

FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
BASEADA NA MECÂNICA DO MEIO CONTÍNUO PARA NÃO – LINEARIDADE
GEOMÉTRICA

Flavio Cezario

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Antônio Fontes Santiago, D.Sc.

Prof. Roberto Fernandes de Oliveira, D.Sc.

Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.

Prof. Fernando Amorim de Paula, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2004

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

CEZARIO, FLAVIO

Formulação Clássica do Método dos Elementos de Contorno Baseada na Mecânica do Meio Contínuo para Não – Linearidade Geométrica [Rio de Janeiro] 2004

XII, 74 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 2004).

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Não – Linearidade Geométrica
 2. Método dos Elementos de Contorno
- I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

A **Deus**, eterno companheiro,
e aos meus **Pais**, amigos de jornada.

AGRADECIMENTOS

Neste momento em que uma grande realização está prestes a acontecer, difícil é suportar a tamanha satisfação que me invade a alma, sem a companhia daqueles que tudo enfrentaram comigo durante este caminho árduo, mas compensador. A estes, teria que oferecer o que mais tenho de precioso, meus melhores sentimentos, mas as palavras nem sempre são suficientes para demonstrá-los em sua pureza. Tento mesmo assim.

A Deus, a presença nos momentos de tristeza, de desespero, de medo, mas também nos de alegria, de satisfação, de vitória.

Aos professores Santiago e Roberto, a dedicação, a paciência, o exemplo, a crença, a honestidade e a amizade que me deram nestes dois anos e meio de trabalho, estudo e pesquisa. A companhia de vocês me rendeu um ticket para um trem chamado FUTURO. Muito obrigado!

Aos demais professores do mestrado, Fernando, Taborda, Telles, Webe, Carrer, Breno, aquele abraço!

Aos meus colegas de mestrado, Jonylson, os dois Brunos, Gabriela, Luciano, Vivian, Roberta e os demais, que aqui não cito, mas que não há como esquecer-los, um muito obrigado pela convivência e pelas lutas diárias.

Ao Leonardo, amigo de fé e irmão camarada, valeu! Valeu pela paciência e pela ajuda em todos os momentos do mestrado. Valeu!

Aos amigos Danilo e Paulo, companheiros de graduação, companheiros de vida, um abraço forte por tudo o que foi compartilhado desde o dia em que nos conhecemos.

Aos amigos do peito, Carlos, Rubens, Agostinho e Eduardo, pela paciência nos dias em que deixamos de ter aquele noitada, aquele programa. Um abraço forte!

E por fim, aqueles que me tem em suas orações e em seus corações. Aos meus pais, à minha namorada e à minha sogra, minha eterna gratidão e meu carinho pelas energias, pelos conselhos e pelo amor que me ofertam todos os dias.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
NA MECÂNICA DO MEIO CONTÍNUO PARA NÃO – LINEARIDADE
GEOMÉTRICA

Flavio Cezario

Agosto/2004

Orientadores: José Antônio Fontes Santiago
Roberto Fernandes de Oliveira

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho consiste de uma análise elástica bidimensional em problemas contendo deformações específicas finitas e grandes deslocamentos, usando o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Primeiramente apresentamos os tensores usados na formulação Lagrangeana da Mecânica do Meio Contínuo, necessários para a elaboração do MEC em problemas de elasticidade envolvendo não linearidade geométrica. Neste trabalho adotamos a lei de Hooke e a solução fundamental de Kelvin.

Em seguida descrevemos as técnicas numéricas elaboradas para a obtenção da solução através de um processo iterativo, necessário na implementação numérica do MEC. Para estabelecermos a formulação clássica do método na sua forma matricial é utilizado o método da colocação.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CLASSIC FORMULATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN
MECHANICS OF CONTINUUM MEDIUM FOR GEOMETRICAL NON –
LINEARITY

Flavio Cezario

August/2004

Advisors: José Antônio Fontes Santiago
Roberto Fernandes de Oliveira

Department: Civil Engineering

The present work deals with the analysis of two dimensional elastic problems with finite strains and large displacements by the Boundary Elements Method (BEM).

We present the tensors used in the Lagrangean formulation of Continuum Mechanics. These tensors are employed in formulation of BEM for elastic problems with geometric non-linearities. In this work we adopt the Hooke's law and the Kelvin's fundamental solution.

Afterwards, we describe the numerical techniques in order to obtain the solution through an iterative process, necessary in the numerical implementation of BEM. The Collocation Method is used to establish the matrices of the classical formulation of the method.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - <u>INTRODUÇÃO</u> -----	1
CAPÍTULO II - <u>DEFINIÇÕES TEÓRICAS NA MECÂNICA DO MEIO CONTÍNUO</u>	
II.1 - Mecânica do Meio Contínuo -----	3
II.2 - Elasticidade Finita -----	5
II.2.1 - Tensor Gradiente da Deformação -----	5
II.2.2 - Tensor de Deformações de Lagrange -----	7
II.2.3 - Tensores de Tensões e as Equações Governantes do Problema -----	8
II.3 - Equações Incrementais -----	11
CAPÍTULO III - <u>FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MEC</u>	
III.1 - Formulação do MEC Baseada na Mecânica do Meio Contínuo -----	14
III.2 - Forma Discretizada do MEC -----	21
CAPÍTULO IV - <u>PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS</u>	
IV.1 – Introdução -----	26
IV.2 - Avaliação das Integrais de Contorno -----	27
IV.3 - Avaliação da Integral de Domínio -----	27
IV.3.1 – Células Triangulares Lineares -----	28
IV.3.2 – Termos do Vetor Não-Linear -----	29
IV.3.3 – Integração Numérica -----	31
IV.4 – Processo Incremental e Iterativo -----	35
CAPÍTULO V – <u>EXEMPLOS</u>	
V.1 – Chapa quadrada sujeita a tração simples -----	39

V.2 – Cilindro vazado sujeito a pressões internas -----	46
CAPÍTULO VI - <u>CONCLUSÕES E SUGESTÕES FINAIS</u> -----	52
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS -----	54
APÊNDICE A -----	56
APÊNDICE B -----	68

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Deformação de um elemento infinitesimal -----	5
Figura 2 – Representação gráfica dos tensores de tensão de Piola-Kirchhoff -----	8
Figura 3 – Representação gráfica da deformação de um corpo genérico -----	12
Figura 4 – Corpo genérico em sua configuração inicial -----	15
Figura 5 – Corpo genérico contido no corpo padrão -----	15
Figura 6 – Célula triangular parametrizada -----	28
Figura 7 – Célula triangular singular -----	32
Figura 8 – Célula triangular não singular -----	34
Figura 9 – Chapa quadrada sujeita a tração simples -----	39
Figura 10 – Modelo 1 de discretização -----	40
Figura 11 – Modelo 2 de discretização -----	41
Figura 12 – Modelo 3 de discretização -----	41
Figura 13 – Erro relativo para cada número de incremento analisado -----	43
Figura 14 – Deformação não-linear -----	44
Figura 15 – Convergência para análise c/ DEA -----	45
Figura 16 – Convergência para análise s/ DEA -----	45
Figura 17 – Cilindro vazado sujeito a pressões internas -----	46
Figura 18 – Modelo 1 de discretização -----	47
Figura 19 – Modelo 2 de discretização -----	47
Figura 20 – Modelo 3 de discretização -----	48
Figura 21 – Comportamento não linear -----	49
Figura 22 – Convergência para análise c/DEA -----	50
Figura 23 – Convergência para análise s/DEA -----	51

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Algoritmo para implementação da não-linearidade geométrica -----	36
Tabela 2 – Deslocamentos obtidos para os três modelos apresentados -----	42
Tabela 3 – Deslocamentos obtidos para os três modelos apresentados -----	48

LISTA DE SÍMBOLOS

- [A] Matriz dos coeficientes do sistema do Método dos Elementos de Contorno
- A Área da célula triangular.
- a_i Valor obtido das coordenadas em x dos vértices da célula triangular.
- B** Tensor deformação de Cauchy – Green esquerdo $\rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$.
- \mathbf{b}^0 Força de volume no domínio deformado, referenciada ao indeformado.
- \mathbf{b}^* Força de volume no domínio infinito modelada pela função delta de Dirac.
- b_i Valor obtido das coordenadas em y dos vértices da célula triangular.
- C** Tensor deformação de Cauchy – Green direito $\rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$.
- \mathbf{C}^0 Tensor elástico de 4ª ordem.
- [c] Matriz obtida em função do contorno do problema analisado.
- DEA Deformação do elemento de área.
- da Elemento de área deformado.
- dA Elemento de área indeformado.
- dP** Vetor força infinitesimal.
- $\mathbf{d}\tilde{\mathbf{P}}$ Vetor força infinitesimal relacionado ao vetor **dP** pelo tensor **F** $\rightarrow \mathbf{d}\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{dP}$
- dx** Vetor infinitesimal espacial.
- dX** Vetor infinitesimal material.
- ds Módulo do vetor infinitesimal espacial $\rightarrow ds = |\mathbf{dx}|$.
- dS Módulo do vetor infinitesimal material $\rightarrow dS = |\mathbf{dX}|$.
- E** Tensor deformação de Green ou Lagrange.
- ${}^k_n E$ Erro calculado na iteração n do incremento $k = t$.
- \mathcal{E} Espaço euclidiano.
- F** Tensor gradiente da deformação $\rightarrow \mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}}$.
- \mathbf{F}^{-1} Inverso do tensor do gradiente da deformação $\rightarrow \mathbf{F}^{-1} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X}$.
- f** Vetor dos valores prescritos.
- [G] Matriz formada pela integração do deslocamento fundamental no contorno.
- G Módulo de elasticidade transversal.
- [H] Matriz formada pela integração da força de superfície fundamental no contorno.
- J Determinante do tensor **F** – Jacobiano da transformação.

k	Configurações do corpo.
\mathbf{M}	Vetor formado pela integração das componentes do vetor não-linear.
\mathcal{M}	Vetor não linear.
$\hat{\mathbf{N}}$	Vetor unitário normal externo ao contorno indeformado.
NC	Número de células.
NE	Número de elementos.
Nnc	Número de nós no contorno.
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor unitário normal externo ao contorno deformado.
n	Número de iterações.
P	Ponto qualquer na célula triangular.
\mathbf{p}	Força de superfície na configuração deformada.
\mathbf{p}^0	Força de superfície na configuração deformada, referenciada a indeformada.
\mathbf{p}^*	Força de superfície fundamental.
$\bar{\mathbf{p}}$	Força de superfície prescrita.
\mathbf{R}	Tensor rotação.
$R(\phi)$	Valor correspondente ao comprimento do vetor r em relação ao lado da célula triangular onde são distribuídos os pontos de Gauss para integração.
r	Distância entre o ponto fonte e o ponto campo.
\mathbf{T}	Tensor de tensões de Cauchy.
\mathbf{T}^*	Tensor de tensões de Cauchy no domínio infinito.
\mathbf{T}^0	1° Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff $\rightarrow \mathbf{T}^0 = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}$.
$\tilde{\mathbf{T}}$	2° Tensor de tensões de Piola-Kirchhoff $\rightarrow \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^0 (\mathbf{F}^{-1})^T$.
t	Tempo e número de incrementos.
\mathbf{u}	Vetor deslocamento.
\mathbf{u}^*	Deslocamento fundamental.
$\bar{\mathbf{u}}$	Deslocamento prescrita.
\mathbf{U}	Tensor elongação direito $\rightarrow \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$.
\mathbf{V}	Tensor elongação esquerdo $\rightarrow \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$.
\mathbf{X}	Vetor posição material.
X	Partículas ou pontos materiais (contínuo), e ou ponto fonte (MEC).
\mathbf{x}	Vetor posição espacial.

α, α_i	Ângulos representados na figura B-1, singularidade no contorno ($i = 1, 2$).
β	Ângulo entre dois elementos lineares no contorno - Figura B - 1.
χ	Variável qualquer utilizada para expressar uma quantidade incremental.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
Δ	Incremento de uma quantidade tensorial ou vetorial (quando precede um tensor e vetor).
$\delta(\xi, X)$	Delta de Dirac.
$\Delta \mathbf{x}$	Incremento do vetor formado pelos valores nodais de $\Delta \mathbf{u}$ e $\Delta \mathbf{p}^0$.
$\varepsilon, \varepsilon_i$	Raio do círculo centrado em ξ e componentes nas direções x e y (fig B-1).
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformação infinitesimal.
$\boldsymbol{\varepsilon}^*$	Tensor de deformação infinitesimal no domínio infinito.
ϕ, ϕ_i	Ângulos formados pelo vetor r e a direção x ($i = 1, 2, 3$) - (figs. 7 e 8).
$\boldsymbol{\Phi}^\Gamma$	Vetor das funções de interpolação do contorno.
$\boldsymbol{\Phi}^\Omega$	Vetor das funções de interpolação do domínio.
η_i	Coordenadas naturais (fig. 6) e funções de interpolação da célula triangular.
Γ	Contorno de um problema qualquer.
Γ^*	Contorno do domínio do problema infinito.
λ	Constante de Lamé.
μ	Constante de Lamé de valor igual a G .
ν	Coeficiente de Poisson.
θ	Ângulo representado na figura B - 1, singularidade no contorno.
ξ	Ponto fonte.
Ω	Domínio de um problema qualquer.
Ω^*	Domínio do problema infinito.
Ψ	Deslocamento fundamental em função do ângulo ϕ .
∇	Operador diferencial em coordenadas materiais.
∇_x	Operador diferencial em coordenadas espaciais.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A análise linear de sólidos já é bastante comum no campo da engenharia estrutural, seus princípios e equações governantes foram estabelecidos e aprimorados ao longo do tempo, e hoje somos capazes, com relativa facilidade, de avaliar um problema elástico de grande complexidade. Contudo não podemos dizer que todos os estudos neste campo se encontram esgotados, pois o avanço a novos campos do conhecimento do comportamento estrutural continua a ser realizado. A análise não-linear é um destes campos, ainda contendo descobertas a serem feitas e repleto de informações sobre o comportamento dos corpos sólidos.

No trabalho que apresentamos a seguir, decidimos acrescentar algo a este ramo do conhecimento estrutural e intentamos desenvolver uma formulação teórica e numérica para o estudo do comportamento elástico não-linear (não-linearidade geométrica) bidimensional de corpos sólidos usando o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Desta forma, começamos com uma formulação teórica baseada na Mecânica do Meio Contínuo, considerando como conceitos básicos o surgimento de grandes deslocamentos e deformações finitas, em que não é mais válida a imposição do estado de equilíbrio à configuração indeformada do sólido como nos casos de comportamento linear. Em seguida, partindo do princípio que estas hipóteses dificultam uma solução analítica para a análise do problema, quando o mesmo começa a se tornar mais complexo, desenvolvemos uma formulação numérica incremental e iterativa para o MEC, que aliada a uma implementação computacional resolve de forma aproximada, mas eficiente, o nosso problema.

Historicamente, segundo PRIETO *et al.* (1998) estudos neste assunto começaram a aparecer em 1982 com a publicação de NOVATI e BREBBIA (1982), usando a Formulação Lagrangeana Total (ou *Total Lagrangean Formulation*, que considera variáveis totais referentes ao estado inicial ou indeformado) para problemas elásticos e estáticos geometricamente não lineares e lei constitutiva baseada na lei de Hooke. Um ano depois apareceu outro trabalho publicado por CHANDRA e MUKHERJEE (1983) usando a Formulação Lagrangeana Atualizada (ou *Updated Lagrangean Formulation*,

com variáveis calculadas em função do último estado de deformação) para problemas elastoplásticos e viscoelásticos. Não menos importante que os dois primeiros, JIN *et al.* (1988) reconsideraram os problemas elastoplásticos e apresentaram uma formulação Lagrangeana Atualizada Aproximada (ou *Updated Lagrangean Approach Formulation*) que levou a uma equação do trabalho virtual não-linear em cada incremento a qual era resolvida por iteração. E, um mais recente (PRIETO *et al.*, 1998), para problemas elásticos e estáticos utilizando a mesma formulação que NOVATI e BREBBIA (1982) utilizaram.

O presente estudo está organizado da seguinte forma: na formulação teórica iniciamos o desenvolvimento a partir da apresentação de vetores e tensores na Formulação Lagrangeana descritos pela Mecânica do Contínuo. Em seguida apresentamos as relações deslocamento-deformação e tensão-deformação, gerando assim as equações que regem os estados de equilíbrio do corpo durante sua movimentação. Para terminarmos o primeiro passo fornecemos uma formulação incremental a partir dos tensores e das relações já descritas. No segundo passo, desenvolvemos a formulação numérica partindo do Teorema da Reciprocidade (BREBBIA *et al.*, 1984), aplicado ao problema equacionado matematicamente pela teoria traçada em comparação com um corpo infinito padrão, e geramos as equações analíticas do MEC para problemas de não linearidade geométrica empregando soluções fundamentais de Kelvin. Transformando o problema ora contínuo em discreto, apresentamos a metodologia para a sua implementação numérica, a partir do programa de análise elástica linear (BREBBIA *et al.*, 1984), e por fim, concluímos nosso trabalho, confrontando os resultados obtidos de problemas analisados, com os obtidos na literatura.

CAPÍTULO II

DEFINIÇÕES TEÓRICAS DA MECÂNICA DO MEIO CONTÍNUO

Neste capítulo, baseados na teoria da elasticidade finita, tópico da mecânica do meio contínuo, apresentamos as definições teóricas necessárias para o desenvolvimento da formulação do MEC. Assim, definimos os tensores e as equações que governam um corpo sólido que sofre grandes deformações elásticas.

II.1 - Mecânica do Meio Contínuo

Quando analisamos um problema qualquer (sólido e fluido) baseando-nos em conceitos da mecânica do meio contínuo, levamos em consideração sua formação contínua, ou seja, sem espaços vazios ou fendas, desconsiderando sua constituição molecular. Trabalhando sob este conceito podemos, também, supor que todas as funções matemáticas que entram na teoria são funções contínuas, exceto em um número finito de pontos do interior de superfícies que separam regiões de continuidade (MALVERN, 1969). Assim, a aplicação de sua teoria abrange um conjunto enorme de problemas, sendo capaz de avaliar distribuições não uniformes de tensões e concomitantemente visualizar facilmente o modelo físico, permitindo a análise matemática ser guiada por intuição (MALVERN, 1969). São nestes conceitos fundamentais que nos basearemos para modelar nosso problema e obtermos os grandes deslocamentos.

Os problemas analisados são vistos pela mecânica do contínuo como corpos materiais definidos como um conjunto de partículas ou pontos materiais X , os quais possuem uma correspondência biunívoca com os pontos de uma região regular $\Omega_t + \Gamma_t$ de um espaço Euclidiano \mathcal{E} . Estas regiões, quando relacionadas com os pontos materiais, referidos a uma origem fixa de um sistema de coordenadas escolhido, também são chamadas de configurações do corpo. A cada instante de tempo t há uma mudança de configuração, resultado de um deslocamento, que pode ser um movimento de corpo rígido, acompanhado ou não de deformação. MASE e MASE (1992), definem o movimento deste corpo como uma seqüência de deslocamentos contínuos no tempo

que carrega o conjunto de partículas X em várias configurações em um espaço estacionário.

Segundo MALVERN (1969), TRUESDELL (1965) apresenta quatro descrições do movimento de um corpo que são: material, referencial, espacial e relativa. Porém, como o presente trabalho enfoca as descrições referencial e espacial, definiremos apenas estas duas.

- Descrição referencial: considera como variáveis independentes o vetor posição \mathbf{X} das partículas em uma configuração referencial arbitrária escolhida, e o tempo t . Muito empregada em problemas de elasticidade, esta descrição recebe o nome de descrição Lagrangeana quando o tempo t é nulo. Podemos dizer que o corpo se encontra na configuração inicial ou indeformada e que esta configuração é escolhida como referencial. É a partir desta descrição que desenvolveremos este trabalho. Também é chamada de descrição material quando consideramos a partícula X através de seu vetor posição \mathbf{X} .
- Descrição espacial: considera como variáveis independentes o vetor posição \mathbf{x} , denominado vetor posição espacial da partícula X em um tempo t , e o tempo atual t . Esta descrição também é conhecida como descrição Euleriana e é muito empregada em problemas de mecânica dos fluidos. Apresentamos esta descrição porque tensores e vetores que serão apresentados em tópicos subsequentes estão nela descritos.

A partir das descrições acima definidas apresentamos a seguinte expressão:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (1)$$

que explicita o movimento, ou deformação de um corpo, através da relação entre as posições inicial ou referencial e a espacial ou atual de uma partícula ou de um conjunto delas que o constituem, definidas respectivamente pelos vetores \mathbf{X} e \mathbf{x} . A análise do problema de grandes deslocamentos abrange um conjunto de tensores que fornecem, cada um, informações importantes para o estudo detalhado do comportamento do corpo solicitado.

Podemos escrever uma expressão do deslocamento em função dos vetores posições material e espacial e ainda representá-lo através da figura 1, abaixo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad (2)$$

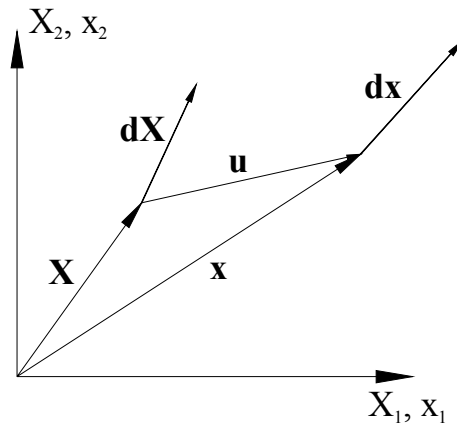


Figura 1 – Deformação de um elemento infinitesimal

onde \mathbf{u} representa o vetor deslocamento e, na figura 1, \mathbf{dX} representa um vetor infinitesimal material e \mathbf{dx} um vetor infinitesimal espacial.

II.2 - Elasticidade Finita

Iniciando o desenvolvimento deste tópico, caracterizando uma análise elástica finita, a mecânica do contínuo considera que as componentes do gradiente do deslocamento não são pequenas em comparação à unidade (MALVERN, 1969); portanto, o problema de caracterização das deformações ao estado inicial é mais difícil que no caso das pequenas deformações, tornando-se necessária uma análise mais rigorosa do problema. Como este trabalho objetiva uma análise bidimensional elástica no campo finito (deslocamentos, rotações e deformações finitas), far-se-á uso da Formulação Lagrangeana (descrição material) e todos os tensores serão apresentados nesta formulação. A representação simbólica usada será com letras maiúsculas (matrizes) e minúsculas (vetores) em negrito, com exceção de algumas entidades que serão definidas durante este texto. Desta forma, passemos à definição dos tensores da formulação Lagrangeana.

II.2.1 - Tensor Gradiente da Deformação

Como primeiro tensor desta formulação, o tensor gradiente da deformação \mathbf{F} , responsável pela quantificação das alterações no tamanho e na forma de um corpo,

devido ao movimento ou deformação (COIMBRA, 1978), é expresso como o gradiente das coordenadas espaciais $\nabla_{\mathbf{x}}$ de um vetor posição no tempo t , em relação à configuração indeformada (coordenadas materiais) ou inicial adotada, mostrado abaixo:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}}, \quad (3)$$

ou ainda, como o responsável pela seguinte operação:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (4)$$

onde o tensor opera uma transformação de um vetor infinitesimal material $d\mathbf{X}$ no ponto \mathbf{X} em um espacial $d\mathbf{x}$ no ponto \mathbf{x} na configuração deformada.

De acordo com MALVERN (1969), a importância do tensor \mathbf{F} é sua capacidade de fornecer mais informações sobre o movimento do que outros tensores da formulação, mas isto pode ser uma desvantagem, já que ele inclui tanto rotação como deformação, sendo necessário o emprego de uma equação constitutiva bem construída que não permita que seja gerada tensão durante uma rotação de corpo rígido: uma simples relação tensão-deformação linear e homogênea atende esta condição, e é esta que usaremos em nosso problema, como veremos mais à frente.

Outro tensor, também importante para o desenvolvimento deste trabalho, relacionado ao tensor \mathbf{F} da Formulação Lagrangeana, é chamado de tensor inverso do tensor gradiente da deformação \mathbf{F}^{-1} , na Formulação Euleriana, desde que $\det \mathbf{F} \neq 0$, expresso em relação às coordenadas espaciais, na seguinte forma:

$$\mathbf{F}^{-1} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X} \quad (5)$$

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}. \quad (6)$$

O determinante de \mathbf{F} é representado por:

$$J = \det \mathbf{F} \quad (7)$$

II.2.2 – Tensor de Deformações de Lagrange

Prosseguindo com as definições de tensores, o tensor deformação de Lagrange ou Green \mathbf{E} , definido como o responsável pela medida da mudança no comprimento de um elemento infinitesimal material $d\mathbf{X}$ do corpo analisado, é expresso da seguinte forma:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X}, \quad (8)$$

onde ds e dS representam, respectivamente, o módulo dos vetores $d\mathbf{x}$ e $d\mathbf{X}$:

$$ds = |d\mathbf{x}| \quad e \quad dS = |d\mathbf{X}|. \quad (9)$$

Utilizando-se desta última definição e da eq. (4) do tensor gradiente da deformação, chegamos, a partir da eq. (8), à seguinte expressão:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (10)$$

Nota-se que esta última equação introduz um novo tensor formado pelo produto $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Este tensor, representado por \mathbf{C} e chamado de tensor de Cauchy-Green direito, é simétrico e positivo definido. Desta forma, afirmamos que o tensor \mathbf{E} também o é. Associado ao tensor \mathbf{C} , temos o tensor de Cauchy-Green esquerdo \mathbf{B} , também simétrico, positivo definido, dado por $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$.

Para encontrarmos a expressão do tensor de deformações em função dos deslocamentos, como no caso infinitesimal, fazemos uso da eq. (2) e a substituímos na eq. (10), gerando, assim, a equação desejada. Então, temos:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}), \quad (11)$$

ou ainda, em coordenadas cartesianas:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}), \quad (12)$$

II.2.3 – Tensores de Tensões e as Equações Governantes do Problema

Quando trabalhamos com uma análise infinitesimal de um corpo, geramos as equações necessárias (de equilíbrio e constitutiva) e empregamos nas mesmas o tensor de tensões de Cauchy \mathbf{T} . Entretanto, nesta análise não há uma separação visível entre posições referenciais e espaciais, e portanto, tanto faz dizer que o tensor \mathbf{T} é referenciado à configuração indeformada ou deformada. Porém, quando a análise elástica é finita, o tensor \mathbf{T} é definido como um tensor simétrico relacionado a uma posição espacial \mathbf{x} . Desta forma, fica claro que as equações geradas a partir dele aplicam-se à configuração deformada.

O nosso estudo é baseado na formulação Lagrangeana, portanto, todos os tensores devem ser escritos nela, ou seja, em função de uma posição material \mathbf{X} . Por esta razão o emprego de \mathbf{T} não é correto. O primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff \mathbf{T}^0 (algumas vezes também chamado de tensor de tensões de Lagrange) (MALVERN, 1969), atende a esta necessidade.

A idéia básica deste tensor não é meramente uma mudança de variáveis (espaciais para materiais) (MALVERN, 1969). Podemos ilustrar seu significado através da figura 2:

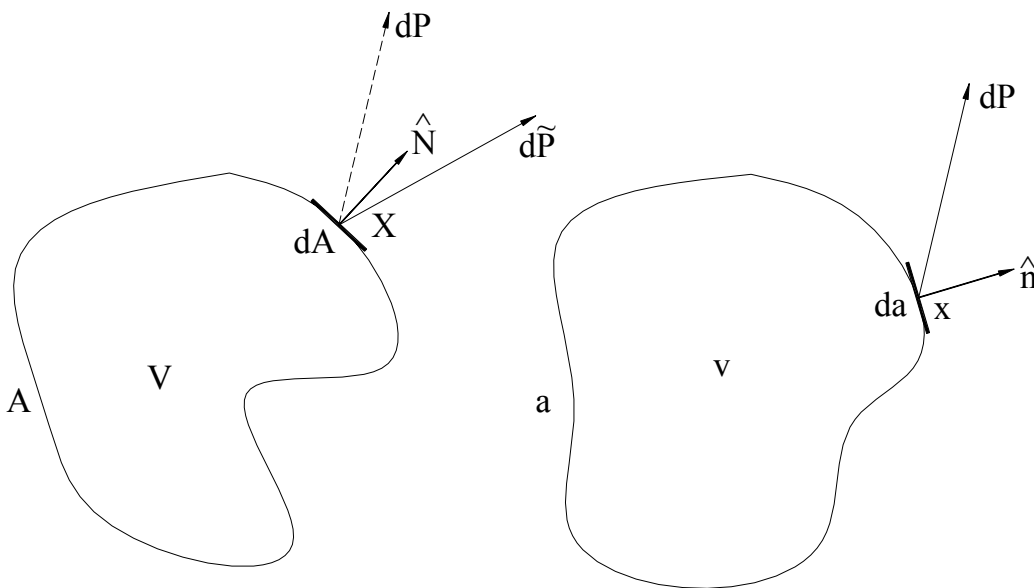


Figura 2 – Representação gráfica dos tensores de tensão de Piola-Kirchhoff

Segundo MALVERN (1969), o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff \mathbf{T}^0 fornece a força atual $d\mathbf{P}$ na área infinitesimal deformada da , mas é considerado por unidade de área infinitesimal indeformada dA e expressa a força em termos da normal $\hat{\mathbf{N}}$ para dA em X . Assim, podemos expressar esta relação da seguinte forma:

$$(\hat{\mathbf{N}} \mathbf{T}^0) dA = d\mathbf{P} = (\hat{\mathbf{n}} \mathbf{T}) da \quad (13)$$

Sabendo-se que a mudança de área, após a deformação, é dada por:

$$\hat{\mathbf{n}} da = J(\mathbf{F}^{-1})^T \hat{\mathbf{N}} dA, \quad (14)$$

podemos com o auxílio desta, obter, a partir da eq. (13), a expressão do tensor \mathbf{T}^0 como mostrada abaixo:

$$\mathbf{T}^0 = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}, \quad (15)$$

sendo $\hat{\mathbf{N}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ definidos, respectivamente, como os vetores unitários normais externos às superfícies do corpo nas configurações indeformada e deformada.

Utilizando este tensor aplicamos o Princípio da Conservação do Momentum Linear para um problema estático e geramos, como no caso linear, as seguintes equações de equilíbrio para o domínio e o contorno:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^0 + \mathbf{b}^0 = \mathbf{0}, \quad (16)$$

$$\mathbf{p}^0 = \hat{\mathbf{N}} \mathbf{T}^0. \quad (17)$$

Nestas equações os termos novos que se apresentam são definidos como: $\nabla \cdot \mathbf{T}^0$, o divergente do tensor \mathbf{T}^0 em coordenadas materiais; \mathbf{b}^0 , a força de volume que atua em um volume deformado, mas referenciada à configuração indeformada; \mathbf{p}^0 , a força de superfície que age em uma área do corpo deformado, porém referenciada à configuração indeformada.

O primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff apresenta um inconveniente: ele não é simétrico; este fato torna difícil o seu uso nas equações constitutivas com o tensor de deformação específica simétrico \mathbf{E} . Por esta razão, define-se o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff $\tilde{\mathbf{T}}$, simétrico, quando o tensor de Cauchy \mathbf{T} é simétrico (caso não polar). Este tensor conduz a uma forma mais complexa, mas mesmo assim, é o preferido para compor a formulação elástica finita (MALVERN, 1969).

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff encerra uma idéia um tanto diferente do tensor \mathbf{T}^0 . De acordo com MALVERN (1969), o tensor $\tilde{\mathbf{T}}$ fornece, ao invés da força $d\mathbf{P}$ em da , a força $d\tilde{\mathbf{P}}$ (fig. 2) relacionada à força $d\mathbf{P}$ na mesma forma que um vetor infinitesimal material $d\mathbf{X}$ em X é relacionado pela deformação ao correspondente vetor infinitesimal espacial $d\mathbf{x}$ em x . Assim, lembrando as equações (4) e (6), e ainda a eq. (14), podemos escrever as expressões para a força $d\tilde{\mathbf{P}}$ e o tensor $\tilde{\mathbf{T}}$ da seguinte forma:

$$(\hat{\mathbf{N}} \mathbf{T}^0) dA = d\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} (\hat{\mathbf{n}} \mathbf{T}) da = (\hat{\mathbf{n}} \mathbf{T}) (\mathbf{F}^{-1})^T da, \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^0 (\mathbf{F}^{-1})^T = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (19)$$

Concluindo este tópico, falta-nos citar a equação constitutiva, para completar as equações governantes do nosso problema. Esta equação é similar àquela utilizada para o problema elástico infinitesimal, somente sendo distinta no uso do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ao invés do tensor de tensões de Cauchy, pelos motivos já descritos anteriormente. Assim, expressamos a lei constitutiva da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^0 \mathbf{E}. \quad (20)$$

O tensor \mathbf{C}^0 é o mesmo utilizado pelas equações constitutivas dos problemas lineares. Elástico, linear, homogêneo e isótropo de quarta ordem, o tensor constante \mathbf{C}^0 pode ser equacionado pela seguinte expressão abaixo:

$$C_{ijkl}^0 = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (21)$$

sendo λ e μ as constantes de Lamé e δ_{ij} o delta de Kronecker.

II.3 - Equações Incrementais

Tendo em vista as últimas definições e a intenção de trabalharmos com problemas não lineares, necessitamos de um procedimento incremental. Sob o ponto de vista do procedimento incremental, o corpo se deforma sob a ação de solicitações externas e, a cada incremento, assume uma nova configuração que está em equilíbrio (PRIETO *et al.*, 1998). Usando um pseudo tempo t , embora trabalhemos com problemas elásticos e estáticos, podemos representar qualquer variável χ em dois instantes de tempo t e $t + \Delta t$, e sua quantidade incremental pode ser expressada como:

$$\Delta\chi = {}^{t+\Delta t}\chi - {}^t\chi. \quad (22)$$

Seguindo este raciocínio, também podemos representar um incremento de deslocamento,

$$\Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u} \quad (23)$$

e em seguida o deslocamento no incremento $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}. \quad (24)$$

A figura 3, a seguir, pode nos dar uma idéia das deformações de um corpo genérico em um procedimento incremental.

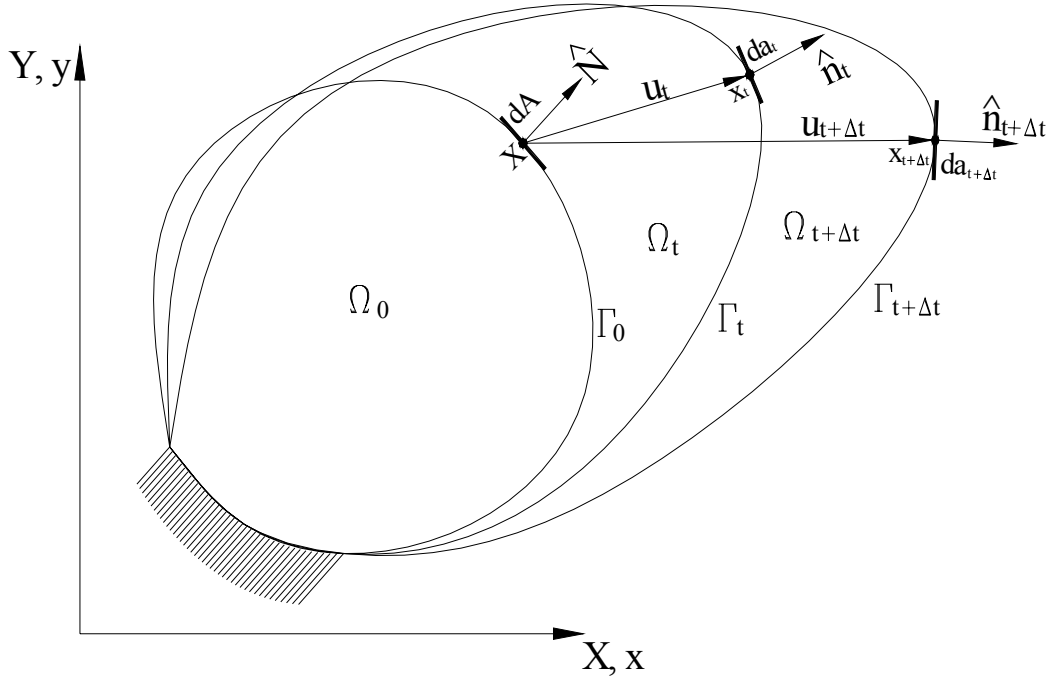


Figura 3 – Representação gráfica da deformação de um corpo genérico

Os deslocamentos incrementais, que não aparecem na figura, são valores intermediários entre uma configuração e outra, e são avaliados de forma iterativa; os deslocamentos permanecem constantes em cada iteração. Veremos mais à frente o funcionamento desses processos.

Da mesma maneira que fizemos com o deslocamento podemos fazer também com as forças de superfície e as equações governantes de equilíbrio no domínio e no contorno, a de compatibilidade e a constitutiva do problema, como se segue:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{p}^0 = {}^t\mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}^0 \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \Delta\mathbf{T}^0 + \Delta\mathbf{b}^0 = \mathbf{0}, \quad (26)$$

$$\Delta\mathbf{p}^0 = \mathbf{N}\Delta\mathbf{T}^0, \quad (27)$$

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\nabla\Delta\mathbf{u} + (\nabla\Delta\mathbf{u})^T + \nabla{}^t\mathbf{u}(\nabla\Delta\mathbf{u})^T + (\nabla{}^t\mathbf{u})^T \nabla\Delta\mathbf{u} + (\nabla\Delta\mathbf{u})^T \nabla{}^t\mathbf{u} \right), \quad (28)$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{C}^0 \Delta\mathbf{E}. \quad (29)$$

Um outro incremento que devemos representar, convenientemente, é a relação entre o 1º e 2º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, como se segue:

$$\Delta \mathbf{T}^0 = \Delta \tilde{\mathbf{T}} + \nabla^t \mathbf{u} \Delta \tilde{\mathbf{T}} + \nabla \Delta \mathbf{u} (\Delta \tilde{\mathbf{T}} + {}^t \tilde{\mathbf{T}}). \quad (30)$$

Feito isto, completamos a apresentação das equações que governam o problema, atendendo automaticamente a conservação da massa e o balanço de momentos. Seguimos no próximo tópico com a formulação clássica do Método dos Elementos de Contorno.

CAPITULO III

FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MEC

No capítulo precedente, apresentamos as equações governantes do problema elástico não linear, baseadas na teoria da Elasticidade Finita, de forma conveniente para o desenvolvimento da Formulação do MEC. Passamos agora à formulação do método e apresentamos sua forma contínua e discretizada, dividindo-a em dois tópicos.

III.1 – Formulação do MEC Baseada na Mecânica do Contínuo

O método dos elementos de contorno, como os demais métodos numéricos, é uma ferramenta poderosa no cálculo de problemas diversos. Sua utilização se torna imprescindível quando os problemas analisados alcançam um nível de complexidade que dificulta a obtenção da solução analítica. Assim, como parte do nosso interesse, o escolhemos como a ferramenta para a análise de problemas de não linearidade geométrica e definimos suas equações integrais nos parágrafos a seguir.

Semelhante às equações integrais para problemas lineares descritas por BREBBIA *et al.* (1984), as equações de contorno para o caso elástico não linear também são geradas a partir do Teorema da Reciprocidade. Desta forma, seguindo seus passos, definimos um corpo genérico $\Omega + \Gamma$ (fig. 4), na sua configuração inicial, em estado de equilíbrio, sob a ação de cargas ou deslocamentos prescritos, governado, agora, pelas equações incrementais já descritas da Formulação Lagrangeana no tópico precedente.

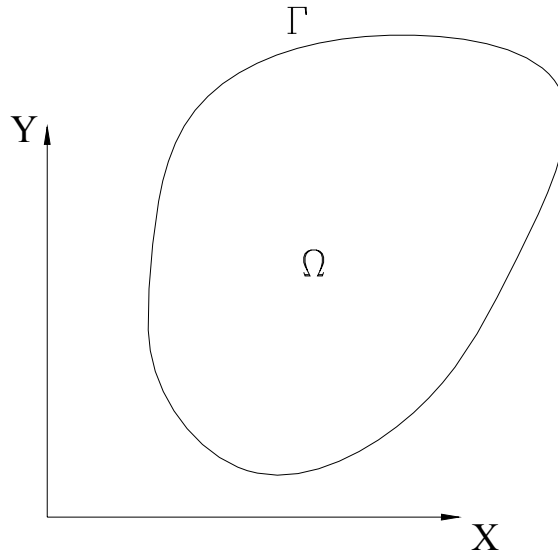


Figura 4 – Corpo genérico em sua configuração inicial

Como passo seguinte, supomos a existência de um corpo de domínio e contorno infinitos $\Omega^* + \Gamma^*$, que contém o corpo $\Omega + \Gamma$ (fig. 5).

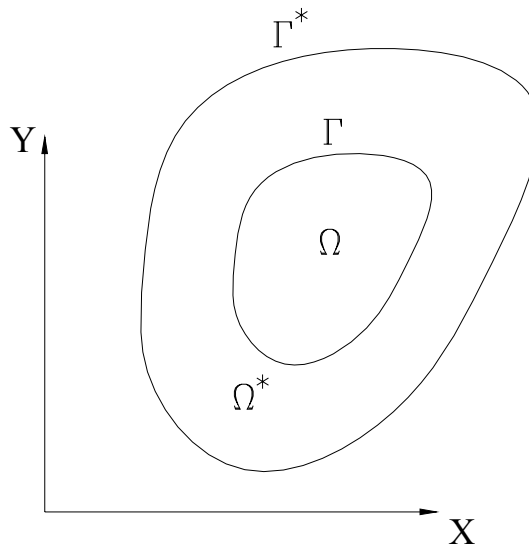


Figura 5 – Corpo genérico contido no corpo padrão

Este corpo, elástico, linear, homogêneo e isótropo é governado pelas mesmas equações da formulação elástica infinitesimal, descrita pela Mecânica do Meio Contínuo (MALVERN, 1969). Portanto, temos as equações lineares de equilíbrio, de deformação e constitutiva, respectivamente, governando o corpo $\Omega^* + \Gamma^*$, abaixo representadas:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^* + \mathbf{b}^* = \mathbf{0}, \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*)^T \right), \quad (32)$$

$$\mathbf{T}_{ij}^* = \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*. \quad (33)$$

A força de volume \mathbf{b}^* da equação (31), tal como na formulação elástica linear (BREBBIA *et al.*, 1984), representando uma força concentrada em um ponto ξ (denominado de ponto fonte), é modelada pela função delta de Dirac,

$$\delta(\xi, \mathbf{X}) = 0 \quad \text{se } \xi \neq \mathbf{X}, \quad (34)$$

$$\delta(\xi, \mathbf{X}) \rightarrow \infty \quad \text{se } \xi = \mathbf{X}, \quad (35)$$

$$\int_{\Omega^*} f(\mathbf{X}) \delta(\xi, \mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) = f(\xi) \quad (36)$$

e cujo efeito é medido em um ponto qualquer X , denominado de ponto campo.

Com os dois problemas definidos aplicamos, então, o Teorema da Reciprocidade. Consideramos para isso as equações constitutivas dos dois corpos descritos e levando em consideração a simetria do tensor \mathbf{C}^0 ($C_{ijkl}^0 = C_{klij}^0$), estabelecemos a seguinte relação:

$$\mathbf{T}_{ij}^* \Delta \mathbf{E}_{ij} = C_{ijkl}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^* \Delta \mathbf{E}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^* C_{klij}^0 \Delta \mathbf{E}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^* \Delta \tilde{\mathbf{T}}_{kl} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* \Delta \tilde{\mathbf{T}}_{ij}. \quad (37)$$

Integrando ambos os lados da igualdade no domínio indeformado Ω_0 , temos a expressão do Teorema da Reciprocidade aplicado ao problema não linear:

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{T}_{ij}^* \Delta \mathbf{E}_{ij} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^* \Delta \tilde{\mathbf{T}}_{ij} d\Omega_0. \quad (38)$$

Dando prosseguimento a este processo, resolvemos primeiro a integral do lado esquerdo da eq. (38), substituindo a expressão de $\Delta \mathbf{E}_{ij}$ na eq. (28) e obtendo as seguintes expressões:

$$\int_{\Omega_0} T_{ij}^* \Delta E_{ij} d\Omega_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} T_{ij}^* \begin{pmatrix} \Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + {}^t u_{k,j} \Delta u_{k,i} + {}^t u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \\ \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} \end{pmatrix} d\Omega_0, \quad (39)$$

$$\int_{\Omega_0} T_{ij}^* \Delta E_{ij} d\Omega_0 = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} T_{ij}^* \Delta u_{i,j} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} T_{ij}^* \Delta u_{j,i} d\Omega_0 + \\ & \int_{\Omega_0} T_{ij}^* ({}^t u_{k,j} \Delta u_{k,i}) d\Omega_0 + \\ & \int_{\Omega_0} T_{ij}^* ({}^t u_{k,i} \Delta u_{k,j}) d\Omega_0 + \\ & \int_{\Omega_0} T_{ij}^* (\Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}) d\Omega_0 \end{aligned} \right]. \quad (40)$$

As duas primeiras integrais do lado direito da expressão (40) geram, ambas, uma integral no contorno e uma no domínio semelhantes ao problema linear (BREBBIA *et al.*, 1984). As demais se juntam formando um novo termo (PRIETO *et al.*, 1998), que mais à frente será analisado. Desta forma a expressão final fica:

$$\int_{\Omega_0} T_{ij}^* \Delta E_{ij} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_0} p_i^* \Delta u_i d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} b_i^* \Delta u_i d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} T_{ij}^* \left({}^t u_{k,i} + \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \right) \Delta u_{k,j} d\Omega_0. \quad (41)$$

Analisando, agora, o lado direito da eq. (38), substituímos as expressões de ε_{ij}^* , na eq. (32), e de $\Delta \tilde{T}_{ij}$, na eq. (30), e obtemos as expressões abaixo:

$$\int_{\Omega_0} \varepsilon_{ij}^* \Delta \tilde{T}_{ij} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \left[\begin{aligned} & \Delta T_{ij}^0 - {}^t u_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} - \\ & \Delta u_{i,k} (\Delta \tilde{T}_{kj} + {}^t \tilde{T}_{kj}) \end{aligned} \right] d\Omega_0, \quad (42)$$

$$\int_{\Omega_0} \varepsilon_{ij}^* \Delta \tilde{T}_{ij} d\Omega_0 = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} u_{i,j}^* \Delta T_{ij}^0 d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} u_{j,i}^* \Delta T_{ij}^0 d\Omega_0 - \\ & \int_{\Omega_0} u_{i,j}^* \Delta u_{i,k} (\Delta \tilde{T}_{kj} + {}^t \tilde{T}_{kj}) d\Omega_0 - \\ & \int_{\Omega_0} u_{j,i}^* \Delta u_{i,k} (\Delta \tilde{T}_{kj} + {}^t \tilde{T}_{kj}) d\Omega_0 - \\ & \int_{\Omega_0} u_{i,j}^* {}^t u_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} u_{j,i}^* {}^t u_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} d\Omega_0 \end{aligned} \right]. \quad (43)$$

Seguindo os mesmos passos utilizados para a integral do lado esquerdo da eq. (38), obtemos duas integrais, uma no contorno e uma no domínio, também semelhantes as integrais lineares (BREBBIA *et al.*, 1984), e por fim, mais duas integrais de domínio (PRIETO *et al.*, 1998), que serão analisadas mais à frente, como a da eq. (40). Portanto temos esta expressão assim descrita:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \varepsilon_{ij}^* \Delta \tilde{T}_{ij} d\Omega_0 &= \int_{\Gamma_0} u_i^* \Delta p_i^0 d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} u_i^* \Delta b_i^0 d\Omega_0 - \\ & \int_{\Omega_0} u_{i,j}^* \Delta u_{i,k} (\Delta \tilde{T}_{kj} + {}^t \tilde{T}_{kj}) d\Omega_0 - \\ & \int_{\Omega_0} u_{i,j}^* {}^t u_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} d\Omega_0. \end{aligned} \quad (44)$$

Concluídos estes passos retornamos à eq. (38) e substituímos as eqs. (41) e (44) nos lados convenientes para obtermos o segundo Teorema da Reciprocidade de Betti para o problema elástico não linear:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_0} p_i^* \Delta u_i d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} b_i^* \Delta u_i d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} T_{ij}^* ({}^t u_{k,i} + \frac{\Delta u_{k,i}}{2}) \Delta u_{k,j} d\Omega_0 = \\ & \int_{\Gamma_0} u_i^* \Delta p_i^0 d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} u_i^* \Delta b_i^0 d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} u_{i,j}^* \Delta u_{i,k} (\Delta \tilde{T}_{kj} + {}^t \tilde{T}_{kj}) d\Omega_0 - \\ & \int_{\Omega_0} u_{i,j}^* {}^t u_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} d\Omega_0. \end{aligned} \quad (45)$$

Aqui vemos os termos descritos no capítulo anterior e introduzimos os termos u_i^* e p_i^* , constantes, obtidos a partir da solução singular da equação de equilíbrio de Navier,

$$G u_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj}^* + \delta(\xi, X) e_j = 0, \quad (46)$$

e denominadas de soluções fundamentais de Kelvin, as mesmas utilizadas para o problema linear (BREBBIA *et al.*, 1984). Assim, descrevemo-las como se segue:

$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, X) e_i \rightarrow$ deslocamento na direção j no ponto X , devido a aplicação de uma carga unitária no ponto ξ , na direção i ; (47)

$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, X) e_i \rightarrow$ força de superfície na direção j no ponto X , devida a aplicação de uma carga unitária no ponto ξ , na direção i . (48)

Fornecemos, também, suas expressões bidimensionais abaixo:

$$u_{ij}^*(\xi, X) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_i r_j \}, \quad (49)$$

$$p_{ij}^*(\xi, X) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_i r_j] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \right\}. \quad (50)$$

Feitas estas considerações podemos agora, voltar aos novos termos introduzidos nas equações (41) e (44) e analisá-los, a fim de concluirmos este item com a apresentação das equações integrais do problema para esse método.

Retornando a expressão (45) do segundo Teorema da Reciprocidade de Betti e passando para o lado direito da igualdade a última integral, vemos que se retirarmos esta e mais as duas últimas do lado direito, as que sobram, formam uma expressão similar ao segundo Teorema da Reciprocidade de Betti para o problema linear. Desta forma, podemos admitir que os novos termos constituem a contribuição não linear procurada. Lembrando que as três são integrais de domínio, podemos agrupá-las em um único

termo, de forma a trabalharmos com uma maneira mais compacta; escolhemos para este caso a letra maiúscula manuscrita \mathcal{M} e a definimos pela seguinte expressão:

$$\mathcal{M}_i = - \left[\mathbf{T}_{ij}^* \left({}^t\mathbf{u}_{k,i} + \frac{\Delta\mathbf{u}_{k,i}}{2} \right) \Delta\mathbf{u}_{k,j} + \mathbf{u}_{i,j}^* \Delta\mathbf{u}_{i,k} \left(\Delta\tilde{\mathbf{T}}_{kj} + {}^t\tilde{\mathbf{T}}_{kj} \right) + \mathbf{u}_{i,j}^* {}^t\mathbf{u}_{i,k} \Delta\tilde{\mathbf{T}}_{kj} \right]. \quad (51)$$

Todos os termos desta expressão já foram definidos, portanto se quisermos uma expressão em função dos deslocamentos, incrementos de deslocamentos e deslocamentos fundamentais, basta-nos somente substituir os termos por suas expressões e o resultado obtido, já considerando as soluções fundamentais, será:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i(\xi, \mathbf{X}) = & -\lambda \mathbf{u}_{ij,k}^* \left[\Delta\mathbf{u}_{j,k} \left(\Delta\mathbf{u}_{n,n} + \frac{\Delta\mathbf{u}_{n,m}\Delta\mathbf{u}_{n,m}}{2} + {}^t\mathbf{u}_{n,n} + {}^t\mathbf{u}_{n,m} \Delta\mathbf{u}_{n,m} + \frac{{}^t\mathbf{u}_{n,m} {}^t\mathbf{u}_{n,m}}{2} \right) \right. \\ & \left. + {}^t\mathbf{u}_{j,k} \left(\Delta\mathbf{u}_{n,n} + {}^t\mathbf{u}_{n,m} \Delta\mathbf{u}_{n,m} + \frac{\Delta\mathbf{u}_{n,m}\Delta\mathbf{u}_{n,m}}{2} \right) \right] \\ & - \lambda \mathbf{u}_{in,n}^* \Delta\mathbf{u}_{m,k} \left(\frac{\Delta\mathbf{u}_{m,k}}{2} + {}^t\mathbf{u}_{m,k} \right) \\ & - \mu \mathbf{u}_{ij,k}^* \left[\Delta\mathbf{u}_{j,m} \left(\Delta\mathbf{u}_{m,k} + \Delta\mathbf{u}_{k,m} + \Delta\mathbf{u}_{n,m} \Delta\mathbf{u}_{n,k} + {}^t\mathbf{u}_{m,k} + {}^t\mathbf{u}_{k,m} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\Delta\mathbf{u}_{m,j} \Delta\mathbf{u}_{m,k}}{2} \right. \\ & \left. + {}^t\mathbf{u}_{j,m} \left(\Delta\mathbf{u}_{m,k} + \Delta\mathbf{u}_{k,m} + {}^t\mathbf{u}_{n,k} \Delta\mathbf{u}_{n,m} \right) + {}^t\mathbf{u}_{m,j} \Delta\mathbf{u}_{m,k} \right. \\ & \left. + {}^t\mathbf{u}_{n,m} \Delta\mathbf{u}_{n,k} + \Delta\mathbf{u}_{n,m} \Delta\mathbf{u}_{n,k} \right] \\ & - \mu \mathbf{u}_{ik,j}^* \Delta\mathbf{u}_{m,k} \left(\frac{\Delta\mathbf{u}_{m,j}}{2} + {}^t\mathbf{u}_{m,j} \right). \quad (52) \end{aligned}$$

O processo de substituição das equações na expressão (51) para obter a eq. (52) pode ser visto no Apêndice A deste trabalho.

Finalmente, para terminarmos esta formulação não linear para o Método dos Elementos de Contorno, resta-nos as equações integrais finais. Assim, da eq. (45), lembrando que a força de volume aplicada no domínio infinito é modelada pela função delta de Dirac e que consideramos nulas as forças de volume em nossos problemas,

podemos gerar a equação integral no contorno para pontos internos no domínio, chamada de identidade de Somigliana para problemas elásticos não lineares:

$$\begin{aligned} \Delta u_i(\xi) = & - \int_{\Gamma^{(k)}} p_{ij}^*(\xi, X) \Delta u_j \, d\Gamma + \int_{\Gamma^{(k)}} u_{ij}^*(\xi, X) \Delta p_j^0 \, d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega^{(k)}} \mathcal{M}_i \, d\Omega. \end{aligned} \quad (53)$$

A integral para o cálculo dos deslocamentos no contorno leva em consideração a singularidade quando o ponto fonte ξ se encontra no contorno. Por esta razão surge uma matriz avaliada em função do contorno do problema, onde o ponto fonte está aplicado:

$$c_{ij}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, X) d\bar{\Gamma}_\varepsilon, \quad (54)$$

apresentada no Apêndice B, geramos a equação integral para grandes deslocamentos no contorno:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) \Delta u_j(\xi) = & - \int_{\Gamma^{(k)}} p_{ij}^*(\xi, X) \Delta u_j \, d\Gamma + \int_{\Gamma^{(k)}} u_{ij}^*(\xi, X) \Delta p_j^0 \, d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega^{(k)}} \mathcal{M}_i(\xi, X) d\Omega. \end{aligned} \quad (55)$$

O sobre-índice k que aparece nas equações (53) e (55) representa as várias configurações que o corpo pode assumir durante uma deformação.

Partimos agora para a avaliação discretizada do problema e ao terminarmos este capítulo, começaremos a discutir os procedimentos numéricos.

III.2 – Forma Discretizada do MEC

Tudo o que apresentamos até aqui foi avaliado no contínuo, as equações foram formuladas, apresentadas e chegamos ao final nas duas equações integrais do MEC para deslocamentos finitos. Porém, a solução destas analiticamente é muito difícil, ainda

mais quando a complexidade do problema aumenta. Por esta razão reescrevemo-las em uma forma discretizada para analisarmos seus termos através de técnicas numéricas.

As expressões (53) e (55), como já observado, apresentam duas integrais avaliadas no contorno Γ^k , e uma terceira, a parcela não linear, avaliada no domínio Ω^k . A fim de obtermos estas integrais numericamente, precisamos discretizar o contorno e o domínio do problema em elementos e células, respectivamente, onde os deslocamentos, as forças de superfície e os incrementos destas duas variáveis, serão calculados em função dos valores nodais interpolados. Assim, de forma geral podemos escrever as variáveis da seguinte maneira:

$$\Delta \mathbf{u} = (\Phi^\Gamma)^T \Delta \mathbf{u}^{(n)} \quad \text{e} \quad {}^t \mathbf{u} = (\Phi^\Gamma)^T {}^t \mathbf{u}^{(n)} \quad (56)$$

$$\Delta \mathbf{p}^0 = (\Phi^\Gamma)^T \Delta \mathbf{p}^{0(n)} \quad \text{e} \quad {}^t \mathbf{p}^0 = (\Phi^\Gamma)^T {}^t \mathbf{p}^{0(n)} \quad (57)$$

sabendo-se que Φ^Γ é o vetor das funções de interpolação do contorno e ${}^t \mathbf{u}^{(n)}$, $\Delta \mathbf{u}^{(n)}$, ${}^t \mathbf{p}^{0(n)}$, $\Delta \mathbf{p}^{0(n)}$ são, respectivamente, os valores nodais dos deslocamentos, incrementos de deslocamentos, forças de superfície e incrementos das forças de superfície.

A partir das considerações acima podemos reescrever a eq. (55) na forma discretizada, para cada ponto nodal ξ do contorno, gerando assim um sistema, representado à seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \Delta \mathbf{u} = & - \sum_{k=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma^k} \mathbf{p}^* (\Phi^\Gamma)^T d\Gamma \right) \Delta \mathbf{u}^{(n)} + \sum_{k=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma^k} \mathbf{u}^* (\Phi^\Gamma)^T d\Gamma \right) \Delta \mathbf{p}^{0(n)} + \\ & \sum_{k=1}^{NC} \int_{\Omega^{(k)}} \mathcal{M}(\mathbf{u}^*, {}^t \mathbf{u}^{(n)}, \Delta \mathbf{u}^{(n)}) (\Phi^\Omega)^T d\Omega, \end{aligned} \quad (58)$$

onde Φ^Ω é o vetor das funções de interpolação do domínio, NE é o número de elementos e NC o número de células.

O mesmo pode ser feito com a expressão para deslocamentos para pontos no domínio e teremos o seguinte sistema:

$$\Delta \mathbf{u} = - \sum_{k=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma^k} \mathbf{p}^* (\Phi^\Gamma)^T d\Gamma \right) \Delta \mathbf{u}^{(n)} + \sum_{k=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma^k} \mathbf{u}^* (\Phi^\Gamma)^T d\Gamma \right) \Delta \mathbf{p}^{0(n)} + \sum_{k=1}^{NC} \int_{\Omega^{(k)}} \mathcal{M}(\mathbf{u}^*, {}^t \mathbf{u}^{(n)}, \Delta \mathbf{u}^{(n)}) (\Phi^\Omega)^T d\Omega \quad (59)$$

Analisando, cuidadosamente, a expressão (58) para cálculo dos deslocamentos no contorno do corpo discretizado, temos, após a avaliação das integrais, o seguinte sistema matricial:

$$\mathbf{H} \Delta \mathbf{u}^\Gamma = \mathbf{G} \Delta \mathbf{p}^0 + \mathbf{M}(\mathbf{u}^*, {}^t \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}). \quad (60)$$

Nele, os vetores $\Delta \mathbf{u}$ e $\Delta \mathbf{p}^0$ contêm os valores respectivos dos incrementos dos deslocamentos e das forças de superfície do problema e possuem, ambos, dimensão de $[2 \times Nnc]$. As matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} , já conhecidas do problema linear, que os acompanham no sistema, têm dimensão da ordem de $[2 \times Nnc, 2 \times Nnc]$. Por fim, o termo \mathbf{M} , dos valores não lineares, necessita dos deslocamentos e incrementos de deslocamentos avaliados no contorno e no domínio, e possui dimensão da ordem de $[2 \times Nnc]$.

O sistema apresentado acima, avaliado convenientemente, nos fornece os valores aproximados do incremento de deslocamento e incremento de força de superfície do problema analisado. Entretanto, sem menção alguma, consideraríamos o vetor $\Delta \mathbf{p}^0$ independente da deformação que o corpo pudesse experimentar ($da = dA$). Esta hipótese não é correta, visto que, diferentemente do problema linear, a área, onde a força de superfície atua, experimenta deformação finita e alteração de sua direção normal, que não podem ser desprezadas. Por esta razão, a força de superfície é, na verdade, dependente da deformação do corpo ($da \neq dA$) e, na Formulação Lagrangeana, da mesma forma que necessitamos referenciar a força de superfície à configuração indeformada, o mesmo deve ser feito à área e sua normal, onde atua.

Para analisarmos esta mudança que a carga sofre, devemos nos reportar a figura 2 do Capítulo II, item II.2.3, utilizada para deduzir a expressão dos tensores de Piola-Kirchhoff e às expressões (13), (14) e (17), respectivamente, relacionadas à compatibilidade das forças aplicadas às configurações indeformada e deformada, à mudança de área fornecida pela Mecânica do Contínuo e ao teorema de Cauchy. A força

$d\mathbf{P}$, representada na figura, é a mesma em todo o processo de deformação do corpo, portanto, pode ser obtida tanto pela força de superfície na configuração indeformada quanto na configuração deformada. Desta forma, pela expressão (13), aplicando o teorema de Cauchy, obtemos esta grandeza dada por:

$$\mathbf{p}^0 dA = d\mathbf{P} = \mathbf{p} da . \quad (61)$$

Os termos dA , da e \mathbf{p}^0 já são conhecidos desde o Capítulo II e representam, respectivamente, uma área infinitesimal indeformada, uma área infinitesimal deformada e o vetor das forças de superfície na configuração indeformada. O vetor \mathbf{p} representa as componentes das forças de superfície em uma configuração deformada. Da eq. (61), se isolarmos a variável de interesse, teremos:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{p} \frac{da}{dA} . \quad (62)$$

Seu valor incremental pode, então, ser estabelecido, e obteremos o valor real do incremento da força de superfície referenciado a configuração indeformada:

$$\Delta \mathbf{p}^0 = \Delta \mathbf{p} \frac{da}{dA} . \quad (63)$$

Nossa preocupação agora é obter uma expressão para esta relação de áreas. Assim sendo, da expressão (14), podemos dividir ambos os lados por dA , obtendo, abaixo, a relação requerida multiplicada pela normal deformada:

$$\hat{\mathbf{n}} \frac{da}{dA} = \mathbf{J} (\mathbf{F}^{-1})^T \hat{\mathbf{N}} . \quad (64)$$

Levando em consideração que a norma dos vetores normais às áreas, deformada e indeformada é igual à unidade, obtemos a expressão final para a relação:

$$\frac{da}{dA} = \frac{\det \mathbf{F}}{\sqrt{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} \hat{\mathbf{n}}}}. \quad (65)$$

O processo implícito na passagem da expressão (64) para (65) encontra-se descrito no apêndice A.

O sistema para as cargas verdadeiras encontra-se estabelecido, e o procedimento consta, apenas, de uma simples manipulação algébrica feita a cada configuração. Agora só nos resta aplicar as condições de contorno, que podem ser de dois tipos, expressados abaixo:

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_1, \quad (66)$$

$$\Delta \mathbf{p}^0 = \Delta \mathbf{p} = \Delta \bar{\mathbf{p}} \quad \text{em } \Gamma_2, \quad (67)$$

e em seguida reordenar os termos convenientemente, a fim de chegarmos ao seguinte sistema simplificado para análise não linear do contorno de um corpo elástico:

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{f}(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \Delta \bar{\mathbf{p}}) + \mathbf{M}. \quad (68)$$

Vemos que o sistema da expressão (68) guarda uma semelhança com o sistema para análise de problemas lineares, contudo, diferenças existem, principalmente, no vetor independente \mathbf{f} , que além de receber os valores prescritos de incrementos de deslocamento e de força de superfície, recebe, também, as componentes do vetor não linear \mathbf{M} , calculado por um processo iterativo que transforma as incógnitas em termos previamente conhecidos. Este sistema pode ser avaliado por um método de solução de sistemas lineares, como por exemplo, o da eliminação Gaussiana com pivoteamento parcial, o qual nós usamos.

Após obtermos os deslocamentos no contorno, podemos calcular os deslocamentos em cada ponto do domínio a partir da eq. (53) que pode ser reescrita da seguinte forma, considerando seus termos já integrados:

$$\Delta \mathbf{u}^\Omega = -\mathbf{H} \Delta \mathbf{u}^\Gamma + \mathbf{G} \Delta \mathbf{p} \frac{da}{dA} + \mathbf{M}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) \quad (69)$$

CAPÍTULO IV

PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

IV.1 – Introdução

A esta altura é lícito dizer que utilizamos, na análise dos problemas com não linearidade geométrica, o programa Bizep da autoria de Telles (1984), para problemas elásticos e estáticos lineares de duas dimensões. Antes de implementarmos a rotina responsável pela contribuição não-linear, reduzimos o programa, de forma a trabalharmos com uma versão mais simples. Para isso, retiramos as considerações de simetria, o cálculo em regiões infinitas, o cálculo de tensões no contorno e no domínio e substituímos a avaliação das componentes da matriz $[c]$, através de deslocamento de corpo rígido, para a solução analítica de suas expressões (MOREIRA, 1983). Após a comprovação que esta versão simplificada funcionava conforme a antiga, comprovando nossos acertos iniciais, partimos para a implementação do processo incremental e iterativo necessários para a avaliação das variáveis finitas de um corpo com comportamento elástico não-linear.

A consideração no início deste capítulo, do uso do programa Bizep em nossas análises, libera-nos de aprofundarmos as técnicas numéricas utilizadas para a avaliação dos termos no contorno, pois estas não foram alteradas de sua versão original, conhecida da literatura correspondente (BREBBIA *et al.*, 1984). Entretanto, não deixaremos de citá-las e de justificar suas escolhas, pois são importantes para formação geral do texto, mas daremos maior importância às técnicas empregadas pela avaliação dos termos que constituem a contribuição não-linear. Desta forma, iniciaremos este estudo apresentando as técnicas numéricas para a avaliação dos termos no contorno e dos termos do domínio, em seguida, falaremos sobre o processo incremental e iterativo na avaliação das variáveis finais, o critério de parada e por último forneceremos o algoritmo gerado.

IV.2 – Avaliação das Integrais de Contorno

Reportando-nos a eq. (58), do capítulo III, do sistema discretizado para incrementos de deslocamentos no contorno, vemos a necessidade de avaliar seus termos de forma eficiente e com um gasto de tempo pequeno. Assim, a escolha dos elementos isoparamétricos que melhor descrevem as variáveis nos pontos nodais, e o tipo de integração numérica utilizada, constituem objetivo essencial para uma aproximação adequada dos termos.

Para avaliarmos as integrais de contorno que aparecem na eq. (58), utilizamos as mesmas técnicas presentes na versão original do programa mencionado. Discretizando o contorno em elementos isoparamétricos lineares, as integrais de contorno são escritas em função de coordenadas naturais locais e a mudança de coordenadas feita pelo jacobiano correspondente. Assim, representando as integrais em função destes elementos, avaliamo-las de forma numérica, utilizando o método de Gauss, para a quantidade de abscissas variando de 2 a 6 pontos, dependentes da distância do ponto singular ao centro do elemento considerado; e de forma analítica, quando o ponto singular coincide com qualquer ponto do elemento.

A escolha de se manter estas técnicas foi influenciada pela facilidade de já termos a implementação pronta e de sabermos que para a análise linear, seu funcionamento era comprovado. Em contra-partida, não sabíamos das dificuldades que encontraríamos na implementação da parte não linear e nem a que ponto uma interpolação linear do contorno poderia gerar resultados diferentes de uma interpolação quadrática utilizada pelo artigo (PRIETO *et al.*, 1998), objeto de nossas comparações.

Embora possamos justificar nossa escolha, conclusões mais precisas, acerca das vantagens e desvantagens desta, só poderão ser dadas mais à frente, após apresentarmos as técnicas numéricas empregadas para a avaliação da integral de domínio e seus termos, a técnica iterativa e os resultados dos exemplos rodados.

IV.3 – Avaliação da Integral de Domínio

No item acima apresentamos as técnicas para avaliação dos termos do contorno da eq. (58), e agora nos resta avaliar o termo do domínio através de uma discretização em células, já que, infelizmente, sua transformação para avaliação no contorno não é muito trivial, e por isso não nos foi possível efetuar-la neste trabalho. Para este mister,

escolhemos para nossa análise células triangulares lineares, por acreditarmos serem mais eficientes na discretização de nossos domínios e por nos levar a uma discretização em que estas mantenham uma dependência com os elementos do contorno.

IV.3.1 – Células Triangulares Lineares

A parametrização de um domínio bidimensional, através de células triangulares lineares, não oferece grandes dificuldades. Nos diversos livros de elementos finitos (BATHE, 1996) e nos livros de contorno (BREBBIA *et al.*, 1984) encontramos sua teoria, que consiste em trabalharmos com coordenadas de área do elemento. Em coordenadas de área, cada ponto P fica determinado por suas coordenadas (η_1, η_2, η_3) , como é mostrado na figura 6.

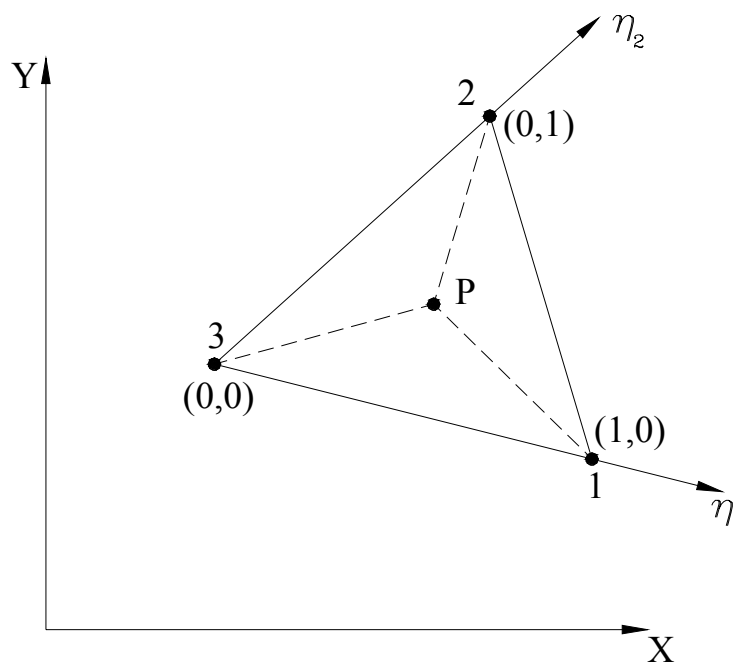


Figura 6 – Célula triangular parametrizada

Assim, temos para as coordenadas de área as seguintes expressões:

$$\eta_i^P = \frac{A_{jk}^P}{A}, \quad \text{com } i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1 \text{ e } k = 3, 1, 2, \quad (70)$$

onde o termo A_{jk}^P representa a subárea formada pelo ponto P e os vértices j e k , e A representa a área total da célula. De acordo com esta definição, é válida a relação para qualquer triângulo:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1, \quad (71)$$

onde a coordenada natural do nó 3 é dependente das demais, podendo ser calculada a partir da eq. (71). Sendo um ponto qualquer de coordenadas (x_1, x_2) no interior da célula, podemos expressar as funções de interpolação da seguinte forma:

$$\eta_i^P = \frac{1}{2A} (2A_i^0 + b_i x_1 + a_i x_2), \quad (72)$$

com seus termos agora definidos desta forma:

$$2A_i^0 = x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j, \quad (73)$$

$$b_i = x_2^j - x_2^k, \quad (74)$$

$$a_i = x_1^k - x_1^j, \quad (75)$$

com i, j e k variando da mesma forma que na eq. (70).

IV.3.2 – Termos do Vetor Não-Linear

A partir da definição das funções de interpolação para a célula triangular isoparamétrica linear, dada no subitem acima, podemos definir as técnicas numéricas para avaliação dos termos do vetor não linear. Retornando a eq. (52) do vetor não-linear \mathbf{M} , vemos que é avaliado em função dos gradientes do deslocamento fundamental, do deslocamento e do incremento de deslocamento.

O gradiente do deslocamento fundamental é calculado derivando a sua expressão original para um domínio bidimensional em relação às coordenadas do um ponto campo. Desta forma, as seis expressões finais do gradiente são assim:

$$\begin{aligned}
u_{11,1}^* &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G_r}[(3-4\nu)r_{,1} - 2r_{,1}r_{,2}r_{,2}], \\
u_{11,2}^* &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G_r}[(3-4\nu)r_{,2} + 2r_{,1}r_{,1}r_{,2}], \\
u_{12,1}^* &= u_{21,1}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G_r}[-r_{,2}r_{,2}r_{,2} + r_{,1}r_{,1}r_{,2}], \\
u_{12,2}^* &= u_{21,2}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G_r}[-r_{,1}r_{,1}r_{,1} + r_{,1}r_{,2}r_{,2}], \\
u_{22,1}^* &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G_r}[(3-4\nu)r_{,1} + 2r_{,1}r_{,2}r_{,2}], \\
u_{22,2}^* &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G_r}[(3-4\nu)r_{,2} - 2r_{,1}r_{,1}r_{,2}]. \tag{76}
\end{aligned}$$

Os gradientes do incremento de deslocamento e do deslocamento precisam ser interpolados pelas funções paramétricas da célula triangular para conhecermos seus valores. Assim, podemos avaliá-los através de suas derivadas em relação às coordenadas de área, do emprego da regra da cadeia e de uma inversão do jacobiano formado. Este processo pode ser visto na expressão abaixo, para o cálculo do gradiente do deslocamento:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{1}{\frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2}}}_{J^{-1}} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & -\frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_i}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta_2} \end{array} \right\}. \tag{77}$$

Relembrando as duas expressões da eq. (56), sabemos que o deslocamento ou as coordenadas de um ponto qualquer (no domínio) podem ser calculados através dos valores nodais interpolados nas células; assim podemos calcular os termos da expressão (77) e reescrevê-la em sua forma final:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2A} [b_1(u_i^1 - u_i^3) + b_2(u_i^2 - u_i^3)] \\ \frac{1}{2A} [a_1(u_i^1 - u_i^3) + a_2(u_i^2 - u_i^3)] \end{Bmatrix}. \quad (78)$$

Os termos que aparecem já são conhecidos; b_i , a_i e A são constantes de cada célula triangular, e u_i^n ($n=1,2,3$) os valores dos deslocamentos em cada nó n da célula triangular, que já são conhecidos de antemão pelo processo iterativo, do qual falaremos mais a frente. Então vemos que esta expressão não possui nenhuma incógnita, sendo constante em cada célula. A expressão final do gradiente do incremento do deslocamento é similar à expressão acima.

IV.3.3 – Integração Numérica

Nos subitens acima, definimos a célula paramétrica, escolhida para a discretização do domínio, e apresentamos as técnicas utilizadas para a obtenção dos termos que compõem o vetor \mathbf{M} . Podemos, agora, para finalizar este item, apresentar a técnica numérica para sua integração.

Para a escolha da melhor técnica de integração, observamos cuidadosamente o integrando e constatamos a existência de uma singularidade no gradiente do deslocamento fundamental (da ordem de $1/r$), quando o ponto fonte coincide com um dos vértices da célula triangular. Neste caso, atenção adequada deve ser dada no momento de sua avaliação. Para isto escolhemos para a integração de \mathbf{M} no domínio dois esquemas apresentados por TELLES (1983).

Começando pelo caso singular, empregamos um esquema de integração semi-analítica, onde conseguimos remover, de forma analítica, a singularidade do integrando, deixando a variável restante para ser resolvida numericamente. Para isto, efetua-se uma

transformação das coordenadas cartesianas (x, y) para coordenadas cilíndricas (r, ϕ) , baseando-se no ponto singular ζ , segundo a figura 7:

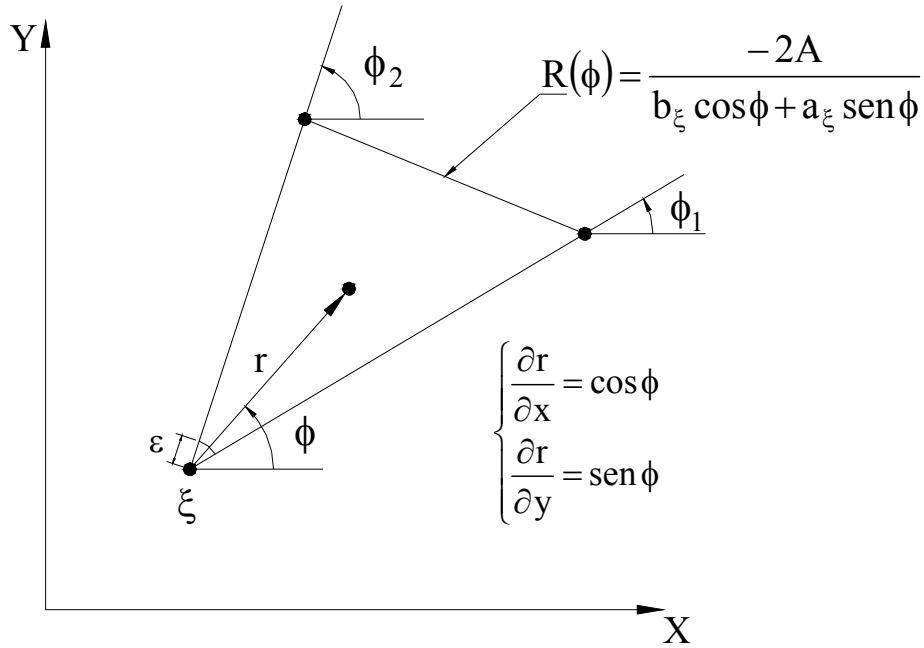


Figura 7 – Célula triangular singular

Neste sistema de coordenadas cilíndricas podemos reescrever as expressões de $u_{ij,k}^*$ em função do seno e cosseno do ângulo ϕ , separando a singularidade deste termo. Assim representamo-lo da seguinte forma:

$$u_{ij,k}^*(r, \phi) = \frac{1}{r} \Psi_{ij,k}(\phi), \quad (79)$$

onde $\Psi_{ij,k}$ é um tensor cujas componentes dependem, somente, de ϕ . Uma vez feitas estas considerações, podemos reescrever a integral discretizada de domínio da eq. (58), considerando seus termos já conhecidos, da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{NC} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \frac{1}{r} \Psi_{ij,k} C^{te}({}^t \mathbf{u}^{(n)}, \Delta \mathbf{u}^{(n)}) r dr d\phi, \quad (80)$$

onde o termo $C^{te}(\mathbf{u}^{(n)}, \Delta \mathbf{u}^{(n)})$ representa os gradientes do incremento de deslocamento e deslocamento interpolados, multiplicados pelas constantes de Lamé. Eliminando a singularidade, integrando analiticamente em $[\varepsilon, R(\phi)]$ e efetuando o limite, o que resta depende somente de ϕ , podendo ser avaliado pela quadratura Gaussiana sem maiores dificuldades. A expressão final fica assim:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{NC} C^{te}(\mathbf{u}^{(n)}, \Delta \mathbf{u}^{(n)}) \int_{\phi_1}^{\phi_2} R(\phi) \Psi_{ij,k} d\phi \quad (81)$$

com

$$\phi = \frac{\eta}{2}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_1) \quad (82)$$

e η definido no intervalo $[-1, 1]$.

Para o caso em que o ponto fonte não coincide com nenhum vértice da célula a avaliação se torna mais simples. No início dos trabalhos com o vetor \mathbf{M} , utilizamos os pontos de Hammer (BREBBIA *et al.*, 1984) para efetuar sua integração não singular. Empregando, inicialmente, 7 pontos na integração, não obtivemos resultados satisfatórios. Então, optamos por um processo semi-analítico (TELLES, 1983) similar ao usado pelo caso singular e conseguimos valores melhores. Desta forma, uma mudança de coordenadas cartesianas para cilíndricas foi utilizada novamente para obter o gradiente do deslocamento fundamental na forma da eq. (79). Assim, a partir da figura 8,

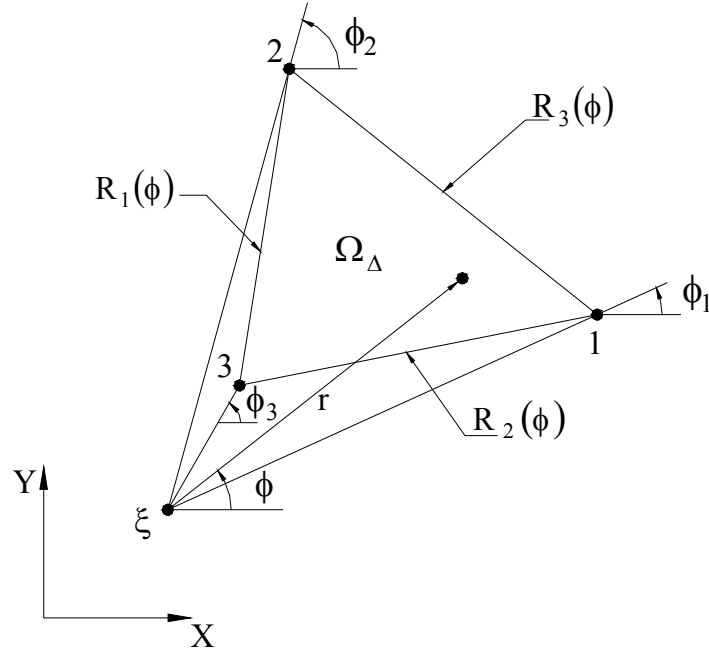


Figura 8 – Célula triangular não singular

podemos escrever a integral de domínio na seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{NC} \left[\int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \frac{1}{r} \Psi_{ij,k} C^{te}(\mathbf{u}^{(n)}, \Delta \mathbf{u}^{(n)}) r dr d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \frac{1}{r} \Psi_{ij,k} C^{te}(\mathbf{u}^{(n)}, \Delta \mathbf{u}^{(n)}) r dr d\phi \right], \quad (83)$$

onde o termo $R_i(\phi)$ tem a expressão:

$$R_i(\phi) = -\frac{2A |\xi \eta_i|}{b_i \cos \phi + a_i \sin \phi} \quad (84)$$

e $\xi \eta_i$ é o valor da função de interpolação, eq. (72), no ponto singular ξ . Após resolvê-las de forma analítica em $[R_2(\phi), R_3(\phi)]$ e em $[R_1(\phi), R_3(\phi)]$, a expressão final de \mathbf{M} para integração numérica em ϕ é:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{NC} C^{te}(\mathbf{u}^{(n)}, \Delta \mathbf{u}^{(n)}) \left[\int_{\phi_1}^{\phi_3} \Psi_{ij,k} (R_3(\phi) - R_2(\phi)) d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \Psi_{ij,k} (R_3(\phi) - R_1(\phi)) d\phi \right] \quad (85)$$

com ϕ dependente de η , e η variando no intervalo $[-1, 1]$. Esta expressão pode ser avaliada, sem dificuldade alguma, pela quadratura Gaussiana, da mesma forma que foi feita para o caso singular.

IV.4 – Processo Incremental e Iterativo

Distinto do problema linear (BREBBIA *et al.*, 1984), no qual calculamos diretamente o vetor dos deslocamentos e das forças de superfície, a análise não linear utiliza um procedimento incremental, como o descrito no capítulo II, e um iterativo. A cada incremento de tempo t , relacionamos uma configuração que o corpo adquire durante o processo de sua deformação. Dentro de cada incremento, um procedimento iterativo n ajusta os valores de ${}^t_n \Delta \mathbf{u}$ e de ${}^t_n \Delta \mathbf{p}^0$ (ou ${}^t_n \Delta \mathbf{p}$), enquanto ${}^t \mathbf{u}$ e ${}^t \mathbf{p}^0$ (ou ${}^t \mathbf{p}$) permanecem constantes. Ao final, após a convergência do processo iterativo, os valores de ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}^0$ (ou ${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}$), segundo as expressões respectivas (24) e (25), são calculados para o próximo incremento ou configuração.

Dentro desta idéia, começamos a nossa análise, considerando os valores iniciais de ${}^0 \Delta \mathbf{u}$ e de ${}^0 \Delta \mathbf{p}^0$ (ou ${}^0 \Delta \mathbf{p}$) iguais a zero. Após a avaliação das matrizes \mathbf{G} e \mathbf{H} , executadas somente uma vez em toda a análise, devido ao uso da Formulação Lagrangeana na obtenção das integrais de contorno, calculamos os valores de ${}^0_1 \Delta \mathbf{u}$ e de ${}^0_1 \Delta \mathbf{p}^0$ (ou ${}^0_1 \Delta \mathbf{p}$) através do sistema (68) sem a contribuição não-linear ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$), ou em outras palavras, através de um sistema análogo usado no caso linear (BREBBIA *et al.*, 1984):

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \left({}^0_1 \Delta \mathbf{u}^\Gamma, {}^0_1 \Delta \mathbf{p} \right) = \Delta \mathbf{f}(\Delta \bar{\mathbf{u}}, \Delta \bar{\mathbf{p}}). \quad (86)$$

Em seguida obtemos os valores do incremento do deslocamento nos pontos internos pela eq. (69):

$$\Delta \mathbf{u}^\Omega = -\mathbf{H} {}^0_1 \Delta \mathbf{u}^\Gamma + \mathbf{G} {}^0_1 \Delta \mathbf{p} \frac{da}{dA}. \quad (87)$$

Uma vez conhecidos os incrementos para todos os nós funcionais, partimos para o cálculo de \mathbf{M} e, simultaneamente, calculamos os valores de \mathbf{F} e de \mathbf{B} , em cada célula, através do gradiente de ${}^0\mathbf{u}$, para obtermos a deformação do elemento de área. Novamente retomamos a avaliação do sistema (68) no contorno, porém agora com as componentes de \mathbf{M} diferentes de zero, e obtemos um novo vetor $\Delta\mathbf{x}$, computado com os primeiros valores da contribuição não linear:

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}({}_2^0\Delta\mathbf{u}^\Gamma, {}_2^0\Delta\mathbf{p}) = \Delta\mathbf{f}(\Delta\bar{\mathbf{u}}, \Delta\bar{\mathbf{p}}) + \mathbf{M}(\mathbf{u}^*, {}^0\mathbf{u}, {}_1^0\Delta\mathbf{u}). \quad (88)$$

Nas iterações sucessivas que acontecem ainda no primeiro incremento, as componentes de \mathbf{M} continuam sendo avaliadas em relação aos valores de ${}_{n-1}^0\Delta\mathbf{u}$, já conhecidos anteriormente, e de ${}^0\mathbf{u}$. Sendo este último constante nas iterações de cada incremento, a deformação do elemento de área também é e portanto necessita ser avaliada somente uma vez, a cada início de um novo incremento, mas sendo utilizada em todas as vezes que o sistema (68) é resolvido, ou seja, em todas as iterações. Este processo iterativo prossegue, até que o erro relativo, em relação aos incrementos de deslocamento em duas iterações consecutivas, seja menor que uma tolerância escolhida. Depois da convergência, com os valores de ${}^1\mathbf{u}$ e ${}^1\mathbf{p}^0$ (ou ${}^1\mathbf{p}$) calculados, um novo incremento é iniciado e o vetor \mathbf{M} , não mais nulo, é avaliado em relação ao deslocamento ${}^1\mathbf{u}$ e ao incremento de deslocamento ${}^0\Delta\mathbf{u}$ calculado na última iteração do incremento anterior. Esta análise continua até que se alcance o número total de incrementos escolhido previamente.

Para este processo descrito acima, o algoritmo a seguir, apresenta um resumo e nos dá uma prévia da implementação computacional para solução do problema:

Tabela 1 – Algoritmo para implementação da não-linearidade geométrica

Algoritmo

- (1) $k = 0$
- (2) $t = t_0 = 0$
- (3) Montar as matrizes dos coeficientes de influência \mathbf{H} e \mathbf{G}
- (4) ${}^0_0\mathbf{M} = \mathbf{0}$
- (5) ${}^0\mathbf{u}^\Omega = {}^0\mathbf{u}^\Gamma = \mathbf{0}$

$$(6) \quad {}^0\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(7) \quad k = k + 1$$

$$(8) \quad t = t_k = k \Delta t$$

$$(9) \quad n = 0$$

$$(10) \quad n = n + 1$$

(11) Introduzir as condições de contorno no sistema de equações lineares:

$$\mathbf{H}_n^k \Delta \mathbf{u}^\Gamma = \mathbf{G}_n^k \Delta \mathbf{p} \frac{da}{dA} + {}_{n-1}^k \mathbf{M}$$

obtendo o vetor ${}^0_n \Delta \mathbf{x}$ contendo as incógnitas (deslocamentos e forças de superfície incrementais) no contorno $\Gamma^{(0)}$

(12) Resolver o seguinte sistema de equações resultante:

$$\mathbf{A}_n^k \Delta \mathbf{x} = {}_n^k \Delta \mathbf{f}$$

(13) Reorganizar ${}_n^k \Delta \mathbf{x}$ e os valores prescritos das variáveis, segundo as condições de contorno fornecidas, nos vetores ${}_n^k \Delta \mathbf{u}^\Gamma$ e ${}_n^k \Delta \mathbf{p}^0$

(14) Obter os deslocamentos incrementais ${}_n^k \Delta \mathbf{u}^\Omega$ nos pontos do domínio $\Omega^{(0)}$ usando a seguinte expressão:

$${}_n^k \Delta \mathbf{u}^\Omega = \mathbf{G}_n^k \Delta \mathbf{p}^0 - \mathbf{H}_n^k \Delta \mathbf{u}^\Gamma + {}_{n-1}^k \mathbf{M}$$

(15) Calcular a deformação do elemento de área pela expressão:

$$\frac{da}{dA} = \frac{\det \mathbf{F}}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \mathbf{n}}}$$

(16) Obter ${}_n^k \mathbf{M}$ usando as derivadas de $u_{ij}^*(\xi, \mathbf{X})$, ${}_n^k \Delta \mathbf{u}^\Omega$, ${}_n^k \Delta \mathbf{u}^\Gamma$, ${}^k \mathbf{u}^\Omega$ e ${}^k \mathbf{u}^\Gamma$ na expressão (52) para pontos do domínio

(17) Calcular o erro relativo entre as incógnitas ${}_n^k \Delta \mathbf{u}$

$$(18) \quad {}_n^k E = \frac{\left| {}_n^k \Delta \mathbf{u} - {}_{n-1}^k \Delta \mathbf{u} \right|}{\left| {}_n^k \Delta \mathbf{u} \right|}$$

(19) Se $(\text{máx}({}_n^k E) > \text{tolerância})$ então voltar para (10)

$$(20) \quad {}^{k+1} \mathbf{u}^\Gamma = {}^k \mathbf{u}^\Gamma + {}_n^k \Delta \mathbf{u}^\Gamma$$

$$(21) \quad {}^{k+1} \mathbf{u}^\Omega = {}^k \mathbf{u}^\Omega + {}_n^k \Delta \mathbf{u}^\Omega$$

$$(22) \quad {}^{k+1} \mathbf{p}^0 = {}^k \mathbf{p}^0 + {}_n^k \Delta \mathbf{p}^0$$

$$(23) \quad {}^{k+1}_0\Delta \mathbf{x} = {}^k_0\Delta \mathbf{x}$$

(24) Se $(t_k < t_{final})$ então voltar para (7)

$$(25) \quad \mathbf{u} = {}^k_0\mathbf{u} + {}^k_n\Delta \mathbf{u}$$

$$(26) \quad \mathbf{p}^0 = {}^k_0\mathbf{p}^0 + {}^k_n\Delta \mathbf{p}^0$$

CAPÍTULO V

EXEMPLOS

Neste capítulo discutimos o desempenho da formulação desenvolvida, através da análise de dois exemplos retirados do artigo de PRIETO *et al.* (1998), que apresentamos a seguir.

V.1 – Chapa quadrada sujeita a tração simples

Para nossa primeira análise, avaliamos a extensão de uma chapa quadrada em estado plano de deformação, sujeita à tração por um carregamento uniformemente distribuído, com suas propriedades e dimensões dadas na figura 9:

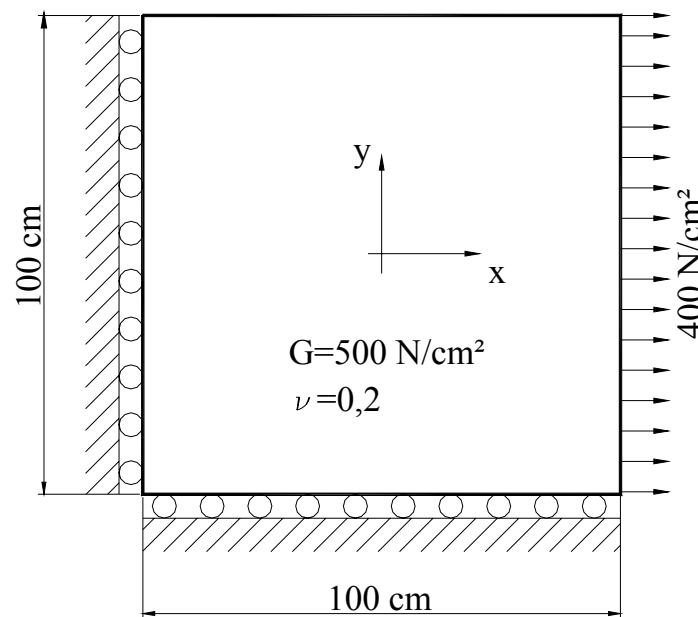


Figura 9 – Chapa quadrada sujeita a tração simples

Como vemos a chapa é impedida ao deslocamento em dois de seus bordos, por apoios de primeiro gênero. Solicitada por uma carga distribuída de 400 N/cm^2 , ou $4G/5$, a chapa se alonga, homogeneamente, na direção positiva de x , enquanto se encurta na direção de y , devido ao coeficiente de Poisson.

A avaliação deste problema é efetuada por PRIETO *et al.* (1998) através de uma única discretização, bem simples, do contorno (um elemento quadrático por lado) e do domínio (uma célula quadrada com oito nós, da família Serendipity) para uma tolerância de $10E-5$ e levando em consideração que as forças de superfície são dependentes da deformação do corpo. Os resultados obtidos são praticamente exatos. Comparando com sua análise, verificamos através de três modelos de discretização, que apresentamos nas figuras (10), (11) e (12):

1º modelo:

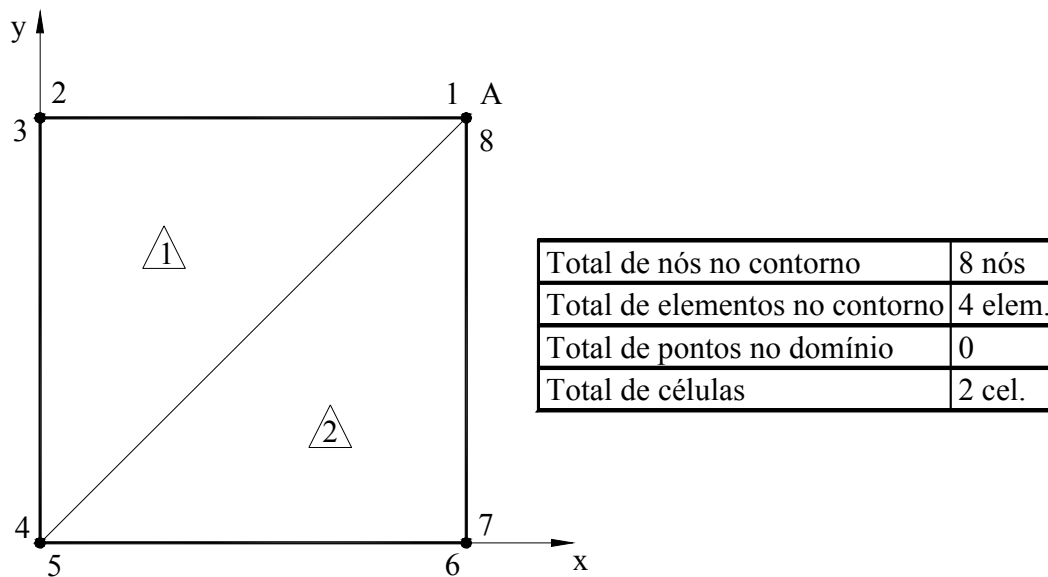


Figura 10 – Modelo 1 de discretização

2º modelo:

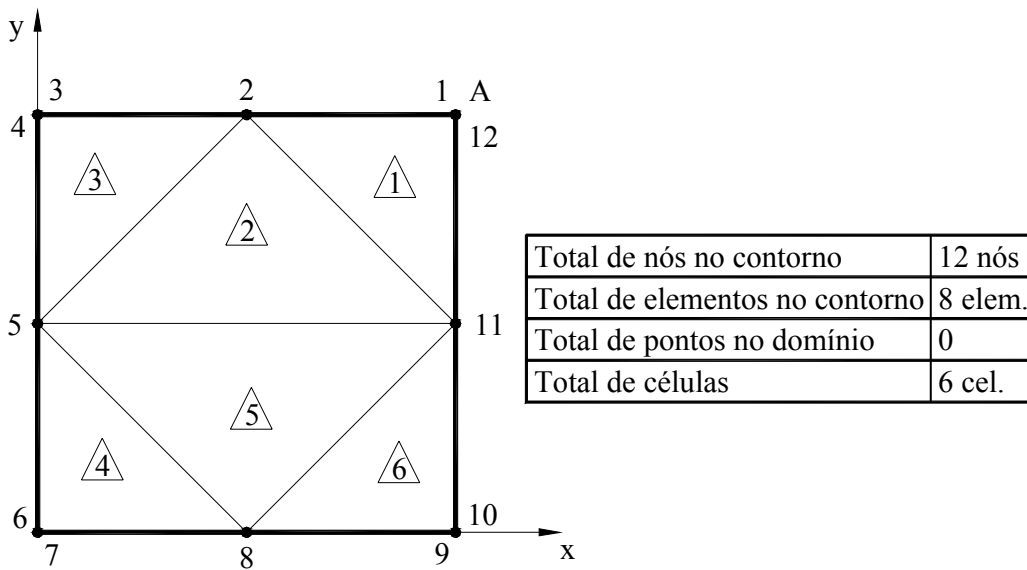


Figura 11 – Modelo 2 de discretização

3º modelo:

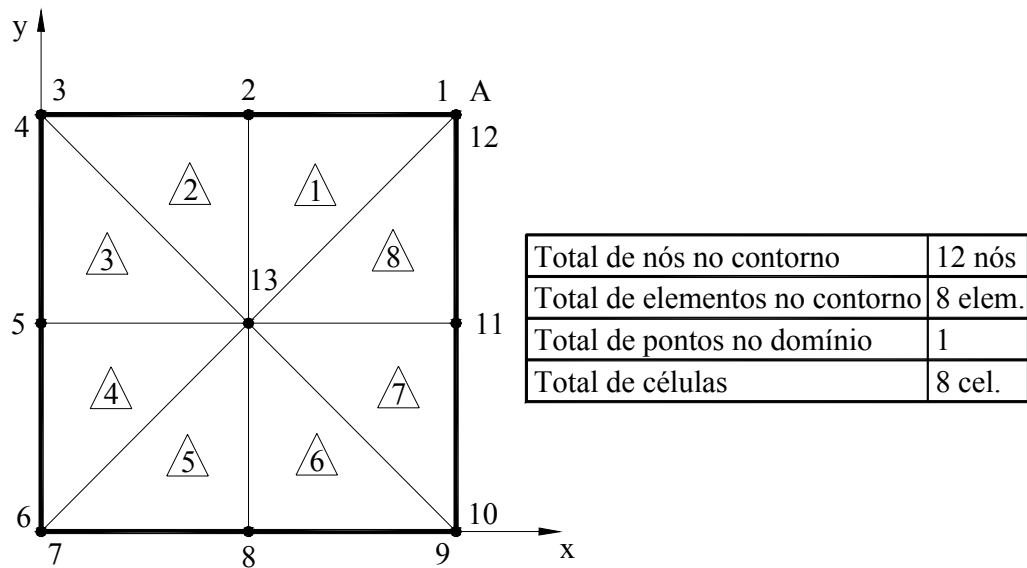


Figura 12 – Modelo 3 de discretização

Nestes, os deslocamentos do ponto A (indicado nas figuras) na configuração final do referido problema, obtidos para 5, 10, 20, 50 e 100 incrementos, considerando como limite para convergência 1000 iterações, usando uma tolerância de 10E-3 e calculados

com forças de superfícies dependentes da deformação do corpo (com deformação do elemento de área – DEA) são apresentados na tabela 2:

Tabela 2 – Deslocamentos obtidos para os três modelos apresentados

		Numero de incrementos de tempo				
		5	10	20	50	100
Modelo 1	u_1	23.40579344	22.86180735	22.70669645	22.65224754	22.64117947
	u_2	- 6.64351722	- 6.55278807	- 6.52596713	- 6.51538807	- 6.51281925
Modelo 2	u_1	23.40579436	22.86180628	22.70669678	22.65224456	22.64105700
	u_2	- 6.64351464	- 6.55278564	- 6.52596565	-6.51538445	- 6.51280067
Modelo 3	u_1	23.40577179	22.86180610	22.70669959	22.65225185	-
	u_2	- 6.55278518	- 6.55278564	- 6.52596746	- 6.51538966	-
Sol.	u_1	22.103				
	u_2	- 6.337				

Como podemos observar, os valores obtidos mostram que há uma convergência para o valor exato, à medida que aumentamos o número de incrementos. Neste exemplo particular, a convergência acontece para os valores obtidos em 100 incrementos. Vemos que de 50 a 100, a melhora é pequena; para valores maiores, os resultados são praticamente iguais aqueles obtidos para 100. O refinamento da malha não nos forneceu valores melhores, como podemos constatar na tabela 2, o que nos parece que pouca influência teve para este exemplo. A escolha da precisão dupla, também, pouca alteração produziu.

O fato que nos chamou a atenção foi a instabilidade do processo de convergência do método iterativo, que acontecia a partir de certo incremento, quando avaliávamos o problema para um número grande de incrementos em uma discretização mais refinada (ex.: cálculo de 100 incrementos no modelo 3). O motivo desta ocorrência ainda é por nós desconhecido, pois não fizemos um estudo mais profundo deste processo. Acreditamos que a interpolação linear que empregamos esteja provocando tanto a queda do nível de precisão em nossos cálculos (derivadas constantes nas células do domínio),

quanto gerando erros que se acumulam a cada incremento, provocando a instabilidade. Uma outra diferença entre a nossa e a análise deles (PRIETO *et al.*, 1998) é o critério para o cálculo do erro. Eles o efetuam a partir dos valores do gradiente dos incrementos de deslocamentos. Realmente, para este exemplo, o uso deste critério mantém a estabilidade da convergência mas os valores finais não são melhores que os gerados pelo nosso critério; além do mais cada incremento converge a número de iterações baixas, o que nos faz crer que o nosso critério é mais rigoroso que o deles. Podemos ver no gráfico da figura 13, abaixo, o comportamento dos valores do erro relativo dos deslocamentos (c/DEA), nas duas direções, obtidos em relação à solução exata apresentada:

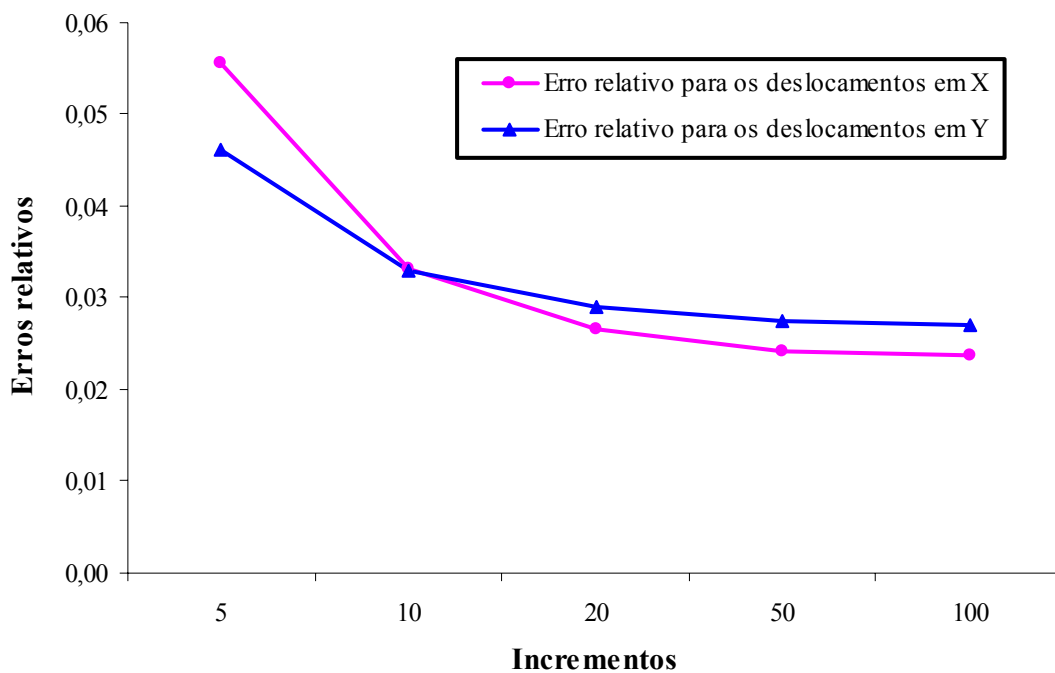


Figura 13 – Erro relativo para cada número de incremento analisado

No gráfico que apresentamos na figura 14 a seguir, plotamos os valores dos deslocamentos de três análises: linear, não linear sem deformação do elemento de área (s/DEA) ou força de superfície independente da deformação e não linear com deformação do elemento de área (c/DEA) ou força de superfície dependente da deformação, obtidos com 50 incrementos a partir do modelo 1 de discretização:

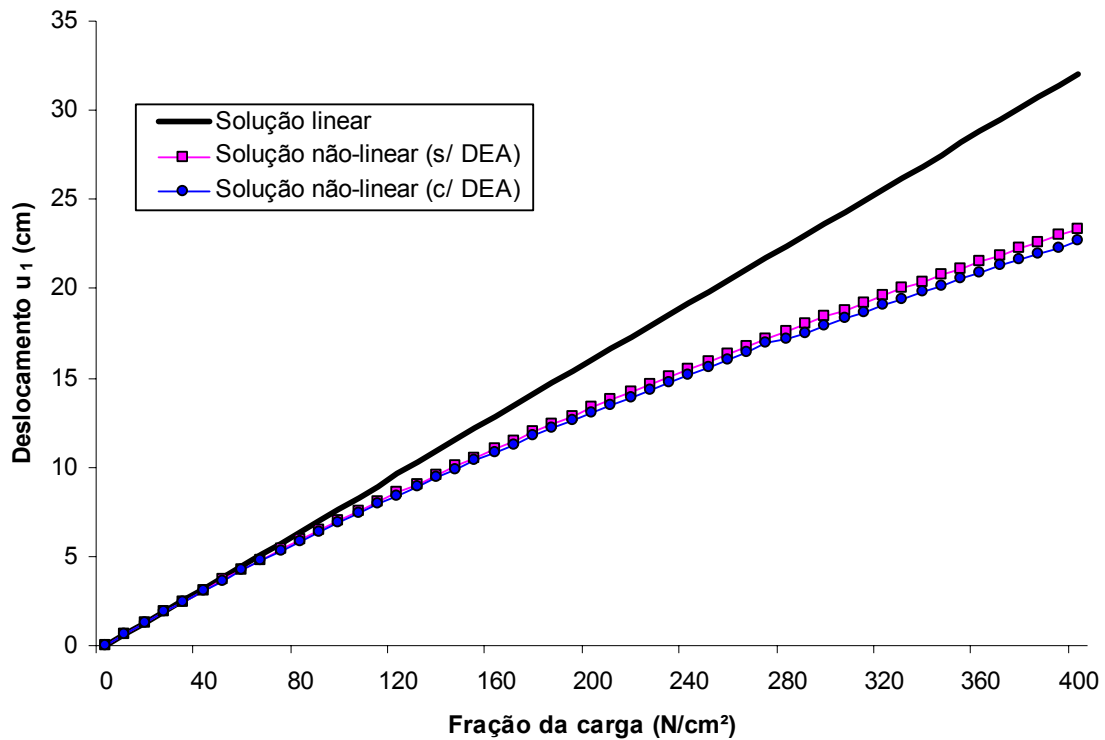


Figura 14 – Deformação não-linear

Estes resultados, de certa forma, nos satisfazem para este estudo inicial, porque nos mostram uma coerência com o esperado, atendendo, para todos os nós funcionais da discretização do corpo, as prescrições e a simetria. Mesmo as diferenças do uso, ou não, da mudança de área no processo de referência à configuração indeformada, são vistas claramente nas curvas da figura 14.

Mostramos nos dois gráficos das figuras 15 e 16, o processo de convergência para a análise com deformação do elemento de área (c/DEA) e sem (s/DEA), respectivamente, plotando os valores das iterações necessárias para a convergência de cada incremento. Na figura 15, podemos ver que estes valores indicam um crescimento da quantidade de iterações durante a análise do problema (modelo 1) para os 50 incrementos. Na figura 16, o comportamento é um tanto diferente, porque mantém um comportamento crescente para os incrementos ímpares e um constante para os incrementos pares. Representamos, somente os valores do modelo 1, porque os demais são similares a este.

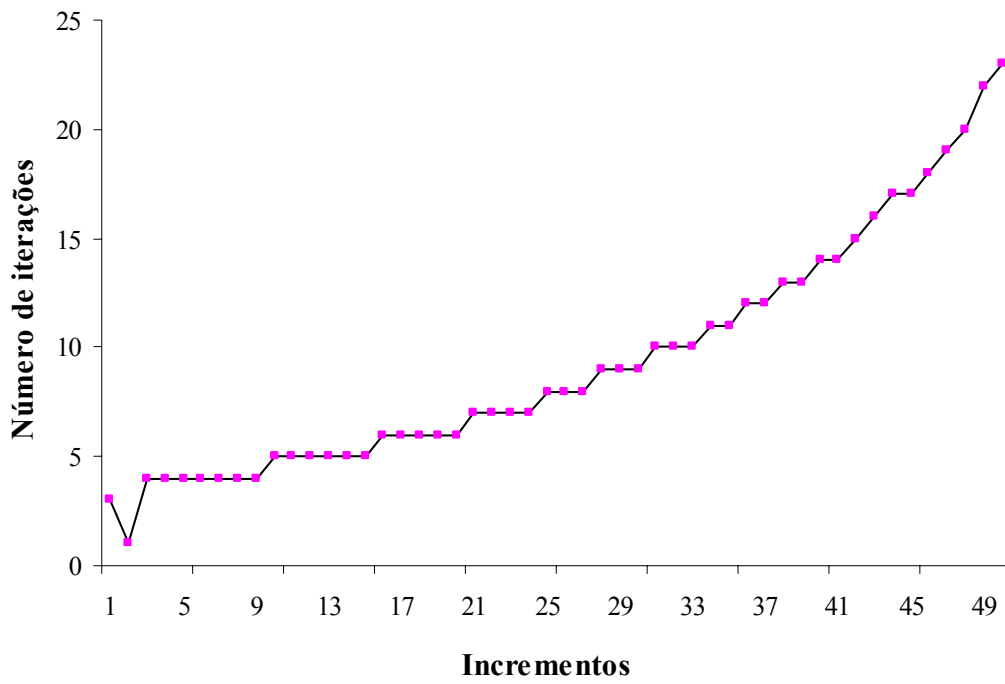


Figura 15 – Convergência para análise c/ DEA

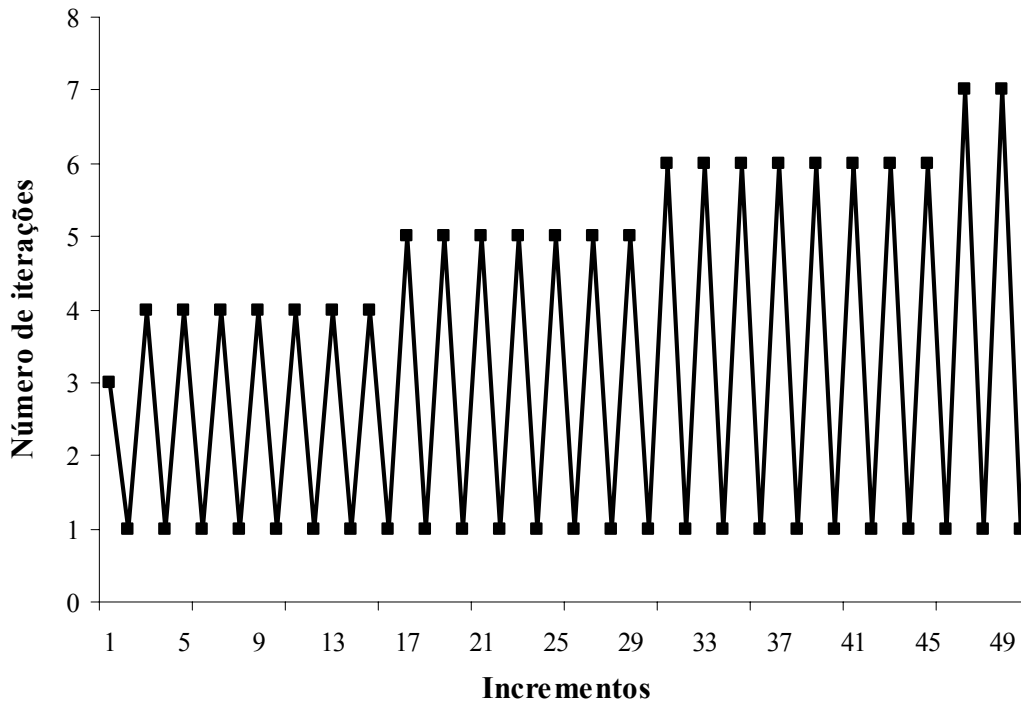


Figura 16 – Convergência para análise s/ DEA

V.2 – Cilindro Vazado Sujeito a Pressões Internas

Para nossa segunda análise, um cilindro vazado, também sob estado plano de deformação, é solicitado internamente por pressões de 125 N/cm^2 , com suas dimensões dadas na figura 17, e possuindo as seguintes constantes elásticas: $G = 500 \text{ N/cm}^2$ e $\nu = 0,25$:

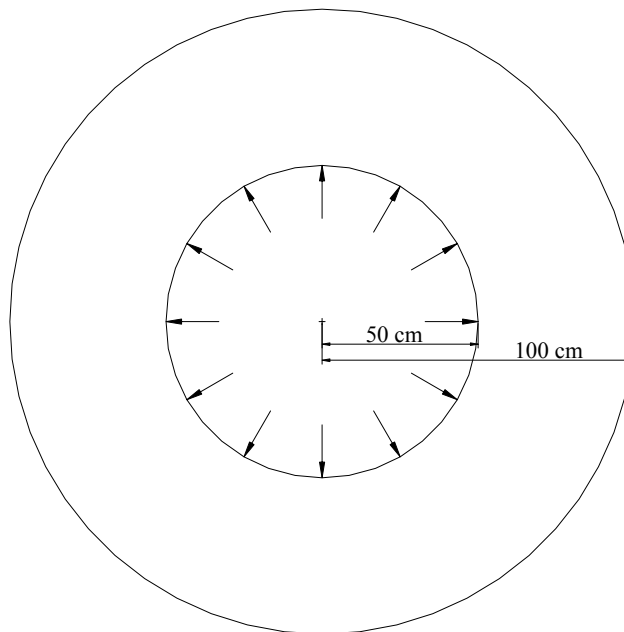


Figura 17 – Cilindro vazado sujeito a pressões internas

Para este exemplo efetuamos a análise discretizando um quarto de sua geometria, devido à simetria existente, conforme pode ser visto nos modelos discretizados apresentados nas figuras 18, 19 e 20:

1º modelo:

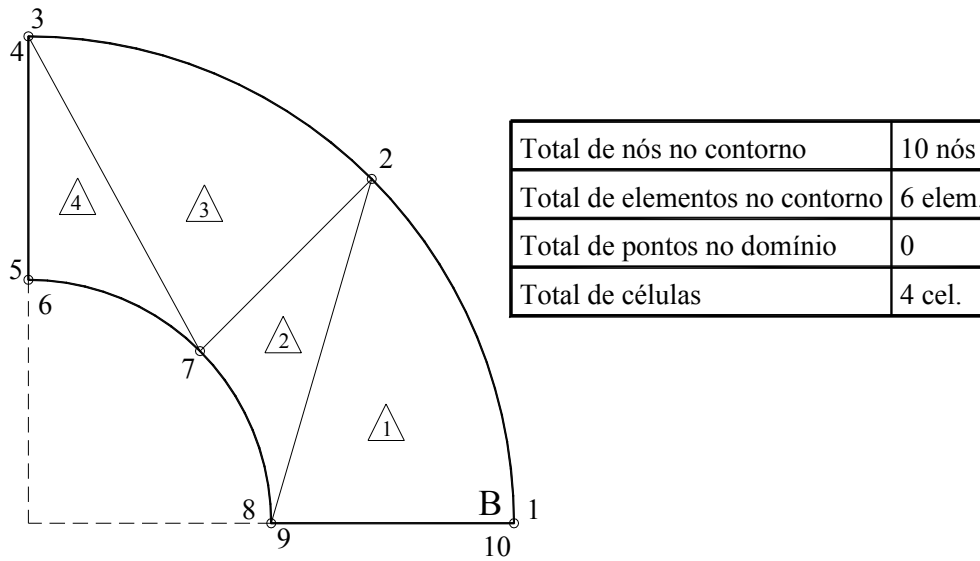


Figura 18 – Modelo 1 de discretização

2º modelo:

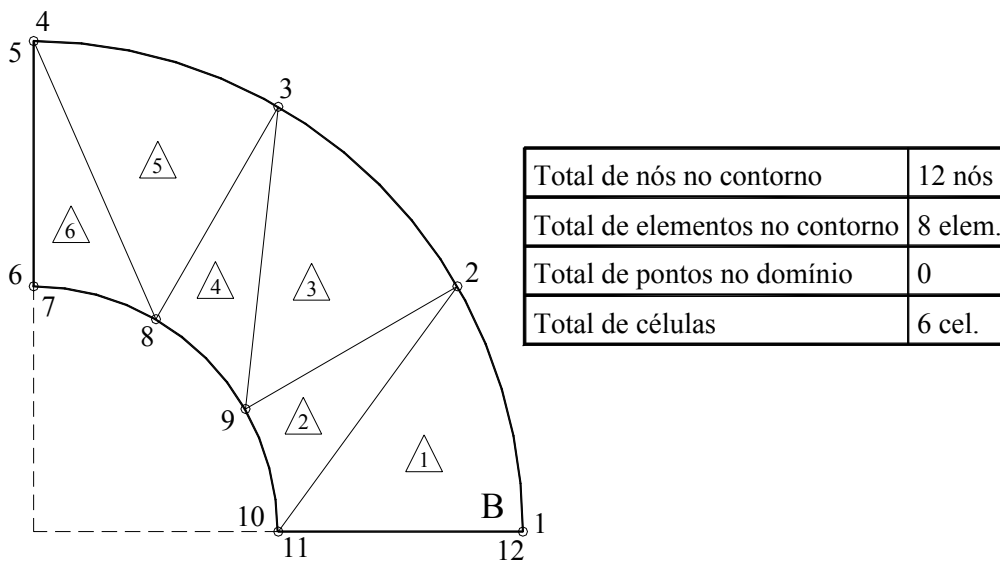


Figura 19 – Modelo 2 de discretização

3º modelo:

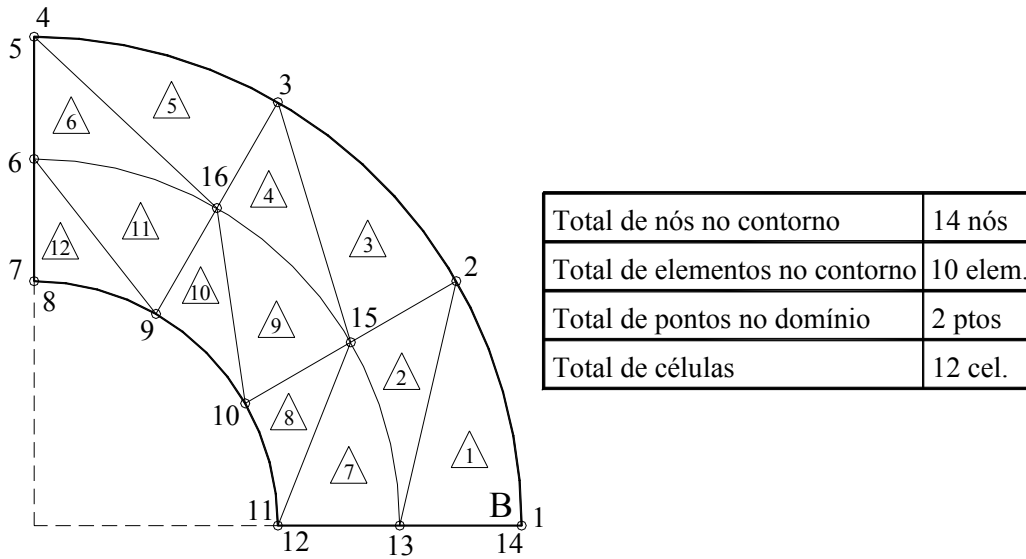


Figura 20 – Modelo 3 de discretização

Os resultados finais obtidos para o ponto B (indicado nas figuras), na configuração final deste problema, para 5, 10, 20 e 50 incrementos, considerando como limite para convergência 1000 iterações, usando uma tolerância de 10E-5, são apresentados na tabela 3 para a força de superfície dependente da deformação do cilindro (c/DEA):

Tabela 3 – Deslocamentos obtidos para os três modelos apresentados

		Numero de incrementos de tempo			
		5	10	20	50
Modelo 1	u_1	4.53953034	4.52949936	4.53320958	4.53835050
	u_1	4.75719340	4.75735455	4.76477559	4.77172287
Modelo 3	u_1	5.25850089	5.25109575	5.25454528	5.25909359

Neste exemplo, o refinamento da malha influencia bastante os resultados finais. Vemos que a convergência aumenta com o refinamento, pois obtemos diferenças cada vez menores, à medida que melhor discretizamos a geometria do cilindro. Idêntico ao comportamento do exemplo anterior, a instabilidade do processo iterativo e incremental continua a acontecer para discretizações mais refinadas, acreditamos que provocada pelos mesmos motivos, mas agora de forma mais exacerbada, porque não conseguimos obter uma boa precisão para o cálculo das reações nos apoios.

Na figura 21 representamos um gráfico com os valores dos deslocamentos finais (modelo 1) obtidos para cada incremento de carga e conseguimos observar o comportamento não linear do corpo, posto em confronto com os resultados de sua análise não linear:

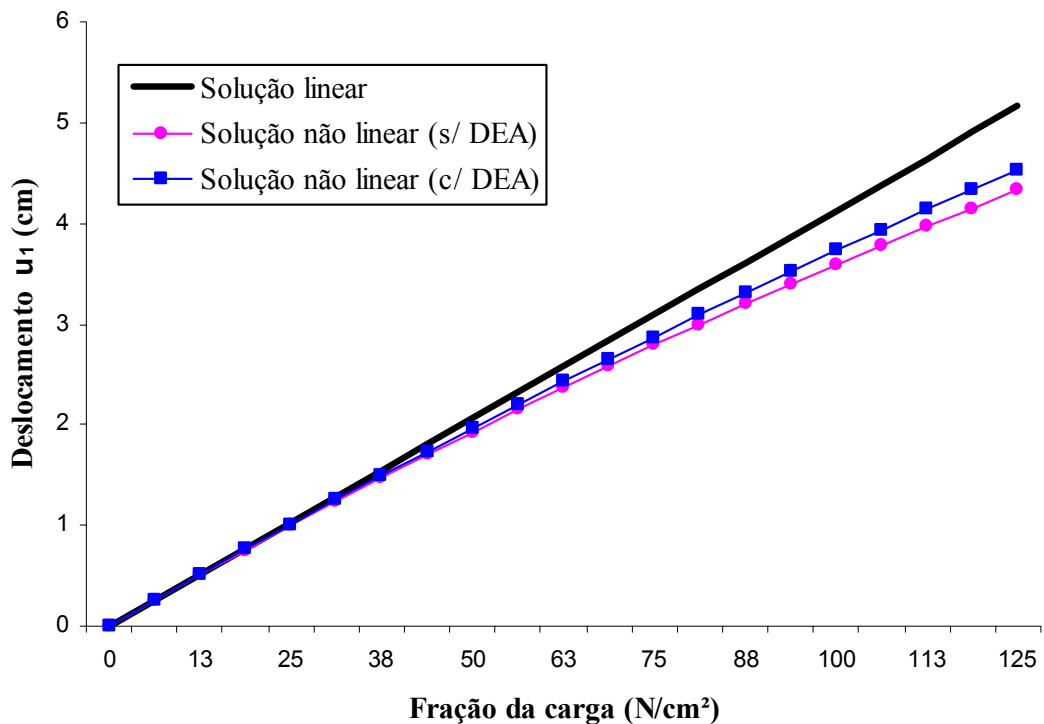


Figura 21 – Comportamento não linear

Plotamos, somente, os valores do modelo 1, porque são suficientes para demonstrar este comportamento, visto que todas as demais discretizações fornecem valores similares.

Neste exemplo também ficam claras as diferenças entre os deslocamentos obtidos com e sem deformação do elemento de área. As áreas, realmente, tendem a aumentar durante a deformação, o que conseguimos verificar na figura 21.

Abaixo, mostramos dois gráficos, nas figuras 22 e 23, representando seu processo de convergência para a análise de 20 incrementos, considerando, respectivamente, a força de superfície dependente de sua deformação (c/DEA) e a força de superfície independente de sua deformação (s/DEA), e vemos que seu comportamento é o mesmo da análise do exemplo anterior.

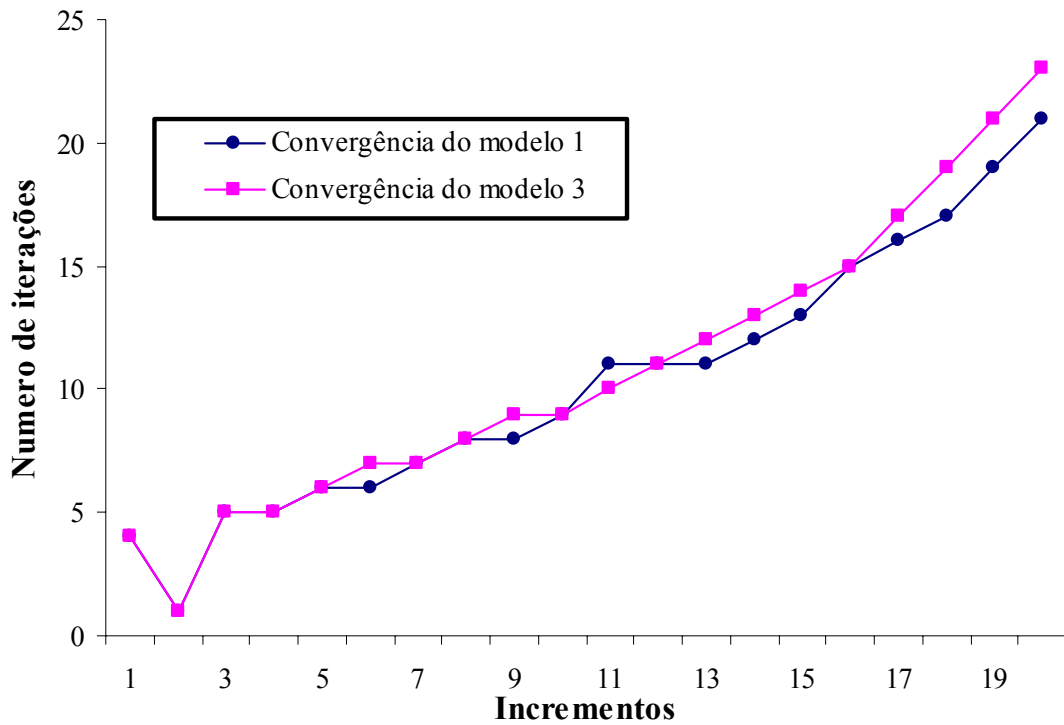


Figura 22 – Convergência para análise c/DEA

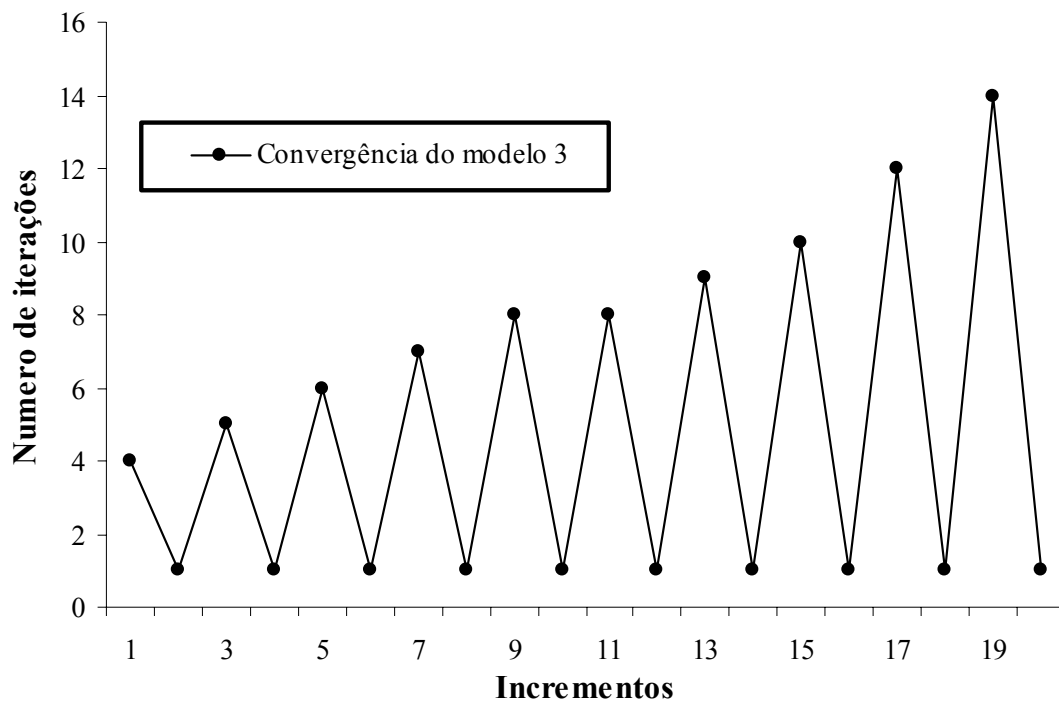


Figura 23 – Convergência para análise s/DEA

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES E SUGESTÕES FINAIS

Nosso intento se conclui aqui com a formulação desenvolvida e os resultados apresentados, embora poucos, para demonstrar a sua eficiência na análise de uma variedade de problemas bidimensionais com não-linearidade geométrica. Entretanto, foram capazes de validar os nossos esforços, com resultados coerentes e aceitáveis para uma pesquisa inicial no que tange à formulação da teoria elástica não linear para o Método dos Elementos de Contorno, baseada nos tensores da Mecânica do Meio Contínuo.

O objetivo, porém, desde o início, era chegarmos às equações integrais do método, enquanto que os resultados numéricos, embora importantes, eram vistos apenas como ferramentas de prova das equações geradas. Desta forma, não houve um estudo preciso da convergência do processo, da obtenção do melhor critério de parada, dos erros e da escolha inicial dos elementos para a discretização do contorno e do domínio. Foram obtidos resultados aceitáveis, mas não suficientes para problemas que exigiram um maior refinamento de sua discretização. Portanto, acreditamos que a divergência do processo nas malhas mais refinadas foi provocada pela obtenção de derivadas constantes em cada célula, quando as mesmas deveriam variar ponto a ponto no domínio dos problemas. Diversas atitudes foram tomadas com o fim de melhorarmos os resultados e até suprir esta insuficiência das funções de interpolação, mas nem utilizando 20 pontos de Gauss nas células, nem empregando precisão dupla na implementação computacional, houve uma melhora considerável. Além disto deixamos de avaliar, também, as deformações e as tensões no domínio que poderiam ser encontradas, sem dificuldades, através das equações (11) e (20) dos tensores fornecidos no início do trabalho, mas devido ao fato de dependerem dos valores das derivadas, teriam sua precisão bastante reduzida. Contudo chegamos a uma formulação que, apesar da integral de domínio e do tamanho de seu integrando, toda ela é ainda dependente do contorno o que, para uma primeira análise, mostra-se satisfatória em comparação à formulação do Método dos Elementos Finitos, já bem estabelecida na literatura correspondente.

Por fim, satisfeitos com os resultados alcançados, deixamos uma porta aberta aos colegas para novos estudos deste assunto, a fim de que possam contribuir com uma melhor modelagem matemática para a integral de domínio e com técnicas numéricas mais eficientes que possam localizar, equacionar e corrigir os problemas ainda existentes em nossa formulação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATHE, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*. New Jersey, Prentice Hall.
- BREBBIA, C. A., Telles, J. C. F., WROBEL, L. C., 1984, *Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering*. New York, Springer-Verlag.
- CHADWICK, P., 1999, *Continuum Mechanics, Concise Theory and Problems*, 1 ed.. New York, Dover.
- CHANDRA, A., MUKHERJEE, S., 1983, “Applications of the Boundary Element Method to Large Strain Deformations Problems of Viscoplasticity.”, *Journal of Strain Analysis*, v. 8, n. 4, pp. 261-270.
- COIMBRA, A. L., 1978, *Lições de Mecânica do Contínuo*. São Paulo, Edgard Blücher.
- GARCIA, L.F.T. e VILLAÇA, S.F., 1999, *Introdução à Teoria da Elasticidade Não Linear*, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 3a Ed.
- JIN, H., MATTIASSON, K., RUNCSSON, K., SAMUELSSON, A., 1988, “On the Use of the Boundary Element Method for Elastostatic Large Deformation Problems.”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 25, pp. 165-176.
- MALVERN, L.E., 1969, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. New Jersey, Prentice Hall.
- MASE, G. E., MASE, G. T., 1992, *Continuum Mechanics for Engineers*. Boca Ranton, CRC Press.
- MOREIRA, M. S. S., 1983, *Método dos Elementos de Contorno Para Elasticidade Linear Bidimensional*. Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

- NOVATI C., BREBBIA, C. A. , 1982, “Boundary Element Formulation for Geometric Non-Linear Elastostatic.”, *Applied Mathematical Modeling*, v. 6, pp. 136-138.
- PRIETO, I., IBÁN, A. L., GARRIDO, J. A. , 1998, “2D Analysis for Geometrically Non-Linearity Elastic Problems Using BEM.”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 23, n. 3, pp. 247-256.
- SANTIAGO, J. A. F., 1987, *Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Bidimensional com o Uso de Microcomputadores*. Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- TELLES, J. C. F., 1983, *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*. New York, Springer-Verlag.
- TRUESDELL, C., NOLL, W., 1965, *The non-linear field theories of mechanics*. In *Encyclopedia of Physics*, ed. S. Flügge, vol. 3/3, Berlin, Springer-Verlag.

APÊNDICE A

Nesta seção apresentamos o desenvolvimento das equações incrementais citadas no capítulo II e as aproveitamos para substituir no vetor não linear \mathcal{M} , definido na eq. (51), e obtermos a expressão final (52) em relação a gradientes de deslocamentos, incrementos de deslocamentos e incrementos de deslocamentos fundamentais. Ao final, incluímos, também, a dedução da expressão da mudança de área.

I - Desenvolvimento dos incrementos das equações governantes:

i) Equação do tensor deformação de Lagrange:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i} + \mathbf{u}_{k,i} \mathbf{u}_{k,j}). \quad (\text{A.1})$$

A forma incremental do tensor é apresentada abaixo:

$$\Delta E_{ij} = {}^{t+\Delta t}E_{ij} - {}^tE_{ij}, \quad (\text{A.2})$$

onde:

$${}^{t+\Delta t}E_{ij} = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_{i,j} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_{j,i} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_{k,i} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_{k,j}), \quad (\text{A.3})$$

$${}^tE_{ij} = \frac{1}{2}({}^t\mathbf{u}_{i,j} + {}^t\mathbf{u}_{j,i} + {}^t\mathbf{u}_{k,i} {}^t\mathbf{u}_{k,j}), \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta \mathbf{u}_{i,j} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_{i,j} - {}^t\mathbf{u}_{i,j} \quad \rightarrow \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}_{i,j} = {}^t\mathbf{u}_{i,j} + \Delta \mathbf{u}_{i,j}. \quad (\text{A.5})$$

Agora, substituindo as expressões (A.3) e (A.4) na forma incremental (A.2), temos:

$$\Delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^{t+\Delta t}u_{i,j} + {}^{t+\Delta t}u_{j,i} + {}^{t+\Delta t}u_{k,i} {}^{t+\Delta t}u_{k,j} \right) - \frac{1}{2} \left({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j} \right).$$

Substituindo então a expressão (A.5) e efetuando os procedimentos de cálculos intermediários, obtemos a expressão final requerida:

$$\Delta E_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[\left({}^t u_{i,j} + \Delta u_{i,j} \right) + \left({}^t u_{j,i} + \Delta u_{j,i} \right) + \left({}^t u_{k,i} + \Delta u_{k,i} \right) \left({}^t u_{k,j} + \Delta u_{k,j} \right) \right] - \\ \frac{1}{2} \left({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j} \right) \end{array} \right\},$$

$$\Delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\Delta u_{i,j} \right) + \left(\Delta u_{j,i} \right) + \left({}^t u_{k,i} \Delta u_{k,j} + {}^t u_{k,j} \Delta u_{k,i} + \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} \right) \right]. \quad (A.6)$$

ii) Equação do 1º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff em relação ao 2º tensor:

$$\mathbf{T}_{ij}^0 = F_{ik} \tilde{\mathbf{T}}_{kj}. \quad (A.7)$$

A forma incremental do tensor é apresentada abaixo:

$$\Delta \mathbf{T}_{ij}^0 = {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{ij}^0 - {}^t \mathbf{T}_{ij}^0, \quad (A.8)$$

onde

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{ij}^0 = {}^{t+\Delta t} F_{ik} {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{T}}_{kj}, \quad (A.9)$$

$${}^t \mathbf{T}_{ij}^0 = {}^t F_{ik} {}^t \tilde{\mathbf{T}}_{kj}, \quad (A.10)$$

$${}^{t+\Delta t} F_{ik} = {}^{t+\Delta t} u_{i,k} + \delta_{ik}, \quad (A.11)$$

$${}^t F_{ik} = {}^t u_{i,k} + \delta_{ik}. \quad (A.12)$$

Substituindo, inicialmente, as expressões (A.9) e (A.10) e em seguida as (A.11) e (A.12), efetuando os cálculos intermediários, encontramos:

$$\begin{aligned}
\Delta T_{ij}^0 &= {}^{t+\Delta t}F_{ik} {}^{t+\Delta t}\tilde{T}_{kj} - {}^tF_{ik} {}^t\tilde{T}_{kj}, \\
\Delta T_{ij}^0 &= \left({}^{t+\Delta t}u_{i,k} + \delta_{ik} \right) {}^{t+\Delta t}\tilde{T}_{kj} - \left({}^tu_{i,k} + \delta_{ik} \right) {}^t\tilde{T}_{kj}, \\
\Delta T_{ij}^0 &= \left({}^{t+\Delta t}u_{i,k} {}^{t+\Delta t}\tilde{T}_{kj} + \delta_{ik} {}^{t+\Delta t}\tilde{T}_{kj} \right) - \left({}^tu_{i,k} {}^t\tilde{T}_{kj} + \delta_{ik} {}^t\tilde{T}_{kj} \right), \\
\Delta T_{ij}^0 &= \left({}^{t+\Delta t}u_{i,k} {}^{t+\Delta t}\tilde{T}_{kj} + {}^{t+\Delta t}\tilde{T}_{ij} \right) - \left({}^tu_{i,k} {}^t\tilde{T}_{kj} + {}^t\tilde{T}_{ij} \right), \\
\Delta T_{ij}^0 &= \left({}^tu_{i,k} + \Delta u_{i,k} \right) \left({}^t\tilde{T}_{kj} + \Delta \tilde{T}_{kj} \right) + \left({}^t\tilde{T}_{ij} + \Delta \tilde{T}_{ij} \right) - {}^tu_{i,k} {}^t\tilde{T}_{kj} - {}^t\tilde{T}_{ij}, \\
\Delta T_{ij}^0 &= \left[\begin{array}{l} {}^tu_{i,k} {}^t\tilde{T}_{kj} + \Delta u_{i,k} {}^t\tilde{T}_{kj} + {}^tu_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} + \Delta u_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} + \left({}^t\tilde{T}_{ij} + \Delta \tilde{T}_{ij} \right) - \\ {}^tu_{i,k} {}^t\tilde{T}_{kj} - {}^t\tilde{T}_{ij} \end{array} \right], \\
\Delta T_{ij}^0 &= \Delta u_{i,k} {}^t\tilde{T}_{kj} + {}^tu_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} + \Delta u_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} + \Delta \tilde{T}_{ij}, \\
\Delta T_{ij}^0 &= \Delta \tilde{T}_{ij} + {}^tu_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} + \Delta u_{i,k} \left({}^t\tilde{T}_{kj} + \Delta \tilde{T}_{kj} \right). \tag{A.13}
\end{aligned}$$

II - Obtenção do termo não linear em função de deslocamento e incrementos de deslocamentos:

$$\mathcal{M}_i = - \left[T_{ij}^* \left({}^tu_{k,i} + \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \right) \Delta u_{k,j} + u_{i,j}^* \Delta u_{i,k} \left(\Delta \tilde{T}_{kj} + {}^t\tilde{T}_{kj} \right) + u_{i,j}^* {}^tu_{i,k} \Delta \tilde{T}_{kj} \right]. \tag{A.14}$$

Chegaremos à expressão final obtendo cada parcela por vez. Desta forma:

i) Primeiro termo do vetor não linear:

$$T_{ij}^* \left({}^tu_{k,i} + \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \right) \Delta u_{k,j}. \tag{A.15}$$

Fornecendo a equação da relação constitutiva do corpo infinito:

$$\mathbf{T}_{ij}^* = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^*. \quad (\text{A.16})$$

E em seguida o tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^*$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{k,l}^* + \mathbf{u}_{l,k}^*). \quad (\text{A.17})$$

Substituímos a eq. (A.17) em (A.16) e obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ij}^* &= [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{k,l}^* + \mathbf{u}_{l,k}^*), \\ \mathbf{T}_{ij}^* &= \frac{1}{2} \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{u}_{k,l}^* + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{u}_{k,l}^* + \delta_{il} \delta_{jk} \mathbf{u}_{k,l}^*) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{u}_{l,k}^* + \right. \\ &\quad \left. \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{u}_{l,k}^* + \delta_{il} \delta_{jk} \mathbf{u}_{l,k}^*) \right], \\ \mathbf{T}_{ij}^* &= \frac{1}{2} [\lambda \delta_{ij} \mathbf{u}_{l,l}^* + \mu (\delta_{ik} \mathbf{u}_{k,j}^* + \delta_{il} \mathbf{u}_{j,l}^*) + \lambda \delta_{ij} \mathbf{u}_{l,l}^* + \mu (\delta_{ik} \mathbf{u}_{j,k}^* + \delta_{il} \mathbf{u}_{l,j}^*)], \\ \mathbf{T}_{ij}^* &= \frac{1}{2} [\lambda \delta_{ij} \mathbf{u}_{l,l}^* + \mu (\mathbf{u}_{i,j}^* + \mathbf{u}_{j,i}^*) + \lambda \delta_{ij} \mathbf{u}_{l,l}^* + \mu (\mathbf{u}_{j,i}^* + \mathbf{u}_{i,j}^*)], \\ \mathbf{T}_{ij}^* &= \lambda \delta_{ij} \mathbf{u}_{l,l}^* + \mu (\mathbf{u}_{i,j}^* + \mathbf{u}_{j,i}^*). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo, então, a expressão (A.18) em (A.15) e procedendo com os cálculos, temos para expressão final, a seguinte:

$$\left[\lambda \delta_{ij} \mathbf{u}_{l,l}^* + \mu (\mathbf{u}_{i,j}^* + \mathbf{u}_{j,i}^*) \right] \left({}^t \mathbf{u}_{k,i} + \frac{\Delta \mathbf{u}_{k,i}}{2} \right) \Delta \mathbf{u}_{k,j},$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& \lambda \delta_{ij} u_{1,l}^* {}^t u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \mu \left(u_{i,j}^* {}^t u_{k,i} \Delta u_{k,j} + u_{j,i}^* {}^t u_{k,i} \Delta u_{k,j} \right) + \\
& \lambda \delta_{ij} u_{1,l}^* \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \Delta u_{k,j} + \\
& \mu \left(u_{i,j}^* \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \Delta u_{k,j} + u_{j,i}^* \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \Delta u_{k,j} \right)
\end{aligned} \right], \\
& \left[\begin{aligned}
& \lambda u_{1,l}^* {}^t u_{k,j} \Delta u_{k,j} + \mu \left(u_{i,j}^* {}^t u_{k,i} \Delta u_{k,j} + u_{j,i}^* {}^t u_{k,i} \Delta u_{k,j} \right) + \\
& \lambda u_{1,l}^* \frac{\Delta u_{k,j}}{2} \Delta u_{k,j} + \\
& \mu \left(u_{i,j}^* \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \Delta u_{k,j} + u_{j,i}^* \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \Delta u_{k,j} \right)
\end{aligned} \right], \\
& \left[\begin{aligned}
& \lambda u_{1,l}^* \Delta u_{k,j} \left({}^t u_{k,j} + \frac{\Delta u_{k,j}}{2} \right) + \mu u_{i,j}^* \Delta u_{k,j} \left({}^t u_{k,i} + \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \right) + \\
& \mu u_{j,i}^* \Delta u_{k,j} \left({}^t u_{k,i} + \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \right)
\end{aligned} \right]. \tag{A.19}
\end{aligned}$$

ii) Segundo termo do vetor não linear:

$$u_{i,j}^* \Delta u_{i,k} \left(\Delta \tilde{T}_{kj} + {}^t \tilde{T}_{kj} \right). \tag{A.20}$$

Fornecendo as expressões da relação constitutiva e o incremento da relação constitutiva do problema estudado:

$$\Delta \tilde{T}_{kj} = C_{kjlm} \Delta E_{lm} = \left[\lambda \delta_{kj} \delta_{lm} + \mu \left(\delta_{kl} \delta_{jm} + \delta_{km} \delta_{jl} \right) \right] \Delta E_{lm}, \tag{A.21}$$

$$\tilde{T}_{kj} = C_{kjlm} E_{lm} = \left[\lambda \delta_{kj} \delta_{lm} + \mu \left(\delta_{kl} \delta_{jm} + \delta_{km} \delta_{jl} \right) \right] E_{lm}. \tag{A.22}$$

E também as equações de $\Delta \mathbf{E}$ e de \mathbf{E} :

$$\Delta E_{lm} = \frac{1}{2} \left(\Delta u_{l,m} + \Delta u_{m,l} + {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,l} + {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,m} + \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,m} \right), \tag{A.23}$$

$$E_{lm} = \frac{1}{2} ({}^t u_{l,m} + {}^t u_{m,l} + {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,m}). \quad (\text{A.24})$$

Substituindo, primeiro, a expressão (A.24) na (A.22) e efetuando os procedimentos intermediários, encontramos:

$${}^t \tilde{T}_{kj} = [\lambda \delta_{kj} \delta_{lm} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} + \delta_{km} \delta_{jl})] \frac{1}{2} ({}^t u_{l,m} + {}^t u_{m,l} + {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,m}),$$

$${}^t \tilde{T}_{kj} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \lambda \delta_{kj} \delta_{lm} {}^t u_{l,m} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} {}^t u_{l,m} + \delta_{km} \delta_{jl} {}^t u_{l,m}) + \\ \lambda \delta_{kj} \delta_{lm} {}^t u_{m,l} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} {}^t u_{m,l} + \delta_{km} \delta_{jl} {}^t u_{m,l}) + \\ \lambda \delta_{kj} \delta_{lm} {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,m} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,m} + \delta_{km} \delta_{jl} {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,m}) \end{array} \right],$$

$${}^t \tilde{T}_{kj} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \lambda \delta_{kj} {}^t u_{l,l} + \mu (\delta_{kl} {}^t u_{l,j} + \delta_{km} {}^t u_{j,m}) + \\ \lambda \delta_{kj} {}^t u_{l,l} + \mu (\delta_{kl} {}^t u_{j,l} + \delta_{km} {}^t u_{m,j}) + \\ \lambda \delta_{kj} {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,l} + \mu (\delta_{kl} {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,l} + \delta_{km} {}^t u_{n,j} {}^t u_{n,m}) \end{array} \right],$$

$${}^t \tilde{T}_{kj} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \lambda \delta_{kj} {}^t u_{l,l} + \mu ({}^t u_{k,j} + {}^t u_{j,k}) + \\ \lambda \delta_{kj} {}^t u_{l,l} + \mu ({}^t u_{j,k} + {}^t u_{k,j}) + \\ \lambda \delta_{kj} {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,l} + \mu ({}^t u_{n,k} {}^t u_{n,j} + {}^t u_{n,j} {}^t u_{n,k}) \end{array} \right],$$

$${}^t \tilde{T}_{kj} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \lambda \delta_{kj} {}^t u_{l,l} + \mu {}^t u_{k,j} + \mu {}^t u_{j,k} + \\ \lambda \delta_{kj} {}^t u_{l,l} + \mu {}^t u_{j,k} + \mu {}^t u_{k,j} + \\ \lambda \delta_{kj} {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,l} + \mu {}^t u_{n,k} {}^t u_{n,j} + \mu {}^t u_{n,j} {}^t u_{n,k} \end{array} \right),$$

$${}^t \tilde{T}_{kj} = \lambda \delta_{kj} {}^t u_{l,l} + \mu {}^t u_{k,j} + \mu {}^t u_{j,k} + \mu {}^t u_{n,k} {}^t u_{n,j} + \frac{1}{2} (\lambda \delta_{kj} {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,l}),$$

$${}^t \tilde{T}_{kj} = \lambda \delta_{kj} \left({}^t u_{l,l} + \frac{1}{2} {}^t u_{n,l} {}^t u_{n,l} \right) + \mu ({}^t u_{k,j} + {}^t u_{j,k} + {}^t u_{n,k} {}^t u_{n,j}). \quad (\text{A.25})$$

Fazendo o mesmo com a expressão (A.21):

$$\Delta \tilde{T}_{kj} = \left[\lambda \delta_{kj} \delta_{lm} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} + \delta_{km} \delta_{jl}) \right] \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta u_{l,m} + \Delta u_{m,l} + \\ {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,l} + {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,m} + \\ \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,m} \end{pmatrix},$$

$$\Delta \tilde{T}_{kj} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \lambda \delta_{kj} \delta_{lm} \Delta u_{l,m} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} \Delta u_{l,m} + \delta_{km} \delta_{jl} \Delta u_{l,m}) + \\ & \lambda \delta_{kj} \delta_{lm} \Delta u_{m,l} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} \Delta u_{m,l} + \delta_{km} \delta_{jl} \Delta u_{m,l}) + \\ & \lambda \delta_{kj} \delta_{lm} {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,l} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,l} + \delta_{km} \delta_{jl} {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,l}) + \\ & \lambda \delta_{kj} \delta_{lm} {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,m} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,m} + \delta_{km} \delta_{jl} {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,m}) + \\ & \lambda \delta_{kj} \delta_{lm} \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,m} + \mu (\delta_{kl} \delta_{jm} \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,m} + \delta_{km} \delta_{jl} \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,m}) \end{aligned} \right],$$

$$\Delta \tilde{T}_{kj} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \lambda \delta_{kj} \Delta u_{l,l} + \mu (\delta_{kl} \Delta u_{l,j} + \delta_{km} \Delta u_{j,m}) + \\ & \lambda \delta_{kj} \Delta u_{l,l} + \mu (\delta_{kl} \Delta u_{j,l} + \delta_{km} \Delta u_{m,j}) + \\ & \lambda \delta_{kj} {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,l} + \mu (\delta_{kl} {}^t u_{n,j} \Delta u_{n,l} + \delta_{km} {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,j}) + \\ & \lambda \delta_{kj} {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,l} + \mu (\delta_{kl} {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,j} + \delta_{km} {}^t u_{n,j} \Delta u_{n,m}) + \\ & \lambda \delta_{kj} \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,l} + \mu (\delta_{kl} \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,j} + \delta_{km} \Delta u_{n,j} \Delta u_{n,m}) \end{aligned} \right],$$

$$\Delta \tilde{T}_{kj} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \lambda \delta_{kj} \Delta u_{l,l} + \mu (\Delta u_{k,j} + \Delta u_{j,k}) + \\ & \lambda \delta_{kj} \Delta u_{l,l} + \mu (\Delta u_{j,k} + \Delta u_{k,j}) + \\ & \lambda \delta_{kj} {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,l} + \mu ({}^t u_{n,j} \Delta u_{n,k} + {}^t u_{n,k} \Delta u_{n,j}) + \\ & \lambda \delta_{kj} {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,l} + \mu ({}^t u_{n,k} \Delta u_{n,j} + {}^t u_{n,j} \Delta u_{n,k}) + \\ & \lambda \delta_{kj} \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,l} + \mu (\Delta u_{n,k} \Delta u_{n,j} + \Delta u_{n,j} \Delta u_{n,k}) \end{aligned} \right],$$

$$\Delta \tilde{T}_{kj} = \lambda \delta_{kj} \Delta u_{l,l} + \mu (\Delta u_{k,j} + \Delta u_{j,k}) + \lambda \delta_{kj} {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,l} + \\ \mu ({}^t u_{n,j} \Delta u_{n,k} + {}^t u_{n,k} \Delta u_{n,j}) + \mu (\Delta u_{n,k} \Delta u_{n,j}) + \\ \frac{1}{2} (\lambda \delta_{kj} \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,l}),$$

$$\Delta \tilde{T}_{kj} = \left[\begin{aligned} & \lambda \delta_{kj} \left(\Delta u_{l,l} + \frac{1}{2} \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,l} + {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,l} \right) + \\ & \mu ({}^t u_{n,j} \Delta u_{n,k} + {}^t u_{n,k} \Delta u_{n,j} + \Delta u_{k,j} + \Delta u_{j,k} + \Delta u_{n,k} \Delta u_{n,j}) \end{aligned} \right]. \quad (\text{A.26})$$

A partir de (A.20), com (A.25) e (A.26), chegamos à expressão esperada:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{i,j}^* \Delta \mathbf{u}_{i,k} \left(\begin{array}{l} \lambda \delta_{kj} \left(\Delta \mathbf{u}_{l,l} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} + {}^t \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} \right) + \\ \mu \left({}^t \mathbf{u}_{n,j} \Delta \mathbf{u}_{n,k} + {}^t \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} + \Delta \mathbf{u}_{k,j} + \Delta \mathbf{u}_{j,k} + \Delta \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} \right) + \\ \lambda \delta_{kj} \left({}^t \mathbf{u}_{l,l} + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{u}_{n,l} {}^t \mathbf{u}_{n,l} \right) + \mu \left({}^t \mathbf{u}_{k,j} + {}^t \mathbf{u}_{j,k} + {}^t \mathbf{u}_{n,k} {}^t \mathbf{u}_{n,j} \right) \end{array} \right), \\
& \mathbf{u}_{i,j}^* \Delta \mathbf{u}_{i,k} \left\{ \begin{array}{l} \lambda \delta_{kj} \left[\left(\Delta \mathbf{u}_{l,l} + {}^t \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} + {}^t \mathbf{u}_{l,l} \right) + \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{u}_{n,l} {}^t \mathbf{u}_{n,l} + \Delta \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} \right) \right] + \\ \mu \left(\begin{array}{l} {}^t \mathbf{u}_{n,j} \Delta \mathbf{u}_{n,k} + {}^t \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} + \Delta \mathbf{u}_{k,j} + \Delta \mathbf{u}_{j,k} + \Delta \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} + \\ {}^t \mathbf{u}_{k,j} + {}^t \mathbf{u}_{j,k} + {}^t \mathbf{u}_{n,k} {}^t \mathbf{u}_{n,j} \end{array} \right) \end{array} \right\}, \\
& \left[\begin{array}{l} \lambda \mathbf{u}_{i,j}^* \Delta \mathbf{u}_{i,j} \left[\left(\Delta \mathbf{u}_{l,l} + {}^t \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} + {}^t \mathbf{u}_{l,l} \right) + \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{u}_{n,l} {}^t \mathbf{u}_{n,l} + \Delta \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} \right) \right] + \\ \mu \mathbf{u}_{i,j}^* \Delta \mathbf{u}_{i,k} \left(\begin{array}{l} {}^t \mathbf{u}_{n,j} \Delta \mathbf{u}_{n,k} + {}^t \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} + \Delta \mathbf{u}_{k,j} + \Delta \mathbf{u}_{j,k} + \Delta \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} + \\ {}^t \mathbf{u}_{k,j} + {}^t \mathbf{u}_{j,k} + {}^t \mathbf{u}_{n,k} {}^t \mathbf{u}_{n,j} \end{array} \right) \end{array} \right]. \quad (\text{A.27})
\end{aligned}$$

iii) Terceiro termo do vetor não linear:

$$\mathbf{u}_{i,j}^* {}^t \mathbf{u}_{i,k} \Delta \tilde{\mathbf{T}}_{kj}. \quad (\text{A.28})$$

Considerando a expressão (A.26) e substituindo na expressão (A.28), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}_{i,j}^* {}^t \mathbf{u}_{i,k} \left[\begin{array}{l} \lambda \delta_{kj} \left(\Delta \mathbf{u}_{l,l} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} + {}^t \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} \right) + \\ \mu \left({}^t \mathbf{u}_{n,j} \Delta \mathbf{u}_{n,k} + {}^t \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} + \Delta \mathbf{u}_{k,j} + \Delta \mathbf{u}_{j,k} + \Delta \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} \right) \end{array} \right], \\
& \left[\begin{array}{l} \lambda \mathbf{u}_{i,j}^* {}^t \mathbf{u}_{i,j} \left(\Delta \mathbf{u}_{l,l} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} + {}^t \mathbf{u}_{n,l} \Delta \mathbf{u}_{n,l} \right) + \\ \mu \mathbf{u}_{i,j}^* {}^t \mathbf{u}_{i,k} \left({}^t \mathbf{u}_{n,j} \Delta \mathbf{u}_{n,k} + {}^t \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} + \Delta \mathbf{u}_{k,j} + \Delta \mathbf{u}_{j,k} + \Delta \mathbf{u}_{n,k} \Delta \mathbf{u}_{n,j} \right) \end{array} \right]. \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

Então, tendo encontrado as expressões das três parcelas do vetor não linear em função de gradientes de deslocamentos, gradientes incrementos de deslocamentos e gradientes de deslocamentos fundamentais, podemos substituí-las em (A.14) e gerar a expressão:

$$\mathcal{M}_i = - \left[\begin{array}{l}
\lambda u_{i,l}^* \Delta u_{k,j} \left({}^t u_{k,j} + \frac{\Delta u_{k,j}}{2} \right) + \\
\lambda u_{i,j}^* {}^t u_{i,j} \left(\begin{array}{l} \Delta u_{i,l} + \frac{1}{2} \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,l} + \\ {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,l} \end{array} \right) + \\
\lambda u_{i,j}^* \Delta u_{i,j} \left[\begin{array}{l} (\Delta u_{i,l} + {}^t u_{n,l} \Delta u_{n,l} + {}^t u_{i,l}) + \\ \frac{1}{2} ({}^t u_{n,l} {}^t u_{n,l} + \Delta u_{n,l} \Delta u_{n,l}) \end{array} \right] + \\
\mu u_{i,j}^* {}^t u_{i,k} \left(\begin{array}{l} {}^t u_{n,j} \Delta u_{n,k} + {}^t u_{n,k} \Delta u_{n,j} + \Delta u_{k,j} + \Delta u_{j,k} + \\ \Delta u_{n,k} \Delta u_{n,j} \end{array} \right) + \\
\mu u_{i,j}^* \Delta u_{i,k} \left(\begin{array}{l} {}^t u_{n,j} \Delta u_{n,k} + {}^t u_{n,k} \Delta u_{n,j} + \Delta u_{k,j} + \Delta u_{j,k} + \\ \Delta u_{n,k} \Delta u_{n,j} + {}^t u_{k,j} + {}^t u_{j,k} + {}^t u_{n,k} {}^t u_{n,j} \end{array} \right) + \\
\mu u_{i,j}^* \Delta u_{k,j} \left({}^t u_{k,i} + \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \right) + \mu u_{j,i}^* \Delta u_{k,j} \left({}^t u_{k,i} + \frac{\Delta u_{k,i}}{2} \right)
\end{array} \right]. \quad (\text{A.30})$$

Assim para terminarmos este apêndice, falta-nos aplicar nesta expressão a solução fundamental

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) e_i \quad (\text{A.31})$$

e obteremos a expressão que é empregada na discretização do problema.

$$\mathcal{M}_i = \left\{ \begin{array}{l} -\lambda u_{ij,k}^* \left[\begin{array}{l} \Delta u_{j,k} \left(\Delta u_{n,n} + \frac{\Delta u_{n,m} \Delta u_{n,m}}{2} + {}^t u_{n,n} + {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,m} + \right. \\ \left. \frac{{}^t u_{n,m} {}^t u_{n,m}}{2} \right) \\ + {}^t u_{j,k} \left(\Delta u_{n,n} + {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,m} + \frac{\Delta u_{n,m} \Delta u_{n,m}}{2} \right) \end{array} \right] \\ -\lambda u_{in,n}^* \Delta u_{m,k} \left(\frac{\Delta u_{m,k}}{2} + {}^t u_{m,k} \right) \\ -\mu u_{ij,k}^* \left[\begin{array}{l} \Delta u_{j,m} \left(\Delta u_{m,k} + \Delta u_{k,m} + \Delta u_{n,m} \Delta u_{n,k} + {}^t u_{m,k} + {}^t u_{k,m} \right) \\ + {}^t u_{n,m} {}^t u_{n,k} + {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,k} + {}^t u_{n,k} \Delta u_{n,m} \end{array} \right] \\ + \frac{\Delta u_{m,j} \Delta u_{m,k}}{2} \\ + {}^t u_{j,m} \left(\Delta u_{m,k} + \Delta u_{k,m} + {}^t u_{n,k} \Delta u_{n,m} \right) + {}^t u_{m,j} \Delta u_{m,k} \\ + {}^t u_{n,m} \Delta u_{n,k} + \Delta u_{n,m} \Delta u_{n,k} \end{array} \right] \\ -\mu u_{ik,j}^* \Delta u_{m,k} \left(\frac{\Delta u_{m,j}}{2} + {}^t u_{m,j} \right) \end{array} \right\}. \quad (\text{A.32})$$

III – Obtenção da expressão (65), para deformação do elemento de área, a partir da equação (14):

Da equação (14) fornecida pela Mecânica do Contínuo (MALVERN, 1969),

$$\hat{\mathbf{n}} da = J(\mathbf{F}^{-1})^T \hat{\mathbf{N}} dA, \quad (\text{A.33})$$

isolamos os elementos de área,

$$\hat{\mathbf{n}} \frac{da}{dA} = J(\mathbf{F}^{-1})^T \hat{\mathbf{N}} \quad (\text{A.34})$$

e aplicamos a norma em ambos os lados da equação (A.34):

$$\|\hat{\mathbf{n}}\| \frac{da}{dA} = \|J(\mathbf{F}^{-1})^T \hat{\mathbf{N}}\|. \quad (\text{A.35})$$

A norma do vetor normal na configuração deformada é igual a um, então:

$$\frac{da}{dA} = J \left\| (\mathbf{F}^{-1})^T \hat{\mathbf{N}} \right\|. \quad (\text{A.36})$$

Aplicando a definição de norma ao termo do lado direito, tem-se:

$$\frac{da}{dA} = J \sqrt{(\mathbf{F}^{-1})^T \hat{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \hat{\mathbf{N}}}. \quad (\text{A.37})$$

Resolvendo convenientemente, obtem-se a primeira relação:

$$\frac{da}{dA} = J \sqrt{\hat{\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{F}^{-1}) (\mathbf{F}^{-1})^T \hat{\mathbf{N}}}, \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{da}{dA} = J \sqrt{\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{N}}}. \quad (\text{A.39})$$

Conhecendo a decomposição polar do tensor \mathbf{F} , definida pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}, \quad (\text{A.40})$$

onde os tensores $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$ e $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$, são conhecidos como os tensores alongação direito e esquerdo, respectivamente e \mathbf{R} o tensor rotação, que possui a seguinte propriedade $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$, é aplicado ao vetor normal indeformado, para obtermos a normal na deformada. Assim:

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{R} \hat{\mathbf{N}} \quad (\text{A.41})$$

e em seu processo inverso:

$$\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{A.42})$$

A partir destas definições e pelas adicionais, dadas abaixo, podemos obter a equação (65), como desejado:

$$\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{VR})^{-1} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}^{-1} \rightarrow (\mathbf{F}^{-1})^T = (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}^{-1})^T = (\mathbf{V}^{-1})^T(\mathbf{R}^{-1})^T,$$

$$\left(\frac{da}{dA}\right)^2 = J^2 (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{N}}) \rightarrow \left(\frac{da}{dA}\right)^2 = J^2 (\mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{n}}),$$

$$\left(\frac{da}{dA}\right)^2 = J^2 \left[\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{n}} \right],$$

$$\left(\frac{da}{dA}\right)^2 = J^2 \left[\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{R}^{-1})^T (\mathbf{F}^{-1}) (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{R}^{-1} \hat{\mathbf{n}} \right],$$

$$\left(\frac{da}{dA}\right)^2 = J^2 \left[\hat{\mathbf{n}} \cdot \underbrace{(\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{R}^{-1}}_{\mathbf{I}} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{V}^{-1})^T \underbrace{(\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{R}^{-1}}_{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{n}} \right],$$

$$\left(\frac{da}{dA}\right)^2 = J^2 \left[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{I} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{V}^{-1})^T \mathbf{I} \hat{\mathbf{n}} \right] \rightarrow \left(\frac{da}{dA}\right)^2 = J^2 \left[\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{V}^{-1})^2 \hat{\mathbf{n}} \right],$$

$$\left(\frac{da}{dA}\right)^2 = J^2 \left[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}^{-1} \hat{\mathbf{n}} \right] \rightarrow \left(\frac{da}{dA}\right)^2 = \frac{J^2}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} \hat{\mathbf{n}}},$$

$$\frac{da}{dA} = \frac{\det \mathbf{F}}{\sqrt{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} \hat{\mathbf{n}}}}. \quad (\text{A.43})$$

III - Relações trigonométricas:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha_1 - \theta) = \cos(\alpha_1) \cos(\theta) + \sin(\alpha_1) \sin(\theta) \quad (\text{B.4})$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha_1 - \theta) = \sin(\alpha_1) \cos(\theta) - \cos(\alpha_1) \sin(\theta) \quad (\text{B.5})$$

$$2 \cos(\theta) \sin(\theta) = \sin(2\theta) \quad (\text{B.6})$$

IV - Componentes da matriz [c]:

A equação que gera as componentes da matriz [c] é dada pelo limite da integral da força de superfície fundamental, avaliada no contorno, quando ε tende a zero, e expressada como se segue:

$$c_{ij}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, X) d\bar{\Gamma}_\varepsilon \quad (\text{B.7})$$

Assim fornecendo a expressão de $p_{ij}^*(\xi, X)$:

$$p_{ij}^*(\xi, X) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2\varepsilon_{,i}\varepsilon_{,j} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} - (1-2\nu)(\varepsilon_{,i}n_j - \varepsilon_{,j}n_i) \right\}, \quad (\text{B.8})$$

podemos para cada componente efetuar o limite e a integral. Desta forma:

i) Força aplicada na direção x e medida na direção x:

Primeiro, substituímos as expressões consideradas inicialmente e as relações trigonométricas na equação da primeira componente de p_{ij}^* .

$$p_{11}^*(\xi, X) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ \left[(1-2\nu) + 2 \left(\frac{\cos(\alpha_1) \cos(\theta) + \sin(\alpha_1) \sin(\theta)}{\sin(\alpha_1) \sin(\theta)} \right)^2 \right] (-1) \right\}$$

$$p_{11}^*(\xi, X) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ (1-2\nu) + 2 \left[\begin{array}{l} (\cos(\alpha_1) \cos(\theta))^2 + \\ 2 \cos(\alpha_1) \cos(\theta) \sin(\alpha_1) \sin(\theta) + \\ (\sin(\alpha_1) \sin(\theta))^2 \end{array} \right] \right\}$$

$$p_{11}^*(\xi, X) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ (1-2\nu) + 2 \left[\begin{array}{l} \cos^2(\alpha_1) \cos^2(\theta) + \\ \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) \sin(2\theta) + \\ \sin^2(\alpha_1) \sin^2(\theta) \end{array} \right] \right\} \quad (\text{B.9})$$

e em seguida calculamos o limite da integral, obtendo a primeira componente de $[\mathbf{c}]$:

$$c_{11}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\beta (1-2\nu) + 2 \left[\begin{array}{l} \cos(\alpha_1)^2 \cos(\theta)^2 + \\ \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) \sin(2\theta) + \\ \sin(\alpha_1)^2 \sin(\theta)^2 \end{array} \right] d\theta$$

$$c_{11}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu)(\theta)_0^\beta + 2 \cos^2(\alpha_1) \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right)_0^\beta + \\ 2 \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) \left(-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right)_0^\beta + \\ 2 \sin^2(\alpha_1) \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right)_0^\beta \end{array} \right\}$$

$$c_{11}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu)\beta + \beta \cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_1) \frac{\sin(2\beta)}{2} - \\ \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) \cos(2\beta) + \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) + \\ \beta \sin^2(\alpha_1) - \sin^2(\alpha_1) \frac{\sin(2\beta)}{2} \end{array} \right\} \quad (\text{B.10})$$

ii) Força aplicada na direção x e medida na direção y:

Substituindo as expressões consideradas inicialmente e as relações trigonométricas na equação da segunda componente de p_{ij}^* :

$$\begin{aligned}
p_{12}^*(\xi, X) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ 2 \left[\begin{array}{l} \left(\cos(\alpha_1)\cos(\theta)+ \right) \cdot \left(\text{sen}(\alpha_1)\cos(\theta)- \right) \\ \left(\text{sen}(\alpha_1)\text{sen}(\theta) \right) \cdot \left(\cos(\alpha_1)\text{sen}(\theta) \right) \end{array} \right] (-1) \right\} \\
p_{12}^*(\xi, X) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ 2 \left[\begin{array}{l} \left[\cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) \cos^2(\theta)- \right] \\ \cos^2(\alpha_1) \cos(\theta) \text{sen}(\theta)+ \\ \text{sen}^2(\alpha_1) \text{sen}(\theta) \cos(\theta)- \\ \left[\cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) \text{sen}^2(\theta) \right] \end{array} \right] \right\} \\
p_{12}^*(\xi, X) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left[\begin{array}{l} \text{sen}(2\alpha_1) \cos^2(\theta)- \\ \cos^2(\alpha_1) \text{sen}(2\theta)+ \\ \text{sen}^2(\alpha_1) \text{sen}(2\theta)- \\ \text{sen}(2\alpha_1) \text{sen}^2(\theta) \end{array} \right] \tag{B.11}
\end{aligned}$$

e em seguida calculamos o limite da integral, obtendo a segunda componente de $[\mathbf{c}]$:

$$\begin{aligned}
c_{12}(\xi) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\beta \left[\begin{array}{l} 2 \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) \cos^2(\theta)- \\ \cos^2(\alpha_1) \text{sen}(2\theta)+ \\ \text{sen}^2(\alpha_1) \text{sen}(2\theta)- \\ 2 \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) \text{sen}^2(\theta) \end{array} \right] d\theta \\
c_{12}(\xi) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\begin{array}{l} 2 \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}(2\theta)}{4} \right)_0^\beta - \\ \cos^2(\alpha_1) \left(-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right)_0^\beta + \\ \text{sen}^2(\alpha_1) \left(-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right)_0^\beta - \\ \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}(2\theta)}{4} \right)_0^\beta \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$c_{12}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\begin{array}{l} \beta \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) + \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} + \\ \cos^2(\alpha_1) \frac{\cos(2\beta)}{2} - \text{sen}^2(\alpha_1) \frac{\cos(2\beta)}{2} - \\ \beta \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) + \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} - \\ \frac{1}{2} \cos^2(\alpha_1) + \frac{1}{2} \text{sen}^2(\alpha_1) \end{array} \right]$$

$$c_{12}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\begin{array}{l} \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_1) \text{sen}(2\beta) + \\ \cos^2(\alpha_1) \frac{\cos(2\beta)}{2} - \\ \text{sen}^2(\alpha_1) \frac{\cos(2\beta)}{2} - \\ \frac{1}{2} \cos^2(\alpha_1) + \frac{1}{2} \text{sen}^2(\alpha_1) \end{array} \right]$$

$$c_{12}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\begin{array}{l} \frac{\text{sen}(2\alpha_1) \text{sen}(2\beta)}{2} + \\ \frac{\cos(2\alpha_1) \cos(2\beta)}{2} - \\ \frac{1}{2} \cos(2\alpha_1) \end{array} \right]$$

$$c_{12}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\cos(2\alpha_1 - 2\beta) - \cos(2\alpha_1)}{2} \right] \quad (\text{B.12})$$

iii) Força aplicada na direção y e medida na direção x:

A terceira componente da matriz [c] tem expressão igual à da segunda componente, e portanto:

$$c_{12} = c_{21}$$

$$c_{21}(\xi) = c_{12}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\cos(2\alpha_1 - 2\beta) - \cos(2\alpha_1)}{2} \right] \quad (\text{B.13})$$

iv) Força aplicada na direção y e medida na direção y :

O procedimento para a última componente é o mesmo utilizado nas anteriores, assim:

$$\begin{aligned}
 p_{22}^*(\xi, X) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ \left[(1-2\nu) + 2(\sin(\alpha_1) \cos(\theta) - \cos(\alpha_1) \sin(\theta))^2 \right] (-1) \right\} \\
 p_{22}^*(\xi, X) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ (1-2\nu) + 2 \left[\begin{array}{l} (\sin(\alpha_1) \cos(\theta))^2 - \\ 2 \sin(\alpha_1) \cos(\theta) \cos(\alpha_1) \sin(\theta) + \\ (\cos(\alpha_1) \sin(\theta))^2 \end{array} \right] \right\} \\
 p_{22}^*(\xi, X) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ (1-2\nu) + 2 \left[\begin{array}{l} \sin^2(\alpha_1) \cos^2(\theta) - \\ \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) \sin(2\theta) + \\ \cos^2(\alpha_1) \sin^2(\theta) \end{array} \right] \right\} \\
 p_{22}^*(\xi, X) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu) + 2 \sin(\alpha_1 + \theta) \sin(\alpha_1 - \theta) \\ - \sin(2\alpha_1) \sin(2\theta) \end{array} \right\} \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

e integrando a última componente de p_{ij}^* , tirando o limite, encontramos a última parcela da matriz $[c]$:

$$\begin{aligned}
 c_{22}(\xi) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_0^\beta (1-2\nu) + 2 \left[\begin{array}{l} \sin(\alpha_1)^2 \cos(\theta)^2 - \\ \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) \sin(2\theta) + \\ \cos(\alpha_1)^2 \sin(\theta)^2 \end{array} \right] d\theta \\
 c_{22}(\xi) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu) (\theta)_0^\beta + 2 \sin^2(\alpha_1) \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right)_0^\beta - \\ 2 \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_1) \left(-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right)_0^\beta + \\ 2 \cos^2(\alpha_1) \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right)_0^\beta \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

$$c_{22}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \begin{array}{l} (1-2\nu)\beta + \beta \operatorname{sen}^2(\alpha_1) + \operatorname{sen}^2(\alpha_1) \frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{2} + \\ \cos(\alpha_1) \operatorname{sen}(\alpha_1) \cos(2\beta) - \cos(\alpha_1) \operatorname{sen}(\alpha_1) + \\ \beta \cos^2(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_1) \frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{2} \end{array} \right\}$$

$$c_{22}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ 2\beta(1-\nu) - \frac{\cos(2\alpha_1) \operatorname{sen}(2\beta)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha_1)[1 - \cos(2\beta)]}{2} \right\}$$

$$c_{22}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ 2\beta(1-\nu) + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha_1 - 2\beta)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha_1)}{2} \right\} \quad (\text{B.15})$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)