Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Elípticos Semilineares: Ressonância e Soluções Positivas

por

Fernando Kennedy da Silva

Brasília

2005

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por permitir mais esta conquista e por me iluminar a cada dia.

Aos meus pais, Luiz e Maria Abadia, e meus irmãos, Thiago e William, pela paciência, carinho e compreensão durante toda a minha vida.

Aos meus avós, Heleno, Maria e Helena, que apesar de não estarem mais entre nós, sempre estarão em minha memória.

A Jeovanio (in Memoriam), meu tio querido, que sempre estará em meu coração.

A todos os meus tios, tias, primos, sobrinha, meu avô Geraldo e demais familiares que mesmo distantes torceram por mim.

À meu orientador, Profº José Valdo A. Gonçalves pela orientação e principalmente pela paciência durante a realização desse trabalho.

Aos meus amigos: Daniel da Silveira, Daniel Hilário, Paulo Henrique, Ricardo e Junior.

Aos amigos da UnB que acreditaram, confiaram e ainda confiam na minha capacidade acadêmica. Em especial: Adriana, Allan, Ney, Willian, Aline, Sandra, Raquel, Jhone, Cris, Letícia, Hélio, Débora, Roberto, Jeovane, Walter, Thiago, Fagner, Rafael, Albérico, Jander, Fabiana e a Roberval, Angelo e Juliana pelas intermináveis e produtivas conversas.

Aos meus professores do Departamento de Matemática de Catalão (UFG-CAC). Em especial: Plínio, Élida, Porfírio e André.

Aos professores Carlos Alberto P. Santos e Liliane de Almeida Maia, pelas correções, sugestões e contribuições para a finalização deste trabalho.

Agradeço aos demais professores, funcionários e colegas do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho. Especialmente, Profº José Alfredo, Tânia Sertão e Gari.

Finalmente, agradeço ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro.

"A fé é o firme fundamento das
coisas que se esperam, e a prova
das coisas que se não vêem".
(Hb 11,1)

Resumo

Consideramos o problema semilinear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u)+h(x) \quad , \quad x \in \Omega \\ \quad u &= 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega \ , \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory.

Por meio de métodos variacionais (minimização) estudamos existência de solução quando f interage de forma ressonante ou não-ressonante com relação ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta,\ H_0^1(\Omega))$ e existência, unicidade e regularidade de soluções positivas no caso em que $h \equiv 0,\ f(x,0) \geq 0,\ f(x,s) = f(x,0)$ *para* $s < 0$ e f é sublinear, mais precisamente, f fica abaixo de λ_1 no infinito e acima de λ_1 na origem.

Palavras chaves: Equações Elípticas, Ressonância, Métodos Variacionais, Soluções Positivas.

Abstract

We consider the semilinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) + h(x) \quad , \quad x \in \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\qquad\qquad , \quad x \in \partial\Omega \ , \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ and $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies the Carathéodory conditions.

By using variational methods (minimization) we study existence of solution in the case f interacts either in a resonant or nonresonant way with the first eigenvalue λ_1 of $(-\Delta,\ H_0^1(\Omega))$ and existence, uniqueness and regulerity of positive solutions in the case $h \equiv 0,\ f(x,0) \geq 0,\ f(x,s) = f(x,0)\ for\ s < 0$ and further f is sublinear, more precisely, f stays below λ_1 at infinity and is above λ_1 at the origin.

Key words: Elliptic equations, Resonance, Variational methods, Positive solutions.

Sumário

Introdução

Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) + h(x) \quad , \quad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\;\, , \quad x \in \partial\Omega \ , \end{cases} \tag{PD}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory, i.e.,

$$\begin{array}{lll} x & \longmapsto & f(x,s) \text{ é mensurável para todo } s \in \mathbb{R}; \\ s & \longmapsto & f(x,s) \text{ é contínua q.t.p. } x \in \Omega. \end{array} \tag{C}$$

Nosso interesse é estudar existência, unicidade e regularidade de soluções de (PD), (soluções positivas no caso em que $h \equiv 0$ e $f(x,0) \geq 0$), quando f interage com o primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta,\ H_0^1(\Omega))$, em um sentido que tornaremos mais preciso posteriormente.

As três funções abaixo,

$$a_0(x) \equiv \lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{s} \ , \quad a_\infty(x) \equiv \lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} \ , \quad A_\infty(x) \equiv \limsup_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2}, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

onde F é o potencial associado a f, i.e.,

$$F(x,s) \equiv \int_0^s f(x,t)dt \qquad s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega,$$

serão utilizadas para determinar o tipo de interação de f com λ_1 mencionado acima. Neste contexto, dada uma função mensurável $\beta : \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty)$ (*ou* $(-\infty, \infty]$), com a propriedade de que

$$\int_{[v\neq 0]} \beta(x)v^2 dx \ \in [0, +\infty] \cup [-\infty, 0],$$

considere

$$i(\beta) \equiv \inf_{v \in H_0^1, |v|_0 = 1} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_{[v \neq 0]} \beta(x) v^2 dx \right\} ,$$

onde $|\cdot|_0$ designa a norma em $L^2(\Omega)$.

A condição de crescimento em f, a saber,

$$|f(x,s)| \leq a\,|s|^\sigma + b(x) \quad s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega, \tag{C_σ}$$

para algum $a \geq 0$ *e* $\sigma \in [1, \infty)$ constantes e alguma função mensurável $b \geq 0$, será utilizada em vários de nossos resultados.

Utilizaremos também métodos variacionais (minimização) e neste sentido vamos explorar o funcional energia associado a (PD), a saber,

$$I(u) \equiv \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u) dx - \int_\Omega hudx, \qquad u \in H_0^1\,(\Omega)\,.$$

Nos referimos a problemas em que

$$i(A_\infty) > 0$$

como de tipo não-ressonante.

Observamos que se

$$A_\infty(x) < \lambda_1 \ q.t.p. \ em \ \Omega \ \text{ então } \ i(A_\infty) > 0.$$

Por outro lado, problemas em que

$$i(A_\infty) = 0$$

são referidos como do tipo ressonante.

Enunciamos abaixo nosso primeiro resultado, devido a Gonçalves [18], a ser discutido neste trabalho. Neste resultado consideraremos um crescimento supercrítico sobre f , no sentido que f satisfaz (C_σ) com $\sigma \in ((N+2)/(N-2), 2N/(N-2)]$. Lembramos que f tem um crescimento subcrítico se $\sigma < (N+2)/(N-2)$ ao passo que um crescimento crítico significa que f satisfaz (C_σ) com $\sigma = (N+2)/(N-2)$. Enfatizamos que em nosso primeiro resultado não é exigida qualquer uniformidade com relação a $x \in \Omega$ na definição de A_∞.

O Teorema a seguir corresponde a existência de solução para (PD) em um caso não-ressonante.

Teorema A. *Suponha* (C), (C_σ) *para algum* $\sigma \in [1, 2N/(N-2)]$ *se* $N \geq 3$, $\sigma \in [1, \infty)$ *se* $N = 1, 2$ *e* $h \in L^2(\Omega)$. *Se além disso, valem*

$$F(x,s) \leq (A/2)\, s^2 + B(x) \quad s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega, \tag{F}$$

onde $A \geq 0$ *é uma constante e* $B \in L^1(\Omega),\ B \geq 0$ *q.t.p.* $x \in \Omega$ *e*

$$i(A_\infty) > 0. \tag{A_∞}$$

Então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$I(u) = \min_{v \in H_0^1} I(v)$$

e u *é uma solução de* (PD) *no seguinte sentido,*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx + \int_\Omega h\varphi dx,\ \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Se ainda $\sigma \in [1, (N+2)/(N-2)]$ *então,*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u) v dx + \int_\Omega h v dx,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Como ilustração do Teorema A, para $N = 3$, considere a função

$$f(x,s) = (\lambda_1 - \delta)\, s - a(x)\left[2 + (2^* + 1)\cos(s^{2^*+1})\right]\left[\left(s^+\right)^{2^*} + \left(s^-\right)^{2^*}\right],$$

onde $2^* \equiv 2N/(N-2)$, $a \in L^\infty(\Omega)$ tal que $a \geq 0$ e $\delta \in (0, \lambda_1)$.

Assim

$$F(x,s) = \frac{(\lambda_1 - \delta)\, s^2}{2} - \frac{2a(x)s^{2^*+1}}{2^*+1} - a(x)sen(s^{2^*+1})$$

Note que as condições

$$\text{(F)},\ A_\infty(x) = -\infty,\ (C_\sigma)\ com\ \sigma = 2^*$$

são satisfeitas e de fato,

$$i(A_\infty) > 0.$$

No Capítulo 2, faremos a demonstração do Teorema A apresentando comentários sobre sua motivação e contextualização. Chamamos a atenção para o fato de que I não é necessariamente diferenciável.

Ainda com relação ao Teorema A, casos em que $i(A_\infty)$ pode ser zero, foi tratado por Liu & Tang [23], considerando um crescimento crítico sobre f. Assim foi obtido o seguinte resultado.

Teorema B. *Suponha* (C), (C_σ) *para algum* $\sigma \in [1,(N+2)/(N-2)]$ *se* $N \geq 3$, $\sigma \in [1,\infty)$ *se* $N = 1,2$ *e* $h \in L^2(\Omega)$. *Se além disso, valem*

$$F(x,s) - \frac{1}{2}\lambda_1 s^2 \to -\infty\ , \tag{F_∞}$$

quando $|s| \to \infty$ *uniformemente q.t.p.* $x \in \Omega$,

$$\int_\Omega h(x)\varphi_1(x)dx = 0, \tag{h}$$

onde φ_1 *é a* λ_1*-autofunção, tal que* $\varphi_1 > 0$ *e* $|\varphi_1|_0 = 1$. *Então existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que*

$$I(u) = \min_{v \in H_0^1} I(v)$$

e u *é uma solução fraca de* (PD), *i.e.,*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)v dx + \int_\Omega h v dx,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Como ilustração do Teorema B, para $N = 3$, considere a função

$$f(x,s) = \lambda_1 s - \frac{2s}{1+s^2} + 2^* s^{2^*-1}\cos(s^{2^*}),$$

Assim

$$F(x,s) = \frac{1}{2}\lambda_1 s^2 - \ln(1+s^2) + sen(s^{2^*}).$$

Note que as condições

$$(F_\infty),\ A_\infty(x) = \lambda_1,\ (C_\sigma)\ com\ \sigma = 2^* - 1$$

são satisfeitas e de fato,

$$i(A_\infty) = 0.$$

Neste contexto o Teorema B, que em parte foi motivado pelo Teorema A, é um caso ressonante, mais especificamente, $i(A_\infty) = 0$.

Notamos que, no Teorema B, devido à exigência de $\sigma \in [1,(N+2)/(N-2)]$ se $N \geq 3$ e $\sigma \in [1,\infty)$ se $N = 1,2$ em (C_σ), temos que $I \in C^1\left(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\right)$ (cf. Ambrosetti & Prodi [3]).

A demonstração do Teorema B bem como motivação serão discutidos no Capítulo 2.

A seguir, apresentaremos um resultado de existência de solução para (PD) em uma situação não-ressonante, i.e., $A_\infty < \lambda_1$, devido a deFigueiredo & Gossez [15], onde destacamos adicionalmente que f é autônoma, i.e., independe de x ($f(x,u) \equiv f(u)$ para todo x em Ω) e não tem qualquer restrição com relação ao crescimento, i.e., condições do tipo (C_σ) não são exigidas. Observamos que as soluções obtidas não são necessariamente pontos de mínimos do funcional energia associado.

Assim temos o seguinte resultado.

Teorema C. *Suponha $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua,*

$$A_\infty \equiv \limsup_{|s|\to\infty} \frac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1 \tag{A'_∞}$$

e $h \in L^\infty(\Omega)$. Então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $f(u) \in L^1(\Omega)$ e u satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx + \int_\Omega h v dx,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

No resultado final, apresentado neste trabalho, devido a Brézis & Oswald [8], discutiremos sobre existência, unicidade e regularidade de soluções positivas para (PD) no caso em que $h \equiv 0$ e f é sublinear, i.e., estudaremos o seguinte problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(x,u) & ,\ x \in \Omega \\ u \geq 0 & , & u \not\equiv 0 & ,\ x \in \Omega \\ u & = & 0 & ,\ x \in \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{PD_+}$$

onde

$$f(x,s) = f(x,0) \ \ \textit{para } s < 0 \textit{ e } f(x,0) \geq 0$$

Neste sentido enunciamos,

Teorema D. *Suponha que f satisfaz*

$$f(x,s) \leq C(s+1), \tag{f1}$$

para algum $C > 0$, q.t.p. $x \in \Omega$ e qualquer $s \geq 0$,

$$\begin{array}{lll} x & \longmapsto & f(x,s) \in L^\infty(\Omega) \textit{ para cada } s \in \mathbb{R}, s \geq 0 \\ s & \longmapsto & f(x,s) \textit{ é contínua q.t.p. } x \in \Omega, \end{array} \tag{f2}$$

$$f(x,s) \geq -C_\delta s, \tag{f3}$$

para cada $\delta > 0$ e algum $C_\delta \geq 0$, para todo $s \in [0,\delta]$ e q.t.p. $x \in \Omega$.

Se além disso vale

$$i(a_0) < 0 < i(a_\infty), \tag{$a_{0,\infty}$}$$

então existe $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, com $u > 0$ em Ω tal que

$$I(u) = \min_{v \in H_0^1} I(v)$$

e u é uma solução de (PD_+), no sentido fraco, i.e.,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u) v dx, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

A solução obtida acima é única se vale adicionalmente,

$$s \longmapsto \frac{f(x,s)}{s} \text{ é decrescente em } (0,\infty), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega. \tag{f4}$$

Em resumo, nosso trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentaremos notações, resultados básicos sobre espaços de Schauder, de Sobolev e problemas elípticos lineares.

No Capítulo 2, serão apresentadas as demonstrações dos Teoremas A, B e C; bem como exemplos e observações pertinentes.

No Capítulo 3, apresentaremos a demonstração do Teorema D e observações relacionadas.

No Apêndice A, demonstraremos a desigualdade de Poincaré e alguns resultados complementares.

No Apêndice B, enuciaremos vários resultados utilizados em nosso trabalho.

Capítulo 1

Notações e Resultados Básicos

1.1 Espaços de Schauder e de Sobolev

Em primeiro lugar consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular. Os espaços $C^{m,\alpha}(\Omega)$ $(0 < \alpha \leq 1)$ e $W^{m,p}(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ com $m \geq 0$ inteiro, designam respectivamente os espaços de Schauder e de Sobolev usuais (cf. Adams [1], p.10 - p.44 e Brézis [5], p.149). Usamos a notação $W^{1,2}(\Omega) \equiv H^1(\Omega)$ e lembramos que a norma de $H^1(\Omega)$ é dada por

$$\|u\| \equiv \left\{ \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$|\nabla u(x)|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)^2 \quad x \in \Omega.$$

Temos que

$$H_0^1(\Omega) \equiv \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|}$$

e lembramos ainda (cf. Evans [16], p.259) que

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \ / \ u|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

onde $u|_{\partial\Omega}$ é o traço de u em $\partial\Omega$.

Decorre da desigualdade de Poincaré, a saber,

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega), \tag{1.1}$$

onde C_Ω é uma constante positiva (cf. Apêndice A), que

$$\|u\|_1 \equiv \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente a $\|\cdot\|$. Lembramos também que $\|\cdot\|_1$ provém do produto interno, a saber,

$$\langle u, v \rangle_1 \equiv \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

e que $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Hilbert. Além disso

$$H_0^1(\Omega) \equiv \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}.$$

1.2 Os Problemas de Dirichlet Linear e de Autovalor para $\left(-\Delta, H_0^1(\Omega)\right)$: Soluções Fracas

É conhecido que o problema de Dirichlet linear

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & h(x) & , \quad x \in \Omega \\ u & = & 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.2}$$

tem para cada $h \in L^2(\Omega)$ uma única solução $u \equiv u_h \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ onde $H^2(\Omega) \equiv W^{2,2}(\Omega)$ e vale

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \, |h|_0 \, ,$$

onde $C > 0$ é uma constante.

Fica assim definido o operador linear

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

com $S\left(L^2(\Omega)\right) \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ chamado operador solução associado a (1.2).

Devido ao fato de que a imersão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \text{ é compacta,}$$

inferimos que

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

é linear compacto. Aliás, se $h, g \in L^2(\Omega)$ então $u \equiv S(h)$ e $w \equiv S(g)$ satisfazem respectivamente,

$$\begin{cases} -\Delta u &= h(x) \quad , \quad x \in \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad , \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta w &= g(x) \quad , \quad x \in \Omega \\ \quad w &= 0 \qquad , \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

no sentido fraco, i.e.,

$$\int_\Omega \nabla S\,(h)\,\nabla v dx = \int_\Omega hv dx, \ \forall\ v \in L^2(\Omega)\ ,\ \int_\Omega \nabla S\,(g)\,\nabla v dx = \int_\Omega gv dx, \ \forall\ v \in L^2(\Omega),$$

então temos

$$\langle S(h), g\rangle_0 = \int_\Omega S(h) g dx = \int_\Omega \nabla S(g) \nabla S(h) dx = \int_\Omega h S(g) dx = \langle h, S(g)\rangle_0\,,$$

mostrando que S é simétrico.

Concluimos que $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é linear, compacto e simétrico.

Considere agora o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad , \quad x \in \Omega \\ \quad u &= 0 \quad\ , \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

Devido às observações acima, (1.3) é equivalente a

$$S(u) = \frac{1}{\lambda} u.$$

Como $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é simétrico e compacto segue (cf. Brézis [5], p.192) que os autovalores de (1.3) formam uma sequência $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ e as seguintes propriedades são conhecidas:

$$\begin{gathered} cada\ \lambda_n\ tem\ multiplicidade\ finita, \\ \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n \leq ..., \\ \lambda_1 > 0, \lambda_n \to \infty. \end{gathered}$$

Além disso o autovalor λ_1 é simples, i.e.,

$$dimKer(-\Delta - \lambda_1) = 1 \quad e \quad Ker(-\Delta - \lambda_1) = \langle \varphi_1 \rangle ,$$

onde φ_1 é positivo em Ω e

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1, u \neq 0} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\int_\Omega u^2 dx} \right\}.$$

Concluimos que

$$C_\Omega = \frac{1}{\lambda_1}$$

é a melhor constante na desigualdade de Poincaré.

1.3 Regularidade de Soluções Fracas

Nesta seção formulamos e demonstramos um resultado de regularidade de soluções para o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & g(x,u) & , \quad x \in \Omega \\ u & = & 0 & , \quad x \in \partial\Omega , \end{array} \right. \tag{1.4}$$

onde $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (C). Observamos que (1.4) é um problema do tipo (PD) se fizermos $g(x,u) \equiv f(x,u) + h(x)$.

Temos o seguinte resultado.

Lema 1.1. *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (1.4), i.e.,*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega g v dx, \quad \textit{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.5}$$

e g satisfaz (C_σ) com $\sigma = 1$, a, b constantes. Então $u \in L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Em primeiro lugar suponha $N = 1, 2$. Neste caso,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad q \in (1, \infty),$$

como consequência

$$u \in L^q(\Omega) \quad q \in (1, \infty).$$

Como g satisfaz (C_σ) com $\sigma = 1$, a, b constantes, temos que

$$g(x, u(x)) \in L^q(\Omega) \quad q \in (1, \infty).$$

Pelo Teorema B.5 (cf. Apêndice B), $u \in W^{2,q}(\Omega)$ $q \in (1, \infty)$. E pelo Teorema B.4 (cf. Apêndice B), temos que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ para q suficientemente grande. Logo $u \in L^\infty(\Omega)$.

Em segundo lugar supomos $N \geq 3$. Daqui em diante usaremos a notação usual

$$2^* \equiv 2N/(N-2).$$

Temos que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega),$$

daí $u \in L^{2^*}(\Omega)$.

Segue-se usando (C_σ) com $\sigma = 1$ e a, b constantes, que se $|u(x)| \geq 1$, então

$$|g(x, u(x))| \leq a\,|u(x)| + b \leq a\,|u(x)| + b\,|u(x)| \leq 2 \cdot \max\{a, b\}\,|u(x)| \equiv C_1\,|u(x)|,$$

daí

$$|g(x, u(x))|^{2^*} \leq C_1^{2^*}\,|u(x)|^{2^*} \text{ para } |u(x)| \geq 1. \tag{1.6}$$

Por outro lado, se $|u(x)| < 1$, então

$$|g(x, u(x))| \leq a\,|u(x)| + b \leq 2 \cdot \max\{a, b\} = C_1.$$

Assim,

$$|g(x, u(x))|^{2^*} \leq C_1^{2^*}. \tag{1.7}$$

De (1.6) e (1.7), segue que

$$|g(x, u(x))|^{2^*} \leq C_1^{2^*} + C_1^{2^*}\,|u(x)|^{2^*}, \text{ para todo } x \in \Omega$$

e consequentemente,

$$g(x, u(x)) \in L^{2^*}(\Omega), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Segue pelo Teorema B.5 (cf. Apêndice B) que $u \in W^{2,2^*}(\Omega)$.

Deste ponto em diante usaremos um processo de regularização conhecido como "bootstrap". Pelo Teorema B.2 (cf. Apêndice B), temos:

(i) Se $1/2^* - 2/N < 0$, (i.e., $2^* > N/2,\ N = 3, 4, 5$), temos,

$$W^{2,2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$$

e como consequência, $u \in L^{\infty}(\Omega)$.

(ii) Se $1/2^* - 2/N = 0$, (i.e., $2^* = N/2,\ N = 6$), temos,

$$W^{2,2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \text{ para } q \in [2^*, \infty)$$

e daí

$$W^{2,2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{p}(\Omega), \text{ para } p \in [1, \infty).$$

Logo $u \in L^p(\Omega)$, para $p \in [1, \infty)$.

Segue pela condição de crescimento (C_σ) com $\sigma = 1$, a, b, constantes, que

$$g(x, u(x)) \in L^p(\Omega) \text{ para } p \in (1, \infty).$$

Pelo Teorema B.5 (cf. Apêndice B), $u \in W^{2,p}(\Omega)$ para $p \in (1, \infty)$ e pelo Teorema B.4 (cf. Apêndice B), temos que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ para p suficientemente grande. Logo

$$u \in L^\infty(\Omega).$$

(iii) Se $1/2^* - 2/N > 0$, (i.e., $2^* < N/2,\ N > 6$), temos,

$$W^{2,2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_1}(\Omega), \quad \frac{1}{t_1} = \frac{1}{2^*} - \frac{2}{N}$$

e concluimos por argumentos utilizados anteriormente que

$$u \in W^{2,t_1}(\Omega).$$

(iv) Se $1/t_1 - 2/N < 0$, (i.e., $t_1 > N/2,\ N = 7, 8, 9$), então,

$$W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega),$$

daí $u \in L^\infty(\Omega)$.

(v) Se $1/t_1 - 2/N = 0$, (i.e., $t_1 = N/2,\ N = 10$), então,

$$W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para } q \in [t_1, \infty),$$

logo

$$W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \text{ para } p \in [1, \infty).$$

Como consequência $g(x, u(x)) \in L^p(\Omega)$ para $p \in (1, \infty)$, e então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ com $p \in (1, \infty)$. Portanto $u \in C^1(\overline{\Omega})$ para p suficientemente grande e daí $u \in L^\infty(\Omega)$.

(vi) Se $1/t_1 - 2/N > 0$, (i.e., $t_1 < N/2,\ N > 10$), então,

$$W^{2,t_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_2}(\Omega), \quad \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_1} - \frac{2}{N}\ , \text{ donde } \frac{1}{t_2} = \frac{1}{2^*} - \frac{4}{N}.$$

Segue que $u \in L^{t_2}(\Omega)$. Assim

$$g(x,u(x)) \in L^{t_2}(\Omega), \quad \frac{1}{t_2} = \frac{1}{2^*} - \frac{4}{N}$$

e portanto $u \in W^{2,t_2}(\Omega)$.

(vii) Se $1/t_2 - 2/N < 0$, (i.e., $t_2 > N/2,\ N = 11, 12, 13$), então,

$$W^{2,t_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega),$$

daí $u \in L^{\infty}(\Omega)$.

(viii) Se $1/t_2 - 2/N = 0$, (i.e., $t_2 = N/2,\ N = 14$), então,

O resultado segue novamente como em (v), i.e., $u \in L^{\infty}(\Omega)$.

(iv) Se $1/t_2 - 2/N > 0$, (i.e., $t_2 < N/2,\ N > 14$), então,

$$W^{2,t_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_3}(\Omega), \quad \frac{1}{t_3} = \frac{1}{t_2} - \frac{2}{N}\ , \text{ donde } \frac{1}{t_3} = \frac{1}{2^*} - \frac{6}{N}.$$

Como anteriormente

$$g(x,u(x)) \in L^{t_3}(\Omega),$$

e portanto $u \in W^{2,t_3}(\Omega), 1/t_3 = 1/2^* - 6/N$.

Repetindo o argumento do "bootstrap", acharemos algum $t_i > 1$ tal que

$$\frac{1}{t_i} = \frac{1}{2^*} - \frac{2.i}{N},\ t_i > \frac{N}{2}$$

para o qual

$$u \in W^{2,p}(\Omega), \text{ para } p \in (1, \infty),$$

e portanto $u \in C^1(\overline{\Omega})$ para p suficientemente grande, daí $u \in L^\infty(\Omega)$. Concluimos assim a demonstração do lema.

■

1.4 Princípios de Máximo e Aplicações

Exploraremos também algumas aplicações dos Princípios de Máximo.

Lema 1.2. *Suponha que $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfaz* (1.5). *Suponha ainda que $u \geq 0, u \neq 0$ em Ω e g satisfaz (C_σ) com $\sigma = 1$, a, b constantes,* (f2) *e* (f4). *Então*

$$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1 - N/p$$

e vale

$$u > 0 \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

onde ν é o campo vetorial normal exterior a Ω e $\partial u/\partial \nu$ é a derivada de u na direção de ν.

Demonstração: Pelo lema 1.1, temos

$$u \in W^{2,p}(\Omega), \text{ para } p \in (1, \infty).$$

Pelo Teorema B.3 (cf. Apêndice B), temos

$$u \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1 - \frac{N}{p},$$

logo $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1 - N/p$.

Usando que $0 \leq u(x) \leq |u|_\infty$, temos

$$-\frac{|g(x,|u|_\infty)|}{|u|_\infty} \leq \frac{g(x,|u|_\infty)}{|u|_\infty}, \quad \text{para } u(x) > 0.$$

Por outro lado, por (f4), segue que

$$\frac{g(x,|u|_\infty)}{|u|_\infty} < \frac{g(x,u(x))}{u(x)}, \quad \text{para } u(x) > 0.$$

Assim

$$\frac{g(x,u(x))}{u(x)} > -\frac{|g(x,|u|_\infty)|}{|u|_\infty}, \quad \text{para } u(x) > 0,$$

consequentemente,

$$g(x,u(x)) > -u(x)M(x), \quad onde\ M(x) = \frac{|g(x,|u|_\infty)|}{|u|_\infty}.$$

Por (f2), $M(x) \in L^\infty(\Omega)$.

Por outro lado, se $u(x) = 0$, então $g(x,u(x)) \geq 0$. De fato, se tomarmos $(t_n) \subseteq \mathbb{R}$ tal que $t_n > 0$ e $t_n \to 0$, temos

$$g(x,t_n) > -t_n M(x).$$

Passando o limite e usando (f2), segue que

$$g(x,u(x)) \geq 0.$$

Concluimos que

$$g(x,u(x)) \geq -u(x)M(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Logo,

$$-\Delta u(x) \geq -u(x)M(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Afirmação 1.1.

$$-\Delta u(x) > -u(x)M(x) \quad x \in \Omega_0$$

$$\textit{para algum } \Omega_0 \subset \Omega \textit{ aberto com med}\,(\Omega_0) > 0.$$

.

De fato, caso contrário,

$$-\Delta u(x) + u(x)M(x) = 0 \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Daí

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + Muvdx = 0,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

e fazento $v = u$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + Mu^2 dx = 0,$$

de forma que $u(x) = 0$ em Ω, impossível. Daí

$$-\Delta u(x) + u(x)M(x) > 0 \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega_0.$$

Fica provada a afirmação 1.1.

E assim pelos Teoremas B.9 e B.10 (cf. Apêndice B) segue que

$$u > 0 \textit{ em } \Omega,\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \textit{ em } \partial\Omega.$$

■

Capítulo 2

Problemas de Contorno Elípticos: Ressonância

2.1 Um Problema Não-Ressonante, Não-Autônomo, Supercrítico

O Teorema A garante existência de solução para (PD) no caso não-ressonante, não-autônomo e supercrítico.

Um problema relacionado a (PD) no caso de equações integrais foi estudado por Hammerstein [19], com f satisfazendo (C_σ) com $\sigma = 1$ e

$$A_\infty(x) \leq \mu, \text{ para qualquer } x \in \Omega \textit{ e algum } \mu \in \mathbb{R} \textit{ onde } \mu < \lambda_1. \tag{2.1}$$

A condição $\mu < \lambda_1$ caracteriza o problema como não-ressonante.

Mawhin, Ward & Willem [24] mostraram existência de solução de (PD) tomando f com um crescimento subcrítico e considerando o caso não-ressonante, i.e., exigindo uma condição do tipo

$$\begin{gathered} A_\infty(x) \leq \alpha(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \text{ e para algum } \alpha \in L^\infty(\Omega) \\ \textit{com } \alpha(x) \leq \lambda_1 \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \textit{ e} \\ \alpha(x) < \lambda_1 \text{ sobre um subconjunto } \Omega_0 \subset \Omega \textit{ tal que } |\Omega_0| > 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Vários trabalhos foram conduzidos no sentido de procurar existência de solução para (PD) no caso em que $f(x,s)$ está abaixo de λ_1. Gostariamos de mencionar Kazdan & Warner [20], deFigueiredo [11], deFigueiredo & Gossez [14] e Brézis & Nirenberg [7].

A condição $A_\infty(x) < \lambda_1$ que caracteriza (PD) como um problema do tipo não-ressonante, como se pode ver no resultado abaixo.

Proposição 2.1. *Se existe uma função $\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo (2.2), então*

$$i(A_\infty) > 0.$$

Demonstração: Primeiramente, afirmamos que $i(\alpha) > 0$. De fato, seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Se v é uma λ_1-autofunção então $v(x) \neq 0$ para q.t.p. $x \in \Omega$. Obtemos então,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \alpha(x)v^2 dx &= \int_\Omega \{\lambda_1 - \alpha(x)\} v^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega_0} \{\lambda_1 - \alpha(x)\} v^2 dx > 0,\end{aligned}$$

onde $\Omega_0 \subset \Omega$ é tal que medida de Ω_0 é positiva.

Caso contrário, v não é uma λ_1-autofunção, então pela desigualdade de Poincaré, temos

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx > \lambda_1 \int_\Omega v^2 dx,$$

assim

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 - \alpha(x)v^2 dx \quad > \quad \int_\Omega \{\lambda_1 - \alpha(x)\} v^2 dx \geq 0,$$

daí

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 - \alpha(x)v^2 dx > 0, \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } v \neq 0.$$

Agora, seja $v_n \in H_0^1(\Omega)$ com $|v_n|_0 = 1$ uma sequência minimizante para $i(\alpha)$, i.e.,

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \alpha(x)v_n^2 dx \to i(\alpha),$$

então

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \alpha(x)v_n^2 dx \leq i(\alpha) + \epsilon,$$

para qualquer $\epsilon > 0$ e n suficientemente grande.

Como $i(\alpha) \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \alpha(x)v_n^2 dx \leq C,$$

daí

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 \leq C + \lambda_1 \int_\Omega v_n^2 dx.$$

Como $|v_n|_0 = 1$, temos que $\|v_n\|_1$ é limitado. E ainda, $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert reflexivo, então passando para subsequências se necessário, obtemos devido ao Teorema B.6 (cf. Apêndice B) que

$$\begin{array}{rl} v_n \rightharpoonup v \; em \; H_0^1(\Omega); & v_n \to v \; em \; L^2(\Omega); \\ v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega; & |v(x)| \leq \theta_0(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \end{array}$$

para algum v sobre a esfera unitária de $L^2(\Omega)$ e algum $\theta_0 \in L^2(\Omega)$.

Segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e pelo fato de $\|\cdot\|_1$ ser fracamente sequencialmente semi-contínua inferiormente (f.s.s.c.i.) (cf. Brézis [5], p.35, Prop.III.5), que

$$\int_\Omega \alpha(x) v^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \alpha(x) v_n^2 dx \quad e \quad \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \, dx.$$

Daí

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v|^2 - \alpha(x) v^2 dx &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \alpha(x) v_n^2 dx \\ &\leq i(\alpha) + \epsilon, \end{aligned}$$

para qualquer $\epsilon > 0$. Então fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 - \alpha(x) v^2 dx \leq i(\alpha),$$

donde $i(\alpha) > 0$.

Como $A_\infty(x) \leq \alpha(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$, segue que $i(A_\infty) \geq i(\alpha) > 0$. ■

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema A, observamos que devido ao comportamento supercrítico de f o funcional energia I associado a (PD),

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x, u) dx - \int_\Omega h u dx, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

não é necessariamente diferenciável.

Usaremos, na demonstração do Teorema A, o Teorema B.7 (cf. Apêndice B), um resultado sobre funcionais fracamente sequencialmente semi-contínuos inferiormente (f.s.s.c.i.) e coercivos.

Utilizando este resultado provaremos que:

$$\textit{existe } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ tal que } I(u) = \min_{v \in H_0^1} I(v). \tag{2.3}$$

Em seguida, provaremos que o mínimo u de I satisfaz:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx + \int_\Omega h\varphi dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{2.4}$$

Verificação de (2.3)**:**

Afirmação 2.1. *I é f.s.s.c.i.*

De fato, seja $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H_0^1(\Omega)$, então passando para subsequência se necessário, temos

$$u_n \to u \textit{ em } L^2(\Omega); \quad u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega; \quad |u_n(x)| \leq \theta_1(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,$$

para algum $\theta_1 \in L^2(\Omega)$. Da condição (F), obtemos

$$F(x,u_n) \leq \frac{A}{2}|u_n|^2 + B(x) \leq \frac{A}{2}\theta_1(x)^2 + B(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Como $F(x,u_n) \to F(x,u) \quad$ q.t.p. $x \in \Omega$, temos, pelo lema de Fatou, que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega F(x,u_n)dx \leq \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega hudx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n)dx - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega hu_n dx \\
&= \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega -F(x,u_n)dx + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega -hu_n dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx\right\} + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega -hu_n dx \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx - \int_\Omega hu_n dx\right\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} I(u_n).
\end{aligned}$$

Portanto I é f.s.s.c.i. Fica provado a afirmação 2.1.

Afirmação 2.2. *I é coercivo, i.e., $I(u) \to \infty$ quando $\|u\|_1 \to \infty$.*

De fato, suponha por contradição, que exista uma sequência u_n *em* $H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_n\|_1 \to \infty$ e $I(u_n) \leq C$ para algum $C > 0$. Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx &\leq \int_\Omega F(x,u_n)dx + \int_\Omega h u_n dx + C\\ &\leq \int_\Omega \left(\frac{A}{2}u_n^2 + B(x)\right)dx + \int_\Omega h u_n dx + C.\end{aligned}$$

Seja $v_n \equiv u_n / |u_n|_0$ e observe que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx \leq \frac{A}{2}\int_\Omega u_n^2 dx + \int_\Omega B(x)dx + \int_\Omega h u_n dx + C \leq \frac{A}{2}|u_n|_0^2 + |h|_0 |u_n|_0 + C_1,$$

logo, quando $\|u_n\|_1 \to \infty$, temos $|u_n|_0 \to \infty$. Como

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2\, dx \leq \int_\Omega \left(\frac{A}{2}v_n^2 + \frac{B(x)}{|u_n|_0^2}\right)dx + \int_\Omega h\frac{v_n}{|u_n|_0}dx + \frac{C}{|u_n|_0^2}.$$

temos que, $\|v_n\|_1$ é limitado, então passando para subsequência se necessário, temos

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega); & v_n &\to v \text{ em } L^2(\Omega);\\ v_n(x) &\to v(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega; & |v(x)| &\leq \theta_2(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega,\end{aligned}$$

para algum v sobre a esfera unitária de $L^2(\Omega)$ e algum $\theta_2 \in L^2(\Omega)$.

Afirmamos que,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{2F(x,|u_n|_0 v_n)}{|u_n|_0^2}dx \leq \int_{[v\neq 0]} A_\infty v^2 dx.$$

De fato,

$$F(x,|u_n|_0 v_n) \leq \frac{A}{2}|u_n|_0^2 v_n^2 + B(x),$$

logo

$$\frac{2F(x,|u_n|_0 v_n)}{|u_n|_0^2} \leq A\cdot v_n^2 + \frac{2B(x)}{|u_n|_0^2} \leq A\cdot(\theta_2(x))^2 + \frac{2B(x)}{|u_n|_0^2}.$$

Por outro lado,

$$\frac{2F(x, |u_n|_0 v_n)}{|u_n|_0^2} = \frac{2F(x, |u_n|_0 v_n)}{(|u_n|_0 v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]},$$

logo

$$\frac{2F(x, |u_n|_0 v_n)}{(|u_n|_0 v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]} \leq A \cdot (\theta_2(x))^2 + \frac{2B(x)}{|u_n|_0^2}.$$

Agora fixe $x \in \Omega$ tal que $v(x) \neq 0$. Como $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$ temos que $v_n \neq 0$ para um n suficientemente grande, donde

$$\chi_{[v_n \neq 0]} v_n^2(x) \to \chi_{[v \neq 0]} v^2(x), \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega$$

daí

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{2F(x, |u_n|_0 v_n)}{(|u_n|_0 v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]} \right) &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{2F(x, |u_n|_0 v_n)}{(|u_n|_0 v_n)^2} \right) \lim_{n\to\infty} \left(v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]} \right) \\
&= A_\infty(x) v^2 \chi_{[v \neq 0]}.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{2F(x, |u_n|_0 v_n)}{(|u_n|_0 v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]} \right) dx &\leq \int_\Omega A_\infty(x) v^2 \chi_{[v \neq 0]} dx \\
&= \int_{[v \neq 0]} A_\infty(x) v^2 dx.
\end{aligned}$$

Pelo lema de Fatou, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{2F(x, |u_n|_0 v_n)}{(|u_n|_0 v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]} \right) dx \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{2F(x, |u_n|_0 v_n)}{(|u_n|_0 v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]} \right) dx,$$

donde

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{2F(x, |u_n|_0 v_n)}{(|u_n|_0 v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]} \right) dx \leq \int_{[v \neq 0]} A_\infty(x) v^2 dx.$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega\left(\frac{2F(x,|u_n|_0\,v_n)}{|u_n|_0^2}\right)dx\leq\int_{[v\neq 0]}A_\infty(x)v^2dx.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\|v\|_1^2 &\leq \liminf_{n\to\infty}\|v_n\|_1^2\\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left\{\int_\Omega\frac{2F(x,|u_n|_0\,v_n)}{|u_n|_0^2}dx+\int_\Omega\frac{2hv_n}{|u_n|_0}dx+\frac{2C}{|u_n|_0^2}\right\}\\
&= \liminf_{n\to\infty}\left\{\int_\Omega\frac{2F(x,|u_n|_0\,v_n)}{|u_n|_0^2}dx\right\}+\lim_{n\to\infty}\left\{\int_\Omega\frac{2hv_n}{|u_n|_0}dx+\frac{2C}{|u_n|_0^2}\right\}\\
&\leq \limsup_{n\to\infty}\left\{\int_\Omega\frac{2F(x,|u_n|_0\,v_n)}{(|u_n|_0\,v_n)^2}v_n^2\chi_{[v_n\neq 0]}dx\right\}\\
&\leq \int_{[v\neq 0]}A_\infty(x)v^2dx.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx-\int_{[v\neq 0]}A_\infty(x)v^2dx\leq 0,\quad com\ v\in H_0^1(\Omega),\ |v|_0=1,$$

contradizendo (A_∞). Consequentemente, I é coercivo e fica provada a afirmação 2.2.

Segue das Afirmações 2.1 e 2.2 e utilizando o Teorema B.7 (cf. Apêndice B) que (2.3) é verdadeiro.

Verificação de (2.4)**:**

$$\int_\Omega\nabla u\nabla\varphi dx=\int_\Omega f(x,u)\varphi dx+\int_\Omega h\varphi dx,\ \forall\ \varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega).$$

De fato u satisfaz

$$\frac{I(u+t\varphi)-I(u)}{t}\geq 0\quad para\ \ \varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\ \ e\ \ t>0.$$

Assim,

$$\frac{I(u+t\varphi)-I(u)}{t}=\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx+\frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx-\int_\Omega \frac{F(x,u+t\varphi)-F(x,u)}{t}dx-\int_\Omega h\varphi dx,$$

então

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx+\frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\geq\int_\Omega \frac{F(x,u+t\varphi)-F(x,u)}{t}dx+\int_\Omega h\varphi dx.$$

Mas, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\frac{F(x,u+t\varphi)-F(x,u)}{t}=f(x,\theta_t)\varphi \quad \text{q.t.p. } x\in\Omega,$$

para alguma função $\theta_t:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ com

$$\min\{u(x)+t\varphi(x),u(x)\}\leq\theta_t(x)\leq\max\{u(x)+t\varphi(x),u(x)\}$$

e consequentemente existe uma função $K(x)\in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$|\theta_t(x)|\leq K(x) \quad \text{q.t.p. } x\in\Omega \;\; e \;\; t\in(0,1).$$

De fato,

$$\begin{aligned}|\theta_t(x)| &\leq \max\{|u(x)+t\varphi(x)|,|u(x)|\}\\ &\leq \max\{|u(x)|+|\varphi(x)|,|u(x)|\}\\ &= |u(x)|+|\varphi(x)| \;\equiv\; K(x).\end{aligned}$$

Assim, por (C_σ),

$$|f(x,\theta_t(x))|\leq aK(x)^\sigma+b(x) \quad para \;\; algum\; \sigma\in[1,2^*]$$

Agora, como $\theta_t(x)\to u(x)$ q.t.p. $x\in\Omega$ quando $t\to 0$ e $f:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é Carathéodory, temos

$$f(x,\theta_t(x))\to f(x,u(x)), \quad \text{q.t.p. } x\in\Omega,$$

donde

$$f(x,\theta_t(x))\varphi(x)\to f(x,u(x))\varphi(x) \quad \text{q.t.p. } x\in\Omega.$$

Então

$$\frac{F(x,u+t\varphi)-F(x,u)}{t} \to f(x,u)\varphi \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega \text{ quando } t \to 0.$$

Assim, pelo lema de Fatou, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \geq \int_\Omega f(x,u)\varphi dx + \int_\Omega h\varphi dx, \ \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

e substituindo φ por $-\varphi$, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx + \int_\Omega h\varphi dx, \ \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Assim fica provado (2.4).

Finalmente se $\sigma \in [1, (N+2)/(N-2)]$ temos que $I \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ (cf. Ambrosetti & Prodi [3]) e como u é um ponto de mínimo, temos

$$\left\langle I^{'}(u), v \right\rangle = 0,$$

onde $I^{'}$ denota a derivada de Fréchet de I. Segue que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u) v dx + \int_\Omega h v dx, \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Isto encerra a demonstração do Teorema A. ∎

2.2 Um Problema Ressonante, Não-Autônomo, Crítico

O Teorema B garante existência de solução para (PD) no caso não-autônomo e crítico e complementa o Teorema A, no sentido que trata alguns casos ressonantes, aqui entendido como $i(A_\infty) = 0$.

Com o objetivo de demonstrar o Teorema B, introduziremos os seguintes resultados preliminares, que serão demonstrados no final da seção.

Lema 2.1. *Suponha (F_∞) e (C_σ) para algum $\sigma \in [1, 2^* - 1]$. Então existem funções $g \in L^1(\Omega)$ e $G \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ tais que*

$$G(s+t) \leq G(s) + G(t), \quad \textit{para todo } s, t \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

$$G(t) \to \infty \quad \textit{quando } t \to \infty, \tag{2.6}$$

$$G(t) \leq |t| + 4, \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

$$F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 \leq -G(t) + g(x). \tag{2.8}$$

Lema 2.2. *Considere G como no lema anterior. Então o funcional*

$$v \longmapsto \int_\Omega G(v(x))dx$$

definido para todo $v \in E(\lambda_1)$, onde $E(\lambda_1)$ é o autoespaço associado a λ_1, é coercivo.

Demonstração do Teorema B: Utilizando novamente o Teorema B.7 (cf. Apêndice B), provaremos que o funcional associado a (PD) é coercivo e f.s.s.c.i.

Afirmação 2.3. *I é coercivo.*

De fato, temos por (2.8) que

$$\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{2}\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx \leq -\int_\Omega G(u)dx + \int_\Omega g(x)dx.$$

Para $u \in H_0^1(\Omega)$, considere

$$\bar{u} = \left(\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx\right)\varphi_1, \quad \tilde{u} = u - \bar{u},$$

sendo assim,

$$\bar{u} \in E(\lambda_1) \ e \ \tilde{u} \in E(\lambda_1)^\perp,$$

daí

$$G(\bar{u}(x)) \leq G(u(x)) + G(-\tilde{u}(x)),$$

que implica

$$-G(u(x)) \leq -\left(G(\bar{u}(x)) - G(-\tilde{u}(x))\right).$$

Logo para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{2}\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx &\leq -\int_\Omega \left(G(\bar{u}(x)) - G(-\tilde{u}(x))\right)dx + \int_\Omega g(x)dx \\
&\leq -\int_\Omega G(\bar{u}(x))dx + \int_\Omega G(-\tilde{u}(x))dx + \int_\Omega g(x)dx \\
&\leq -\int_\Omega G(\bar{u}(x))dx + \int_\Omega \left(|\tilde{u}| + 4\right)dx + \int_\Omega g(x)dx \\
&\leq -\int_\Omega G(\bar{u}(x))dx + |\tilde{u}|_{L^1(\Omega)} + 4med(\Omega) + \int_\Omega g(x)dx \\
&\leq -\int_\Omega G(\bar{u}(x))dx + C\left\|\tilde{u}\right\|_1 + 4med(\Omega) + \int_\Omega g(x)dx \\
&\leq -\int_\Omega G(\bar{u}(x))dx + C_1\left(\left\|\tilde{u}\right\|_1 + 1\right),
\end{aligned}$$

onde C é a constante positiva da desigualdade de Sobolev e

$$C_1 = C + 4med(\Omega) + \int_\Omega g(x)dx.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx - \left(\int_\Omega F(x,u)dx - \frac{1}{2}\lambda_1 \int_\Omega u^2 dx\right) - \int_\Omega hudx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 dx - \frac{1}{2}\lambda_1 \int_\Omega \tilde{u}^2 dx + \int_\Omega G(\bar{u}(x))dx - C_1\left(\left\|\tilde{u}\right\|_1 + 1\right) - \int_\Omega h\tilde{u}dx.
\end{aligned}$$

Como $\tilde{u} \in E(\lambda_1)^\perp$, temos (cf. Castro [10], p.33)

$$\int_\Omega \tilde{u}^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_2}\int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 dx$$

e pelas desigualdades de Holder e Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 dx - C_1\left(\left\|\tilde{u}\right\|_1 + 1\right) + C\,|h|_{L^2(\Omega)}\left\|\tilde{u}\right\|_1 + \int_\Omega G(\bar{u}(x))dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 dx - C_2\left(\left\|\tilde{u}\right\|_1 + 1\right) + \int_\Omega G(\bar{u}(x))dx,
\end{aligned}$$

onde

$$C_2 = C_1 + C\,|h|_0 .$$

Segue que I é coercivo pois

$$v \longmapsto \int_\Omega G(v(x))dx$$

é coercivo sobre $E(\lambda_1)$ e

$$\|u\|_1^2 = \|\bar{u}\|_1^2 + \|\tilde{u}\|_1^2 ,$$

assim quando $\|u\|_1 \to \infty$ temos $\|\bar{u}\|_1 \to \infty$ *ou* $\|\tilde{u}\|_1 \to \infty$. Logo a Afirmação 2.3 é verdadeira.

Afirmação 2.4. *I é f.s.s.c.i.*

De fato, de $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$u_n \to u \text{ } em \text{ } L^2(\Omega); \quad u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega; \quad |u_n(x)| \leq g_1(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

onde $g_1 \in L^2(\Omega)$.

Segue do lema 2.1, que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 + g(x),$$

daí

$$F(x,u_n) \leq \frac{1}{2}\lambda_1 |u_n|^2 + g(x) \leq \frac{\lambda_1}{2} g_1(x)^2 + g(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Como $F(x,u_n) \to F(x,u)$, então pelo lema de Fatou resulta que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega F(x,u_n)dx \leq \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega hudx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n)dx - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega hu_ndx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n)dx - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega hu_ndx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx - \int_\Omega hu_ndx\right\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} I(u_n).
\end{aligned}
$$

Decorre das Afirmações 2.3 e 2.4 e utilizando Teorema B.7 (cf. Apêndice B), que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$I(u) = \min_{v\in H_0^1} I(v).$$

Devido ao comportamento crítico de f, segue que (cf. Ambrosetti & Prodi [3])

$$I \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$$

e

$$\left\langle I^{'}(u), v\right\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)vdx + \int_\Omega hvdx,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando que u é uma solução fraca de (PD). Fica assim provado o Teorema B. ■

Demonstração do lema 2.1. De (F_∞), temos que existe uma sequência de inteiros positivos (n_k) com $n_{k+1} > 2n_k$, para todo $k \in \mathbb{Z}, k > 0$ tal que

$$F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 \leq -k \quad \text{para todo } \ |t| \geq n_k \ e\ q.t.p.\ x \in \Omega. \tag{2.9}$$

Considere $n_0 = 0$ e defina

$$G(t) = k + 2 + \frac{|t| - n_{k-1}}{n_k - n_{k-1}},$$

com $n_{k-1} \leq |t| < n_k$.

Observe que $G \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ e que vale (2.6). Além disso, pela definição de G, temos

$$k + 2 \leq G(t) \leq k + 3, \quad n_{k-1} \leq |t| < n_k. \tag{2.10}$$

Da condição (C_σ) para algum $1 \leq \sigma \leq 2^* - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 \right| &\leq |F(x,t)| + \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 \\ &\leq \int_0^t |f(x,s)|\, ds + \frac{1}{2}\lambda_1 \left(|t|^{2^*} + |t| \right) \\ &\leq \frac{a}{2^*} |t|^{2^*} + b(x)\,|t| + \frac{1}{2}\lambda_1 \left(|t|^{2^*} + |t| \right). \end{aligned}$$

Mas, para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_{k-1} \leq |t| < n_k.$$

Assim, para o caso em que $k = 1$, obtemos de (2.10)

$$\begin{aligned} F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 &\leq \frac{a}{2^*} n_1^{2^*} + b(x) n_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 \left(n_1^{2^*} + n_1 \right) \\ &= \frac{a}{2^*} n_1^{2^*} + b(x) n_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 \left(n_1^{2^*} + n_1 \right) + 4 - 4. \end{aligned}$$

Defina

$$g(x) \equiv \frac{a}{2^*} n_1^{2^*} + b(x) n_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 \left(n_1^{2^*} + n_1 \right) + 4,$$

Portanto

$$F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 \leq -G(t) + g(x),$$

para todo $|t| \leq n_1$ e q.t.p. $x \in \Omega$.

Para o caso $k \geq 2$, obtemos de (2.9) e (2.10)

$$\begin{aligned} F(x,t) - \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 &\leq -k \\ &\leq -(k-1) \\ &\leq -(k-1) + g(x) - 4 \\ &\leq -(k+3) + g(x) \\ &\leq -G(t) + g(x), \end{aligned}$$

para todo $n_{k-1} \leq |t| < n_k$ e q.t.p. $x \in \Omega$.

Vejamos agora que

$$G(t) \leq |t| + 4,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim dado $t \in \mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_{k-1} \leq |t| < n_k.$$

Segue de (2.10) e do fato que $n_k \geq k$ para qualquer $k \geq 0$ que,

$$G(t) \leq k + 3 = (k-1) + 4 \leq n_{k-1} + 4 \leq |t| + 4.$$

Provaremos agora a subaditividade de G. Considere

$$n_{k-1} \leq |s| < n_k, \quad n_{j-1} \leq |t| < n_j$$

e $m = \max\{k, j\}$.

Então segue que,

$$|s+t| \leq |s| + |t| < n_k + n_j \leq 2n_m < n_{m+1}.$$

Como $|s+t| < n_{m+1}$ e por (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} G(s+t) &\leq (m+1) + 3 \\ &\leq k + 2 + j + 2 \\ &\leq G(s) + G(t). \end{aligned}$$

Fica mostrado o lema 2.1. ■

Demonstração do lema 2.2. Suponha que a afirmação é falsa, então existe $C > 0$ e uma sequência $v_n \in E(\lambda_1)$ tal que

$$n \to \infty, \quad \|v_n\|_1 \to \infty \ \ e \ \ \int_\Omega G(v_n)dx \leq C,$$

daí

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega G(v_n)dx \leq C < \infty. \tag{2.11}$$

Afirmação 2.5.

Dado qualquer $\alpha > 0$, existe $m_\alpha > 0$ tal que

$$med\{x \in \Omega \ / \ |v(x)| < m_\alpha \|v\|_1\} < \alpha, \ \forall \ v \in E(\lambda_1).$$

De fato, por contradição, suponha que existe $\alpha_0 > 0$ e uma sequência $(v_n)_{n=1}^\infty \subseteq E(\lambda_1)$ tal que

$$med\left\{x \in \Omega \ / \ |v_n(x)| < \frac{1}{n}\|v_n\|_1\right\} \geq \alpha_0, \quad \text{para todo } n, \tag{2.12}$$

daí $v_n \neq 0$, para todo n, pois caso contrário, existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_{n_0}(x) = 0$ e assim

$$X \equiv \{x \in \Omega \ / \ |v_{n_0}(x)| < 0\} = \emptyset,$$

donde $med(X) = 0 < \alpha_0$.

Sem perda de generalidade, consideraremos

$$med\left\{x \in \Omega \ / \ |v_n(x)| < \frac{1}{n}\right\} \geq \alpha_0, \quad \text{para todo } n. \tag{2.13}$$

Segue da compacidade da esfera unitária de $E(\lambda_1)$, pois $dim\,(E(\lambda_1)) < \infty$, que existe uma subsequência, $(v_n) \subseteq E(\lambda_1)$ tal que

$$v_n \to v \ em \ E(\lambda_1).$$

Portanto $v(x) \neq 0, \ \forall \ x \in \Omega$ e $|v_n - v|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$, pois as normas $|\cdot|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes no espaço de dimensão finita $E(\lambda_1)$.

Assim, dado $m \in \mathbb{N}$, existe $N \geq 2m$ tal que

$$|v_n - v|_\infty < \frac{1}{2m} \quad \text{para } n \geq N.$$

Considere agora os conjuntos

$$A = \left\{x \in \Omega \ / \ |v_N(x)| < \frac{1}{N}\right\}, \quad B = \left\{x \in \Omega \ / \ |v(x)| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Se $x \in A$, então $|v_N(x)| < 1/N$ e

$$|v(x)| = |v(x) - v_N(x) + v_N(x)| \leq |v(x) - v_N(x)| + |v_N(x)| \leq |v_N - v|_\infty + \frac{1}{N} \leq \frac{1}{m}.$$

Logo $x \in B$, então $A \subseteq B$. Segue que

$$med\left\{x \in \Omega \ / \ |v(x)| < \frac{1}{m}\right\} \geq \alpha_0, \quad \text{para todo } m.$$

Portanto $v \equiv 0$ sobre um conjunto de medida positiva e isto contradiz o fato que $v(x) \neq 0, \ \forall \ x \in \Omega$.

Logo a afirmação 2.5 fica provada.

Agora considere $\|v_n\|_1 \to \infty$ e o conjunto

$$A_n = \{x \in \Omega \ / \ |v_n(x)| \geq m_\alpha \|v_n\|_1\}, \quad \text{para todo } n.$$

Então temos $med\,(\Omega \setminus A_n) < \alpha$. Pela coercividade de G, temos que dado $\beta > 0$, existe $M > 0$ tal que

$$G(t) \geq \beta, \quad |t| \geq M.$$

Seja $B_n = \{x \in \Omega \ / \ |v_n(x)| \geq M\}$. Assim para $x \in A_n$, temos

$$|v_n(x)| \geq m_\alpha \|v_n\|_1,$$

daí $A_n \subseteq B_n$ para n suficientemente grande.

Segue por (2.7) e pelo fato de que

$$\Omega = A_n \cup (\Omega \setminus A_n),$$

donde

$$med\,(\Omega) = med\,(A_n) + med\,(\Omega \setminus A_n)\,,$$

que implica

$$med\,(A_n) \geq med\,(\Omega) - \alpha.$$

Para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} G(v_n)dx &= \int_{B_n} G(v_n)dx + \int_{\Omega\setminus B_n} G(v_n)dx \\
&\geq \int_{B_n} \beta dx - \int_{\Omega\setminus B_n} G(v_n)dx \\
&\geq \beta med\,(B_n) - (|v_n| + 4)\, med\,(\Omega \setminus B_n) \\
&\geq \beta med\,(A_n) - (M + 4)\, med\,(\Omega \setminus A_n) \\
&\geq \beta\,(med\,(\Omega) - \alpha) - (M + 4)\,\alpha.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} G(v_n)dx \geq \beta\,(med\,(\Omega) - \alpha) - (M + 4)\,\alpha.$$

Fazendo $\alpha \to 0$, obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} G(v_n)dx \geq \beta med\,(\Omega)\,.$$

Como β é arbitrário, temos

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} G(v_n)dx = \infty$$

o que contradiz (2.11), logo

$$v \longmapsto \int_{\Omega} G(v)dx$$

é coercivo em $E(\lambda_1)$. Fica demonstrado o lema 2.2. ∎

2.3 Um Problema Não-Ressonante, Autônomo, Sem Condição de Crescimento

Devido ao fato que f é autônoma, i.e., $f(x,u) \equiv f(u)$ para todo x em Ω, reescrevemos o problema (PD) como

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + h(x) & , \quad x \in \Omega \\ u = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

Como não é exigido qualquer condição de crescimento em f, no sentido que condições do tipo (C_σ) não são exigidas, não podemos utilizar aqui diretamente métodos variacionais. Um dos argumentos utilizados é truncar a função f associando um novo problema e obtendo a solução por métodos variacionais para esse novo problema em combinação com estimativas apropriadas.

Neste sentido, antes de apresentar a demonstração do Teorema C, formulamos vários resultados preliminares que demonstraremos posteriormente.

Lema 2.3. *Suponha* (A'_∞), $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua*

$$\inf_{s \geq 0} f(s) = -\infty, \quad \sup_{s \leq 0} f(s) = +\infty. \tag{2.15}$$

Então, para cada $h \in L^\infty(\Omega)$, *existe* $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *que satisfaz o problema* (2.14) *no seguinte sentido*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx + \int_\Omega h v dx, \tag{2.16}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

A solução contruída na demonstração do lema 2.3 pode não corresponder ao mínimo do funcional associado I.

Lema 2.4. *Suponha* (A'_∞), $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua*

$$\inf_{s \geq 0} f(s) > -\infty, \quad \sup_{s \leq 0} f(s) < +\infty. \tag{2.17}$$

Então, para cada $h \in H^{-1}(\Omega)$, *existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $f(u) \in L^1(\Omega)$ *e satisfaz o problema* (2.14) *no sentido* (2.16) *para todo* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *E mais,* u *é o mínimo do funcional associado ao problema* (2.14).

Diversos trabalhos consideraram condições de crescimento de apenas um lado sobre f, por exemplo, a condição do sinal $f(s)s \leq 0$ introduzida em [9], ou a condição $f(s)sgn(s) \leq \zeta(s) + c$ (*ou* $f(s)sgn(s) \geq -\zeta(s) - c$) onde $\zeta(s) = o\left(|s|^{2^*}\right)$ no infinito considerado por [2].

Lema 2.5. *Suponha* (A'_∞)*,* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua*

$$\inf_{s\geq 0} f(s) = -\infty, \quad \sup_{s\leq 0} f(s) < +\infty. \tag{2.18}$$

Então, para cada $h \in L^r(\Omega)$ *limitado superiormente (onde* $r > 1$ *se* $N = 2$ *e* $r = 2N/(N+2)$ *se* $N \geq 3$*), existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *limitado superiormente tal que* $f(u) \in L^1(\Omega)$ *e satisfaz o problema* (2.14) *no sentido* (2.16) *para todo* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*.*

Lema 2.6. *Suponha* (A'_∞)*,* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua*

$$\inf_{s\geq 0} f(s) > -\infty, \quad \sup_{s\leq 0} f(s) = +\infty. \tag{2.19}$$

Então, para cada $h \in L^r(\Omega)$ *limitado inferiormente (onde* $r > 1$ *se* $N = 2$ *e* $r = 2N/(N+2)$ *se* $N \geq 3$*), existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *limitado inferiormente tal que* $f(u) \in L^1(\Omega)$ *e satisfaz o problema* (2.14) *no sentido* (2.16) *para todo* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*.*

Demonstração do Teorema C: A demonstração é por aplicação direta dos lemas, pois a função f satisfaz um das seguintes condições: (2.15), (2.17), (2.18) ou (2.19). ∎

Demonstração do lema 2.3: De (2.15), existem $a < 0 < b$ tal que $f(a) \geq |h|_\infty$ e $f(b) \leq -|h|_\infty$. Defina

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) & , \quad se\ s \in [a,b] \\ f(a) & , \quad se\ s < a \\ f(b) & , \quad se\ s > b. \end{cases}$$

O Problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{f}(u) + h(x) & , \quad x \in \Omega \\ u = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

admite uma solução u (no sentido fraco) dado que $\tilde{f}$ satisfaz (A'_∞) e $\left|\tilde{f}(s)\right| \leq C$ (cf. Mawhin, Ward & Willem [24]).

Afirmação 2.6. $a \leq u(x) \leq b \quad q.t.p. \ x \in \Omega.$

(i) $u(x) \leq b$;

Defina

$$u_b(x) = \begin{cases} u(x) & , \ se \ u(x) \leq b \\ b & , \ se \ u(x) > b. \end{cases}$$

Tome $w = u - u_b$. Temos que $u_b \in H_0^1(\Omega)$, de fato, tome

$$\xi_b(t) = \begin{cases} t & , \ se \ t \leq b \\ b & , \ se \ t > b. \end{cases}$$

Temos que ξ_b é uma função Lipschitziana cuja derivada $\xi_b^{'}(t)$ existe exceto em um número finito de pontos, então, pelo Teorema B.8 (cf. Apêndice B) segue que

$$\xi_b(u)(x) \equiv \xi_b(u(x)) = \begin{cases} u(x) & , \ se \ u(x) \leq b \\ b & , \ se \ u(x) > b \end{cases}$$

pertence a $H_0^1(\Omega)$. Portanto $w \in H_0^1(\Omega)$. Segue por (2.20) que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega \left(\tilde{f}(u) + h\right) w dx.$$

Seja

$$\Omega_1 \equiv \{x \in \Omega \ / \ u(x) > b\},$$

assim temos, $\nabla u = \nabla w$, $w = u - b > 0$ em Ω_1 e $f(b) \leq -|h|_\infty$. Como em Ω_1 temos $\tilde{f}(u) = f(b)$, obtemos

$$\tilde{f}(u) + h = f(b) + h \leq f(b) + |h|_\infty \leq 0.$$

Logo

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx \leq 0, \quad x \in \Omega_1.$$

Portanto $w = 0$ q.t.p. $x \in \Omega_1$ obtendo que

$$w = 0 \ \ q.t.p. \ x \in \Omega \ \ e \ \ u(x) = u_b(x) \ \ q.t.p. \ x \in \Omega.$$

(ii) $a \leq u(x)$;

Demonstração análoga ao item(i). Basta definir

$$u_a(x) = \begin{cases} u(x) & , \quad se\ u(x) \geq a \\ a & , \quad se\ u(x) < a. \end{cases}$$

Logo a afirmação 2.6 é verdadeira.

Portanto $\tilde{f}(u) = f(u)$. Então existe $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ que satisfaz o problema (2.14) no sentido (2.16) para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. ■

Demonstração do lema 2.4: Para a demonstração deste lema faremos uso do seguinte resultado auxiliar.

Lema 2.7. *Suponha*

$$\begin{cases} f(s) \geq I^+ & , \quad se\ s \geq 0 \\ f(s) \leq S^- & , \quad se\ s \leq 0. \end{cases}$$

Tome $u \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $-1/2 \leq \alpha < 0$. Denote $v_\alpha \equiv \varphi - \alpha u$, então existe $l \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\frac{F(u + tv_\alpha) - F(u)}{t} \geq l(x) \quad q.t.p.\ x \in \Omega\ ,\ t \in (0,1)$$

A demonstração deste lema será feita posteriormente. Utilizando este resultado, segue que

Pelo fato que $A_\infty < \lambda_1$ e pela Proposição 2.1., temos

$$i(A_\infty) > 0.$$

E ainda temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(s) \leq \frac{(A_\infty + \epsilon)}{2} s^2 + b, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Assim pela demonstração do Teorema A, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I(u) = \min_{v \in H_0^1} I(v).$$

Logo obtemos que

$$\frac{I(u+tv)-I(u)}{t} \geq 0, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \ e \ t > 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \frac{t}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \geq \int_\Omega \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} dx + \int_\Omega hv dx.$$

Faça $v = v_\alpha \equiv \varphi - \alpha u$, onde $-1/2 \leq \alpha < 0$, $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Temos pelo lema 2.7 e pelo Teorema do Valor Médio que

$$\frac{F(u+tv_\alpha)-F(u)}{t} = f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha \geq l(x), \quad l \in L^1(\Omega),$$

onde

$$\min \{u + tv_\alpha, u\} \leq \xi_{t,\alpha} \leq \max \{u + tv_\alpha, u\}.$$

Faça $t = -\alpha$ e $\xi_{t,\alpha}(x) = \eta_\alpha(x)$ então

$$\min \left\{(1+\alpha^2)u(x) + \alpha\varphi(x), u(x)\right\} \leq \eta_\alpha(x) \leq \max \left\{(1+\alpha^2)u(x) + \alpha\varphi(x), u(x)\right\}.$$

Assim

$$\eta_\alpha(x) \to u(x), \quad \text{quando } \alpha \to 0, \ e$$
$$f(\eta_\alpha(x))v_\alpha(x) \to f(u(x))v_\alpha(x), \quad \text{quando } \alpha \to 0.$$

Agora

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v_\alpha dx - \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla v_\alpha|^2 \, dx \geq \int_\Omega f(\eta_\alpha) v_\alpha dx + \int_\Omega hv_\alpha dx,$$

daí

$$\liminf_{\alpha \to 0} \left\{ \int_\Omega \nabla u \nabla v_\alpha dx - \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |\nabla v_\alpha|^2 \, dx \right\} \geq \liminf_{\alpha \to 0} \left\{ \int_\Omega f(\eta_\alpha) v_\alpha dx + \int_\Omega hv_\alpha dx \right\},$$

donde

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \geq \liminf_{\alpha \to 0} \int_\Omega f(\eta_\alpha) v_\alpha dx + \int_\Omega h\varphi dx.$$

Usando o lema de Fatou, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \geq \int_\Omega f(u)\varphi dx + \int_\Omega h\varphi dx, \ \forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Trocando φ por $-\varphi$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(u)\varphi dx + \int_\Omega h\varphi dx, \ \forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Agora considere $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(t) = \begin{cases} -1 & , \quad se \ t < -1 \\ t & , \quad se \ |t| \leq 1 \\ 1 & , \quad se \ t > 1. \end{cases}$$

Temos pelo Teorema B.8 (cf. Apêndice B) que $\theta(u) \in H_0^1(\Omega)$, logo $\theta(u) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Assim tomando $\varphi = \theta(u)$ obtemos que $f(u)\theta(u) \in L^1(\Omega)$, e consequentemente $|f(u)\theta(u)| \in L^1(\Omega)$. Assim

$$\int_\Omega |f(u)\theta(u)| \, dx = \int_{[|u|>1]} |f(u)| \, dx + \int_{[|u|\leq 1]} |f(u)u| \, dx.$$

Logo

$$\int_{[|u|>1]} |f(u)| \, dx < \infty.$$

Como

$$\int_\Omega |f(u)| \, dx = \int_{[|u|>1]} |f(u)| \, dx + \int_{[|u|\leq 1]} |f(u)| \, dx$$

obtemos que

$$\int_{[|u|\leq 1]} |f(u)| \, dx \leq \int_{[|u|\leq 1]} C dx \leq \int_\Omega C dx = C med\,(\Omega) < \infty.$$

Portanto $f(u) \in L^1(\Omega)$. ■

Demonstração do lema 2.5: Temos que existe $b > 0$ tal que $f(b) \leq -\sup_{x \in \Omega} h(x)$.

Defina

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) & , \quad se\ s \leq b \\ f(b) & , \quad se\ s > b. \end{cases}$$

Agora, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \tilde{f}(u) + h(x) \quad , \quad x \in \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\quad , \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Temos que este problema satisfaz o lema 2.4, então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\tilde{f}(u) \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega \tilde{f}(u) v dx + \int_\Omega h v dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Afirmação 2.7. $u(x) \leq b \quad q.t.p.\ x \in \Omega.$

De fato, seja $T \equiv -\Delta u - h$. Temos que $T \in H^{-1}(\Omega)$. Agora se $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega (-\Delta u - h)\, \varphi dx = \int_\Omega -\Delta u \varphi - h\varphi dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega h \varphi dx = \int_\Omega \tilde{f}(u) \varphi dx.$$

Portanto temos que $T = \tilde{f}(u)$ no sentido das distribuições, e assim

$$< T, \varphi >= \int_\Omega \tilde{f}(u) \varphi dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Definimos, $w = u - u_b$, onde

$$u_b(x) = \begin{cases} u(x) & , \quad se\ u(x) \leq b \\ b & , \quad se\ u(x) > b. \end{cases}$$

Temos que $\tilde{f}(u)w \in L^1(\Omega)$, de fato,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \tilde{f}(u)wdx &= \int_\Omega \tilde{f}(u)(u-u_b)dx \\
&= \int_{[u\leq b]} \tilde{f}(u)(u-u_b)dx + \int_{[u>b]} \tilde{f}(u)(u-u_b)dx \\
&= \int_{[u>b]} \left(\tilde{f}(u)u - \tilde{f}(u)u_b\right) dx \\
&= \int_{[u>b]} \left(f(b)u - f(b)b\right) dx \\
&= f(b)\int_{[u>b]} udx - \int_{[u>b]} f(b)bdx.
\end{aligned}$$

Como $T = \tilde{f}(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$, pois $\tilde{f}(u) \in L^1(\Omega)$, segue por Brézis & Browder [6] (cf. Teorema B.11, Apêndice B) que

$$< T, w >= \int_\Omega \tilde{f}(u)wdx,$$

donde

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w dx = \int_\Omega \left(\tilde{f}(u) + h\right) wdx.$$

Pelo mesmo argumento do lema 2.3, temos que $u(x) \leq b \quad$ q.t.p. $x \in \Omega$.

Portanto $u(x) = u_b(x) \quad$ q.t.p. $x \in \Omega$ e assim $\tilde{f}(u) = f(u) \quad$ q.t.p. $x \in \Omega$. Logo existe $u \in H^1_0(\Omega)$ limitado superiormente que satisfaz o problema (2.14) no sentido (2.16) para todo $v \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. ■

Demonstração do lema 2.6: A demonstração é análoga ao lema 2.5.

Demonstração do lema 2.7:

- fixamos $r > 0$.

Temos

$$rf(s) \geq I^+ r, \quad para\ s \geq 0,$$

donde

$$rf(s) \geq -\left|I^+ r\right| = -\left|I^+\right| |r|.$$

Portanto

$$rf(s) \geq -\left|I^{+}r\right| = -\left|I^{+}\right||r|, \quad \text{para todo } r > 0 \;\; e \;\; s \geq 0.$$

- fixamos $r < 0$.

Temos

$$rf(s) \geq S^{-}r, \quad para\ s \leq 0,$$

donde

$$rf(s) \geq -\left|S^{-}r\right| = -\left|S^{-}\right||r|.$$

Portanto

$$rf(s) \geq -\left|S^{-}r\right| = -\left|S^{-}\right||r|, \quad \text{para todo } r < 0 \;\; e \;\; s \leq 0.$$

Agora fazemos $d_0 = \max\{|I^{+}|, |S^{-}|\}$, logo

$$\begin{cases} rf(s) & \geq & -d_0|r| \text{ para todo } r > 0 \;\; e \;\; s \geq 0 \\ rf(s) & \geq & -d_0|r| \text{ para todo } r < 0 \;\; e \;\; s \leq 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\frac{F(u+tv_{\alpha}) - F(u)}{t} = f(\xi_{t,\alpha})v_{\alpha}, \tag{2.22}$$

onde

$$\min\{u+tv_{\alpha}, u\} \leq \xi_{t,\alpha} \leq \max\{u+tv_{\alpha}, u\}, \tag{2.23}$$

donde para $t \in (0,1)$ temos,

$$-(|u| + |v_{\alpha}|) \leq \xi_{t,\alpha} \leq |u| + |v_{\alpha}|.$$

Agora defimos

$$\Omega_\alpha \equiv \{x \in \Omega \; / \; |\alpha u(x)| \leq |\varphi(x)|\},$$

onde $u \in L^\infty(\Omega_\alpha)$ e consequentemente $v_\alpha \in L^\infty(\Omega_\alpha)$.

Assim existe $M > 0$ tal que $|u| + |v_\alpha| \leq M, \quad q.t.p. \; x \in \Omega_\alpha$, portanto

$$|f(\xi_{t,\alpha})| \, |v_\alpha| \leq \left(\max_{|z| \leq M} |f(z)| \right) |v_\alpha| \, , \quad q.t.p. \; x \in \Omega_\alpha. \tag{2.24}$$

Observe que

$$\left(\max_{|z| \leq M} |f(z)| \right) |v_\alpha| \in L^1(\Omega_\alpha).$$

Observação 2.1. *Temos que $f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha$ é mensurável, pois $F(u + tv_\alpha)$ e $F(u)$ são mensuráveis, e consequentemente o quociente*

$$\frac{F(u + tv_\alpha) - F(u)}{t}$$

é mensurável.

Considere agora $x \in \Omega_\alpha^c$, i.e.,

$$|\varphi(x)| < |\alpha u(x)| \, . \tag{2.25}$$

Afirmação 2.8. $Sgn(u) = Sgn(v_\alpha)$ *para* $x \in \Omega_\alpha^c$.

De fato, de (2.25), temos

$$- |\alpha u| < \varphi < |\alpha u| \, . \tag{2.26}$$

Analisando cada caso:

- $\varphi \geq 0, \alpha u > 0$, temos
  $-\alpha u < \varphi < \alpha u$ que implica $\varphi - \alpha u < 0$;
- $\varphi < 0, \alpha u > 0$, temos
  $-\alpha u < \varphi < \alpha u$ que implica $\varphi - \alpha u < 0$;
- $\varphi \geq 0, \alpha u < 0$, temos
  $\alpha u < \varphi < -\alpha u$ que implica $\varphi - \alpha u > 0$;
- $\varphi < 0, \alpha u < 0$, temos
  $\alpha u < \varphi < -\alpha u$ que implica $\varphi - \alpha u > 0$.

Obtemos que,

- se $u > 0$ então $\alpha u < 0$, logo $v_\alpha = \varphi - \alpha u > 0$;
- se $u < 0$ então $\alpha u > 0$, logo $v_\alpha = \varphi - \alpha u < 0$.

Reciprocamente.

- se $v_\alpha > 0$, temos $\varphi - \alpha u > 0$, logo $\varphi > \alpha u$, de (2.26) temos $\alpha u < 0$. Como $\alpha < 0$ então $u > 0$;
- se $v_\alpha < 0$, temos $\varphi - \alpha u < 0$, logo $\varphi < \alpha u$, de (2.26) temos $\alpha u > 0$. Como $\alpha < 0$ então $u < 0$.

Portanto a afirmação 2.8 é verdadeira.

Por (2.23), obtemos

$$\begin{cases} se\ u(x) > 0 & \text{então} \quad 0 < u(x) \leq \xi_{t,\alpha}(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega_\alpha^c \\ se\ u(x) < 0 & \text{então} \quad \xi_{t,\alpha}(x) \leq u(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega_\alpha^c. \end{cases} \tag{2.27}$$

Temos assim,

$$f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha \geq -\left[f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha\right]^- .$$

Afirmação 2.9. $[f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha]^- \leq [f(\xi_{t,\alpha})u(-2\alpha)]^-$ *para todo* $x \in \Omega^c_\alpha$.

De fato,

- se $f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha \geq 0$ então $[f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha]^- = 0$, logo $[f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha]^- \leq [f(\xi_{t,\alpha})u(-2\alpha)]^-$;
- se $f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha \leq 0$ então $[f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha]^- = -f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha$.

Como $sgn(u) = sgn(v_\alpha)$, temos que $f(\xi_{t,\alpha})u \leq 0$, assim $f(\xi_{t,\alpha})u(-2\alpha) \leq 0$, daí

$$[f(\xi_{t,\alpha})u(-2\alpha)]^- = 2\alpha f(\xi_{t,\alpha})u.$$

Para $x \in \Omega^c_\alpha$, temos

$$|v_\alpha| = |\varphi - \alpha u| \leq |\varphi| + |\alpha u| < |\alpha u| + |\alpha u| = 2\,|\alpha u| = -2\alpha\,|u|\,,$$

logo

$$|v_\alpha| < -2\alpha\,|u| \quad \textit{para todo } x \in \Omega^c_\alpha. \tag{2.28}$$

Assim se $v_\alpha < 0$ então $f(\xi_{t,\alpha}) > 0$ e $u < 0$, donde de (2.28) temos

$$2\alpha\,|u| < v_\alpha < -2\alpha\,|u|\,,$$

e consequentemente $-v_\alpha < 2\alpha u$ implica $-f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha < 2\alpha u f(\xi_{t,\alpha})$. Portanto

$$[f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha]^- < [f(\xi_{t,\alpha})u(-2\alpha)]^-\,.$$

Por outro lado se $v_\alpha > 0$ então $f(\xi_{t,\alpha}) < 0$ e $u > 0$, donde de (2.28) temos

$$2\alpha\,|u| < v_\alpha < -2\alpha\,|u|\,,$$

e consequentemente $-v_\alpha > 2\alpha u$ implica $-f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha < 2\alpha u f(\xi_{t,\alpha})$. Portanto

$$[f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha]^- < [f(\xi_{t,\alpha})u(-2\alpha)]^-\,.$$

Logo a afirmação 2.9 é verdadeira.

Assim

$$f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha \geq -\left[f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha\right]^- \geq -\left[f(\xi_{t,\alpha})u(-2\alpha)\right]^- \text{ para todo } x \in \Omega_\alpha^c.$$

Por (2.27) podemos tomar em (2.21), $r = u(x)$ e $s = \xi_{t,\alpha}(x)$, donde

$$uf(\xi_{t,\alpha}) \geq -d_0 \left|u\right|, \quad \text{para todo } x \in \Omega_\alpha^c,$$

assim

$$-2\alpha uf(\xi_{t,\alpha}) \geq 2\alpha d_0 \left|u\right|, \quad \text{para todo } x \in \Omega_\alpha^c. \tag{2.29}$$

Afirmação 2.10. $\left[-2\alpha uf(\xi_{t,\alpha})\right]^- \leq \left[2\alpha d_0 \left|u\right|\right]^-$ *para todo* $x \in \Omega_\alpha^c$.

- se $-2\alpha uf(\xi_{t,\alpha}) \geq 0$, então $\left[-2\alpha uf(\xi_{t,\alpha})\right]^- = 0$. Portanto

$$\left[-2\alpha uf(\xi_{t,\alpha})\right]^- \leq \left[2\alpha d_0 \left|u\right|\right]^-;$$

- se $-2\alpha uf(\xi_{t,\alpha}) \leq 0$, então $\left[-2\alpha uf(\xi_{t,\alpha})\right]^- = 2\alpha uf(\xi_{t,\alpha})$. Como $2\alpha d_0 \left|u\right| < 0$ então $\left[2\alpha d_0 \left|u\right|\right]^- = -2\alpha d_0 \left|u\right|$. De (2.29), temos

$$\left[-2\alpha uf(\xi_{t,\alpha})\right]^- \leq \left[2\alpha d_0 \left|u\right|\right]^-.$$

Logo a afirmação 2.10 é verdadeira.

Portanto

$$f(\xi_{t,\alpha})v_\alpha \geq -\left[2\alpha d_0 \left|u\right|\right]^- \quad \text{para todo } x \in \Omega_\alpha^c. \tag{2.30}$$

Agora defina

$$l(x) = \begin{cases} -\left(\max\limits_{|z|\leq M} \left|f(z)\right|\right)\left|v_\alpha\right| & , \quad \text{para todo } x \in \Omega_\alpha \\ \\ -\left[2\alpha d_0 \left|u\right|\right]^- & , \quad \text{para todo } x \in \Omega_\alpha^c, \end{cases}$$

donde $l \in L^1(\Omega)$.

Usando (2.22), (2.24), (2.30), temos

$$\frac{F(u + tv_\alpha) - F(u)}{t} \geq l(x) \quad q.t.p.\ x \in \Omega, \quad t \in (0,1).$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

Problemas de Contorno Elípticos: Soluções Positivas

Primeiramente, a título de motivação, provaremos um resultado elementar sobre não existência de solução. Em (PD_+) tomamos $f(x,u) \equiv f(u)$, de modo que (PD_+) reduz-se a

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -\Delta u & = & f(u) & , & x \in \Omega \\ u \geq 0 & , & u \neq 0 & , & x \in \Omega \\ u & = & 0 & , & x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Supomos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua satisfazendo

$$f(t) = 0 \text{ para } t \leq 0, \quad f(t) > \lambda_1 t \text{ para } t > 0. \tag{3.2}$$

Observação 3.1. *Sob as condições* (3.2)*, o problema* (3.1) *não tem solução* $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*. De fato, se u é uma solução de* (3.1)*, temos*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Seja φ_1 a primeira autofunção associada a λ_1, fazendo $v = \varphi_1$ obtemos,

$$\lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx = \int_\Omega f(u) \varphi_1 dx.$$

Como, $f(t) > \lambda_1 t$ para $t > 0$, tem-se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx > \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u dx.$$

Contradição.

Em decorrência da observação acima concluimos que

$$\begin{cases} -u'' &= f(u) \quad , \quad x \in (0,\pi) \\ u &> 0 \quad , \quad x \in (0,\pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{cases}$$

onde $f(t) > t\,(\lambda_1 = 1)$, não tem solução $u \in H_0^1(0,\pi) \cap L^\infty(0,\pi)$.

O Teorema D resolve o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q \quad , \quad x \in \Omega \\ u \geq 0 \quad , \quad u \neq 0 \quad , \quad x \in \Omega \\ u = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular limitado e $0 \leq q < 1$.

A demonstração do Teorema D será obtida através de vários resultados preliminares.

3.1 Unicidade de Solução.

Teorema 3.1. ***(Unicidade de solução).*** *Suponha* (f2) *e* (f4). *Então o problema* (PD_+) *tem no máximo uma solução fraca* $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Suponha que $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ seja solução de (PD_+). Para mostrar que $u_1 = u_2$ q.t.p. $x \in \Omega$, basta mostrar que

$$\int_\Omega \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right]\left(u_1^2 - u_2^2\right) dx \geq 0. \tag{3.3}$$

De fato, suponha que a desigualdade acima seja verdadeira e por absurdo, suponha que $u_1 \neq u_2$ em Ω, i.e., existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u_1(x_0) \neq u_2(x_0)$. Assim sem perda de generalidade seja $u_1(x_0) < u_2(x_0)$. Como u_1 e u_2 são soluções de (PD_+) temos $u_1, u_2 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, então existe uma aberto $\Omega_0 \subseteq \Omega$ tal que $x_0 \in \Omega_0$ e $u_1(x) < u_2(x)$ em Ω_0. Considere agora,

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \;/\; u_1(x) < u_2(x)\};$$
$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \;/\; u_1(x) > u_2(x)\}.$$

Então para $x \in \Omega_1$, temos

$$u_1^2 - u_2^2 = (u_1 + u_2)(u_1 - u_2) < 0,$$

assim por (f4)

$$\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2} > 0,$$

logo

$$\int_{\Omega_1} \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right] \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx < 0.$$

Para $x \in \Omega_2$, temos analogamente

$$\int_{\Omega_2} \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right] \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx < 0,$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right] \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx &= \int_{\Omega_1} \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right] \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx \\ &+ \int_{\Omega_2} \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right] \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx \\ &+ \int_{[u_1=u_2]} \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right] \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx. \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$\int_{\Omega} \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right] \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx < 0 \quad \text{(impossível)}.$$

Logo $u_1 = u_2 \quad$ q.t.p. $x \in \Omega$.

Agora demonstraremos (3.3). Sabemos que pelos lemas 1.1 e 1.2 que $u_1, u_2 \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f(x,u_1), \quad q.t.p.\ x \in \Omega; \\ -\Delta u_2 &= f(x,u_2), \quad q.t.p.\ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Como $u_1, u_2 > 0$ em Ω,temos

$$\frac{-\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2} = \frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}.$$

Logo

$$\int_\Omega \left[\frac{-\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}\right] \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx = \int_\Omega \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right] \left(u_1^2 - u_2^2\right) dx.$$

Afirmação 3.1. *Se u_1, u_2 são soluções de (PD_+), então,*

$$\frac{u_1}{u_2} \in L^\infty(\Omega), \quad e \quad \frac{u_2}{u_1} \in L^\infty(\Omega).$$

De fato, vimos pelo lema 1.2 que se u é uma solução de (PD_+) então $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $u > 0$ em Ω e $\partial u/\partial\eta < 0$ em $\partial\Omega$, onde η é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$.

Ainda $\partial u/\partial\eta \in C(\overline{\Omega})$. Como Ω é regular pelo teorema de extensão (cf. Gilbard & Trudinger [17], p.131) temos que para $V_{\partial\Omega}$(vizinhança de $\partial\Omega$), $\partial u/\partial\eta \in C\left(\overline{V_{\partial\Omega}}\right)$.

Então para cada $x \in \partial\Omega$, existe $B_r(x) \subseteq V_{\partial\Omega}$ tal que $\partial u/\partial\eta(y) < 0$ para todo $y \in B_r(x)$. Agora seja

$$V_0 = \cup_{x\in\partial\Omega} B_r(x).$$

Note que V_0 é aberto e $\partial u/\partial\eta < 0$ em V_0. Como $\partial u/\partial\eta \in C\left(\overline{V_{\partial\Omega}}\right)$ segue que $\partial u/\partial\eta(x) < 0$ para todo $x \in \overline{V_0}$, logo

$$-\partial u/\partial\eta > 0 \text{ em } \overline{V_0}.$$

Como $\overline{V_0}$ é compacto, temos que $-\partial u/\partial\eta$ assume máximo e mínimo positivos em $\overline{V_0}$. Logo, as soluções u_1, u_2 de (PD_+), satisfazem:

(i) $-\partial u_1/\partial\eta > 0, -\partial u_2/\partial\eta > 0$ em $\overline{V_0}$;

(ii) $-\partial u_1/\partial\eta, -\partial u_2/\partial\eta$ assumem máximos e mínimos em V_0.

Como as funções são positivas podemos compará-las. Assim existe $C_1 > 0$ tal que

$$0 < C_1 \frac{-\partial u_1}{\partial\eta} \leq C_1 \max_{\overline{V_0}} \left(\frac{-\partial u_1}{\partial\eta}\right) \leq \min_{\overline{V_0}} \left(\frac{-\partial u_2}{\partial\eta}\right) \leq \frac{-\partial u_2}{\partial\eta}.$$

Assim

$$C_1 \frac{-\partial u_1}{\partial \eta} \leq \frac{-\partial u_2}{\partial \eta}, \text{ para todo } x \in V_0.$$

Integrando na direção de η do ponto $x \in \Omega \cap V_0$ até o ponto $x_0 \in \partial\Omega$, temos

$$C_1 \int_x^{x_0} \frac{-\partial u_1}{\partial \eta} d\eta \leq \int_x^{x_0} \frac{-\partial u_2}{\partial \eta} d\eta.$$

Então

$$-C_1 \left(u_1(x_0) - u_1(x) \right) \leq - \left(u_2(x_0) - u_2(x) \right).$$

Isto implica, devido $u_1(x_0) = u_2(x_0) = 0$ (pois $x_0 \in \partial\Omega$) que

$$\frac{u_1}{u_2} \leq \frac{1}{C_1}, \text{ para todo } x \in \Omega \cap V_0.$$

Assim, próximo da fronteira temos que u_1/u_2 é limitada. Agora, tomando $\Omega' \subseteq \Omega$ tal que $\Omega' \equiv \{x \in \Omega \ / \ dist(x, \partial\Omega) > r/2\}$, temos que u_1, u_2 assumem máximos e mínimos em $\overline{\Omega'}$, pois $u_1, u_2 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então, como $u_1, u_2 > 0$ em Ω, obtemos

$$C_2 u_1 \leq C_2 \max_{\overline{\Omega'}} u_1 \leq \min_{\overline{\Omega'}} u_2 \leq u_2 \text{ para algum } C_2 > 0,$$

donde

$$\frac{u_1}{u_2} \leq \frac{1}{C_2}, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega'}.$$

Tomando-se $C = \max\{1/C_1, 1/C_2\}$ e como $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \left(\overline{\Omega} \cup \overline{V_0}\right)$, obtemos

$$\frac{u_1}{u_2} \leq C, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Portanto $u_1/u_2 \in L^\infty(\Omega)$, e analogamente, $u_2/u_1 \in L^\infty(\Omega)$.

Afirmação 3.2.

$$\frac{u_1^2}{u_2}, \frac{u_2^2}{u_1} \in H_0^1(\Omega).$$

De fato, como $u_1, u_2 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ então,

$$\frac{u_1^2}{u_2}, \frac{u_2^2}{u_1} \in C^1(\Omega)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right) &= \frac{2u_1\left(\partial u_1/\partial x_i\right)u_2}{u_2^2} - \frac{\left(\partial u_2/\partial x_i\right)u_1^2}{u_2^2} \\
&= 2\frac{u_1}{u_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{u_1^2}{u_2^2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right) &= \frac{2u_2\left(\partial u_2/\partial x_i\right)u_1}{u_1^2} - \frac{\left(\partial u_1/\partial x_i\right)u_2^2}{u_1^2} \\
&= 2\frac{u_2}{u_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} - \frac{u_2^2}{u_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right) = 2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1 - \frac{u_1^2}{u_2^2}\nabla u_2 \ , \ \nabla\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right) = 2\frac{u_2}{u_1}\nabla u_2 - \frac{u_2^2}{u_1^2}\nabla u_1.$$

Como

$$\frac{u_1}{u_2}, \frac{u_2}{u_1} \in L^\infty(\Omega),$$

existe $C > 0$ tal que

$$\frac{u_1}{u_2} \leq C,$$

donde

$$\frac{u_1^2}{u_2} \leq Cu_1 \leq C_1,$$

pois $u_1 > 0$ e $u_1 \in L^\infty(\Omega)$. Logo, temos

$$\frac{u_1^2}{u_2} \in L^\infty(\Omega).$$

Analogamente, $u_2^2/u_1 \in L^\infty(\Omega)$. Como $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$\frac{u_1^2}{u_2}, \frac{u_2^2}{u_1} \in C^1(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Mostraremos agora que,

$$\nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right), \nabla\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right) \in L^2(\Omega).$$

De fato, como $u_1/u_2 \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \left|2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1\right|^2 dx \leq C_1 \int_\Omega |\nabla u_1|^2\, dx = C_1 \left\|u_1\right\|_1^2 < \infty$$

e também

$$\int_\Omega \left|\frac{u_1^2}{u_2^2}\nabla u_2\right|^2 dx \leq C_2 \int_\Omega |\nabla u_2|^2\, dx = C_2 \left\|u_2\right\|_1^2 < \infty.$$

Portanto,

$$2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1\ ,\ \frac{u_1^2}{u_2^2}\nabla u_2 \in L^2(\Omega).$$

Como $L^2(\Omega)$ é um espaço vetorial, temos que $\nabla\left(u_1^2/u_2\right) \in L^2(\Omega)$ e assim

$$\frac{u_1^2}{u_2} \in H^1(\Omega).$$

Analogamente, $u_2^2/u_1 \in H^1(\Omega)$. Resta mostrar que

$$\frac{u_1^2}{u_2} = \frac{u_2^2}{u_1} = 0 \text{ sobre a } \partial\Omega.$$

De fato, sabemos que $u_1/u_2 \in L^\infty(\Omega)$, $u_1, u_2 > 0$ em Ω e $u_1 = 0$ em $\partial\Omega$. Além disso, como $u_1 \in C^1(\overline{\Omega})$ então, se $(x_n) \subset \Omega$ tal que $x_n \to x \in \partial\Omega$, temos que $u_1(x_n) \to u_1(x) = 0$.

Daí

$$\lim_{x_n \to x} \frac{u_1^2}{u_2}(x_n) = \lim_{x_n \to x} \frac{u_1}{u_2}(x_n) u_1(x_n) = 0.$$

Portanto

$$\frac{u_1^2}{u_2}(x) = 0, \text{ para todo } x \in \partial\Omega.$$

Assim, u_1^2/u_2 pode ser estendida continuamente até a fronteira (cf. Elon [22], p.175). Portanto

$$\frac{u_1^2}{u_2} \in H_0^1(\Omega).$$

Analogamente, $u_2^2/u_1 \in H_0^1(\Omega)$. Logo a afirmação 3.2 é verdadeira.

Afirmação 3.3. *Se u_1, u_2 são soluções de (PD_+), então,*

$$\int_\Omega \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right]\left(u_1^2 - u_2^2\right) dx \geq 0.$$

.

Temos

$$\int_\Omega \left[\frac{-\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}\right]\left(u_1^2 - u_2^2\right) dx = \int_\Omega \left[\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\right]\left(u_1^2 - u_2^2\right) dx,$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[\frac{-\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}\right]\left(u_1^2 - u_2^2\right) dx \quad &= \quad \int_\Omega \left\{-\Delta u_1 \cdot u_1 + \Delta u_1 \frac{u_2^2}{u_1} + \Delta u_2 \frac{u_1^2}{u_2} - \Delta u_2 \cdot u_2\right\} dx \\
= \quad & \int_\Omega \left\{-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2} u_1 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2}\frac{u_2^2}{u_1} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2}\frac{u_1^2}{u_2} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2} u_2\right\} dx \\
= \quad & \int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^N \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right\} dx \\
= \quad & \int_\Omega \left\{|\nabla u_1|^2 - 2\frac{u_2}{u_1}\nabla u_2 \nabla u_1 + \frac{u_2^2}{u_1^2}|\nabla u_1|^2 - 2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_2 \nabla u_1 + \frac{u_1^2}{u_2^2}|\nabla u_2|^2 + |\nabla u_2|^2\right\} dx \\
= \quad & \int_\Omega \left\{\left|\nabla u_1 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\right|^2 + \left|\nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right|^2\right\} dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto o Teorema 3.1 está provado. ■

3.2 Condição Necessária.

Teorema 3.2. ***(Condição Necessária):*** *Suponha* (f1), (f2), (f4) *e que* $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *é uma solução de* (PD_+) *então*

$$i(a_0) < 0 < i(a_\infty).$$

Observação 3.2. *De* (f4), *temos que*

$$a_\infty(x) = \lim_{u \to \infty} \frac{f(x,u)}{u} \leq f(x,1) \leq \lim_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{u} = a_0(x).$$

Sabemos que $f(x,1) \in L^\infty(\Omega)$, *logo existe* $C > 0$ *tal que*

$$-C \leq f(x,1) \leq C \quad q.t.p.\ x \in \Omega.$$

Daí $a_\infty(x) \leq C \quad q.t.p.\ x \in \Omega$ *e* $a_0(x) \geq -C \quad q.t.p.\ x \in \Omega$. *Note que*

$$i(a_0) = \inf_{v \in H_0^1,\ |v|_0 = 1} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_{[v \neq 0]} a_0(x) v^2 dx \right\}.$$

Assim, temos

$$\int_{[v \neq 0]} a_0(x) v^2 dx \geq -C \int_{[v \neq 0]} v^2 dx = -C,$$

logo

$$\int_{[v \neq 0]} a_0(x) v^2 dx > -\infty.$$

Portanto

$$i(a_0) \in [-\infty, +\infty).$$

Analogamente, temos

$$i(a_\infty) = \inf_{v \in H_0^1,\ |v|_0 = 1} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_{[v \neq 0]} a_\infty(x) v^2 dx \right\}.$$

Assim

$$\int_{[v\neq 0]} a_\infty(x) v^2 dx \leq C \int_{[v\neq 0]} v^2 dx = C,$$

logo

$$\int_{[v\neq 0]} a_\infty(x) v^2 dx < \infty,$$

portanto

$$i(a_\infty) \in (-\infty, \infty].$$

Demonstração do Teorema 3.2: Suponha que $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é uma solução de (PD_+), então $u \in L^2(\Omega)$ e

$$\left| \frac{u}{|u|_0} \right|_0 = 1 \text{ e } u > 0 \text{ em } \Omega.$$

Então

$$\begin{aligned} i(a_0) &= \inf_{v \in H_0^1,\ |v|_0 = 1} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_{[v\neq 0]} a_0(x) v^2 dx \right\} \\ &\leq \int_\Omega \left| \nabla \left(\frac{u}{|u|_0} \right) \right|^2 dx - \int_{[v\neq 0]} a_0(x) \left(\frac{u}{|u|_0} \right)^2 dx \\ &= \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_{[v\neq 0]} a_0(x) u^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 \, dx}. \end{aligned}$$

Por outro lado, por (f4) e $u > 0$ segue que

$$\frac{f(x,u)}{u} < a_0(x) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{s}.$$

Como u é solução de (PD_+), então

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \int_\Omega f(x,u)u dx = \int_\Omega \frac{f(x,u)}{u} u^2 dx < \int_\Omega a_0 u^2 dx.$$

Logo

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega a_0 u^2 dx < 0$$

e portanto

$$i(a_0) < 0.$$

Agora defina

$$\tilde{a}(x) \equiv \frac{f(x, |u|_\infty + 1)}{|u|_\infty + 1};$$

$$\mu \equiv i(\tilde{a}) = \inf_{v \in H_0^1,\ |v|_0 = 1} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \int_{[v \neq 0]} \tilde{a}(x) v^2 dx \right\}.$$

Como $\tilde{a}(x) \in L^\infty(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que

$$-C \leq \tilde{a}(x) \leq C \quad q.t.p.\ x \in \Omega,$$

donde

$$-C \leq \int_{[v \neq 0]} \tilde{a}(x) v^2 dx \leq C \quad q.t.p.\ x \in \Omega \text{ e para } |v|_0 = 1.$$

Seja Ψ a autofunção correspondente ao problema

$$\begin{cases} -\Delta w - \tilde{a} w &= \mu w \quad , \quad x \in \Omega \\ w &> 0 \quad , \quad x \in \Omega \\ w &= 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Multiplicando (3.4) por u e integrando sobre Ω, temos

$$\int_\Omega \nabla\Psi\nabla u dx - \int_\Omega \tilde{a}\Psi u dx = \int_\Omega \mu\Psi u dx.$$

Como u é solução fraca de (PD_+), temos

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\Psi dx = \int_\Omega f(x,u)\Psi dx$$

Portanto

$$\int_\Omega (\mu\Psi + \tilde{a}\Psi)\, u dx = \int_\Omega f(x,u)\Psi dx.$$

Por outro lado, $u \leq |u|_\infty$, assim $u \leq |u|_\infty + 1$. Então

$$\frac{f(x,|u|_\infty + 1)}{|u|_\infty + 1} = \tilde{a}(x) < \frac{f(x,u)}{u},$$

logo

$$\tilde{a}(x)u < f(x,u).$$

Portanto

$$\int_\Omega \tilde{a}(x)u\Psi dx < \int_\Omega f(x,u)\Psi dx, \quad \text{pois } \Psi > 0.$$

Como

$$\int_\Omega \mu\Psi u dx + \int_\Omega \tilde{a}(x)u\Psi dx - \int_\Omega f(x,u)\Psi dx = 0,$$

temos que

$$\int_\Omega \mu\Psi u dx > 0.$$

Mas $u > 0$ e $\Psi > 0$ em Ω, logo $\mu > 0$. Por (f4) temos

$$a_\infty(x) = \lim_{u\to\infty} \frac{f(x,u)}{u} < \tilde{a}(x),$$

daí

$$\begin{aligned} i(\tilde{a}) &= \inf_{v\in H_0^1,\ |v|_0=1}\left\{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_{[v\neq 0]} \tilde{a}(x)v^2dx\right\} \\ &< \inf_{v\in H_0^1,\ |v|_0=1}\left\{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_{[v\neq 0]} a_\infty(x)v^2dx\right\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$i(a_\infty) > 0.$$

Fica assim demonstrado o Teorema 3.2. ■

3.3 Existência de Solução.

Teorema 3.3. ***(Existência):*** *Suponha* (f1), (f2), (f3) *e* $(a_{0,\infty})$*. Então* (PD_+) *tem uma solução fraca* $u \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$*.*

Demonstração: Primeiramente considere o funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \quad u\in H_0^1(\Omega),$$

onde

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt.$$

Observação 3.3. *Por* (f1)*, se* $u \geq 0$*, então*

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt \leq \int_0^u C(t+1)dt = C\left(\frac{u^2}{2}+u\right).$$

Se $u \leq 0$*, então*

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt = -\int_u^0 f(x,0)dt = f(x,0)u \leq f(x,0)\,|u|$$

pois $f(x,0)\geq 0$.

Logo para $u \leq 0$

$$F(x,u) \leq f(x,0)\,|u| \leq C\left(\frac{u^2}{2} + |u|\right),$$

donde

$$\int_\Omega F(x,u)dx \leq C\int_\Omega \left(\frac{u^2}{2} + |u|\right)dx < \infty,$$

pois $u \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$. *Logo* $I(u)$ *está bem definido.*

Afirmação 3.4. I *é coercivo;*

Afirmação 3.5. I *é f.s.s.c.i.;*

Afirmação 3.6. *Existe* $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $I(\varphi) < 0$.

Demonstração da afirmação 3.4: Suponha, por contradição, que I não seja coercivo, i.e., que exista $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_n\|_1 \to \infty$ e $I(u_n) \leq C_1$. Então

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \leq \int_\Omega F(x,u_n)dx + C_1.$$

Note que

$$\begin{aligned}
F(x,u) &\leq C/2\left(u^2 + 2\,|u|\right)\\
&\leq C/2\left(u^2 + 2\,|u| + 1\right)\\
&= C/2\,(|u|+1)^2\\
&\leq 2\cdot C/2\,(\max\{|u|\,,1\})^2\\
&= C\max\left\{|u|^2\,,1\right\}\\
&\leq C\left(|u|^2+1\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \leq C\int_\Omega \left(|u_n|^2+1\right)dx + C_1,$$

obtendo que $|u_n|_0 \to \infty$, quando $n \to \infty$. Defina

$$t_n = |u_n|_0\,, \quad v_n = \frac{u_n}{t_n},$$

assim $|v_n|_0 = 1$. Como $\|u_n\|_1 \to \infty$, temos que $t_n \to \infty$ e note que

$$\|v_n\|_1^2 = \frac{1}{t_n^2}\|u_n\|_1^2 \leq C + \frac{C}{t_n^2} med\,(\Omega) + \frac{C_1}{t_n^2}.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, passando para subsequências se necessário, temos que

$$\begin{array}{rr} v_n \rightharpoonup v \ em \ H_0^1(\Omega); & v_n \to v \ em \ L^2(\Omega); \\ v_n(x) \to v(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega; & |v(x)| \leq \beta(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \end{array}$$

para algum v sobre a esfera unitária de $L^2(\Omega)$ e algum $\beta \in L^2(\Omega)$.

Afirmação 3.7.

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2} \leq \frac{1}{2}\int_{[v\neq 0]} a_\infty v^2 dx.$$

Primeiramente, observe que

$$\int_\Omega F(x,t_nv_n^+)dx = \int_{[v_n>0]} F(x,t_nv_n^+)dx + \int_{[v_n\leq 0]} F(x,t_nv_n^+)dx.$$

Por um lado

$$\int_\Omega F(x,t_nv_n^+)dx = \int_{[v>0]} F(x,t_nv_n^+)dx + \int_{[v\leq 0]} F(x,t_nv_n^+)dx = \int_{[v_n>0]} F(x,t_nv_n^+)dx,$$

donde

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(x,t_nv_n)dx &= \int_{[v_n>0]} F(x,t_nv_n)dx + \int_{[v_n\leq 0]} F(x,t_nv_n)dx \\ &= \int_{[v_n>0]} F(x,t_nv_n^+)dx + \int_{[v_n\leq 0]} F(x,t_nv_n)dx \\ &= \int_{[v>0]} F(x,t_nv_n^+)dx + \int_{[v\leq 0]} F(x,t_nv_n^+)dx + \int_{[v_n\leq 0]} F(x,t_nv_n)dx. \end{aligned}$$

Observamos a última integral, para $v_n \leq 0$, temos:

$$\int_{[v_n\leq 0]} F(x,t_nv_n)dx \leq C\int_{[v_n\leq 0]} t_n|v_n|\,dx \leq C\int_\Omega t_n|v_n|\,dx,$$

donde

$$\int_{[v_n\leq 0]} \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx \leq C\int_\Omega \frac{t_n|v_n|}{t_n^2}dx = C\int_\Omega \frac{|v_n|}{t_n}dx.$$

Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, então

$$0 \leq \int_{\Omega} |v_n| \, dx \leq C,$$

Como $t_n \to \infty$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[v_n \leq 0]} \frac{F(x, t_n v_n)}{t_n^2} dx \leq 0.$$

A segunda integral é majorada por

$$\int_{[v\leq 0]} F(x, t_n v_n^+) dx \leq C \int_{[v\leq 0]} \left(t_n^2 \left(v_n^+\right)^2 + 1 \right) dx,$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{[v\leq 0]} F(x, t_n v_n^+)/t_n^2 dx &\leq C \int_{[v\leq 0]} \left\{ \left(v_n^+\right)^2 + 1/t_n^2 \right\} dx \\ &= C \int_{[v\leq 0]} \left(v_n^+\right)^2 dx + \left(Cmed\left\{v \leq 0\right\}\right)/t_n^2. \end{aligned}$$

Como $v_n \to v$ q.t.p. $x \in \Omega$ temos que,

$$v_n^+ = v_n \chi_{[v_n \geq 0]} \to v\chi_{[v\geq 0]} = v^+ \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Como $v_n^+ \leq |v_n|$ e $v_n^+ \to v^+$ q.t.p. $x \in \Omega$ pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[v\leq 0]} \left(v_n^+\right)^2 dx = \int_{[v\leq 0]} \lim_{n\to\infty} \left(v_n^+\right)^2 dx = \int_{[v\leq 0]} \left(v^+\right)^2 dx = 0.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[v\leq 0]} \frac{F(x, t_n v_n^+)}{t_n^2} dx \leq \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_{[v\leq 0]} \left(v_n^+\right)^2 + C\frac{med\left\{v \leq 0\right\}}{t_n^2} \right\} = 0.$$

Agora observe que,

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{2F(x,u)}{u^2} \leq a_\infty(x).$$

De fato, como $f(x,u) \leq C(u+1)$ temos para $u > 0$ que

$$\frac{f(x,u)}{u} \leq C\left(1+\frac{1}{u}\right) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Assim, para $\delta > 0$ temos

$$\sup_{u\geq\delta} \frac{f(x,u)}{u} \leq C\left(1+\frac{1}{\delta}\right).$$

Como

$$a_\infty(x) = \limsup_{u\to\infty} \frac{f(x,u)}{u} = \inf_{\delta>0} \sup_{u\geq\delta} \frac{f(x,u)}{u}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{u\geq\delta(\epsilon)} \frac{f(x,u)}{u} \leq a_\infty(x) + \epsilon,$$

logo

$$\frac{f(x,u)}{u} \leq a_\infty + \epsilon, \quad \forall\ u \geq \delta(\epsilon).$$

Portanto

$$\int_{\delta(\epsilon)}^{u} f(x,t)dt \leq \frac{a_\infty + \epsilon}{2}\left(u^2 - \delta(\epsilon)^2\right), \quad \forall\ u \geq \delta(\epsilon),$$

donde

$$2\int_{\delta(\epsilon)}^{u} f(x,t)dt \leq (a_\infty+\epsilon)\,u^2 - (a_\infty+\epsilon)\,\delta(\epsilon)^2.$$

Assim, para $u \geq \delta(\epsilon)$ temos

$$2\int_0^{\delta(\epsilon)} f(x,t)dt + 2\int_{\delta(\epsilon)}^{u} f(x,t)dt \leq (a_\infty+\epsilon)\,u^2 - (a_\infty+\epsilon)\,\delta(\epsilon)^2 + 2\int_0^{\delta(\epsilon)} f(x,t)dt.$$

Segue que

$$\begin{aligned} 2\int_0^u f(x,t)dt &\leq (a_\infty+\epsilon)\,u^2-(a_\infty+\epsilon)\,\delta(\epsilon)^2+2F(x,\delta(\epsilon)) \\ 2F(x,u) &\leq (a_\infty+\epsilon)\,u^2-(a_\infty+\epsilon)\,\delta(\epsilon)^2+2F(x,\delta(\epsilon)) \\ \frac{2F(x,u)}{u^2} &\leq (a_\infty+\epsilon)-(a_\infty+\epsilon)\left(\frac{\delta(\epsilon)^2}{u^2}\right)+\left(\frac{2F(x,\delta(\epsilon))}{u^2}\right). \end{aligned}$$

Seja $\delta>0$ tal que $u\geq\delta\geq\delta(\epsilon)$. Tomando o supremo para $u\geq\delta$ temos

$$\sup_{u\geq\delta}\frac{2F(x,u)}{u^2}\leq(a_\infty+\epsilon)+\sup_{u\geq\delta}-(a_\infty+\epsilon)\,\frac{\delta(\epsilon)^2}{u^2}+\sup_{u\geq\delta}\frac{2F(x,\delta(\epsilon))}{u^2}.$$

- Se $-(a_\infty+\epsilon)\leq 0$, então para $u\geq\delta$ temos

$$-(a_\infty+\epsilon)\,\frac{\delta(\epsilon)^2}{\delta^2}\leq-(a_\infty+\epsilon)\,\frac{\delta(\epsilon)^2}{u^2}\leq 0.$$

Segue que

$$\sup_{u\geq\delta}-(a_\infty+\epsilon)\,\frac{\delta(\epsilon)^2}{u^2}=0;$$

- Se $-(a_\infty+\epsilon)\geq 0$, então para $u\geq\delta$ temos

$$-(a_\infty+\epsilon)\,\frac{\delta(\epsilon)^2}{u^2}\leq-(a_\infty+\epsilon)\,\frac{\delta(\epsilon)^2}{\delta^2}.$$

Segue que

$$\sup_{u\geq\delta}-(a_\infty+\epsilon)\,\frac{\delta(\epsilon)^2}{u^2}=-(a_\infty+\epsilon)\,\frac{\delta(\epsilon)^2}{\delta^2}.$$

Assim, temos

$$\sup_{u\geq\delta}\frac{2F(x,u)}{u^2}\leq\begin{cases}(a_\infty+\epsilon)-(a_\infty+\epsilon)\,\delta(\epsilon)^2/\delta^2+2F(x,\delta(\epsilon))/\delta^2, & se-(a_\infty+\epsilon)\geq 0;\\ (a_\infty+\epsilon)+2F(x,\delta(\epsilon))/\delta^2, & se-(a_\infty+\epsilon)\leq 0.\end{cases}$$

Portanto,

$$\lim_{\delta\to\infty}\sup_{u\geq\delta}\frac{2F(x,u)}{u^2}\leq a_\infty+\epsilon, \text{ para qualquer } \epsilon>0.$$

Fazendo $\epsilon\to 0$, temos

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{2F(x,u)}{u^2}\leq a_\infty.$$

Como $t_nv_n=u_n$, $t_n\to\infty$, $v_n^+\to v^+$ q.t.p. $x\in\Omega$ e assim $v_n^+\to v^+$ q.t.p. $x\in\{v>0\}$. Então

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}\cdot\frac{1}{(v_n^+)^2}\right\}\leq\frac{1}{2}a_\infty \quad q.t.p.\ x\in\{v>0\}.$$

Assim,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}\leq\frac{1}{2}a_\infty v^2 \quad q.t.p.\ x\in\{v>0\}.$$

Por outro lado,

$$F(x,t_nv_n^+)\leq C\left\{t_n^2\left(v_n^+\right)^2+1\right\} \quad q.t.p.\ x\in\Omega.$$

De onde obtemos

$$\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}\leq C\left\{\left(v_n^+\right)^2+\frac{1}{t_n^2}\right\}\longrightarrow C\left(v^+\right)^2 \quad q.t.p.\ x\in\Omega.$$

Como $\left(v^+\right)^2\in L^2(\Omega)$, existe $h\in L^1(\Omega)$ tal que, passando para subsequências se necessário,

$$\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}\leq C\left\{\left(v_n^+\right)^2+\frac{1}{t_n^2}\right\}\leq h(x) \quad q.t.p.\ x\in\Omega.$$

Pelo lema de Fatou,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx\leq\int_{[v>0]}\limsup_{n\to\infty}\frac{F(x,t_nv_n^+)}{t_n^2}dx\leq\frac{1}{2}\int_{[v>0]}a_\infty v^2dx,$$

logo

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx \leq \frac{1}{2}\int_{[v>0]} a_\infty v^2 dx.$$

Portanto a afirmação 3.7 é verdadeira.

Agora considerando novamente a desigualdade

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx \leq \int_\Omega F(x,u_n)dx + C_1,$$

fazendo $u_n = v_nt_n$, onde $t_n = |u_n|_0$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla t_nv_n|^2\,dx \leq \int_\Omega F(x,t_nv_n)dx + C_1,$$

donde

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx \leq \int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx + \frac{C_1}{t_n^2}.$$

Lembrando que $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|v\|_1^2 &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t_nv_n)}{t_n^2}dx + \liminf_{n\to\infty}\frac{C_1}{t_n^2} \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{[v>0]} a_\infty v^2 dx.
\end{aligned}$$

Como $i(a_\infty) > 0$ e

$$\begin{aligned}
i(a_\infty) &\leq \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{v^+}{|v^+|_0}\right)\right|^2 dx - \int_{[v>0]} a_\infty \left(\frac{v^+}{|v^+|_0}\right)^2 dx. \\
&= \frac{1}{|v^+|_0^2}\left[\int_\Omega |\nabla v^+|^2\,dx - \int_{[v>0]} a_\infty(x)\left(v^+\right)^2 dx\right]
\end{aligned}$$

E ainda

$$\int_{\Omega} \left|\nabla v^{+}\right|^{2} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^{2} dx \leq \int_{[v>0]} a_{\infty} v^{2} dx,$$

implicando que $|v^{+}|_{0}^{2} = 0$.

Assim , pelo fato de $a_{\infty}(x) \leq C$

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^{2} dx \leq \int_{[v>0]} a_{\infty} v^{2} dx \leq C \int_{[v>0]} v^{2} dx = C \left|v^{+}\right|_{0}^{2} = 0,$$

implica que

$$\|v\|_{1} = 0.$$

Logo $v = 0$ (Contradição).

Portanto I é coercivo. Logo fica provado a afirmação 3.4. ■

Demonstração da afirmação 3.5: Seja $u_n \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega)$. Pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, passando para subsequências se necessário, temos

$$u_n \to u \ em \ L^2(\Omega), \quad u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \quad |u_n(x)| \leq h(x) \in L^1(\Omega)$$

assim

$$F(x, u_n) \leq C\left(u_n^2 + 1\right) \leq C\left(h^2 + 1\right) \in L^1(\Omega).$$

Pelo lema de Fatou, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \leq \int_{\Omega} \limsup_{n\to\infty} F(x, u_n) dx = \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

visto que $u_n \to u$ q.t.p. $x \in \Omega$ e $F(x, u)$ é contínua. Daí

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^{2} dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \\
&\leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{2} dx + \liminf_{n\to\infty} - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{2} dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx\right\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} I(u_n).
\end{aligned}$$

Portanto I é f.s.s.c.i. Logo existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I(u) = \min_{v \in H_0^1} I(v).$$

■

Observação 3.4.

$$a_0(x) \leq \liminf_{u \to 0} \frac{2F(x,u)}{u^2}.$$

De fato, como

$$a_0(x) = \sup_{\delta > 0} \inf_{u < \delta} \frac{f(x,u)}{u}.$$

Temos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$ com $0 < u < \delta(\epsilon)$,

$$a_0 - \epsilon \leq \inf_{u \leq \delta(\epsilon)} \frac{f(x,u)}{u} \leq \frac{f(x,u)}{u}.$$

Assim

$$u\,(a_0 - \epsilon) \leq f(x,u),$$

logo

$$\int_0^u t\,(a_0 - \epsilon)\,dt \leq \int_0^u f(x,t)dt.$$

Portanto

$$\frac{u^2}{2}\,(a_0 - \epsilon) \leq F(x,u).$$

Segue que

$$2\frac{F(x,u)}{u^2} \geq a_0 - \epsilon.$$

Então para $0 < u < \delta < \delta(\epsilon)$ e para qualquer $\epsilon > 0$ temos que

$$a_0 - \epsilon \leq \inf_{u < \delta} 2\frac{F(x,u)}{u^2}.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$a_0 \leq \liminf_{\delta \to 0} \inf_{u<\delta} 2\frac{F(x,u)}{u^2}.$$

Demonstração da afirmação 3.6: Temos que $i(a_0) < 0$. Assim fixamos $\Phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla \Phi|^2 \, dx - \int_{[\Phi \neq 0]} a_o \Phi^2 dx < 0.$$

Podemos considerar $\Phi > 0$ e $\Phi \in L^\infty(\Omega)$ (caso contrário trocamos Φ por $|\Phi|$ e truncamos Φ) e temos pela observação 3.6 que

$$\liminf_{u \to 0} \frac{F(x,u)}{u^2} \geq \frac{1}{2a_0}.$$

Daí

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \frac{F(x, \epsilon\Phi)}{\epsilon^2 \Phi^2} \geq \frac{1}{2} a_0 \quad q.t.p. \ x \in \{\Phi \neq 0\},$$

ou equivalentemente,

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \frac{F(x, \epsilon\Phi)}{\epsilon^2} \geq \frac{1}{2} a_0 \Phi^2 \quad q.t.p. \ x \in \{\Phi \neq 0\}.$$

Por outro lado, temos por (f3) que

$$f(x,u) \geq -C_\delta u,$$

donde obtemos

$$F(x,u) \geq -\tilde{C}_\delta u^2.$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\epsilon\Phi \in [0, \delta]$, pois $\Phi \in L^\infty(\Omega)$, então para um certo δ fixado obtemos

$$\frac{F(x, \epsilon\Phi)}{\epsilon^2} \geq -C\Phi^2.$$

Por (cf. Bartle [4], p.64), temos $\Phi^2 \in L^\infty(\Omega)$ e então pelo lema de Fatou

$$\liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\Phi)}{\epsilon^2}dx \geq \int_\Omega \liminf_{\epsilon\to 0}\frac{F(x,\epsilon\Phi)}{\epsilon^2}dx \geq \frac{1}{2}\int_{[\Phi\neq 0]} a_0\Phi^2 dx,$$

onde obtemos

$$\int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\Phi)}{\epsilon^2}dx \geq \liminf_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\Phi)}{\epsilon^2}dx \geq \frac{1}{2}\int_{[\Phi\neq 0]} a_0\Phi^2 dx.$$

Portanto,

$$-\int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\Phi)}{\epsilon^2}dx \leq -\frac{1}{2}\int_{[\Phi\neq 0]} a_0\Phi^2 dx.$$

Assim

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,dx - \int_\Omega \frac{F(x,\epsilon\Phi)}{\epsilon^2}dx \leq \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,dx - \int_{[\Phi\neq 0]} a_0\Phi^2 dx\right\} < 0.$$

Então para ϵ suficientemente pequeno obtemos

$$I(\epsilon\Phi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\epsilon\Phi|^2\,dx - \int_\Omega F(x,\epsilon\Phi)dx < 0.$$

Portanto existe $\varphi = \epsilon\Phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I(\varphi) = I(\epsilon\Phi) < 0$.

Logo o ínfimo é atingido por uma função $u \neq 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Fica assim provado a afirmação 3.6. ∎

Afirmação 3.8. $u \geq 0$ *em* Ω.

Temos que $F(x,u) \leq F(x,u^+)$, o que implica $-F(x,u^+) \leq -F(x,u)$. Assim

$$I(u^+) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u^+\right|^2 dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

donde

$$I(u^+) = \min_{v\in H_0^1} I(v).$$

Segue que $u \geq 0$.

Agora temos

$$\frac{I(u+tv)-I(u)}{t} \geq 0, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \ e \ t > 0,$$

Assim obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx \geq 0.$$

Trocando v por $-v$ temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u) v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja, u é uma solução fraca de (PD_+).

Vamos mostrar que $u \in L^\infty(\Omega)$. Para isso considere para cada $k > 0$ inteiro

$$f^k(x,u) = \begin{cases} \max\{f(x,u), -ku\} & , \ se \ \ u \geq 0 \\ f^k(x,0) = f(x,0) & , \ se \ \ u \leq 0 \end{cases}$$

e defina

$$a_0^k(x) \equiv \liminf_{u \to 0} \frac{f^k(x,u)}{u}, \quad a_\infty^k(x) \equiv \limsup_{u \to \infty} \frac{f^k(x,u)}{u}.$$

Observe que $f^k(x,u)$ satisfaz (f1), (f2) e (f3). Observe também que $f(x,u) \leq f^k(x,u)$, então para qualquer $u > 0$, temos

$$\frac{f(x,u)}{u} \leq \frac{f^k(x,u)}{u}.$$

Daí

$$a_0(x) = \liminf_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{u} \leq \liminf_{u \to 0} \frac{f^k(x,u)}{u} = a_0^k(x).$$

Logo

$$-a_0^k(x) \leq -a_0(x).$$

E assim, temos

$$\begin{aligned} i(a_0^k) &= \inf_{v\in H_0^1(\Omega),|v|_0=1}\left\{\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_{[v\neq 0]} a_0^k v^2 dx\right\} \\ &\le \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_{[v\neq 0]} a_0^k v^2 dx \\ &\le \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_{[v\neq 0]} a_0 v^2 dx, \end{aligned}$$

donde

$$i(a_0^k) \le i(a_0) < 0,$$

i.e., $i(a_0^k) < 0$.

Vamos mostrar que $i(a_\infty^k) > 0$, para k suficientemente grande. Para isso basta verificar que

$$i(a_\infty^k) \to i(a_\infty), \text{ quando } k \to \infty,$$

pois $i(a_\infty) > 0$ então $i(a_\infty^k) > 0$ para $k > k_0$.

De fato, como $f(x,u) \le f^k(x,u)$ e $f^k(x,u) \to f(x,u)$, quando $k \to \infty$, segue que

$$a_\infty^k(x) = \limsup_{u\to\infty} \frac{f^k(x,u)}{u} \;\to\; \limsup_{u\to\infty} \frac{f(x,u)}{u} \text{ quando } k \to \infty.$$

Agora, por (f1)

$$f^k(x,u) = \max\{f(x,u), -ku\} \le C\,(u+1)$$

obtemos

$$\frac{f^k(x,u)}{u} \le C\left(1 + \frac{1}{u}\right).$$

Logo para $\delta > 0$, temos

$$\sup_{u\ge\delta} \frac{f^k(x,u)}{u} \le C\left(1 + \frac{1}{\delta}\right).$$

Portanto

$$\inf_{\delta\to\infty}\sup_{u\geq\delta}\frac{f^k(x,u)}{u}\leq C,$$

i.e., $a_\infty^k(x)\leq C$ para qualquer k.

Assim, pelo Teorema da Convergencia Dominada de Lebesgue e para $v\in H_0^1(\Omega)$ tal que $|v|_0=1$, temos

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[v\neq 0]}a_\infty^k v^2dx=\int_{[v\neq 0]}a_\infty v^2dx.$$

Além disso,

$$i(a_\infty^k)=\inf_{v\in H_0^1,|v|_0=1}\left\{\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx-\int_{[v\neq 0]}a_\infty^k v^2dx\right\}\leq\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-\int_{[v\neq 0]}a_\infty^k v^2dx.$$

Logo

$$\lim_{k\to\infty}i(a_\infty^k)\leq\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx-\int_{[v\neq 0]}a_\infty v^2dx.$$

Tomando o ínfimo, obtemos

$$\lim_{k\to\infty}i(a_\infty^k)\leq i(a_\infty).$$

Por outro lado, temos para qualquer $\epsilon>0$, existe $v\in H_0^1(\Omega)$ com $|v|_0=1$ tal que

$$\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx-\int_{[v\neq 0]}a_\infty^k v^2dx\leq i(a_\infty^k)+\epsilon.$$

Logo

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx-\int_{[v\neq 0]}a_\infty^k v^2dx\right\}=\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx-\int_{[v\neq 0]}a_\infty v^2dx\leq\lim_{k\to\infty}i(a_\infty^k)+\epsilon.$$

Tomando o ínfimo e fazendo $\epsilon\to 0$, temos

$$\lim_{k\to\infty}i(a_\infty^k)=i(a_\infty).$$

Então $i(a_\infty^k) > 0$ para k suficientemente grande.

Agora defina,

$$I_k(u) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F^k(x,u)dx,$$

onde

$$F^k(x,u) \equiv \int_0^u f^k(x,t)dt.$$

Considere agora, para cada k inteiro o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f^k(x,u) & ,x \in \Omega \\ u \geq 0 \quad , & u \neq 0 & em\ \Omega \\ u = 0 \quad , & & em\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Para k suficientemente grande todas as hipóteses do Teorema 3.3 são satisfeitas, daí para cada $k \geq k_0$, existe $u_k \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I_k(u_k) = \min_{v \in H_0^1} I_k(v)$$

e u_k é uma solução fraca de (3.5).

Observe que

$$f^k(x,u) = \max\{f(x,u), -ku\} \leq C\,(u+1)\,, \quad \forall\ u \geq 0$$

e

$$0 \leq f^k(x,u) = f(x,0) \leq C \leq C\,(|u|+1)\,, \quad \forall\ u \leq 0.$$

Logo

$$\left|f^k(x,u)\right| \leq C\,(|u|+1) \quad \forall\ u \in \mathbb{R}.$$

Portanto pelo lema 1.1 temos que $u_k \in L^\infty(\Omega)$.

Agora seja $v = \min\{u, u_k\}$ onde u é a solução (PD_+).

Afirmação 3.9. $I(v) \leq I(u)$.

Note primeiramente que pela afirmação acima temos $u = v$. De fato,

$$I(u) = \min_{w \in H_0^1} I(w) \leq I(v),$$

donde $I(u) = I(v)$ o que implica que v é uma solução de (PD_+). Mas a solução de (PD_+) é única, logo $u = v$, daí

$$0 \leq u \leq u_k$$

e $u_k \in L^\infty(\Omega)$ donde $u \in L^\infty(\Omega)$.

Demostração da afirmação 3.9: Como u_k é uma solução de (3.5), segue que

$$\begin{aligned} I_k(u_k) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2\, dx - \int_\Omega F^k(x, u_k) dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 - \int_\Omega F^k(x, w) dx = I_k(w),\ \forall\ w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Tome $w = \max\{u, u_k\}$, daí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2\, dx - \int_\Omega F^k(x, u_k) dx &= \frac{1}{2}\int_{[u_k<u]} |\nabla u_k|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{[u_k \geq u]} |\nabla u_k|^2\, dx \\ &\quad - \int_{[u_k<u]} F^k(x, u_k) dx - \int_{[u_k \geq u]} F^k(x, u_k) dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 - \int_\Omega F^k(x, w) dx = I(w) \\ &= \frac{1}{2}\int_{[u_k<u]} |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{[u_k \geq u]} |\nabla u_k|^2\, dx \\ &\quad - \int_{[u_k<u]} F^k(x, u) dx - \int_{[u_k \geq u]} F^k(x, u_k) dx. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{2}\int_{[u_k<u]}|\nabla u_k|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{[u_k<u]}|\nabla u|^2\,dx\leq\int_{[u_k<u]}F^k(x,u_k)dx-\int_{[u_k<u]}F^k(x,u)dx.$$

Por outro lado, como $v=\min\{u,u_k\}$, temos

$$\begin{aligned}
I(v)-I(u) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla v|^2\,dx-\int_{\Omega}F(x,v)dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\int_{\Omega}F(x,u)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{[u_k<u]}|\nabla u_k|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{[u_k\geq u]}|\nabla u|^2\,dx-\int_{[u_k<u]}F(x,u_k)dx\\
&\quad -\int_{[u_k\geq u]}F(x,u)dx-\frac{1}{2}\int_{[u_k<u]}|\nabla u|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{[u_k\geq u]}|\nabla u|^2\,dx\\
&\quad +\int_{[u_k<u]}F(x,u)dx+\int_{[u_k\geq u]}F(x,u)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{[u_k<u]}\left(|\nabla u_k|^2-|\nabla u|^2\right)dx+\int_{[u_k<u]}F(x,u)dx-F(x,u_k)dx\\
&\leq \int_{[u_k<u]}\left\{F^k(x,u_k)-F^k(x,u)-F(x,u)-F(x,u_k)\right\}dx.
\end{aligned}$$

Portanto

$$I(v)-I(u)\leq\int_{[u_k<u]}\left\{F^k(x,u_k)-F^k(x,u)-F(x,u_k)-F(x,u)\right\}dx.$$

Mas para $x\in\{u_k<u\}$, temos

$$F^k(x,u_k)-F^k(x,u)-F(x,u_k)+F(x,u)\ =\ \int_{u_k}^{u}\left\{f(x,t)-f^k(x,t)\right\}dt\leq 0,$$

pois $f(x,t)\leq f^k(x,t)$. Como $F^k(x,u_k)-F^k(x,u)-F(x,u)-F(x,u_k)\leq 0$ segue que $I(v)-I(u)\leq 0$, i.e.,

$$I(v)\leq I(u).$$

E como visto anteriormente, concluimos que $u\in L^\infty(\Omega)$. Portanto pelo lema 1.2., temos

$$u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),\quad 0<\alpha<1-N/p$$

e vale

$$u>0\ em\ \Omega,\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}<0\ em\ \partial\Omega,$$

onde ν é o campo vetorial normal exterior a Ω e $\partial u/\partial\nu$ é a derivada de u na direção de ν. ■

Apêndice A

Neste apêndice demonstraremos a desigualdade de Poincaré onde afirma que existe uma constante $C_\Omega > 0$ tal que

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega)$$

Desta forma, como $H_0^1(\Omega) \equiv \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|}$ basta mostrar a desigualdade para $u \in C_0^\infty(\Omega)$, pois por densidade estendemos para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$. Sendo Ω limitado, existe $a > 0$ tal que

$$\Omega \subset Q \equiv [-a, a] \times ... \times [-a, a] \subset \mathbb{R}^N.$$

Seja $u \in C_0^1(\Omega)$ e defina $u(x) = 0$ para qualquer $x \in Q \setminus \Omega$, assim

$$u(x) \equiv \begin{cases} u(x) & , \quad x \in \Omega \\ 0 & , \quad x \in Q \setminus \Omega. \end{cases}$$

Temos que $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Seja $(x_1, ..., x_N) \in Q$, assim pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} u(x_1, ..., x_N) &= \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, ...x_N)\; dt \\ |u(x_1, ..., x_N)|^2 &= \left| \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, ...x_N)\; dt \right|^2. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$
\begin{aligned}
|u(x_1,...,x_N)|^2 &\le \int_{-a}^{x_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,...x_N)\right|^2 dt \cdot \int_{-a}^{x_1} 1^2 dt \\
&\le 2a \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,...x_N)\right|^2 dt,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\int_Q u(x)^2 \, dx_1...dx_N \le 2a \int_Q \left\{ \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,...x_N)\right|^2 dt \right\} dx_1...dx_N.
$$

Como

$$
\int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,...x_N)\right|^2 dt
$$

independe da primeira variável x_1, obtemos pelo Teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
\int_Q u(x)^2 dx &\le 2a \int_{-a}^{a} dx_1 \cdot \int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,...x_N)\right|^2 dt dx_2...dx_N \\
&= 4a^2 \int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,...x_N)\right|^2 dt dx_2...dx_N.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $\forall j = 1,...,N$, temos

$$
\int_Q u(x)^2 dx \le 4a^2 \int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1,...,x_{j-1},t,x_{j+1},...,x_N)\right|^2 \; dx_1...dx_{j-1} dt dx_{j+1}...dx_N.
$$

Agora

$$
\begin{aligned}
\int_Q |\nabla u(x)|^2 \, dx &= \int_Q \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\right|^2 dx \\
&= \int_Q \left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + ... + \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^2 \right\} dx \\
&\ge \sum_{j=1}^{N} 1/4a^2 \int_Q u^2 dx \\
&= N/4a^2 \int_Q u^2 dx.
\end{aligned}
$$

Pondo $C_\Omega \equiv 4a^2/N$, obtemos

$$\int_Q u^2 dx \leq C_\Omega \int_Q |\nabla u|^2 \, dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Agora para $u \in H_0^1(\Omega)$, seja $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ com $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, i.e., $\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$, assim

$$\|u_n - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |u_n - u|^2 \ dx + \int_\Omega |\nabla u_n - u|^2 \ dx \to 0.$$

Logo

$$u_n \to u \ em \ L^2(\Omega) \quad e \quad \nabla u_n \to \nabla u \ em \ L^2(\Omega).$$

É claro que $C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço vetorial normado, então

$$| \ \ |u_n|_0 - |u|_0 \ \ | \leq \ |u_n - u|_0 \to 0.$$

Portanto

$$|u_n|_0 \to |u|_0 \, .$$

Segue também que

$$|\nabla u_n|_0 \to |u|_0 \, .$$

Assim pelo Teorema B.6 (cf. Apêndice B) temos que

$$\begin{array}{rll} u_n(x) \to u(x) & \text{q.t.p. } x \in \Omega; & |u_n(x)| \leq \alpha(x); \\ \nabla u_n(x) \to \nabla u(x) & \text{q.t.p. } x \in \Omega; & |\nabla u_n(x)| \leq \beta(x), \end{array}$$

onde $\alpha, \beta \in L^2(\Omega)$. Assim pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, temos, pela definição

$$\|u\|_1^2 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

e pela desigualdade de Poincaré

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\
&\leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\
&= \{C_\Omega + 1\} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\
&= C_1 \|u\|_1^2 .
\end{aligned}$$

Portanto $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes.

Apêndice B

Neste apêndice reuniremos os principais teoremas utilizados em nosso trabalho.

Teorema B.1 (cf. Brezis [5], p.169). Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Então

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{para todo } q \in [1, 2^*)$$

com injeção compacta, onde $2^* \equiv 2N/(N-2)$.

Teorema B.2 (cf. Brezis [5], p. 168). Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então

- se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$;
- se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para qualquer $q \in [p, \infty)$;
- se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

com injeções contínuas.

Teorema B.3 (cf. deFigueiredo [12], p.103). Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e sejam $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então para qualquer $j \geq 0$ a imersão

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \textit{onde } 0 < \alpha < 1 - \frac{N}{p},$$

é compacta se $m - 1 < N/p < m$.

Teorema B.4 (cf. deFigueiredo [12], p.103). Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e sejam $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$ e $j \geq 0$ com $m > j + \frac{N}{p}$. Então

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}).$$

é compacta.

Teorema B.5 (cf. Kavian [21], p.42). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Então existe uma única função $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad , \quad x \in \Omega \\ \quad u &= 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega \ , \end{cases}$$

além disso, existe uma constante C independente de f e u tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{L^p(\Omega)} \, .$$

Teorema B.6 (cf. Brezis [5], p.58). Sejam f_n uma sequência de funções de $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, tal que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$. Então existe uma subsequência f_{n_j} de f_n e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

$$f_{n_j}(x) \to f(x) \text{ para q.t.p. } x \in \Omega$$

e

$$\left|f_{n_j}(x)\right| \leq h(x) \text{ para q.t.p. } x \in \Omega.$$

Teorema B.7 (cf. Struwe [26], p.4). Suponha V é um espaço de Banach reflexivo com norma $\| \cdot \|$, e seja $M \subset V$ é um subconjunto fracamente fechado em V. Suponha $E : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ é coercivo em M com respeito a V, i.e., $E(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty, u \in M$ e fracamente sequencialmente semi-contínua inferiormente, i.e., para qualquer $u \in M$ e qualquer sequência $\{u_n\} \in M$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ verifica-se:

$$E(u) \leq \liminf_{n \to \infty} E(u_n).$$

Então E é limitado sobre M e o ínfimo é atingido em M.

Teorema B.8 (cf. Stampacchia [25], p. 54). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e seja $\theta(t), -\infty < t < \infty$ uma função Lipschitz onde a derivada $\theta'(t)$ existe exceto em um número finito de pontos $\{a_1, ..., a_k\}$ e seja $u \in H^{1,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$. Então

$$\theta(u) \in H^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\theta(u)_{x_i} = \theta'(u)u_{x_i} \text{ (no sentido das distribuições).}$$

Teorema B.9 (cf. deFigueiredo [13], Teor. 1.14) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^1(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca de

$$Lu - \lambda mu = h \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

onde $Lu = -\Delta u + Mu$ e $h \in L^{2^*}(\Omega)$ e $h \geq 0$ em Ω. Suponha que $m \in L^\infty(\Omega)$ é positivo sobre um subconjunto de Ω com medida positiva. Assuma também que $0 \leq \lambda < \mu_1(m)$, onde $\mu_1(m)$ é o primeiro autovalor com peso m. Então $u \geq 0$ em Ω. Além disso, se $h > 0$ em um conjunto de medida positiva então $u > 0$ em Ω.

Teorma B.10 (cf. deFigueiredo [13], Teor. 1.17) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^1(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca de

$$Lu - \lambda mu = h \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

onde $Lu = -\Delta u + Mu$, $h \in L^p(\Omega)$ com $p > N$ e $h \geq 0$ em Ω. Suponha que $m \in L^\infty(\Omega)$ é positivo sobre um subconjunto de Ω com medida positiva. Assuma também que $0 \leq \lambda < \mu_1(M)$, onde $\mu_1(m)$ é o primeiro autovalor com peso m. Então a solução $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\partial u/\partial\nu < 0 \quad sobre\ \partial\Omega$$

se $h > 0$ em um conjunto de medida positiva de Ω.

Teorema B.11 (cf. Brézis & Browder [6]). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e $T \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$. Suponha que existe uma função $f \in L^1(\Omega)$ tal que $T.u \geq f$ q.t.p. Ω, então $T.u \in L^1(\Omega)$ e

$$\langle T, u \rangle = \int_\Omega (T.u)(x)dx.$$

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., Sobolev spaces, Academic press, (1975).

[2] Anane, A. & Gossez, J. P., Strongly nonlinear elliptic problems near resonance: a variational approach, Comm. Partial Differential Equations, 15 (1990) 1141-1159.

[3] Ambrosetti, A. & Prodi, G., A primer of nonlinear analysis, Cambridge studies in advanced mathematics, 34 (1993).

[4] Bartle, R. G., The elements of integration, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney (1966).

[5] Brézis, H., Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson, (1987).

[6] Brézis, H. & Browder, F. E., Sur une propriete des espaces de Sobolev, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 287 (1978) 113-115.

[7] Brézis, H. & Nirenberg, L., Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 5 (1978) 225-326.

[8] Brézis, H. & Oswald, L., Remarks on sublinear elliptic equations, Nonlinear Anal, 10 (1986) 55-64.

[9] Browder, F. E., Existence theory for boundary value problems for quasilinear elliptic systems with strongly nonlinear lower order terms, Partial differential equations (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1973) 269-286.

[10] Castro, A., Metodos variacionales y analisis funcional no lineal, X Coloquio Colombiano de Matematicas, Universidad Pedagogica Y Tecnologica de Colombia, (1980).

[11] deFigueiredo, D. G., Semilinear elliptic problems with nonlinearities near its first eigenvalue, Dynamical systems (Proc. Internat. Sympos., Univ. Florida, Gainesville, Fla., 1976), Academic Press, New York (1977) 59-70.

[12] deFigueiredo, D. G., Equações elípticas não lineares, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (1977).

[13] deFigueiredo, D. G., Positive solutions of semilinear elliptic problems. Differential equations (São Paulo, 1981), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin-New York, 957 (1982) 34-87.

[14] deFigueiredo D. G. & Gossez J. P., Nonlinear pertubations of a linear elliptic problem near its first eigenvalue, J. diff. Eqns, 30 (1986) 1-19.

[15] deFigueiredo, D. G. & Gossez, J. P., Un problème elliptique semi-linéaire sans condition de croissance, (French) [A semilinear elliptic problem without growth condition] C. R. Acad. Sci. Paris Sér.I Math, 308 (1989) 277-280.

[16] Evans, L. C., Partial differential equations, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, (1949).

[17] Gilbard, D. & Trudinger, N. S., Elliptic partial differential equations of second order, Berlim: Springer-Verlag, 2 ed, (1983).

[18] Gonçalves, J. V. A., On nonresonant sublinear elliptic problems. Nonlinear Anal, 15 (1990) 915-920.

[19] Harmmerstein, A., Nichtlineare integralgleichungen nebst anwendungen, Acta Math., 54 (1930) 117-176.

[20] Kazdan, J. L. & Warner, F. W., Remarks on some quasilinear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math., 28 (1975) 567-597.

[21] Kavian, O., Introduction a la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Paris, Springer-Verlag, (1993).

[22] Lima, E. L., Espaços métricos, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Projeto Euclides, (1997).

[23] Liu, S. Q. & Tang, C. L., Existence and multiplicity of solutions for a class of semilinear elliptic equations, J. Math. Anal. Appl., 257 (2001) 321-331.

[24] Mawhin, J., Ward, J. R. & Willem, M., Variational methods and semilinear elliptic equations, Arch. Rational Mech. Anal., 95 (1986) 269-277.

[25] Stampacchia, G. & Kinderlehrer, D., An introduction to variational inequalities and their applications, Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks, Academic Press, (1980).

[26] Struwe, M., Variational methods: Applications to nonlinear PDE and Hamiltonian systems, Springer-Verlag, (1990).