UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELO DO VOTO DA MAIORIA PARA UMA REDE COM DIFERENTES AGENTES

por

André Luis da Mota Vilela

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:
Prof. Francisco G. Brady Moreira (Orientador-UFPE)
Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho (DF - UFPE)
Prof. Claudionor Gomes Bezerra (DF - UFRNE)

Recife - PE, Brasil
Julho - 2007

Vilela, André Luis da Mota
Modelo do voto da maioria para uma rede com diferentes agentes / André Luis da Mota Vilela - Recife : O autor, 2007.
xvi 94 folhas : il., fig., tab., graf.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Depto. de Física, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Mecânica estatística. 2. Modelos socioeconômicos. 3. Transições de fase. 4. Leis de escala. 5. Simulações computacionais. I. Título.

530.13 CDD (22.ed.) FQ2007-0026

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
http://www.df.ufpe.br/pg e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

André Luis da Mota Vilela

MODELO DO VOTO DA MAIORIA PARA UMA REDE COM DIFERENTES AGENTES

A Banca Examinadora composta pelos Professores Francisco G. Brady Moreira (Presidente e Orientador), Maurício Domingues Coutinho Filho, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Claudionor Gomes Bezerra, do Departamento de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, consideram o candidato:

(X) Aprovado com Distinção ( ) Aprovado ( ) Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em trinta de julho de 2007.

Prof. Francisco G. Brady Moreira
Presidente e Orientador

Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho

Prof. Claudionor Gomes Bezerra

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por nunca ter passado pela sensação de abandono. Ele sempre esteve ao meu lado me dando forças e chamando a minha atenção quando estava no erro ou prestes a errar. Sou grato por Ele ter sido fiel, como diz em Sua Palavra.

Sou grato a Deus por ter abençoado a minha vida com a família que tenho. Não existe palavra na língua dos homens que possa conter toda a minha gratidão aos meus pais. Sou eternamente grato a eles por todo apoio dado na minha trajetória acadêmica e na minha vida. Agradeço a Deus pela vida do meu pai José Valter Lins Vilela, que está sempre me ensinando a ser sábio e ter paciência, e da minha mãe Ana Christina da Mota Vilela, que me ensina a nunca desistir e ter fé. Onde quer que eu vá, carregarei comigo os mais valiosos conselhos e ensinamentos que um homem pode receber na vida. Minhas conquistas são antes suas, vocês são vencedores! Amo vocês! Espero que possa estar cumprindo o que diz a Palavra de Deus em Efésios 6.1-3:

"Vós, filhos, sede obedientes a vossos pais no Senhor porque isto é justo. Honra a teu pai e a tua mãe, que é o primeiro mandamento com promessa, para que te vá bem, e vivas muito tempo sobre a terra."

(Efésios 6.1-3)

Agradeço também a meu irmão Thiago que me ensinou uma das quatro operações da matemática como ninguém: a divisão. Espero que ele cresça cada vez mais em tudo o que seu coração se inclinar a fazer.

Sou eternamente grato à minha namorada Gilvânia e sua família. Obrigado por todo o amor, carinho, companheirismo, e principalmente paciência em todo o nosso relacionamento e, em particular, durante o meu mestrado. Obrigado, nem sei mais soletrar a palavra solidão. Amo você!

Um amigo que agradeço a Deus por ter estado do meu lado é o professor Brady. Bem humorado, de coração grande e humilde, ensinou-me lições de física e de vida durante os anos de convivência. De todas as lições que guardo em mim, preservo

com mais carinho a que me ensina a sempre fazer o meu melhor. Talvez sem saber, Brady tenha o tempo inteiro trazido à minha mente o que diz a Palavra de Deus em Colossenses 3.23:

"E, tudo quanto fizerdes, fazei-o de todo o coração,
como ao Senhor e não aos homens"
(Colossenses 3.23)

Agradeço ao Brady por ter sido um verdadeiro instrumento nas mãos de Deus, contribuindo de maneira ímpar para o meu crescimento em diversas áreas da minha vida. Sou eternamente grato a ele e não me esquecerei dele jamais.

Sou muito grato ao professor Adauto de Souza por grande parte do conhecimento em programação e em Física Estatística, e ainda pelas longas conversas sobre os mais variados temas.

Deus ainda me presenteou com grandes amizades. Alguns conviveram muito tempo comigo e ainda convivem, outros seguiram rumos diferentes nas suas vidas de maneira que não tenho mais sua agradável presença no meu dia a dia. Dentre os que estiveram comigo todo o tempo, agradeço com muito carinho a Amanda, amiga de verdade, que esteve ao meu lado não somente durante o meu mestrado, mas principalmente durante minha graduação. Com bom senso de humor, sempre me alegrou muito com sua presença. Agradeço pela quantidade enorme de paciência que ela precisou ter em algumas ocasiões.

Não me esquecerei de grandes amigos de perto como Igor, sempre bem humorado e bastante prestativo, Arthur, com sua coragem para vir vencer em Recife, Elton e sua boa vontade, Amâncio, com sua companhia e diversos "*entebates*" e Ana Carolina, pelas boas conversas de irmãos em Cristo. Obrigado por fazerem parte das mais agradáveis memórias que tenho.

Agradeço ao amigo Bruno (Zombie), pelas conversas edificantes sobre a Bíblia, sobre a fé em Cristo que partilhamos e pelas aventuras na bike. Sou grato ao meu amigo Bruno (CC), que sempre esteve disposto a ajudar e dividir, mesmo no pouco, e principalmente disposto manter meus olhos abertos madrugadas adentro jogando computador. Ao amigão Fred, agradeço pelas longas horas de Playstation 2 em

madrugadas sem fim. Ao amigo Eduardo, obrigado pelo companheirismo na Área II e no pedal. Muitos quilômetros pela frente ainda para todos nós!

Agradeço todo o apoio dado por amigos e amigas que não estiveram presentes, mas residem nas memórias mais agradáveis do meu coração: José Carlos, Leo (Punk Nerd), Éder, Bárbara, Cristiane, Davi, Roberta (Betinha), Daniel, Zuleide, Carol, Dyana, Luiz Felipe, Anderson Santos, Edson (Farofa), Felipe (Risadinha), Rodrigo, Lucas e Luis Carlos (em memória).

Sou grato aos amigos e amigas do Departamento de Física: Fábio, Luis, Euclides, Gerson, Fernando (Maçã), Antônio Mário (Cioba), Lincoln, Eroni, Augusto (Marion), Marcus, Bruno Gomes, Fábio (Sakurai), César, Hallison, Gilberto, Lidiane, Natália, Priscilla, Priscila Catão, Priscila Silva e Karlla. Obrigado pelas conversas e pela companhia.

Também agradeço aos professores que fazem do Departamento de Física um lugar agradável para estudar e pesquisar. Sou grato em especial aos que contribuíram diretamente para minha formação não somente como profissional, mas como cidadão. Agradeço aos professores: Frederico Montenegro, Giovani Vasconcelos, José Américo, Alexandre Ricalde, José Marcílio, Erivaldo Montarroyos, Maurício Coutinho, Mauro Copelli, Antônio Azevedo, Lúcio Acioli, José Tabosa e às professoras Sandra Vianna e Rita Zorzenon.

Agradeço às pessoas que mantém o Departamento de Física funcionando em perfeitas condições para que eu pudesse estudar e pesquisar. Excelente trabalho pessoal.

Agradeço ao CNPq e à FACEPE pelo suporte financeiro.

"Confia no Senhor de todo o teu coração e não te estribes no
teu próprio entendimento. Reconhece-o em todos os
teus caminhos, e ele endireitará as tuas veredas"

(Provérbios 3.5,6)

RESUMO

Investigamos o modelo do voto da maioria com ruído para uma rede de interações sociais em um sistema com duas classes de indivíduos, *classe* σ e *classe* τ. Na dinâmica deste sistema, um dado indivíduo adota o estado oposto à maioria dos seus vizinhos com probabilidade referente à sua classe, q_{classe}, e o estado da maioria dos seus vizinhos com probabilidade $(1 - q_{classe})$, onde q_{classe} é chamado de parâmetro de ruído para uma dada classe. Desta maneira, um indivíduo da classe σ e um indivíduo da classe τ possuem parâmetros de ruído q_σ e q_τ respectivamente. No nosso modelo cada classe de indivíduos possui uma dinâmica própria, sendo que os indivíduos da classe σ são influenciados por vizinhos das classes σ *e* τ, enquanto os indivíduos da classe τ são influenciados por vizinhos da classe τ *somente*. Em nossas simulações computacionais consideramos que os agentes, ou indivíduos, de cada classe estão distribuídos em uma rede bidimensional quadrada de lado L, de maneira que $N = L^2$ é a quantidade de sítios de uma classe, totalizando $2L^2$ indivíduos no sistema. Usamos o método de Monte Carlo e técnicas de escalamento de tamanho finito, para obter as propriedades críticas do sistema no estado estacionário. Calculamos, para cada classe de indivíduos, a magnetização, a susceptibilidade e o cumulante de quarta ordem de Binder como funções dos ruídos q_σ e q_τ, para diferentes valores do tamanho N de uma classe. Encontramos os valores dos ruídos críticos, q_σ^* e q_τ^*, e identificamos cinco regiões distintas no digrama de fases no plano $q_\sigma - q_\tau$. Os valores dos expoentes críticos de cada classe são os mesmos, ou seja, $\beta_\sigma = \beta_\tau$, $\gamma_\sigma = \gamma_\tau$, $\nu_\sigma = \nu_\tau$, e nos permitem concluir que o modelo proposto pertence à mesma classe de universalidade do modelo de Ising.

Palavras-chave: sistemas socioeconômicos, transições de fase, fenômenos críticos, simulações computacionais.

ABSTRACT

We investigate the majority-vote model with noise in a network of social interactions for a system with two classes of individuals, nominated *class* σ and *class* τ. In the system dynamics, each individual adopts the state of the majority of its neighbors with probability $(1 - q_{class})$ and the opposite state with probability q_{class}, where q_{class} is called the noise parameter for a given class. In this way, an individual belonging to σ class and one of τ class have noise parameters q_σ and q_τ, respectively. In our model each class has its own dynamics, with individuals of σ class being influenced by neighbors of both classes, while the individuals of type τ suffer influence only from its own class. In the simulations we consider that the agents, or individuals, of each class are located in the sites of a two-dimensional square lattice of side L, where $N = L^2$ is the number of sites in the network, and we have $2L^2$ individuals in the entire system. We use the Monte Carlo simulation method and finite size scaling technique to estimate the critical properties of the system in the stationary state. For each class of individuals we have calculated the magnetization, the susceptibility and the fourth-order Binder's cumulant as functions of the noise parameters q_σ and q_τ, for different values of system size. The calculated values of the critical noise parameters, q_σ^* and q_τ^*, allow us to identify five distinct regions in the phase diagram on the $q_\sigma - q_\tau$ plane. The critical exponents for each class are the same, that is, $\beta_\sigma = \beta_\tau$, $\gamma_\sigma = \gamma_\tau$, $\nu_\sigma = \nu_\tau$, and we conclude that our model belongs to the same universality class of the two-dimensional Ising model.

Keywords: socioeconomic systems, phase transitions, critical phenomena, computer simulation.

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Estatística da Sociedade

1.1 Introdução 1
1.2 Eleições, Problemas Sociais e Física Estatística 2
1.3 Física Computacional e Modelos Sociais 3
1.4 Modelos de Sistemas Sociais 4
1.5 Modelos de Rede 7

Capítulo 2 – Fundamentos

2.1 Equação Mestra e Matriz de Transição 10
2.1.1 Equação Mestra 10
2.1.2 Matriz de Transição 14
2.2 Metodologia da Simulação 15
2.2.1 Introdução 15
2.2.2 O Método de Monte Carlo: História e Conceito 17
2.3 Transições de Fase 20
2.3.1 Pontos Críticos e Transições de Fase 20
2.3.2 Expoentes Críticos e Universalidade 21
2.3.3 Escalamento de Tamanho Finito 25

Capítulo 3 – Modelo de Diferentes Agentes

3.1 Modelo do Voto da Maioria 29
3.1.1 Introdução 29
3.1.2 O Modelo do Voto da Maioria e Aplicações 30
3.1.3 Dinâmica do Modelo do Voto da Maioria 31
3.2 O Modelo de Diferentes Agentes 34
3.2.1 Introdução 34
3.2.2 Diferentes Agentes e o Voto da Maioria 35
3.2.3 Histórico de Resultados Conhecidos 37
3.2.4 Quantidades Físicas Relevantes 38

Capítulo 4 – Resultados

4.1 A Simulação 40

4.2 Algoritmo de Monte Carlo 41

4.3 Comportamento das Grandezas Calculadas 43

4.3.1 Parâmetro de Ordem $M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ 43

4.3.2 Parâmetro de Ordem $M_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$ 47

4.3.3 A Susceptibilidade $\chi_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ 54

4.3.4 A Susceptibilidade e $\chi_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$ 55

4.3.5 Comparativo entre as Classes de Indivíduos 57

4.3.6 O Cumulante de Binder e o Diagrama de Fases 60

4.3.7 A correlação Sigma-Tau 64

4.3.8 Dependência com o Tamanho e Expoentes Críticos 68

Capítulo 5 – Conclusões

Conclusões 81

Referências Bibliográficas 86

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Uma curiosa fotografia sobre a previsão dos cientistas da RAND Corp. para o computador doméstico do ano de 2004. "Com a linguagem Fortran será fácil de usar" diziam os cientistas. Imagem retirada do site www.realtechnews.com. 15

Figura 2.2. Trajetória de estados do sistema em diferentes instantes de tempo. No gráfico, a, b, c e d são estados do sistema. 16

Figura 3.1. Representação esquemática das interações dos indivíduos de cada classe. As setas de cor preta indicam indivíduos do tipo τ e suas interações, enquanto que as setas brancas indicam indivíduos do tipo σ e suas interações. 36

Figura 4.1. Magnetização da sub-rede τ em função do ruído q_τ para q_σ fixo em zero e diversos tamanhos de rede. As curvas indicam uma continuidade do parâmetro de ordem na transição apontando uma transição de fase de segunda ordem. 43

Figura 4.2. Magnetização da sub-rede τ em função do ruído q_τ para $N = 10000$. A linha é um ajuste linear para os pontos e mostra o tipo do decaimento desta magnetização com o ruído q_τ dentro do intervalo $[0.00;\ 0.04]$. 44

Figura 4.3. Magnetização da sub-rede τ para $N = 10000$ em função do ruído q_τ. Nestas simulações, o ruído q_σ foi fixado em diferentes valores. 45

Figura 4.4. Magnetização da sub-rede τ em função do ruído q_σ para alguns valores de q_τ fixados. As curvas foram feitas para $N = 10000$. 46

Figura 4.5. Magnetização da sub-rede σ em função do ruído q_τ para q_σ fixo em zero para diversos tamanhos de rede. As curvas assim como no caso da sub-rede τ indicam que existe continuidade do parâmetro de ordem na transição de fase. 47

Figura 4.6. Magnetização da sub-rede σ em função do ruído q_τ para $q_\sigma = 0.2$ fixo e com sistemas de diversos tamanhos. As curvas se assemelham muito com as obtidas na figura 4.5. 49

Figura 4.7. Magnetização da sub-rede σ em função do ruído q_τ para $q_\sigma = 0.4$ fixo, comparando diversos tamanhos de rede. Resultado semelhante ao da figura anterior, mas neste caso a magnetização para ruído q_τ nulo vale 0.2. 49

Figura 4.8. Magnetização da sub-rede σ em função do ruído q_τ para três valores de q_σ fixados. As simulações foram realizadas numa rede com 10000 sítios. 50

Figura 4.9. Magnetização máxima (de saturação) da sub-rede σ em função do ruído q_σ para alguns valores de q_τ fixados. As simulações foram feitas para $N = 10000$. 50

Figura 4.10. Magnetização da sub-rede σ, com $N = 10000$ sítios, em função do ruído q_τ para valores do ruído $q_\sigma < 0.5$ (símbolos fechados) e $q_\sigma > 0.5$ (símbolos abertos). 52

Figura 4.11. Magnetização da sub-rede σ, com $N = 10000$ sítios, em função do ruído q_σ para diferentes valores do ruído q_τ do sistema. 53

Figura 4.12. Magnetização da sub-rede σ, com $N = 3600$ sítios, em função do ruído q_τ para valores fixos de q_σ. 53

Figura 4.13. Susceptibilidade da sub-rede τ em função do ruído q_τ para diferentes tamanhos do sistema. Os dados foram obtidos para $q_\sigma = 0$. 55

Figura 4.14. Susceptibilidade da sub-rede σ em função do ruído q_τ para diferentes tamanhos do sistema, com $q_\sigma = 0.0$ e $q_\sigma = 0.4$. 56

Figura 4.15. Valor do máximo da susceptibilidade sub-rede σ em função do ruído q_σ para $N = 10000$. 57

Figura 4.16. Comparativo entre as magnetizações de sub-rede em função do ruído q_τ para três valores fixos de q_σ. As curvas foram obtidas para $N = 10000$. 58

Figura 4.17. Comparativo entre as susceptibilidades $\chi_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ e $\chi_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$ de cada sub-rede em função do ruído q_τ. As curvas foram obtidas para $N = 10000$ e $q_\sigma = 0$. 59

Figura 4.18. Magnetizações de sub-rede, com $N = 10000$ sítios, em função do ruído q_τ para $q_\sigma = 0$ fixo. Os resultados para outros valores de q_σ estão apresentados nas figuras 4.10 e 4.12. 60

Figura 4.19. Cumulante de Binder para a sub-rede σ em função de q_τ, para diferentes tamanhos de sub-rede e $q_\sigma = 0$. 61

Figura 4.20. Cumulante de Binder para a sub-rede σ para $q_\tau > 0.5$ e $q_\sigma = 0$ para diferentes tamanhos de sub-rede. 62

Figura 4.21. Diagrama de fase do sistema no plano $q_\tau - q_\sigma$. Na região I, o sistema apresenta ferromagnetismo, com exceção da reta $q_\sigma = 0.5$ onde a magnetização da sub-rede σ é nula. Na região II, o sistema está na fase paramagnética. Na região III, a sub-rede σ é paramagnética enquanto a sub-rede τ apresenta antiferromagnetismo. Na região IV, a sub-rede de indivíduos do tipo σ exibe magnetização não-nula, ou seja, estado ferromagnético, enquanto a sub-rede τ está na fase paramagnética. Na região V, a sub-rede σ é ferromagnética e a sub-rede τ é antiferromagnética. 63

Figura 4.22. Gráfico da média do produto das magnetizações, $\langle m_\sigma m_\tau \rangle$, em função do ruído q_τ para valores fixos de q_σ. Cada valor de q_σ possui os tamanhos de sub-rede $400, 1600, 3600, 6400$ e 10000 coincidindo sobre a mesma curva. 64

Figura 4.23. Correlação $\Delta_{\sigma,\tau}$ em função do ruído q_τ, para $q_\sigma = 0$ fixo e vários tamanhos do sistema. No detalhe está a região onde a correlação apresenta o seu valor máximo 65

Figura 4.24. Correlação $\Delta_{\sigma,\tau}$ em função do tamanho $L = N^{1/2}$, para valores de ruído $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma = 0.0$. A linha representa o ajuste exponencial até a segunda ordem para os dados. 66

Figura 4.25. Comparativo entre a correlação $\Delta_{\sigma,\tau}$ (símbolos abertos) e a média $\langle m_\sigma m_\tau \rangle$ (símbolos fechados), para $L = 100$. Vemos que na fase paramagnética, região II do diagrama de fases, a correlação não apresenta dependência com o tamanho do sistema. 67

Figura 4.26. Magnetização da sub-rede τ em função de $1/L$, com $q_\sigma = 0$ fixo, para diversos valores do ruído q_τ. 68

Figura 4.27. Magnetização da sub-rede σ em função de $1/L$, com $q_\sigma = 0$, para diversos valores do ruído q_τ. Os dados para $q_\tau = 0.020$ e $q_\tau = 0.040$ se superpõem. 69

Figura 4.28. Magnetização da sub-rede σ em função de $1/L$, com o ruído $q_\tau = 0.9$ fixo, para diferentes valores do ruído q_σ. Para valores de q_σ e q_τ na região IV do diagrama de fase a sub-rede σ é ferromagnética. 70

Figura 4.29. Logaritmo natural da magnetização da sub-rede τ, em função do logaritmo de L. A linha contínua é o ajuste linear para os pontos do gráfico. A inclinação da reta fornece o valor do expoente ψ_τ. 73

Figura 4.30. Logaritmo natural da susceptibilidade da sub-rede τ, em função do logaritmo de L. A reta é o ajuste linear para os pontos do gráfico. A inclinação da reta fornece o valor do expoente η_τ. 73

Figura 4.31. Logaritmo natural da magnetização da sub-rede σ, em função do logaritmo de L, com o ruído q_τ fixo em $q_\tau^* = 0.075$, para valores do ruído $q_\sigma^* = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8. As inclinações das retas fornecem valores para o expoente ψ_σ. 75

Figura 4.32. Logaritmo natural da susceptibilidade da sub-rede σ, em função do logaritmo de L, com o ruído q_τ fixo em $q_\tau^* = 0.075$ e três valores do ruído $q_\sigma^* = 0.0, 0.2, 0.6$. As inclinações das retas fornecem valores para o expoente η_σ. 75

Figura 4.33. Gráfico da função universal $\widetilde{M}_{L,\tau}$ em função de u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.0$. 77

Figura 4.34. Gráfico da função universal $\tilde{\chi}_{L,\tau}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.0$. 77

Figura 4.35. Gráfico da função universal $\widetilde{M}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.0$. 78

Figura 4.36. Gráfico da função universal $\tilde{\chi}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.0$. 78

Figura 4.37. Gráfico da função universal $\widetilde{M}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.2$. 79

Figura 4.38. Gráfico da função universal $\tilde{\chi}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.2$. 79

Figura 4.39. Gráfico da função universal $\widetilde{M}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.6$. 80

Figura 5.1. Gráfico da magnetização dos agentes da classe σ em função do ruído q_τ com uma fração igual a 30% de diluição do número de indivíduos da classe τ. Os gráficos foram obtidos para $N = 10000$. 84

Figura 5.2. Gráfico comparativo entre as magnetizações dos agentes da classe σ e da classe τ para $q_\sigma = 0$ e com 30% de diluição no número de indivíduos da classe τ. Os gráficos foram obtidos para $N = 10000$. 84

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Dados experimentais para os valores dos expoentes críticos em diversos sistemas (D = 3). 24

Tabela 4.1. Valores dos expoentes críticos para a classe σ das transições que ocorrem ao mantermos o ruído $q_\tau = q_\tau^* = 0.075$ fixo enquanto variamos o valor do ruído q_σ^*, isto é, ao longo da transição I-II do diagrama de fases. 74

CAPÍTULO 1

ESTATÍSTICA DA SOCIEDADE

1.1 INTRODUÇÃO

Atualmente, existe um interesse crescente entre os físicos teóricos, experimentais e computacionais em estudar fenômenos em outras áreas da ciência como a economia [1, 2], a biologia [3], a sociologia [4-15], entre outras [16-18]. Para isso, eles utilizam formulações, resultados e técnicas de importantes campos da física, entre eles, a Mecânica Estatística. Nos modelos de sistemas de muitas partículas, a premissa fundamental é que os detalhes do comportamento isolado de um dado constituinte não são relevantes quando desejamos estudar ou criar uma descrição da dinâmica coletiva.

A estatística surgiu do estudo de números sociais no século XVII. A descoberta de invariâncias nos resultados da análise de dados como nascimentos e mortes, crimes e casamentos levaram alguns cientistas e filósofos a concluir que a sociedade era governada por leis "naturais" que estariam fora do controle dos governantes. Mesmo não sendo os físicos que começaram este debate, o estudo da estatística de populações auxiliou Maxwell e Boltzmann no desenvolvimento da Teoria Cinética dos Gases [10]. Interessante o fato de que hoje em dia o interesse pela Física Estatística tenha crescido, motivado pelos avanços tecnológicos em computação, retornando às suas origens por tornar a estudar a sociedade.

Três séculos depois, em meados de 1920, a probabilidade inerente à natureza, introduzida como fundamental no mundo quântico, escandalizou estudiosos do fundamento filosófico da ciência. Einstein insistia que Deus não jogava dados para determinar o comportamento da natureza, alegando que a Teoria Quântica sugerida por Bohr e Schrödinger deveria ser revista. Mas apesar dos esforços de Einstein para que os físicos não validassem por completo a teoria probabilística da Mecânica Quântica, os resultados obtidos nesta área até os dias atuais confirmam o comportamento não-determinístico destes sistemas.

Um estudo histórico do nascimento da estatística da sociedade, bem como do desenvolvimento das técnicas que originaram a Mecânica Estatística foi feito por Philip Ball [10], onde o autor detalha a motivação do estudo da sociedade e as implicações filosóficas causadas por tal estudo. Entre elas a discussão sobre o que é o "livre arbítrio" depois da conclusão que o "todo" obedece a uma lei mais geral, guiada pela Gaussiana e seus erros estatísticos inerentes ao estudo. Podemos resumir o que Ball afirma sobre o histórico e o conceito num parágrafo de sua autoria:

"Nos dias de hoje, os esforços feitos para aplicar os conceitos e métodos da Física Estatística para os fenômenos sociais, da economia até o fluxo de tráfego, eleições, redes de amizades e interações, estão completando um caminho fechado cuja trajetória começou séculos atrás. O trabalho na estatística social do século 19 teve uma influência direta nos fundadores da Física Estatística, que escolheram deixar de lado o determinismo Newtoniano para confiar numa "lei de grandes números", tratando com sistemas de muitas partículas, cujo comportamento individual não é relevante, mas o todo."

1.2 ELEIÇÕES, PROBLEMAS SOCIAIS E FÍSICA ESTATÍSTICA

Recentemente tem sido observado um interesse crescente no estudo do comportamento de uma sociedade pelo uso de técnicas derivadas da Física Estatística [6-8]. A difusão de um novo conceito seja ele uma tecnologia, uma opinião, uma informação, uma doença, entre outros, através de uma rede social ou econômica, é um processo complexo, exibindo um campo de estudo rico para matemáticos e físicos teóricos por sua dinâmica [9]. Tal interesse motivou a criação de uma área de pesquisa na sociedade alemã de física sobre "pesquisa socioeconômica", liderada por Frank Schweitzer [12]. Alguns modelos de Ising que possuem adaptação fácil para sistemas sociais foram revisados em [19].

Segundo o modelo democrático de governo, uma sociedade "saudável" é aquela onde todos os membros são ouvidos, possuindo responsabilidades sobre o destino de todos que a compõem. Portanto, um processo social importante neste sistema é a eleição de representantes, onde um grande número de pessoas tem sua parcela de responsabilidade. Esta parcela, citada em um grau mais superficial, é o direito de voto, ou seja, de eleger seus representantes. A escolha feita pela sociedade denota o resultado de muitos fatores sociais que interferem direta ou indiretamente na vida de cada indivíduo: grau de instrução ou educação, conhecimento das propostas dos futuros governantes, confiança na concretização das propostas dos candidatos, conjuntura econômica e até mesmo religião.

Um olhar mais atento pode perceber que a opinião dos indivíduos está ainda mais relacionada aos problemas sociais os quais uma determinada população está submetida: violência urbana, atendimento à saúde, falta de moradia nos grandes centros, direito à educação, má distribuição da renda, entre outros fatores não menos importantes. Tais problemas se tornam ferramentas de uso de candidatos a governantes, veiculando suas resoluções na mídia para apreciação da maioria da população, que lhe garantirá, ao menos em hipótese, a vitória nas urnas.

De forma simplificada, dizemos que eleições dependem do processo de *formação de opinião dos votantes*. Cada eleitor escolhe um candidato baseado nas suas crenças e nas conclusões que faz através da interação com outros eleitores. Muitos trabalhos têm sido feitos para o estudo da dinâmica de formação de opinião, considerando diversos tipos de dinâmicas e topologias de rede. Bernades et al. [13] e González et al. [20] tiveram sucesso em obter o comportamento do número de candidatos para um dado número de votos nas eleições do Brasil do ano de 1998. Eles utilizaram o modelo de Sznajd [14], adaptado para redes complexas, para a dinâmica de formação da opinião.

1.3 FÍSICA COMPUTACIONAL E MODELOS SOCIAIS

Alguns dos principais fatores que justificam o atual crescimento do estudo da física estatística social são a popularização das técnicas de simulação e o avanço tecnológico na ciência da computação. Processadores mais potentes, memórias de maior capacidade e rapidez, e até mesmo novas técnicas de simulação, permitiram que sistemas reais fossem modelados de uma maneira mais adequada. Isto contornou o uso de tratamentos provenientes de equações diferenciais para a dinâmica dos sistemas sociais. Os modelos baseados em equações diferenciais apresentavam limitações que residiam em complicações matemáticas para solução dos problemas e simplificações, de certa maneira tão necessárias, que impossibilitavam o tratamento destes sistemas de uma forma mais realista.

Devido à natureza do problema de estudar a dinâmica social de populações, a própria sugere um tratamento algorítmico, uma linguagem de regras pré-ordenadas. Não ao acaso, as regras de comportamento são definidas na concepção do modelo que é objeto de estudo, isto é feito de maneira à melhor representar a forma com que cada indivíduo reage a um, ou vários, tipos de interação. Estas interações em geral ocorrem entre os membros da sociedade, vizinhos ou contatos sociais, que partilham suas opiniões, propagam idéias e doenças. Ainda existem interações que podem ser associadas a um fator externo, como uma ditadura militar ou uma onda de calor que afeta a saúde de todos.

A grande quantidade de fatores isolados ou atuando em conjunto sobre uma sociedade, pode ser tratada de maneira até mesmo intuitiva num programa de computador. Um simples algoritmo, que pode incluir todas as interações relevantes à dinâmica de uma população, torna a linguagem de programação e a utilização de computadores uma escolha natural para o estudo desses sistemas.

1.4 MODELOS DE SISTEMAS SOCIAIS

Existe uma grande variedade de modelos para descrever sistemas sociais [21-47]. Estes modelos se diferenciam, em geral, pelo foco de estudo de uma dada população: espalhamento de doenças [39-42], propagação de uma informação de minorias para maiorias ao longo do tempo [23, 24], disseminação de culturas [43], comportamento de um eleitorado frente às opções de voto [44], formação de um consenso de uma preferência política como ser de esquerda ou de direita e entre outros [45-47].

O modelo de Galam [23, 24] tenta identificar quais são os mecanismos que explicam como uma opinião, inicialmente pertencente a minorias, se torna majoritária ao longo do tempo. A premissa do modelo é que a opinião de uma dada população tem de um tópico, muda quando os indivíduos se encontram para discutir em grupos pequenos. O problema que S. Galam trata em [24] é a disseminação da idéia entre os cidadãos franceses de que nenhum avião se chocou com o pentágono em 11 de setembro de 2001. Esse rumor se espalhou na França após o lançamento de um livro [48] que vendeu mais de 200 000 cópias. Para simplificação, o modelo adota que um indivíduo pode ter somente duas opiniões em relação a um tema: favorável ou contrário. No caso de um empate de opiniões para um dado grupo de discussão, uma das duas opções é favorecida e então adotada. Esta opção sofre influência de uma inércia social contra a mudança. Mais detalhes foram incorporados ao modelo para simular a difusão de indivíduos [32] e para incluir indivíduos que são sempre contrários à maioria [46, 47]. Não faltaram tentativas de impedir a disseminação dessa interpretação do ataque e após o lançamento deste livro, houve outra publicação contrária a idéia, na qual os autores detalham as provas do ataque [49, 50].

A inércia ou resistência individual a uma opinião foi proposta por Mário de Oliveira [44]. Em seu trabalho, ele propõe e explora um efeito de resistência do indivíduo frente às idéias da maioria, ou grupo, que o cerca. Neste contexto, os indivíduos podem ser favoráveis ou contrários a um dado tema, e para que os mesmos se decidam, eles adotam a opinião da maioria dos que os cercam com certa probabilidade. Esta inércia pessoal ou resistência é quantificada no modelo com a inclusão de um parâmetro de ruído, que pode ser interpretado como uma escolha pessoal forte ou uma falha na comunicação entre o grupo, características presentes em redes sociais. Ao contrário de um modelo sem ruído, no qual a opinião da maioria é sempre acatada, a dinâmica do sistema com ruído se mostra rica e apresenta características bastante particulares. É possível conhecer, por exemplo, em que circunstâncias a predominância de uma opinião deixa de existir em função do parâmetro de ruído. Este modelo é chamado de *Modelo do Voto da Maioria com Ruído*.

Um tratamento interessante para a disseminação cultural é o modelo de Axelrod [43, 51]. A principal constatação que surge do estudo desse modelo é como as diferenças culturais não desaparecem, ainda que as pessoas normalmente adotem culturas que estão mais de acordo com suas vivências, crenças e atitudes. Para explicar este aparente paradoxo, o modelo explora mecanismos de competição entre globalização e polarização.

Num trabalho recente, K. Sznajd-Weron e J. Sznajd [45] sugeriram um modelo para simular o processo de formação de opinião, numa sociedade que não se divide somente em duas posições políticas – esquerda e direita. O modelo separa as ideologias pessoais em duas grandes áreas: liberdade pessoal e liberdade econômica. Desta maneira, a existência de pelo menos quatro tipos de comportamentos para os indivíduos são considerados: o socialista, o liberal, o autoritário e o conservador.

Outra variante de um modelo social é concebida a partir da introdução de diferentes grupos sociais no sistema. É natural que esta característica exista em uma sociedade, onde os indivíduos estão submetidos a diferentes experiências pessoais. As razões que trazem a motivação a esta modelagem são diversas. Podemos citar algumas razões como, a existência de diferentes classes econômicas e sociais, diferentes graus de escolaridade e instrução, a presença de líderes locais e/ou formadores de opinião, fatores estes que influenciam de forma direta a postura dos indivíduos. Nesta dissertação apresentamos um modelo que considera este problema tratando o caso onde se tem duas classes sociais, ou seja, dois tipos de indivíduos onde a influência mútua entre eles depende da sua natureza.

Um exemplo de uma situação que pode ser enquadrada no modelo que propomos, é a polêmica bastante atual sobre a proibição de propagandas de bebidas alcoólicas. A utilização de todas as substâncias ilícitas, para as quais a propaganda é naturalmente proibida, somadas, não corresponde a uma fração mínima do consumo mundial de bebidas e cigarros. Estima-se que o álcool mate 1,8 milhões de pessoas (3,2% dos óbitos de adultos), sem contar as pessoas que vivem com seqüelas causadas pelo etilismo. A lei brasileira nº 9.294, que regula a publicidade de álcool, tabaco e remédios, permite a propaganda de bebidas com teor alcoólico inferior a 13 graus Gay Lussac, incluídas aqui cervejas e vinhos. A Política Nacional sobre o Álcool (PNA) prevê medidas em vários âmbitos, da ampliação do tratamento de alcoolismo a novas regras para a propaganda. As que se revelaram mais problemáticas são justamente as restrições que o governo pretende impor à publicidade. A mudança nesta lei não visa somente alterar a imagem positiva do álcool nos comerciais, mas também restringir o horário dos anúncios publicitários de cervejas e vinhos entre 8 e 20 h, horário do público infanto-juvenil. Esta medida naturalmente desagrada o setor e o Sindicato Nacional da Indústria da Cerveja (Sindicerv).

Neste contexto, os grupos sociais são claramente definidos. De um lado estão os indivíduos que defendem uma total liberdade de expressão para divulgar suas propagandas, influenciados por outros que possuem o mesmo objetivo e visam apenas ter lucros maiores fazendo propagandas de seus produtos. Do outro lado está a grande parte da população que acredita que a liberdade de expressão é relevante, porém não concorda em incentivar o consumo de um produto que causa danos à sociedade. Cidadãos no segundo grupo sofrem influência do discurso do primeiro, bem como do grupo ao qual pertencem.

Outro exemplo interessante é o estudo de como grupos de animais, divididos em predadores e presas, se comportam. Podemos associar a cada um destes dois grupos um determinado comportamento. Em relação ao predador, a necessidade de encontrar alimento o impele a fazer migrações regulares para suprir seu grupo local ou família e, dependendo da espécie, isto é feito em grandes grupos. Enquanto que a presa, assume um comportamento similar para escapar dos predadores. Este é um problema de interesse atual, visto que a poluição e o aquecimento global interferem diretamente na quantidade e no comportamento dos indivíduos de uma população num dado ecossistema. É possível sob circunstâncias não muito específicas prever o comportamento de diferentes espécies no seu habitat. Por exemplo, a poluição gerada pelas fábricas durante a revolução industrial causou o escurecimento do tronco das árvores nos bosques ingleses. Como consequência, as mariposas brancas que repousavam nestas árvores tornaram-se mais visíveis aos pássaros e vulneráveis aos seus ataques. A população de mariposas brancas diminuiu significativamente e após isso, somente as mariposas escuras podiam se esconder nos troncos enegrecidos das árvores. Fazendo com que todo esse ecossistema local mudasse pela superpopulação de mariposas escuras e pela falta de alimento aos pássaros.

1.5 MODELOS DE REDE

A estrutura de redes descreve uma grande variedade de sistemas que são objetos de estudos da física estatística atual. Redes de spins magnéticos, onde átomos possuindo um momento magnético não nulo são ordenados em forma de cristal possuindo diversas geometrias [52]. Redes de interação social, onde os indivíduos estão ligados por relações de interesse mútuo como trabalho ou lazer [15, 53]. A rede mundial de computadores e a World Wide Web [17, 18] com seus *softwares* de compartilhamento, onde usuários de diversas partes do mundo trocam arquivos entre si, gerando uma polêmica muito atual sobre o direito de autoridade de obras artísticas como música e filmes.

Uma vez escolhido o sistema a ser estudado ou modelado, é necessário escolher qual será a geometria da rede, e esta é definida pelo direcionamento das ligações existentes. Isto pode ser feito de várias formas, dependendo da dimensionalidade da rede, para redes unidimensionais a cadeia linear é uma escolha natural. Para bidimensionais, têm-se a rede regular quadrada, a triangular, a hexagonal, entre outras. Existem ainda as redes complexas [54-57], em particular, o Modelo do Voto da Maioria com Ruído foi estudado em grafos aleatórios na referência [57, 58]. No caso tridimensional, podemos estudar diversas geometrias: cúbica simples (SC), cúbica de corpo centrado (BCC), cúbica de face centrada (FCC), hexagonal simples (HS), ortorrômbico, entre outras [52]. Apesar das relações sociais serem representadas, em geral, segundo sociogramas, esperamos que no nosso modelo as principais características da dinâmica de opinião possam ser analisadas numa rede regular quadrada.

No nosso modelo, os eleitores ou votantes e suas interações sociais são representados através de uma rede regular quadrada, onde cada indivíduo é representado por um nó nesta rede e cada interação social entre um par de votantes é representada por uma ligação ou *link* entre os dois nós correspondentes. O número de ligações que um dado nó possui é chamado de *grau* do nó; a distância social entre dois votantes é dada pela distância geodésica na rede, definida como o número mínimo de ligações que precisam ser percorridas para se chegar a um dado nó começando do outro. Duas características importantes da rede são o grau de distribuição e a distância média entre um par de nós [54, 55]. Um trabalho que estudou as principais características de uma rede social onde era possível variar o grau do nó pode ser encontrado em [57], e com mais detalhes em [58].

O agrupamento para qualquer tipo de rede pode ser quantificado pelo cálculo do *coeficiente de agrupamento*. Para um dado nó ou sítio da rede, vamos associar um índice i. Se este sítio possui k_i ligações com outros sítios da rede, para um círculo fechado incluindo o próprio sítio i, existiria $k_i(k_i-1)/2$ ligações entre eles. Então, definimos o coeficiente de agrupamento de um sítio i como sendo a razão entre o número de ligações que existem para um dado sítio entre seus vizinhos, E_i, e o número de ligações que haveria no caso de um círculo fechado. Podemos também definir o coeficiente de agrupamento da rede, que é a média dos coeficientes entre todos os sítios da rede

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (1.1)$$

No caso de uma rede social, cada sítio possui um número próprio de vizinhos, chamado de conectividade do sítio i, k_i, que numa rede quadrada é igual a quatro. Mais detalhes sobre outras topologias, como redes livres de escala e do tipo small-world, podem ser obtidos em [55].

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS

2.1 EQUAÇÃO MESTRA E MATRIZ DE TRANSIÇÃO

A teoria dos processos estocásticos (aleatórios) foi desenvolvida inicialmente em conexão com o estudo de flutuações e ruído em sistemas físicos. O processo estocástico é um modelo matemático de um processo que é governado por leis de probabilidade. Esta aleatoriedade nos fornece modelos úteis para o estudo de fenômenos em diversos campos, como na física estatística, na comunicação, no crescimento populacional, entre outros.

Uma *variável aleatória* é resultado de um experimento. Esta variável pode assumir qualquer valor dentre um conjunto de possíveis valores, mas não sabemos qual deles em princípio. Jogar uma moeda e obter "cara" significa dizer que a variável aleatória *face da moeda* tem valor "*cara*". Se um sistema de natureza probabilística evolui com o tempo, as variáveis aleatórias associadas a este sistema sofrem mudanças. Para variáveis que dependem de um parâmetro t, que representa um dado instante de tempo, as variáveis aleatórias deste sistema são chamadas de *variáveis estocásticas*. Supondo que o sistema possa atingir um estado estacionário, a probabilidade de encontrar o sistema num dado estado varia até que o sistema esteja num estado final estacionário, onde as transições não causam mudanças na distribuição de probabilidade.

2.1.1 Equação Mestra

Para derivar a equação mestra devemos assumir que a probabilidade de cada transição dependa somente do passo imediatamente anterior e não de toda história passada do sistema. Desta maneira estaremos considerando que os processos envolvidos têm uma memória limitada dos eventos anteriores. Um processo que apresenta esta característica é chamado de *processo markoviano*. Esta nomenclatura é uma homenagem a Andrey Andreyevich Markov que apresentou os primeiros resultados deste tipo de processo estocástico em 1906. A dinâmica de um processo markoviano é governada por uma *matriz de transição* que é real e não-simétrica. É possível mostrar que a dinâmica estocástica pode ser obtida por meio da decomposição espectral da probabilidade em termos dos auto-estados da matriz de transição.

Considere um sistema que possa ser descrito em termos de uma única variável estocástica x. A sequência de estados do sistema é descrita pelo conjunto de valores de x para cada instante de tempo. Este conjunto, $\{x(t)\}$, é chamado de *cadeia markoviana*. Então, se x é uma variável discreta, as probabilidades são normalizadas da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x_i, t_i) = 1. \qquad (2.1)$$

Onde $P_1(x_1, t_1)$ é a probabilidade da variável estocástica x tenha valor x_1 no instante de tempo t_1. De maneira que podemos generalizar e dizer que $P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots ; x_n, t_n)$ é a probabilidade *conjunta* que a variável estocástica x tenha valor x_1 no instante de tempo t_1, x_2 no tempo t_2, . . . , x_n no tempo t_n. É possível definir os momentos das variáveis estocásticas que nos fornecem a correlação entre os valores das variáveis para os diferentes instantes de tempo

$$\langle x_1(t_1)x_2(t_2) \ \ldots \ x_n(t_n)\rangle = \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_n} x_1 x_2 \ \ldots \ x_n P_n(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n). \qquad (2.2)$$

Um processo é chamado de *estacionário* se para todos os valores de n e τ

$$P_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \ldots, x_n, t_n) = P_n(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau, \ldots, x_n, t_n + \tau), \qquad (2.3)$$

todos os processos em equilíbrio são estacionários. Para um processo estacionário $\langle x_1(t_1)x_2(t_2)\rangle$ depende somente de $|t_1 - t_2|$ e ainda

$$P_1(x_1, t_1) = P_1(x_1). \qquad (2.4)$$

Vamos denominar $P_{1|1}(x_1,\ t_1|\ x_2,\ t_2)$ como a *probabilidade condicional da variável estocástica x ser igual a* x_2 *no instante* t_2 *dado que x tinha valor* x_1 *no instante de tempo* t_1. Esta probabilidade pode ser definida pela identidade

$$P_1(x_1,\ t_1)P_{1|1}(x_1,\ t_1|\ x_2,\ t_2) = P_2(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2), \tag{2.5}$$

que possui a seguinte propriedade

$$\textstyle\sum_{x_2} P_{1|1}(x_1, t_1|x_2, t_2) = 1. \tag{2.6}$$

Então, reduzindo a probabilidade temos

$$\textstyle\sum_{x_2} P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = P_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}). \tag{2.7}$$

Para diferentes instantes de tempo podemos obter a seguinte relação entre as probabilidades

$$P_1(x_2,\ t_2) = \textstyle\sum_{x_1} P_1(x_1,\ t_1)\, P_{1|1}(x_1, t_1|x_2, t_2). \tag{2.8}$$

Se, de uma maneira geral, podemos escrever que $P_{k|l}(x_1,\ t_1;\ \ x_2,\ t_2;\ .\ .\ .\ ;\ x_k,\ t_k\ |\ x_{k+1},\ t_{k+1};\ x_{k+2},\ t_{k+2};.\ .\ .\ ;\ \ x_{k+l},\ t_{k+l};)$ é a probabilidade conjunta condicional de que a variável estocástica x assuma valores $(x_{k+1},\ t_{k+1};\ x_{k+2},\ t_{k+2};.\ .\ .\ ;\ \ x_{k+l},\ t_{k+l})$ dado que $(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2;.\ .\ .\ ;\ \ x_k,\ t_k)$ está mantido fixo. Então, vamos reescrever a equação (2.8) para um estado n num instante de tempo $t + \Delta t$

$$P_1(n, t + \Delta t) = \textstyle\sum_{m=1}^{M} P_1(m, t) P_{1|1}(m, t\ |n, t + \Delta t). \tag{2.9}$$

Supondo agora que x é uma variável estocástica *contínua* que depende do tempo e que, portanto, $P_1(n,\ t)$ é uma densidade de probabilidade, podemos construir seguinte a equação diferencial para $P_1(n,\ t)$:

$$\frac{\partial P_1(n,t)}{\partial t} \equiv lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{P_1(n,t+\Delta t)-P_1(n,t)}{\Delta t}\right), \quad (2.10)$$

que poderia ser escrita como

$$\frac{\partial P_1(n,t)}{\partial t} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{m=1}^{M} P_1(m,t)\left(P_{1|1}(m,t\mid n,t+\ \Delta t) - \delta_{m,n}\right). \quad (2.11)$$

Onde $P_{1|1}(m,\ t \mid n,\ t+\Delta t)$ é a probabilidade de transição. Expandindo em série de potências de Δt, mantendo os termos de mais baixa ordem

$$P_{1|1}(m,t\,|n,t+\Delta t) = \delta_{m,n}\left[1-\Delta t\sum_{l=1}^{M} w_{m,l}(t)\right] + w_{m,n}(t)\Delta t + \ \ldots \quad (2.12)$$

Garantindo assim a conservação da probabilidade para todos os tempos. Nesta expansão, $w_{m,n}(t)$ é a variação da probabilidade de transição com o tempo, ou seja, é a *taxa da probabilidade de transição*. O termo $w_{m,n}(t)\Delta t$ da equação anterior, é a probabilidade de uma transição do estado m para o estado n durante o intervalo de tempo $t \to t+\Delta t$. De maneira análoga, o termo

$$1-\Delta t\sum_{l=1}^{M} w_{m,l}(t) \quad (2.13)$$

é a probabilidade complementar, ou seja, a probabilidade de não haver a transição durante o mesmo intervalo de tempo $t \to t+\Delta t$.

Utilizando esta expansão na equação diferencial da probabilidade encontramos a *Equação Mestra* para processos estocásticos

$$\frac{\partial P_1(n,t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{M}\left[P_1(m,t)w_{m,n}(t) - P_1(n,t)w_{n,m}(t)\right]. \quad (2.14)$$

Equação esta que nos fornece a taxa de mudança na probabilidade $P_1(n,\ t)$ devido às transições de um estado m para o estado n (primeiro termo do somatório) e devido às transições do estado n para outro m (segundo termo do somatório). Podemos verificar nesta equação uma propriedade básica de um processo markoviano: conhecendo completamente o sistema num instante, é possível determinar o comportamento futuro. Não há memória do passado.

2.1.2 Matriz de Transição

A probabilidade condicional de encontrar o sistema no estado n no instante de tempo t, dado que o sistema estava no estado n_0 em $t = 0$, $P_{1|1}(n_0, 0 \mid n, t)$, satisfaz a equação mestra

$$\frac{\partial P_{1|1}(n_0,0|n,t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{M}\left[P_{1|1}\left(n_0, 0|\, m, t\right)w_{m,n}\left(t\right) - P_{1|1}\left(n_0, 0|\, n, t\right)w_{n,m}\left(t\right)\right]. \quad (2.15)$$

Esta probabilidade satisfaz também $P_{1|1}(n_0, 0 \mid n, t) = \delta_{n,n_0}$ como condição inicial. Se introduzirmos a *matriz de transição* $W_{m,n}(t)$ como

$$W_{m,n}\,(t) = w_{m,n}(t) - \delta_{m,n}\sum_{n'=1}^{M} w_{n,n'}(t). \quad (2.16)$$

Onde os elementos dessa matriz são os termos $w_{m,n}(t)$. Esta matriz de transição deve satisfazer as condições

$$W_{m,n} \geq 0 \; para \; n \neq m \; e \; \sum_n W_{m,n} = 0 \;\; \forall m. \quad (2.17)$$

Desta maneira a equação mestra assume uma forma mais compacta

$$\frac{\partial P_1(n,t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{M} P_1\left(m, t\right)W_{m,n}\left(t\right). \quad (2.18)$$

Se considerarmos um sistema com N partículas, onde cada partícula está associada a uma variável estocástica, σ_i, que pode assumir apenas dois valores distintos. Neste caso a matriz de evolução temporal, $W_{m,n}(t)$, tem dimensão dada por $2^N \times 2^N$. O estado de todo o sistema é representado pelo conjunto de valores da variável σ_i, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$. Então podemos escrever a equação mestra na forma [58]

$$\frac{\partial P(\sigma,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\left[P\left(\sigma^i, t\right)w_i\left(\sigma^i\right) - P\left(\sigma, t\right)w_i\left(\sigma\right)\right], \tag{2.19}$$

onde o estado σ^i, é obtido do estado σ invertendo o estado do i-ésimo sítio σ_i, por $-\sigma_i$.

É possível acompanhar a evolução temporal da média de uma função de estado $f(\sigma)$ através da definição

$$\langle f(\sigma)\rangle = \sum_{\sigma} f(\sigma)P(\sigma,t), \tag{2.20}$$

onde $P(\sigma, t)$ é a probabilidade de o sistema estar no estado σ no instante t.

2.2 METODOLOGIA DA SIMULAÇÃO

2.2.1 Introdução

Com a viabilização de computadores digitais, a metodologia da simulação computacional se tornou uma ferramenta bastante utilizada para estudar sistemas com muitos corpos.

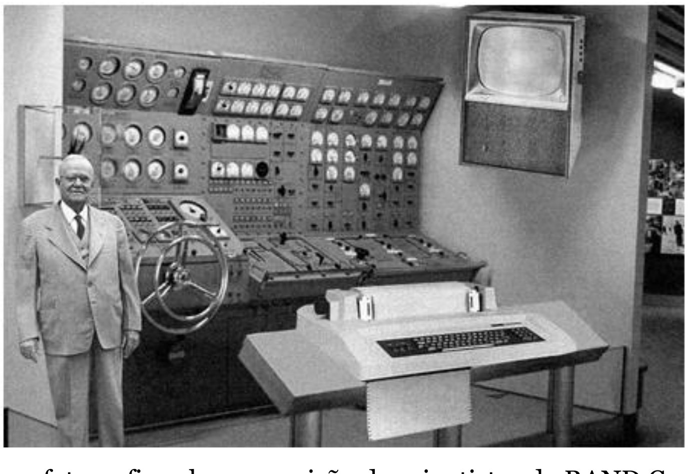

Figura 2.1. Uma curiosa fotografia sobre a previsão dos cientistas da RAND Corp. para o computador doméstico do ano de 2004. “Com a linguagem Fortran será fácil de usar” diziam os cientistas. Imagem retirada do site www.realtechnews.com.

A importância do método computacional reside em conseguir obter, para alguns casos ao menos em princípio, resultados exatos para o Hamiltoniano de interesse. Desta maneira, é possível descrever o comportamento do sistema para algumas situações específicas. Numa simulação em computador deseja-se construir uma trajetória para um sistema que contenha muitos graus de liberdade. Uma trajetória é uma seqüência cronológica de configurações do sistema. Suponha, por exemplo, que a configuração de um magneto tipo Ising seja determinada pela lista de variáveis de spin $s_1, s_2, \ldots, s_N$ no t-ésimo passo nesta trajetória. Então, podemos escrever uma variável $v = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ que é uma abreviação do estado do sistema neste instante de tempo. Uma trajetória possível seria

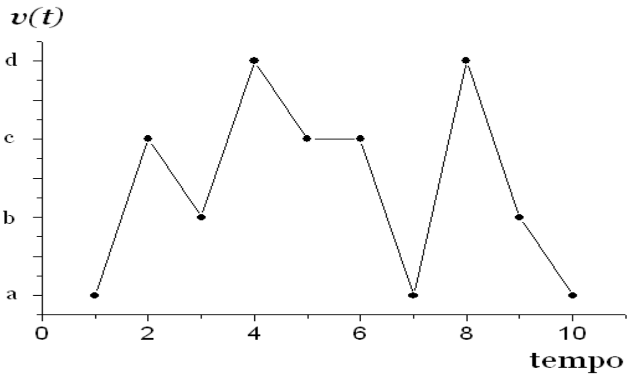

Figura 2.2. Trajetória de estados do sistema em diferentes instantes de tempo. No gráfico, *a, b, c* e d são estados do sistema.

O objetivo é obter uma média das grandezas físicas nas configurações sob a trajetória. Para uma grandeza $G_v = G(s_1, s_2, \ldots, s_N)$, podemos calcular a média sobre as configurações obtidas durante um tempo de R passos pela soma

$$\langle G \rangle_R = \frac{1}{R} \sum_{t=1}^{R} G_{v(t)}. \tag{2.21}$$

Então, assim como num experimento em laboratório, é possível conhecer o valor médio de uma grandeza física relevante do sistema. Através da repetição do experimento em computador, assim como no laboratório, a média dos valores obtidos possui um erro associado à natureza probabilística do problema que é cada vez menor. Uma maneira relativamente eficiente para realizar a simulação de um experimento no computador é utilizar o método de Monte Carlo.

2.2.2 O Método Monte Carlo: História e Conceito

O método de Monte Carlo [59, 60] é uma maneira de fazer simulações computacionais baseadas em um procedimento estocástico. Este método gera trajetórias no espaço de fases do sistema, possibilitando o cálculo de médias das grandezas termodinâmicas relevantes ao problema nestas trajetórias. A denominação do método provém de Monte Carlo, principado de Mônaco, célebre por seu cassino, a roleta, jogo de azar. Sendo a roleta um dos dispositivos mecânicos mais simples capazes de produzir números aleatórios.

Uma simulação Monte Carlo provê soluções aproximadas para uma variedade de problemas matemáticos por intermédio de testes probabilísticos. Apesar desta natureza estatística do método, a simulação Monte Carlo é aplicável também a problemas que não apresentam natureza probabilística. Sua vantagem sobre os outros métodos de simulação é que os métodos numéricos, que tem por objetivo produzir um resultado aproximado, consistem em calcular n pontos referentes às grandezas de interesse num espaço m-dimensional. Na ausência de "truques" de simulação ou casos especiais do problema, estes métodos apresentam erros estatísticos absolutos que diminuem com $n^{-1/m}$, na melhor das hipóteses. Enquanto que a simulação em Monte Carlo possui um erro absoluto que diminui com $n^{-1/2}$. Esta propriedade do método garante eficiência computacional à simulação Monte Carlo à medida que a dimensionalidade do sistema, m, cresce [61].

O método de Monte Carlo incorpora desenvolvimentos históricos distintos nas ciências matemáticas. Um problema relativamente recente (no projeto Manhattan da Segunda Guerra) era encontrar as soluções para a difusão ou transporte de nêutrons em um meio isotrópico. A resolução deste problema contribuiria para o desenvolvimento da energia atômica, mas encontrar soluções via equações diferenciais era uma tarefa árdua. Na época que este problema surgiu, já estava estabelecido matematicamente que os resultados oriundos de equações diferenciais parciais possuíam análogos em processos estocásticos. John von Neumann e Stanislaw Ulam sugeriram que os modelos de caminhada aleatória (random walk) fossem utilizados no computador digital, e este havia sido desenvolvido na mesma época. O objetivo era poder conhecer soluções aproximadas para o problema. Os detalhes deste desenvolvimento podem ser encontrados em [62]. Com a viabilidade do uso de computadores digitais, o conceito de fazer experimentos em computador prevaleceu em muitas disciplinas científicas, e de maneira mais notável na química, na engenharia, na física e na estatística.

A simplicidade do conceito do método de Monte Carlo permite modificações no modelo para produzir, com um baixo custo computacional, a solução do problema original com um valor aceitável para o erro. No início da computação digital, as técnicas para evitar um alto tempo de simulação eram essenciais para o sucesso da aplicação do método. Contudo, como era necessário desenvolver uma técnica para cada problema, e este procedimento custava tempo do programador e por vezes era tão sofisticado que aumentava muito a chance de conter erros de programação. Atualmente, com o advento dos computadores pessoais e de w*orkstations* mais poderosas, é possível economizar tempo de programação e deixar com que o computador trabalhe mais para obter uma solução aproximada. São componentes primários de uma simulação de Monte Carlo:

(1) *Funções de distribuição de probabilidades* – o sistema físico ou matemático deve ser descrito através dessas funções.

(2) *Gerador de números aleatórios* – uma fonte que possa gerar números aleatórios distribuídos de maneira uniforme.

(3) *Regra para as amostras* – uma regra que seja uma conseqüência das funções de densidade de probabilidade.

(4) *Acumulação dos resultados* – as saídas ou resultados de interesse das simulações devem ser acumulados sobre todas as amostras.

(5) *Estimativa do erro* – é uma estimativa do erro estatístico (variância) como função do número de amostras ou tentativas.

(6) *Técnicas de redução dos erros* – métodos para diminuir a variância na solução estimada com o objetivo de reduzir também o tempo da simulação.

(7) *Vetorização e paralelização* – criação de algoritmos que aumentem a eficiência do método de Monte Carlo nas arquiteturas de computadores mais avançados.

Na simulação Monte Carlo, desejamos acompanhar a dependência temporal de um modelo cuja evolução não segue um padrão pré-definido, como as equações de Newton, mas sim de uma maneira estocástica que está relacionada com uma seqüência de números aleatórios gerados durante a simulação [63]. Nos cálculos das médias consideramos somente as trajetórias de estados que estão termicamente em equilíbrio ou que sejam de estados estacionários. Estas médias são dadas por

$$\langle G \rangle \;=\; \lim_{R\to\infty} \langle G \rangle_R . \tag{2.22}$$

Mais detalhes sobre o método e sobre as trajetórias permitidas ao sistema podem ser encontrados em [64].

Numa simulação Monte Carlo o sistema segue então uma trajetória no espaço de fase que, apesar de ordenada, não é descrita segundo o tempo convencional, mas em função do *passo de Monte Carlo*. O comportamento evolutivo é descrito pela equação mestra

$$\frac{\partial P_1(n,t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{M} \left[P_1(m,t) w_{m,n}(t) - P_1(n,t) w_{n,m}(t) \right]. \tag{2.23}$$

Para um sistema que está numa dada configuração, estado m, num instante inicial e após uma iteração ou passo, se encontra no estado n, para pontos permitidos do espaço de fase, podemos descrever essa transição em função da probabilidade de que a mudança ocorra $w_{m,n}(t)$. A forma desta probabilidade de transição é definida pelo modelo que estamos utilizando para simular o sistema. A maneira como utilizamos esta probabilidade e como calculamos as grandezas de interesse são tópicos que serão discutidos no capítulo 3 que trata do modelo utilizado.

2.3 TRANSIÇÕES DE FASE

2.3.1 Pontos Críticos e Transições de Fase

A Mecânica Estatística em seu formalismo trata, em geral, duas classes de problemas. Na primeira classe temos sistemas onde os constituintes são, ou quase são não interagentes. Como conseqüência, o conhecimento dos níveis de energia dos constituintes permite escrever as funções termodinâmicas do sistema. A característica mais importante nestas funções é que elas descrevem os processos relevantes sendo funções suaves e contínuas, portanto, de fácil análise e tratamento. Alguns exemplos são o calor específico de sólidos e gases, a distribuição espectral da radiação de um corpo negro, a teoria de condução de elétrons em metais, entre outros.

Na segunda classe de sistemas temos uma situação diferente devido às singularidades ou descontinuidades analíticas nas funções termodinâmicas nos chamados *pontos críticos* do sistema. Esta dificuldade é inerente aos vários tipos de *transições de fase* as quais estes sistemas apresentam. Transições estas que são freqüentemente vistas por uma mudança brusca nas propriedades da substância. Nesta categoria poderíamos citar a condensação de gases, o comportamento de misturas e soluções, o magnetismo espontâneo na forma de ferromagnetismo ou antiferromagnetismo, transição condutor-supercondutor, etc. Nestes sistemas as interações entre as partículas ou constituintes não podem ser removidas por meio de transformações de coordenadas ou simplificações do modelo. Contudo, os constituintes microscópicos apresentam um comportamento *cooperativo* sob determinadas circunstâncias. O comportamento cooperativo assume uma relevância macroscópica nas proximidades de uma temperatura em particular T^*, chamada de *temperatura crítica* do sistema.

O estudo das transições de fase e pontos críticos é de grande interesse em vários campos da ciência. Atualmente, os estados da matéria são estudados em física de baixas temperaturas, física do estado sólido, química, engenharia química, metalurgia, entre outros. Com aplicações na geologia, bioquímica, biofísica, engenharia, etc.

O problema fundamental na teoria das transições de fase é estudar o comportamento do sistema nas vizinhanças do ponto crítico. Este comportamento é definido pela natureza das singularidades das funções termodinâmicas no ponto crítico. O estudo destas transições e fenômenos críticos tem aumentado ao longo dos últimos 50 anos, e neste período somente algumas poucas soluções exatas foram encontradas. Houve um aumento natural na necessidade de soluções aproximadas e investigações baseadas em técnicas numéricas [65-67].

Em decorrência desta forma de pesquisa, todo um novo ferramental matemático e teórico foi desenvolvido. Neste ferramental as singularidades no ponto crítico são expressas comumente em termos de leis de potência, caracterizadas por um conjunto de *expoentes críticos* que determinam qualitativamente a natureza do comportamento crítico de um dado sistema. Neste contexto, sistemas que apresentam os mesmos expoentes críticos foram agrupados dentro de uma mesma *classe de universalidade*.

Esforços utilizando expansões em séries, como em [68], e a teoria do grupo de renormalização [69], foram direcionados a obter os valores precisos dos expoentes críticos estáticos para modelos de três dimensões. Recentemente novos algoritmos para simulações em Monte Carlo e novos métodos de análise [70] foram capazes de obter uma precisão maior, fazendo com que as técnicas de simulação se tornassem, atualmente, o melhor método para tratar estes problemas. Apesar de essas técnicas determinarem com uma excelente precisão os valores dos expoentes críticos estáticos ou dinâmicos, existem aspectos relativos à análise de dados que devem ser considerados de maneira a possibilitar uma conclusão precisa sobre o comportamento do sistema.

2.3.2 Expoentes Críticos e Universalidade

Desejando estudar o comportamento do sistema nas proximidades do ponto crítico, onde as funções termodinâmicas são singulares, expressamos estas singularidades em termos de leis de potencia que são caracterizadas por um conjunto de expoentes críticos [71, 72]. É premissa fundamental identificar um *parâmetro de ordem* m do sistema e um *campo de ordenamento* correspondente h, tal que no limite em que $h \to 0$, m possua um valor finito m_o, com a propriedade que $m_o = 0$

para $T > T^*$e $m_o \neq o$ para $T < T^*$. Então este parâmetro de ordem m escala com T segundo um expoente β

$$m_0 \sim (T^* - T)^{\beta},\ (h \to 0, T \lesssim\ T^*). \tag{2.24}$$

E, por conseguinte, a forma com que a susceptibilidade para campo nulo diverge quando $T \to\ T^*$, para valores abaixo ou acima de T^*definem o expoente γ

$$\chi_0 \sim \left(\frac{\partial m}{\partial h}\right)_{T,h\to 0} \sim \begin{cases} (T - T^*)^{\gamma} & para\ h \to 0, T \gtrsim T^*. \\ (T^* - T)^{-\gamma'} & para\ h \to 0, T \lesssim T^*. \end{cases} \tag{2.25}$$

O expoente δ é definido pela relação

$$m|_{T=T^*} \sim h^{1/\delta},\ (T = T^*, h \to 0). \tag{2.26}$$

O comprimento de correlação do sistema, que também diverge na transição de fase é dado por

$$\xi \sim \left(\frac{T - T^*}{T^*}\right)^{-\nu}. \tag{2.27}$$

Por fim, os expoentes α *e* α' que estão relacionados com um possível calor específico do sistema (comum a sistemas gás-líquido)

$$C_V \sim \begin{cases} (T - T^*)^{\alpha} & para\ \ T \gtrsim T^*. \\ (T^* - T)^{-\alpha'} & para\ \ T \lesssim T^*. \end{cases} \tag{2.28}$$

Então podemos dizer que o expoente crítico associado a uma função termodinâmica $f\left(\frac{T-T^*}{T^*}\right) = f(\epsilon)$, onde $\epsilon = \frac{T-T^*}{T^*}$ é uma medida da distância de um ponto de temperatura T qualquer até o ponto crítico T^*, desde que T esteja nas vizinhanças de T^*, é definido como

$$\lambda \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln|f(\epsilon)|}{\ln|\epsilon|} < \infty, \tag{2.29}$$

assumindo que o limite exista. Então explicitamos na forma mais comum como

$$f(\epsilon) \sim |\epsilon|^{\lambda} \;\; para \;\; |\epsilon| \; \to \; 0, \tag{2.30}$$

onde $|\epsilon| \to 0$ significa que estamos nas proximidades do ponto crítico. Estes expoentes não estão completamente descorrelacionados, na verdade existem relações e desigualdades bem estabelecidas entre eles. A primeira relação, derivada por Rushbrooke, mostra que para qualquer sistema que sofre uma transição de fase

$$(\alpha' + 2\beta + \gamma') \geq 2 \,, \tag{2.31}$$

é chamada de *desigualdade de Rushbrooke*. Ainda é possível estabelecer mais desigualdades, e uma delas é conhecida como *desigualdade de Griffiths*

$$\alpha' + \beta(1 + \delta) \geq 2 \,. \tag{2.32}$$

Griffths ainda derivou outras desigualdades para o sistema em questão, duas delas são:

$$\gamma' \geq \beta(\delta - 1), \tag{2.33}$$

$$\gamma' \geq \frac{(2-\alpha)(\delta-1)}{(\delta+1)}. \tag{2.34}$$

Se for do interesse do leitor, é possível encontrar mais detalhes sobre desigualdades, igualdades e como provar estas relações entre os expoentes em [71, 73]. Abaixo segue uma tabela para alguns sistemas físicos e seus respectivos expoentes na criticalidade retirada de [74].

Tabela 2.1. Dados experimentais para os valores dos expoentes críticos em diversos sistemas (D = 3).

Expoente Crítico	Sistemas Magnéticos	Sistemas Líquido-Gás	Mistura Fluidos Binários	Ligas Binárias	Sistemas Ferroelétricos	Resultados Campo Médio
α, α'	0.0-0.2	0.1-0.2	0.05-0.15	- - -	- - -	0
β	0.30-0.36	0.32-0.35	0.30-0.34	0.305±0.005	0.33-0.34	1/2
γ	1.2-1.4	1.2-1.3	1.2-1.4	1.24±0.015	1.0±0.2	1
γ'	1.0-1.2	1.1-1.2	- - -	1.23±0.02	1.23±0.02	1
δ	4.2-4.8	4.6-5.0	4.0-5.0	- - -	- - -	3
ν	0.62-0.68	- - -	- - -	0.65±0.02	0.5-0.8	1/2
η	0.03-0.15	- - -	- - -	0.03-0.06	- - -	0

A partir das relações anteriores entre os expoentes, temos as seguintes propriedades:

(1) Os expoentes críticos não são completamente independentes, mas sim dependem entre si por relações e desigualdades que são originadas pelos princípios da termodinâmica. É possível mostrar que apenas dois destes expoentes são verdadeiramente independentes.

(2) Dependem de um pequeno número de características ou parâmetros do sistema. Isto explica porque sistemas que diferem tanto entre si possuem expoentes críticos que variam muito pouco.

Para um determinado conjunto de expoentes críticos associamos uma *classe de universalidade* ao sistema, de forma que expoentes que apresentem o mesmo conjunto de valores partilham a mesma classe de universalidade. Esta robustez dos modelos de sistemas físicos depende da dimensionalidade do espaço em que o sistema é tratado, do número de componentes do parâmetro de ordem do sistema e do alcance das interações microscópicas no sistema.

A Teoria de Landau, tenta unificar a descrição de todas as transições de fase de *segunda ordem* – segunda ordem no sentido que as segundas derivadas da energia livre de Helmholtz, calor específico e susceptibilidade magnética (ou compressibilidade isotérmica no caso de fluidos), são contínuas no ponto crítico. Enfatizando a importância do parâmetro de ordem m_0 e sugerindo uma expansão da energia livre em potências de m_0. Esta teoria permite concluir que, se é possível escrever uma expressão para a energia livre do sistema, que contenha os parâmetros que representam sua estrutura e suas interações inerentes, então a amplitude das várias grandezas físicas nas proximidades do ponto crítico é uma função destes parâmetros. Apesar disso, os expoentes críticos não dependem destes parâmetros! Esta *universalidade* dos expoentes sugere que estamos lidando com uma classe de sistemas que apesar de diferenças estruturais, apresentam um mesmo comportamento pertinente ao de sua classe [74].

2.3.3 Escalamento de Tamanho Finito

As simulações de Monte Carlo têm sido aplicadas a muitos sistemas físicos gerando um conjunto de resultados sobre as propriedades físicas de diversos problemas [75]. Apesar disso, as simulações de sistemas físicos estão limitadas para um tamanho finito, fazendo com que as funções termodinâmicas apresentem uma dependência com o tamanho do sistema. Esta relação entre tamanho do sistema e o valor das grandezas físicas surge da divergência do comprimento de correlação limitada pelo tamanho finito do sistema. Então, para um sistema unidimensional na região crítica, temos que

$$\xi \sim L \sim |\epsilon|^{-\upsilon}, \tag{2.35}$$

de maneira que podemos escrever

$$|\epsilon| \sim L^{-\frac{1}{\upsilon}} . \tag{2.36}$$

Desta forma, é possível reescrever todas as grandezas termodinâmicas como Magnetização M, susceptibilidade χ, como função da temperatura e do tamanho da rede

$$M = M_L \sim L^{-\frac{\beta}{\upsilon}} , \tag{2.37}$$

$$\chi = \chi_L \sim L^{\frac{\gamma}{\upsilon}} . \tag{2.38}$$

Os expoentes β/ν e γ/ν estão relacionados com a forma com que a magnetização e a susceptibilidade divergem nas proximidades do ponto crítico em função do tamanho do sistema.

Para alguns sistemas é possível definir o chamado *cumulante de Binder de quarta ordem* [76]. Esta grandeza é definida de forma a não depender do tamanho do sistema exatamente no ponto crítico, ou seja, em $\epsilon = 0$, e de maneira que o expoente crítico associado ao cumulante neste ponto seja nulo, desta forma

$$U \sim L^0, \tag{2.39}$$

$$U_L(\epsilon = 0) = U(\epsilon = 0) = U^*. \tag{2.40}$$

A partir do cumulante de Binder, podemos conhecer os valores dos pontos críticos do sistema e seu comportamento crítico no limite termodinâmico ($N \to \infty$). Neste limite, é possível mostrar que nas proximidades do ponto crítico, as grandezas termodinâmicas podem ser reescritas em uma nova escala, ou seja, em termos de suas funções de escala

$$M_L(T) = L^{-\beta/\nu} \widetilde{M}\left(L^{1/\nu}\epsilon\right), \tag{2.41}$$

$$\chi_L(T) = L^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}\left(L^{1/\nu}\epsilon\right), \tag{2.42}$$

$$U_L(T) = \widetilde{U}\left(L^{1/\nu}\epsilon\right). \tag{2.43}$$

Este procedimento é chamado de *escalamento de tamanho finito* (finite size scaling). Interessante ressaltar que quando $\epsilon = 0$, $U_L = U^*$ que não depende de qualquer expoente. Logo, no ponto crítico, as curvas de U_L possuem o mesmo valor U^* de forma que elas coincidem neste ponto. Nesta escala, as grandezas dependem, em geral, do tamanho do sistema e das funções $\widetilde{M}\left(L^{1/\nu}\epsilon\right)$, $\tilde{\chi}\left(L^{1/\nu}\epsilon\right)$ e $\widetilde{U}\left(L^{1/\nu}\epsilon\right)$ que são chamadas de *funções universais de escala*. Desta maneira podemos escrever as funções universais de escala para magnetização, para susceptibilidade e para o cumulante de Binder na forma

$$\widetilde{M}\left(L^{1/\nu}\epsilon\right) = M_L(T)L^{\beta/\nu}, \tag{2.44}$$

$$\tilde{\chi}\left(L^{1/\nu}\epsilon\right) = \chi_L(T)L^{-\gamma/\nu}\ , \tag{2.45}$$

$$\widetilde{U}\left(L^{1/\nu}\epsilon\right) = U_L(T). \tag{2.46}$$

Se os expoentes referentes à transição de fase forem conhecidos, então nas proximidades da transição as curvas de magnetização e susceptibilidade apresentam um colapso em termos das suas funções universais de escala. Este procedimento é chamado de *colapso de dados* (ou *data colapse*). É um método que possui alta sensibilidade ao valor dos expoentes críticos e ao valor da temperatura crítica, quanto melhor forem as estimativas para os valores dos expoentes críticos e da temperatura crítica, melhor será o colapso das curvas. Neste método, o cumulante de Binder é definido de maneira a não depender do tamanho do sistema exatamente no ponto crítico, tornando-se assim, uma maneira eficiente de determinar o valor do ponto crítico. Mais uma relação entre expoentes críticos pode ser obtida a partir das leis de escala [71]

$$2\frac{\beta}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} = D\ . \tag{2.47}$$

Esta equação é chamada de *relação de hiper-escala* e relaciona a forma com que a magnetização e a susceptibilidade dependem do tamanho do sistema, nas proximidades do ponto crítico, com a dimensão efetiva *D* do sistema.

Associado ao tempo de relaxação de um sistema no ponto crítico existe o *expoente crítico dinâmico z*

$$t \sim \xi^z \sim L^z\ . \tag{2.48}$$

Este tempo de relaxação é definido como o tempo que o sistema gasta para ir de um estado completamente ordenado para o estado completamente desordenado exatamente no ponto crítico, ou seja, $\epsilon = 0$. A partir deste expoente é possível estabelecer uma relação entre magnetização e sua dependência temporal no ponto crítico

$$M_L \sim t^{-\zeta} \; , \tag{2.49}$$

de onde podemos concluir que

$$\zeta = \frac{\beta}{\nu z} \, . \tag{2.50}$$

No ponto crítico, é de se esperar que a susceptibilidade venha a divergir, mas para sistemas de tamanho finito isto não acontece. Nestes sistemas a susceptibilidade atinge um valor máximo, $\chi_{L_{máx}}$, que depende do tamanho do sistema através da relação

$$\chi_{L_{máx}} \sim L^{\frac{\gamma}{\upsilon}} \, . \tag{2.51}$$

Esta é uma maneira de verificar a consistência com os resultados obtidos para os expoentes $\gamma/_{\upsilon}$ pela equação (2.45). O valor da temperatura crítica num sistema de tamanho finito depende do tamanho do sistema pela relação

$$T^*(L) = T^* + bL^{-\frac{1}{\upsilon}} \; , \tag{2.52}$$

onde T^* é o valor da temperatura crítica no limite termodinâmico e b é uma constante.

CAPÍTULO 3

MODELO DE DIFERENTES AGENTES

3.1 MODELO DO VOTO DA MAIORIA

3.1.1 Introdução

A necessidade do conhecimento de sistemas que apresentam ordenamento de longo alcance, em particular sistemas magnéticos, motivou os cientistas a criarem modelos e tratamentos que pudessem descrever a fenomenologia do problema. Os modelos e desenvolvimentos teóricos derivados das leis da Mecânica Estatística proporcionaram uma maior compreensão destes sistemas. Dentre estes, o modelo de Ising mereceu um destaque especial por conseguir descrever através de um tratamento simples e bastante intuitivo, problemas em diversas áreas do conhecimento. Outros modelos de interesse são os modelos de Heisenberg e XY, e o modelo de Potts. A Mecânica Estatística divide os vários modelos, do ponto de vista da evolução temporal, em dois grandes grupos:

(i) Microscopicamente reversíveis: a dinâmica do sistema é regida por um hamiltoniano que descreve a interação entre os constituintes do sistema. O modelo evolui segundo uma probabilidade de transição que está associada à diferença de energia entre o estado inicial e o estado final. Desta maneira, estes sistemas evoluem para estados de equilíbrio termodinâmico que obedecem ao princípio do balanceamento detalhado, ou seja, a probabilidade do sistema percorrer uma sequência de estados microscópicos e igual à probabilidade do sistema seguir a mesma sequência na ordem inversa.

(ii) Microscopicamente irreversíveis: a evolução do sistema não obedece à condição de balanceamento detalhado, e os estados estacionários não são estados de equilíbrio termodinâmico. Desta maneira, a probabilidade do sistema descrever uma sequência de estados microscópicos depende da ordem em que estes estados são visitados.

3.1.2 O Modelo do Voto da Maioria e Aplicações

O *modelo do voto da maioria*, ou *modelo do votante majoritário*, é um tratamento que simula a dinâmica da mudança de opinião de uma população. Este modelo baseia-se na hipótese que a opção de escolha que um indivíduo tem, num dado instante de tempo, depende da escolha que a maioria dos seus vizinhos possui neste instante.

Definida uma rede, o modelo do voto da maioria associa a cada sítio desta rede uma variável de spin do tipo Ising, σ_i, que pode assumir apenas dois valores $\sigma_i = \pm 1$. Podemos associar uma opinião, favorável ou contrária a um tema, ao estado de um dado sítio da rede. No recente referendo ocorrido no Brasil, sobre proibição do porte e uso de armas de fogo, $\sigma_i = +1$ significaria que o indivíduo associado ao sítio i é a favor da proibição, e $\sigma_i = -1$ que ele é desfavorável.

Outro exemplo é o problema que trata da migração de uma espécie sob o risco de extinção. Neste caso, $\sigma_i = +1$ seria associado à escolha do indivíduo da espécie em estudo de deixar seu habitat, devido a desmatamento, poluição, falta de alimento, entre outros fatores. Enquanto que $\sigma_i = -1$ seria a escolha de permanecer em seu habitat por encontrar condições propícias para a permanência ou ainda por conta de uma limitação motora, ou simplesmente pela falta de um lugar de destino.

Em um problema de tráfego urbano, é fácil perceber que quando a situação no tráfego se torna confusa alguns motoristas tendem a criar soluções. Como por exemplo, fazendo manobras permitidas procurando caminhos alternativos ou pontos de retorno. Em alguns casos optam até mesmo por manobras proibidas, dependendo do grau de risco e da espécie do problema. Estas soluções são seguidas ou não por outros motoristas, dependendo do que a maioria faz. Se a maior parte dos motoristas opta por um desvio para evitar um engarrafamento, é natural que um condutor que acaba de atingir o ponto onde ainda é possível fazer ou não o desvio, siga a maioria. Desta maneira, seria possível tomar decisões e interferir para evitar que o trânsito se torne caótico em determinados trechos de um trajeto.

Nos exemplos descritos acima, como em tantos outros, é possível verificar que existem indivíduos que não seguem a opinião da maioria. Os fatores para isso são os mais diversos. No exemplo do referendo, pode-se ter uma opinião consolidada demais sobre o tema, pois se um indivíduo perdeu um parente por conta de um acidente com arma de fogo, é de se esperar que ele seja a favor da proibição de venda de armas. No caso do movimento migratório, uma restrição motora ou de saúde pode impedir a locomoção do animal. No caso do trânsito urbano, o motorista pode ser mais experiente e conhecer que o caminho tomado pela maioria não é seguro, ou ter consciência que se trata de uma manobra proibida. A este comportamento que não segue a opinião da maioria, associamos um parâmetro q, chamado de *parâmetro de ruído*.

A introdução do parâmetro de ruído, que é inerente ao indivíduo que recebe influência de uma maioria, enriquece de maneira significativa o modelo do voto da maioria, deixando-o mais realista. Com a definição desta resistência, quantificada através do parâmetro q, é possível também fazer previsões sobre a dinâmica da propagação de doenças, onde q significaria uma resistência imunológica a um novo vírus (apesar de o modelo ter sido concebido para tratar de votantes, podemos utilizá-lo como um tratamento para sistemas epidemiológicos.). Ou ainda, previsões sobre o comportamento do mercado de ações na bolsa de valores. Existem exemplos de pessoas que investiram de maneira contrária a maioria e obtiveram grandes lucros.

3.1.3 Dinâmica do Modelo do Voto da Maioria

O modelo do voto da maioria é um modelo estocástico que apresenta irreversibilidade, ou seja, o sistema possui regimes estacionários, e não de equilíbrio termodinâmico. Apesar do balanço detalhado não ser satisfeito para este modelo, o mesmo apresenta uma transição de fase. Neste modelo associamos uma variável de spin $\sigma_i = \pm 1$ a cada sítio da rede. Uma vez definida a regra que faz a seleção do sítio a ser atualizado, com uma probabilidade p o sítio escolhido adota o sinal da maioria dos seus vizinhos, e com probabilidade $q = 1 - p$ este sítio adota o sinal contrário ao da maioria.

Este modelo obedece à equação mestra, com a taxa de transição $w_{m,n}(t)$, neste caso representada por $\omega_i(\sigma)$, que é dada por

$$\omega_i(\sigma) = \frac{1}{2}\{1 - (1 - 2q)\sigma_i S(\textstyle\sum_{\delta=1}^{k_i} \sigma_{i+\delta})\}, \tag{3.1}$$

onde $S(x) = +1, 0, -1$ para $x > 0, x = 0$ e $x < 0$ respectivamente. A soma em δ refere-se aos k_i primeiros vizinhos do sítio i, ou seja, k_i denota o número de coordenação do sítio i. Na equação (3.1) a variável q representa o parâmetro de ruído do sistema. Esta taxa de transição, $\omega_i(\sigma)$, apresenta invariância sob a transformação de inversão de todos os sítios da rede, ou seja, $\sigma_i \to -\sigma_i$. Para esta descrição, nos limitaremos a valores de q dentro do intervalo que compreende $q = 0$ e $q = 1/2$. Valores do parâmetro de ruído q no intervalo]½, 1] podem ser reduzidos ao caso anterior mediante a transformação que reverte o sinal de todos os spins de uma sub-rede e substitui q por $1 - q$.

O modelo do voto da maioria é análogo ao modelo de Ising ferromagnético na ausência de campo magnético externo, salvo que este último é reversível. No caso do modelo do votante majoritário, temos irreversibilidade no sistema. O parâmetro de ruído q atua no sistema como uma espécie de temperatura, sugerindo uma desordem. Não somente isto, q é o fator do modelo do votante que induz a transição de fase do sistema. Assim como no modelo magnético definimos uma temperatura crítica para a transição, T^* *(temperatura de Curie),* um valor de q crítico, q^*, é definido quando o ordenamento do sistema deixa de existir.

Partindo de um estado desordenado, permitimos que o sistema evoluísse no espaço de configurações, de acordo com a taxa de transição (3.1), até que o sistema atinja um estado estacionário, cuja natureza é caracterizada de acordo com o valor do ruído q. Obtemos:

(i) $q = 0$, todos os sítios estarão no mesmo estado, seja ele +1 ou -1. Não há resistência ou falha na comunicação de forma que todos concordam em opinião.

(ii) $0 < q < q^*$, a maioria dos sítios está num dos estados +1 ou -1, o restante aponta na direção contrária, definindo uma fase "ferromagnética" para o sistema.

(iii) $q \geq q^*$, metade dos sítios se encontra num estado enquanto a outra metade está no estado contrário, definindo a fase paramagnética do sistema.

Com o objetivo de conhecer o comportamento do sistema, calculamos algumas quantidades que podem caracterizar o estado em que o mesmo se encontra. Estas quantidades dependem do estado do sistema, logo, são funções do parâmetro q. Em analogia com o modelo de Ising, observamos o comportamento do parâmetro de ordem $M_N(q)$ do sistema em função do ruído q. Definimos a magnetização do modelo do voto da maioria como

$$M_N(q) = \langle\langle m\rangle_S\rangle_C = \frac{1}{N}\langle\langle\left|\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right|\rangle_S\rangle_C, \tag{3.2}$$

onde o somatório é feito para todos os N sítios da rede, $\langle \dots \rangle_S$ representa a média no regime estacionário em um dado experimento (*sample*) e $\langle \dots \rangle_C$ significa a média sobre vários experimentos. De maneira a garantir a quebra da simetria de inversão do modelo, introduzimos na equação (3.2) o módulo do somatório dos spins, pois os estados com magnetizações de sinais contrários ocorrem com a mesma probabilidade.

O valor do parâmetro de ordem muda com a variação de q. Em analogia com o modelo de Ising, no limite termodinâmico ($N \to \infty$), temos que $M_N(q)$ é *não nulo* (sistema ordenado, fase ferromagnética) para valores de q abaixo do valor crítico q^*. Enquanto que $M_N(q)$ é *nulo* para valores de q acima do valor crítico (sistema desordenado, fase paramagnética).

Outra grandeza importante para a descrição completa do sistema é a variância do parâmetro de ordem do sistema. Para o modelo do votante, a variância é dada pela susceptibilidade

$$\chi_N(q) = N\langle\{m - \langle m\rangle\}^2\rangle = N\{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2\}. \tag{3.3}$$

É possível calcular também o cumulante de quarta ordem de Binder [76] definido como

$$U_N(q) = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle}{3\langle m^2 \rangle^2}\,, \tag{3.4}$$

que é uma grandeza particularmente relevante na determinação do valor do ruido crítico q^*. Todas as quantidades anteriores são funções do parâmetro de ruído e satisfazem relações específicas de escalamento de tamanho finito, uma vez que a geometria da rede é definida. Para redes quadradas de dimensão linear L, que utilizaremos neste trabalho, temos $N = L^2$.

3.2 O MODELO DE DIFERENTES AGENTES

3.2.1 Introdução

Interessados em estudar a dinâmica de diferentes tipos de indivíduos que são influenciados por seus vizinhos, propomos neste trabalho um modelo onde a cada sítio i da rede associamos duas variáveis de spin Ising, σ_i e τ_i, que representam respectivamente, os indivíduos do tipo σ ou τ presentes neste sítio. Os valores $\sigma_i = \pm 1$ e $\tau_i = \pm 1$ significam as possíveis opiniões destes indivíduos. A influência sobre um dado indivíduo seja ele da classe σ ou τ, se dá pela interação com os seus vizinhos. Esta interação segue o *modelo do voto da maioria*.

Uma aplicação deste modelo pode ser vista no problema de migração animal citado anteriormente, onde duas espécies decidem entre permanecer ou migrar de um determinado habitat. Suponha que a cada opção, ficar ou sair, seja possível associar uma variável do tipo Ising, onde o estado +1 significa migrar, e o estado -1 permanecer naquele ambiente. Identificando as duas espécies de agentes em duas classes, predadores e presas, podemos dizer que quando houver uma ação predatória sobre a espécie do tipo presa, então esta última pode manifestar a intenção de escapar dos predadores para sua própria preservação. Não obstante, ao tentar realizar a migração, estes animais consideram o que outros da mesma espécie fazem. Isso se dá como uma maneira de garantir sua sustentabilidade, ou segurança, durante a viagem. Por outro lado, de maneira intuitiva podemos afirmar que a espécie do tipo predador se move observando o comportamento da espécie tipo presa e também o comportamento de outros semelhantes (e.g. animais que caçam em bandos como os lobos). A cada um destes tipos, ou classes de animais (predadores e presas) associamos duas variáveis que representam as dificuldades em concordar com as opções tomadas pelas espécies de interesse de um determinado grupo. Os fatores que motivam a inserção deste parâmetro de dificuldade são diversos: uma doença que impeça a locomoção adequada para acompanhar o grupo, uma escolha natural por seu lugar atual aparentar possuir segurança e alimento, o animal não perceber a migração, entre outros.

3.2.2 Diferentes Agentes e o Voto da Maioria

Neste trabalho, propomos um modelo para simular o comportamento de uma rede social considerando a presença de dois tipos de indivíduos. Para a dinâmica de evolução do sistema, utilizamos o método de Monte Carlo e o modelo do voto da maioria para simular as interações entre os indivíduos.

Considere uma rede regular bidimensional quadrada, de lado L, onde a cada vértice associamos coordenadas discretas que definem a posição de um sítio na rede. A cada sítio, dispomos duas variáveis do tipo Ising, σ_i e τ_i, que podem assumir os valores +1 ou -1. Cada variável representa uma espécie de indivíduo da rede, ou seja, temos a população dividida em duas classes, *indivíduos do tipo* σ *e indivíduos do tipo* τ. Na nossa modelagem, cada classe possui uma dinâmica própria:

(i) Indivíduos do tipo σ *(classe* σ*)* – interagem com indivíduos vizinhos da classe σ e também com indivíduos vizinhos do tipo τ, segundo o modelo do voto da maioria com um parâmetro de ruído $q = q_\sigma$.

(ii) Indivíduos do tipo τ *(classe* τ*)* – interagem somente com vizinhos da mesma classe τ, segundo o modelo do voto da maioria com um parâmetro de ruído $q = q_\tau$.

Observe que os indivíduos da classe σ estão sob influência dos indivíduos de ambas as classes, enquanto que os indivíduos da classe τ interagem somente com vizinhos da mesma classe e não sofrem influência de vizinhos do tipo σ. Tomando mais uma vez o exemplo do problema presa – predador, temos que as presas constituem a classe τ enquanto os predadores são do tipo σ. Um exemplo deste sistema é marcha dos gnus na África.

De maneira a tornar a visualização do modelo mais clara, a figura 3.1 representa um estado arbitrário de um sítio central, com dois tipos de indivíduos e seus respectivos vizinhos.

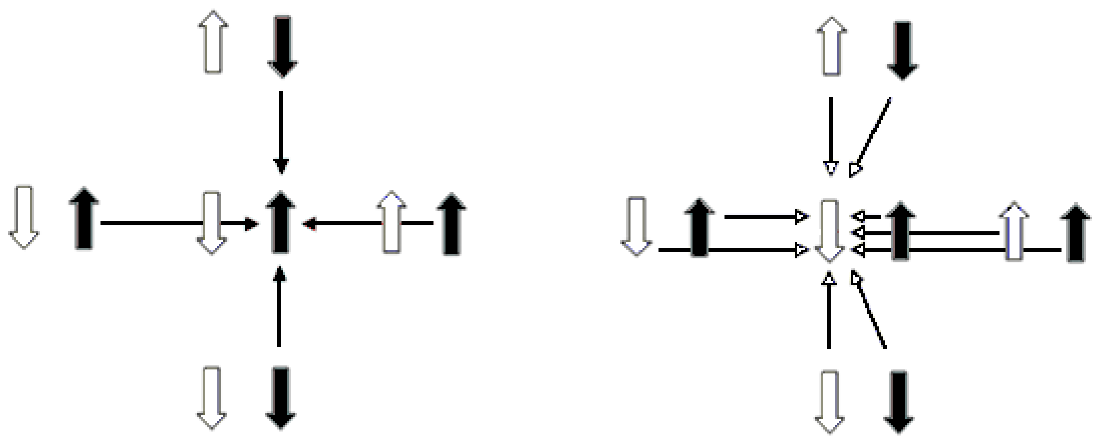

Figura 3.1. Representação esquemática das interações dos indivíduos de cada classe. As setas de cor preta indicam indivíduos do tipo τ e suas interações, enquanto que as setas brancas indicam indivíduos do tipo σ e suas interações.

Estas considerações podem ser quantificadas nas equações que regem a dinâmica do sistema, resultando na introdução de duas probabilidades de mudança de estado para um determinado sítio i da rede. Para indivíduos do tipo σ, temos a seguinte probabilidade de inversão:

$$\omega_i(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{1 - (1 - 2q_\sigma)\sigma_i S\left(\sum_{\delta=1}^{k_i} \sigma_{i+\delta} + \sum_{\delta=1}^{k_i} \tau_{i+\delta} + \tau_i\right)\right\}, \tag{3.5}$$

onde a maioria é definida considerando-se os k_i primeiros vizinhos do sítio i, $\sigma_{i+\delta}$ e $\tau_{i+\delta}$, além do vizinho do tipo τ pertence ao próprio sítio i, τ_i. No caso da rede quadrada, $k_i = 4$, então é possível escrever

$$\omega_i(\sigma) = \frac{1}{2}\left\{1 - (1 - 2q_\sigma)\sigma_i S\left(\sum_{\delta=1}^{4}(\sigma_{i+\delta} + \tau_{i+\delta}) + \tau_i\right)\right\}, \tag{3.6}$$

ou seja, os indivíduos do tipo σ possuem nove primeiros vizinhos, quatro deles sendo do tipo σ e cinco deles sendo do tipo τ. Para indivíduos do tipo τ, definimos a probabilidade de inversão

$$\omega_i(\tau) = \frac{1}{2}\left\{1 - (1 - 2q_\tau)\tau_i S\left(\sum_{\delta=1}^{k_i=4}\tau_{i+\delta}\right)\right\}, \tag{3.7}$$

onde o somatório em $S(x)$ se refere apenas aos quatro primeiros vizinhos de τ_i. Observe que a dinâmica regida pela equação (3.7) é a mesma do modelo do voto da maioria isotrópico com ruído, analisada na referência [44]. Este fato auxilia a análise do comportamento do sistema como um todo, pois os resultados para esta sub-rede isolada já são conhecidos. A seguir faremos uma breve revisão dos seus principais resultados.

3.2.3 Histórico de Resultados Conhecidos

Na referência [44] foi realizado o primeiro estudo do modelo do voto da maioria com a introdução do ruído. Neste trabalho o autor propõe as seguintes relações de escala, que serão utilizadas no nosso modelo com dois agentes

$$M_L(q) = L^{-\beta/\upsilon}\widetilde{M}\left(L^{1/\upsilon}\epsilon\right), \tag{3.8}$$

$$\chi_L(q) = L^{\gamma/\upsilon}\tilde{\chi}\left(L^{1/\upsilon}\epsilon\right), \tag{3.9}$$

$$U_L(q) = \widetilde{U}\left(L^{1/\upsilon}\epsilon\right). \tag{3.10}$$

Neste caso, $\epsilon \equiv q - q^*$. Através de simulações Monte Carlo em uma rede regular bidimensional e da análise de tamanho finito, o resultado obtido para o valor crítico do parâmetro de ruído é $q^* = 0.075 \pm 0.001$, e os valores estimados para os expoentes críticos são $\beta/\upsilon = 0.125 \pm 0.005$, $\gamma/\upsilon = 1.73 \pm 0.05$ e $1/\upsilon = 1.01 \pm 0.05$. Onsager em [77] obteve os valores exatos para o modelo de Ising em duas dimensões, os expoentes críticos são $\beta/\upsilon = 1/8$, $\gamma/\upsilon = 7/8$ e $1/\upsilon = 1$. Desta maneira, podemos concluir que o modelo do voto da maioria com ruído, assim como definido por Mário de Oliveira em [44], pertence à mesma classe de universalidade do modelo de Ising bidimensional. Este resultado confirma a conjectura proposta por Grinstein, Jayaparakash e He [78], onde os modelos de não equilíbrio com simetria de inversão pertencem à mesma classe de universalidade do modelo de Ising, ambos definidos em redes regulares.

Estudos da introdução de ligações de longo alcance realizado em redes do tipo small-world [79-83], criadas a partir de redes regulares unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, mostram que o comportamento crítico do sistema é mudado, mediante a variação da probabilidade de religação p. Enquanto que o estudo sobre o efeito de uma anisotropia na probabilidade de inversão realizado por Santos e Teixeira [84] mostra que a introdução da anisotropia não muda a classe de universalidade do modelo.

3.2.4 Quantidades Físicas Relevantes

De maneira análoga ao modelo do voto da maioria, desejamos estudar o comportamento do parâmetro de ordem do sistema. Fazemos isso para cada tipo de indivíduo da rede explicitando a dependência com o tamanho N da rede quadrada. Utilizaremos $\langle \dots \rangle$ para representarmos os valores médios, compreendendo as médias no regime estacionário $\langle \dots \rangle_S$ e as médias nas configurações $\langle \dots \rangle_C$, de maneira evitar a sobrecarga de índices. Então definimos as grandezas de interesse para o nosso sistema

$$M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau) = \langle m_\tau \rangle = \frac{1}{N} \langle \langle \left| \sum_{i=1}^{N} \tau_i \right| \rangle_S \rangle_C \,, \tag{3.11}$$

$$M_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau) = \langle m_\sigma \rangle = \frac{1}{N} \langle \langle \left| \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \right| \rangle_S \rangle_C \,, \tag{3.12}$$

$$\chi_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau) = N\{\langle {m_\tau}^2 \rangle - \langle m_\tau \rangle^2\} \,, \tag{3.13}$$

$$\chi_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau) = N\{\langle {m_\sigma}^2 \rangle - \langle m_\sigma \rangle^2\} \,. \tag{3.14}$$

Calculamos também o cumulante de quarta ordem de Binder para cada classe de indivíduo

$$U_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau) = 1 - \frac{\langle {m_\tau}^4 \rangle}{3\langle {m_\tau}^2 \rangle^2} \ , \tag{3.15}$$

$$U_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau) = 1 - \frac{\langle {m_\sigma}^4 \rangle}{3\langle {m_\sigma}^2 \rangle^2} \ . \tag{3.16}$$

Ainda calculamos a correlação entre as magnetizações, que é definida por

$$\Delta_{\sigma,\tau} = \langle m_\tau m_\sigma \rangle - \langle m_\tau \rangle \langle m_\sigma \rangle \ , \tag{3.17}$$

onde $\langle m_\tau m_\sigma \rangle$ é calculado através da relação

$$\langle m_\tau m_\sigma \rangle = \frac{1}{N} \langle \langle | \textstyle\sum_{i=1}^{N} \tau_i \, \sigma_i | \rangle_S \rangle_C \ . \tag{3.18}$$

Note que estas grandezas dependem em geral do par de valores (q_σ, q_τ) e do tamanho do sistema N. Esperamos um comportamento distinto para estas grandezas físicas, no plano $q_\sigma - q_\tau$, definindo assim o diagrama de fase do sistema neste plano. O algoritmo Monte Carlo que utilizamos para calcular estas grandezas está descrito em detalhes no capítulo 4.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

4.1 A SIMULAÇÃO

As simulações tiveram o objetivo de investigar o comportamento de uma rede com interação segundo o modelo do voto da maioria com duas classes de agentes, *classe* σ e *classe* τ. As simulações foram realizadas em redes quadradas de lado L, totalizando $N = L^2$ indivíduos de uma dada classe. Inicializamos o sistema no estado ordenado, onde todos os spins apontam para uma mesma direção, ou seja, $\sigma_i = +1$ e $\tau_i = +1$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Usamos condições de contorno periódicas em redes de tamanho $N = 400, 1600, 3600, 6400$ e 10000.

O modelo estudado possui dois parâmetros de controle que são os ruídos q_σ e q_τ, referentes à classe σ e à classe τ respectivamente. Para cada par de valores q_σ e q_τ, construímos uma rede de N sítios e iniciamos a simulação. Em seguida esperamos um determinado tempo, medido em passos de Monte Carlo (*Monte Carlo Steps, MCS*), para que o sistema atinja o estado estacionário referente aos parâmetros escolhidos inicialmente. Um passo de Monte Carlo no nosso modelo é definido como $2N$ tentativas de inversão de spin. Ou seja, em cada MCS sorteamos um total de $2N$ spins ao acaso e tentamos inverter o sentido de cada um deles. Fazemos isso segundo a probabilidade de transição do tipo de spin que foi sorteado. Se escolhermos ao acaso um spin do tipo σ, utilizamos $\omega_i(\sigma)$ dado pela equação (3.6), e caso o spin escolhido for um do tipo τ, utilizamos a equação (3.7) para $\omega_i(\tau)$. O número de passos para que o sistema atinja o estado estacionário é chamado de *tempo de relaxação*. Em nossas simulações utilizamos 5000 MCS para a relaxação do sistema.

Para um dado par de ruídos, que determinam um estado, repetimos o processo a partir da criação de uma nova rede, de maneira a simular o procedimento de realizar as mesmas medições em novas amostras. Ao fim deste processo, calculamos as médias das grandezas físicas relevantes ao sistema no estado estacionário e em várias amostras. Usamos 10 amostras para cada tamanho do sistema e 100000 MCS para o cálculo das médias, correspondendo a 10000 MCS por amostra.

As grandezas físicas calculadas diretamente das simulações foram as magnetizações de cada classe, as suscetibilidades relativas a estas magnetizações, os cumulantes de Binder e a correlação entre as magnetizações de cada sub-rede. Estas grandezas foram definidas na seção 3.2.4.

4.2 ALGORITMO DE MONTE CARLO

Para uma dada escolha dos valores dos parâmetros de ruído (q_σ, q_τ) e do tamanho do sistema (N), o procedimento se inicia com a geração da rede de sítios no computador. Esta tarefa consiste em estabelecer matrizes onde seus elementos são as variáveis de spin. Nas nossas simulações geramos uma matriz para cada tipo de indivíduo, de maneira que os elementos da matriz σ são os sítios σ_i e os elementos da matriz τ são os sítios τ_i. As coordenadas que definem a posição de um elemento na matriz nos informam sobre a posição de um indivíduo da rede. Como citado anteriormente, fazemos com que inicialmente todos os indivíduos do sistema possuam opção dada por +1. Aguardamos o tempo de relaxação para que o sistema evolua até o estado estacionário referente aos ruídos q_σ e q_τ escolhidos inicialmente para a simulação, e após este tempo, iniciamos os cálculos das médias com o sistema no estado estacionário. Podemos sistematizar a dinâmica da simulação da maneira a seguir:

(i) *Gerar uma amostra do sistema de tamanho N no estado correspondente ao par de ruídos* q_σ e q_τ.

(ii) *Escolher um indivíduo da rede ao acaso e calcular a probabilidade de fazer uma mudança no estado deste indivíduo segundo as equações (3.6) e (3.7).*

(iii) *Gerar um número aleatório no intervalo unitário.*

(iv) *Se a probabilidade de mudar o estado do indivíduo é maior que o número aleatório gerado no passo (iii), aceitamos o novo estado e seguimos para o passo (vi).*

(v) *Se a probabilidade de mudar o estado do indivíduo é menor que o número aleatório gerado no passo (iii), rejeitamos o novo estado e seguimos para o passo (vi).*

(vi) *Repetimos* $2N$ *vezes os passos (ii), (iii), (iv) e (v), de maneira que a cada passo de Monte Carlo realizamos, em média, uma tentativa de inversão para todos os sítios do sistema. Acrescentamos de uma unidade o tempo de simulação* ($t \rightarrow t + 1$).

(vii) *Se o tempo de simulação é menor que o tempo de relaxação, retornamos ao passo (ii). Caso o contrário seguimos para o passo (viii).*

(viii) *Determinamos o valor das médias das grandezas físicas de interesse.*

(ix) *Repetimos os passos (ii) a (viii) para obtermos um número suficiente de amostras.*

(x) *Calculamos as médias das grandezas físicas desejadas em cada amostra.*

4.3 COMPORTAMENTO DAS GRANDEZAS CALCULADAS

4.3.1 Parâmetro de Ordem $\mathbf{M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)}$

Realizamos o estudo da magnetização da rede composta de indivíduos do tipo τ, no plano definido pelos ruídos q_σ e q_τ (*plano* $q_\sigma - q_\tau$). Mantivemos o valor do ruído q_σ fixo e variávamos o outro ruído q_τ no intervalo de interesse $[0.0;\ 0.5]$. Fizemos isto para diversos valores do tamanho do sistema. Os nossos resultados para $q_\sigma = 0$ e diversos valores de N são mostrados na figura 4.1.

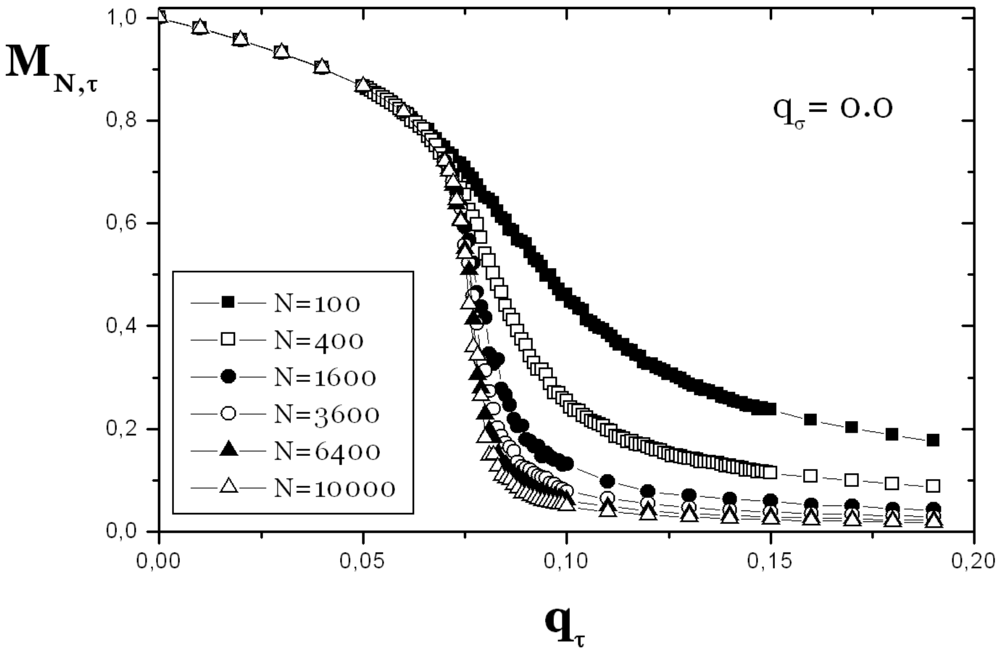

Figura 4.1. Magnetização da sub-rede τ em função do ruído q_τ para q_σ fixo em zero e diversos tamanhos de rede. As curvas indicam uma continuidade do parâmetro de ordem na transição apontando uma transição de fase de segunda ordem.

Desta figura podemos concluir, em termos de opinião, que inicialmente há uma concordância geral (unanimidade), ou seja, para $q_\tau \to 0, M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau) \to 1$. Esta opinião é cada vez menos aceita à medida que aumentamos o ruído q_τ, pois é fácil perceber um decaimento aproximadamente linear para valores pequenos do ruído q_τ, onde não existe dependência com o valor do tamanho do sistema. Toda a região do gráfico que compreende as proximidades da transição de fase e após ela depende significativamente do tamanho do sistema. Uma vez que não há descontinuidade do parâmetro de ordem na transição, o sistema apresenta uma transição de fase de segunda ordem.

Na figura 4.2 abaixo, construímos um gráfico para ilustrar a dependência linear da magnetização $M_{N,\tau}$ com pequenos valores do ruído q_τ. Para esta regressão linear supomos que $M_{N,\tau}(q_\sigma = 0, q_\tau) \cong aq_\tau + b$, de maneira que obtivemos $a = -2.43 \pm 0.01$ e $b = 1.00 \pm 0.00$, de forma que podemos escrever

$$M_{N,\tau}(0, q_\tau) \cong (-2.43 \pm 0.01)q_\tau + (1.00 \pm 0.00). \quad (4.1)$$

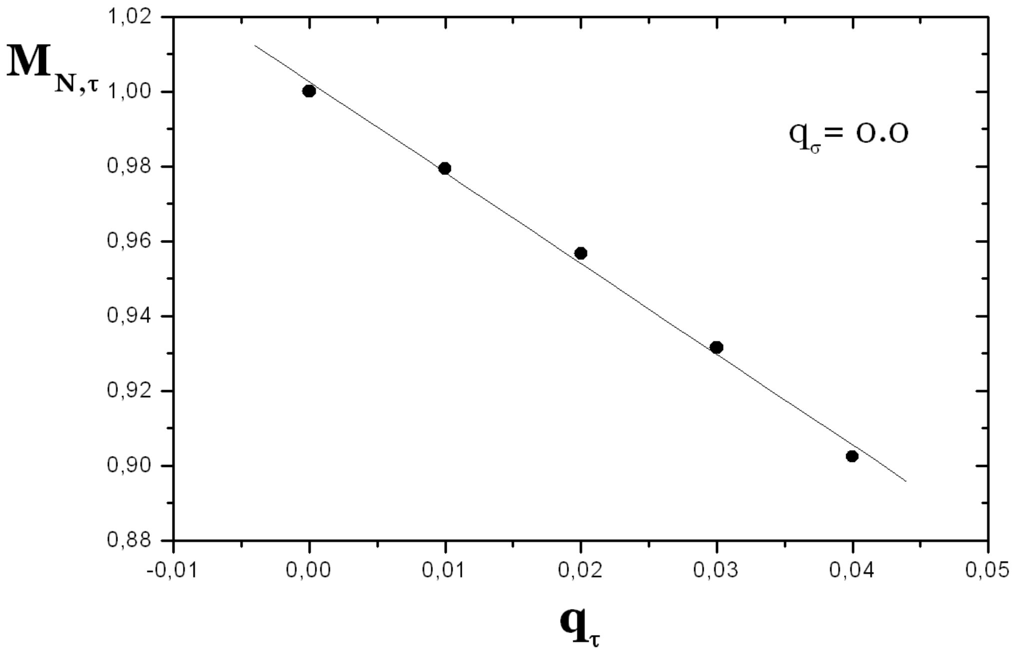

Figura 4.2. Magnetização da sub-rede τ em função do ruído q_τ para $N = 10000$. A linha é um ajuste linear para os pontos e mostra o tipo do decaimento desta magnetização com o ruído q_τ dentro do intervalo [0.00; 0.04].

Investigamos também a dependência de $M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ em função de q_τ para outros valores fixos de q_σ. Para diversos valores de q_σ, pertencentes ao intervalo [0.0; 1.0], não verificamos dependência alguma da magnetização da sub-rede τ com o valor do ruído da sub-rede σ. Este comportamento é ilustrado na figura 4.3.

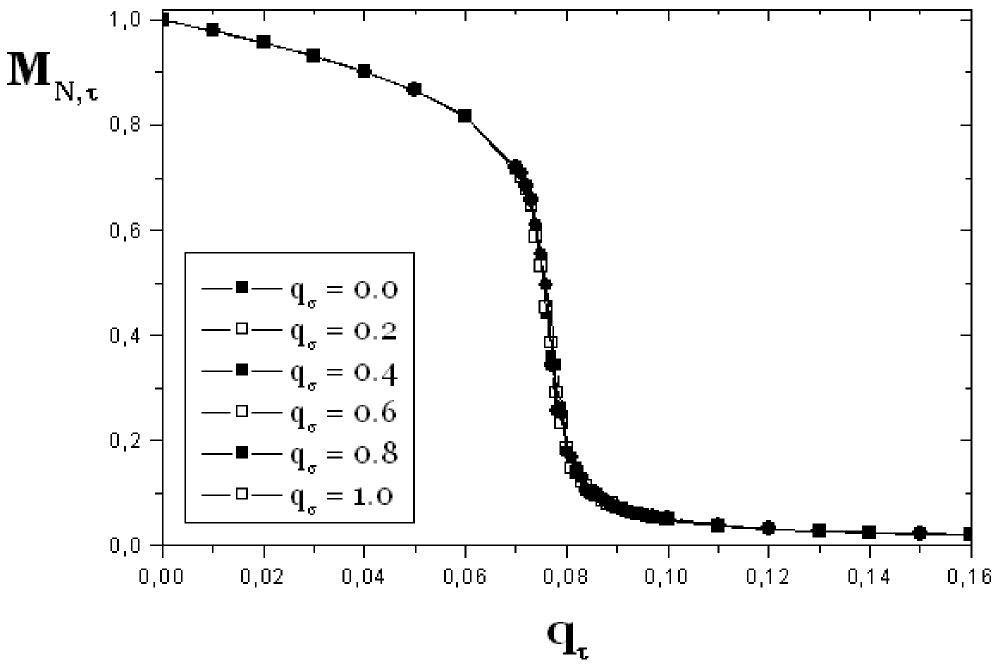

Figura 4.3. Magnetização da sub-rede τ para $N = 10000$ em função do ruído q_τ. Nestas simulações, o ruído q_σ foi fixado em diferentes valores.

Este resultado era esperado uma vez que o comportamento da sub-rede τ independe do comportamento dos agentes da classe σ, fato este que pode ser concluído a partir da equação (3.7) para a probabilidade de transição na sub-rede τ. Com base nestes resultados podemos escrever

$$M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau) = M_{N,\tau}(q_\tau). \tag{4.2}$$

Ou seja, $M_{N,\tau}$ é somente função do tamanho do sistema e do ruído q_τ. Em particular, a equação (4.1) é válida para qualquer valor do ruído q_σ e não somente para $q_\sigma = 0$. Os indivíduos da classe τ se comportam de maneira independente da classe σ. A dinâmica desta sub-rede que se comporta de maneira independente é conhecida e foi estudada por de Oliveira [44].

Analisamos ainda a dependência da magnetização, $M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$, com o ruído da classe σ, q_σ. Construímos um gráfico da magnetização da sub-rede τ em função do ruído q_σ pertencente ao intervalo [0.0; 0.5]. O gráfico representado na figura 4.4 confirma não apenas o que havíamos concluído anteriormente na figura 4.3, que a magnetização $M_{N,\tau}$ independe do ruído q_σ, mas também ilustra a transição de fase que ocorre para um valor de q_τ entre 0.05 e 0.10. No limite termodinâmico ($N \to \infty$), o valor de q_τ crítico é conhecido e vale $q_\tau^* = 0.075 \pm 0.001$ [44].

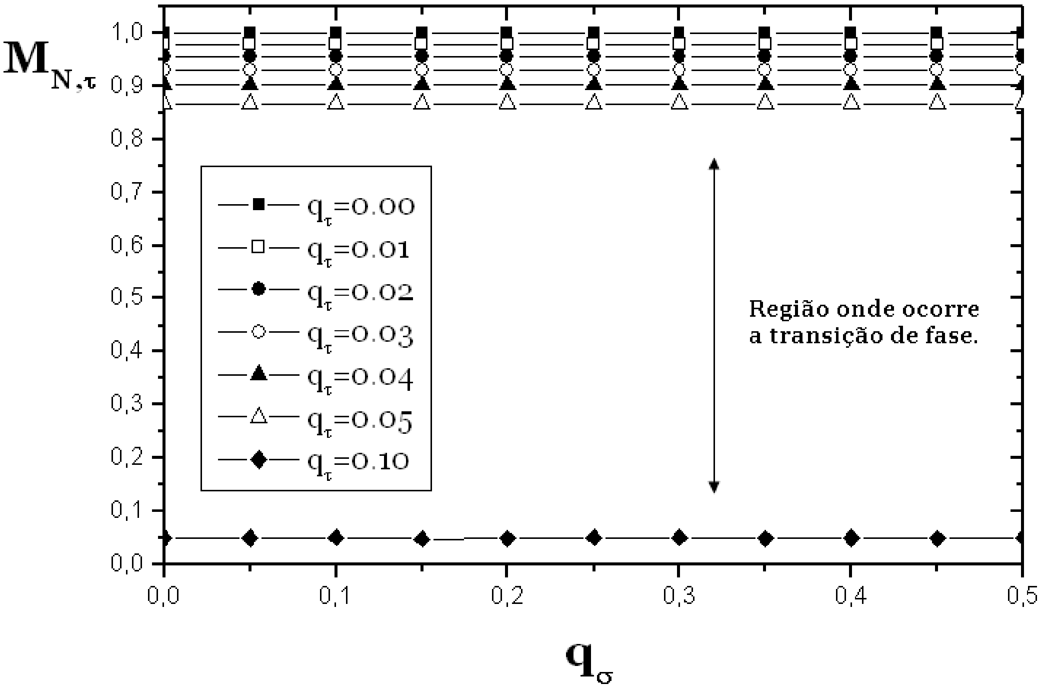

Figura 4.4. Magnetização da sub-rede τ em função do ruído q_σ para alguns valores de q_τ fixados. As curvas foram feitas para $N = 10000$.

Observe que a curva inferior ainda apresenta um efeito de tamanho finito o que resulta num valor não nulo para a magnetização. Ainda é possível confirmar a consistência da nossa afirmação de que $M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ é uma função linear em q_τ para baixos valores deste ruído, e.g. usando (4.1) para $q_\tau = 0.05$ obtemos

$$M_{N,\tau}(0.05) \cong 1.00 - 2{,}43 \times 0.05 \cong 0.88. \tag{4.3}$$

Esta previsão do valor da magnetização da sub-rede τ está de acordo com o resultado observado no gráfico da figura 4.4.

4.3.2 Parâmetro de Ordem $M_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$

Nesta seção mostramos os resultados obtidos para a magnetização da sub-rede composta de indivíduos do tipo σ, para diferentes valores de N e pares de valores dos ruídos q_σ e q_τ. Utilizamos para o cálculo da magnetização na sub-rede σ a expressão (3.12). Esperamos que a dinâmica apresente dependência com ruído da sub-rede τ, uma vez que estes indivíduos se comportam como um *campo externo* atuando nos indivíduos da classe σ.

Na figura 4.5 fizemos um gráfico da magnetização da sub-rede σ em função do ruído q_τ, para q_σ fixo em zero e diversos tamanhos do sistema.

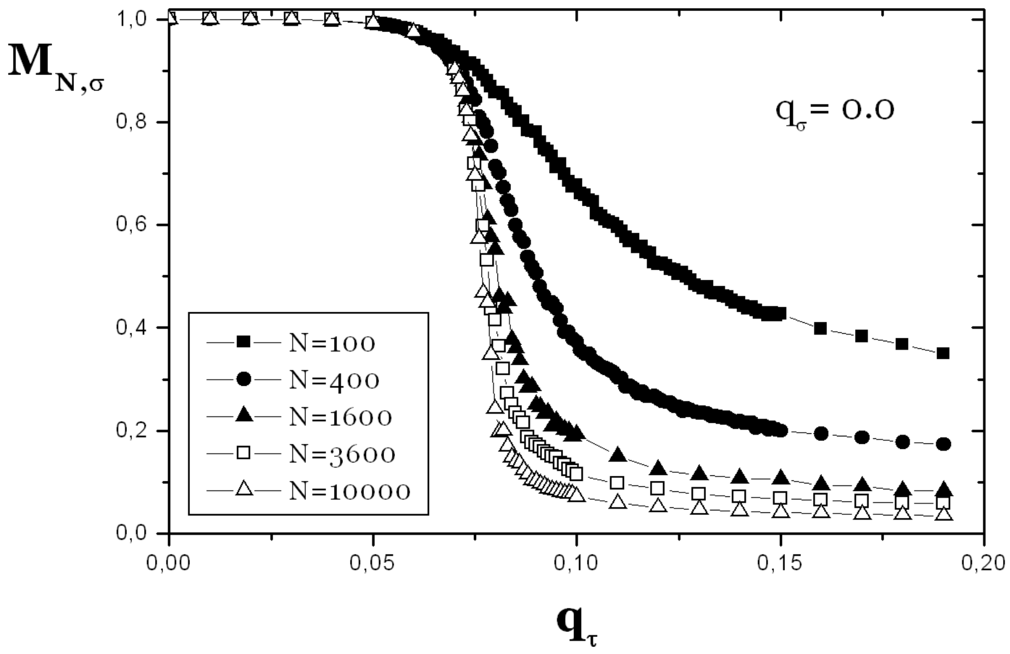

Figura 4.5. Magnetização da sub-rede σ em função do ruído q_τ para q_σ fixo em zero para diversos tamanhos de rede. As curvas assim como no caso da sub-rede τ indicam que existe continuidade do parâmetro de ordem na transição de fase.

Podemos observar que apesar de não haver variação ruído da sub-rede σ, a magnetização em σ exibe uma transição de fase para valores finitos de q_τ, que dependem do tamanho da sub-rede N. A continuidade deste parâmetro de ordem, $M_{N,\sigma}$, indica que a transição é de segunda ordem. Observe ainda que para valores de $q_\tau \lesssim 0.05$, ou seja, na fase ordenada, a magnetização da sub-rede σ não apresenta variações. Concluímos que a população σ não é sensível ao "desacordo" dos indivíduos do tipo τ, desde que o ruído associado a esta falta de concordância não esteja próximo do valor crítico.

Isto significa dizer que apesar da classe σ estar submetida à influência de indivíduos do tipo τ, ela apresenta certa robustez à "sugestão" de desordem feita pela sub-rede τ. Após o valor crítico de q_τ, onde não há mais acordo entre os indivíduos τ, elementos da sub-rede σ também entram em desacordo. Assim como no caso da sub-rede τ, verificamos novamente dependência da magnetização com o tamanho do sistema principalmente na região crítica.

Simulamos para outros valores de q_σ fixados com o objetivo de conhecer mais sobre a dependência de $M_{N,\sigma}$ com o ruído q_σ. Nas figuras 4.6 e 4.7 mostramos os resultados para a magnetização dos indivíduos do tipo σ em função de q_τ, para $q_\sigma = 0.2$ e $q_\sigma = 0.4$ respectivamente. Vemos que os valores máximos da magnetização (magnetização de saturação) da sub-rede σ, que ocorrem para o ruído $q_\tau \cong 0$, são menores que a magnetização de saturação observada no caso $q_\sigma = 0$. A partir das figuras 4.6 e 4.7 vemos que

$$M_{N,\sigma}(0.2, 0.0) = 0.6. \tag{4.4}$$

$$M_{N,\sigma}(0.4, 0.0) = 0.2. \tag{4.5}$$

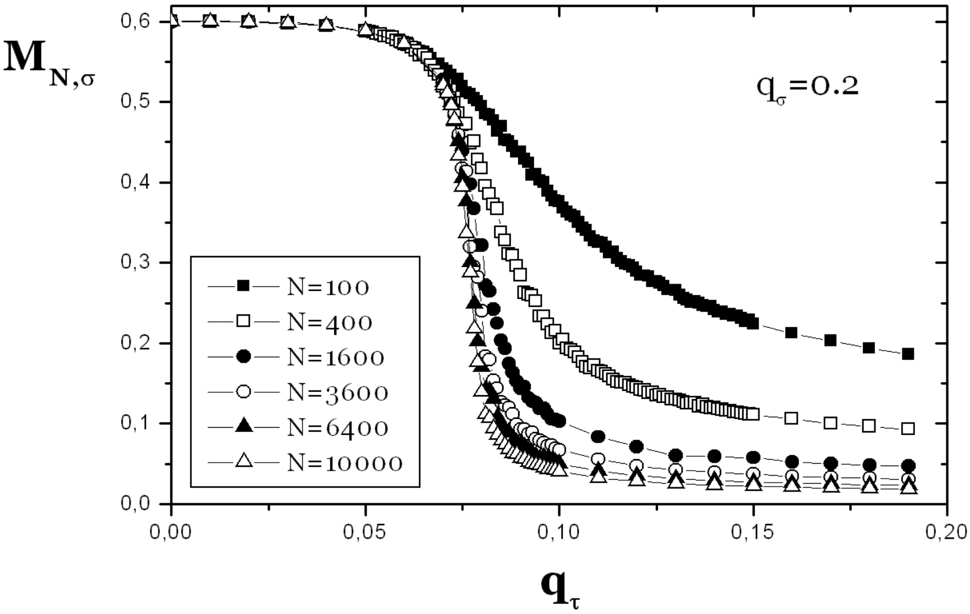

Figura 4.6. Magnetização da sub-rede σ em função do ruído q_τ para $q_\sigma = 0.2$ fixo e com sistemas de diversos tamanhos. As curvas se assemelham muito com as obtidas na figura 4.5.

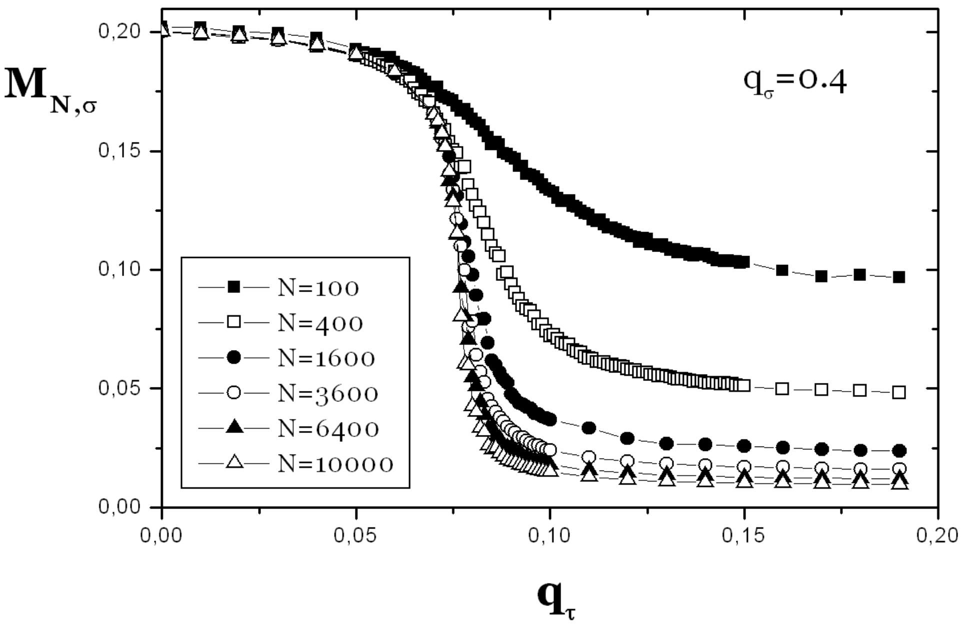

Figura 4.7. Magnetização da sub-rede σ em função do ruído q_τ para $q_\sigma = 0.4$ fixo, comparando diversos tamanhos de rede. Resultado semelhante ao da figura anterior, mas neste caso a magnetização para ruído q_τ nulo vale 0.2.

A figura 4.8 apresenta um comparativo do comportamento da magnetização da sub-rede σ em função de q_τ para valores de $q_\sigma = 0.0, 0.2, 0.4$.

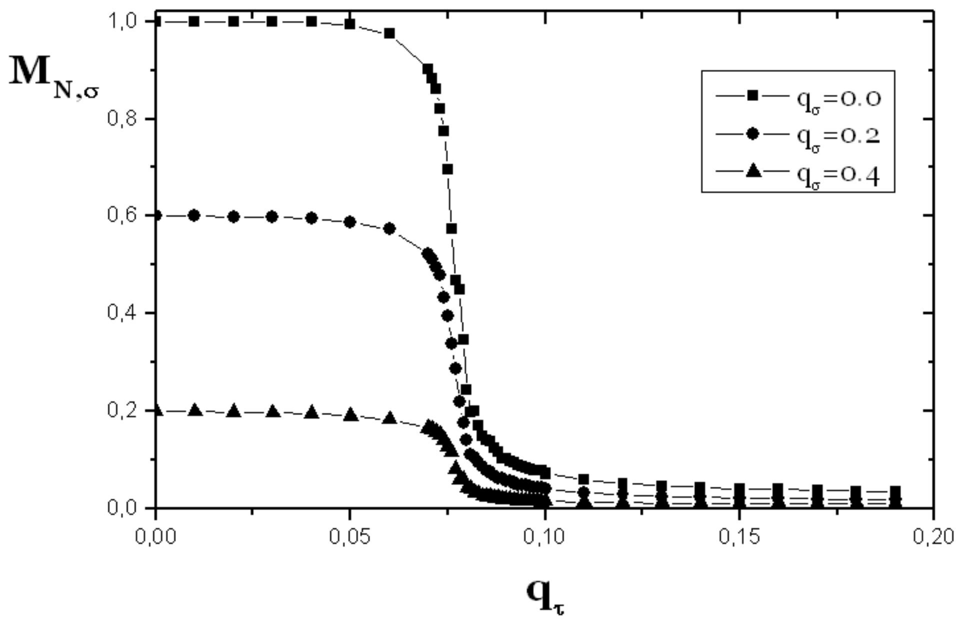

Figura 4.8. Magnetização da sub-rede σ em função do ruído q_τ para três valores de q_σ fixados. As simulações foram realizadas numa rede com 10000 sítios.

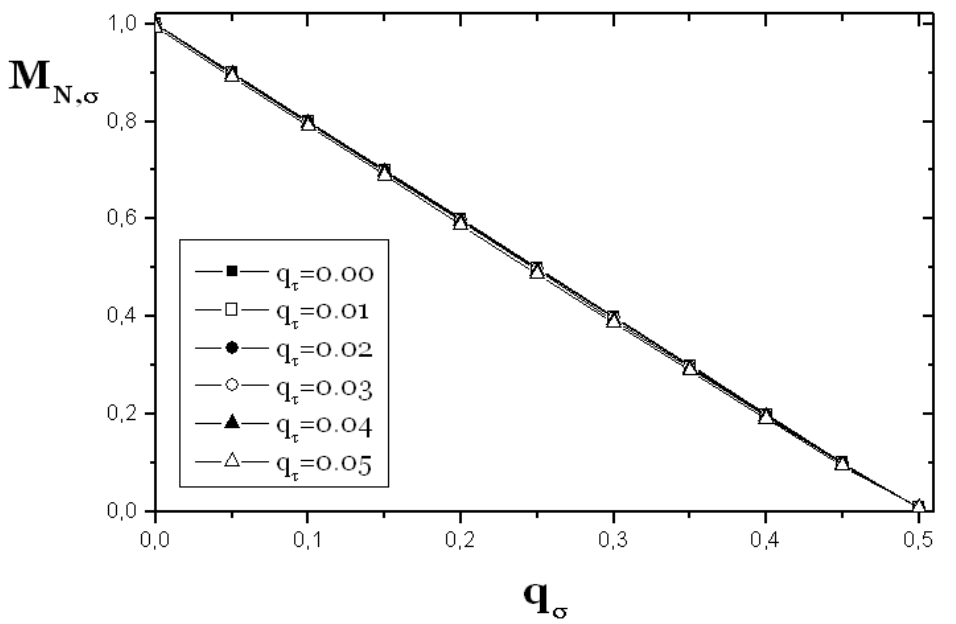

Figura 4.9. Magnetização máxima (de saturação) da sub-rede σ em função do ruído q_σ para alguns valores de q_τ fixados. As simulações foram feitas para $N = 10000$.

Mais simulações foram realizadas de maneira a quantificar a variação do valor da magnetização $M_{N,\sigma}$ em função do valor do ruído q_σ, com baixos valores do ruído q_τ. Nossos resultados são apresentados na figura 4.9. Vemos nesta figura que $M_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$ tem a mesma dependência linear em q_σ, para valores de q_τ pertencentes ao intervalo $[0.00;\ 0.05]$. Portanto, podemos concluir que a magnetização da classe σ apresenta um valor de saturação que depende linearmente do ruído desta sub-rede, q_σ, e pode ser escrita da seguinte forma: $M_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau \ll 1) = cq_\sigma + d$. Para o caso em que o ruído q_τ é nulo, a linearização resulta em $c = -1.99 \pm 0.00$ e $d = 1.00 \pm 0.00$, de maneira que escrevemos

$$M_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau \leq 0.05) = M_{\sigma,max}(q_\sigma) \cong (-1.99 \pm 0.00)q_\sigma + (1.00 \pm 0.00). \qquad (4.6)$$

Este resultado, que foi verificado para diferentes tamanhos de rede, indica que a concordância entre os indivíduos da sub-rede σ independe dos valores do ruído q_τ da sub-rede τ, desde que este ruído esteja dentro do intervalo $[0.00; 0.05]$. Esta magnetização de saturação depende apenas do valor do ruído q_σ, que é inerente a esta classe de indivíduos. Ainda é possível concluir que existe um valor de q_σ, $q_\sigma = q_\sigma^* = 0.5$, para o qual não existe magnetização na sub-rede σ.

Para valores do ruído q_σ maiores que 0.5, observamos que o sistema volta a apresentar magnetização $M_{N,\sigma}$ diferente de zero. Os resultados obtidos para a sub-rede de indivíduos σ, com $q_\sigma < 0.5$ e $q_\sigma > 0.5$, são mostrados na figura 4.10. Podemos concluir que o ordenamento da sub-rede τ, é responsável pela magnetização não nula nos indivíduos da sub-rede σ. Note que à medida que o valor de q_σ aumenta de 0.6 a 1.0, também aumenta o valor da magnetização $M_{N,\sigma}$ para $q_\tau < q_\tau^*$. O ordenamento total só ocorre quando fazemos $q_\sigma = 1.0$ com $q_\tau = 0$. Este resultado corresponde ao ordenamento *antiferromagnético* entre os indivíduos da classe σ e seus vizinhos da classe τ. O que ocorre com o sistema é que os indivíduos da classe σ preferem estar sempre contrários à maioria dos que os cercam, produzindo um antiferromagnetismo entre os indivíduos da sub-rede σ e os indivíduos da sub-rede τ.

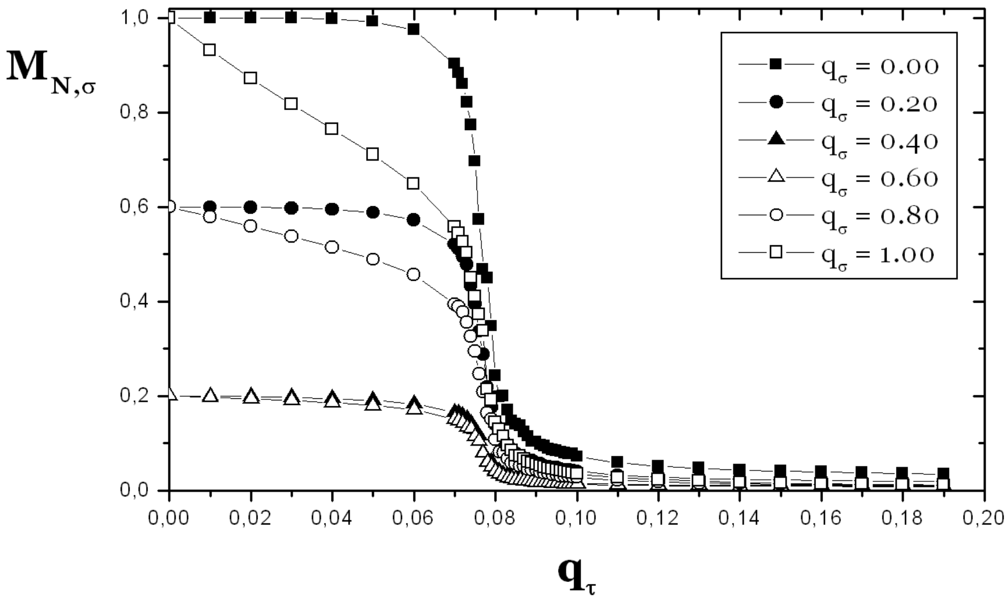

Figura 4.10. Magnetização da sub-rede σ, com $N = 10000$ sítios, em função do ruído q_τ para valores do ruído $q_\sigma < 0.5$ (símbolos fechados) e $q_\sigma > 0.5$ (símbolos abertos).

Vemos na figura anterior que a magnetização da classe σ com $q_\sigma > 0.5$ difere da magnetização para os resultados com $q_\sigma < 0.5$. Este fato é devido à influência da sub-rede τ ocorrer de maneira diferenciada quando $q_\sigma > 0.5$. Com o objetivo de investigar esta diferença construímos um gráfico na figura 4.11 de $M_{N,\sigma}$ em função do ruído q_σ para diversos valores de q_τ.

Observamos que acima de $q_\sigma = 0.5$ a magnetização da sub-rede σ não se comporta de maneira linear em função do ruído q_σ, exceto quando $q_\tau = 0$. De fato, apenas para $q_\tau = 0$ (estado ferromagnético na classe τ) temos a simetria na sub-rede σ

$$\omega_i(\sigma; q_\sigma) = \omega_i(-\sigma; 1 - q_\sigma), \tag{4.7}$$

onde $\sigma = \pm 1$. Em particular a relação anterior implica que quando $q_\sigma = 0.5$ o estado da sub-rede σ é paramagnético. Em algum valor entre $q_\tau = 0.07$ e $q_\tau = 0.10$ a magnetização $M_{N,\sigma}$ sofre uma transição. Em $q_\tau = 0.07$ começa também a existir uma separação das curvas de $M_{N,\sigma}$ para $q_\sigma < 0.5$, indicando a transição de fase. Através de simulações observamos que a curva para $q_\tau = 0.10$ decresce a zero para sistemas de tamanhos maiores.

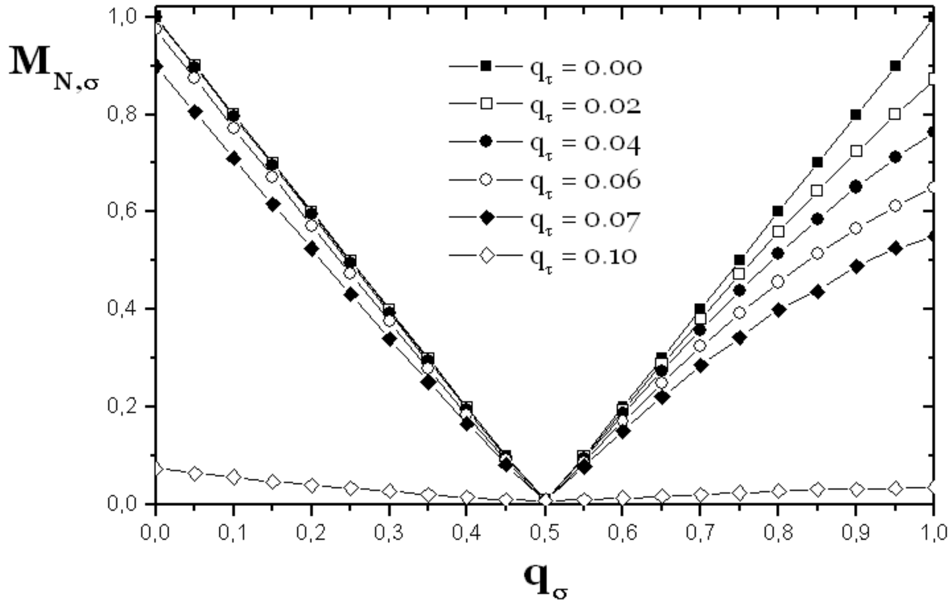

Figura 4.11. Magnetização da sub-rede σ, com $N = 10000$ sítios, em função do ruído q_σ para diferentes valores do ruído q_τ do sistema.

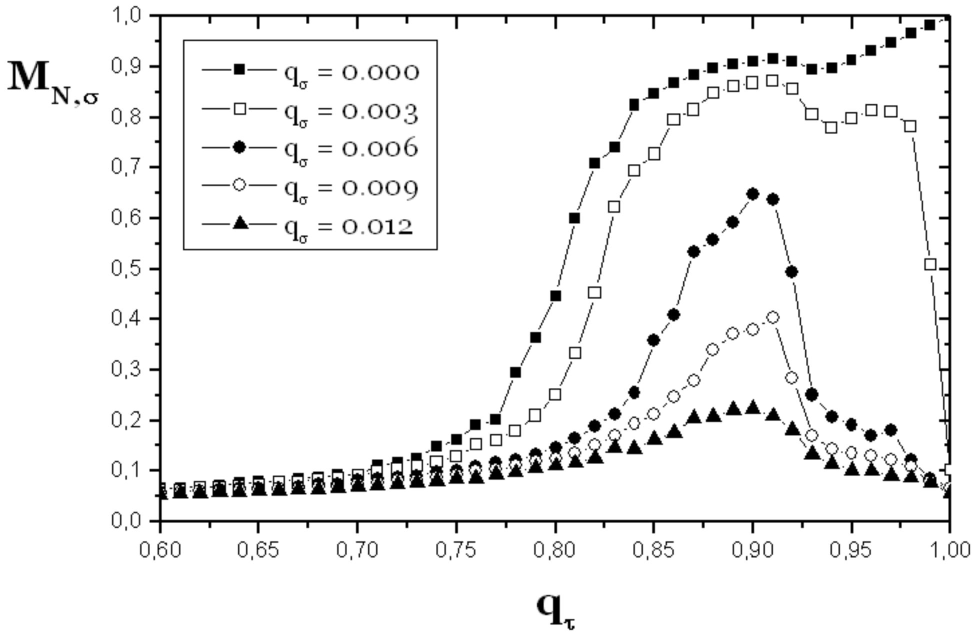

Figura 4.12. Magnetização da sub-rede σ, com *N = 3600* sítios, em função do ruído q_τ para valores fixos de q_σ.

Na figura 4.12, construímos um gráfico da magnetização $M_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$, onde variamos o valor do ruído q_τ dentro do intervalo $[0.5; 1.0]$, para diferentes valores do ruído q_σ fixados. Nesta figura é possível identificar a ocorrência de uma transição de fase com o aumento do ruído q_τ para pequenos valores de q_σ. Observe que quando $q_\tau = 1$ a magnetização da sub-rede σ só é diferente de zero para $q_\sigma = 0$.

4.3.3 A Susceptibilidade $\chi_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$

A susceptibilidade de uma grandeza física está associada a uma reposta desta grandeza do sistema a uma excitação específica. As curvas de susceptibilidade apresentam máximos nos valores críticos dos parâmetros de ruído e são característicos de transições de fase de segunda ordem. Determinar o valor no eixo das abscissas correspondente a um máximo da susceptibilidade, para um sistema com $N \rightarrow \infty$, seria uma primeira forma de determinar o valor do ruído crítico onde a transição de fase acontece.

Nesta seção estaremos interessados em descrever os principais resultados obtidos para a susceptibilidade da sub-rede de indivíduos do tipo τ. A figura 4.13 apresenta a suscetibilidade $\chi_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ para diversos tamanhos de rede. A variação da posição do valor máximo da susceptibilidade em função do tamanho da rede nos mostra que o valor do ruído crítico q_τ^* é uma função do tamanho da rede N, assim como esperado na equação (2.52) com T substituído por q_τ. Observamos que o valor de q_τ^* e o valor do máximo da susceptibilidade são funções do tamanho N da sub-rede. Uma vez que concluímos anteriormente que não há dependência da magnetização $M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ com o ruído q_σ, a susceptibilidade $\chi_{N,\tau}$ para diferentes valores de q_σ apresenta resultados que diferem apenas por flutuações estatísticas. Ou seja,

$$\chi_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau) = \chi_{N,\tau}(q_\tau), \tag{4.8}$$

só depende do tamanho do sistema e do ruído q_τ.

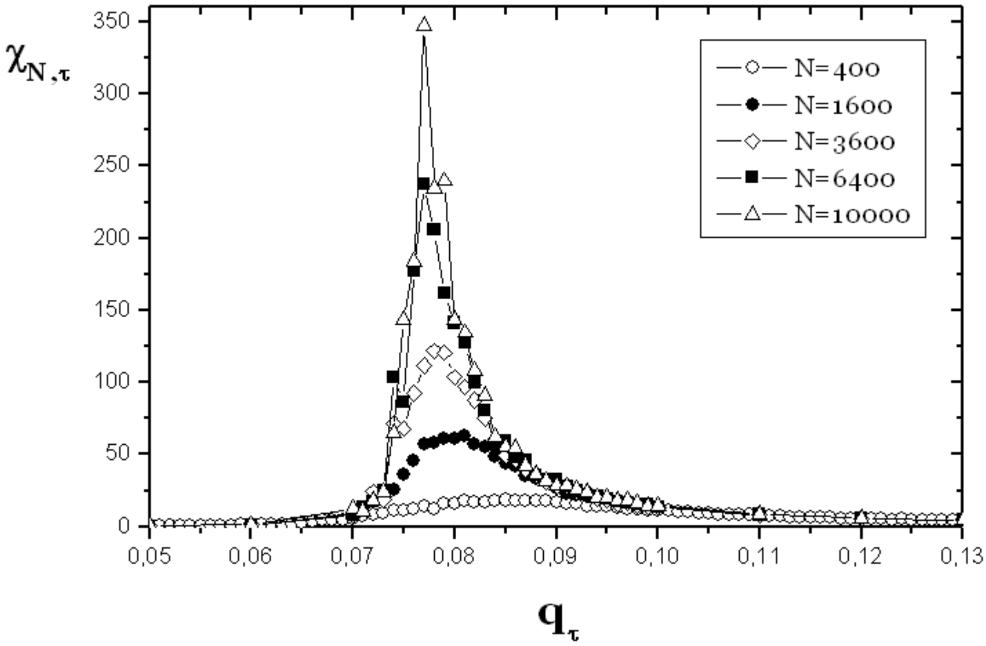

Figura 4.13. Susceptibilidade da sub-rede τ em função do ruído q_τ para diferentes tamanhos do sistema. Os dados foram obtidos para $q_\sigma = 0$.

4.3.4 A Susceptibilidade $\chi_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$

Obtivemos resultados do comportamento da curva de susceptibilidade da sub-rede σ, $\chi_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$, em função do parâmetro de ruído q_τ para diferentes valores de q_σ. Observamos não somente uma dependência com o tamanho N de cada sub-rede, mas o comportamento de $\chi_{N,\sigma}$ muda com o valor do ruído q_σ. Isto pode ser observado na figura 4.14. Observamos, assim como na figura 4.13, que os valores de q_τ^* e do máximo da susceptibilidade são funções do tamanho N da sub-rede. Vemos na figura 4.14 que o valor do máximo de $\chi_{N,\sigma}$ depende não somente do tamanho N do sistema, mas também do valor do ruído da sub-rede σ.

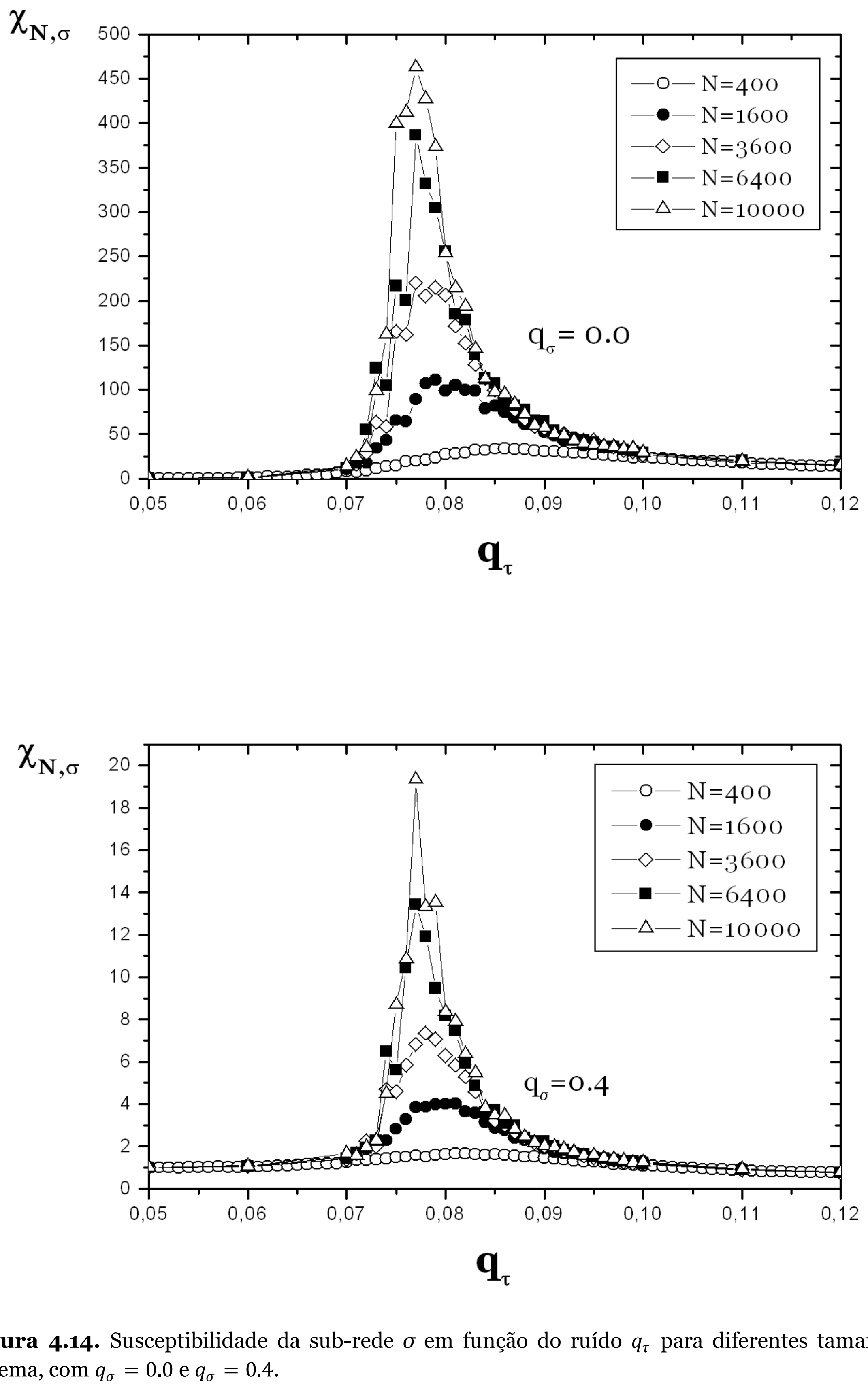

Figura 4.14. Susceptibilidade da sub-rede σ em função do ruído q_τ para diferentes tamanhos do sistema, com $q_\sigma = 0.0$ e $q_\sigma = 0.4$.

A dependência do valor máximo desta susceptibilidade com o ruído q_σ pode ser quantificada e o resultado é mostrado na figura 4.15, onde incluímos o ajuste poli-

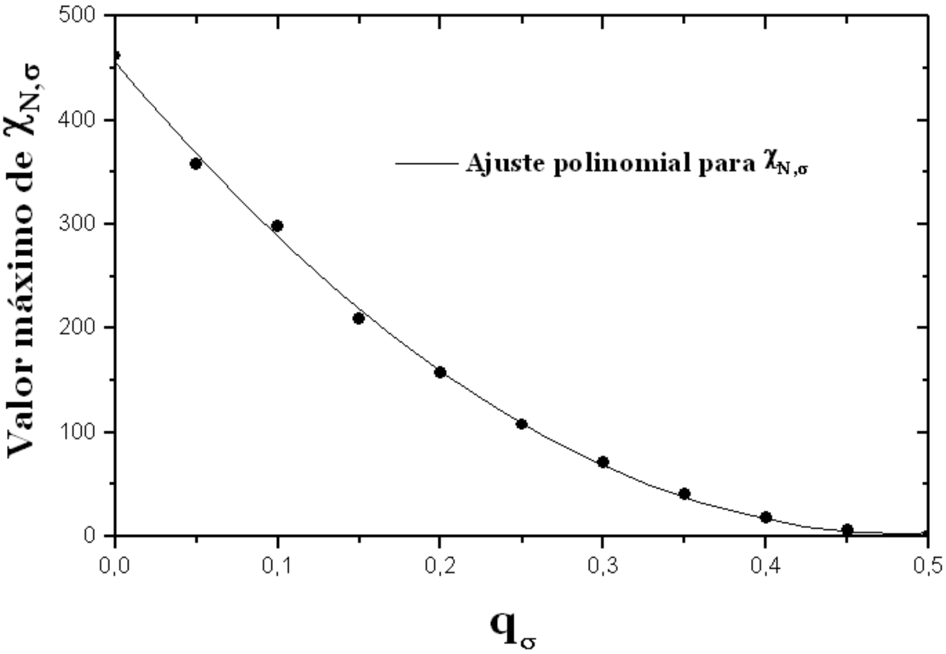

Figura 4.15. Valor do máximo da susceptibilidade sub-rede σ em função do ruído q_σ para $N = 10000$.

nomial até a segunda ordem para o decaimento do valor máximo da susceptibilidade, $\chi_{N,\sigma}^{max}$, em função do ruído na sub-rede σ, q_σ. A curva de ajuste (linha) é dada por

$$\chi_{N,\sigma}^{max} \cong (456 \pm 5) - (1879 \pm 48)q_\sigma - (1948 \pm 92)q_\sigma^2 . \tag{4.9}$$

4.3.5 Comparativo entre as Classes de Indivíduos

Nesta seção fazemos comparações entre o comportamento das magnetizações e susceptibilidades estudadas. Temos por objetivo estabelecer as principais diferenças de comportamento entre os indivíduos das sub-redes σ e τ.

Inicialmente comparamos as magnetizações $M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ e $M_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$. Para isto, consideramos o tamanho de cada sub-rede igual 10000 indivíduos e mostramos na figura 4.16 as curvas de magnetização em função do ruído q_τ, para $q_\sigma = 0.0, 0.2$ *e* 0.4.

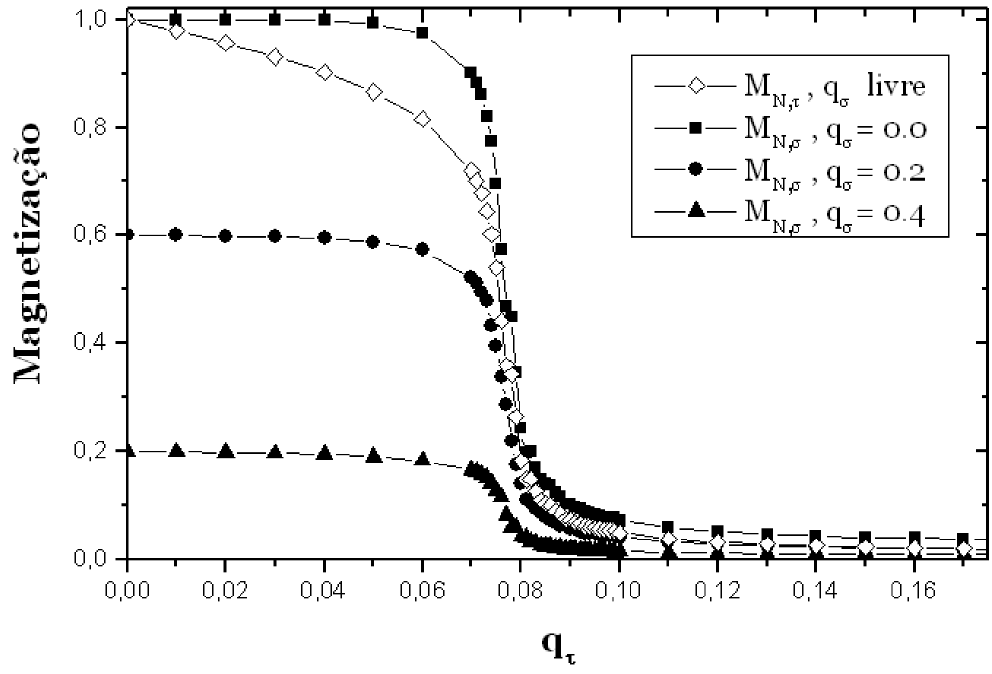

Figura 4.16. Comparativo entre as magnetizações de sub-rede em função do ruído q_τ para três valores fixos de q_σ. As curvas foram obtidas para $N = 10000$.

A diferença entre o comportamento dos indivíduos das duas classes reside no fato de que, para valores do parâmetro q_τ menores que o valor crítico, a rede de indivíduos do tipo σ se comporta de uma maneira "robusta", não reagindo significativamente ao desacordo que começa a ocorrer na sub-rede τ quando $q_\tau \to q_\tau^*$. Na linguagem de termos sociais, isto significa dizer que mesmo com os indivíduos da classe σ sendo influenciados pelos indivíduos da classe τ, esta influência só começa a ser relevante quando as opiniões dos indivíduos da sub-rede τ estão quase igualmente divididas. Observe que com o aumento do ruído na sub-rede τ, a partir de $q_\tau = 0$ até próximo a q_τ^*, uma fração cada vez menor dos indivíduos da classe τ permanecem em concordância (magnetização não nula), enquanto que a fração dos indivíduos do tipo σ que está ordenada, mesmo sendo influenciada pela sub-rede τ, mantém seu ordenamento. (Por exemplo, linha para $q_\sigma = 0$ na figura 4.16). Por outro lado, vemos que com o aumento do valor do ruído q_σ, diminui a fração dos indivíduos do tipo σ que preservam o ordenamento. Podemos concluir a partir da figura anterior que o comportamento dos indivíduos do tipo σ não depende do valor de q_τ, para valores do parâmetro $q_\tau \lesssim 0.05$.

Ainda com 10000 sítios em cada sub-rede, fizemos um gráfico na figura 4.17 onde comparamos os valores das susceptibilidades de cada classe de indivíduos como uma função do ruído q_τ mantendo $q_\sigma = 0$.

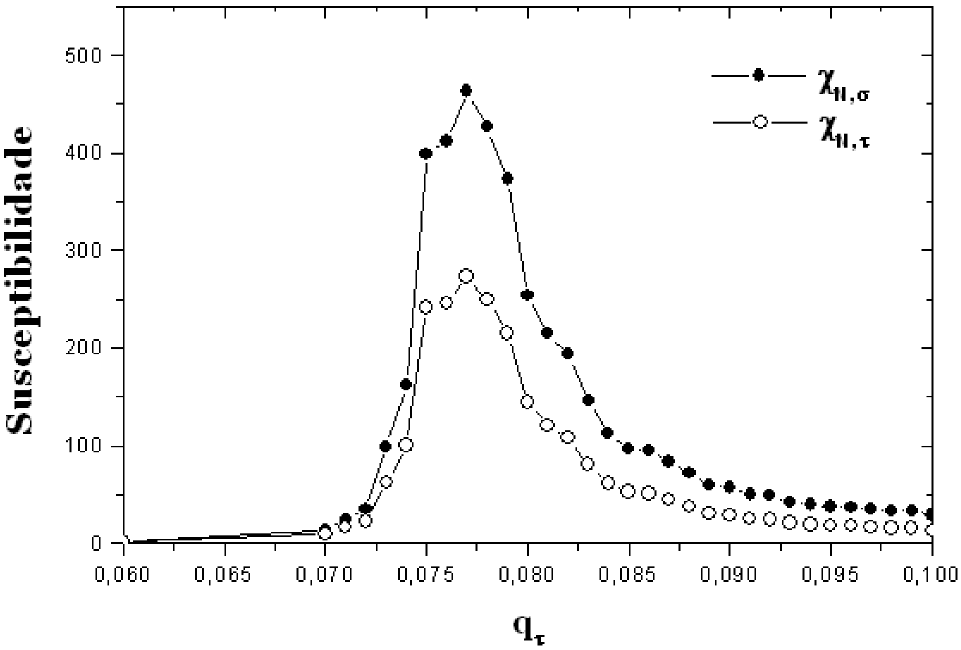

Figura 4.17. Comparativo entre as susceptibilidades $\chi_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ e $\chi_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$ de cada sub-rede em função do ruído q_τ. As curvas foram obtidas para $N = 10000$ e $q_\sigma = 0$.

Concluímos desta figura que os dois tipos de indivíduos sofrem a transição de fase aproximadamente no mesmo valor do parâmetro de ruído q_τ. De [44] sabemos que para a sub-rede τ a transição ocorre em $q_\tau = q_\tau^* = 0.075 \pm 0.001$, portanto este é o nosso primeiro valor sugerido para o valor do ruído crítico na sub-rede σ. Examinaremos na próxima seção os valores críticos de q_σ e q_τ utilizando os respectivos cumulantes de quarta ordem de Binder.

Encerramos esta seção com a apresentação dos resultados obtidos da magnetização da sub-rede σ para q_τ no intervalo $[0; 1]$, no caso de $q_\sigma = 0$, mostrados na figura 4.18. É possível identificar duas fases com magnetização não nula, uma para $q_\tau < 0.5$ e outra para $q_\tau > 0.5$.

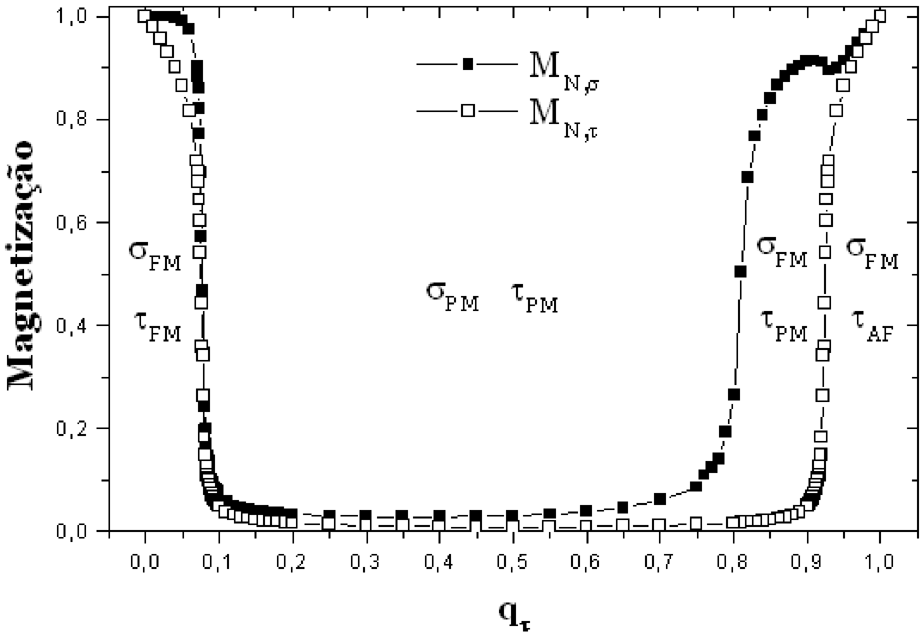

Figura 4.18. Magnetizações de sub-rede, com N = 10000 sítios, em função do ruído q_τ para $q_\sigma = 0$ fixo. Os resultados para outros valores de q_σ estão apresentados nas figuras 4.10 e 4.12.

Nesta figura, indicamos os diversos estados das magnetizações do sistema, representados por: estado ferromagnético (FM) das sub-redes σ e τ, respectivamente por σ_{FM} e τ_{FM}, estado paramagnético (PM) por σ_{PM} e τ_{PM} e o estado antiferromagnético da sub-rede τ por τ_{AF}. A fase ferromagnética σ_{FM} para $q_\tau > 0.5$ é influenciada pela fase antiferromagnética τ_{AF}. A fase τ_{AF} é deduzida a partir da simetria de inversão da equação (3.7) que fornece a probabilidade de mudança de opção de um indivíduo da classe τ. Em particular, quando $q_\tau = 1$, os indivíduos da sub-rede τ estão totalmente antiparalelos entre si e os indivíduos da classe σ estão totalmente paralelos entre si.

4.3.6 O Cumulante de Binder e o Diagrama de Fases

Com o objetivo de determinar os valores dos ruídos críticos em todo o espaço de fase do sistema, calculamos os valores do cumulante de quarta ordem de Binder para diversos pares de valores de ruído q_τ e q_σ. Os valores do cumulante para a classe τ e para a classe σ são dados pelas equações (3.15) e (3.16) respectivamente. Na figura

4.19 ilustramos como obtemos através do cumulante da sub-rede σ, o valor do ruído crítico q_τ^* que ocorre na região $q_\tau < 0.5$, para $q_\sigma = 0$. O valor crítico do ruído q_τ^* é obtido pela interseção das curvas do cumulante de Binder calculadas para diferentes tamanhos. Pela própria definição do cumulante, este é o único ponto onde o valor do ruído crítico não depende do tamanho do sistema. Assim como no caso da sub-rede τ, a sub-rede σ apresenta uma transição de fase em $q_\tau = q_\tau^* = 0.075 \pm 0.001$.

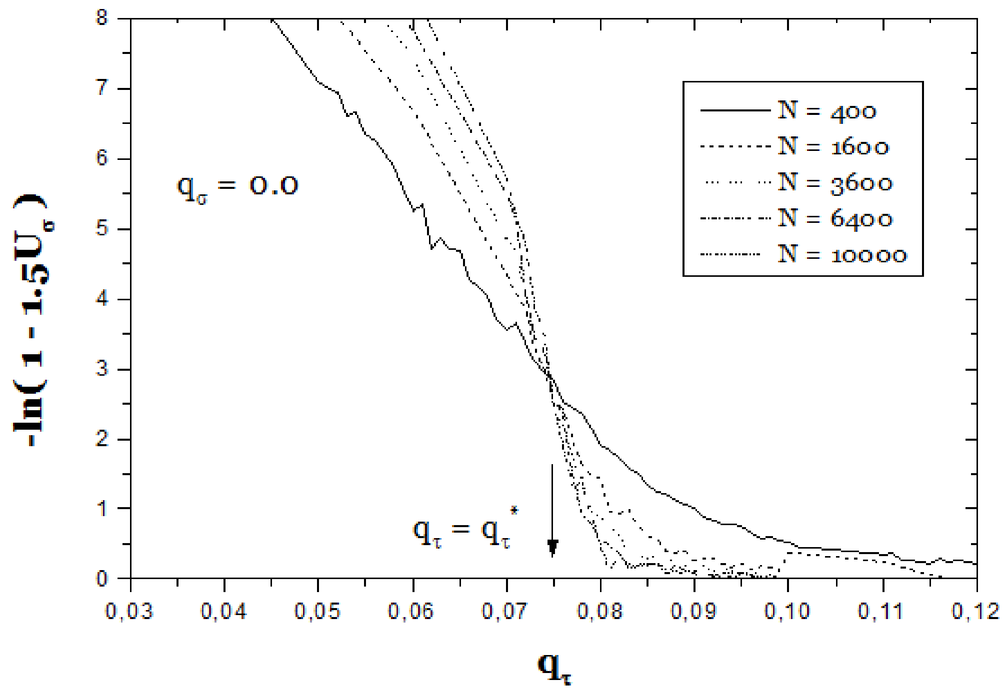

Figura 4.19. Cumulante de Binder para a sub-rede σ em função de q_τ, para diferentes tamanhos de sub-rede e $q_\sigma = 0$.

A partir dos resultados mostrados na figura 4.12, podemos observar que à medida que q_σ é mantido fixo em diferentes valores, existem várias transições de fase para a magnetização $M_{N,\sigma}$ em um valor de $q_\tau = q_\tau^* > 0.5$. Através do estudo do comportamento do cumulante de Binder em função de q_τ para os diferentes valores de q_σ, foi possível determinar os pares de valores de ruídos críticos de cada sub-rede. Na figura 4.20 temos os resultados para $q_\sigma = 0$. O ponto no eixo q_τ em que as curvas de diferentes tamanhos se interceptam corresponde ao valor crítico de q_τ. Obtemos $q_\tau^* = 0{,}814 \pm 0{,}003$.

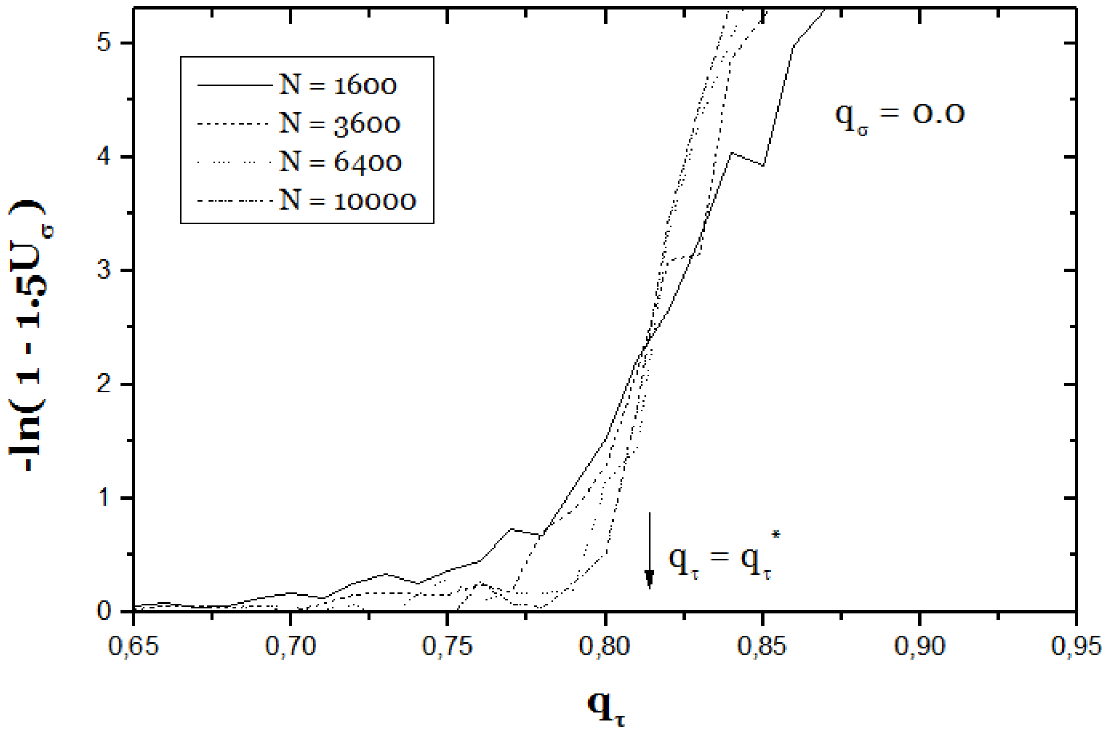

Figura 4.20. Cumulante de Binder para a sub-rede σ para $q_\tau > 0.5$ e $q_\sigma = 0$ para diferentes tamanhos de sub-rede.

Estudando o comportamento do cumulante de Binder em todo o espaço dos ruídos, ou seja, $q_\tau \in [0.0; 1.0]$, $q_\sigma \in [0.0; 1.0]$ podemos construir o diagrama de fase do sistema. Este diagrama está representado na figura 4.21, onde podemos identificar cinco regiões diferentes.

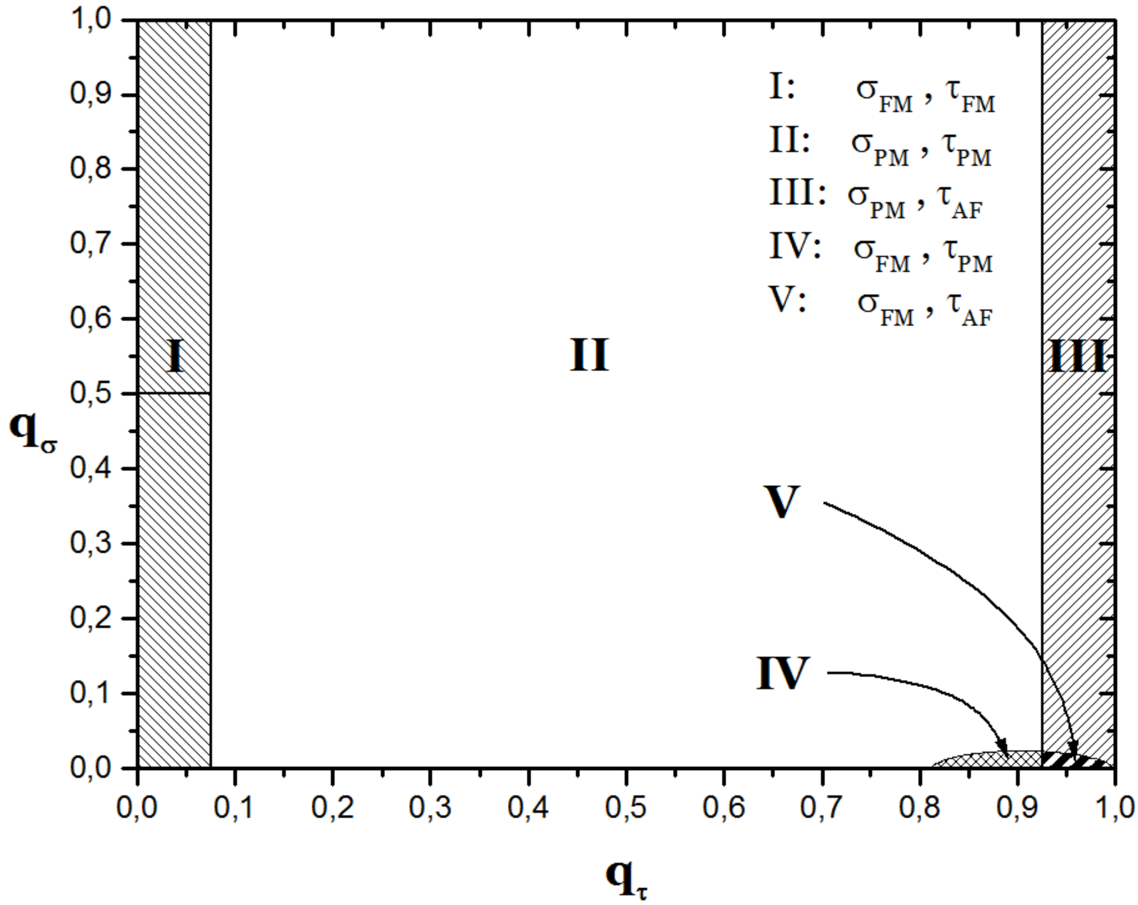

Figura 4.21. Diagrama de fase do sistema no plano $q_\tau - q_\sigma$. Na região I, o sistema apresenta ferromagnetismo, com exceção da reta $q_\sigma = 0.5$ onde a magnetização da sub-rede σ é nula. Na região II, o sistema está na fase paramagnética. Na região III, a sub-rede σ é paramagnética enquanto a sub-rede τ apresenta antiferromagnetismo. Na região IV, a sub-rede de indivíduos do tipo σ exibe magnetização não-nula, ou seja, estado ferromagnético, enquanto a sub-rede τ está na fase paramagnética. Na região V, a sub-rede σ é ferromagnética e a sub-rede τ é antiferromagnética.

A região I compreende o retângulo definido por $q_\tau \in [0.000; 0.075]$ e $q_\sigma \in [0.000; 1.000]$. Nesta região o sistema possui magnetizações de ambas as classes finitas e diferentes de zero, cada classe de indivíduos do sistema está no estado ferromagnético (FM). Na reta $q_\sigma = 0.5$, a magnetização da sub-rede de indivíduos do tipo σ é nula, assim como mostrado anteriormente na figura 4.11. A região II que compreende a parte central do diagrama de fase. Nesta região, as magnetizações de ambas as sub-redes são nulas e o estado do sistema é paramagnético (PM). Na região III, o sistema apresenta magnetização da sub-rede σ nula, mas antiferromagnetismo para a sub-rede τ, este estado para a classe τ surge em $q_\tau = 0.925$. Na região IV, que compreende as proximidades do intervalo de $q_\tau \in]0.810; 0.925[$ com $q_\sigma \in]0.00; 0.02[$, a sub-rede de indivíduos da classe σ apresenta novamente magnetização não-nula e ordenamento ferromagnético, enquanto a classe τ é paramagnética. Isto pode ser melhor observado no gráfico da figura 4.12, onde nota-se claramente uma magnetização diferente de zero dentro do intervalo de ruídos que compreende esta região. Por último temos a região V, para a qual a classe σ é ferromagnética e a τ é antiferromagnética. Estas duas últimas regiões oferecem um nível razoável de dificuldade para permitir sua completa descrição, pelo comportamento não trivial do sistema neste intervalo. Uma análise mais detalhada pode ser feita em trabalhos futuros com o objetivo de oferecer uma maior precisão em todos os aspectos das transições nestas regiões.

4.3.7 A Correlação Sigma-Tau

Nas nossas simulações, calculamos a média do produto das magnetizações do sistema, $\langle m_\sigma m_\tau \rangle$, dado pela equação (3.18). Percebemos que o comportamento desta grandeza depende dos valores dos ruídos q_σ e q_τ, mas não depende do tamanho do sistema. Uma síntese dos resultados pode ser vista na figura 4.22, onde cada curva

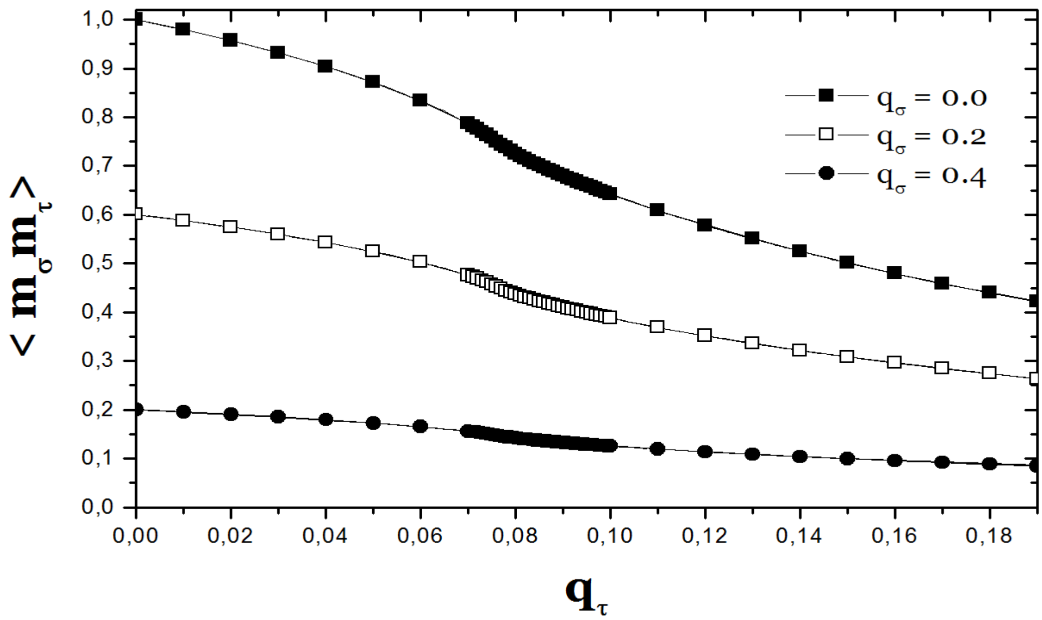

Figura 4.22. Gráfico da média do produto das magnetizações, $\langle m_\sigma m_\tau \rangle$, em função do ruído q_τ para valores fixos de q_σ. Cada valor de q_σ possui os tamanhos de sub-rede $400, 1600, 3600, 6400$ e 10000 coincidindo sobre a mesma curva.

corresponde aos resultados da média $\langle m_\sigma m_\tau \rangle$ em função do ruído q_τ, com diversos valores de N e para $q_\sigma = 0.0, 0.2$ e 0.4. Concluímos que os dados para os tamanhos de sub-rede $N = 400, 1600, 3600, 6400$ e 10000 coincidem sobre a mesma curva, para um dado valor de q_σ. A identificação desta característica do sistema sugere um novo parâmetro de ordem: a *correlação* entre as magnetizações das sub-redes. Definimos então a correlação, $\Delta_{\sigma,\tau}$, entre as magnetizações do sistema pela equação (3.17), que significa uma medida de quão correlacionada é a opinião de uma sub-rede com a outra. Quando $\Delta_{\sigma,\tau}$ apresenta um valor máximo, podemos afirmar que as opiniões das duas classes de indivíduos estão fortemente correlacionadas, e quando $\Delta_{\sigma,\tau}$ tem seu valor mínimo, podemos concluir que o grau de concordância de uma sub-rede pouco influencia na dinâmica da outra sub-rede. Na figura 4.23, apresentamos um gráfico desta grandeza em função do ruído q_τ, no caso $q_\sigma = 0$. Vemos que a correlação possui um valor máximo próximo ao valor crítico q_τ^* e apresenta uma pequena dependência com o tamanho do sistema.

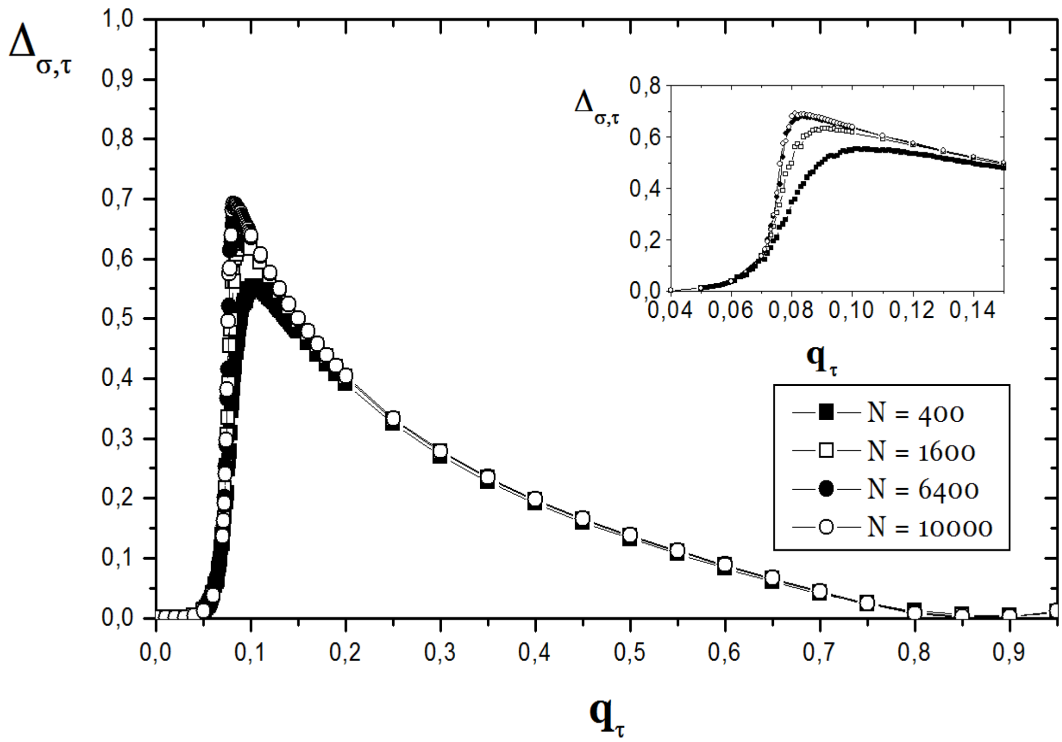

Figura 4.23. Correlação $\Delta_{\sigma,\tau}$ em função do ruído q_τ, para $q_\sigma = 0$ fixo e vários tamanhos do sistema. No detalhe está a região onde a correlação apresenta o seu valor máximo.

Com o objetivo de estudar a dependência da correlação com o tamanho de cada sub-rede, apresentamos na figura 4.24 um gráfico do valor da correlação em $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma = 0.0$. Nesta figura, a curva contínua corresponde ao ajuste exponencial.

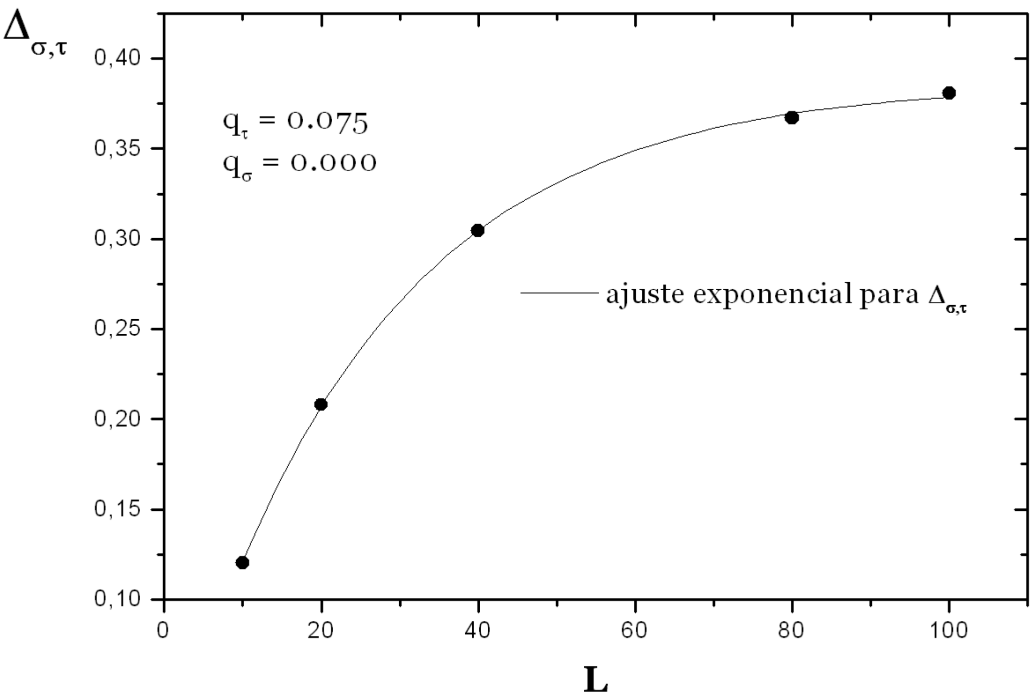

Figura 4.24. Correlação $\Delta_{\sigma,\tau}$ em função do tamanho $L = N^{1/2}$, para valores de ruído $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma = 0.0$. A linha representa o ajuste exponencial até a segunda ordem para os dados.

A curva contínua no gráfico anterior corresponde ao ajuste exponencial utilizado para os valores da correlação calculada para $q_\tau = 0.075$, em função do lado L do sistema. O ajuste exponencial em segunda ordem resulta em

$$\Delta_{\sigma,\tau}(L) = (0.387 \pm 0.003) - (0.266 \pm 0.003) \times exp\left[-\frac{L-10}{25}\right]. \quad (4.10)$$

Deste ajuste, identificamos a seguinte relação para esta grandeza em função de L

$$\Delta_{\sigma,\tau}(L) = \Delta_{\sigma,\tau}(\infty) + \{\Delta_{\sigma,\tau}(L_0) - \Delta_{\sigma,\tau}(\infty)\} \times \{exp[-(L - L_0)/\tilde{L}]\}. \quad (4.11)$$

Das equações acima é possível concluir que $\tilde{L} = 25$ é o comprimento característico, e que para $L \to \infty$ a correlação $\Delta_{\sigma,\tau}$ apresenta um valor finito e igual à $\Delta_{\sigma,\tau}(\infty) = 0.386 \pm 0.003$. Enquanto que quando $L \to L_0$, $\Delta_{\sigma,\tau} = \Delta_{\sigma,\tau}(L_0) = 0.121 \pm 0.006$.

A região onde a correlação apresenta um máximo fica mais estreita com o aumento do tamanho do sistema. Na figura 4.25 fizemos um gráfico comparando a média $\langle m_\sigma m_\tau \rangle$ com a correlação $\Delta_{\sigma,\tau}$, para $L = 100$ e três valores do ruído q_σ. Vemos que, quando $q_\tau > 0.075$, $\Delta_{\sigma,\tau} = \langle m_\sigma m_\tau \rangle$ e, portanto, $\langle m_\tau \rangle \langle m_\sigma \rangle = 0$. Resultado este que define a fase paramagnética do sistema. Por outro lado, para $q_\tau \lesssim 0.05$ a correlação é nula, de maneira que a opinião dos agentes de uma classe não depende da opinião da outra, confirmando o que havíamos concluído na análise da figura 4.16.

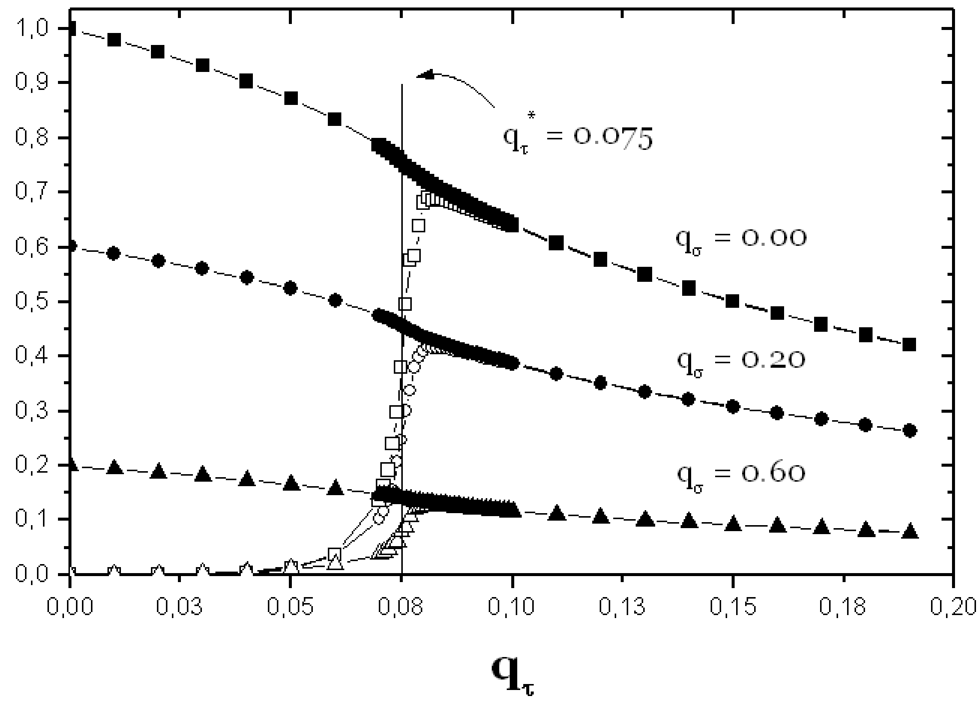

Figura 4.25. Comparativo entre a correlação $\Delta_{\sigma,\tau}$ (símbolos abertos) e a média $\langle m_\sigma m_\tau \rangle$ (símbolos fechados), para $L = 100$. Vemos que na fase paramagnética, região II do diagrama de fases, a correlação não apresenta dependência com o tamanho do sistema.

4.3.8 Dependência com o Tamanho e Expoentes Críticos

O nosso objetivo nesta seção é explorar a dependência das grandezas físicas apresentadas anteriormente como função do tamanho do sistema e, a partir das conclusões sobre esta dependência, usar a técnica de escalamento de tamanho finito para obter os valores dos ruídos críticos e dos expoentes críticos.

Nas figuras 4.26 e 4.27 mostramos os resultados das magnetizações $M_{N,\tau}(q_\sigma, q_\tau)$ e $M_{N,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)$ respectivamente, em função do inverso do tamanho do lado L de cada sub-rede do sistema, para $q_\sigma = 0$. Nesta seção optamos por uma escala em L, que representa o comprimento característico do sistema, para explicitar a dependência das grandezas de interesse com o tamanho da sub-rede.

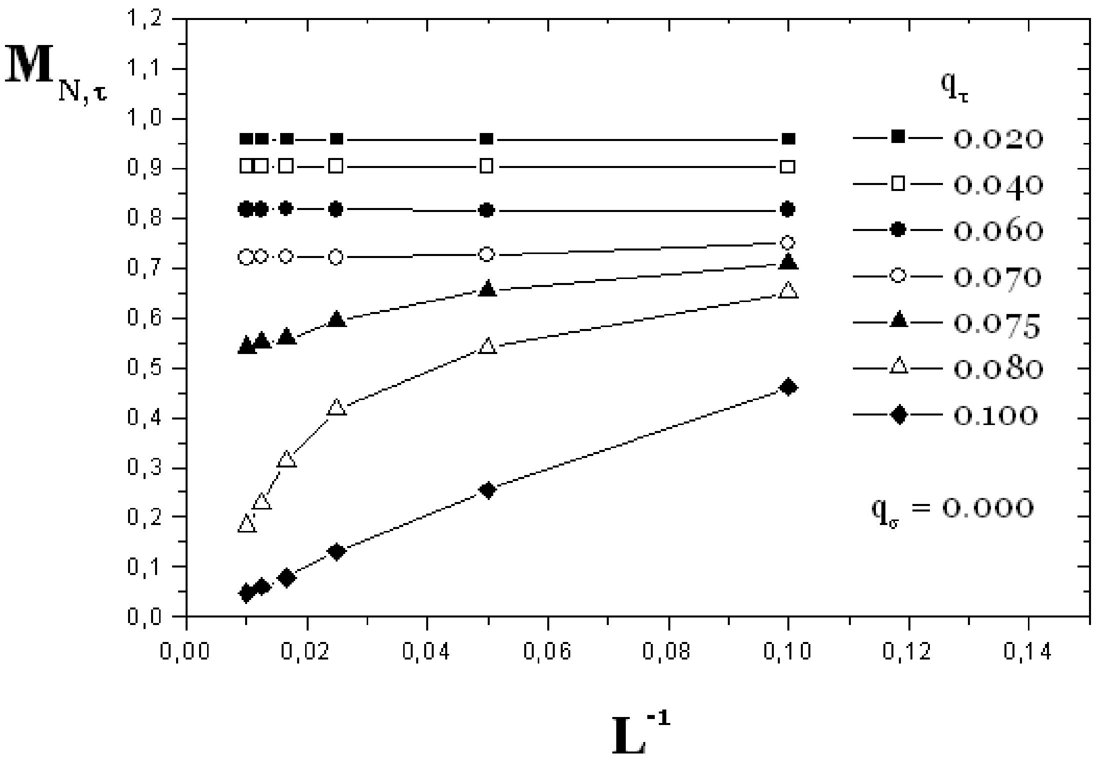

Figura 4.26. Magnetização da sub-rede τ em função de $1/L$, com $q_\sigma = 0$ fixo, para diversos valores do ruído q_τ.

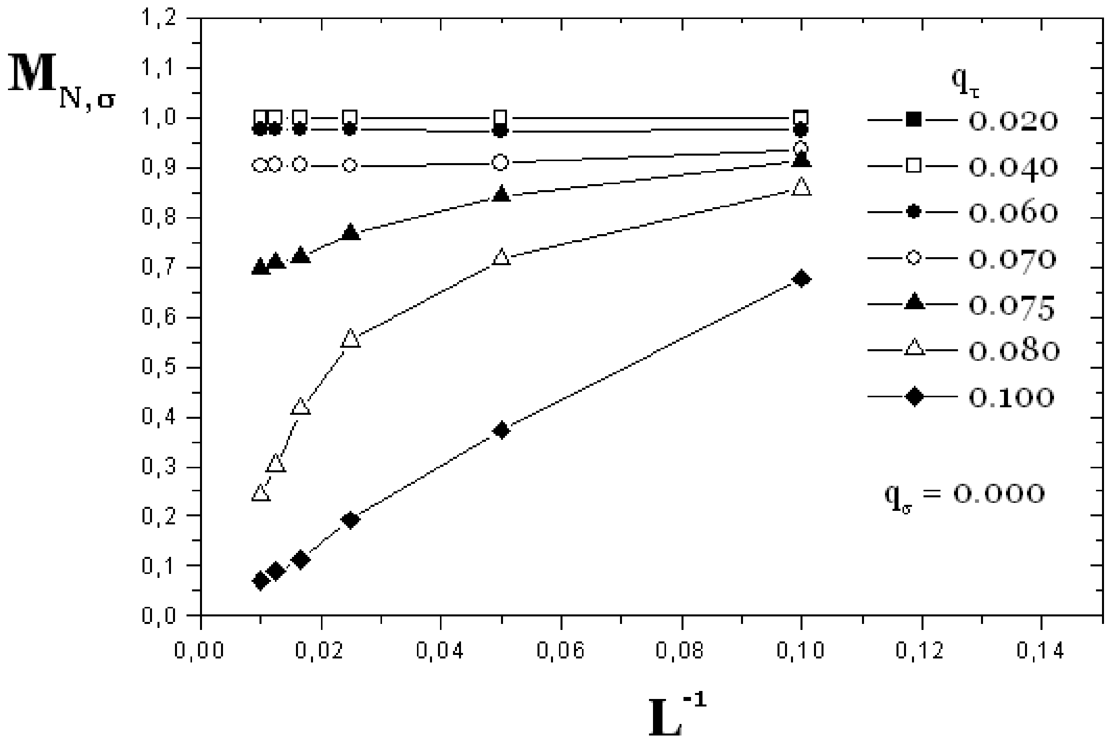

Figura 4.27. Magnetização da sub-rede σ em função de $1/L$, com $q_\sigma = 0$, para diversos valores do ruído q_τ. Os dados para $q_\tau = 0.020$ e $q_\tau = 0.040$ se superpõem.

É possível perceber que antes do valor do ruído q_τ crítico, $q_\tau^* = 0.075$, ambas as magnetizações possuem um valor finito, mesmo quando tomamos o limite termodinâmico, $L \to \infty$. Mas para valores do ruído q_τ maiores ou igual ao valor crítico, as magnetizações das sub-redes se anulam neste limite. Utilizando este procedimento de maneira sistemática, variando q_σ e q_τ, confirmamos que na região I do diagrama de fases exibido na figura 4.21 o estado do sistema é ferromagnético em ambas as sub-redes. Obtivemos resultados semelhantes que confirmam o comportamento ferromagnético da sub-rede σ na região IV, como havíamos observado anteriormente. Fixando $q_\tau = 0.9$ e variando os valores do ruído q_σ dentro e fora desta região, obtivemos os resultados que podem ser vistos na figura 4.28.

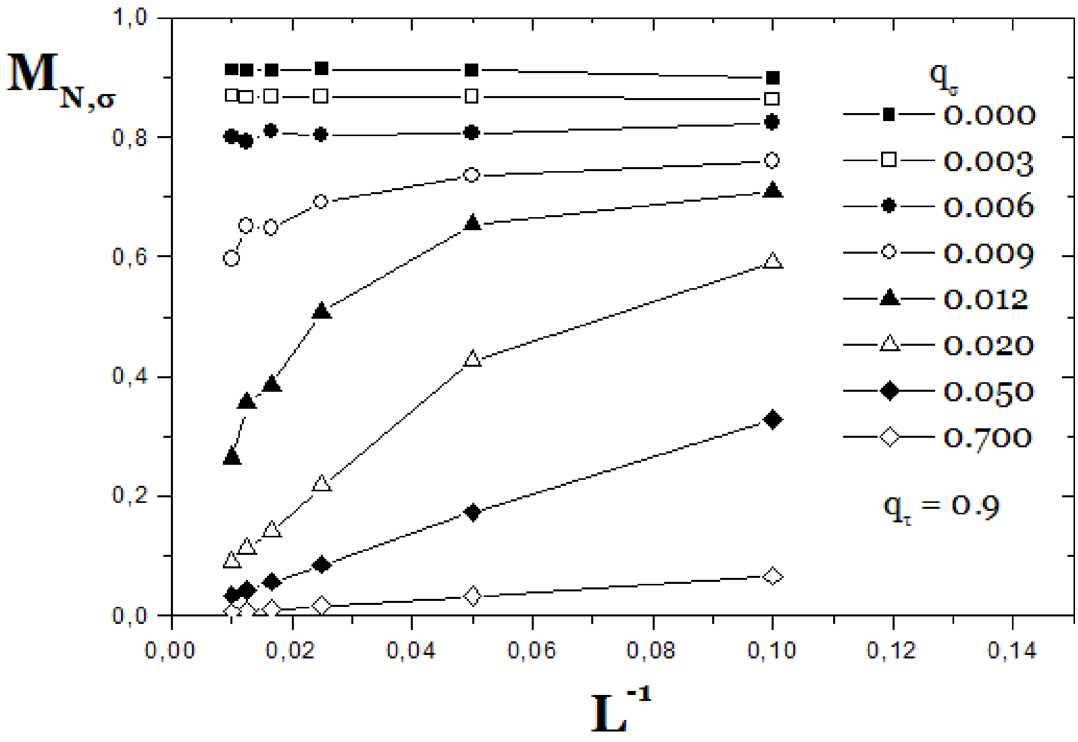

Figura 4.28. Magnetização da sub-rede σ em função de $1/L$, com o ruído $q_\tau = 0.9$ fixo, para diferentes valores do ruído q_σ. Para valores de q_σ e q_τ na região IV do diagrama de fase a sub-rede σ é ferromagnética.

Concluímos que a magnetização da sub-rede σ tende a zero no limite termodinâmico, $L \to \infty$, para um valor de q_σ acima do valor crítico. É possível confirmar a existência de uma fase ordenada para esta sub-rede quando o ruído q_σ está abaixo do seu valor crítico. Quando $q_\tau = 0.9$ fixo, este valor crítico para q_σ se encontra entre $q_\sigma = 0.006$ e $q_\sigma = 0.009$.

Utilizando as técnicas de escalamento de tamanho finito discutidas no Capítulo 2, reescrevemos as equações (2.41-43) para o nosso sistema com T substituído pelo respectivo ruído de cada sub-rede. Usaremos esta técnica para investigar o comportamento das magnetizações do sistema em função do ruído q_τ para valores fixos do ruído q_σ, ou seja, escreveremos $\epsilon = \epsilon_\tau = q_\tau - q_\tau^*$ e manteremos q_σ como parâmetro. Para a magnetização, susceptibilidade e para o cumulante de Binder da sub-rede τ, usamos as seguintes relações:

$$M_{L,\tau}(q_\sigma, q_\tau)L^{\psi_\tau} = \widetilde{M}_{L,\tau}(u_\tau), \tag{4.12}$$

$$\chi_{L,\tau}(q_\sigma, q_\tau)L^{-\eta_\tau} = \tilde{\chi}_{L,\tau}(u_\tau), \tag{4.13}$$

$$U_{L,\tau}(q_\sigma, q_\tau) = \widetilde{U}_{L,\tau}(u_\tau). \tag{4.14}$$

Onde definimos a variável de escala $u_\tau \equiv (L^{\lambda_\tau}\epsilon_\tau)$ e os expoentes ψ_τ, λ_τ e η_τ como

$$\psi_\tau \equiv \beta_\tau/\upsilon_\tau,\ \lambda_\tau \equiv 1/\upsilon_\tau \text{ e } \eta_\tau \equiv \gamma_\tau/\upsilon_\tau. \tag{4.15}$$

De forma análoga, para a sub-rede σ temos as seguintes relações de escala

$$M_{L,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)L^{\psi_\sigma} = \widetilde{M}_{L,\sigma}(u_\tau), \tag{4.16}$$

$$\chi_{L,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)L^{-\eta_\sigma} = \tilde{\chi}_{L,\sigma}(u_\tau), \tag{4.17}$$

$$U_{L,\sigma}(q_\sigma, q_\tau) = \widetilde{U}_{L,\sigma}(u_\tau). \tag{4.18}$$

Onde definimos os expoentes ψ_σ, λ_σ e η_σ como

$$\psi_\sigma \equiv \beta_\sigma/\upsilon_\sigma,\ \lambda_\sigma \equiv 1/\upsilon_\sigma \text{ e } \eta_\sigma \equiv \gamma_\sigma/\upsilon_\sigma. \tag{4.19}$$

Com o objetivo de conhecer os valores dos expoentes críticos do sistema nas transições de fase, calculamos o logaritmo das equações anteriores para a magnetização e para a susceptibilidade. Obtemos as seguintes relações:

$$ln\left[\, M_{L,\tau}(q_\sigma, q_\tau)\,\right] = -\psi_\tau\ \ ln[\, L\,] + ln\left[\, \widetilde{M}_{L,\tau}(u_\tau)\,\right], \tag{4.20}$$

$$ln\left[\, M_{L,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)\,\right] = -\psi_\sigma\ \ ln[\, L\,] + ln\left[\, \widetilde{M}_{L,\sigma}(u_\tau)\,\right], \tag{4.21}$$

$$ln\big[\,\chi_{L,\tau}(q_\sigma, q_\tau)\,\big] = \eta_\tau\, ln[\,L\,] + ln\big[\,\tilde{\chi}_{L,\tau}(u_\tau)\,\big], \tag{4.22}$$

$$ln\big[\,\chi_{L,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)\,\big] = \eta_\sigma\, ln[\,L\,] + ln\big[\,\tilde{\chi}_{L,\sigma}(u_\tau)\,\big]. \tag{4.23}$$

No ponto crítico ($u_\tau = 0$) estas relações são lineares, de maneira que os expoentes críticos ψ_τ, η_τ, ψ_σ, e η_σ podem ser obtidos a partir das inclinações em escala logarítmica.

Ao fixarmos o valor de q_τ em $q_\tau^* = 0.075$ e variarmos o valor de q_σ entre $[0.0; 0.8]$, ou seja, em alguns pontos ao longo da linha crítica que separa as regiões I e II no diagrama de fases da figura 4.21, obtivemos os valores dos expoentes críticos desta transição de fase e suas respectivas margens de erro. Alguns dos resultados obtidos para o logaritmo da magnetização e para o logaritmo da susceptibilidade da sub-rede τ, ambos em função do logaritmo do tamanho L, estão ilustrados nas figuras 4.29 e 4.30. Uma vez que o comportamento da sub-rede τ independe do ruído q_σ, os pontos nos gráficos para diferentes valores de q_σ apresentam o mesmo valor em média. Então, escolhendo $q_\sigma = 0.0$ em particular, temos para a magnetização $M_{L,\tau}(q_\sigma^*, q_\tau^*)$ o gráfico da figura 4.29. Enquanto que para outro valor de q_σ, por exemplo, $q_\sigma = 0.6$, obtivemos para o gráfico da susceptibilidade os resultados da figura 4.30. Concluímos a partir dos ajustes lineares para os dados das figuras que

$$\psi_\tau \equiv \frac{\beta_\tau}{\upsilon_\tau} = 0.123\ \pm 0.006, \tag{4.24}$$

$$\eta_\tau \equiv \frac{\gamma_\tau}{\upsilon_\tau} = 1.774\ \pm 0.059. \tag{4.25}$$

Estes resultados indicam expoentes críticos do tipo Ising para a magnetização e para a susceptibilidade da sub-rede τ, concordando com a conclusão de Oliveira para esta sub-rede isoladamente [44].

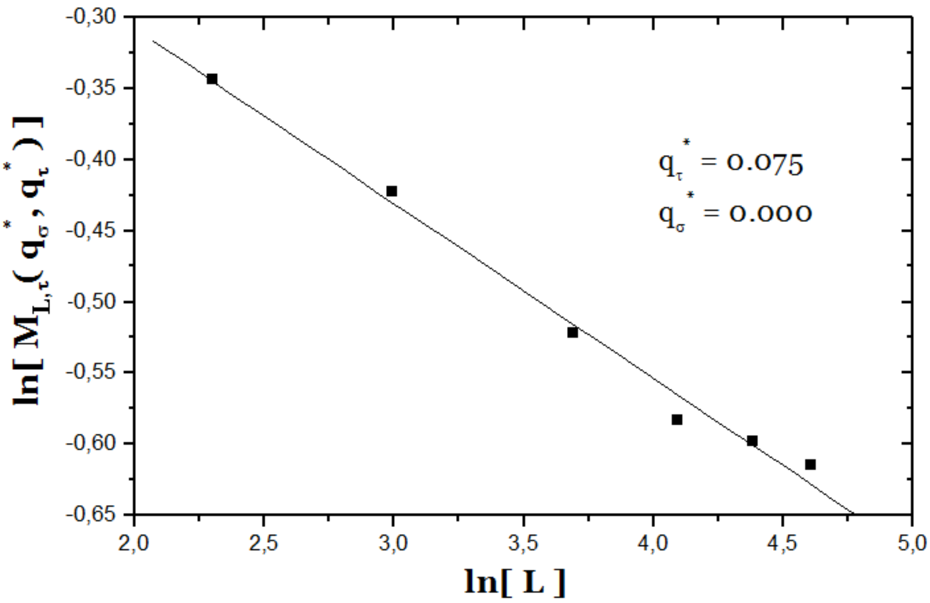

Figura 4.29. Logaritmo natural da magnetização da sub-rede τ, em função do logaritmo de L. A linha contínua é o ajuste linear para os pontos do gráfico. A inclinação da reta fornece o valor do expoente ψ_τ.

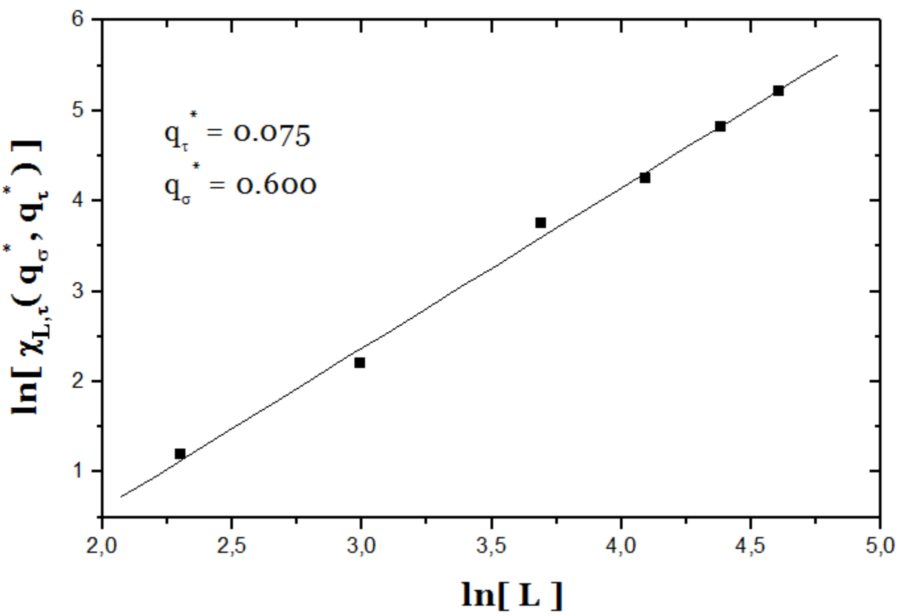

Figura 4.30. Logaritmo natural da susceptibilidade da sub-rede τ, em função do logaritmo de L. A reta é o ajuste linear para os pontos do gráfico. A inclinação da reta fornece o valor do expoente η_τ.

Alguns dos resultados obtidos para o logaritmo da magnetização e para o logaritmo da susceptibilidade da sub-rede σ, ambos em função do logaritmo do tamanho L, estão ilustrados nas figuras 4.31 e 4.32 respectivamente. Observamos que as retas dos ajustes lineares na figura 4.31 possuem aproximadamente o mesmo coeficiente angular, ou seja, o mesmo valor do expoente crítico ψ_σ independente do valor de q_σ^*. De acordo com estes ajustes o expoente crítico que tem valor mais próximo ao expoente crítico do modelo de Ising é para a reta com $q_\sigma^* = 0.6$, onde obtemos $\psi_\sigma = 0.125 \pm 0.015$.

Para os gráficos da susceptibilidade da figura 4.32, o expoente crítico associado, η_σ, que possui valor mais próximo ao expoente Ising é o correspondente à reta com $q_\sigma = 0.2$, ou seja, $\eta_\sigma = 1.74 \pm 0.18$.

Com base nos resultados das figuras 4.31 e 4.32, contruímos a tabela a seguir a partir das linearizações para o logaritmo da magnetização e para o logaritmo da susceptibilidade, quando mantemos o ruído da sub-rede τ fixo enquanto variamos o valor de ruído q_σ^* entre $[0.0; 0.8]$.

Tabela 4.1. Valores dos expoentes críticos para a classe σ das transições que ocorrem ao mantermos o ruído $q_\tau = q_\tau^* = 0.075$ fixo enquanto variamos o valor do ruído q_σ^*, isto é, ao longo da transição I-II do diagrama de fases.

q_σ^*	$\psi_\sigma = \beta_\tau/\upsilon_\tau$	$\eta_\sigma = \gamma_\tau/\upsilon_\tau$
0.0	0.122 ± 0.006	1.87 ± 0.21
0.2	0.117 ± 0.003	1.74 ± 0.18
0.4	0.119 ± 0.009	1.22 ± 0.36
0.6	0.125 ± 0.015	1.63 ± 0.02
0.8	0.124 ± 0.022	1.62 ± 0.19

Os expoentes mostrados na tabela 4.1 com pequenas exceções concordam dentro das barras de erro, com os expoentes do modelo Ising, indicando que nosso modelo de diferentes agentes possui esta mesma classe de universalidade.

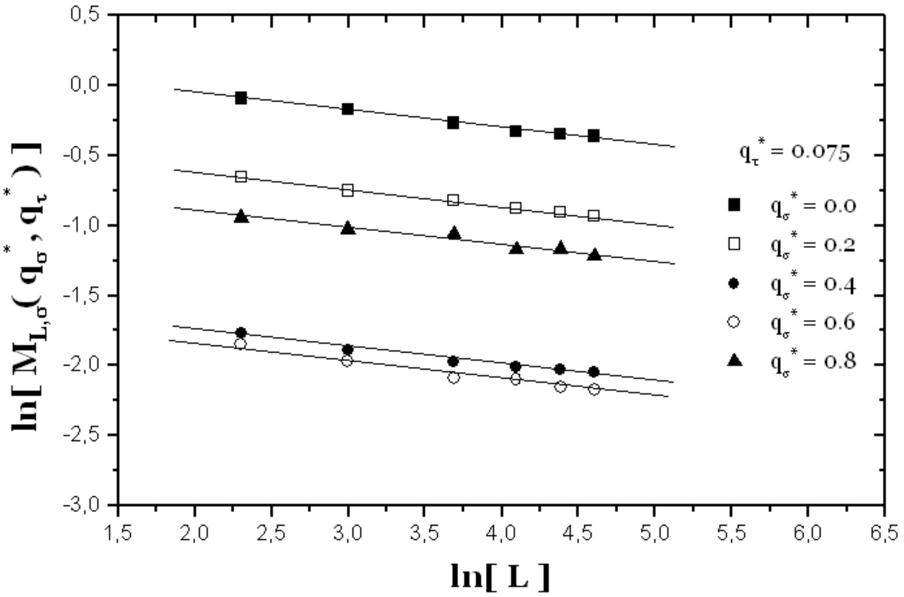

Figura 4.31. Logaritmo natural da magnetização da sub-rede σ, em função do logaritmo de L, com o ruído q_τ fixo em $q_\tau^* = 0.075$, para valores do ruído $q_\sigma^* = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6$ e 0.8. As inclinações das retas fornecem valores para o expoente ψ_σ.

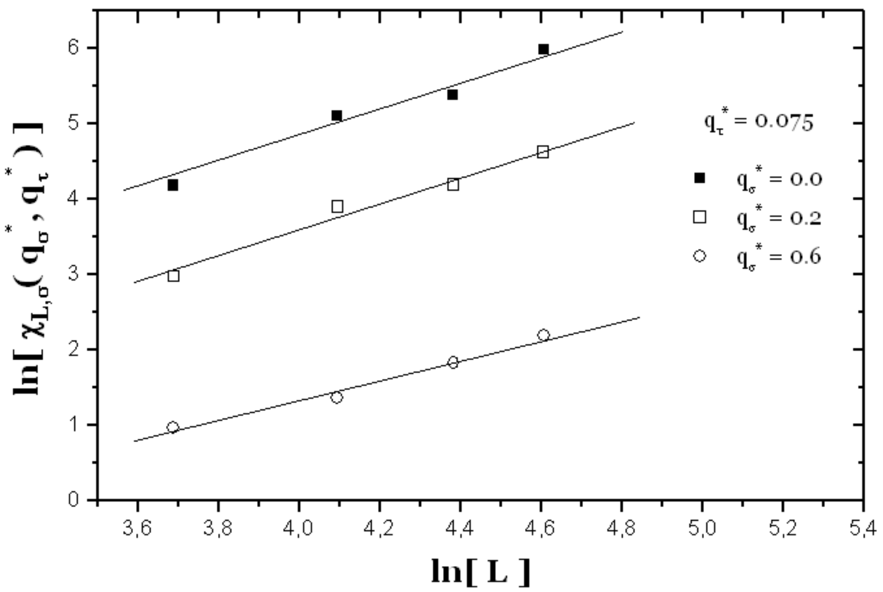

Figura 4.32. Logaritmo natural da susceptibilidade da sub-rede σ, em função do logaritmo de L, com o ruído q_τ fixo em $q_\tau^* = 0.075$ e três valores do ruído $q_\sigma^* = 0.0, 0.2, 0.6$. As inclinações das retas fornecem valores para o expoente η_σ.

Valores mais precisos dos expoentes críticos para o nosso modelo foram obtidos a partir do colapso de dados para as curvas de magnetização e susceptibilidade, uma vez que esta técnica apresenta uma maior sensibilidade com os valores dos expoentes e dos ruídos críticos q_σ^* e q_τ^*.

Nas figuras 4.33 e 4.34 apresentamos respectivamente o colapso das curvas $M_{L,\tau}(q_\sigma^*, q_\tau^*)L^{\psi_\tau}$ e $\chi_{L,\sigma}(q_\sigma^*, q_\tau^*)L^{-\eta_\sigma}$ versus u_τ, para quatro valores do comprimento L de cada sub-rede do sistema. Para que ocorressem os colapsos dos dados mostrados nestas figuras, utilizamos $q_\tau^* = 0.075$ e os valores exatos dos expoentes Ising:

$$\psi_\tau \equiv \frac{\beta_\tau}{\upsilon_\tau} = 0.125\ , \tag{4. 26}$$

$$\eta_\tau \equiv \frac{\gamma_\tau}{\upsilon_\tau} = 1.75\ , \tag{4. 27}$$

$$\lambda_\tau \equiv \frac{1}{\upsilon_\tau} = 1\ . \tag{4. 28}$$

Uma vez que a magnetização e a susceptibilidade da sub-rede τ independem dos valores do ruído q_σ^*, verificamos que outros gráficos de colapso de dados não apresentam mudanças com a alteração do valor de q_σ^*.

Para a sub-rede de indivíduos da classe σ, selecionamos alguns resultados do colapso de dados para $M_{L,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)L^{\psi_\sigma}$ e $\chi_{L,\sigma}(q_\sigma, q_\tau)L^{-\eta_\sigma}$ em função de u_τ, com quatro tamanhos de L e diferentes valores do ruído q_σ^*. Os resultados podem ser vistos nas figuras 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39.

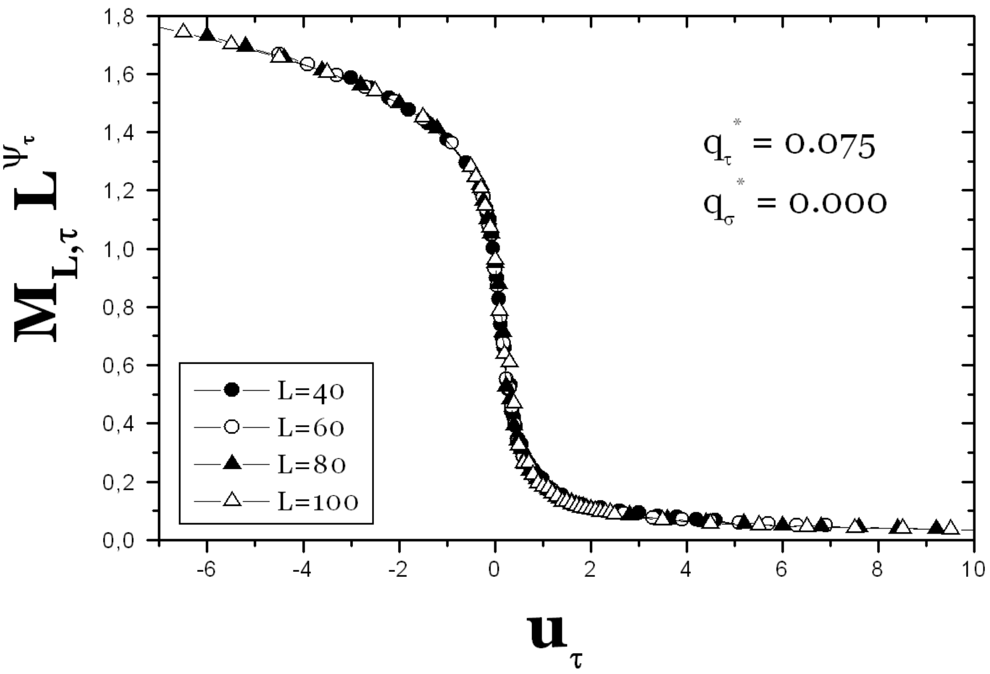

Figura 4.33. Gráfico da função universal $\widetilde{M}_{L,\tau}$ em função de u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.0$.

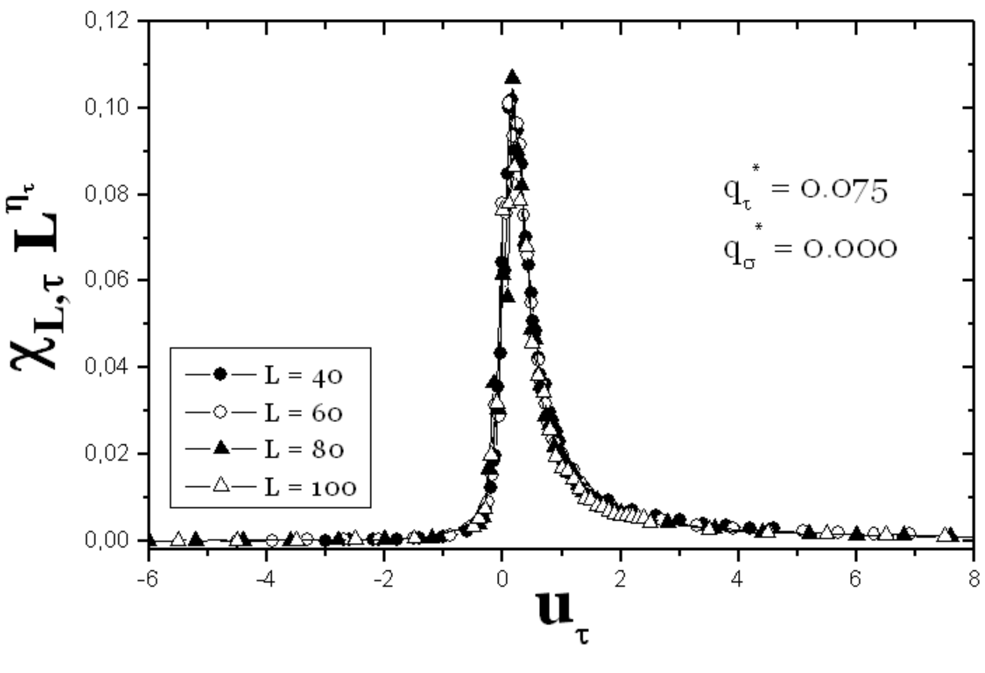

Figura 4.34. Gráfico da função universal $\widetilde{\chi}_{L,\tau}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.0$.

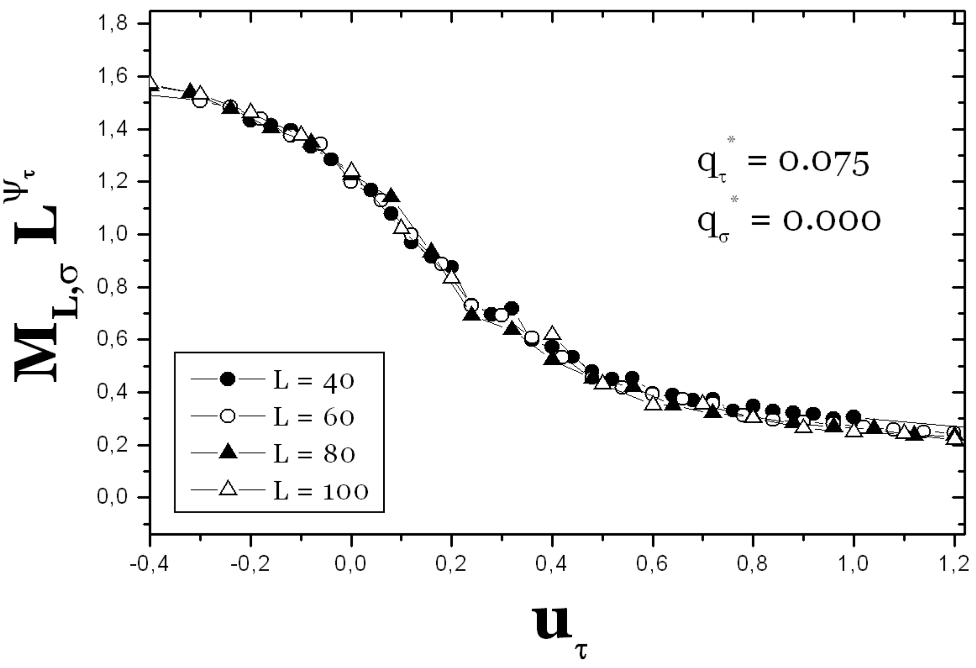

Figura 4.35. Gráfico da função universal $\widetilde{M}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.0$.

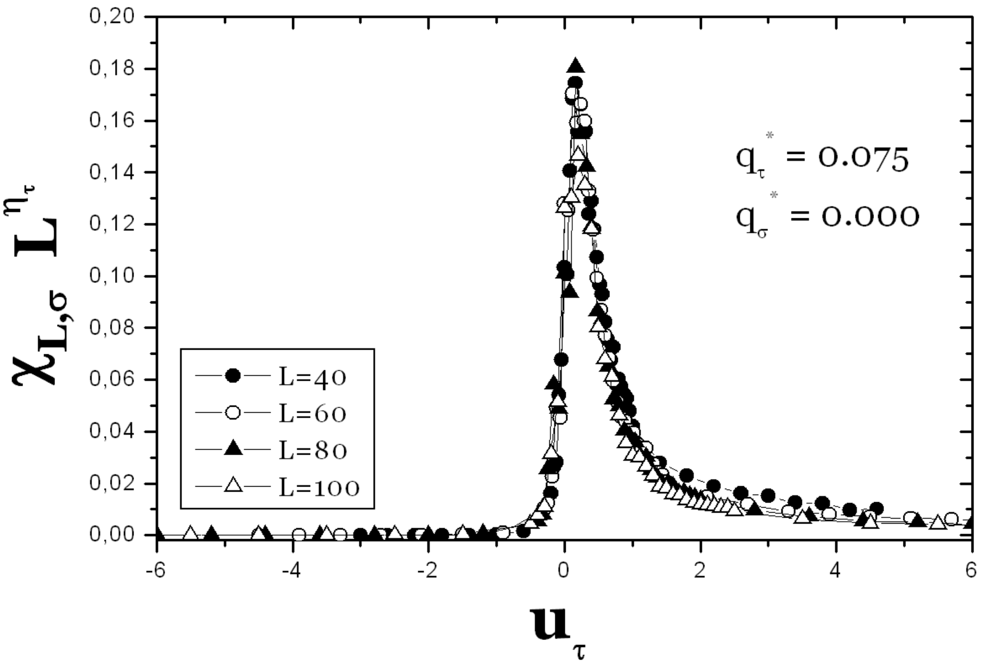

Figura 4.36. Gráfico da função universal $\widetilde{\chi}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.0$.

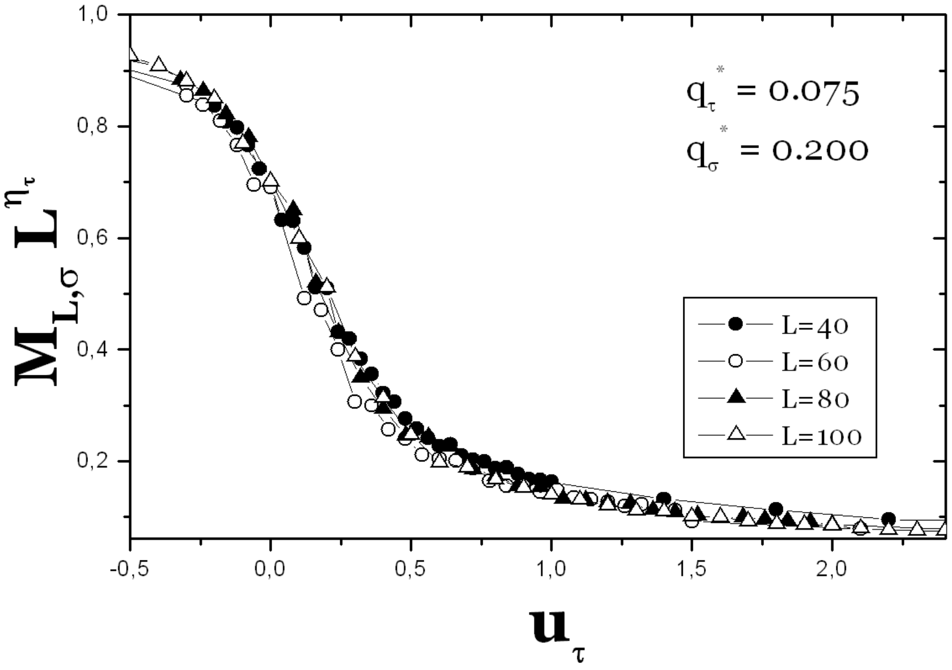

Figura 4.37. Gráfico da função universal $\widetilde{M}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.2$.

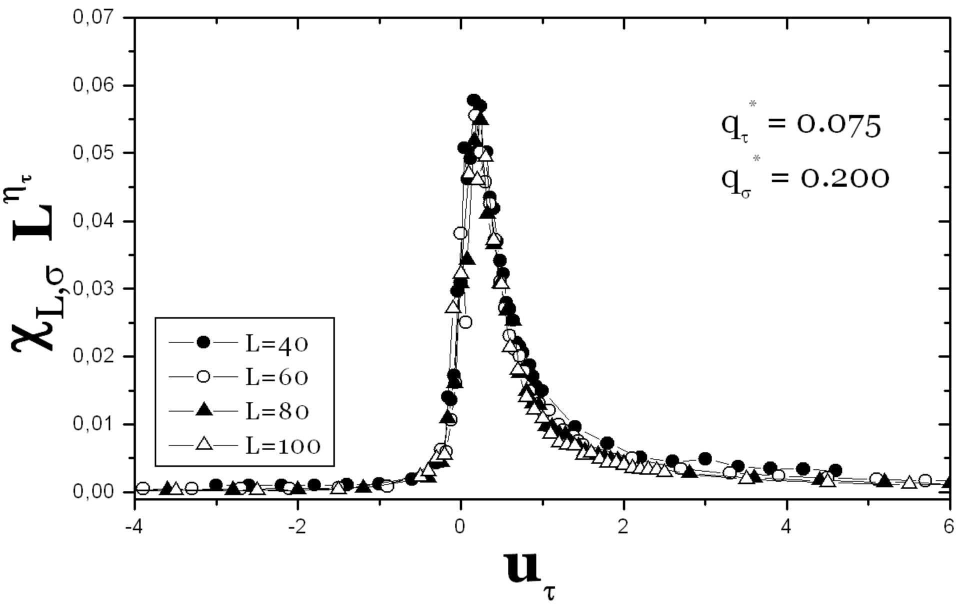

Figura 4.38. Gráfico da função universal $\tilde{\chi}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.2$.

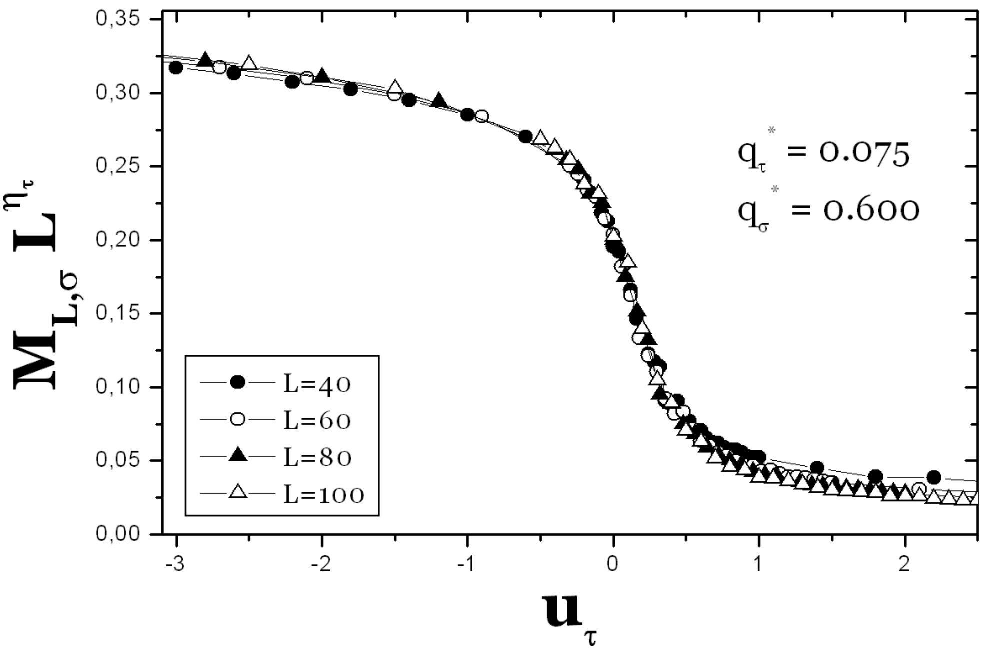

Figura 4.39. Gráfico da função universal $\widetilde{M}_{L,\sigma}$ em função u_τ para $q_\tau^* = 0.075$ e $q_\sigma^* = 0.6$.

A concordância dos resultados para o colapso de dados ao longo da linha de transição I – II do diagrama de fases (figura 4.21), com vários pares de valores q_σ^* e q_τ^*, indica que o modelo de diferentes agentes apresenta a mesma classe de universalidade do modelo de Ising bidimensional. Verificamos ainda que ambas as classes possuem os mesmos expoentes críticos. Ou seja,

$$\psi_\tau = \psi_\sigma \Leftrightarrow \frac{\beta_\tau}{\upsilon_\tau} = \frac{\beta_\sigma}{\upsilon_\sigma}\,; \tag{4.29}$$

$$\eta_\tau = \eta_\sigma \Leftrightarrow \frac{\gamma_\tau}{\upsilon_\tau} = \frac{\gamma_\sigma}{\upsilon_\sigma}\,; \tag{4.30}$$

$$\lambda_\tau = \lambda_\sigma \Leftrightarrow \frac{1}{\upsilon_\tau} = \frac{1}{\upsilon_\sigma}\,. \tag{4.31}$$

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Estudamos um modelo de voto da maioria com duas classes de agentes. Para as transições que analisamos, verificamos que este sistema apresenta pertencer à mesma classe de universalidade do modelo de Ising.

O comportamento de ambas as magnetizações do sistema indica que as mesmas apresentam transições de fase de segunda ordem. Obtivemos as principais características qualitativas e quantitativas destas transições a partir de simulações Monte Carlo e observamos que ambas as sub-redes sofrem transições de fase no quando o ruído da sub-rede τ tem valor $q_\tau^* = 0.075$, enquanto que o ruído da sub-rede σ, q_σ^*, pertence ao intervalo $[0; 1]$. Este resultado para o valor crítico de q_τ é idêntico ao encontrado para o caso estudado por Mário de Oliveira [44] onde a rede possui somente um agente. Verificamos no nosso estudo todo o comportamento da sub-rede τ não é influenciado pelo comportamento da sub-rede σ, assim como idealizado na concepção do modelo. Enquanto que a dinâmica da sub-rede σ demonstrou depender do ruído de ambas as sub-redes. Através destas simulações em computador, conseguimos esboçar o diagrama de fases, encontrando cinco fases distintas para o sistema.

Em termos de opinião concluímos que há uma concordância geral nas sub-redes (unanimidade) para $q_\tau \to 0$, salientando que para valores do ruído q_σ diferentes de zero, apenas uma fração de indivíduos da sub-rede σ consegue se ordenar. Independente disto, esta opinião de ambas as sub-redes é cada vez menos aceita à medida que aumentamos o ruído q_τ. Uma visualização desta descrição pode ser encontrada na figura 4.16. Verificamos que a região da figura que compreende as proximidades da transição de fase e após ela depende significativamente do tamanho do sistema para ambas as sub-redes. Em particular para a sub-rede σ apresenta magnetização nula para $q_\sigma = 0.5$ e para valores deste ruído maiores que 0.5, observamos que o sistema volta a apresentar magnetização $M_{N,\sigma}$ diferente de zero. Estes resultados obtidos para a sub-rede de indivíduos σ, com $q_\sigma < 0.5$ e $q_\sigma > 0.5$, foram mostrados na figura 4.10. Onde concluímos que o ordenamento da sub-rede τ, é responsável pela magnetização não nula nos indivíduos da sub-rede σ. Note que à medida que o valor de q_σ aumenta de 0.6 a 1.0, também aumenta o valor da magnetização $M_{N,\sigma}$ para $q_\tau < q_\tau^*$. O ordenamento total só ocorre quando fazemos $q_\sigma = 1.0$ com $q_\tau = 0$. Esta dinâmica ocorre devido ao ordenamento *antiferromagnético* entre os indivíduos da classe σ e seus vizinhos da classe τ. Portanto, para $q_\sigma > 0.5$ os indivíduos da classe σ preferem estar sempre contrários à maioria dos que os cercam, produzindo este antiferromagnetismo entre os indivíduos da sub-rede σ e os indivíduos da sub-rede τ. Uma vez que não há descontinuidade dos parâmetros de ordem nestas transições, podemos concluir que o sistema apresenta transições de fase de segunda ordem.

Vimos ao compararmos na figura 4.16 as diferenças entre os comportamentos de ambas as classes de indivíduos que, para valores do parâmetro q_τ menores que o valor crítico, a rede de indivíduos do tipo σ se comporta de uma maneira "robusta", não reagindo significativamente ao desacordo que começa a ocorrer na sub-rede τ quando $q_\tau \to q_\tau^*$. Mesmo com a classe σ sendo influenciada pelos indivíduos da classe τ, esta influência só começa a ser relevante quando as opiniões dos indivíduos da sub-rede τ estão quase igualmente divididas. Observe que com o aumento do ruído na sub-rede τ, a partir de $q_\tau = 0$ até próximo a q_τ^*, uma fração cada vez menor dos indivíduos da classe τ permanecem em concordância (magnetização não nula), enquanto que a fração dos indivíduos do tipo σ que está ordenada, mesmo sendo influenciada pela sub-rede τ, mantém seu ordenamento. (linha para $q_\sigma = 0$ na figura 4.16). Concluímos que o comportamento dos indivíduos do tipo σ não depende do valor de q_τ, para valores do parâmetro $q_\tau \lesssim 0.05$.

Na figura 4.18, indicamos os diversos estados das magnetizações das sub-redes σ e τ. Vimos que a fase ferromagnética σ_{FM} quando $q_\tau > 0.5$ é influenciada pela fase antiferromagnética τ_{AF}, onde esta última fase é deduzida a partir da simetria de inversão da equação (3.7). Em particular, quando $q_\tau = 1$ e $q_\sigma = 0$, os indivíduos da sub-rede τ estão totalmente antiparalelos entre si e os indivíduos da classe σ estão totalmente paralelos entre si.

Através do cálculo do cumulante de quarta ordem de Binder para cada sub-rede foi possível determinar os valores dos ruídos críticos em todo o espaço de fase do sistema. Encontramos desta maneira não somente as transições que ocorrem para o sistema entre as regiões I e II do diagrama de fases, mas conseguimos encontrar os limites para as regiões IV e V. Assim como o caso da sub-rede τ, a sub-rede σ

apresentou possuir transições de fase para a magnetização em $q_\tau = q_\tau^* = 0.075 \pm 0.001$, quando $q_\sigma \in [0; 1]$.

Ao definirmos e estudarmos a correlação entre a medida de unanimidade entre as classes, que é a magnetização, vimos que esta grandeza apresenta um máximo e fica mais estreita (*sharp*) com o aumento do tamanho do sistema. Na figura 4.25 vimos que quando $q_\tau > 0.075$ a correlação e a média $\langle m_\sigma m_\tau \rangle$ coincidem, não dependendo do tamanho do sistema, portanto, nesta região a opinião de uma classe de indivíduos independe da opinião da outra.

Estudamos em detalhes a dependência das grandezas físicas citadas anteriormente como função do tamanho do sistema. Mostramos que as magnetizações do sistema quando colocadas em função do inverso do tamanho do lado L para um valor de q_σ fixo, em particular $q_\sigma = 0$, apresentam um valor finito quando $q_\tau < 0.075$. Enquanto que para $q_\tau > 0.075$ os valores das magnetizações de ambas as sub-redes no limite termodinâmico vale zero, indicando uma transição de fase quando $q_\tau = 0.075$.

Por meio do estudo da dependência das magnetizações e das susceptibilidades com o tamanho do sistema, conseguimos sugerir, calcular e confirmar os valores dos expoentes críticos associados às transições destas grandezas na mudança da região I para a região II do diagrama de fases. Não detectamos mudanças significativas nestes expoentes quando mantivemos $q_\tau^* = 0.075$ enquanto fazíamos de q_σ^* um parâmetro. A robustez do valor destes expoentes caracterizou que a classe de universalidade do sistema é do tipo Ising.

Para trabalhos futuros, sugerimos a análise mais detalhada das regiões IV e V do diagramas de fases, como o cálculo dos respectivos expoentes críticos. Outra sugestão é a retirada ao acaso de alguns indivíduos da sub-rede τ, ou diluição nesta sub-rede. Se considerarmos o caso em que os agentes da classe τ são uma classe de minoritária da população, como artistas de TV ou músicos, que apesar de estarem em menor número, influenciam de maneira bastante significativa grande parte de uma população. Alguns resultados nesta direção já foram obtidos, dois deles estão ilustrados nas figuras 5.1 e 5.2. Nestes gráficos, construímos cada sub-rede com 10000 sítios e diluímos 30% dos indivíduos da classe τ.

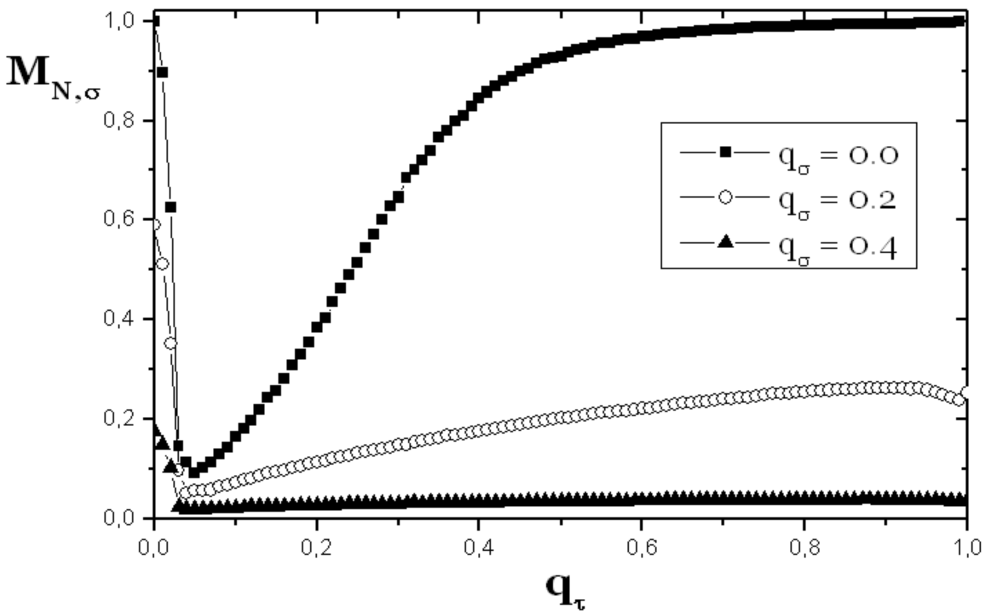

Figura 5.1. Gráfico da magnetização dos agentes da classe σ em função do ruído q_τ com uma fração igual a 30% de diluição do número de indivíduos da classe τ. Os gráficos foram obtidos para $N = 10000$.

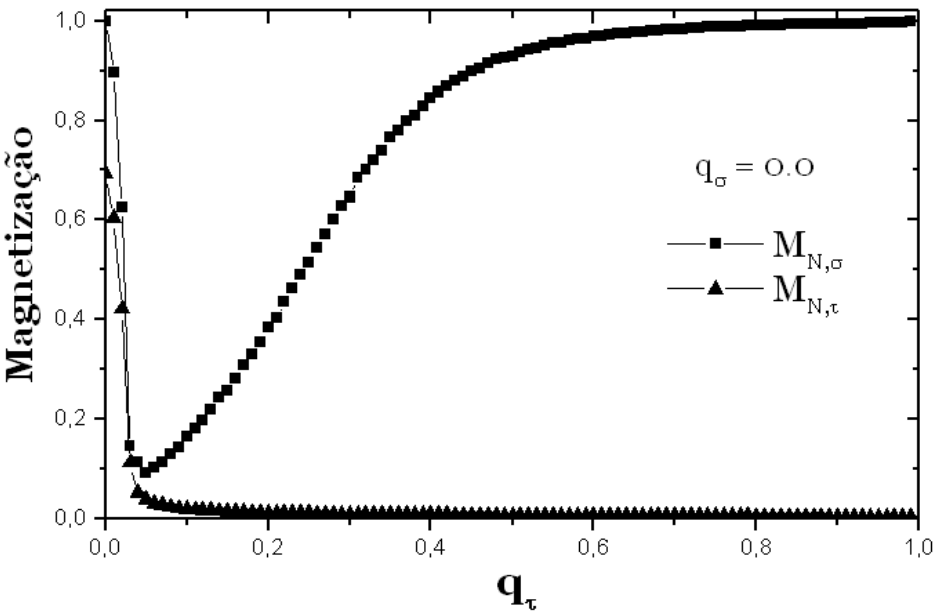

Figura 5.2. Gráfico comparativo entre as magnetizações dos agentes da classe σ e da classe τ para $q_\sigma = 0$ e com 30% de diluição no número de indivíduos da classe τ. Os gráficos foram obtidos para $N = 10000$.

Pela análise dos gráficos anteriores, notamos que a classe σ se ordena mesmo quando o valor do ruído da outra classe, q_τ, aumenta. Este resultado indica que a influência da sub-rede τ é mais fraca do que no caso onde não há diluição. Perceba que este ordenamento dos indivíduos da classe σ limita-se a uma fração quando existe ruído nesta sub-rede.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **D. Stauffer,** *Econophysics – A new area for computational statistical physics?* International Journal of Modern Physics C. 2000, Vol. 11, p. 1081.

[2] **H. E. Stanley, L. A. N. Amaral, D. Cunning, P. Gopikrishnan, Y. Lee and Y. Liu,** *Econophysics: Can physicists contribute to the science of economics?* Physica A. 1999, Vol. 269, p. 156.

[3] **N. Wessel, J. Kurths, W. Ditto and R. Bauernschmitt**, *Introduction: cardiovascular physics*. CHAOS. 2007, Vol. 17, p. 015101.

[4] **R. Forsythe, T. Rietz, R. Myerson and R. Weber,** *An experimental study of voting rules and polls in three-candidate elections*. International Journal of Game Theory. 1996, Vol. 25, p. 355.

[5] **D. Stauffer,** *Sociophysics simulations*. Computing in Science and Engineering. 2003, 5, 71–75.

[6] **D. Stauffer,** *Monte Carlo simulations of Sznajd models*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2001, Vol. 5, p. 1.
(http://www.soc.surrey.ac.uk/JASSS/5/1/4.html)

[7] **R. Hegselmann and U. Krause,** *Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis, and simulation.* Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2002, Vol. 5, p. 3. (http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/3/2.html).

[8] **G. Deffuant, F. Amblard, G. Weisbuch and T. Faure,** *How can extremism prevail? A study based on the relative agreement interaction model*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2002, Vol 5, p. 4.
(http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/4/1.html).

[9] **A. S. Elgazzar,** *Applications of small-world networks to some socio-economic systems*. Physica A. 2003, Vol. 324, p. 402.

[10] **P. Ball,** *The physical modelling of society: a historical perspective*. Physica A. 2002, Vol. 314, p. 1.

[11] **C. M. Bordogna and E. V. Albano,** *Statistical methods applied to the study of opinion formation models: a brief overview and results of a numerical study of a model based on the social impact theory*. Journal of Physics: Condensed Matter. 2007, Vol. 19, p. 065144.

[12] **F. Schweitzer,** *Self-organization of complex structures: from individual to collective dynamics*. Amsterdam: Gordon and Breach, 1997.

[13] **A. T. Bernardes, D. Stauffer and J. Kertesz,** *Election results and the Sznajd model on Barabasi network*. The European Physical Journal B. 2002, Vol. 25, p. 123.

[14] **J. Sznajd and K. Sznajd-Weron,** *Opinion evolution in closed community*. International Journal of Modern Physics C. 2000, Vol. 11, p. 1157.

[15] **F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. N. Amaral, H. E. Stanley and Y. Åberg,** *The web of human sexual contacts*. Nature, 2001, Vol. 411, p. 907.

[16] **A. Loettgers,** *Getting abstract mathematical models in touch with nature*. Science in Context. 2007, Vol. 20 (1), p. 97.

[17] **R. Albert, H. Jeong and A. Barabási,** *Diameter of the world-wide web*. Nature. 1999, Vol. 401, p. 130.

[18] **M. Faloutsos, P. Faloutsos and C. Faloutsos,** *On power-law relationships of the internet topology*. Computer Communications Review. 1999, Vol. 29, p. 251.

[19] **J.A. Hołyst, K. Kacperski and F. Schweitzer,** *Social impact models of opinion dynamics.* Annual Reviews of Computational Physics IX. 2001, p. 275.

[20] **M. C. Gonzalez, A. O. Sousa and H. J. Herrmann,** *Opinion formation on a deterministic pseudo-fractal network.* International Journal of Modern Physics C. 2004, Vol. 15, p. 45.

[21] **S. Galam, B. Chopard, A. Masselot and M. Droz,** *Competing species dynamics: Qualitative advantage versus geography.* The European Physical Journal B. 1998, Vol. 4, p. 529.

[22] **S. Galam and J. D. Zucker,** *From individual choice to group decision-making.* Physica A. 2000, Vol. 287, p. 644.

[23] **S. Galam,** *Minority opinion spreading in random geometry.* The European Physical Journal B. 2002, Vol. 25, p. 403.

[24] **S. Galam,** *Modelling rumors: the no plane Pentagon French hoax case.* Physica A. 2003, Vol. 320, p. 571.

[25] **G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard and G. Weisbuch,** *Mixing beliefs among interacting agents.* Advances in Complex Systems. 2000, Vol. 3, p. 87.

[26] **G. Weisbuch, G. Deffuant, F. Amblard and J. P. Nadal,** *Meet, discuss and segregate!* Complexity. 2002, Vol. 7, p. 55.

[27] **K. Sznajd-Weron,** *Controlling simple dynamics by a disagreement function.* Physics Review E. 2002, Vol. 66, p. 046131.

[28] **K. Sznajd-Weron and J. Sznajd,** *A simple model of price formation.* International Journal of Modern Physics C. 2002, Vol. 13, p. 115.

[29] **F. Slanina and H. Lavicka,** *Analytical results for the Sznajd model of opinion formation.* The European Physical Journal B. 2003, Vol. 35, p. 279.

[30] **D. Stauffer, A. O. Sousa and S. M. de Oliveira,** *Generalization to square lattice of sznajd sociophysics model.* International Journal of Modern Physics C. 2000, Vol. 11, p. 1239.

[31] **D. Stauffer,** *The Sznajd model of consensusbuilding with limited persuasion.* International Journal of Modern Physics C. 2002, Vol. 13, p. 315.

[32] **D. Stauffer,** *Percolation and Galam theory of minority opinion spreading.* International Journal of Modern Physics C. 2002, Vol. 13, p. 975.

[33] **C. Castellano, M. Marsili and A. Vespignani,** *Nonequilibrium phase transition in a model for social influence.* Physical Review Letters. 2000, Vol. 85, p. 3536.

[34] **D. Vilone, A. Vespignani and C. Castellano,** *Ordering phase transition in the one-dimensional Axelrod model.* The European Physical Journal B. 2002, Vol. 30, p. 399.

[35] **K. Klemm, V. M. Eguiluz, R. Toral and M. San Miguel,** *Nonequilibrium transitions in complex networks: A model of social interaction*. Physical Review E. 2003, Vol. 67, p. 026120.

[36] **K. Klemm, V.M. Eguiluz, R. Toral and M. San Miguel,** *Globalization, polarization and cultural drift.* J. Econom. Dynam. Control. 2005, Vol. 29, p. 321.

[37] **P. L. Krapivsky and S. Redner,** *Dynamics of majority rule in two-state interacting spin systems.* Physical Review Letters. 2003, Vol. 90, p. 238701.

[38] **M. Mobilia,** *Does a single zealot affect an infinite group of voters?* Physical Review Letters. 2003, Vol. 91, p. 028701.

[39] **H. C. Tuckwell and R. J. Williams,** *Some properties of a simple stochastic epidemic model of SIR type*. Mathematical Biosciences. 2007, Vol. 208, p. 76.

[40] **V. Radosavljević and B. Jakovljević,** *Bioterrorism: types of epidemics, new epidemiological paradigm and levels of prevention*. Public Health. 2007, Vol. 121, p. 549.

[41] **S. M. Raimundo, H. M. Yang and A. B. Engel,** *Modelling the effects of temporary immune protection and vaccination against infectious diseases*. Applied Mathematics and Computation. 2007, Vol. 189, p. 1723.

[42] **I. Avramov,** *Kinetics of distribution of infections in networks*. Physica A. 2007, Vol. 379, p. 615.

[43] **R. Axelrod,** *The dissemination of culture: a model with local convergence and global polarization. J. Conflict Res.* 1997, Vol. 41, p. 203. (reprinted in R. Axelrod, The Complexity of Cooperation, Princeton University Press, Princeton, 1997).

[44] **M. J. Oliveira,** *Isotropic majority-vote model on a square lattice*. Journal of Statistical Physics. 1992, Vol. 66, p. 273.

[45] **K. Sznajd-Weron and J. Sznajd,** *Who is left, who is right?* Physica A. 2005, Vol. 351, p. 593.

[46] **S. Galam,** *Contrarian deterministic effects on opinion dynamics: "the hung elections scenario"*. Physica A. 2004, Vol. 333, p. 453.

[47] **D. Stauffer and S. A. Sá Martins,** *Simulation of Galam's contrarian opinions on percolative lattices*. Physica A. 2004, Vol. 334, p. 558.

[48] **T. Meyssan,** *L'Effroyable Imposture (The Frightening Fraud)*. Paris : Carnot, 2002. (http://www.asile.org/citoyens/numero13/pentagone).

[49] **S. Foucart and S. Mandard,** *Internet véhicule une rumeur extravagante sur le 11 septembre,* 03 21, 2002, Le Monde.

[50] **J. Guisnel and G. Dasquié,** *L' Effroyable Mensonge (The Frightening Lie).* Paris : La découverte, 2002.

[51] **K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral and M. San Miguel,** *Role of dimensionality in Axelrod's model for the dissemination of culture*. Physica A. 2003, Vol. 327, p. 1.

[52] **C. Kittel,** *Introdução à Física do Estado Sólido.* 8ª Edição. Rio de Janeiro : Editora LTC, 2006.

[53] **D. J. Watts and S. H. Strogatz,** *Collective dynamics of 'small-world' networks*. 1998, Nature, Vol. 393, p. 440.

[54] **M. E. J. Newman,** *The structure and function of complex networks.* SIAM Review. 2003, Vol. 45(2), p. 167.

[55] **R. Albert and A. Barabási,** *Statistical mechanics of complex networks.* Reviews of Modern Physics. 2002, Vol. 74, p. 47.

[56] **R. Albert and A. Barabási,** *Emergence of scaling in random networks*. Science, 1999, Vol. 286, p. 509.

[57] **Luiz F. C. Pereira and F. G. Brady Moreira,** *Majority-vote model on random graphs.* Physical Review E. 2005, Vol 71, p. 016123.

[58] **Luiz F. C. Pereira,** *Diagrama de fases e expoentes críticos do modelo do voto da maioria em grafos aleatórios.* Tese de Mestrado. Departamento de Física – UFPE, Recife, 2005.

[59] **N. Metropolis,** *The Monte Carlo method*. Journal of the American Statistical Association. 1949, Vol. 44, p. 335.

[60] **D. W. Heermann and K. Binder,** *"Monte Carlo simulation in statistical Physics"*. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[61] **G. S. Fishman,** *Monte Carlo concepts, algorithms, and applications*. New York : Springer, 1996.

[62] **N. Metropolis,** *The beginning of the Monte Carlo method*. Los Alamos Science Special Issue. 1987, p. 125.

[63] **I. Sobol,** *O Método de Monte Carlo*. Moscou : Mir, 1972. (Traduzido para o português em 1983).

[64] **D. Chandler,** *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. New York : Oxford University Press, 1987.

[65] **J. Adler,** *Critical temperatures of the d = 3, s = 1/2 effect of confluent corrections to scaling Ising model; the effect of confluent corrections to scaling*. Journal of Physics A: Mathematical and General. 1983, Vol. 16, p. 3585.

[66] **A. Aharony and M. E. Fisher,** *Non linear scaling fields and corrections to scaling near criticality*. Physical Review B (Condensed Matter). 1983, Vol. 27, p. 4394.

[67] **N. A. Alves, B. A. Berg and R. Villanova,** *Ising-model Monte Carlo simulations: Density of states and mass gap*. Physical Review B (Condensed Matter). 1990, Vol. 41, p. 383.

[68] **J. Adler and G. Enting,** *The two-dimensional spin-1 Ising system and related models*. J. Phys. A: Math. Gen. 1984, Vol. 17, p. 2233.

[69] **H. J. Maris and L. P. Kadanoff,** *Teaching the renormalization group.* The American Journal of Physics, 1978, p. 652.

[70] **P. Böni, M. E. Chen and G. Shirane,** *Comparison of the critical magnetic scattering from the Heisenberg system EuO with renormalization-group theory.* Physical Review B (Condensed Matter). 1987, Vol. 35, p. 8449.

[71] **H. E. Stanley,** *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena.* Oxford : Oxford University Press, 1971.

[72] **J. M. Yeomans,** *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Oxford: Claredon Press, 1992.

[73] **D. P. Landau,** *Computer simulation studies of critical phenomena.* Physica A. 1994, Vol. 205, p. 41.

[74] **R. K. Pathria,** *Statistical Mechanics.* 2ª Edição. Oxford : Elsevier, 1996. p. 336.

[75] **D. P. Landau and K. Binder,** *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics.* New York : Cambridge University Press, 2003.

[76] **K. Binder,** *Finite size scaling analysis of Ising model block distribution functions.* Zeitschrift für Physik B. 1981, Vol. 43, p. 119.

[77] **L. Onsager.** *Crystal Statistics. I. A two-dimensional model with order-disorder transition.* Physical Review. 1944, Vol. 65, p. 117.

[78] **G. Grinstein, C. Jayaparakash and Yu He,** *Statistical Mechanics of probabilistic cellular automata.* Physical Review Letters. 1985, Vol. 55, p. 2527.

[79] **M. Gitterman,** *Small-world phenomena in physics: the Ising model.* Journal of Physics A: Mathematical and General. 2000, Vol. 33, p. 8373.

[80] **A. Pekalski,** *Ising model on a small-world network.* Physical Review E. 2001, Vol. 64, p. 057104.

[81] **C. P. Herrero,** *Ising model in small-world networks.* Physical Review E. 2002, Vol. 65, p. 066110.

[82] **A. Barrat and M. Weigt,** *On the properties of small-world network models.* European Physical Journal B. 2000, Vol. 13, p. 547.

[83] **P. R. A. Campos, V. M. de Oliveira and F. G. B. Moreira,** *Small-world effects in the majority-vote model.* Physical Review E. 2003, Vol. 67, p. 026104.

[84] **M. A. Santos and S. Teixeira,** *Anisotropic voter model.* Journal of Statistical Physics. 1995, Vol. 78, p. 963.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo