, apresentada no espaço unidimensional, para representação espectral de processos aleatórios

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^N A_n \cos(k_n x + \varphi_n) \quad (6.20)$$

Em (6.20) N tende ao ∞ , φ_n representa um conjunto aleatório e independente de ângulos fase, distribuídos uniformemente no intervalo de 0 a 2π ,

$k_n = n\Delta k = n \frac{k_u}{N}$ onde k_u é definido pelo seguinte critério

$$\int_0^{k_u} S_{ff}(k) dk = (1 - \varepsilon) \int_0^{\infty} S_{ff}(k) dk \quad (6.21)$$

Sendo o erro admissível $\varepsilon \ll 1$. O termo A_n é descrito por

$$A_n = \sqrt{2S_{ff}(k_n)\Delta k} \quad (6.22)$$

$S_{ff}(k_n)$ é uma função densidade espectral de potência.

As funções de densidade espectral de potências devem formar um par de transformadas de Wiener-Kintchine com as funções de covariância. O teorema de Wiener-Kintchine enuncia que a função de covariância $C_{rr}(x)$ e a função de densidade espectral de potência $S_{ff}(k)$ são relacionadas entre si por um par de transformadas de Fourier, ou seja, a transformada de Fourier de $C_{rr}(x)$ será

$$\mathcal{F}[C_{rr}(x)] = S_{ff}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{rr}(x) e^{-ikx} dx \quad (6.23)$$

E sua inversa

$$\mathcal{F}^{-1}[S_{ff}(k)] = C_{rr}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(k) e^{ikx} dk \quad (6.24)$$

Como exemplo, apresenta-se a função de densidade espectral associada à função de covariância exponencial, para o caso tridimensional

$$S_{ff} = s^2 \frac{\prod_{i=1}^3 \lambda_i}{8\pi^{3/2}} e^{-\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\lambda_i k_i}{2} \right)^2} \quad (6.25)$$

Sendo s o desvio padrão da variável aleatória.

A representação espectral de campos aleatórios apresenta-se vantajosa para os casos onde as variáveis aleatórias são independentes, uma vez que para o caso de variáveis correlacionadas deve-se utilizar a relação apresentada em (6.18).

Considerando as descrições expostas sobre cada um dos métodos de obtenção de campos aleatórios, pode-se afirmar que o método de decomposição apresenta-se como mais vantajoso para esse trabalho.

A partir disso, as hipóteses assumidas para geração de campos aleatórios são descritas a seguir.

1. As variáveis aleatórias são consideradas constantes no domínio do elemento da malha de elementos finitos;
2. Os vetores posição \mathbf{x}_k e $\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\xi}$ são tomados nos centróides dos elementos. Assim, ξ_i representa a distância do centróide do elemento localizado em \mathbf{x}_k em relação ao centróide do elemento localizado em $\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\xi}$ segundo uma direção i .

Nas figuras seguintes, Figura 6.3, Figura 6.4, Figura 6.5 apresentam-se campos aleatórios gerados para a permeabilidade intrínseca, respectivamente para os modelos exponencial, gaussiano e esférico. Adotou-se um comprimento de

correlação de $1m$. Os resultados apresentados são normalizados e referem-se a um domínio quadrado de $1m \times 1m$ e um mesmo conjunto de variáveis aleatórias independentes.

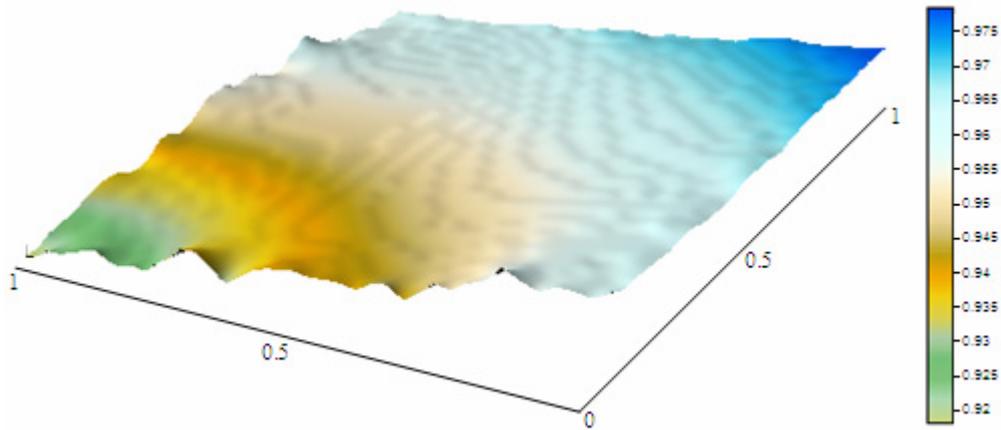


Figura 6.3 Campo aleatório exponencial para permeabilidade

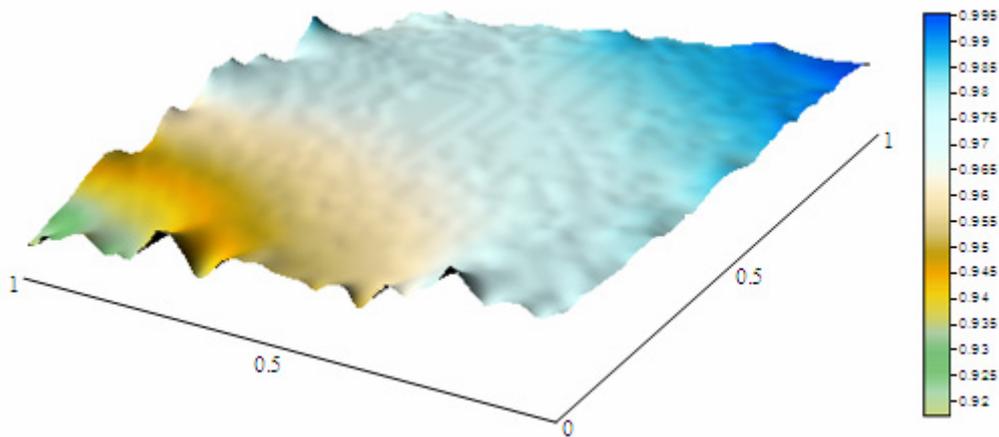


Figura 6.4 Campo aleatório gaussiano para permeabilidade

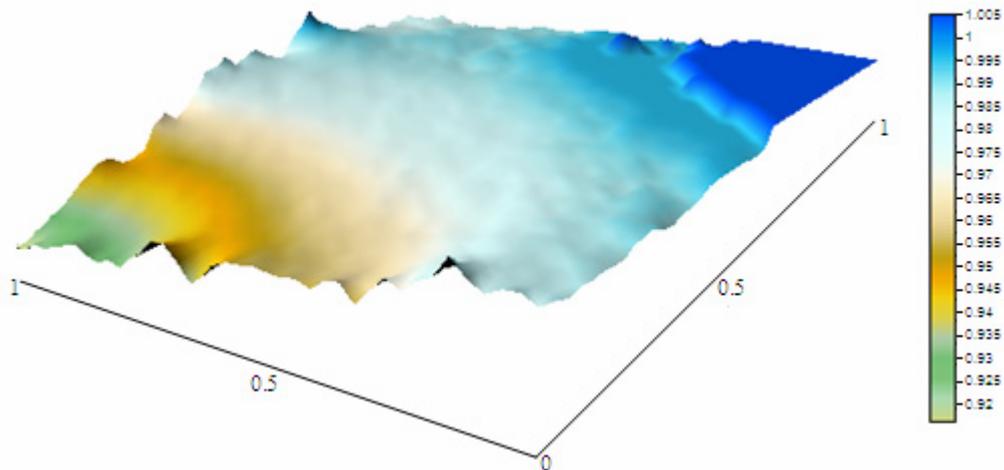


Figura 6.5 Campo aleatório esférico para permeabilidade

6.3. Variabilidade espacial das curvas $P_c - S_w$

Segundo Lemke e Abriola (2004) e Oliveira (2006) as curvas $P_c - S_w$ também podem variar espacialmente. Essa variabilidade pode ser obtida pela correção da curva $P_c - S_w$ através de um fator de escala. Uma aproximação usualmente utilizada é a escala de Leverett. Nessa aproximação a pressão de deslocamento de uma curva é corrigida utilizando-se uma relação da permeabilidade intrínseca e da porosidade, Eq. (6.26) .

$$p_c^* = p_c^{ref} \xi \quad \text{onde} \quad \xi = \sqrt{\frac{K^{ref} \phi^*}{K^* \phi^{ref}}} \quad (6.26)$$

Os índices (ref) e (*) indicam respectivamente os valores de referência ou médios e os valores estimados na geração dos campos aleatórios.

Nessa aproximação o índice β não é corrigido fazendo a curva $P_c - S_w$ apenas transladar em relação à curva de referência. É assumida nesse trabalho a hipótese da porosidade ser constante, assim, apenas a permeabilidade intrínseca é utilizada na escala de Leverett.

A Figura 6.6, ilustra a variabilidade de uma curva $P_c - S_w$ para diferentes valores de ξ .

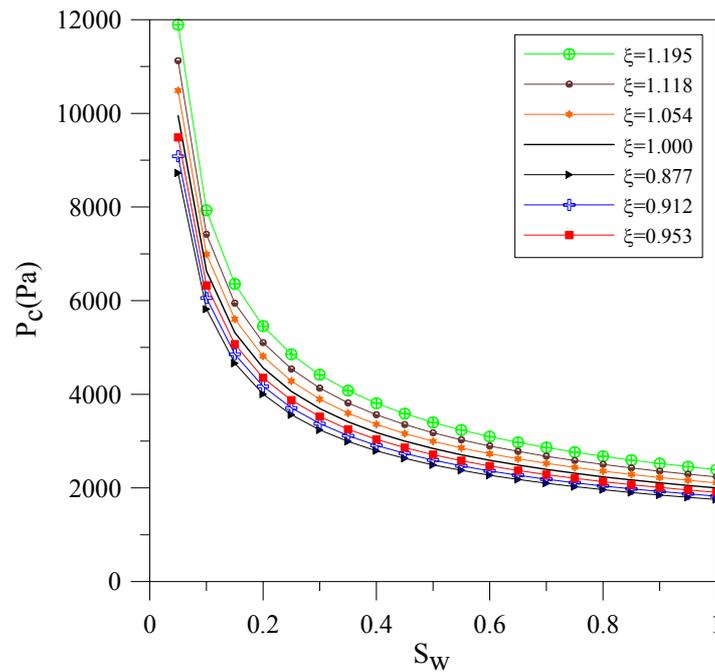


Figura 6.6 Curva $P_c - S_w$ para diferentes valores ξ .

6.4. Métodos de análise probabilística

6.4.1. Simulação de Monte Carlo (MC)

O passo fundamental na simulação de Monte Carlo é a geração de m campos aleatórios para cada uma das $r_j(\mathbf{x}_k)$ variáveis aleatórias do problema. A partir disso, obtém-se a resposta do problema m vezes, ou seja, para cada conjunto de campos aleatórios gerados. Finalmente, com a utilização dos conceitos da probabilidade e da estatística podem ser determinados, para a amostragem dos m valores de resposta obtidos, valores de médias, de dispersão etc. Denotando $\mathfrak{G}_{f_i}(r_j(\mathbf{x}_k))$ e $f_{i_l}(r_j(\mathbf{x}_k), l=1, \dots, m)$, respectivamente como a função densidade de probabilidade e a realização de f_i . A avaliação da média de f_i , $\bar{f}_i(r_j(\mathbf{x}_k))$ é dada por:

$$\bar{f}_i(r_j(\mathbf{x}_k)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m f_{i_l}(r_j(\mathbf{x}_k)) \quad (6.27)$$

E a variância por:

$$Var(f_i(r_j(\mathbf{x}_k))) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \left(f_i(r_j(\mathbf{x}_k)) - \bar{f}_i(r_j(\mathbf{x}_k)) \right)^2 \quad (6.28)$$

Nota-se com isso que o Método de Monte Carlo é um método conceitualmente direto. A principal vantagem da utilização do método de Monte Carlo é de acordo com Jain *et al* (2002), Lu e Zhang (2003) a sua aplicação tanto a problemas lineares quanto a problemas não lineares. As vantagens do método de Simulação de Monte Carlo apontadas por Dagan (2002) referem-se à simplicidade conceitual do método, generalidade e a simples caracterização da solução. De maneira geral, aponta-se como principal desvantagem do método de simulação de Monte Carlo o grande esforço computacional requerido. Para se obter respostas adequadas para problemas de grande porte ou com variáveis aleatórias que apresentem grande variabilidade um grande número de simulações é necessário.

Observa-se que, quanto maior o número de simulações, melhores serão os resultados. Para determinação do número de simulações necessárias para que se obtenham bons resultados, verifica-se nesse trabalho, o erro relativo para deslocamentos, poro pressões, saturações e tensões (expressos na equação (6.29) por \mathbf{f}) à medida que o número de simulações aumenta, atribuindo-se uma tolerância para o mesmo. A seguinte equação expressa esse erro.

$$Erro = \frac{|\mathbf{f}_m - \mathbf{f}_{m-1}|}{|\mathbf{f}_m|} \quad (6.29)$$

Para simplificação das expressões seguintes as variáveis aleatórias $r_j(\mathbf{x}_k)$ serão descritas por r_j .

6.4.2. Expansão de Neumann (NE)

Uma das características da simulação de Monte Carlo é o grande esforço computacional requerido, em especial para problemas de grande porte. O método de Monte Carlo com expansão de Neumann (NE), surge como alternativa para reduzir o trabalho computacional, Ghanem e Spanos (2003) e Araújo e Awruch (1993).

Para apresentação da expansão de Neumann no problema de acoplamento fluido mecânico escreve-se a equação (3.56), para uma simulação m , sob a seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{H}(\mathbf{q}^i)_m {}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}_m^{i+1} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}^i)_m \quad (6.30)$$

A expansão de Neumann é aplicada sobre a inversa da matriz \mathbf{H} , esta por sua vez se apresenta dividida em duas parcelas, uma determinística, obtida a partir dos valores médios das variáveis aleatórias e outra probabilística, obtida através de simulações. A primeira parte de \mathbf{H} é denotada por $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}})$ e a segunda por $\Delta \mathbf{H}_m$. A partir dessa consideração pode-se escrever a equação (6.30), que determina os incrementos de deslocamentos e poro pressões para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico ou que determina os incrementos de deslocamentos, pressões da fase não molhante e saturações da fase molhante para o problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico, para uma determinada simulação m , como

$${}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}_m^{i+1} = {}^{t+\Delta t} [\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}}) + \Delta \mathbf{H}_m]^{-1} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}^i)_m \quad (6.31)$$

Sendo ${}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}_m^{i+1}$ o vetor de incrementos para o instante $t + \Delta t$ numa iteração $i+1$ numa simulação m e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}^i)_m$ o vetor de resíduo, obtido também para a simulação m .

Usando a expansão de Neumann para ${}^{t+\Delta t} [\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}}) + \Delta \mathbf{H}_m]^{-1}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}_m^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} [\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 - \mathbf{P}^3 + \dots] {}^{t+\Delta t} [\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}})^{-1}] {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}^i)_m \\ {}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}_m^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \left| \mathbf{q}_1 - \mathbf{P} \mathbf{q}_1 + \mathbf{P}^2 \mathbf{q}_1 - \mathbf{P}^3 \mathbf{q}_1 + \dots \right| \quad (6.32) \\ {}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}_m^{i+1} &= {}^{t+\Delta t} \left| \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4 + \dots \right| \end{aligned}$$

Com ${}^{t+\Delta t} \mathbf{P} = {}^{t+\Delta t} [\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}})^{-1} \Delta \mathbf{H}_m]$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_1 = {}^{t+\Delta t} [\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}})^{-1}] {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}^i)_m$. A equação (6.32) pode ser escrita como:

$${}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}_m^{i+1} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_1 + {}^{t+\Delta t} [\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}})^{-1}] \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j-1} {}^{t+\Delta t} [\Delta \mathbf{H}_m]^{j-1} \mathbf{q}_{j-1} \quad (6.33)$$

${}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_m^{i+1}$ é obtido com ${}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_m^{i+1} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_m^i + {}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}_m^{i+1}$.

Após a obtenção dos valores para cada simulação procede-se de maneira idêntica ao método de Monte Carlo. Ghanem e Dham (1998) e Araújo e Awruch (1993), citam que bons resultados são obtidos com expansão de Neumann quando as variáveis aleatórias apresentam pequena variabilidade, sendo de outra forma,

necessários muitos termos na expansão para obtenção de bons resultados, deixando desta forma de ser interessante sua aplicação.

No escopo desse trabalho outras questões também podem ser discutidas a respeito da utilização da expansão de Neumann. Verifica-se em (6.33), a presença da “inversa” da matriz $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}})$. Quando $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}})$ é constante e é utilizado um método direto de solução de sistema de equações a expansão de Neumann mostra-se interessante, pois essa “inversão” pode ser armazenada e utilizada durante todo o processo de análise. Entretanto, ao se empregar um método iterativo de solução de sistemas de equações essa característica perde importância. Quando a matriz $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}})$ não é constante, o que se verifica nos problemas não lineares, a utilização da expansão de Neumann acaba se mostrando ineficiente.

6.4.3. Método das perturbações

No método das perturbações um vetor de variáveis aleatórias \mathbf{r} pode ser expresso pela soma do vetor de valores esperados $\bar{\mathbf{r}}$ mais um vetor perturbado em relação à média, \mathbf{r}' , ou seja:

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}' \quad (6.34)$$

Fazendo-se uma expansão em série de Taylor, em torno de $\bar{\mathbf{r}}$, de uma função $f_i(\mathbf{r})$ até termos de segunda ordem tem-se

$$f_i(\mathbf{r}) = f_i(\bar{\mathbf{r}}) + \mathbf{J}\mathbf{r}' + \frac{1}{2}\mathbf{r}'^T \mathbf{H}\mathbf{r}' \quad (6.35)$$

$$\mathbf{J}_j = \left. \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}} \quad \text{e} \quad H_{jk} = \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial r_j \partial r_k} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}} \quad (6.36)$$

Sendo \mathbf{J} um vetor linha e \mathbf{H} a matriz Hessiana de $f_i(\mathbf{r})$.

O valor médio de $f_i(\mathbf{r})$ é obtido calculando-se a esperança em ambos os lados da equação (6.35). De acordo com a notação de Calvete e Ramirez (1990) tem-se

$$\begin{aligned}\bar{f}_i(\mathbf{r}) &= E\langle f_i(\mathbf{r}) \rangle = f_i(\bar{\mathbf{r}}) + \mathbf{J}E\langle \mathbf{r}' \rangle + \frac{1}{2}E\langle \mathbf{r}'^T \mathbf{H} \mathbf{r}' \rangle \\ \bar{f}_i(\mathbf{r}) &= f_i(\bar{\mathbf{r}}) + \frac{1}{2} \sum_j \sum_k H_{jk} C_{rr,jk}\end{aligned}\quad (6.37)$$

Sendo $E\langle \mathbf{r}' \rangle = 0$ e $C_{rr,jk}$, a componente (jk) da matriz de covariância das variáveis aleatórias \mathbf{C}_{rr} .

A obtenção da matriz de covariância de $f_i(\mathbf{r})$ é, segundo Calvete e Ramirez (1990) e Townley (1984) dispendiosa, pois requer a obtenção de momentos de quarta ordem das variáveis aleatórias.

Em problemas lineares é suficiente, no método das perturbações, uma expansão em série de Taylor, em torno da $\bar{\mathbf{r}}$, até termos de primeira ordem. Hart (1982) denomina esse caso particular como método estatístico linear, sendo a média de $f_i(\mathbf{r})$ obtida com

$$\bar{f}_i(\mathbf{r}) = E\langle f_i(\mathbf{r}) \rangle = f_i(\bar{\mathbf{r}}) \quad (6.38)$$

E a matriz de covariância de $f_i(\mathbf{r})$, representada por \mathbf{C}_{ff} , obtida com

$$\mathbf{C}_{ff} = \mathbf{J} \mathbf{C}_{rr} \mathbf{J}^T \quad (6.39)$$

Aplicando-se agora o método estatístico linear à equação (3.56), sob forma da equação (6.38), aproxima-se o vetor das médias dos incrementos de deslocamentos e poro pressões ${}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}^{i+1}$ em função de variáveis aleatórias \mathbf{r} sob a seguinte forma.

$$E\langle {}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{q}^{i+1} \rangle = {}^{t+\Delta t} [\mathbf{H}(\mathbf{q}^i(\bar{\mathbf{r}}))]^{-1} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^i(\mathbf{q}^i(\bar{\mathbf{r}})) \quad (6.40)$$

Denota-se, a partir de agora, o vetor das médias com o símbolo $(\bar{\quad})$. Assim, ${}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{q}}^{i+1} = {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{q}}^i + {}^{t+\Delta t} \delta \bar{\mathbf{q}}^{i+1}$. Além dos valores médios dos deslocamentos e poro pressões, é interessante se obter a matriz de covariância da resposta. É possível, com essa matriz se representar a correlação, determinar os valores de variância e, por conseguinte, de desvio padrão da resposta.

De acordo com a equação (6.39), a matriz \mathbf{C}_{ff} de covariância da resposta em deslocamentos, poro pressões e ou saturações no instante $t + \Delta t$, correspondente aos valores médios das variáveis em \mathbf{r} é dada por:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{C}_{ff} = \left[\left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}} \right] \mathbf{C}_{rr} \left[\left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}} \right]^T \quad (6.41)$$

\mathbf{C}_{rr} é a matriz de covariância das variáveis aleatórias \mathbf{r} .

Além de deslocamentos, poro pressões e ou saturações, a resposta em termos de tensões também pode ser determinada. Utiliza-se para isso a mesma metodologia empregada para o cálculo da resposta probabilística em deslocamentos, poro pressões e saturações.

Por exemplo, para a resposta em tensões o vetor da média das tensões em um determinado instante $t + \Delta t$ numa iteração $i+1$ é determinado por:

$$E \left\langle {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{i+1} \right\rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + {}^{t+\Delta t} \delta \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{r}})^{i+1} \quad (6.42)$$

A matriz de covariância das tensões é dada na forma da equação (6.41).

Verificou-se na formulação estatística linear, que para avaliação da matriz de covariância das respostas, é necessária a análise de sensibilidade da resposta em relação às variáveis aleatórias do problema. A análise de sensibilidade pode ser efetuada por diferentes métodos, sendo alguns apresentados no capítulo seguinte.

6.5. Análise de confiabilidade

Nesse item do capítulo descrevem-se alguns aspectos referentes à análise de confiabilidade, com maior ênfase aos temas relacionados aos problemas a serem tratados nesse trabalho. Melcher (1999), apresenta de forma ampla os conceitos da análise de confiabilidade.

Ao se empregar o método de Monte Carlo, além de se obter respostas em termos de valores médios e de dispersão, é possível, com relativa facilidade avaliar a probabilidade de algum evento ocorrer. Para isso é necessária a definição de funções indicadoras I que caracterizam a ocorrência ou não do evento observado.

A avaliação de uma possível região plastificada ou região danificada é um dado significativo na análise de estabilidade de poços de petróleo. Sendo as variáveis do problema aleatórias, a região plastificada também será aleatória.

Nesse sentido, pode ser valioso se definir a probabilidade de plastificação, ou probabilidade de falha segundo algum critério de resistência, dessa região.

Sendo F uma função de falha, relacionada a um critério de resistência para um determinado ponto nos domínios de espaço e tempo, pode-se descrever uma função indicadora IF , para uma determinada simulação de Monte Carlo m como

$$IF_m[F_m \leq 0] = \begin{cases} 1 & \text{if } F_m = 0 \\ 0 & \text{if } F_m < 0 \end{cases} \quad (6.43)$$

A falha ocorre quando $F_m = 0$ e não ocorre quando $F_m < 0$. A função de falha F é descrita nesse trabalho segundo as equações (3.27), ou seja pelo critério de Mohr Coulomb. Segundo esse critério a falha pode ocorrer por dois modos distintos, chamados de modo de cisalhamento $F1$ e modo de tração $F2$.

Percebe-se, que para descrição de F leva-se em conta a variabilidade espacial da permeabilidade, ângulo de atrito, coesão, módulo de elasticidade, etc., que geram variabilidade nas respostas em tensões, que também são consideradas na avaliação da função de falha F . Além dessas verificações, salienta-se que a função de falha F é dependente do tempo.

De forma semelhante, pode ser considerada a variabilidade dos parâmetros e respostas para avaliação da probabilidade de perda de estabilidade dos poços de petróleo, sendo para isso necessário o conhecimento e descrição das funções de falha que levam o poço perder a estabilidade. Como o objetivo do trabalho não é estabelecer ou indicar critérios e estudos aprofundados sobre os modos que acarretam a perda de estabilidade de poços de petróleo, assume-se para definir as funções de falha utilizadas nesse trabalho, modos tradicionalmente empregados nesse tipo de avaliação.

O primeiro modo de falha estabelecido refere-se à possibilidade de plastificação de uma região do meio poroso sem que sejam ultrapassados limites pré-estabelecidos para essa região. A função de falha $S1_m$ caracteriza a perda de estabilidade para uma determinada simulação de Monte Carlo m .

$$S1_m = A_{lim_m} - A_{p_m}(PI) \quad (6.44)$$

De acordo com esse critério o poço perde a estabilidade quando a área plastificada obtida para a simulação de Monte Carlo m e para uma determinada pressão interna PI $A_{p_m}(PI)$, for maior que uma área limite pré-estabelecida

A_{limm} . A área limite é um dado de projeto a ser estipulado e a área $A_{p_m}(PI)$ é calculada avaliando-se o determinante da matriz jacobiana em cada ponto de integração dos elementos finitos.

De forma semelhante ao efetuado para a função de falha F , descreve-se agora a função indicadora para a função de falha $S1$

$$IS1_m[S1_m \leq 0] = \begin{cases} 1 & \text{if } S1_m \leq 0 \\ 0 & \text{if } S1_m > 0 \end{cases} \quad (6.45)$$

Ou seja, quando se verificar $S1_m > 0$ não ocorre falha e quando $S1_m \leq 0$, ocorre falha.

Outro modo de falha a ser considerado para descrição da perda de estabilidade do poço é representado por $S2_m$. Nesse modo avalia-se se ocorre falha por tração em algum ponto nos domínios de espaço e tempo

$$S2_m = T_{0_m} - \sigma_{P_{max_m}}(PI) \quad (6.46)$$

Nesse modo de falha T_{0_m} representa a resistência à tração do material e $\sigma_{P_{max_m}}(PI)$ refere-se à máxima tensão principal, ambos relacionados a uma simulação de Monte Carlo m .

A função indicadora para esse modo de falha é descrita como

$$IS2_m[S2_m \leq 0] = \begin{cases} 1 & \text{if } S2_m \leq 0 \\ 0 & \text{if } S2_m > 0 \end{cases} \quad (6.47)$$

Quando $S2_m > 0$ não ocorre falha e quando $S2_m \leq 0$ a falha ocorre.

Após se estabelecer as funções indicadoras, pode-se avaliar a probabilidade de falha para cada modo de falha, da seguinte maneira

$$P_f \cong \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N I_m \quad (6.48)$$

Onde N é o número de simulações de Monte Carlo.

6.6. Procedimento numérico para determinação de PI

Como mencionado anteriormente, ao se constatar problemas nas condições de estabilidade de um poço de petróleo, durante ou logo após sua perfuração, busca-se restabelecer a condição de estabilidade com o emprego de um fluido de

perfuração. De maneira geral, estabelecem-se valores operacionais para a pressão, PI (pressão interna), que esse fluido exerce sobre a parede do poço, limites superior e inferior.

A obtenção desses valores não é trivial e mais complexa se torna à medida que critérios de estabilidade mais complexos são considerados para avaliação das condições de estabilidade dos poços. Os valores operacionais para PI podem ser obtidos tanto numa análise determinística quanto numa análise probabilística.

Para uma análise determinística, e para as condições de estabilidade descritas no item anterior, uma pressão interna limite PI_{limit} é obtida quando se verifica a ocorrência de um dos mecanismos de falha definidos, ou por $S1$ ou por $S2$. Como esses mecanismos de falha podem ocorrer para pressões internas muito baixas ou muito elevadas, são estabelecidos dois limites para pressão interna, um limite inferior PI_l e um limite superior PI_u , definindo-se com isso os valores operacionais para pressão interna.

Já, para uma análise probabilística, uma pressão interna limite PI_{limit} é obtida quando a probabilidade de falha do poço $P_f(IP)$, relacionada a um dos dois possíveis mecanismos de falha é superior a uma probabilidade de falha pré-estabelecida $P_{f_{target}}$. No caso probabilístico também são obtidos os limites superior e inferior para a pressão interna.

Para se obter os valores limites para pressão interna numa análise determinística a condição descrita em (6.49) deve ser satisfeita. Nota-se que esse problema é um problema básico de otimização, sendo nesse trabalho resolvido com o método de Newton Raphson.

$$A_{p_{target}} - A_p(PI) = 0 \quad (6.49)$$

ou $F2(PI) = 0$

Com a primeira expressão de (6.49), se impõe que a área plastificada $A_p(PI)$, para uma determinada pressão interna, deve ser igual a uma área pré-definida $A_{p_{target}}$. Com a segunda expressão de (6.49), se impõe, para uma determinada pressão interna e para um ponto no domínio do tempo e espaço, o modo de falha 2. A pressão interna é obtida quando uma dessas condições é constatada.

Para o emprego do método de Newton Raphson é necessária a obtenção das derivadas de $A_p(PI)$ e $F2(PI)$ com relação a PI . Esse cálculo é realizado por diferenças finitas, sendo utilizada uma perturbação relativa de 1% para PI . Outra informação importante para se obter bons resultados nos cálculos das derivadas diz respeito ao tamanho da malha de elementos finitos. Essa deve ser devidamente refinada na região onde ocorre plastificação para ser sensível a pequenas perturbações de PI .

Uma forma muito semelhante ao descrito para o caso determinístico é empregada para a avaliação dos limites de pressão interna quando se efetua uma análise probabilística. Nesse caso, o método de Newton Raphson é empregado para solução da equação (6.50). De acordo com essa equação, o limite para pressão interna é encontrado quando a probabilidade de falha calculada para uma determinada pressão interna é igual a uma probabilidade de falha estabelecida.

$$P_{f_{target}} - P_{f_{calc}}(PI) = 0 \quad (6.50)$$

A derivada de $P_{f_{calc}}(PI)$ com respeito a PI também é efetuada por diferenças finitas e com uma perturbação relativa de 1% para PI .

7 Análise de sensibilidade

7.1. Introdução

De acordo com Hart (1982), Zhang (2002), Rubin (2003) e Ghanem e Spanos 2003, e como apresentado no capítulo anterior desse trabalho, ao se resolver problemas de análise estatística utilizando métodos de perturbação, necessita-se a avaliação das derivadas das funções resposta em relação às variáveis aleatórias do problema. Segundo Haftka e Gürdal (1993) e Kleiber *et al* (1997), a determinação destas derivadas é conhecida, na literatura, como análise de sensibilidade.

Nesse trabalho a formulação para análise de sensibilidade apresenta-se inicialmente de forma geral. Apresentam-se o método de diferenciação direto, o método de diferenciação adjunto e a aproximação por diferenças finitas. A seguinte parte deste capítulo trata da análise de sensibilidade das respostas do problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico em relação as variáveis aleatórias. Primeiramente no caso em que se utiliza o procedimento *staggered* e posteriormente para o procedimento totalmente acoplado.

7.2. Método de diferenciação direto

Para apresentação do método de diferenciação direto considera-se uma função g explicitamente dependente de A e implicitamente dependente de um parâmetro r , ou seja

$$G(r) = g(A(r); r) \quad (7.1)$$

Para avaliação da sensibilidade dessa função em relação ao parâmetro r , aplica-se uma perturbação ao parâmetro, obtendo-se

$$\bar{\delta} G(r) = \frac{\partial g}{\partial A} \frac{dA}{dr} \delta r + \frac{\partial g}{\partial r} \delta r \quad (7.2)$$

Nota-se que o primeiro termo do lado direito da equação não pode ser calculado diretamente, uma vez que é implicitamente dependente de r . Kleiber *et al* (1997) utilizaram a seguinte notação para representar (7.2).

$$\bar{\delta} G = \tilde{\delta} g + \partial g \quad (7.3)$$

Onde $\bar{\delta} G$ representa a variação total de G em relação à r , $\tilde{\delta} g$, representa os termos referentes à variação implícita em r e ∂g representa os termos de variação explícita em r . Pode-se segundo essa notação escrever (7.2) como

$$\bar{\delta} G = \frac{\partial g}{\partial A} \bar{\delta} A + \partial g \quad (7.4)$$

A função resíduo, possui as mesmas características da função. $g(A(r); r)$. Para problemas não dependentes da trajetória de tensões a função resíduo pode ser posta em função de suas variáveis, obtidas após convergência como

$$R = R(q(r); r) \cong 0 \quad (7.5)$$

Escrevendo (7.5) na forma de (7.4) tem-se

$$\bar{\delta} R = \frac{\partial R}{\partial q} \bar{\delta} q + \partial R \cong 0 \quad (7.6)$$

Ou, em forma de derivadas

$$\frac{\partial R}{\partial q} \frac{dq}{dr} + \frac{\partial R}{\partial r} \cong 0 \quad (7.7)$$

Sendo R explicitamente dependente de r . Com a expressão (7.7) pode-se avaliar a sensibilidade dos deslocamentos e poro pressões com relação as variáveis aleatórias r .

Para problemas dependentes da trajetória de tensões o resíduo depende das variáveis de estado no instante $t + \Delta t$, assim

$${}^{t+\Delta t} R = R({}^{t+\Delta t} q(r), \sigma(r); r) \cong 0 \quad (7.8)$$

Escrevendo (7.8) na forma (7.4) obtém-se

$$\bar{\delta} {}^{t+\Delta t} R = \frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial q} \bar{\delta} {}^{t+\Delta t} q + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial \sigma} \bar{\delta} {}^{t+\Delta t} \sigma + \partial {}^{t+\Delta t} R \cong 0 \quad (7.9)$$

Em termos de derivadas tem-se

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial q} \frac{d {}^{t+\Delta t} q}{dr} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial \sigma} \frac{d {}^{t+\Delta t} \sigma}{dr} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} R}{\partial r} \cong 0 \quad (7.10)$$

Sabe-se que

$${}^{t+\Delta t}\sigma({}^t\sigma, \delta\varepsilon(q); r) = {}^t\sigma + \delta\sigma({}^t\sigma, \delta\varepsilon(q); r) \quad (7.11)$$

O que indica que, para se conhecer a sensibilidade dos deslocamentos e pressões no instante $t + \Delta t$ é necessário conhecer a sensibilidade das tensões no instante $t + \Delta t$. Por sua vez, para se obter a sensibilidade das tensões no instante $t + \Delta t$ é necessário se conhecer todo o histórico de sensibilidades. Em geral, isso é de difícil obtenção, sendo indicado para problemas dependentes da trajetória de tensões que a análise de sensibilidade seja efetuada por diferenças finitas.

7.3. Método de diferenciação adjunto

Outra forma de diferenciação da função $g(q(r); r)$ pode ser realizada utilizando-se o método de diferenciação adjunto. Nesse método acrescentam-se na equação a ser diferenciada multiplicadores de Lagrange λ , dessa forma para problemas não dependentes da trajetória de tensões tem-se

$$g^*(q(r); r) = g(q(r); r) + \lambda R(q(r); r) \quad (7.12)$$

Onde $R(q(r); r) \cong 0$ é o resíduo obtido após convergência. Para efeito de descrição do método adjunto o resíduo é considerado nulo, dessa forma, o termo acrescido à função $g(q(r); r)$ não altera o significado da mesma. Dessa forma, após um incremento de tempo pode-se calcular a sensibilidade da função $g^*(q(r); r)$, derivando (7.12). Assim

$$\begin{aligned} \frac{dg^*(q(r); r)}{dr} &= \frac{\partial g(q(r); r)}{\partial r} + \frac{\partial g(q(r); r)}{\partial q} \frac{\partial q(r)}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} R(q(r); r) \\ &+ \lambda \frac{\partial R(q(r); r)}{\partial r} + \lambda \frac{\partial R(q(r); r)}{\partial q} \frac{\partial q(r)}{\partial r} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Agora, considerando o fato de $R(q(r); r) \cong 0$ e rearranjando os termos de (7.13) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dg^*(q(r); r)}{dr} &= \frac{\partial g(q(r); r)}{\partial r} + \left(\frac{\partial g(q(r); r)}{\partial q} + \lambda \frac{\partial R(q(r); r)}{\partial q} \right) \frac{\partial q(r)}{\partial r} \\ &+ \lambda \frac{\partial R(q(r); r)}{\partial r} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Fazendo-se o termo entre parênteses igual a zero obtém-se

$$\frac{dg^*(q(r);r)}{dr} = \frac{\partial g(q(r);r)}{\partial r} + \lambda \frac{\partial R(q(r);r)}{\partial r} \quad (7.15)$$

Com a seguinte condição a ser atendida

$$\left(\frac{\partial g(q(r);r)}{\partial q} + \lambda \frac{\partial R(q(r);r)}{\partial q} \right) = 0 \quad (7.16)$$

Dessa maneira (7.15) é a equação para obtenção da sensibilidade pelo método adjunto. Nota-se que após o cálculo de λ , (7.16) se transforma numa derivada com todos os termos explicitamente definidos.

Em problemas dependentes da trajetória de tensões as dificuldades encontradas no método de diferenciação direta também são verificadas no método adjunto, ou seja, alguns termos a serem derivados são dependentes das tensões, deslocamentos e poro pressões, tornando nesse caso esse procedimento ineficiente.

De acordo com Haftka *et al* (1993) o esforço computacional associado a cada método de diferenciação depende do número de variáveis a serem diferenciadas e do número de variáveis aleatórias do problema. Por exemplo, em problemas não dependentes da trajetória de tensões, o método de diferenciação direta requer que a equação (7.7) seja avaliada para cada variável aleatória e o método adjunto requer que a expressão (7.16) seja avaliada para cada variável a ser diferenciada (deslocamentos e poro pressões). Dessa maneira, o método de diferenciação direta é mais eficiente quando o número de variáveis aleatórias é menor que o número de variáveis a serem diferenciadas. O método adjunto, por sua vez, é mais eficiente quando o número de variáveis aleatórias é maior que o número de variáveis a serem diferenciadas. Pode-se considerar o aspecto da avaliação do problema no tempo, tornando o uso do método adjunto mais interessante.

7.4. Aproximação por diferenças finitas

Dada uma função $f(r)$, a aproximação de primeira ordem $\frac{\Delta f}{\Delta r}$ da derivada $\frac{df}{dr}$ é dada por

$$\frac{\Delta f}{\Delta r} = \frac{f(r + \Delta r) - f(r)}{\Delta r} \quad (7.17)$$

Onde, Δr é uma perturbação absoluta e pequena o suficiente para produzir bons resultados. Esta perturbação é definida por:

$$\Delta r = \eta r \quad (7.18)$$

sendo η uma perturbação relativa.

Caso se deseje obter a derivada primeira em relação à n variáveis, a aproximação por diferenças finitas necessita de n análises adicionais.

A determinação do tamanho do passo Δr é fundamental para a utilização desta técnica, pois existem duas possibilidades de erro associadas a este fator: condição de erro e truncamento.

O erro por truncamento $\epsilon^T(\Delta r)$, resulta da negligência de termos na expansão em série de Taylor para a função perturbada. Por exemplo, a expansão até segunda ordem em série de Taylor em torno do ponto r da função perturbada $f(r + \Delta r)$ pode ser escrita como:

$$f(r + \Delta r) = f(r) + \Delta r \frac{df(r)}{dr} + \frac{(\Delta r)^2}{2} \frac{d^2 f(r + \zeta \Delta r)}{dr^2} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (7.19)$$

Da equação (7.19) verifica-se que o erro de truncamento para a aproximação por diferenças finitas é:

$$\epsilon^T(\Delta r) = \frac{(\Delta r)^2}{2} \frac{d^2 f(r + \zeta \Delta r)}{dr^2} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (7.20)$$

Já, a condição de erro é a diferença entre a avaliação numérica e o valor exato da função. Uma contribuição para a condição de erro é o “erro de arredondamento” no cálculo de $\frac{df}{dr}$ dos valores originais e perturbados.

Segundo Haftka *et al* (1993) selecionando-se um tamanho de passo muito pequeno reduz-se os erros por truncamento, entretanto ocorrerão excessivas condições de erro.

É possível se empregar aproximações por diferenças finitas para derivadas de mais alta ordem, entretanto o custo computacional elevado faz com que raramente seja utilizada essa técnica. Por exemplo, para derivada de segunda ordem em relação à n variáveis seriam necessárias $2n$ análises adicionais.

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta r^2} = \frac{f(r - \Delta r) + f(r + \Delta r) - 2f(r)}{\Delta r^2} \quad (7.21)$$

7.5. Análise de sensibilidade para o procedimento *staggered*

Utilizando os conceitos apresentados no item anterior, aplica-se o método de diferenciação direta para determinação da sensibilidade dos deslocamentos e poro pressões em relação às variáveis aleatórias \mathbf{r} . Considera-se o problema como não dependente da trajetória de tensões (linear). Assim de (7.7) se escreve:

$$\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{d\mathbf{r}} = [\mathbf{K}]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{r}} ({}^t \mathbf{u} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} ({}^t \mathbf{p} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}) \\ - \mathbf{L} \left(\frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{K} \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \end{array} \right\} \quad (7.22)$$

$$\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{d\mathbf{r}} = [\mathbf{G} + \theta \Delta t \mathbf{H}]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - \mathbf{L}^T \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) \\ + \mathbf{G} \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{p} - {}^t \mathbf{p}) + \Delta t \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}} \\ - (1 - \theta) \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} {}^t \mathbf{p} - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{H} \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \\ - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \end{array} \right\} \quad (7.23)$$

Verificam-se nas equações (7.22) e (7.23) a interdependência das mesmas, ou seja, a sensibilidade dos deslocamentos depende da sensibilidade das poro pressões e vice versa. Dessa maneira, uma estratégia iterativa deve ser adotada para a avaliação das sensibilidades num instante $t + \Delta t$.

$t + \Delta t$. Estimativa inicial $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{d\mathbf{r}} = \frac{d^t \mathbf{p}}{d\mathbf{r}}$	Etapa 1
Procedimento <i>staggered</i> iteração: $j+1$	Etapa 2
Avalia-se $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{j+1}}{d\mathbf{r}}$ com (7.22) e verifica-se a convergência da sensibilidade dos deslocamentos com: $\left \frac{\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{j+1}}{d\mathbf{r}}}{\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{j+1}}{d\mathbf{r}}} - \frac{\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^j}{d\mathbf{r}}}{\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}^j}{d\mathbf{r}}} \right \leq tol$	Etapa 3

<p>Com o vetor $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{d\mathbf{r}}$ obtido na etapa 3 avalia-se $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{j+1}}{d\mathbf{r}}$ com (7.23) e verifica-se a convergência da sensibilidade das poro pressões com:</p> $\left \frac{\left \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{j+1}}{d\mathbf{r}} \right - \left \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}^j}{d\mathbf{r}} \right }{\left \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}^{j+1}}{d\mathbf{r}} \right } \right \leq tol$	<p>Etapa 4</p>
<p>Se as desigualdades das etapas 3 e 4 não forem atendidas, retorna-se a etapa 2 com os valores atualizados de $\frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{d\mathbf{r}}$. Caso contrário, faz-se $j=0$ e um novo passo se inicia na Etapa 1.</p>	<p>Etapa 5</p>

Para o cômputo das sensibilidades dos deslocamentos e poro pressões em relação as variáveis aleatórias \mathbf{r} pelo método adjunto, para problemas não dependentes da trajetória de tensões têm-se

$$\frac{d^{t+\Delta t} u_i}{d\mathbf{r}} = \lambda_u^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{p} - {}^t \mathbf{p}) \\ - \mathbf{L} \left(\frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{K} \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \end{array} \right\} \quad (7.24)$$

Sendo $\lambda_u = [\mathbf{K}]^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{u}}$

$$\frac{d^{t+\Delta t} p_i}{d\mathbf{r}} = \lambda_p^T \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - \mathbf{L}^T \left(\frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial {}^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) \\ + \mathbf{G} \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{p} - {}^t \mathbf{p}) + \Delta t \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}} \\ - (1 - \theta) \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} {}^t \mathbf{p} - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{H} \frac{\partial {}^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \\ - \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \end{array} \right\} \quad (7.25)$$

Sendo $\lambda_p = [\mathbf{G} + \theta \Delta t \mathbf{H}]^{-1} \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{p}}$

Assim como no método de diferenciação direta, verifica-se para o método adjunto, a necessidade de um esquema iterativo como o apresentado no quadro anterior.

7.6. Análise de sensibilidade para o procedimento totalmente acoplado

Para o procedimento totalmente acoplado as sensibilidades dos deslocamentos e poro pressões, no problema não dependente da trajetória de tensões (linear), são obtidas, para o método de diferenciação direta, pela seguinte forma matricial

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} + \theta\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} \\ \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{p}}{d\mathbf{r}} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} - (1-\theta)\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^t\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial^t\mathbf{p}}{\partial\mathbf{r}} \end{Bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}^T}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}} - (1-\theta)\Delta t\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\mathbf{u} \\ {}^t\mathbf{p} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}^T}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}} + \theta\Delta t\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{p} \end{Bmatrix} & \quad (7.26) \\
 + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^{t+\Delta t}\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}} \\ \Delta t\frac{\partial^{t+\Delta t}\mathbf{h}}{\partial\mathbf{r}} \end{Bmatrix} &
 \end{aligned}$$

Para o método adjunto utilizam-se as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{t+\Delta t}u_i}{d\mathbf{r}} = \lambda_u^T & \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} - (1-\theta)\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^t\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial^t\mathbf{p}}{\partial\mathbf{r}} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}^T}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}} - (1-\theta)\Delta t\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\mathbf{u} \\ {}^t\mathbf{p} \end{Bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} -\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\mathbf{r}} \\ \frac{\partial\mathbf{L}^T}{\partial\mathbf{r}} & \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}} + \theta\Delta t\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^{t+\Delta t}\mathbf{f}}{\partial\mathbf{r}} \\ \Delta t\frac{\partial^{t+\Delta t}\mathbf{h}}{\partial\mathbf{r}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7.27) \\
 \lambda_u &= \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} + \theta\Delta t\mathbf{H} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^{t+\Delta t} p_i}{dr} = & \lambda_p^T \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} - (1-\theta)\Delta t \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^t \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial^t \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} - (1-\theta)\Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \mathbf{u} \\ {}^t \mathbf{p} \end{Bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{r}} + \theta \Delta t \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{f}}{\partial \mathbf{r}} \\ \Delta t \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{h}}{\partial \mathbf{r}} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7.28) \\
\lambda_p = & \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{G} + \theta \Delta t \mathbf{H} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial p_i}{\partial \mathbf{p}} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

7.7. Análise de sensibilidade das tensões

As sensibilidades das tensões efetivas em relação às variáveis aleatórias \mathbf{r} , em problemas não dependentes da trajetória de tensões, são dadas por:

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}'}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{D}_T}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}^{t+\Delta t} \mathbf{u} + \mathbf{D}_T \mathbf{B} \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \quad (7.29)$$

Sendo a matriz \mathbf{B} da equação (7.29) a matriz de compatibilidade que relaciona deslocamentos e deformações.

As sensibilidades das tensões totais em relação às variáveis aleatórias \mathbf{r} , em problemas não dependentes da trajetória de tensões, são dadas por:

$$\frac{\partial^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{D}_T}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{B}^{t+\Delta t} \mathbf{u} + \mathbf{D}_T \mathbf{B} \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{p} - \mathbf{L} \frac{\partial^{t+\Delta t} \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} \quad (7.30)$$

7.8. Exemplo de análise de sensibilidade

Para verificar a formulação proposta e comparar o desempenho de cada método de análise de sensibilidade, efetua-se a análise de sensibilidade de deslocamentos e poro pressões da coluna da Figura 7.1 em relação à permeabilidade intrínseca e ao módulo de elasticidade transversal do elemento de referência destacado na figura. Os dados do problema são os apresentados na

Tabela 5.1. Para análise de sensibilidade por diferenças finitas utilizou-se uma perturbação relativa de 1.0^{-4} .

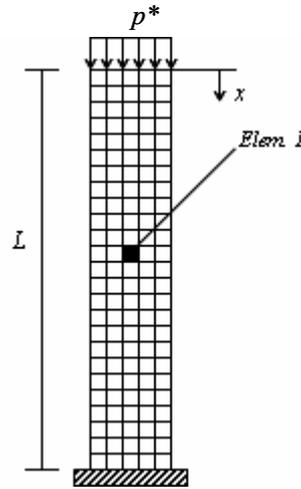


Figura 7.1 Coluna poroelástica e elemento de referência para análise de sensibilidade

Os resultados apresentados a seguir referem-se aos obtidos com os métodos de diferenciação, direto, adjunto e diferenças finitas. Tomam-se os instantes 1 e 100 segundos para apresentação dos resultados. Nas figuras seguintes, as letras a, b e c referem-se respectivamente aos métodos, direto, adjunto e diferenças finitas.

Na Figura 7.2 apresentam-se os resultados para sensibilidade dos deslocamentos verticais da coluna, em relação à permeabilidade intrínseca do elemento de referência, no instante 1 segundo. Na Figura 7.3 os resultados dizem respeito ao instante 100 segundos.

Nota-se, que os resultados obtidos com os três métodos são muito semelhantes, validando dessa forma a formulação proposta para obtenção desses resultados. Com respeito ao comportamento das respostas é possível se observar que para o instante 1 segundo os deslocamentos verticais mais sensíveis à perturbação da permeabilidade intrínseca do elemento de referência encontram-se próximos ao elemento de referência. Com o processo de adensamento da coluna poroelástica, se verifica que os deslocamentos verticais mais sensíveis encontram-se próximos ao topo da coluna.

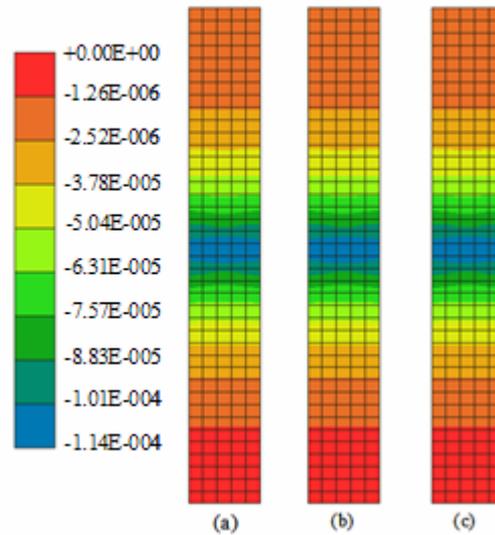


Figura 7.2 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à K , (1 segundo)

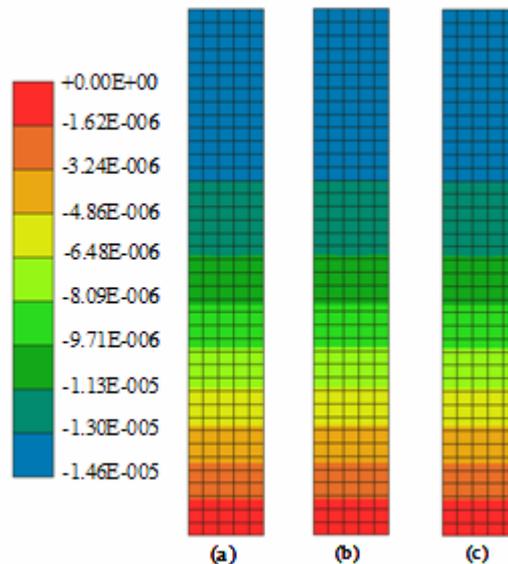


Figura 7.3 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à K , (100 segundos)

Nas figuras seguintes, Figura 7.4 e Figura 7.5, os resultados referem-se à sensibilidade dos deslocamentos verticais com relação ao módulo de elasticidade transversal, também para os instantes 1 e 100 segundos. Constata-se com essas respostas que os deslocamentos verticais da coluna poroelástica são mais sensíveis à variações da permeabilidade intrínseca do que à variações do módulo de elasticidade transversal. Além disso, se verifica que os deslocamentos verticais mais sensíveis à perturbações no módulo de elasticidade transversal do elemento de referência se encontram próximos ao elemento de referência, independente do tempo de análise. Os valores máximos de sensibilidade são obtidos para os

deslocamentos verticais localizados nos nós da aresta superior do elemento de referência.

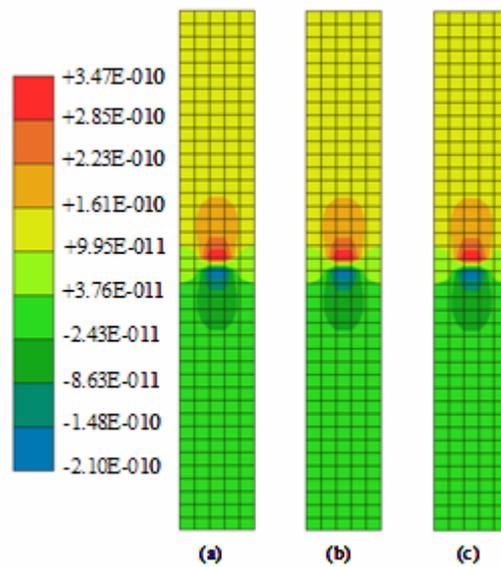


Figura 7.4 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à G, (1 segundo)

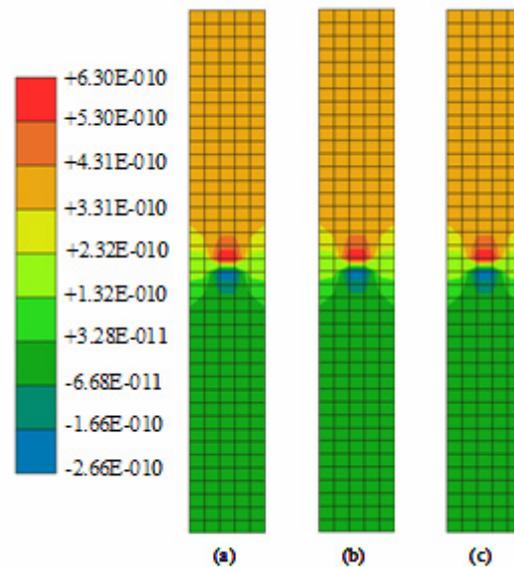


Figura 7.5 Sensibilidade dos deslocamentos verticais em relação à G, (100 segundos)

Assim como apresentado para os deslocamentos verticais da coluna, apresentam-se os resultados para a sensibilidade das poro pressões em relação à permeabilidade intrínseca e ao módulo de elasticidade transversal do elemento de referência.

Os resultados obtidos para os dois instantes de avaliação, com os diferentes métodos, também se apresentam muito semelhantes.

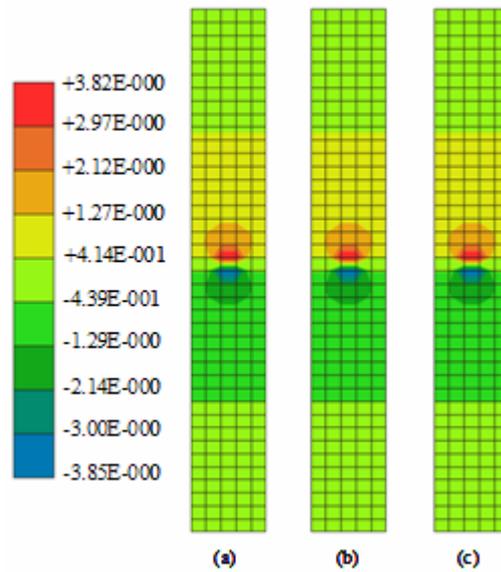


Figura 7.6 Sensibilidade das poro pressões em relação à K, (1 segundo)

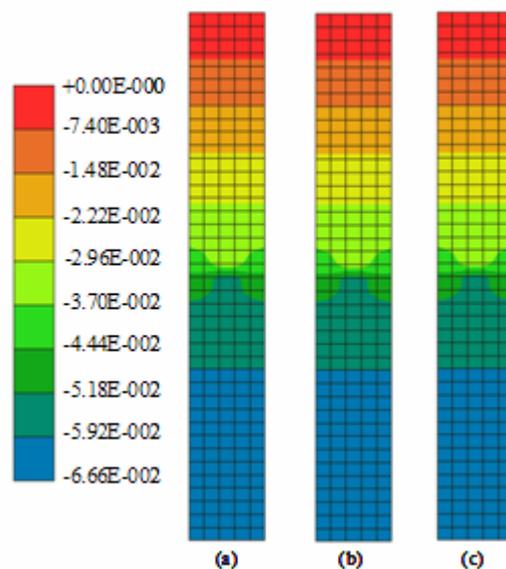


Figura 7.7 Sensibilidade das poro pressões em relação à K, (100 segundos)

Nota-se, com as respostas apresentadas nas figuras anteriores, que as poro pressões na coluna poroelástica são mais sensíveis à perturbações da permeabilidade intrínseca do elemento de referência nos instantes iniciais do processo de adensamento.

Assim como verificado na análise de sensibilidade dos deslocamentos verticais, se constata que as respostas em termos de poro pressões são mais sensíveis à perturbações nos valores da permeabilidade intrínseca do que à perturbações nos valores do módulo de elasticidade transversal do elemento de

referência. Nota-se também, que as poro pressões mais sensíveis à perturbações do módulo de elasticidade transversal do elemento de referência se encontram inicialmente na parte superior da coluna poroelástica se deslocamento, durante o processo de adensamento, para a parte inferior da coluna.

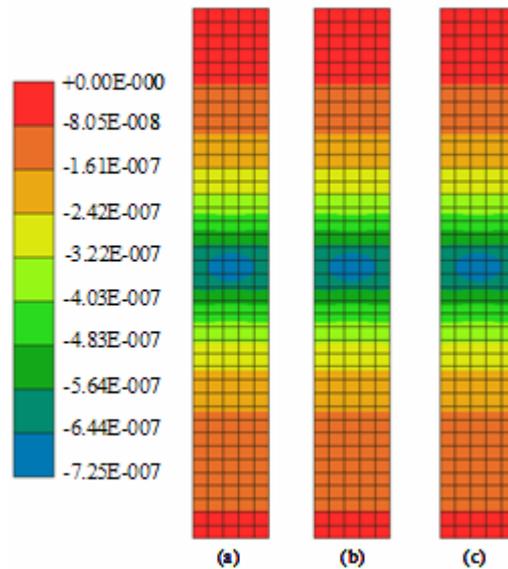


Figura 7.8 Sensibilidade das poro pressões em relação à G, (1 segundo)

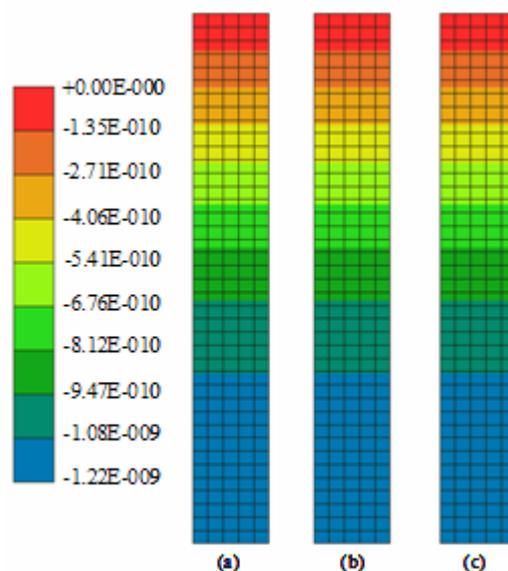


Figura 7.9 Sensibilidade das poro pressões em relação à G, (100 segundos)

Além da verificação dos resultados obtidos com a formulação proposta, constatou-se com o exemplo analisado que as respostas em deslocamentos e poro pressões são mais sensíveis às variações da permeabilidade intrínseca do que às

variações do módulo de elasticidade transversal. Verificou-se também o caráter transiente das respostas obtidas, ou seja, as sensibilidades variam consideravelmente no tempo.

Assim como verificado nesse exemplo, bons resultados são obtidos quando se avaliam as sensibilidades em relação às propriedades de outros elementos.

A Tabela 7.1 apresenta os tempos relativos para análise de sensibilidade do exemplo de adensamento unidimensional.

Tabela 7.1 Tempo relativo para análise de sensibilidade

Método de análise	Tempo relativo de análise
Método de diferenciação direto	1,000
Método de diferenciação adjunto	0,776
Diferenças finitas	1,413

Com base nos resultados apresentados na Tabela 7.1, indica-se o método de diferenciação adjunto para realização de análises de sensibilidade de problemas de acoplamento fluido mecânico lineares.

Nesse capítulo do trabalho não foram enfatizados comentários a respeito dos resultados obtidos com a análise de sensibilidade. Todavia, a análise de sensibilidade pode ser empregada para uma melhor compreensão dos fenômenos envolvidos nos problemas de acoplamento fluido mecânico, sobretudo em problemas complexos, quantificando a variação das respostas com relação às variáveis dos problemas.

8 Exemplos

8.1. Introdução

Esse capítulo apresenta inicialmente um breve exemplo de análise determinística para avaliação dos valores limites de pressão interna num problema de acoplamento fluido mecânico com fluxo monofásico. Num primeiro momento, a apresentação desse exemplo é importante, por demonstrar a aplicabilidade do procedimento numérico proposto no capítulo 6 para determinação desses limites. Num segundo momento esse exemplo será utilizado para comparações com os resultados obtidos quando uma análise probabilística do mesmo exemplo for efetuada.

No segundo exemplo faz-se uma análise probabilística do poço vertical apresentado no exemplo 2 do capítulo 5, impondo-se uma pressão interna e condições para representação da variabilidade espacial das propriedades consideradas aleatórias e a variabilidade das condições iniciais de tensões e poro pressões. Empregam-se os diferentes tipos de métodos de análise estatística para solução desse problema. Alguns resultados obtidos são apresentados e as diferenças obtidas nas respostas, discutidas. Também se apresentam alguns efeitos da variabilidade das propriedades aleatórias envolvidas, analisando-se o exemplo para diferentes coeficientes de variação. Por fim, mostra-se uma possibilidade de resultado para a região plastificada em torno do poço para uma possível simulação de Monte Carlo.

No exemplo 3 avaliam-se os limites de pressão interna do exemplo 2 considerando o comportamento probabilístico. Os critérios estabelecidos no item referente à análise de confiabilidade e o procedimento numérico para busca dos valores limite de pressão interna são utilizados para avaliação desse limites.

O último exemplo apresentado trata da análise probabilística de um poço horizontal mediante o acoplamento fluido mecânico com fluxo bifásico. Mostram-se nesse exemplo alguns aspectos referentes aos efeitos da variabilidade das

propriedades aleatórias. Estuda-se além do comportamento geral das respostas, a influência e a variabilidade das tensões atuantes no revestimento do poço mediante a frente de fluido molhante. Apresenta-se também a resposta do problema para uma possível distribuição espacial das variáveis aleatórias numa simulação de Monte Carlo.

Nos exemplos analisados emprega-se o procedimento *staggered*. Para solução do problema não linear global do problema mecânico utiliza-se o método *L-BFGS* e para a análise dos valores limites para a pressão interna considera-se a condição na qual a área plastificada atinge o regime permanente.

8.1.1. Exemplo 1: determinação de PI considerando comportamento determinístico

O exemplo analisado nesse item é o apresentado no capítulo 5, exemplo 2. Os dados do problema são apresentados na Tabela 8.1. Utilizar-se-ão os dados dessa tabela no exemplo seguinte.

Tabela 8.1 Dados dos exemplos 1, 2 e 3

Parâmetros	Valor médio	Fdp
G (MPa)	6000.00	Lognormal
ν	0.20	-
K_s (MPa)	38000.00	-
K_π (MPa)	2884.00	-
ϕ	0.19	-
c (MPa)	10.00	Lognormal
Φ (graus)	30.00	Lognormal
k (m ²)	1.90E-15	Lognormal
μ_π (MPas)	1.00E-9	-
$\sigma_{0_{xx}}$ (MPa)	-30.00	Normal
$\sigma_{0_{yy}}$ (MPa)	-50.00	Normal
p_0 (MPa)	15.00	Lognormal
A_{lim} m ²	0.031	Normal
T_0 (MPa)	6.00	Normal

No exemplo apresentado no item 5.3 assumiu-se para o material o comportamento elástico linear. Agora se assume que o material apresenta comportamento elástico perfeitamente plástico, descrito pelo critério de Mohr

Coulomb. Empregando-se os procedimentos descritos no capítulo 6 obtiveram-se como limites de PI os valores de 20.6 e 45.5 (MPa), respectivamente para os limites inferior e superior. Observa-se que para obtenção desses resultados o comportamento transiente das respostas nas proximidades do poço foi considerado, incluindo a condição drenada e a condição não drenada. Os limites obtidos correspondem à condição crítica, sendo para esse exemplo verifica na condição não drenada. A Figura 8.1 apresenta esses resultados de forma ilustrativa.

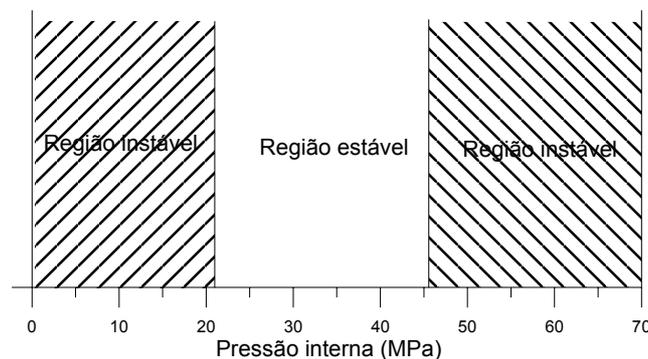


Figura 8.1 Limites de PI considerando comportamento determinístico

8.1.2. Exemplo 2: análise probabilística para uma determinada PI

A geometria do exemplo analisado é apresentada no capítulo 5, exemplo 2, sendo aplicada na parede do poço uma pressão interna de 20 (MPa). O comportamento elástico perfeitamente plástico é assumido, o critério de Mohr Coulomb e o estado plano de deformações são adotados. As variáveis do problema, as variáveis consideradas aleatórias e as respectivas funções densidade de probabilidade consideradas no exemplo apresentam-se na Tabela 8.1. Adota-se para esse exemplo, para descrição da variabilidade espacial das propriedades aleatórias a função de covariância exponencial e um comprimento de correlação de 6 m. Assume-se um coeficiente de correlação de 0.7 entre G e Φ e entre G e c . Para se obter uma medida dos efeitos da variabilidade das variáveis aleatórias sobre as respostas adotam-se dois valores de coeficiente de variação, $C_v = 0.10$ e $C_v = 0.20$. Dado o número de elementos da malha de elementos finitos utilizada, tem-se para esse exemplo 19205 variáveis aleatórias. Para o método de Monte Carlo são realizadas 1000 simulações e utilizam-se 3 termos para expansão no

método de simulação com expansão de Neumann . Os resultados apresentados nos gráficos a seguir referem-se aos obtidos para um instante de 60 segundos, para um ângulo $\beta = 0^0$.

Inicia-se a apresentação dos resultados mostrando as respostas obtidas com os diferentes métodos de análise estatística. Adota-se como referência para as comparações as respostas obtidas com o método de Monte Carlo.

Na Figura 8.2 apresentam-se os resultados para média da tensão total σ_{yy} para $Cv= 0.10$. Nota-se nessa figura que os resultados obtidos são muito semelhantes.

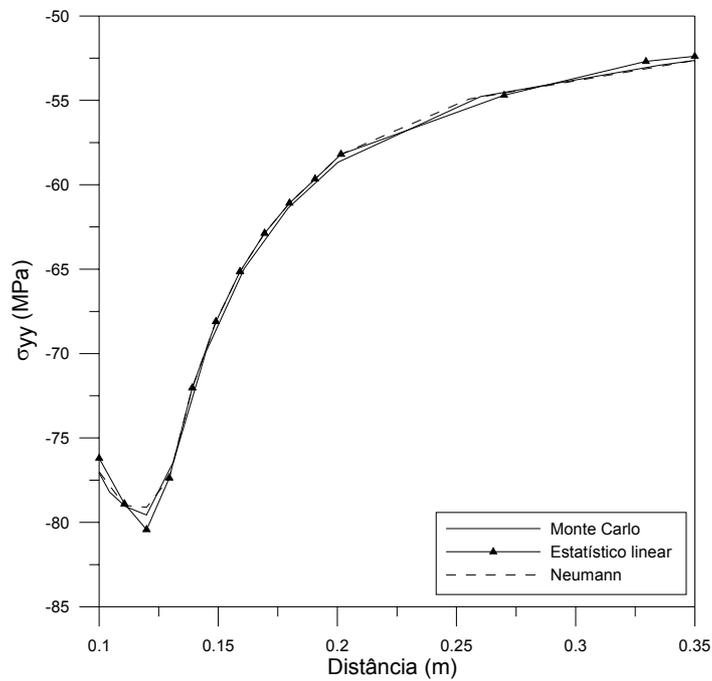


Figura 8.2 Média de σ_{yy} para $Cv = 0.10$ em $\beta = 0^0$

Na Figura 8.3 apresentam-se os resultados para média da tensão total σ_{yy} para $Cv= 0.20$.

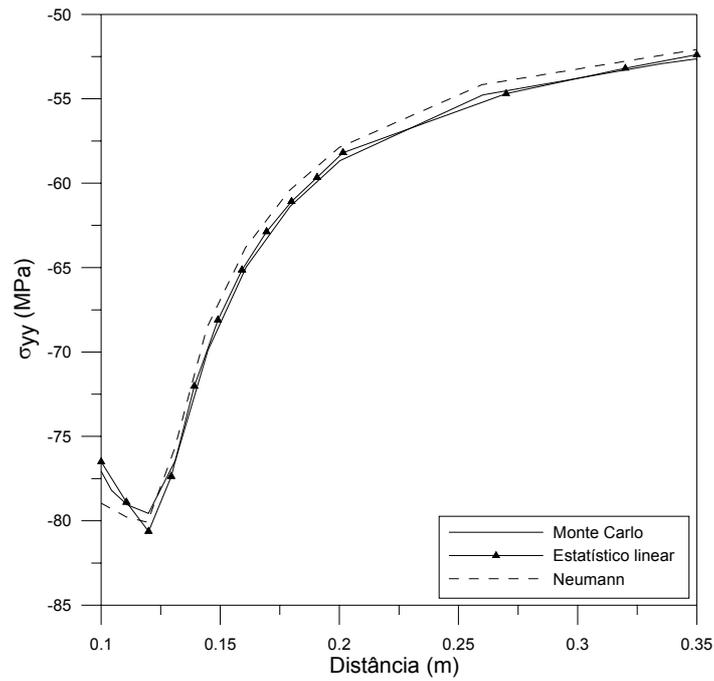


Figura 8.3 Média de σ_{yy} para $C_v = 0.20$ em $\beta = 0^0$

Nota-se que para essa condição os resultados também são semelhantes, com uma pequena dispersão da resposta obtida com o método de Neumann na região próxima ao poço, onde ocorre plastificação.

Na Figura 8.4 mostram-se as respostas para o desvio padrão da tensão total σ_{yy} . Nota-se que os valores obtidos com os 3 métodos são muito semelhantes na região onde não ocorre plastificação. Entretanto, na região próxima ao poço, onde ocorre plastificação, os resultados obtidos com o método estatístico linear e Neumann diferem dos obtidos com o método de Monte Carlo.

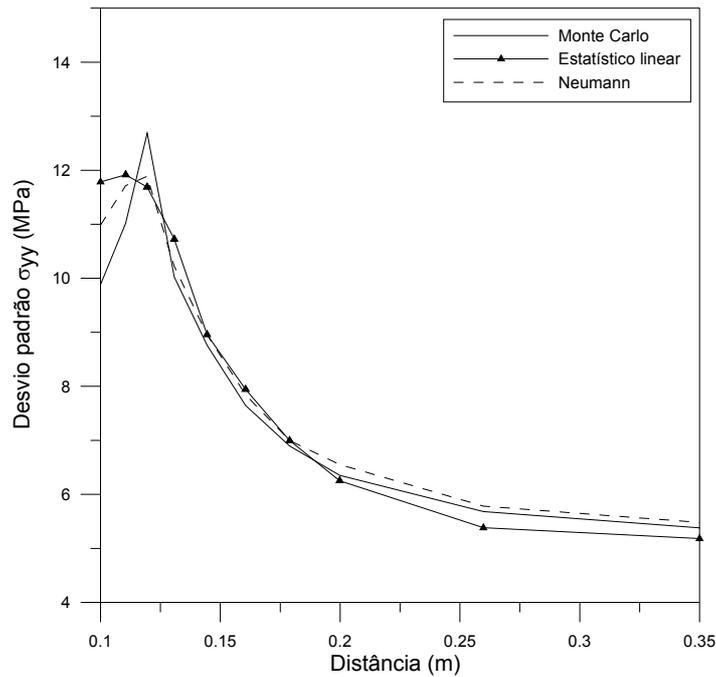


Figura 8.4 Desvio padrão de σ_{yy} para $C_v = 0.10$ em $\beta = 0^0$

Apresentam-se na Figura 8.5, os resultados de desvio padrão da tensão total σ_{yy} para $C_v=0.20$. Assim como verificado para $C_v=0.10$ os valores próximos ao poço apresentam divergência, sendo essa maior do que a verificada para $C_v=0.10$. Nota-se também que o método estatístico linear não conseguiu representar o comportamento apresentado pelo método de Monte Carlo nas proximidades do poço.

Os valores médios para poro pressão, obtidos para $C_v=0.10$ e $C_v=0.20$, são apresentados nas figuras (Figura 8.6 e Figura 8.7) respectivamente. Verificam-se pequenas diferenças nos resultados, sendo as maiores diferenças encontradas para $C_v=0.2$ e para o método estatístico linear.

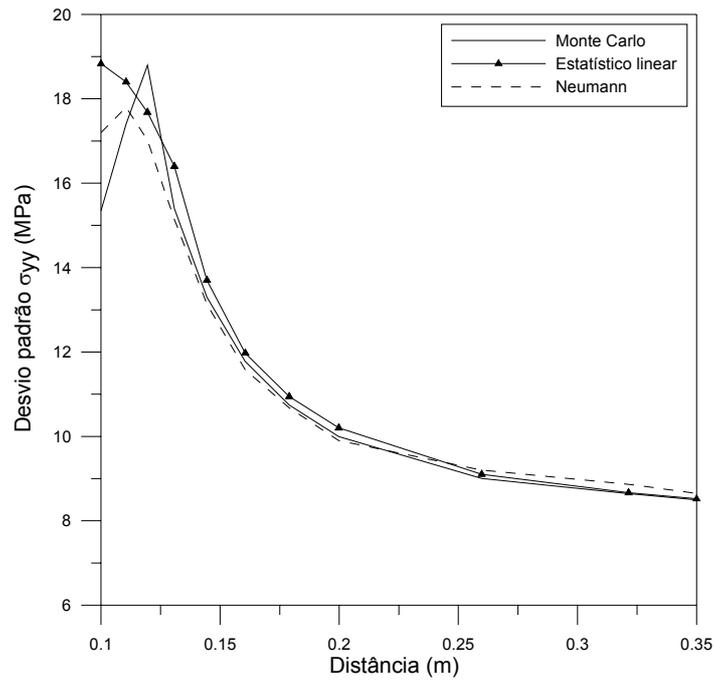


Figura 8.5 Desvio padrão de σ_{yy} para $C_v = 0.20$ em $\beta = 0^0$

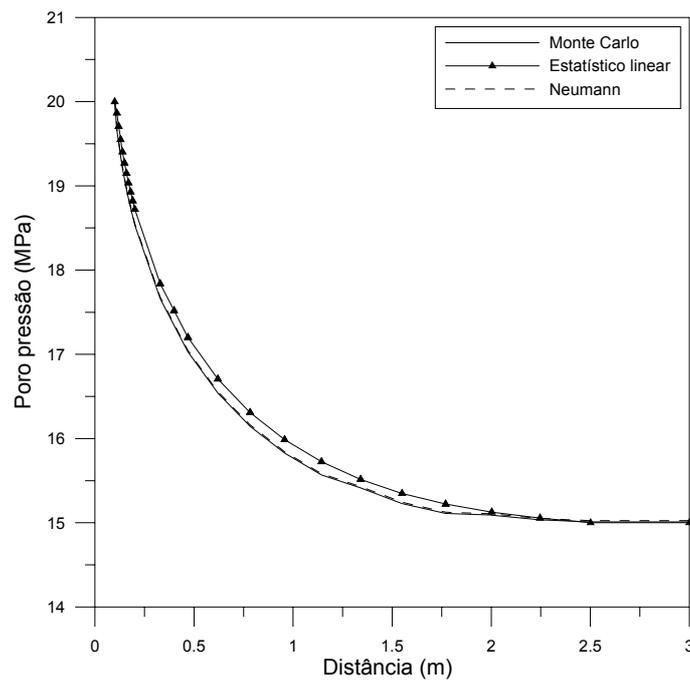


Figura 8.6 Média da poro pressão para $C_v = 0.10$ em $\beta = 0^0$

Assim como apresentado para as respostas em tensões, mostram-se nas figuras seguintes os valores de desvio padrão para as poro pressões. Na Figura 8.8 apresentam-se os valores de desvio padrão para poro pressão para um $C_v=0.10$. Se

verifica que os valores obtidos são muito semelhantes, independente do método utilizado.

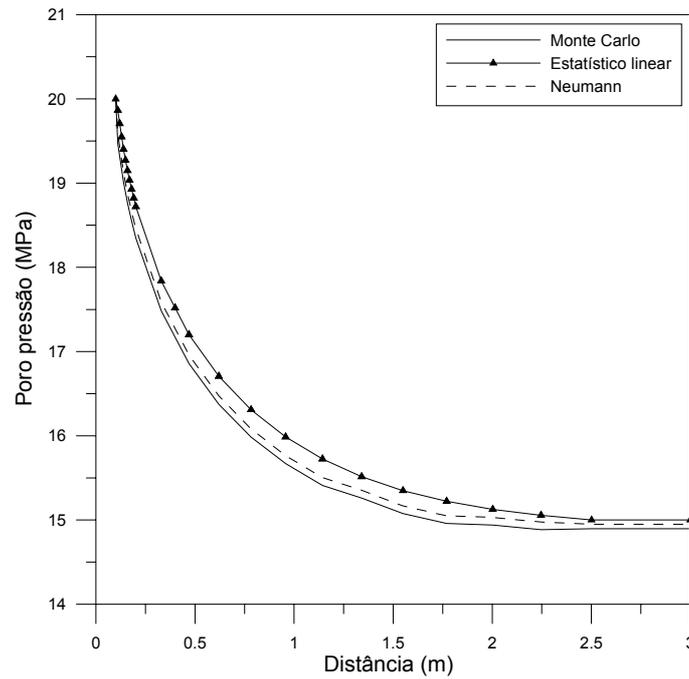


Figura 8.7 Média da poro pressão para $C_v = 0.20$ em $\beta = 0^0$

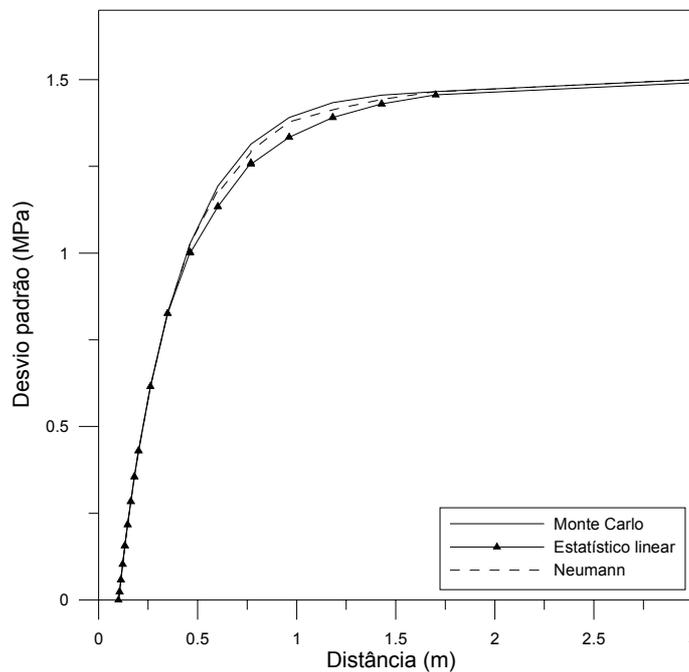


Figura 8.8 Desvio padrão da poro pressão para $C_v = 0.10$ em $\beta = 0^0$

Para a condição de $C_v=0.20$, Figura 8.9, se percebe para os valores de desvio padrão da poro pressão algumas diferenças maiores na região central do

domínio do problema. Cabe ressaltar que os valores nulos de desvio padrão das poro pressões na parede do poço se devem ao fato de se ter imposto a condições de pressão de 20 (MPa) nessa região e que a mesma é considerada determinística.

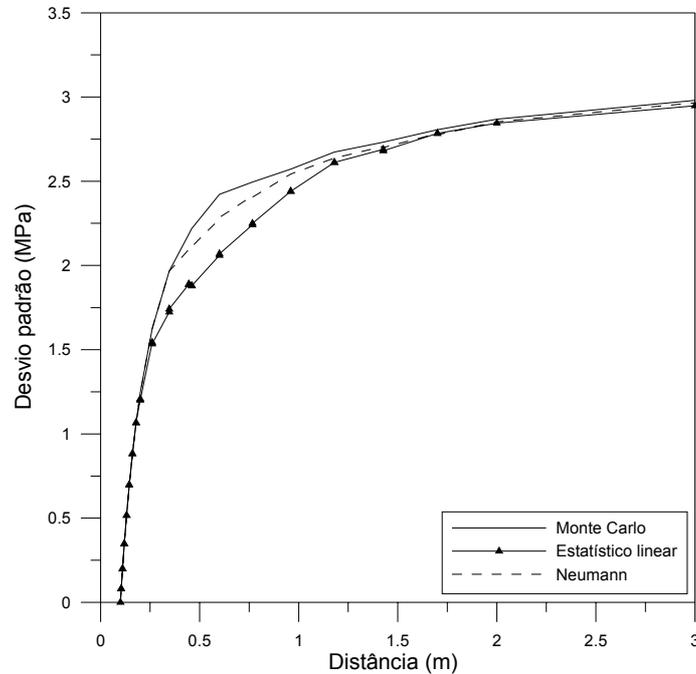


Figura 8.9 Desvio padrão da poro pressão para $C_v = 0.20$ em $\beta = 0^0$

De maneira geral, respostas médias semelhantes foram obtidas com os diferentes métodos de análise. Dispersões mais significativas foram encontradas nos valores de desvio padrão das respostas, sobretudo para as respostas de desvio padrão das tensões principalmente obtidas com o método estatístico linear.

Outro fator muito importante refere-se ao tempo requerido para realização dessas análises. Dado o número de variáveis aleatórias do problema e à dificuldade de se efetuar a análise de sensibilidade das respostas em relação a essas variáveis, o método estatístico linear apresentou-se muito ineficiente. O método de simulação com expansão de Neumann, com somente 3 termos na expansão, também necessitou mais tempo para análise do que o método de simulação de Monte Carlo.

A Tabela 8.2 apresenta o tempo relativo requerido por cada método de análise para solução desse problema.

Tabela 8.2 Tempo relativo para análise do problema

Método de análise	Tempo relativo de análise
Monte Carlo	1.00
Neumann	1.74
Estatístico linear	19.89

Após a apresentação das comparações entre as repostas obtidas com os diferentes métodos de análise estatística, parte-se para a segunda etapa de análise dos resultados obtidos nesse exemplo. Avaliam-se alguns efeitos da consideração de diferentes níveis de variabilidade, expressos pelo coeficiente de variação das variáveis aleatórias. Como citado anteriormente, as repostas médias obtidas com $Cv=0.10$ e $Cv=0.20$ são muito semelhantes. Entretanto, os valores de desvio padrão mostram-se mais sensíveis à variabilidade das variáveis aleatórias. Os resultados apresentados nas figuras seguintes foram obtidos com o método de Monte Carlo.

Na Figura 8.10 apresentam-se os resultados de desvio padrão para tensão total σ_{yy} para $Cv=0.10$ e $Cv=0.20$. Observa-se nessa figura grandes diferenças nas repostas obtidas.

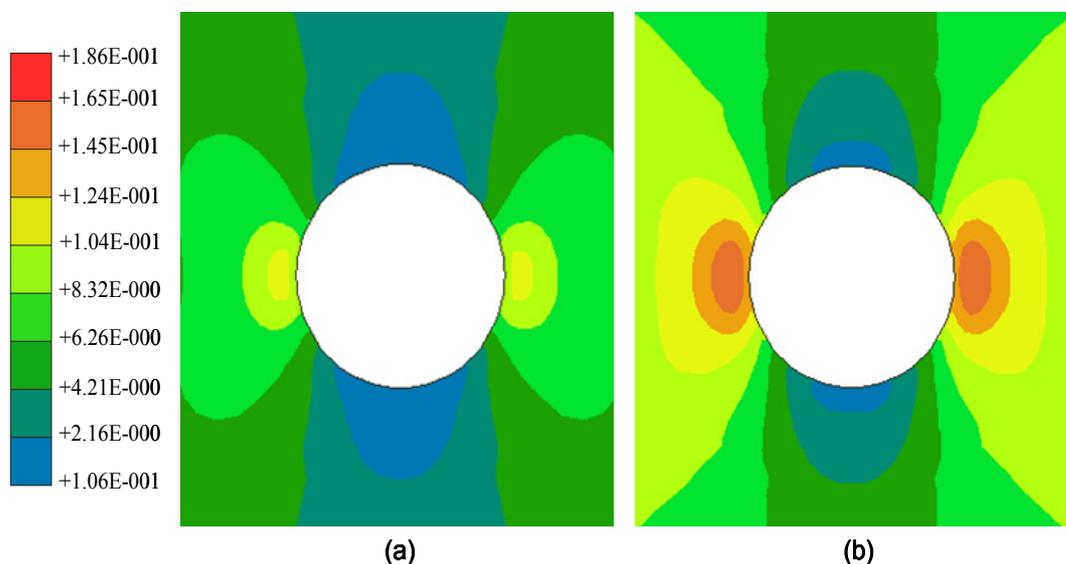


Figura 8.10 Desvio padrão de σ_{yy} para $Cv = 0.10$ (a) e $Cv = 0.20$ (b)

Na Figura 8.11, ao se comparar as repostas obtidas em $\beta = 0^\circ$, essas diferenças ficam mais claras. Para $Cv=0.10$ tem-se valores de desvio padrão próximos a 13 (MPa), para $Cv=0.20$ esses valores encontram-se próximos a 19 (MPa).

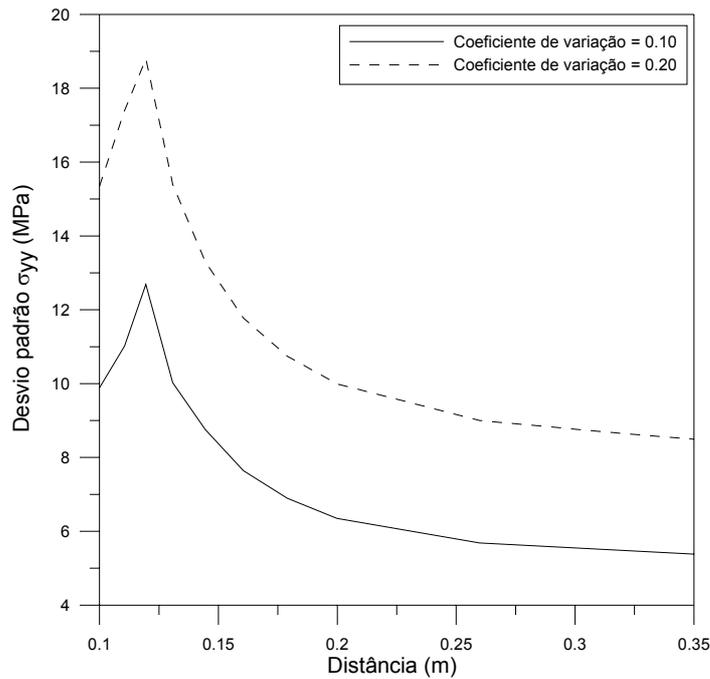


Figura 8.11 Desvio padrão de σ_{yy} para $Cv = 0.10$ e $Cv = 0.20$ em $\beta = 0^0$

De forma semelhante se mostram os valores de desvio padrão das poro pressões. Na Figura 8.12, apresentam-se os valores de desvio padrão das poro pressões na vizinhança do poço.

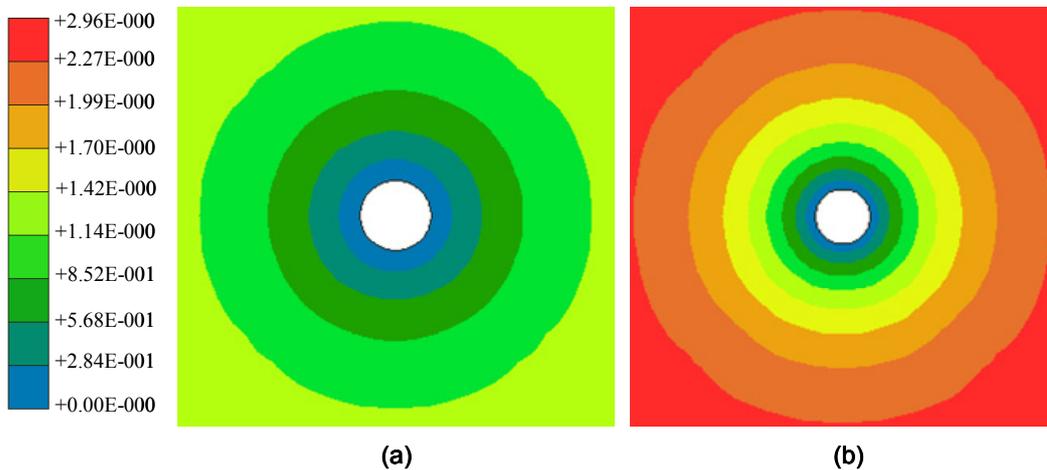


Figura 8.12 Desvio padrão da poro pressão para $Cv = 0.10$ (a) e $Cv = 0.20$ (b)

Na Figura 8.13 apresentam-se essas respostas em $\beta = 0^0$. Notam-se grandes diferenças nesses valores e que os mesmos refletem de maneira adequada as condições de contorno impostas ao problema.

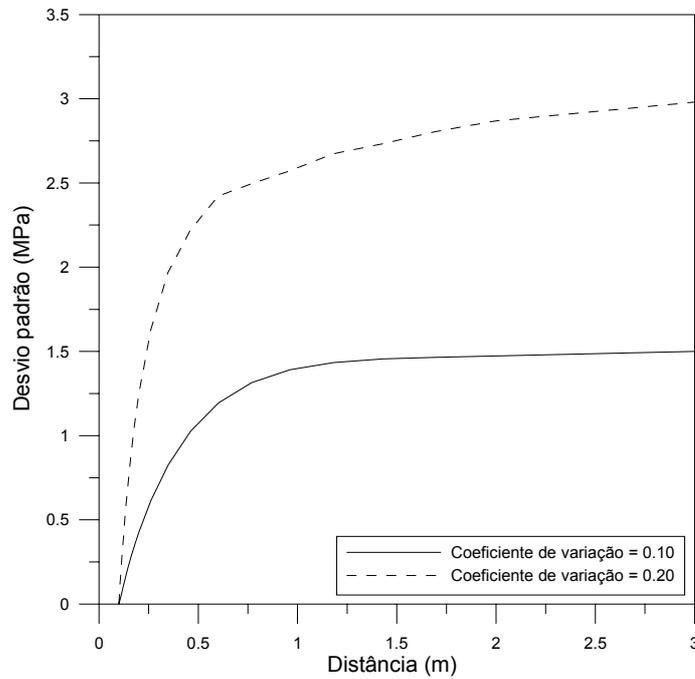


Figura 8.13 Desvio padrão da poro pressão para $Cv = 0.10$ e $Cv = 0.20$ em $\beta = 0^0$

A região com probabilidade de plastificação também é modificada quando se altera a variabilidade das variáveis aleatórias. Nas figuras seguintes apresentam-se essas diferenças. Na Figura 8.14, apresenta-se a região próxima ao poço com probabilidade de plastificação e na Figura 8.15, mostram-se essas probabilidades em $\beta = 0^0$.

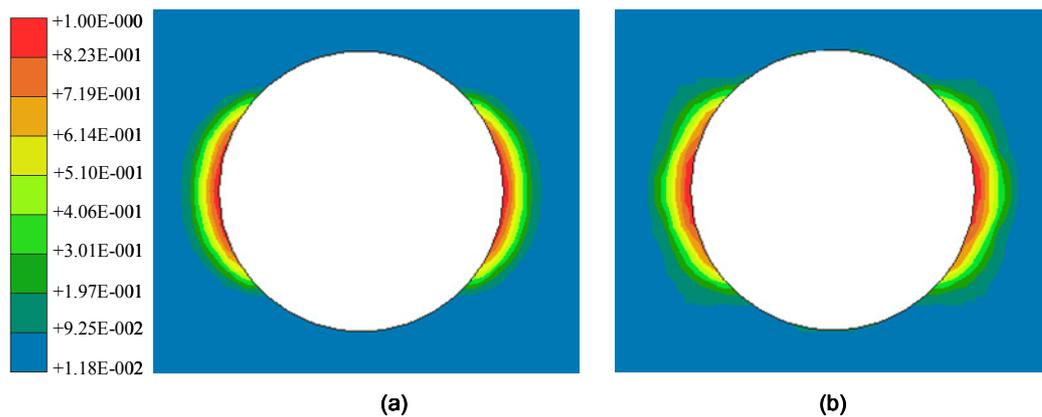


Figura 8.14 Probabilidade de plastificação para $Cv = 0.10$ (a) e $Cv = 0.20$ (b)

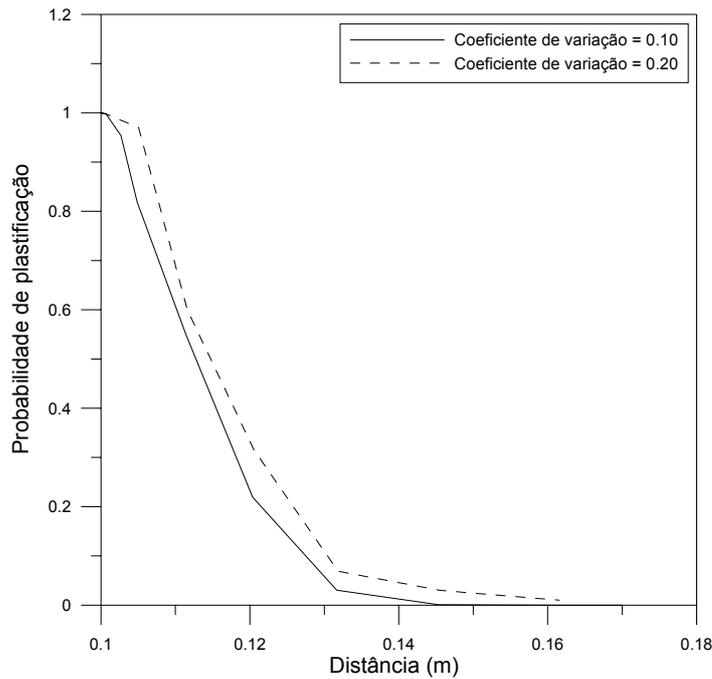


Figura 8.15 Probabilidade de plastificação para $Cv = 0.10$ e $Cv = 0.20$ em $\beta = 0^0$

Verifica-se que a região com probabilidade de plastificação cresce à medida que a variabilidade das variáveis aleatórias aumenta.

A terceira etapa de avaliação das respostas obtidas nesse exemplo, trata das possibilidades de respostas obtidas em uma determinada simulação. Após a geração dos possíveis campos aleatórios, respostas significativamente diferentes das obtidos no caso em que não se considera a variabilidade espacial das variáveis aleatórias podem ser encontradas. Para exemplificar, analisa-se o exemplo corrente, para uma simulação de Monte Carlo. Assume-se para a coesão do meio poroso um coeficiente de variação igual a 0.30, sendo para as demais variáveis aleatórias, adotado 0.20.

Nas figuras seguintes apresentam-se os campos aleatórios gerados para essa simulação. Os gráficos apresentados ao lado dos campos aleatórios, descrevem os valores gerados para pontos que vão do canto superior esquerdo até o canto inferior direito do domínio.

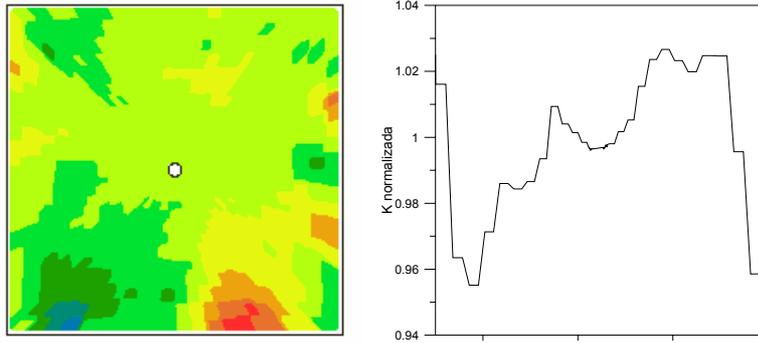


Figura 8.16 Campo aleatório para k e gráfico para k normalizada

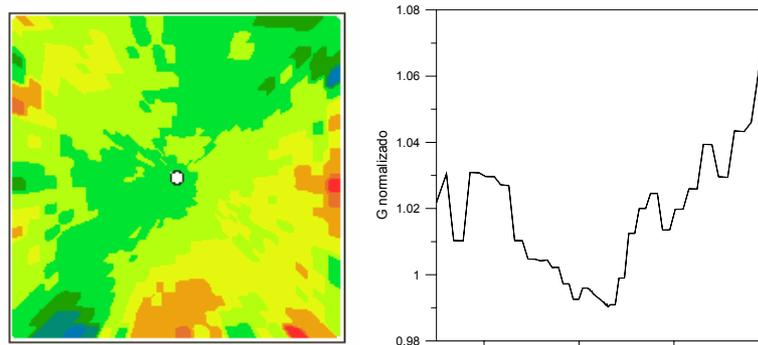


Figura 8.17 Campo aleatório para G e gráfico para G normalizado

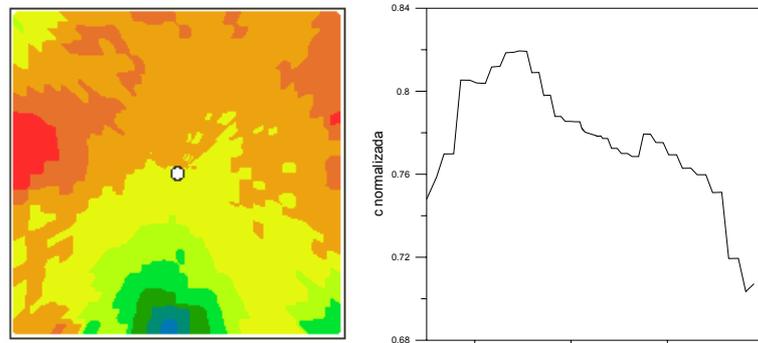


Figura 8.18 Campo aleatório para c e gráfico para c normalizada

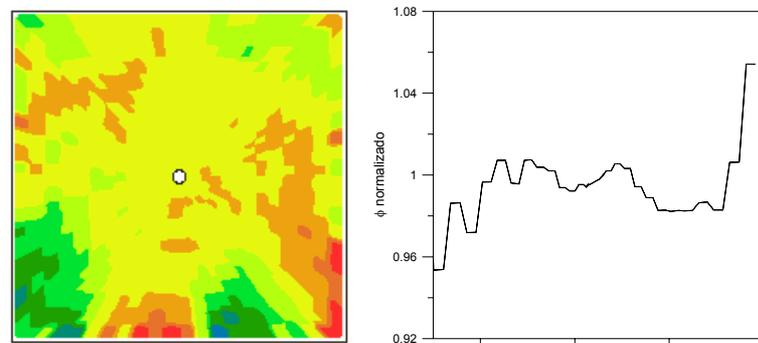


Figura 8.19 Campo aleatório para Φ e gráfico para Φ normalizado

Para essas condições, uma região plastificada na vizinhança do poço, como apresentado na Figura 8.20, é obtida. Nota-se nessa figura que a região plastificada não apresenta simetria, sendo dessa forma, consideravelmente diferente da obtida para uma condição sem variabilidade.

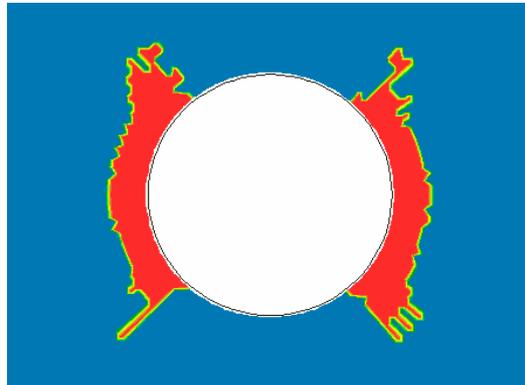


Figura 8.20 Área plastificada para uma determinada simulação de Monte Carlo

8.1.3. Exemplo 3: determinação de *PI* considerando comportamento probabilístico

Assim como realizado para o comportamento determinístico, determinam-se agora os limites de *PI* para o problema apresentado no capítulo 5, exemplo 2, considerando o comportamento probabilístico. As mesmas observações expostas para determinação dos valores limites segundo o comportamento determinístico são consideradas na corrente análise. Para modelagem numérica do problema as condições indicadas no item 8.1.2 e os dados apresentados na Tabela 8.1 são utilizadas. Os critérios para avaliação da probabilidade de falha e os procedimentos numéricos para determinação dos limites de *PI* foram descritos no capítulo 6. Para avaliação dos efeitos gerados pela variabilidade das propriedades aleatórias adotam-se coeficientes de variação iguais a 0.10 e 0.20.

Na Figura 8.21 apresenta-se a probabilidade de falha para diferentes valores de pressão interna. Verifica-se que as respostas obtidas com a consideração de valores de C_v distintos são semelhantes, sendo mais consertadores os valores obtidos com $C_v=0.20$. Salienta-se que tanto as propriedades do meio quanto à área limite de plastificação são variáveis aleatórias.

As curvas apresentadas indicam, para o limite inferior, que para uma pressão interna de 10 (MPa) uma probabilidade de falha em torno de 60% é

obtida. A probabilidade de falha decresce de forma quase linear até uma probabilidade de falha de 1%, sendo essa probabilidade obtida para uma pressão interna de aproximadamente 30 (MPa).

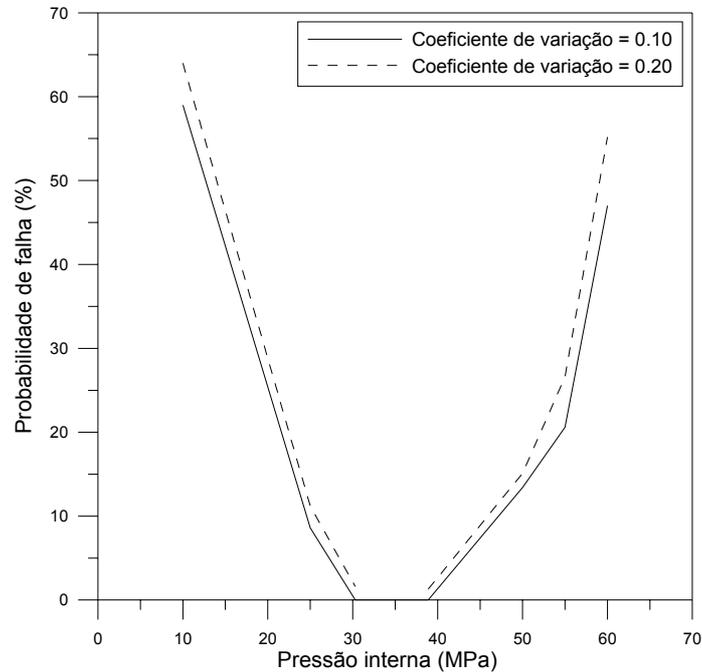


Figura 8.21 Probabilidade de falha x Pressão interna

Para o limite superior uma pressão interna próxima a 39 (MPa) é necessária para obtenção de uma probabilidade de falha de 1%. Um valor de pressão interna em torno de 60 (MPa) corresponde a uma probabilidade de falha próxima a 50%.

Considerando agora uma representação semelhante à apresentada na Figura 8.1, para $Cv=0.10$ e uma probabilidade de falha inferior a 1%, apresentam-se na Figura 8.22 os valores limites para pressão interna para essas condições.

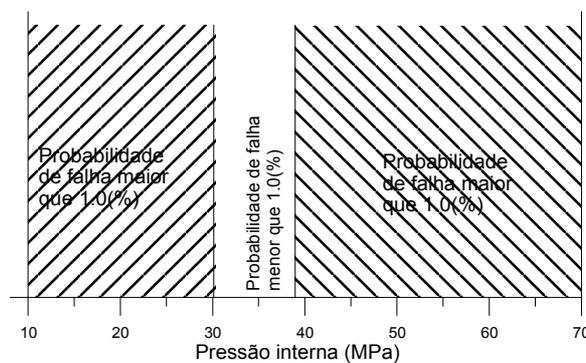


Figura 8.22 Região com probabilidade de falha para $Cv=0.10$ e $P_{f_{target}} = 0.01$

Ao se comparar os valores determinados com a consideração do comportamento probabilístico com os valores obtidos segundo o comportamento determinístico se verifica que o limite inferior de 20.6 (MPa) encontrado para a condição determinística corresponde a uma probabilidade de falha em torno de 20%. O limite superior de 45.5 (MPa) encontrado para condição determinística corresponde a uma probabilidade de falha próxima a 10%.

Na utilização do procedimento numérico sugerido para determinação dos valores limites para pressão interna, considerando o comportamento probabilístico, $P_{f, target} = 0.01$ e iniciando o processo com $PI = 20.0$ (MPa) e 45.0 (MPa), respectivamente para os limites inferior e superior, foram necessárias 5 iterações no processo de busca até atingir a convergência requerida no método de Newton Raphson. Para se obter repostas de maneira mais rápida, sugere-se que valores iniciais relativamente próximos à solução sejam utilizados, indicando-se para isso os valores obtidos para o comportamento determinístico.

8.1.4. Exemplo 4: análise probabilística de um poço horizontal considerando fluxo bifásico

A geometria do exemplo analisado é apresentada no capítulo 5, exemplo 4. O comportamento elástico perfeitamente plástico é assumido, sendo o critério de Mohr Coulomb adotado para o Gravel e para a formação e o critério de Von Mises para o revestimento do poço, assume-se para o modelo o estado plano de deformações. As variáveis do problema, as variáveis consideradas aleatórias e as respectivas funções densidade de probabilidade consideradas no exemplo apresentam-se na Tabela 8.3. Adota-se para esse exemplo, para descrição da variabilidade espacial das propriedades aleatórias a função de covariância exponencial e um comprimento de correlação de 7 m. Assume-se um coeficiente de correlação de 0.5 entre G e Φ e entre G e c. Adota-se nesse exemplo um coeficiente de variação, $Cv = 0.20$ para todas as variáveis aleatórias. Impõem-se para $t \geq 0$, a uma distância de 3 m do poço, $S_w = 0.60$, $p_{mw} = p_{mw0}$ e no poço uma condição de vazão total constante $q_T = q_w + q_{nw} = 3m^3 / dia$.

Apresenta-se na Figura 8.23 a resposta média obtida para o campo de saturação de fluido molhante, na região próxima ao poço, para o tempo de 9.84

horas. Verifica-se nessa figura que a resposta média obtida apresenta uma frente de saturação não uniforme. Portanto, considerando-se a variabilidade das propriedades, a chegada do fluido molhante ao poço apresenta ligeiras variações. O fluido molhante chega ao poço num tempo de 10.38 horas, logo após esse instante todo o contorno do poço apresentará uma saturação igual a 0.60, condição inicial imposta no contorno do domínio. Observa-se que para esse exemplo, quando uma análise determinística é efetuada, a frente de saturação é uniforme.

Tabela 8.3 Dados do exemplo 4

	Variáveis	Valor médio	Fdp
Gravel	G (MPa)	8334.00	Lognormal
	ν	0.20	-
	c (MPa)	2.00	Lognormal
	Φ (graus)	30.00	Lognormal
	k (m ²)	6.9E-14	Lognormal
Formação	G (MPa)	17500.00	Lognormal
	ν	0.20	-
	c (MPa)	5.00	Lognormal
	Φ (graus)	30.00	Lognormal
	k (m ²)	6.9E-15	Lognormal
	$\sigma_{0_{xx}}$ (MPa)	-40.00	Normal
	$\sigma_{0_{yy}}$ (MPa)	-65.00	Normal
p_{m0} (MPa)	36.00	Lognormal	
Revestimento	E (MPa)	2.0E5	-
	σ_y (MPa)	758.00	-
	ν	0.29	-
	P_d (MPa)	5.00	-
	ϕ	0.19	-
	β	0.20	-
	μ_w (MPa s)	0.4E-9	-
	μ_{mw} (MPa s)	1.0E-9	-
	K_s (MPa)	38000.00	-
	K_π (MPa)	2884.00	-

O campo de desvio padrão da saturação de fluido molhante, para o tempo de 9.8 horas é apresentado na Figura 8.24. Observa-se nessa figura, para esse tempo de análise, valores de desvio padrão apenas na região da frente de saturação. Esse comportamento apresenta-se conforme esperado, sendo compatível com as condições de contorno impostas ao problema. Assim como

verificado para as respostas médias, os valores de desvio padrão também não são uniformes.

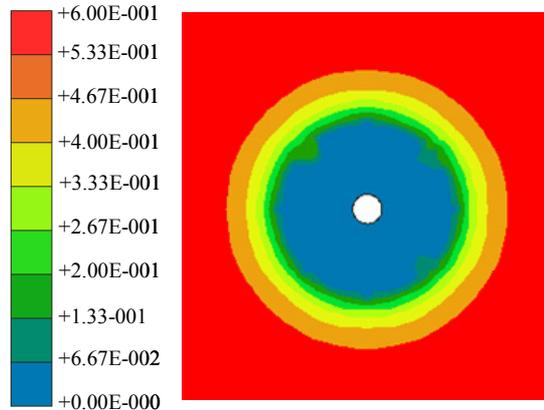


Figura 8.23 Média da saturação de fluido molhante

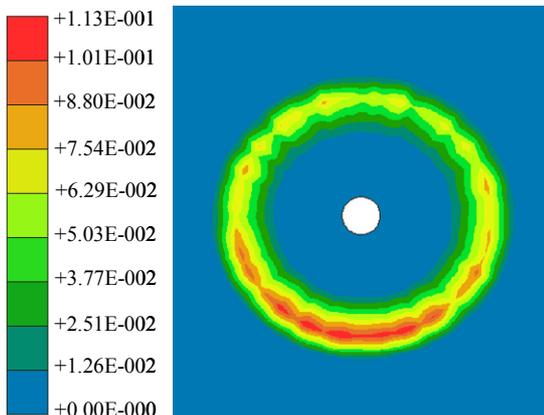


Figura 8.24 Desvio padrão da saturação de fluido molhante

Considerando o tempo necessário para chegada do fluido molhante ao poço, adota-se o tempo de análise de 11 horas para a observação de algumas respostas ao longo do tempo.

Apresentam-se a seguir algumas comparações das respostas obtidas considerando-se a entrada de fluido molhante, com as respostas obtidas sem essa consideração, ou seja, com a condição de fluxo monofásico. Os pontos de observação A e B, para os quais se apresentam essas respostas, são indicados na Figura 5.11. Adotam-se esses pontos para avaliação das tensões, por serem pontos pertencentes ao revestimento do poço. Busca-se, de forma bastante simples, quantificar a influência do comportamento bifásico nas respostas de tensões

nesses pontos, em conjunto com a avaliação dos efeitos da variabilidade de algumas propriedades nessas respostas.

Na Figura 8.25 apresentam-se os resultados médios da tensão principal S1 no ponto A ao longo do tempo, para os casos monofásico e bifásico.

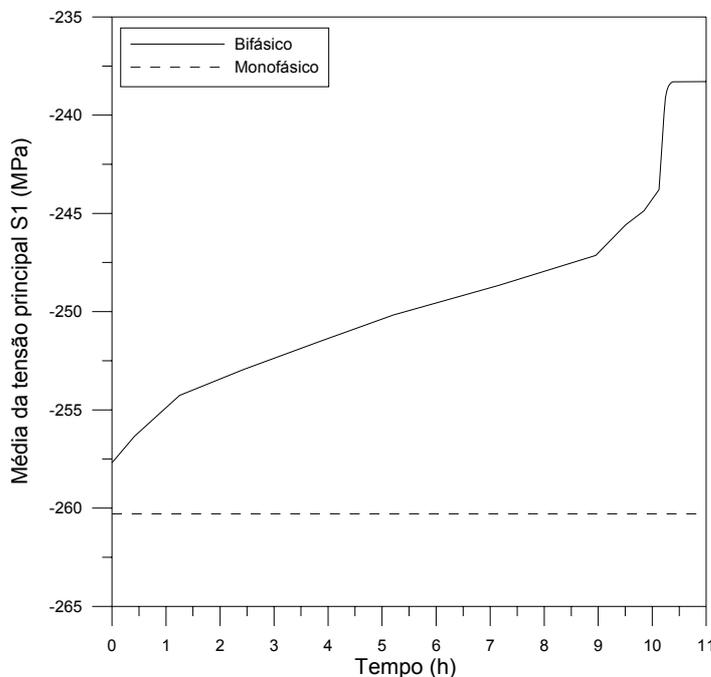


Figura 8.25 Média da tensão principal S1 no ponto A

Constata-se que as respostas são bastante distintas. Enquanto o resultado obtido para a condição de fluxo bifásico apresenta um caráter transiente, a resposta para a condição de fluxo monofásico é constante no tempo. Para a condição de fluxo bifásico, a variação ao longo do tempo do valor da tensão principal foi de aproximadamente 8%. Nesse exemplo, com a chegada da frente de saturação no poço, as respostas para a condição de fluxo bifásico também se tornam constantes no tempo.

De forma muito semelhante se apresentam os resultados obtidos para a tensão principal S1 no ponto B, Figura 8.26. O comportamento das respostas nesse ponto é idêntico ao verificado no ponto A.

Após essas avaliações, parte-se para a apresentação de respostas de desvio padrão obtidas nessa análise. Nas figuras seguintes, Figura 8.27 e Figura 8.28, apresentam-se os valores de desvio padrão da tensão principal S1 ao longo do tempo, para os pontos de observação A e B. Nota-se nessas figuras que o

comportamento das respostas para os dois pontos é distinto. Para o ponto A, o desvio padrão cresce ao longo do tempo. Para o ponto B o desvio padrão apresenta comportamento inverso, decrescendo ao longo do tempo. Apesar dessas diferenças, se percebe que os valores de desvio padrão ao longo do tempo sofrem apenas pequenas mudanças. Assim como o verificado para os valores médios, as respostas de desvio padrão tornam-se constantes com a chegada da frente de saturação ao poço.

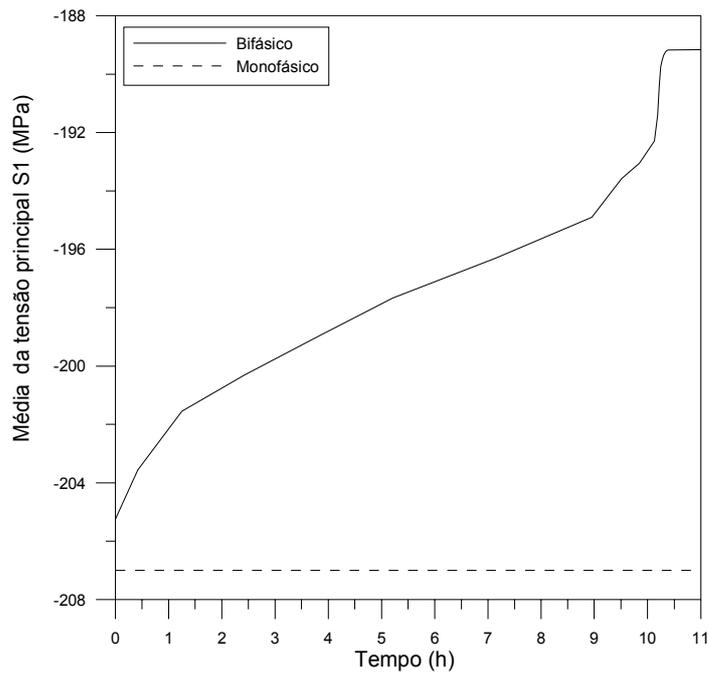


Figura 8.26 Média da tensão principal S1 no ponto B

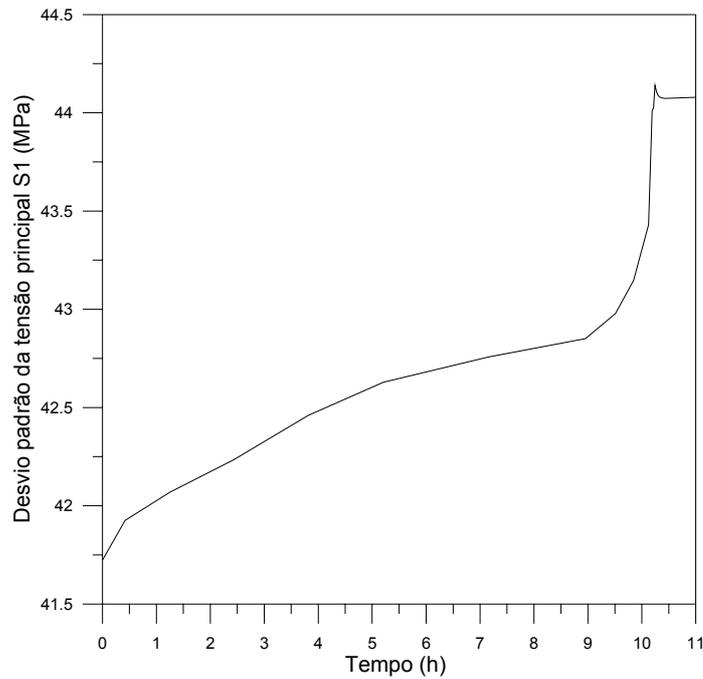


Figura 8.27 Desvio padrão da tensão principal S1 no ponto A

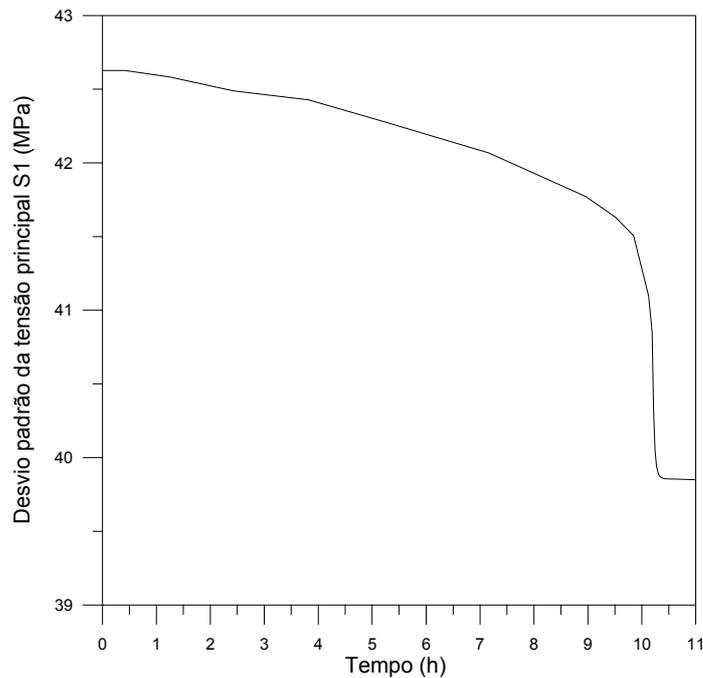


Figura 8.28 Desvio padrão da tensão principal S1 no ponto B

A resposta obtida para região com probabilidade de plastificação é apresentada na Figura 8.29. Constata-se com esse resultado que uma grande região em torno do poço apresenta probabilidade de plastificação. Praticamente toda a região do Gravel apresenta probabilidade de plastificação de 100%. Pode-se atribuir essa condição ao baixo valor da coesão do material. Uma região

considerável da formação também apresenta probabilidade de plastificação elevada. O revestimento por sua vez não apresentou nenhum ponto plastificado.

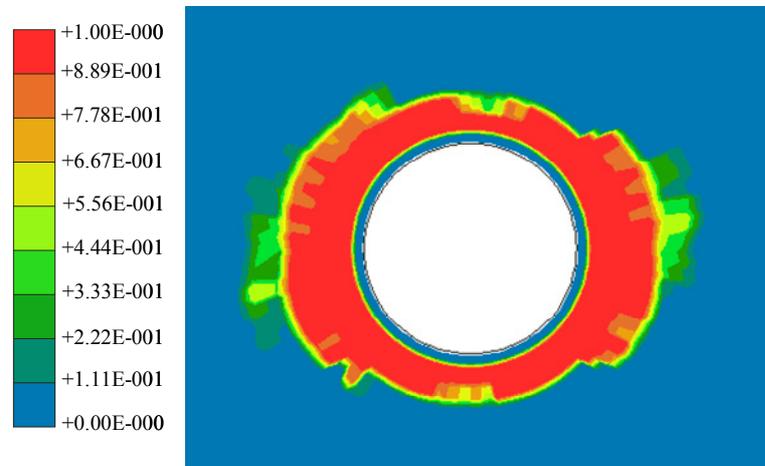


Figura 8.29 Probabilidade de plastificação

9 Conclusões e sugestões

Com o objetivo de desenvolver procedimentos de análise numérica, utilizando elementos finitos, de processos fluido mecânicos acoplados, monofásicos e bifásicos, que levassem em conta a variabilidade espacial de propriedades hidráulicas e mecânicas e a variabilidade das condições iniciais de tensões e pressões, apresentaram-se, na parte inicial desse estudo, as considerações e hipóteses adotadas para definição do modelo físico utilizado para descrição das equações que governam os problemas de acoplamento fluido mecânico. A partir dessas considerações, as equações governantes dos problemas mecânico e de fluxo foram descritas segundo a formulação de elementos finitos. Algumas considerações a respeito da discretização no tempo e sobre análise de problemas não lineares foram apresentadas. Pôde-se, com esses subsídios, passar para a etapa de avaliação dos problemas, considerando-se o comportamento determinístico. Para esse comportamento, apresentaram-se dois procedimentos de solução, o primeiro procedimento totalmente acoplado e o segundo particionado, conhecido como *staggered*.

Após a apresentação da formulação, fez-se a validação do modelo numérico determinístico através de exemplos. Nesse sentido, pode-se dizer que os resultados obtidos numericamente apresentaram boa concordância com os obtidos com soluções analíticas. Os procedimentos sugeridos para a solução dos problemas não lineares, também se mostraram eficientes. A solução do problema elastoplástico com as ferramentas da programação matemática apresentou bons resultados. Com respeito aos métodos de solução dos problemas não lineares globais, o método *L-BFGS* se mostrou como alternativa mais eficiente, sempre que pode ser utilizado.

De maneira geral, os resultados obtidos com os procedimentos, totalmente acoplado e *staggered*, são muito semelhantes, desde que se escolham valores adequados para as tolerâncias no procedimento *staggered*. Verificou-se, nos exemplos analisados, que o procedimento totalmente acoplado apresenta melhor

eficiência computacional para problemas lineares, sendo o oposto geralmente verificado em problemas não lineares, sobretudo nos problemas com não linearidades mais acentuadas e com maior número de equações a serem resolvidas.

Num segundo momento, descreveram-se os problemas utilizando uma formulação não determinística, sendo necessário para isso, a apresentação de alguns conceitos fundamentais da probabilidade e da estatística, bem como de métodos para a obtenção das respostas estatísticas dos problemas de acoplamento. Apresentaram-se métodos de simulação (Monte Carlo e Neumann) e o método de perturbação estatístico linear. Assim como para a análise determinística foram apresentados exemplos, verificando-se com eles as implementações efetuadas e os resultados obtidos com cada método.

As implementações para análises de sensibilidade, requeridas no método estatístico linear, apresentaram resultados satisfatórios. Essa afirmação é válida devido às comparações realizadas pelo método analítico direto, método adjunto e aproximações por diferenças finitas. Em problemas não dependentes da trajetória de tensões o método de diferenciação adjunto mostrou-se como o mais eficiente.

O método estatístico linear geralmente apresenta boas respostas médias em problemas lineares com variáveis aleatórias com pequeno coeficiente de variação. Em problemas não lineares ou para grandes coeficientes de variação as respostas estatísticas obtidas com esse método tendem a diferir das obtidas com o método de Monte Carlo, principalmente as respostas de desvio padrão. Além disso, verificou-se um custo computacional elevado para realização das análises de sensibilidade efetuadas por aproximação por diferenças finitas, uma vez que o número de variáveis aleatórias dos problemas é geralmente elevado. Esse custo para análise de sensibilidade, conseqüentemente se estende para o custo computacional da análise como um todo. Assim, além de se obter respostas aproximadas com esse método, o custo computacional pode ser mais elevado do que o verificado com métodos que geram respostas mais satisfatórias.

O método de simulação com expansão de Neumann é capaz de gerar bons resultados. Para isso, faz-se necessária a utilização de um número adequado de termos na expansão. Entretanto, a utilização de muitos termos na expansão pode acarretar um maior custo computacional, deixando de ser interessante sua utilização. Nos exemplos analisados nesse estudo, utilizando-se apenas três termos

na expansão de Neumann, o tempo requerido para as análises foi maior que o verificado com o método de Monte Carlo. Além disso, diferenças consideráveis foram verificadas nas respostas estatísticas obtidas.

Apesar do elevado custo computacional despendido pelo método de Monte Carlo, esse se mostrou como melhor alternativa para solução dos problemas tratados nesse trabalho. Além das considerações referentes às respostas estatísticas obtidas com o método de Monte Carlo, deve-se lembrar que respostas probabilísticas são facilmente obtidas com o emprego desse método.

Com referência a consideração da variabilidade espacial das propriedades mecânicas e hidráulicas e a variabilidade das condições iniciais de tensões e pressão em problemas com fluxo monofásico, verificou-se que essas variabilidades podem afetar consideravelmente o comportamento dos problemas mecânico e de fluxo. Essas influências se mostram principalmente nas regiões próximas ao poço, onde geralmente se localizam os problemas de plastificação, sendo dessa forma as regiões de maior importância dos problemas. Alguns resultados, apresentando as regiões com probabilidade de plastificação, considerando diferentes níveis de variação das variáveis aleatórias, demonstraram que essas regiões podem ser alteradas em decorrências dessas variações.

Para se efetuar a análise de estabilidade de poços foram apresentados procedimentos numéricos tanto para o comportamento determinístico quanto para o comportamento probabilístico, nesse caso apresentando-se alguns itens sobre análise de confiabilidade. Esses procedimentos, descritos como um problema básico de otimização, determinam os valores operacionais para pressão de fluido de perfuração, de acordo com determinados critérios de estabilidade.

Nas análises de estabilidade de poços efetuadas nesse estudo se verificaram diferenças significativas nos valores limites de pressão de fluido de perfuração, quando se compararam esses valores considerando-se os comportamentos determinístico e probabilístico. Limites operacionais encontrados para o comportamento determinístico corresponderam a valores com significativa probabilidade de falha no comportamento probabilístico. Ao se determinar os valores limites para pressão do fluido de perfuração para o comportamento probabilístico e considerando-se diferentes níveis de variação das variáveis aleatórias, respostas mais conservadoras foram obtidas para as condições com maior variabilidade.

Com respeito às respostas obtidas na análise considerando fluxo bifásico destacam-se inicialmente as diferenças verificadas quando comparados os casos monofásico e bifásico. Para a condição de fluxo monofásico, o comportamento transiente é geralmente verificado, para tempos relativamente pequenos, sendo logo alcançada a condição permanente. Com a entrada de fluido molhante no meio, o comportamento transiente é verificado novamente, gerando variações nos campos de pressão, tensões e saturações. Analisando-se o comportamento das tensões no revestimento do poço, verificaram-se alterações nos seus valores devido à frente de saturação de fluido molhante.

A variabilidade espacial das propriedades hidráulicas e mecânicas e a variabilidade das condições iniciais de tensões e pressões geram algumas alterações no comportamento das respostas em relação ao comportamento obtido para o caso determinístico.

Após a descrição das principais observações aferidas nesse estudo algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas.

- Para o problema de acoplamento com fluxo monofásico, sugere-se a consideração de outros modelos constitutivos para descrição do comportamento do material do meio poroso. Em conjunto a isso, sugere-se a consideração de outros critérios para avaliação da estabilidade do poço.
- Para o problema de acoplamento com fluxo bifásico sugere-se a consideração de efeitos físicos e químicos gerados no material da formação devido à entrada de outro fluido. Considerar os efeitos do fluxo bifásico na produção de areia e seus efeitos na estabilidade e na produção dos poços de petróleo. Indica-se acrescentar à formulação do problema de fluxo bifásico, descrita nesse trabalho, procedimentos numéricos para estabilização de possíveis problemas em problemas com velocidades elevadas.

Acredita-se que o estudo efetuado na realização deste trabalho, ainda que limitado, atendeu os objetivos fundamentais propostos, podendo ser considerado promissor e base para desenvolvimentos futuros.

10 Referências bibliográficas

Alvarado V. Scriven L.E. and Davis H. T. **Stochastic-Perturbation analysis of a one-dimensional dispersion-reaction equation: effects of spatially-varying reaction rates.** Transport in porous media. Vol. 32, pp. 139-161, 1998.

Amir O. and Neuman S. P. **Gaussian closure of transient unsaturated flow in random soils.** Transport in Porous Media. Vol. 54, pp. 55-77, 2004.

Ang, A. H-S and Tang, W. S. **Probability concepts in engineering planning and design. Basic principles.** John Wiley & Sons Ltd. 1975.

Araújo, J. M. and Awruch A. M. **On stochastic finite elements for structural analysis.** Computers & Structures. Vol. 52, 3, pp. 461. 1993.

Arora, Jasbir S. **Introduction to optimum design.** New York: McGraw-Hill, 1989.

Baecher, G. B. and Christian, J. T. **Reliability and statistic in geotechnical engineering.** John Wiley & Sons Ltd. 2003.

Bastian P. and Relmig R. **Efficient fully-coupled solution techniques for two-phase Flow in porous media Parallel multigrid solution and large scale computations.** Advances in Water Resources. Vol. 23, pp. 199-216, 1999.

Bathe, K. J. **Finite element procedures in engineering analysis.** New J.: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.

Brooks A. N., Hughes T.J.R. **Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the**

incompressible Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 32, pp. 199-259, 1982.

Calvete F.J and Ramirez J. **Geoestadística aplicaciones a la hidrología subterránea.** Centro Internacional de Métodos numéricos em Ingeniería, Barcelona, 1990.

Chen M., Zhang D., Keller A. and Lu, Z. **A stochastic analysis of steady state two-phase flow in heterogeneous media.** Water Resources Research. Vol. 41, 2005.

Chen Z., Huan G. and Li B. **An improved IMPES method for two-phase flow in porous media.** Transport in Porous Media. Vol. 32, pp. 261-276, 2004.

Cook, Robert D., Malkus, David S., and Plesha, Michael E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis.** 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

Corapcioglu, M. Y. **Land subsidence – a state of art review, fundamentals of transporte phenomena in porous media.** Ed. J. bear and M. Y. Corapcioglu, Nato, A.S.I. Series, E 82, Nijhoff, Dordrecht. pp. 369-444, 1984.

Dagan G. **Statistical theory of groundwater flow and transport pore to laboratory, laboratory to formation and formation to regional.** Water Resources Research. Vol 22, 9, pp. 120-134, 1986.

Dagan, G. **An overview of stochastic modeling of groundwater flow and transport: from theory to applications.** EOS, Transactions, American Geophysical Union. Vol. 83, 2002.

Dagan, G. **Stochastic modeling of groundwater flow by unconditional and conditional probabilities. 2. The solute transport.** Water Resources Research. Vol. 18, 4, pp. 835-848. 1982.

Dai Z., Ritzi R. W., Huang C., Rubin Y. and Dominic D. **Transport in heterogeneous sediments with multimodal conductivity and hierarchical organization across scales.** Journal of Hydrology. Vol. 294, pp. 68-86, 2004.

Detournay, E. and Cheng, H-D. **Poroelastic Rresponse of a borehole in a hydrostatic stress field.** International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics. Vol. 25, 3, pp. 171-182, 1988.

Detournay, E. and Cheng, H-D. **Fundamentals of poroelasticity.** Comprehensive Rock Eng. Vol. 2, pp. 113-169, 1993.

Dumas, C. F. F. **Quantification of the effect of uncertainties on the reliability of wellbore stability model predictions.** Department of Petroleum Engineering, Tulsa, U.S.A, 1995.

Eboli, Cláudia R. **Análise elasto-plástica de lajes via programação matemática** Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Brasil, 1994.

Elishakoff I., Ren Y. J. and Shinozuka M. **New formulation of FEM for deterministic and stochastic beams through generalization of Fuchs' approach.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. pp. 235-243, 1997.

Ferreira, Francisco H. **Uma implementação numérica para a solução de problemas de poroelasticidade.** Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Brasil, 1996.

Fontoura S. A. B., Holzberg B. Teixeira, E. C. Frydman. M. **Probabilistic analysis of wellbore stability during drilling.** SPE. 2002.

Foussereau X., Graham D. W. Akpoji G., Destouni G. and Rao P. S. C. **Stochastic analysis of transport in unsaturated heterogeneous soils under transient flow regimes,** Water Resources Research. Vol. 36, 4, pp. 911-921, 2000.

Freeze, R.A. **A stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media.** Water Resources Research. Vol. 11, pp. 725-741. 1975.

Frias D.G, Murad M, and Pereira F. **A multiscale stochastic poromechanical model of subsidence of a heterogeneous reservoir.** Appl. Comp. Mech. Geoth. Eng. Ouro Preto, pp. 29-44, 2003.

Frias D.G, Murad M, and Pereira F. **Stochastic computational modelling heterogeneous poroelastic media with long-range correlations.** International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2004.

Frias D.G, Murad M, and Pereira F. **Stochastic computational modeling of reservoir compactation due to fluid withdrawal.** Relatórios de pesquisa e desenvolvimento, LNCC, 2001.

Frydman M. **Iniciação e propagação de fraturas em poços de petróleo.** Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Brasil, 1996.

Gelhar L.W. **Stochastic subsurface hydrology,** New Jersey: Prentice-Hall, 1993.

Ghanem R. and Spanos P. D. **Stochastic finite elements - A spectral approach.** New York. Springer-Verlag, 2003.

Glasgow H., Fortney M., Lee J., Graettinger A. and Reeves H. **Modflow 2000 head uncertainty, a first-order second moment method.** Ground Water. Vol.41, 3, pp. 342-350, 2003.

Haftka, Raphael T. and Gürdal, Zafer. **Elements of structural optimization.** 3rd ed., Dordrecht: Kluwer, Academic Publishers, 1993.

Hart, Gary C. **Uncertainty analysis. loads, and safety in structural engineering.** New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

Hu, B. and Schiehlen W. **On the simulation of stochastic processes by spectral representation**. Prob. Engng. Mech. Vol 12, 2, pp. 105-113, 1997.

Hudson, John A. **Comprehensive rock engineering, analysis and design methods**. Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, UK, 1993.

Hughes, T. J. R., Franca, L. P., Mallet, M. **A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VI. Convergence analysis of the generalized supg formulation for linear time-dependent multidimensional advective-diffusive systems**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. pp. 97-112, 1987.

Hughes, T. J. R., Mallet, M. **A new finite element formulation for computational fluid dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective diffusive systems**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. pp. 305-328, 1986.

Hughes, Thomas J.R. **Unconditionally stable algorithms for nonlinear heat conduction**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. pp. 135-139, 1977.

Huyakorn, P. S. and Pinder G.F. **Computational methods in subsurface flow**. Academic Press, Inc., N. Y. 1983.

Jain S., Acharya M., Gupta S. and Bhaskarwar A. **Monte Carlo simulation of flow of fluids through porous media**. Computers and Chemical Engineering. Vol. 27, pp. 385-400, 2003.

Jesús A. L-O, Murad M. and Rochinha F. **Computational homogenization of nonlinear hydromechanical coupling in poroplasticity**. Relatórios de pesquisa e desenvolvimento, LNCC, 2004.

Juanes R. **A variational multiscale finite element method for multiphase flow in porous media**. Finite Elements in Analysis and Design. Vol. 41, pp. 763-777, 2005.

Kitanidis, P. K. **Introduction to geostatistics: applications in hydrogeology**. Cambridge University Press, 1997.

Kiureghian, A. and Liu, P. L. **Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances**. Engineering Mechanics. pp. 105–112, 1986

Kleiber, M., Antúnez, H., Hien, T.D. and Kowalczyk, P. **Parameter sensitivity in nonlinear mechanics: theory and finite element computations**, John Wiley & Sons Ltd. 1997.

Lewis, Ronald W. and Bernard A. Schrefler. **The finite element method in the deformation and consolidation of porous media**. John Wiley and Sons, 1987.

Lewis, Ronald W. and Schrefler B. A. **The finite element method in the deformation and consolidation of porous media**. 2nd ed. John Wiley and Sons, 1998.

Lu Z. and Zhang D. **On importance sampling Monte Carlo approach to uncertainty analysis for flow and transport in porous media**, Advances in Water Resources. Vol. 26, pp. 1177-1188, 2003.

Lubliner, J. **Normality rules in large-deformation plasticity**, Mechanics of materials. Vol. 5. pp 29-34, 1986.

Lubliner, J. **On maximum-dissipation principle in generalized plasticity**, Acta Mechanica. 52, pp. 225-237, 1984.

Mandel, J. **Contribution theorique a l'Etude de ecrouissage et des lois de lécoulement plastique**, Proceedings of the 11th International Congresso in

Applied Mechanics. pp. 502-509, 1964.

Matheron, G. **Elements pour une theorie des milieux poreux**. Masson et Cie. Paris, 1967.

Melchers R. **Structural reliability analysis and prediction**. John Wiley and Sons, 2ed, 1999.

Mendonça A., Coutinho A., Alves J e Landau L. **Simulação numérica de escoamentos bifásicos de fluidos não newtonianos e imiscíveis em meios porosos via método dos elementos finitos**. XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Ouro Preto, Brasil, 2003.

Morita N. **Uncertainty analysis of borehole stability problems**. SPE 30502, Proceedings of the Annual Technical Conference, Dallas, pp. 533-542, 1995.

Moos D., Peska P., Finkbeiner T. and Zoback M. **Comprehensive wellbore stability analysis utilizing Quantitative Risk Assessment**. Journal of Petroleum Science and Engineering. pp. 97-109. 2003.

Müller, A.L. **Otimização de estruturas reticuladas considerando incertezas**. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Brasil, 2003.

Neuman, S.P. **Stochastic approach to subsurface flow and transport: a view to the future**. In: Dagan, G., Neuman, S.P. (Eds.), Subsurface Flow and Transport: A Stochastic Approach, Cambridge Press, Cambridge, pp. 231-241. 1997.

Nocedal, J. **Updating quasi-newton matrices with limited storage**, Mathematics of Computation. Vol. 35, pp. 773-782, 1980.

Oliveira, L., Demond, A. H.; Abriola, L. M.; Goovaerts, P. **Simulation of solute transport in a heterogeneous vadose zone describing the hydraulic properties using a multistep stochastic approach**. Water Resources Research. Vol. 42,

2006.

Olsson, A, Sandberg, G and Dahlblom, O, **On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis**. Structural Safety. pp. 47-68, 2003.

Owen, D. R. J and Hinton, E, **Finite elements in plasticity: theory and practice**, Swansea: Pneridge, 1980.

Pastor, Jorge Aurélio Santa Cruz. **Modelagem de reservatórios utilizando formulação acoplada de elementos finitos**. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Brasil, 2001.

Peter Indelman. **On mathematical models of average flow in heterogeneous formations**. Transport in Porous Media. pp. 209-224, 2002.

Rahman N. Lewis R. **Finite element modelling of multiphase immiscible Flow in deforming porous media for subsurface systems**. Computers and Geotechnics. Vol. 24, pp. 41-63, 1999.

Relmig R and Huber R. **Comparison of Galerkin-type discretization techniques for two-phase flow in heterogeneous porous media**. Advances in Water Resources. Vol. 21, pp 697-911, 1998.

Rubin Y. **Applied stochastic hydrogeology**. Oxford University Press, University of California, Berkeley, 2003.

Rubin, Y. **Transport of inert solutes by groundwater: recent developments and current issues**. In: Dagan, G., Neuman, S.P. (Eds.), Subsurface Flow and Transport: A Stochastic Approach, Cambridge Press, Cambridge, pp. 115-132. 1997.

Rubin, Y., Sun,A.,Maxwell and R.,Bellin, A. **The concept of blockeffective macrodispersivity and a unified approach for grid-scaleand plume-scale-**

dependent transport. J. Fluid Mech. 395, 161-180. 1999.

Schrefler B. A and Scotta R. **A fully coupled dynamic model for two phase fluid flow in deformable porous media.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. pp. 2223-2246, 2001.

Schueller G. I **A State-of-the-Art Report on Computational Stochastic Mechanics.** Probabilistic Engineering Mechanics. Vol. 12, 4, pp. 197-321, 1997.

Schueller G. I. **Computational stochastic mechanics-recent advances,** Computers and Structures. Vol. 79, pp. 2225-2234 2001.

Shinozuka, M. and Deodatis, G. **Simulation of multidimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation.** Appl. Mech. Rev. Vol 49, 1, pp. 29-53, 1996.

Shvidler, M. I. **Flow in heterogeneous media.** Izv. Akad. Nauk USSR Mekh. Zhidk. Gaza, 3, 185, 1962.

Silvestre, José R. **Análise numérica de poços de petróleo com relevância a produção de areia.** Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Brasil, 2004.

Simo J.C and Hughes T.J.R. **Computational Inelasticity.** Springer - Verlag, New York, 1997.

Tartakovsky D., Guadagnini A. and Riva M. **Stochastic averaging of nonlinear flows in heterogeneous porous media.** J. Fluid Mech. Vol. 492, pp. 47-62 2003.

Townley, Lloyd R. **Second order effects of uncertain transmissivities on predictions of piezometric heads.** V Conf. Finite Element in Water Resources, Vermont. pp 251-264, 1984.

Turska, E. and Schrefler B. A. **On convergence conditions of partitioned solution procedures for consolidation problems.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. pp. 51-63, 1992.

Vanderplaats, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications.** McGraw Hill, 1984.

Wu J., Hu B., Zhang D. and Shirley C. **A three-dimensional numerical method of moments for groundwater flow and solute transport in a nonstationary conductivity field.** Advances in Water Resources. pp. 1149-1169, 2003.

Zambaldi, M.C. and Mendonça, M. **An efficient approach to restart quasi-newton methods,** Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Guarapari, 2005.

Zhang D. and Lu Z. **An efficient, high-order perturbation approach for flow in random porous media via Karhunen–Loeve and polynomial expansions.** Journal of Computational Physics. 194, pp. 773-794, 2004.

Zhang D. **Stochastic methods for flow in porous media: coping with uncertainties.** Academic Press. 2002.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)