

FACULDADE IBMEC SÃO PAULO

Programa de Mestrado Profissional em Economia

Rodrigo Mariti Fraga

**APREÇAMENTO DE CRÉDITOS DE CARBONO POR MEIO
DE MODELOS ESTOCÁSTICOS: EUROPEAN ALLOWANCE
UNITS DA SEGUNDA FASE DO EUROPEAN UNION
EMISSION TRADE SCHEME**

São Paulo

2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



FACULDADE IBMEC SÃO PAULO

Programa de Mestrado Profissional em Economia

Rodrigo Mariti Fraga

**APREÇAMENTO DE CRÉDITOS DE CARBONO POR MEIO
DE MODELOS ESTOCÁSTICOS: EUROPEAN ALLOWANCE
UNITS DA SEGUNDA FASE DO EUROPEAN UNION
EMISSION TRADE SCHEME**

São Paulo

2007

Rodrigo Mariti Fraga

Apreçamento de créditos de carbono por meio de modelos estocásticos: European Allowance Units da segunda fase do European Union Emission Trade Scheme

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia da Faculdade Ibmec São Paulo como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Economia

Área de Conhecimento: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Orientadora: Prof. Dra. Andrea Maria Accioly Fonseca Minardi – Ibmec São Paulo

São Paulo

2007

Ficha Catalográfica

Fraga, Rodrigo Mariti.

Apreçamento de créditos de carbono por meio da aplicação de modelos estocásticos: European Allowance Units da segunda fase do European Union Emission Trade Scheme / Rodrigo Mariti Fraga; orientadora: Andrea Maria Accioly Fonseca Minardi. – São Paulo: Ibmecc São Paulo, 2007.

117 p.

Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Economia. Área de Concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas) – Faculdade Ibmecc São Paulo.

Orientadora: Profa. Dra. Andrea Minardi.

1. Créditos de Carbono 2. Apreçamento 3. Modelos Estocásticos 4. Derivativos 5. Mudanças Climáticas

FOLHA DE APROVAÇÃO

Rodrigo Mariti Fraga

Apreçamento de créditos de carbono por meio de modelos estocásticos: European Allowance Units da segunda fase do European Union Emission Trade Scheme

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Economia Ibmec São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia

Área de Concentração: Finanças e Macroeconomia Aplicadas

Aprovado em Julho de 2007

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Andrea Maria Accioly Fonseca Minardi

Instituição: Ibmec São Paulo

Assinatura: _____

Prof. Dr. Eurilton Alves Araújo Junior

Instituição: Ibmec São Paulo

Assinatura: _____

Prof. Dr. José Fajardo

Instituição: Ibmec Rio de Janeiro

Assinatura: _____

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e minha irmã.

AGRADECIMENTOS

A professora Andea Minardi por ter aceito orientar um trabalho sobre um assunto novo, e em parte de difícil abordagem dada as restrições de informações disponíveis, e pelo apoio e incentivo, sem os quais o presente trabalho não teria sido concluído ou apresentado a uma banca para ser apreciado.

Aos professores e monitores do curso do Mestrado Profissionalizante em Economia do IBMEC São Paulo pelos ensinamentos em sala de aula, laboratórios, e trabalhos sem os quais jamais teria realizado o presente trabalho.

Aos meus amigos e colegas de sala pelo apoio dentro e fora da sala de aula, sem os quais estes dois anos e meio de curso seriam insurportáveis, além de que não teria conseguido aprovação e aprendido o necessário para me formar neste curso. A meus amigos e familiares pela paciência e compreensão mesmo em tempos onde fui muito ausente.

A Paulo Arbex por ter me autorizado a tirar férias para concluir o presente trabalho, a Geoff Sinclair do Standard Bank Plc., Maite Pina da CCM, Marcelo Rocha da ESALQ, Fernando Aiube da PUCRJ, dentre outros que me auxiliaram a aprender um pouco mais sobre o mercado de créditos de carbono ou modelagem de commodities.

“However, little can now be done to change the likely adverse effects that some developing countries will face in the next few decades, and so some adaptation will be essential. Strong and early mitigation is the only way to avoid some of the more severe impacts that could occur in the second half of this century.”

Sir Nicholas Stern

RESUMO

FRAGA, Rodrigo Mariti. **Apreçamento de Créditos de Carbono por meio de modelos estocásticos: European Allowances Units da segunda fase do European Union Emission Trade Scheme**. São Paulo, 2007, 117 p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade Ibmec São Paulo. 2007.

No ano de 2006, o mercado mundial de crédito de carbono movimentou o equivalente a € 22,5 bilhões (vinte e dois bilhões, e quinhentos milhões de euros), tendo sido transacionados aproximadamente 1,6 bilhões de toneladas de créditos de carbono, segundo a Point Carbon (2007). Dada importância de tal novo mercado, a partir de uma adaptação dos modelos e da metodologia apresentada em Xu (2004), a presente dissertação avalia empiricamente por meio dos dados diários dos preços à vista e futuros de European Allowance Units – EUAs negociados na European Climate Exchange – ECX, no período de 3 de maio de 2005 a 29 de junho de 2007, se modelos de reversão à média são capazes de refletir de modo adequado a distribuição real observada nos preços dos créditos de carbono para a segunda fase do EU ETS – European Union Emission Trade Scheme. Para isso, foi construída uma carteira em bases diária formada com preços à vista teóricos das European Allowance Units da segunda fase do EU ETS, e com os contratos futuros existentes em cada dia de modo a estimar os parâmetros livres de risco que permitissem que os preços futuros teóricos fossem iguais aos preços futuros reais observados no mercado. A fim de testar o poder de previsão de cada modelo, testou-se após o processo de calibragem se as curvas do futuro geradas pelos modelos refletiam as curvas do futuro, e foram analisados os modelos que atenderam a tal critério de exclusão.

Os resultados encontrados na presente pesquisa dão suporte à conclusão de que as European Allowance Units da segunda fase do EU ETS podem ser apreçadas por meio dos modelos de dois fatores, com reversão à média e sazonalidade, apresentados por Xu (2004) para apreçar gás natural. Todavia, apesar destes modelos terem sido capazes de refletir adequadamente as curvas dos mercados futuros reais, os gráficos qq plot apresentados nas Ilustrações 21 a 23 abaixo demonstram que as distribuições das séries de preços de European Allowance Units não são normais. Esse resultado mostra que os modelos utilizados não capturam adequadamente as distribuições nas caudas das séries, e que talvez fosse adequado à inclusão de volatilidade (variância) estocástica nos modelos, tal como volatilidade GARCH, transformando os modelos em modelos de três fatores estocásticos.

Esta dissertação teve por objetivo avaliar European Allowance Units da segunda fase do EU ETS por meio de processos estocásticos, e apresentar: (i) os parâmetros livres de risco que podem ser utilizados para apreçar outros derivativos relacionados a créditos de carbono, tais como opções, swaps, futuros de CER, dentre outros; e (ii) modelos calibrados para preços de European Allowance Units que podem ser utilizados no desenvolvimento de ferramentas de gestão de risco de mercado para preços de European Allowance Units.

Palavras chave: Créditos de Carbono, Apreçamento, Modelos Estocásticos, Derivativos, Mudanças Climáticas.

ABSTRACT

FRAGA, Rodrigo Mariti. **Valuation of Carbon Credits through stochastic models: 2nd phase European Allowances Units of the European Union Emission Trade Scheme.** São Paulo, 2007, 117 p. Dissertation (Mastership) – Faculdade Ibmecc São Paulo. 2007.

In 2006, the carbon credit global market has negotiated around € 22.5 billions (twenty two billions and five hundred million euros), equivalent to 1.6 billions tons of CO₂ credits or allowances. Due to the importance of this new market, starting from an adapted version of the models and methodology of Xu (2004), this monograph empirically evaluate through daily spot and futures prices of European Allowance Units – EUAs, negotiated at the European Climate Exchange – ECX, during the period of May 3, 2005 to June 29, 2007, if mean reverting models are adequate to capture the real distribution observed for 2nd phase European Allowance Units. For that purpose, this monograph has used a daily portfolio with daily spot prices and all the prices of the futures contracts observed in each day to estimate the risk free parameters which allows that the formula future prices fits the real future prices observed in the market. The capacity to reflect this equality has been used as the selection criteria of the models, and all the models that has fulfilled this criterion has been analyzed in more details.

The results obtained in this research has supported that the 2nd phase European Allowance Units are properly modeled by two factor model, with mean reverting process, and seasonality, presented in Xu (2004) to model natural gas prices. Nevertheless, the adequacy of the models to fit the real future prices, the qq plots presented in the Illustration 21 and 23 herein below indicates that the models are not consistent to reflect the distribution of the tails, which may be correct through an adaptation of the model with the insert of a new factor, a stochastic changes of the volatility, such as GARCH, instead of simply assuming that the volatility is a deterministic function of time.

This dissertation purpose is to address how to evaluate 2nd phase European Allowance Units through stochastic models and present: (i) the risk free parameters which can be used to evaluate other carbon credits derivatives, such as options, swaps, futures of CER, and so on; and (ii) the calibrated model of prices of European Allowance Units which may be used to built risk management support tools.

Keywords: Carbon Credits, Valuation, Stochastic Models, Derivatives, Climate Changes.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	5
1.1	Motivação e relevância da pesquisa	5
1.2	Contexto da pesquisa na teoria de finanças	10
1.3	Proposta da pesquisa.....	13
1.4	Organização da pesquisa	13
2	REVISÃO DA LITERATURA	15
2.1	Mudanças climáticas.....	15
2.1.1	O efeito estufa.....	15
2.1.2	Consequências ambientais, sociais e econômicas do aquecimento global	18
2.2	Mercado de créditos de carbono	21
2.2.1	Mercado de créditos de carbono de Projetos	24
2.2.1.1	Mecanismo de Desenvolvimento Limpo – MDL.....	25
2.2.2	Mercado do EU ETS - European Union Emission Trading Scheme.....	29
2.3	Caracterização do produto para fins da Pesquisa	36
2.4	Estudos sobre apreçamento de créditos de carbono	39
2.5	Modelagem de preços de créditos de carbono	43
2.5.1	Processo de reversão à média	44
2.5.2	Modelos de apreçamento de crédito de carbono	46
2.5.2.1	Modelos de 1 fator	47
2.5.2.2	Modelos de 2 fatores	49
2.5.3	Preços futuros de créditos de carbono	51
2.5.3.1	Contratos futuros e a termo	51
2.5.3.2	Mercado a vista versus mercado futuro	52
2.5.3.3	Fórmulas de preços futuros de apreçamento de créditos de carbono ...	54
2.5.3.4	Premissa de não arbitragem.....	55
2.5.3.5	Método da equação diferencial parcial.....	55
2.5.3.6	Método da medida equivalente de Martingales	61
2.5.3.7	Fórmulas de preços de futuros para os Modelos	64
3	METODOLOGIA.....	66
3.1	Estimação por máxima-verossimilhança	66
3.1.1	Função Característica e Função Densidade da Probabilidade para Processos de Difusão com Saltos	67
3.2	Calibragem do modelo de 1 fator sem sazonalidade	67
3.2.1	Função Densidade da Probabilidade	68
3.2.1.1	Modelo 1f-A	68
3.2.1.2	Modelo 1f-B	71
3.2.2	Estimação da máxima-verossimilhança.....	74
3.2.3	Dados contínuos versus dados discretos.....	76
3.3	Calibragem do modelo de 1 fator com sazonalidade.....	77
3.3.1	Revelação do termo sazonal $f(t)$ dos preços dos futuros	77

3.3.2	Função Densidade da Probabilidade	79
3.3.3	Estimações	79
3.4	Calibragem do modelo de 2 fatores sem sazonalidade.....	80
3.4.1	Revelação do termo não observável L_t dos preços dos futuros.....	81
3.4.2	Função Densidade da Probabilidade	82
3.4.3	Estimações	84
3.5	Calibragem do modelo de 2 fatores com sazonalidade	85
3.5.1	Revelação do termo não observável L_t , e do termo sazonal $f(t)$ dos preços dos contratos futuros.....	85
3.5.2	Função Densidade da Probabilidade	86
3.5.3	Estimações	87
4	DADOS E ANÁLISE PRELIMINAR DA ESCOLHA DO MODELO	89
4.1	Descrição dos Dados	89
4.2	Vencimento dos Contratos Futuros	93
4.3	Especificações dos Contratos Futuros (ECX CFI Futures)	94
4.4	Outros ativos negociados na ECX.....	96
4.5	Escolha e Tratamento dos Dados.....	96
4.6	Montagem das Carteiras	99
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS	100
5.1	Resultados dos Modelos de 2 fatores com sazonalidade.....	101
5.1.1	Modelo 2f-sn-A	102
5.1.2	Modelo 2f-sn-B	104
5.1.3	Modelo 2f-sn-C	106
5.1.4	Análise dos Componentes do Modelo.....	108
5.1.5	Adequação do modelo aos dados do mercado futuro.....	109
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	113
	APÊNDICE 1 - Cálculos estocásticos básicos	125
	ANEXO A – ANÁLISE DA TRANSFORMAÇÃO DE VETORES DE DIFUSÃO AFIM COM SALTOS	118
	ANEXO B – DEDUÇÃO DA FUNÇÃO DE PREÇOS FUTUROS PARA MODELOS DE 2 FATORES PELO PROCESSO DE TRANSFORMAÇÃO AFIM.....	121
	ANEXO C – A COMPUTAÇÃO DE UMA INTEGRAL.....	123
	ANEXO D – ALTERAÇÕES CLIMÁTICAS	124

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1 – Quadro Atual de Mudanças Climáticas	17
Ilustração 2 – Emissão de gases causadores do efeito estufa	18
Ilustração 3 – Temperatura da Superfície.....	19
Ilustração 4 – Status do Protocolo de Quioto	24
Ilustração 5 – O Ciclo de Aprovação de um Projeto de MDL	26
Ilustração 6 – A Estrutura de um Projeto de MDL.....	27
Ilustração 7 – Atividade de Projeto de MDL no Mundo em 26 de maio de 2007.....	27
Ilustração 8 – Atividades de projetos de MDL no Brasil	28
Ilustração 9 – Volume de European Allowance Units negociados em 2006	35
Ilustração 10 – Relação preços à vista versus futuro.....	53
Ilustração 11 – Comparação da densidade do modelo 1f-A.....	71
Ilustração 12 - Comparação da densidade do modelo 1f-B.....	74
Ilustração 13 – Cotações da European Climate Exchange - ECX.....	89
Ilustração 14 – ICE Futures 2ª Fase do EU ETS	91
Ilustração 15 – Correlação das European Allowance Units com os preços de combustíveis e Clima	92
Ilustração 16 – Preço à vista versus Preço à vista teórico	97
Ilustração 17 – Análise Preliminar	97
Ilustração 18 – Preço Teórico à Vista das European Allowance Units da 2ª Fase do EU ETS	99
Ilustração 19 – Preços à vista	100
Ilustração 20 – Estimação de X e L.....	101
Ilustração 21 – Modelo 2f-sn-A.....	103
Ilustração 22 – Modelo 2f-sn-B.....	105
Ilustração 23 – Modelo 2f-sn-C.....	107
Ilustração 24 – Comparação entre os Parâmetros Estimados e Reais	108
Ilustração 25 – Análise de Sensibilidade.....	109
Ilustração 26 – Adequação a Curvas do Futuro.....	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Volume do Mercado de Carbono.....	23
Tabela 2 – Distribuição de atividades de MDL no Brasil por tipo de projeto.....	29
Tabela 3 – Países membros do EU ETS (Anexo B).....	32
Tabela 4 – Setores cobertos pelo EU ETS.....	33
Tabela 5 – Descrição estatística do log retorno dos ativos.....	90
Tabela 6 – Descrição estatística dos preços dos ativos	90
Tabela 7 – Correlação entre os log retorno dos ativos	90
Tabela 8 – Datas de Vencimento de Contrato Futuros na ECX.....	94
Tabela 9 – Estimação de $f(t)$ para modelos de 2 fatores com sazonalidade	102
Tabela 10 – Resultados da estimação para o modelo 2f-sn-A.....	102
Tabela 11 – Resultados da estimação para o modelo 2f-sn-B.....	104
Tabela 12 – Resultados da estimação para o modelo 2f-sn-C.....	106

1 INTRODUÇÃO

Este primeiro capítulo está dividido em quatro seções. A primeira seção apresenta uma breve explicação dos motivos que levaram ao desenvolvimento da presente pesquisa e sua relevância. A segunda seção apresenta o contexto em que se insere a pesquisa dentro da Teoria de Finanças, e apresenta a evolução das idéias e dos problemas relacionados ao tema. A terceira seção apresenta a proposta de pesquisa. E a quarta seção apresenta a forma como a presente dissertação está organizada.

1.1 Motivação e relevância da pesquisa

A atividade humana causou a elevação da média global da temperatura da superfície terrestre em aproximadamente 0.7 °C, graus Celsius, desde 1861-1900, segundo Stern (2006), em decorrência do aumento da concentração de dióxido de carbono, CO₂, de 280 ppm, partes por milhão, antes da revolução industrial, para aproximadamente 380 ppm nos dias atuais. O custo econômico de tais mudanças climáticas ainda é incerto, mas estimativas apresentadas por Stern (2006) sugerem que o custo deve ficar ao redor de 0 a 3% do Produto Interno Bruto Anual Global, se a temperatura da Terra subir ao redor de 2 a 3 °C em relação ao período pré-revolução industrial, e de 5 a 10% Produto Interno Bruto Anual Global, se a temperatura da Terra subir ao redor de 5 a 6 °C em relação ao período pré-revolução industrial, mas afetando de forma mais acentuada os países em desenvolvimento. Caso a concentração de CO₂ ultrapasse 550 ppm, a temperatura irá elevar se em mais de 3 °C, e o impacto ambiental poderá ser mais abrupto, e o custo econômico e social ser ainda mais vultoso.

Dentre as conseqüências previstas pelos cientistas do *Intergovernmental Panel on Climate Change*, IPCC, em decorrência do aquecimento global, destacam-se (IPCC-b, 2001): (a) a elevação do nível dos oceanos; (b) o derretimento das geleiras e das calotas polares; (c) perda da biodiversidade; (d) aumento da incidência de doenças transmissíveis por mosquitos e outros vetores, tais como malária, febre amarela, dengue, dentre outros; (e) mudança no regime das chuvas; (f) intensificação de fenômenos extremos, tais como secas, inundações, ciclones e tempestades tropicais; (g) desertificação e perda de áreas agriculturáveis; (h)

acirramento dos problemas relacionados ao abastecimento de água doce; e (i) aumento dos fluxos migratórios.

Neste contexto, surgiram algumas iniciativas intergovernamentais, celebrados por meio de tratados internacionais, os quais visam à redução da emissão dos gases causadores do efeito estufa¹, dentre os quais destacam-se (a) o Protocolo de Quioto, celebrado em Dezembro de 1997, na cidade de Quioto (Japão), e em vigor desde 16 de Fevereiro de 2005 (90 dias da ratificação do 55º membro), dada a ratificação oficial pela Rússia em 18 de novembro de 2004 (World Bank 2006), e (b) o *European Union Emission Trading Scheme*, EU ETS, criado por meio da Diretiva 2003/87/EC do Parlamento Europeu, e da reunião do Conselho de 13 de outubro de 2003, e em vigor desde 1 de janeiro de 2005.

O Protocolo de Quioto estabeleceu que os países industrializados devem reduzir suas emissões de gases causadores do efeito estufa em 5,2%, em média, abaixo dos níveis observados em 1990, para o primeiro período do Protocolo, que abrange os anos de 2008-2012. No caso dos países integrantes da União Européia a redução prevista é de 8%. As reduções para o segundo período, que abrange os anos de 2013 em diante ainda estão em discussão entre os países signatários. Em vista disso, em média cada país integrante do Anexo I do Protocolo de Quioto, recebeu uma quantidade de créditos de carbono equivalente a $(5 \text{ anos}) \times (\text{emissão do país em 1990}) \times (1 - 0,052)$, que representa a respectiva cota de emissão de gases causadores do efeito estufa de cada país. No decorrer das negociações, sob pressão destes países, foram criados três mecanismos de flexibilização a fim de facilitar o alcance da meta acordada, sendo eles:

Implementação Conjunta (*Joint Implementation*), IC, refere-se a projetos de mitigação das mudanças climáticas implementados entre dois países integrantes do Anexo I, ou seja, entre dois países industrializados. Os créditos gerados por um IC são denominados Unidades de Emissões Reduzidas (*Emission Reduction Units*), UERs, ou Unidade Removíveis Específicas (*Specific Removable Units*), UREs, e cada unidade equivale ao direito de emitir uma tonelada de CO₂.

¹ O Protocolo de Quioto definiu 6 gases causadores do efeito estufa (CO₂, CH₄, N₂O, HFCs, PFCs e SF₆), mas o mais importante é o CO₂, o qual é utilizado como medida equivalente para os demais.

Mecanismo de Desenvolvimento Limpo (*Clean Development Mechanism*), MDL. O MDL refere-se aos projetos de mitigação das mudanças climáticas realizadas entre países integrantes do Anexo I e outros países não integrantes do Anexo B. Neste mecanismo os investimentos em projetos devem contribuir para o desenvolvimento sustentável dos países hospedeiros Não-Anexo I, países em desenvolvimento, para a redução agregada de gases causadores do efeito estufa, bem como comprovar que na ausência do reconhecimento dos créditos de carbono pela ONU o projeto não seria realizado, por não ser economicamente viável. Os créditos gerados por um MDL são denominados Certificados de Emissões Reduzidas (Certified Emission Reductions), CER, e cada unidade equivale ao direito de emitir uma tonelada de CO₂.

Comércio de Emissões – CE (Emission Trading) refere-se à possibilidade dos países integrantes do Anexo I poder transferir entre si parte de seus direitos de emissão de gases causadores do efeito estufa sob o Protocolo de Quioto. Sob este mecanismo, os países, que ratificaram o protocolo, que emitirem menos gases causadores do efeito estufa do que o autorizado pelo protocolo, poderão vender suas cotas excedentes aos demais países integrantes do Anexo I. Tais créditos são medidos em unidades denominadas Montante Designado (*Assigned Amount units*), MD ou AAUs, e cada unidade corresponde ao direito de emitir uma tonelada de CO₂.

Dada a necessidade de se negociar esses diversos instrumentos que permitem a emissão de CO₂. (AAU, ERU, RMU e CER) foi e estão em desenvolvimento diversos mercados nos quais tais ativos são ou serão transacionados.

O EU ETS, por sua vez, nasceu com objetivo de assegurar a redução da emissão de gases causadores do efeito estufa por parte de grandes plantas industriais localizadas na União Européia, UE, e assim preparar a UE previamente a entrada em vigor do Protocolo de Quioto, iniciando, por conseguinte, o processo de transição para uma economia menos intensiva em carbono, dado que o compromisso dos países integrantes da EU sob o Protocolo de Quioto é de reduzir a emissão de gases causadores do efeito estufa em 8% em relação aos níveis observados em 1990, para o primeiro período do Protocolo, que abrange os anos de 2008-2012. O EU ETS tornou compulsório a participação de mais de 12.000 instalações industriais e de geração de energia elétrica, as quais representam conjuntamente aproximadamente por 45% do total de emissões de gases causadores do efeito estufa realizada pela EU. O respectivo

governo de cada país é o responsável por alocar em bases anuais a cada uma dessas instalações o montante de autorizações para emissão de CO₂, de acordo com os respectivos Planos Nacionais de Alocação (National Allocation Plans), PNAs ou NAPs. Cada instalação está obrigada a respeitar os limites impostos de emissão de gases causadores do efeito estufa, ano a ano. E as instalações devem cobrir seus eventuais déficits por meio da negociação de créditos de carbono, European Allowance Units, CER (de 2008 e posteriores), e também UERs.

O EU ETS foi dividido em dois períodos, de 2005 a 2007, pré-Protocolo de Quioto, e 2008 a 2012, que coincide com o primeiro período do Protocolo de Quioto. Em cada período, o direito de emitir uma tonelada de CO₂, crédito de carbono, pode ser utilizado para abater emissões, independentemente do ano em que será alocada. Ao final de cada período, uma multa deverá ser paga para cada unidade de CO₂ emitida em excesso ao número de permissões detidas. Tal penalidade poderá representar um montante relevante. Dado que ao final do primeiro período a multa é de € 40 (quarenta euros), mais a entrega dos créditos em falta no ano seguinte. No final do segundo período, as instalações serão obrigadas a pagar € 100 (cem euros) por cada unidade em excesso.

Diversas bolsas de valores atualmente permitem a negociação de European Allowance Units, as quais são negociadas no mercado a vista, e futuro, por meio de contratos padronizados, e opções, negociado apenas no sistema de balcão. A negociação por meio de bolsas permitiu a mitigação do risco de contra parte e liquidação, incrementando de forma acentuada a liquidez do mercado de créditos de carbono.

Para entender a importância financeira do mercado de créditos de carbono, vale destacar que de acordo com a Point Carbon (2007), no ano de 2006, o mercado mundial de crédito de carbono movimentou o equivalente a € 22,5 bilhões (vinte e dois bilhões, e quinhentos milhões de euros), tendo sido transacionados aproximadamente 1,6 bilhões de toneladas de créditos de carbono. Deste total, o EU ETS representou aproximadamente 62% do volume negociado, com 1 bilhão de toneladas de créditos de carbono negociadas, e aproximadamente 80% do valor total negociado, com negociações avaliadas em cerca de € 18,1 bilhões (dezoito bilhões e cem milhões de euros). O volume negociado no ano de 2006 foi equivalente a 250% do valor negociado em 2005.

O mercado de MDL, por sua vez, negociou cerca de 523 milhões de toneladas de créditos de carbono em 2006, e cerca de 40 milhões de toneladas adicionais no mercado secundário, totalizando o montante combinado de € 3,9 bilhões (três bilhões, e novecentos milhões de euros). Deste total, segundo Teixeira (2006), apenas a fim de demonstrar que este mercado é uma realidade inclusive para empresas brasileiras, vale mencionar os seguintes exemplos: (a) Rhodia do Brasil, setor químico, vendeu créditos de carbono no valor de R\$ 140 milhões; (b) Sadia, setor alimentício, vendeu créditos de carbono no valor de R\$ 90 milhões; (c) S/A Paulista, setor de aterros sanitários, vendeu créditos de carbono no valor de R\$ 23 milhões; (d) Plantar, setor de siderurgia, vendeu créditos de carbono no valor de R\$ 5,5 milhões; (e) Irani, setor de celulose, vendeu créditos de carbono no valor de R\$ 2,6 milhões.

Segundo projeções da Point Carbon (2007), o mercado de carbono deverá crescer cerca de 50% em volume em 2007, em relação aos números apresentados no ano de 2006, o que resulta em uma estimativa de cerca de 2,4 bilhões de toneladas de créditos de carbono negociadas, e a preços atuais a cifra de cerca de € 23,6 bilhões (vinte e três bilhões e seiscentos milhões de euros).

Dados estes números fica caracterizado a importância do mercado de créditos de carbono dentro do setor de commodities, e para os setores de energia elétrica, gás, carvão e outras commodities e atividades econômicas cujos preços sofrem influência direta do mercado de créditos de carbono, tal como demonstrado em Llewellyn (2007).

Em vista do acima exposto, a pesquisa do apreçamento de crédito de carbono torna-se de extrema relevância, dada (a) a escassa bibliografia sobre o tema, a qual em sua grande maioria apresenta um caráter mais econômico ambiental e político, por meio da análise de cenários; (b) a necessidade de se promover à redução de emissão de gases causadores do efeito estufa, evitando os impactos adversos causado por alterações climáticas; (c) a necessidade de se desenvolver as bases para o apreçamento da EUA, e, por conseguinte, possibilitar o apreçamento de outros ativos de carbono relacionados, tal como os MDL para o caso dos projetos brasileiros, e os futuros de CER que serão negociados em bolsa, na European Carbon Exchange, a partir de setembro de 2007; e (d) a necessidade de se desenvolver as bases para a correta apuração dos riscos envolvidos em investimento em ativos de créditos de carbono, ou operações de proteção (hedge), por parte dos agentes da indústria e do mercado financeiro.

1.2 Contexto da pesquisa na teoria de finanças

Esta dissertação analisa os processos estocásticos dos preços de algumas *commodities* que são adotados na literatura, tanto com enfoque nos modelos quanto nas metodologias utilizadas para estimação, e conceitos básicos que os fundamentam. Dessa forma, a presente pesquisa se insere em duas áreas em Finanças. A primeira área refere-se aos trabalhos sobre Opções Reais e orçamento de capital, no qual existem inúmeros trabalhos que aplicam modelos estocásticos de óleo e gás, energia elétrica, para avaliar decisões de investimentos, e flexibilidades presentes em projetos. A segunda área refere-se ao apreçamento de derivativos e gerenciamento de risco. Dessa forma, apesar de não haver um grande número de publicações específicas sobre apreçamento de carbono por meio de processos estocástico, existe vasta literatura aplicável a outras *commodities* que servem de base a presente pesquisa.

Um derivativo é um ativo cujo valor é função de outro ativo, denominado ativo objeto ou subjacente. O rápido desenvolvimento de métodos de apreçamento de derivativos e a sua aplicabilidade cotidiana nas empresas e no mercado financeiro propiciaram o surgimento e o crescimento vertiginoso de bolsas de valores e mercadorias onde são negociados títulos à vista e derivativos por todo o mundo, havendo inúmeros casos em que o mercado futuro movimenta mais recursos que o mercado a vista, como o petróleo, por exemplo.

As cifras negociadas nos mercados de derivativos no mundo são enormes. Inúmeras operações e diversos mecanismos estão hoje à disposição de todos os investidores, que buscam além de ganhos de capital, no caso de especuladores, proteção para as suas decisões de investimento evitando perdas econômicas e garantindo aos investidores e credores a maximização de suas riquezas. Nesse sentido vimos o desenvolvimento inclusive do mercado de derivativos de crédito, clima, e agora créditos de carbono.

Este imenso desenvolvimento teve início a partir de artigos publicados por Black e Scholes (1973) e Merton (1973). Estes trabalhos apreçam uma opção de compra do tipo européia (derivativo) através de uma fórmula que é a solução de uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Uma solução analítica fechada trouxe elegância à formulação proposta e favoreceu a proliferação de trabalhos adicionais extensivos e complementares. Estes pesquisadores propuseram um processo estocástico para a evolução dos preços dos ativos subjacentes (ações de empresas negociadas em bolsa).

O processo estocástico por eles adotado é conhecido como movimento geométrico Browniano e constitui a suposição inicial para o aprecio de uma opção de compra europeia. A grande novidade apresentada por Black e Scholes, e Merton foi a ideia de criar um portfólio e eliminar o risco do mesmo, fazendo com que a sua remuneração fosse idêntica à taxa livre de risco. Desta forma, criou-se a condição de não arbitragem e esta condição é conhecida como o Teorema Fundamental de Finanças.

Posteriormente, Harrison et al. (1979) e Harrison et al. (1981) trouxeram uma abordagem nova para todas estas ideias, e apresentaram o conceito da Medida Martingale Equivalente como metodologia alternativa no aprecio de derivativos. As ideias iniciais básicas são as mesmas daquela do modelo de Black e Scholes (1973) e Merton (1973), ou seja, o mesmo processo estocástico para descrever o ativo subjacente. Enquanto Black, Scholes e Merton chegaram ao resultado através da solução de uma equação diferencial, Harrison e Kreps usaram uma medida de probabilidade alternativa e calcularam o valor esperado da opção segundo esta nova medida. Esta medida de probabilidade foi denominada Medida Martingale Equivalente (MME) ou medida neutra ao risco.

As duas metodologias são equivalentes e a existência da MME significa que não há possibilidade de arbitragem. Por outro lado, se não há arbitragem existe uma MME. Em essência este é o Teorema Fundamental em Finanças.

O preço do derivativo calculado por uma metodologia ou outra depende fundamentalmente do processo estocástico do ativo subjacente. Por esta razão o conhecimento preciso deste processo é tão relevante, e artigos têm sido dedicados à sua estimação acurada.

Quando o ativo subjacente é uma commodity surgem complicações adicionais. A maior parte das commodities não é negociada no mercado à vista. Portanto, o preço à vista, S , não é uma variável observável. Em geral, as commodities são amplamente negociadas em mercados futuros e o preço futuro, F , é uma variável observável. Logo, o preço à vista S deve ser estimado a partir do preço futuro F . Não é por outra razão que normalmente o contrato futuro mais próximo é considerado uma “proxy” para o preço à vista.

Existe uma relação muito conhecida entre os preços no mercado à vista (S) e no mercado futuro (F): $F = S e^{((r-\alpha)(\tau-t))}$. A variável que faz a ligação entre F e S é α , denominada

retorno de conveniência. As demais variáveis são a taxa livre de risco r , a data do vencimento do contrato τ e a data atual t . O retorno de conveniência é o prêmio que faz jus o proprietário do ativo físico, ao contrário daquele que detém apenas um contrato futuro sobre a commodity.

Quando o preço à vista é uma variável estocástica e o retorno de conveniência é uma constante, diz-se que o modelo é de um único fator, pois só existe uma fonte de incerteza. Os modelos de um fator foram os primeiros a serem usados na descrição dos preços das commodities. Brennan e Schwartz (1985) usaram o modelo de um fator para avaliar um projeto de investimento e o gerenciamento de uma mina de cobre. Quando o modelo é de um fator é necessário um simples ajuste na tendência (*drift*) e os modelos de apreçamento tornam-se meras extensões do modelo de Black, Merton e Scholes. Entretanto se α é considerado constante, o modelo não reproduz alguns fatos estilizados dos mercados futuros. Evidências empíricas mostram que a volatilidade dos contratos futuros é decrescente com a maturidade dos contratos. Este fato é conhecido em Finanças como a “hipótese de Samuelson” (veja em Samuelson (1965)). No modelo de um fator a volatilidade dos contratos futuros torna-se idêntica à volatilidade do mercado à vista. Além disso, há evidências empíricas de que o retorno de conveniência varia inversamente com o nível dos estoques da commodity. Portanto, considerar o retorno de conveniência constante é apenas uma aproximação.

Quando o retorno de conveniência é estocástico tem-se o modelo de dois fatores (duas fontes de incertezas). Gibson e Schwartz (1990) apresentaram um modelo de dois fatores para os preços do petróleo. As duas variáveis estocásticas (S e α) do modelo não são observáveis e necessitam ser estimadas. O preço no mercado futuro (F) é observável e permite que seja feita a estimação das componentes não observáveis.

Xu (2004) por sua vez apresentou uma série de seis modelos de dois fatores para os preços a vista de gás, com reversão à média, nos quais os preços à vista seguem um processo estocástico de um fator de reversão ao preço de equilíbrio, e o preço de equilíbrio segue um outro processo estocástico de um fator de reversão à média de longo prazo. Para revelar os termos não observados, Xu (2004) encontrou as fórmulas para os preços futuros teóricos, assumindo a hipótese de não arbitragem, as quais foram igualadas aos preços futuros observados no mercado, obtendo-se assim os parâmetros não observados por meio da aplicação do método de estimação por máxima-verossimilhança.

Na presente dissertação pretende-se replicar o trabalho de Xu (2004), mas aplicando os modelos apresentados às séries de preços do mercado a vista e futuro dos créditos de carbono, descrito no Capítulo 4 a seguir. O motivo de ter se optado em testar modelos de reversão à média deve-se em razão da natureza do ativo, insumo de produção, e do fato das séries de preços futuros dos créditos de carbono apresentar uma aparente reversão à média até o presente momento, apesar do preço à vista mostrar-se extremamente volátil, e a reversão ainda não poder ser vista, dado que tal fenômeno está implícito nos preços futuros dos contratos de dezembro de 2008. Além disso, conforme se apresentará no Capítulo 2 a seguir existem indícios de que os créditos de carbono possam ser caracterizados como fatores de produção, tal como o gás natural e a energia elétrica.

1.3 Proposta da pesquisa

A presente pesquisa tem por objetivo apreçar créditos de carbono por meio de modelos estocásticos. Para tanto, dentre os ativos atualmente negociados que representam créditos de carbono, optou-se por se modelar os créditos de carbono referente ao European Union Emission Trade Scheme - EU ETS, tratado europeu de negociação de emissões, denominados *European Allowance Units* - EUAs, unidades europás de emissão, dado o fato de este ativo ser listado em bolsas, e apresentar o maior volume de negociações no período bruto analisado, 3 de maio de 2005 a 29 de junho de 2007, tanto por valor monetário, € 18.1 bilhões só em 2006 segundo a Point Carbon (2007), quanto por quantidade de toneladas de CO₂ representadas, sendo que sua cotação é utilizada como parâmetros de outros ativos de créditos de carbono, tal como em contratos de compra e venda bilaterais, *over-the-counter*, de MDL. Em razão das características das séries de preços das *European Allowance Units* empregou-se no apreçamento modelos cujos processos estocásticos apresentam reversão à média. A presente pesquisa visa replicar os modelos apresentados no trabalho de Xu (2004) de apreçamento de gás natural, aplicando-os as séries de preços de créditos de carbono, descrita em maiores detalhes no Capítulo 3.

1.4 Organização da pesquisa

Esta dissertação está organizada em seis capítulos, referências bibliográficas, e anexos.

Na presente introdução pretende-se apresentar a proposta de pesquisa, sua motivação e relevância, o contexto onde a mesma se insere na teoria de finanças, e, por fim, uma síntese de como a pesquisa esta organizada.

No capítulo dois, para permitir ao leitor um entendimento do problema relacionado ao apreçamento de créditos de carbono apresentam-se os fundamentos das mudanças climáticas, caracterização do mercado de créditos de carbono, a definição do produto para fins da pesquisa, os estudos conexos já realizados sobre o tema de apreçamento de créditos de carbono, e introdução dos conceitos teóricos utilizados no processo de modelagem, bem como os modelos a serem implementados.

No capítulo três, faz-se uma introdução dos procedimentos de estimação por máxima-verossimilhança, e identificação da função densidade da probabilidade para cada modelo. Em seguida, explicam-se os procedimentos de calibragem dos modelos.

No capítulo quatro, descrevem-se os dados disponíveis, um detalhamento dos contratos futuros de crédito de carbono utilizados, os procedimentos de tratamento dos dados e os motivos que justificam a escolha dos mesmos, uma análise preliminar de quais modelos parece se demonstrar adequados para os dados, e por fim o procedimento de formação da carteira de cotações e contratos a serem empregadas na estimação dos modelos.

No capítulo cinco, apresenta-se uma análise detalhada dos resultados.

No capítulo seis, apresentam-se as considerações finais da pesquisa e recomendações para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Mudanças climáticas

2.1.1 O efeito estufa

O efeito estufa é um processo que acontece quando uma parcela dos raios infravermelhos irradiados pela superfície terrestre, ondas longas, é refletida de volta a superfície por determinados gases presentes na atmosfera, tal como vapor de água, H₂O, dióxido de carbono, CO₂, metano, CH₄, Óxido nitroso, N₂O, CFC's, CF_xCl_x, fazendo com que a superfície da Terra receba quase o dobro de energia, aquecendo-se. Dessa forma, a nomenclatura efeito estufa é um nome infeliz porque a atmosfera não se comporta como uma estufa de plantas, cobertor de ar quente. O mecanismo que mantém aquecido o ambiente das estufas de vidro é a restrição das perdas convectivas quando o ar é aquecido pelo contato com solo que por sua vez é aquecido pela radiação solar. No entanto, o chamado efeito de estufa na atmosfera não tem que ver com a supressão da convecção, mas sim com o incremento de energia recebida pela superfície terrestre conforme explicamos abaixo, sem a qual não existiria vida na forma como conhecemos hoje, dado ser este o responsável pela manutenção de temperaturas mais amenas e adequadas.

A energia proveniente do sol é da ordem de 340 watts por metro quadrado (w/m²), variando cerca de $\pm 0.1\%$ durante os últimos 11 ciclos solares, segundo IPCC (2001). Em razão da atmosfera da Terra ser relativamente transparente às ondas curtas de radiação solar, de 0.2 a 4.0 micrometros, a maior parte da energia, cerca de 240 w/m², atinge a superfície terrestre, e apenas 100w/m² da energia irradiada pelo sol é refletida diretamente de volta ao espaço (Llewellyn 2007).

A superfície por sua vez esquenta, e por consequência irradia parte desta energia de volta para a atmosfera. Em razão de a Terra ser sabidamente menos quente que o sol, a energia irradiada pela superfície é mais longa, de 4 a 100 micrometros. Como os gases do efeito estufa são relativamente opacos a ondas longas, estes retêm uma parcela da energia, e refletem de volta para a superfície cerca da metade da energia recebida, 180w/m² (Llewellyn, 2007).

A temperatura da Terra, sistema atmosférico, está em equilíbrio quando o sistema irradia de volta ao espaço a mesma quantidade de energia recebida do sol, ou seja, 340 w/m². Dessa forma, dado que 100 w/m² são refletidos diretamente para o espaço, pelas nuvens, aerossóis, gelo, dentre outros elementos, isto significa que em equilíbrio a Terra, sistema atmosférico, deveria irradiar de volta ao espaço os outros 240W/m². E tal energia deveria provir da Terra.

Portanto, a temperatura da Terra deve ser aquela que corresponda à emissão de cerca de 420 w/m², 240 w/m² + 180 w/m². A temperatura da Terra quando ela irradia cerca de 420 w/m² é de aproximadamente 15° C, a qual é de fato a temperatura média da Terra (Llewellyn, 2007).

A sensibilidade do sistema atmosférico em relação aos gases do efeito estufa pode ser entendida pela seguinte regra: à medida que a concentração atmosférica dos gases do efeito estufa aumenta, aumenta a proporção de energia irradiada pela superfície da Terra, ondas curtas, que é irradiada de volta para a superfície. Por conseguinte, a quantidade de energia irradiada pela Terra para o espaço cai abaixo do valor de equilíbrio, 240 w/m².

O equilíbrio é restaurado apenas quando o saldo de energia irradiado pela Terra, sistema atmosférico, aumenta de volta para seu nível esperado $(100+240) = 340$ w/m². Para que tal condição ocorra, a Terra precisa aquecer-se, e assim emitir radiação com maior velocidade, até o ponto onde o saldo das entradas e saídas de energia do sistema atmosférico volte ao equilíbrio.

Ao se dobrar a concentração de gases do efeito estufa na atmosfera, tem-se o aumento de cerca de 4 w/m² de energia refletida de volta para a superfície. Dessa forma, ao dobrar tal concentração, a temperatura da Terra deve subir até seu nível de radiação chegar a 424 w/m², 240 w/m² + 180 w/m² + 4 w/m². A temperatura da Terra quando esta irradia 424 w/m² é de aproximadamente 18 °C. Portanto, ao se dobrar a concentração dos gases do efeito estufa, temos a elevação da temperatura média da Terra em 3 °C, e assim sucessivamente em progressão geométrica, segundo Kerr (2004) *apud* Llewellyn (2007).



Ilustração 1 – Quadro Atual de Mudanças Climáticas

Fonte: Felipetto (2005).

Dessa forma, o que pode se tornar catastrófico é a ocorrência de um agravamento do efeito estufa que desestabilize o equilíbrio energético no planeta e origine um fenômeno conhecido como aquecimento global, o qual tem colocado em confronto forças sociais que não permitem que se trate deste assunto do ponto de vista estritamente científico. Alinham-se, de um lado, os defensores das causas antropogênicas como principais responsáveis pelo aquecimento acelerado do planeta. São a maioria e onipresentes na mídia. Do outro lado estão os céticos, que afirmam que o aquecimento acelerado está muito mais relacionado com causas intrínsecas da dinâmica da Terra, do que com o problema do desmatamento e poluição. Mas, dadas as possíveis conseqüências decorrentes do aquecimento global, o tema tem sido objeto de importantes estudos científicos, e ações governamentais que visam a mitigar tais efeitos.

2.1.2 Consequências ambientais, sociais e econômicas do aquecimento global

A atividade humana vem causando alterações na composição e nas características atmosféricas. Desde a era pré-industrial, meado de 1750, conforme apresentado por Stern (2006), as concentrações de dióxido de carbono, CO₂ ou CO₂e, subiram em torno de um terço, de 280 ppm, partes por milhão, para 380 ppm nos dias atuais, predominantemente como resultado da queima de combustíveis fósseis, desmatamento, e outras alterações de uso das terras. Tal fato vem acompanhado pelo crescimento das emissões dos demais gases causadores do efeito estufa, em particular, o metano e o dióxido de nitrogênio. No total, o efeito de aquecimento em razão da emissão de gases causadores do efeito estufa (Quioto), em razão das atividades humanas, é equivalente a aproximadamente 430 ppm de CO₂, e esta se elevando a taxa de 2.3 ppm por ano, segundo Stern (2006).

Stern (2006) constata que a média global da temperatura da superfície terrestre elevou-se cerca de 0.7° C desde 1861-1900. Dado que as projeções futuras de aquecimento dependem das projeções globais de emissões, se as emissões anuais permanecerem nos níveis atuais, a concentração de gases causadores do efeito estufa se elevariam para ao redor de 550 ppm CO₂e, em 2050. Valendo-se das análises de sensibilidade, com um coeficiente de 90% de confiança, conforme apresentado em Stern (2006, p. 12), tal incremento resultaria na elevação da temperatura atual em torno de 3° a 5° C.

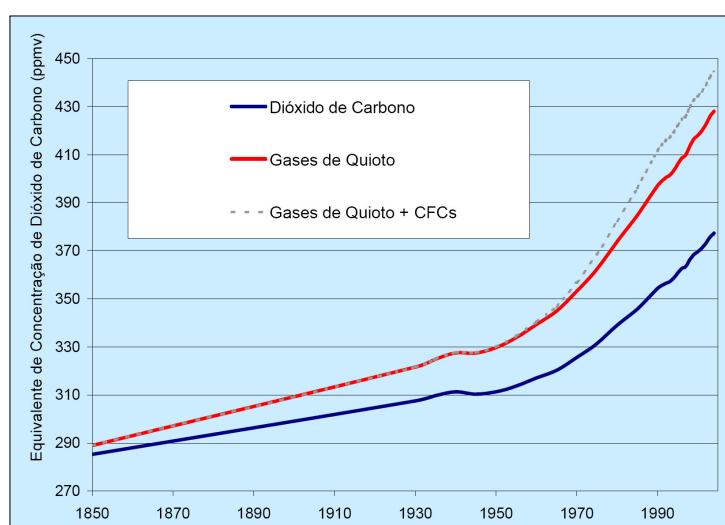


Ilustração 2 – Emissão de gases causadores do efeito estufa

Fonte: Stern (2006).

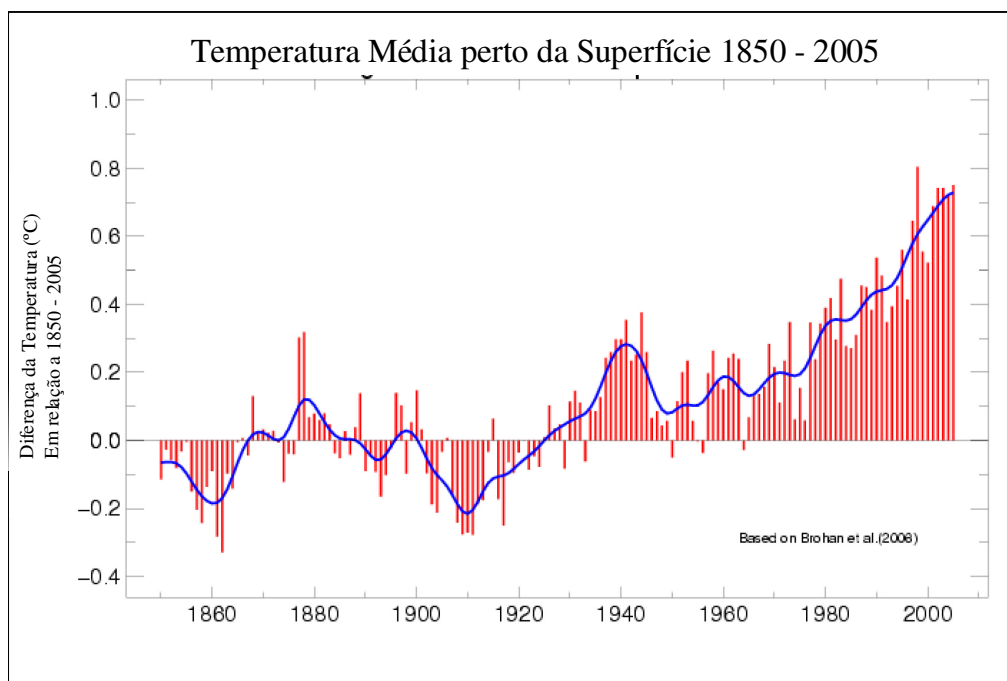


Ilustração 3 – Temperatura da Superfície

Fonte: Stern (2006).

Dentre as consequências previstas pelos cientistas do IPCC em decorrência do aquecimento global, destacam-se (IPCCb, 2001): (a) a elevação do nível dos oceanos; (b) o derretimento das geleiras e das calotas polares; (c) perda da biodiversidade; (d) aumento da incidência de doenças transmissíveis por mosquitos e outros vetores, tais como malária, febre amarela, dengue, e outros, por exemplo; (e) mudança no regime das chuvas; (f) intensificação de fenômenos extremos, tais como secas, inundações, ciclones e tempestades tropicais; (g) desertificação e perda de áreas agriculturáveis; (h) acirramento dos problemas relacionados ao abastecimento de água doce; e (i) aumento de fluxo migratórios.

As consequências sociais e econômicas são, ao menos potencialmente, catastróficas. Sempre que a degradação ambiental representar também uma perda significativa de capacidade produtiva, poderão ocorrer os seguintes resultados negativos: (a) escassez; (b) alta dos preços; (c) queda na renda real; (d) desemprego; (e) aumento da pobreza; (f) aumento das desigualdades na distribuição de renda e riqueza; (g) aumento do número de conflitos e da violência em geral; (h) perda dos direitos das gerações humanas futuras de usufruírem um meio ambiente saudável, semelhante ao de seus antepassados.

O IPCC estima que uma duplicação do volume de dióxido de carbono na atmosfera provocaria custos anuais em torno de 2% a 9% do PIB para países em desenvolvimento. Os custos econômicos são mais baixos para os países desenvolvidos, girando em torno de 1% a 1,5% do PIB. No entanto, as estimativas só incluem custos facilmente mensuráveis, omitindo os efeitos de extinção de espécies ou destruição de habitat, aos quais é difícil atribuir valor econômico. Para maiores detalhes ver Anexo D.

A seguir apresenta-se o resumo das conclusões de quatro estudos relevantes sobre a matéria:

Mendelsohn (2000) utilizou um simulador espacial detalhado, no qual gerou o clima específico de cada país, por meio de um modelo de circulação climática, a fim de estudar os possíveis impactos em cinco setores: agricultura, florestas, energia, água doce, e zonas costeiras. Tal estudo sugere que o aquecimento de até 2° C até 2060 como caso básico, e menciona que isso irá gerar benefícios para a maior parte dos países da OECD, e em prejuízo para maior parte dos países fora da OECD. Mas o produto de tal impacto segundo o autor será igual a zero no PIB mundial, causando apenas a concentração de riqueza.

Tol (2002) realizou um experimento no qual levou em consideração seis setores de mercado (agricultura, floresta, água, energia, zonas costeiras, e ecossistema), e três setores não de mercado (vetores, doenças, extremos de calor, e extremos de frio), por meio de dois modelos de pesos iguais para investimentos e custos para o período de 2000 a 2200. As estimativas geradas sugerem que um aquecimento inicial da Terra em até 0,5 °C causaria benefícios no PIB mundial em torno de 0.5% a 2.5%, dependendo do modelo utilizado. No entanto, o resultado no PIB mundial torna-se negativo para incrementos na temperatura de mais de 1 °C no modelo com pesos iguais, e acima de 2 °C para o modelo que os benefícios tem o dobro de peso em reação a investimentos feitos.

Nordhaus (1999) e (2006) revela por meio da implementação de um modelo regional dinâmico integrado da economia e clima (integrated-assessment model RICE-9848) que o aquecimento da Terra de 2.5 °C irá trazer benefícios líquidos para o PIB da Rússia de 0.7%, e perdas para a Índia de cerca de 5% de seu PIB. A média global em tal cenário será de perda de 1.5% do PIB mundial valendo-se da população projetada para 2100 e cerca de 1.9% considerando a população de hoje. O autor também tenta estimar os possíveis custos

econômicos decorrentes de possíveis catástrofes climáticas, as quais são as grandes responsáveis pelos grandes custos estimados em cenários de aumento mais acentuado da temperatura. Tais catástrofes podem custar cerca de 1% adicional de redução do PIB mundial se a temperatura subir 2.5 °C, e até 7% do PIB mundial se a temperatura subir 6 °C.

Stern (2006) assevera que em condições normais a temperatura deve aumentar em torno de 2 a 3 °C até 2100 com base em outros estudos. Caso venha-se a observar aumento da ordem de 5 a 6 °C, os modelos que incluem o risco de grandes e repentinas alterações climáticas assumem perdas de 5 a 10% no PIB mundial, com os países em desenvolvimento assumindo mais de 10% destes custos. Stern considera que estas estimativas podem inclusive ser demasiado otimistas dados três estudos acionais:

- (i) Impactos diretos no meio ambiente e na saúde humana que podem causar o aumento dos custos totais normais mantidas a situação atual de crescimento das alterações climáticas de 5% a 11% do PIB mundial;
- (ii) Evidências científicas recentes demonstram que o sistema climático pode se mais responsável pela emissão de gases causadores do efeito estufa do que anteriormente se previa;
- (iii) Incidentes não vistos anteriormente, tal como grande migrações podem gerar conflitos entre povos e nações resultando em perdas econômicas e de bem estar social.

2.2 Mercado de créditos de carbono

As transações de créditos de carbono podem ser definidas como as relações contratuais por meio das quais as partes acordam a compra e venda de créditos relacionados à emissão de gases causadores do efeito estufa, sendo uma parte responsável pelo pagamento e a outra parte responsável pela entrega dos direitos de emissão, *allowances*, por meio dos quais o comprador pode atender suas obrigações de redução de emissão de gases causadores do efeito estufa. Tais transações podem ser divididas em duas categorias:

Transações baseadas em direitos de emissão, nas quais os compradores adquirem direitos de emissão de CO₂ criados ou alocados (ou leiloadas) por autoridades reguladoras

sob regimes de limitação de emissão de CO₂ e negociação de crédito, *cap-and-trade regimes*, tais como Assigned Amount Units (AAUs) sob o Protocolo de Quioto, ou European Allowance Units (EUAs) sob o European Union Emission Trade System (EU ETS). Mercados sob regimes de limitação de emissão de CO₂ e negociação de créditos apresentam forte credibilidade em razão dos mesmos permitirem estruturas flexíveis para se atender a demandas ambientais fixadas pelos regimes.

Transações baseadas em projetos, nas quais os compradores adquirem créditos de projetos que sejam capaz de comprovar e demonstrar por meio de verificações que houve redução efetiva de emissão de gases causadores do efeito estufa, que do contrário não ocorreriam se não houvesse a implementação do projeto. O caso mais notório de tais transações são o MDL e o IC apresentados sob o Protocolo de Quioto, gerando respectivamente CER, e UERs, conforme detalhado na Seção 1.1. acima. Tais mecanismos baseados em projetos possuem forte credibilidade, pois são elaborados valendo-se de metodologias aprovadas, e beneficiando-se do fato de serem certificadas antes de sua emissão por instituições cadastradas.

Na bibliografia aplicável faz-se distinção entre créditos de carbono e permissões de emissão de carbono, sendo as primeiras referentes apenas a créditos baseados em projetos, MDL e IC, e o segundo referente a programas de redução e negociação, tal como o EU ETS. Na presente dissertação o conceito de crédito de carbono é utilizado para referir-se a ambos os produtos.

Para entender a importância financeira do mercado de créditos de carbono, vale destacar que de acordo com a Point Carbon (2007), no ano de 2006, o mercado mundial de crédito de carbono movimentou o equivalente a € 22,5 bilhões (vinte e dois bilhões, e quinhentos milhões de euros), tendo sido transacionados aproximadamente 1,6 bilhões de toneladas de créditos de carbono. Deste total, o EU ETS representou aproximadamente 62% do volume negociado, com 1 bilhão de toneladas de créditos de carbono negociadas, e aproximadamente 80% do valor total negociado, com negociações avaliadas em cerca de € 18,1 bilhões (dezoito bilhões e cem milhões de euros). O volume negociado no ano de 2006 foi equivalente a 250% do valor negociado em 2005.

O mercado de MDL, por sua vez, negociou cerca de 523 milhões de toneladas de créditos de carbono em 2006, e cerca de 40 milhões de toneladas adicionais no mercado secundário, totalizando o montante combinado de € 3,9 bilhões (três bilhões, e novecentos milhões de euros).

A seguir apresenta-se um quadro com o volume negociado em 2006 e projeções para o ano de 2007.

Tabela 1 – Volume do Mercado de Carbono

	2005		2006		2007	
	Mt	EUR milhões	Mt	EUR milhões	Mt	EUR milhões
EU ETS Total	362	7.218	1.017	18.143	1.750	18.503
OTC + bolsas	262	5.400	817	14.575	1.550	15.903
Bilateral	100	1.818	200	3.568	200	2.600
ETS outros	8	52	31	300	20	500
CDM	397	1.987	523	3.349	456	3.260
CDM 2ª Fase	4	50	40	571	96	1.061
JI	28	96	21	95	45	277
Total	799	9.401	1.632	22.458	2.397	23.601

Fonte: Point Carbon (2007).

Na subseção a seguir será apresentada a caracterização do produto objeto da presente pesquisa, na segunda subseção será dado um breve panorama sobre o mercado de MDL, dada a importância desde para o Brasil, e na terceira subseção será apresentada uma explicação do mercado do EU ETS que se torna importante para entender o produto apreçado nesta pesquisa.

2.2.1 Mercado de créditos de carbono de Projetos

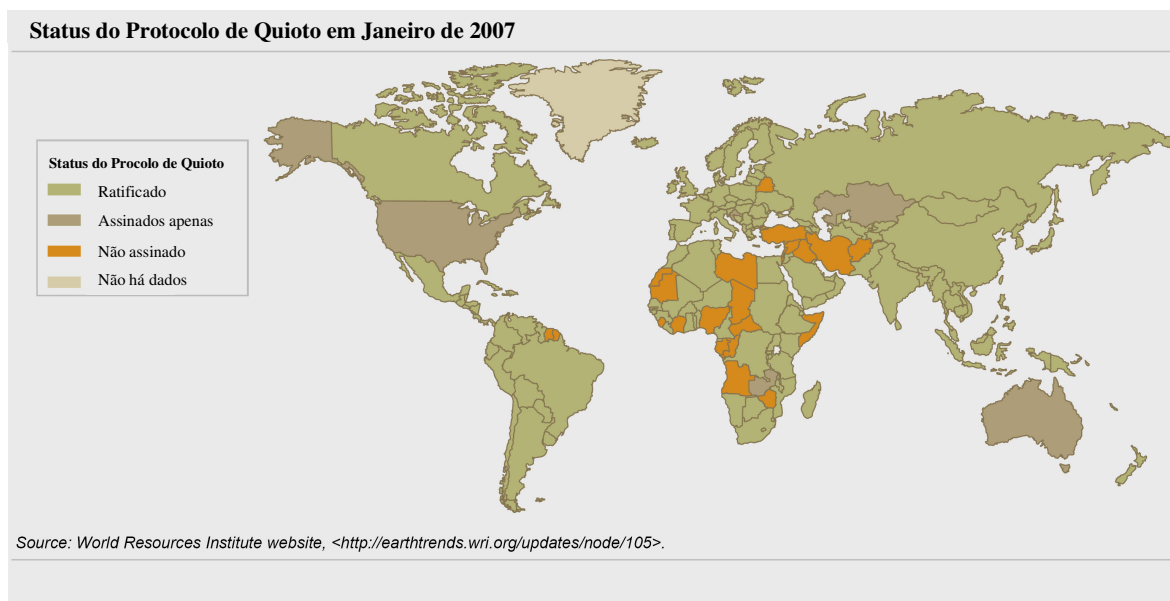


Ilustração 4 – Status do Protocolo de Quioto

Fonte: Adaptado de World Resources Institute (2007).

O Protocolo de Quioto, celebrado em Dezembro de 1997, na cidade de Quioto (Japão), e em vigor desde 16 de Fevereiro de 2005 (90 dias da ratificação do 55º membro), dada a ratificação oficial pela Rússia em 18 de novembro de 2004, estabeleceu que os países industrializados devem reduzir suas emissões de gases causadores do efeito estufa em 5,2%, em média, abaixo dos níveis observados em 1990, para o primeiro período do Protocolo, que abrange os anos de 2008-2012. No caso dos países integrantes da União Européia a redução prevista é de 8%. As reduções para o segundo período, que abrange os anos de 2013 em diante ainda estão em discussão entre os países signatários. Em vista disso, em média cada país integrante do Anexo I do Protocolo de Quioto, recebeu uma quantidade de créditos de carbono equivalente a $(5 \text{ anos}) \times (\text{emissão do país em 1990}) \times (1 - 0,052)$, que representa a respectiva cota de emissão de gases causadores do efeito estufa de cada país. Acima se apresenta uma figura com o status do Protocolo até janeiro de 2007.

No decorrer das negociações, sob pressão destes países, foram criados os denominados de instrumentos de flexibilização, dentre os quais se destacam:

Implementação Conjunta (*Joint Implementation*), IC ou JI, refere-se a projetos de mitigação das mudanças climáticas implementados entre dois países integrantes do Anexo I, ou seja, entre dois países industrializados. Os créditos gerados por um JI são denominados Unidades de Emissões Reduzidas (*Emission Reduction Units*), UERs ou UERs, ou Unidade Removíveis Específicas (*Specific Removable Units*), URE ou UREs, e cada unidade equivale ao direito de emitir uma tonelada de CO₂.

Mecanismo de Desenvolvimento Limpo (*Clean Development Mechanism*), MDL ou CDM. O MDL refere-se aos projetos de mitigação das mudanças climáticas realizadas entre países integrantes do Anexo B e outros países não integrantes do Anexo B. Neste mecanismo os investimentos em projetos devem contribuir para o desenvolvimento sustentável dos países hospedeiros Não-Anexo B, países em desenvolvimento, para a redução agregada de gases causadores do efeito estufa, bem como comprovar que na ausência do reconhecimento dos créditos de carbono pela ONU o projeto não seria realizado, por não ser economicamente viável. Os créditos gerados por um MDL são denominados Certificados de Emissões Reduzidas (*Certified Emission Reductions*), CER, e cada unidade equivale ao direito de emitir uma tonelada de CO₂.

Dado que o MDL representou cerca de 96% do mercado de créditos de carbono referentes a projetos, e ao fato de que este produto é mais importante para o Brasil, dado que pode gerar receitas para empresas brasileiras, serão enfocados a seguir alguns pontos sobre este mercado.

2.2.1.1 Mecanismo de Desenvolvimento Limpo – MDL

O MDL permite a certificação de projetos de redução de emissões nos países em desenvolvimento e a posterior venda das reduções certificadas de emissão, para serem utilizadas pelos países desenvolvidos como modo suplementar para cumprirem suas metas sob o Protocolo de Quioto. Esse mecanismo deve implicar em reduções de emissões adicionais àquelas que ocorreriam na ausência do projeto, garantindo benefícios reais, mensuráveis e de longo prazo para a mitigação da mudança do clima.

Para que um projeto resulte em reduções certificadas de emissões – RCEs, as atividades de projeto do MDL devem, necessariamente, passar pelas etapas do ciclo do

projeto, que são sete: elaboração de documento de concepção de projeto (DCP), usando metodologia de linha de base e plano de monitoramento aprovados; validação (verifica se o projeto está em conformidade com a regulamentação do Protocolo de Quioto); aprovação pela Autoridade Nacional Designada – AND, que no caso do Brasil é a Comissão Interministerial de Mudança Global do Clima - CIMGC (verifica a contribuição do projeto para o desenvolvimento sustentável); submissão ao Conselho Executivo para registro; monitoramento; verificação/certificação; e emissão de unidades segundo o acordo de projeto.

A elaboração do Documento de Concepção de Projeto – DCP é a primeira etapa do ciclo. Esse documento deverá incluir, entre outras coisas, a descrição: das atividades de projeto; dos participantes da atividade de projeto; da metodologia da linha de base; das metodologias para cálculo da redução de emissões de gases de efeito estufa e para o estabelecimento dos limites da atividade de projeto e das fugas; e do plano de monitoramento. Deve conter, ainda, a definição do período de obtenção de créditos, a justificativa para adicionalidade da atividade de projeto, o relatório de impactos ambientais, os comentários dos atores e informações quanto à utilização de fontes adicionais de financiamento. Os responsáveis por essa etapa do processo são os participantes do projeto. A seguir apresentado duas figuras que sintetizam as etapas e estrutura de um projeto de MDL, mas dado que este não é o foco da presente dissertação recomenda-se a leitura de Mizuno (2007) e MCT (2007) para maiores detalhes sobre o procedimentos, e custos necessários para a realização e aprovação de um projeto de MDL.

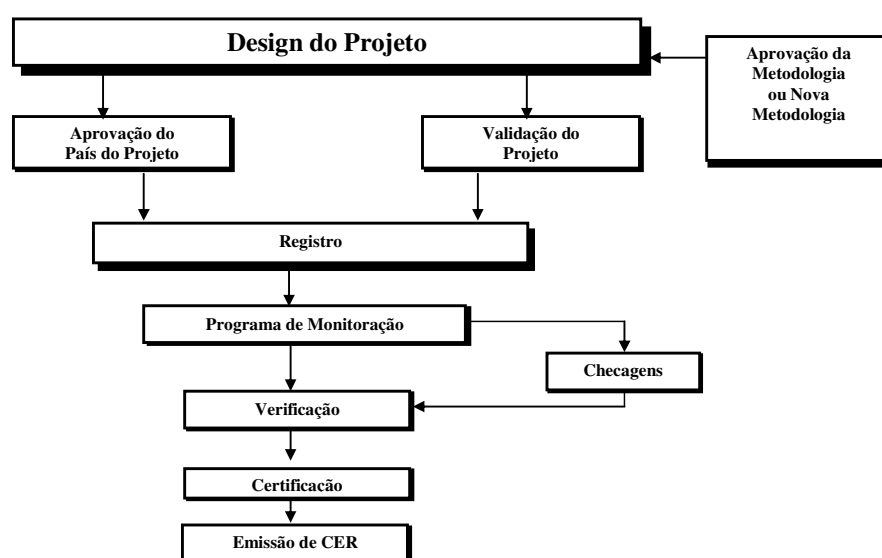


Ilustração 5 – O Ciclo de Aprovação de um Projeto de MDL

Fonte: Adaptado de Mizuno (2007).

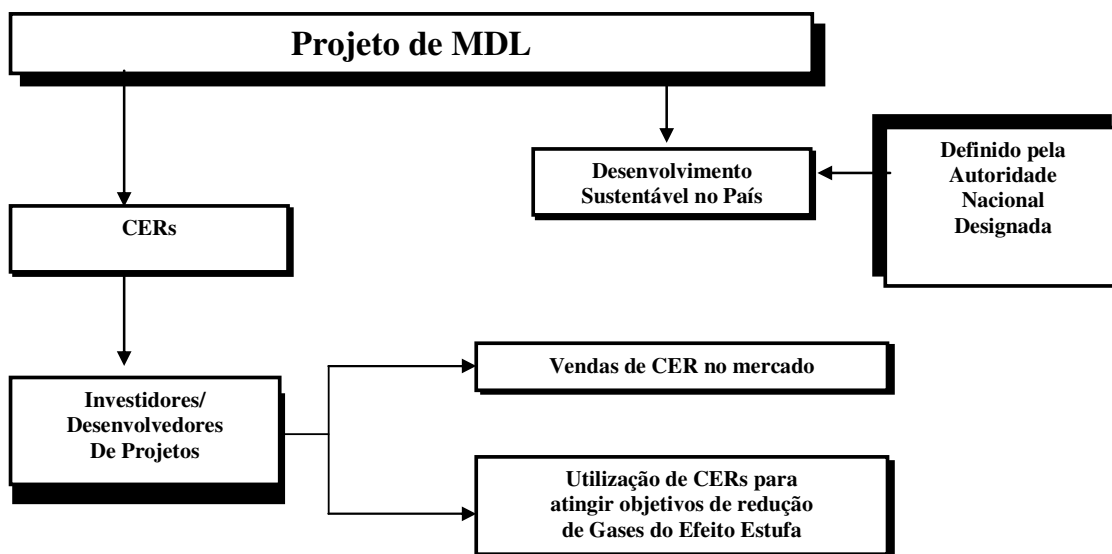


Ilustração 6 – A Estrutura de um Projeto de MDL

Fonte: Adaptado de Mizuno (2007).

No ano de 2006, o mercado de MDL negociou cerca de 523 milhões de toneladas de créditos de carbono, e cerca de 40 milhões de toneladas adicionais no mercado secundário, totalizando o montante combinado de € 3,9 bilhões (três bilhões, e novecentos milhões de euros), segundo PointCarbon (2007).

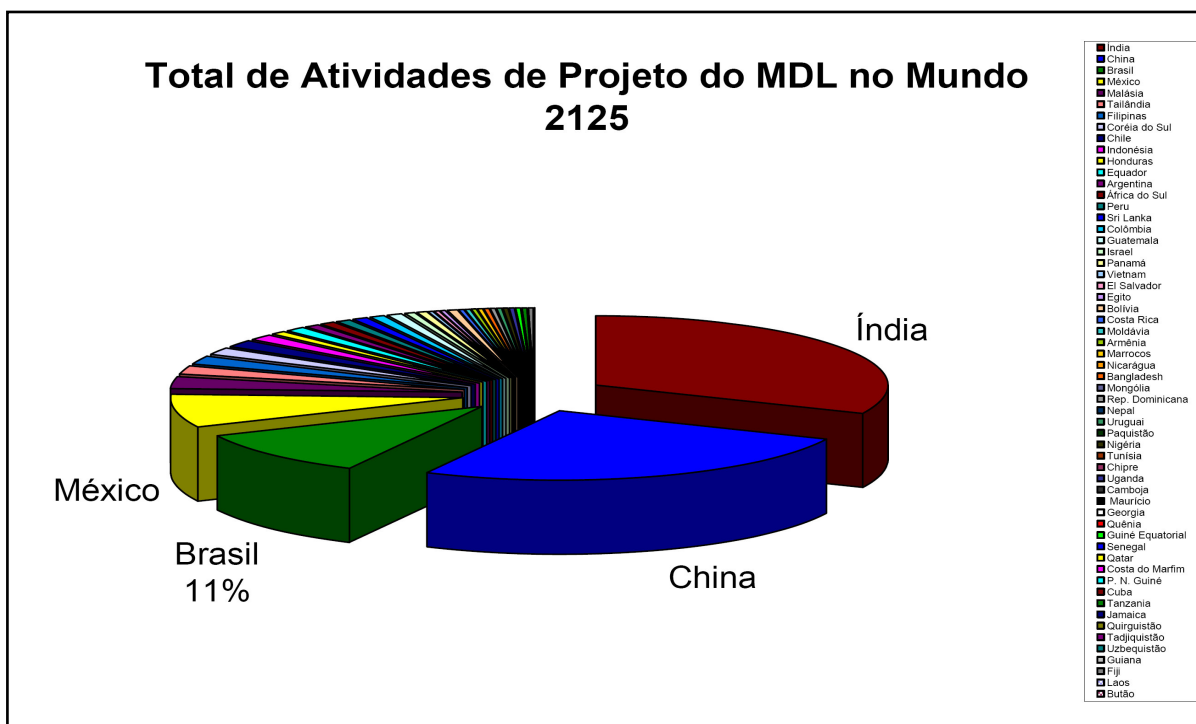


Ilustração 7 – Atividade de Projeto de MDL no Mundo em 26 de maio de 2007

Fonte: MCT (2007).

Em 26 de maio de 2007, um total de 2125 projetos encontrava-se em alguma fase do ciclo de projetos do MDL segundo MCT (2007), sendo 670 já registrados pelo Conselho Executivo do MDL e 1445 em outras fases do ciclo. Como pode ser visto na Ilustração 8 abaixo, o Brasil ocupa o 3º lugar em número de atividades de projeto, com 11% (226 projetos), sendo que em primeiro lugar encontra-se a Índia com 32% (673 projetos) e, em segundo, a China com 26% (547 projetos).

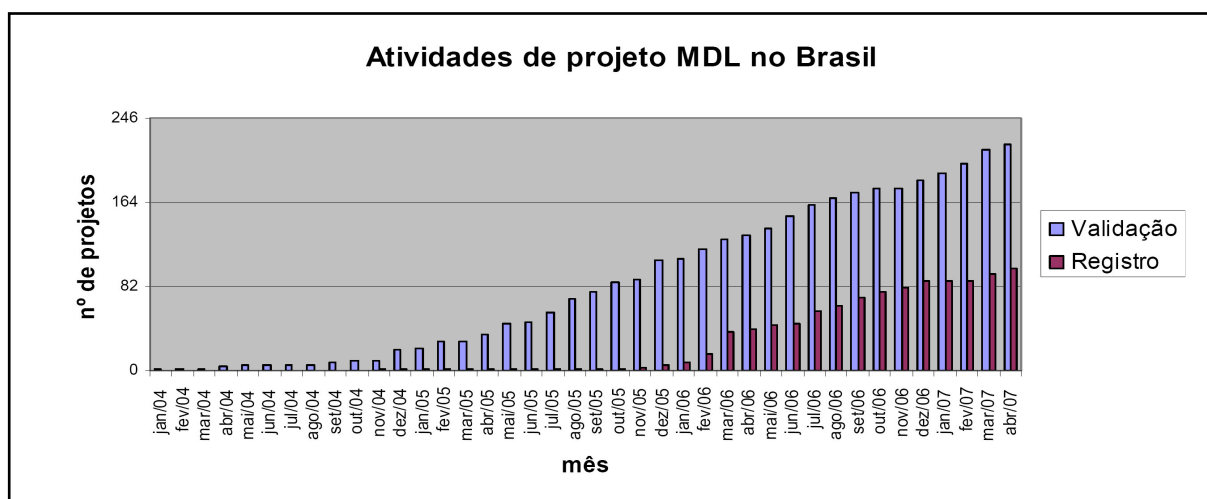


Ilustração 8 – Atividades de projetos de MDL no Brasil

Fonte: MCT (2007).

A Ilustração 7 acima apresenta a curva de crescimento do número de atividades de projeto no âmbito do MDL no Brasil, tanto dos projetos que estão em validação ou passaram pela etapa de validação como dos projetos registrados. Para validação, a curva inicia-se em janeiro de 2004 e, para o registro, em novembro de 2004, quando o primeiro projeto foi registrado pelo Conselho Executivo do MDL, no caso um projeto brasileiro.

A Tabela 2, retirada do MCT (2007), demonstra que o maior número de projetos brasileiros é desenvolvido na área de geração elétrica e suinocultura, os quais representam a maioria das atividades de projeto (78%). Os escopos que mais reduzirão toneladas de CO₂e são os de aterro sanitário, geração elétrica e os de redução de N₂O, totalizando 163 milhões de t CO₂e a serem reduzidas no primeiro período de obtenção de créditos, o que representa mais de 70% do total de redução de emissões das atividades de projeto brasileiras.

Tabela 2 – Distribuição de atividades de MDL no Brasil por tipo de projeto

Projetos de Validação/Aprovação	Número de Projetos	Redução anual de emissão	Redução de emissão no 1º Período de Obtenção de Créditos	Número de Projetos	Redução anual de emissão	Redução de emissão no 1º período de obtenção de créditos
Geração elétrica	137	7.503.256	56.774.326	61%	29%	29%
Suinocultura	38	1.964.633	19.152.149	17%	8%	10%
Aterro Sanitário	25	8.680.463	65.286.700	11%	33%	33%
Indústria Manufatureira	10	1.557.935	11.168.537	4%	6%	6%
Eficiência Energética	9	48.440	406.496	4%	0%	0%
Manejo e Tratamento de Resíduos (outros)	4	315.112	2.904.653	2%	1%	1%
N2O	2	6.041.274	42.288.918	1%	23%	21%
Indústria Química	1	17.137	119.918	0%	0%	0%
Total	226	26.128.250	198.101.697	100%	100%	100%

Fonte: MCT (2007).

2.2.2 Mercado do EU ETS - European Union Emission Trading Scheme

A União Européia concordou sob o Protocolo de Quioto a reduzir emissões antropogênicas de gases causadores do efeito estufa em 8% com relação aos volumes emitidos em 1990, até o final de 2012. Para atingir tal meta a estratégia adotada pelo grupo foi à criação de sistema de negociações de emissão européia amplo a partir da emissão da Diretiva 2003/87/EC, estava criado o European Union Emission Trading Scheme, EU ETS.

O EU ETS iniciou-se em janeiro de 2005, e funcionará inicialmente por dois períodos, ou fases, o primeiro período encerrando-se em dezembro de 2007, e o segundo coincidindo com o primeiro período de comprometimento sob o Protocolo de Quioto, que se iniciou em janeiro de 2008 e se encerrará em dezembro de 2012. A primeira fase do EU ETS foca em emissões de CO₂ associadas a combustão de combustíveis, cabendo a cada estado membro de modo discricionário estender a mais gases causadores do efeito estufa e setores da economia durante o segundo período.

Sob o denominado acordo de compartilhamento de queima de combustíveis, *burden sharing agreement* (Council Decision 2002/358/EC), a meta foi realocada dentre os estados membros da União Européia no intuito de garantir o crescimento das emissões aos países comparativamente menos desenvolvidos, e também fixar critérios mais exigentes para outros países membros.

Para cada período do EU ETS, cada estado membro precisa preparar um plano nacional de alocação, *National Allocation Plan* (NAP), e submete-lo a aprovação da Comissão. O objetivo de cada NAP é estabelecer o limite de redução de emissões para cada período, e assim delimitar a quantidade de permissões de emissão de CO₂ passíveis de negociação, European Union Allowances (EUAs), as quais serão realocadas as instalações que estas submetidas a tal Diretiva.

Cada EUA dá a seu detentor o direito de emitir uma tonelada de dióxido de carbono para a atmosfera, colocando um teto para a quantidade total de emissões de CO₂ que cada planta poderá emitir em cada ano. A Diretiva enuncia que durante o período preliminar, ao menos 95% de EUA devem ser alocados para instituições emissoras sem qualquer custo para o receptor do crédito da autoridade outorgante, para o período subsequente de 5 anos tal montante será reduzido para 90%.

A diferença das EUA será ou leiloadas ou armazenadas para os novos entrantes.

Os países membros da União Europeia consideram a EUA para fins contábeis com um ativo intangível, com exceção da Itália e Reino Unido, os quais consideram os mesmos como passivos. Adicionalmente, para fins da legislação financeira da Alemanha, França e Áustria, dentre outros, as European Allowance Units são consideradas como commodities, enquanto para outras partes, tal como Estônia e Suécia classificam a European Allowance Units como instrumento financeiro. No entanto, em todos os casos de derivativos destes ativos os consideramos como instrumentos financeiros, e, por conseguinte, tais negociações são supervisionadas pela autoridade financeira local.

As European Allowance Units na realidade devem ser encaradas como instrumento que existem apenas na sua forma eletrônica por meio de registros que cada estado membro deve ter criado. O objetivo do registro é o de formalizar e controlar a transferência de EUA entre membros que estão engajados na negociação de EUA, incluindo entidades não emissoras de CO₂, e devem estar ligado aos demais registros existentes na União Europeia.

Dessa forma, todos que tiverem interessados em negociar EUA devem abrir uma conta de registro. Todos os estados membros estão conectados a uma comunidade internacional de

registros de negociação, *Community Independent Transaction Log* (CITL), a qual arquiva todas as transferências nacionais e em nível Europeu.

As plantas que foram afetadas pelas disposições do EU ETS devem atender ao cumprimento das metas de forma anual. Para tanto, cada estado membro deve submeter até 30 de abril de cada ano um relatório de emissões com verificação externa para a autoridade oficial de cada estado membro.

Até a presente data as plantas devem entregara para cancelamento o número de European Allowance Units referente a quantidade de emissões efetuadas de CO₂. O eventual inadimplemento de tal obrigação acarretará o pagamento de € 40 por tonelada de CO₂ emitidas em excesso, durante o período preliminar, e passará a ser de EUR \$ 100 por tonelada de CO₂ emitidas em excesso no segundo período.

Vale destacar que o pagamento da penalidade não desobriga a parte infratora a ter que entregar créditos adicionais durante o ano subsequente.

As European Allowance Units são alocadas em bases anuais as instalações designadas em 28 de fevereiro de cada ano. Portanto, há um período de dois meses até que as firmas devam submeter seus relatórios de verificações. Indiretamente isso significa que as plantas podem tomar emprestado EUA futuros no intuito de aplica-los ao atendimento das obrigações do ano anterior.

Este um ano de empréstimo de EUA é permitido apenas quando ocorrem no mesmo período, conforme definição do EU ETS.

Além dessa particularidade do EU ETS, as instalações podem carregar EUA em excesso para os anos subsequente de cumprimento. Novamente, vale destacar que tal deliberalidade apenas é possível durante o mesmo período do EU ETS, e em resultado de European Allowance Units não utilizados na conta de registro ao final de 2007, as quais serão canceladas em 30 de abril de 2008.

Apesar do fato de o EU ETS traçar a estratégia dos países membros da Europa Central atingirem seus limites sob as metas impostas pelo Protocolo de Quioto, a Diretiva

2004/191/EC também permite o uso de IC e MDL (unidades de emissões reduzidas – UERs, e certificados de emissões reduzidas – CERs, respectivamente). No entanto tais mecanismos devem ser utilizados como uma forma suplementar ao EU ETS, e para cobrir apenas uma pequena proporção (até 10%) das obrigações de cada estado membro. Tal proporção deve ficar clara no NAPs, de modo que cada estado membro fica como responsável pela emissão ou cancelamento de uma unidade de EUA para cada CERs e UERs que o detentor manter em sua conta de registro. Trabalhos como Klepper e Peterson (2006) demonstram os possíveis efeitos de tais programas sob os preços praticados no EU ETS, bem como nos preços nos MDL e IC.

Em junho de 2005, a Comissão Europeia aceitou a versão final dos NAPs, referente ao período pré Protocolo de Quioto, dos vinte e cinco membros do EU ETS, mas até o momento da conclusão da presente dissertação ainda não haviam sido aprovados os NAPs referentes ao primeiro período do Protocolo de Quioto, que se inicia em janeiro de 2008. A seguir apresenta-se um quadro com vinte países integrantes do EU ETS, e os setores cobertos até o momento.

Tabela 3 – Países membros do EU ETS (Anexo B)

União Européia - 15	Grupo de Acesso
Áustria	República Checa
Bélgica	Estônia
Dinamarca	Hungria
Finlândia	Latvia
França	Lituânia
Alemanha	Polônia
Grécia	Eslováquia
Irlanda	Eslovênia
Itália	Cyprus
Luxemburgo	Malta
Holanda	
Portugal	
Espanha	
Suécia	
Reino Unido	

Fonte: Rosenzweig *et al.* (2005)

Tabela 4 – Setores cobertos pelo EU ETS

Setores cobertos pelo EU ETS	
Energia ▪ Combustível (térmicas acima de 20MW, incluindo as atividades na planta), excluindo-se as combustões de lixo; ▪ Refinarias de óleo mineral; ▪ Fornos de coque.	Mineração ▪ Cimento (acima de 500 toneladas por dia); ▪ Fertilizante (acima de 50 toneladas por dia); ▪ Vidro (acima de 20 toneladas por dia); e ▪ Cerâmica (acima de 75 toneladas por dia).
Metais ▪ minas ▪ aço e ligas de ferro (acima de 2.5 toneladas por hora)	Outros ▪ Polpa (celulose) ▪ Papel (acima de 20 toneladas por dia).

Fonte: Rosenzweig *et al.* (2005)

Desde o início da operação do EU ETS, seis plataformas de negociação emergiram para negociar permissões de emissões de CO₂ no mercado a vista e por meio de instrumentos derivativos: (i) Powernext, European Energy Exchange (EEX), Nordpool, Energy Exchange Áustria (EXAA), European Climate Exchange (ECX) e Climex.

Com exceção da ECX e da Climex, os outros quatro são bolsas de energia da França, Alemanha, Escandinávia, e Áustria, respectivamente. Tal fato não deveria ser uma superpresa dado que os custos decorrentes da emissão de CO₂ estão diretamente ligados ao setor de energia. Dessa forma, nada mais natural do que os produtos relacionados a créditos de carbono serem introduzidos em mercados de energia já consolidados.

Do outro lado a ECX, localizada em Amsterdã, é membro do grupo Climate Exchange Plc., o qual abrange também a Chicago Climate Exchange, e desenvolve, administra e comercializa uma série de instrumentos derivativos de European Allowance Units, listados e negociados na plataforma do Intercontinental Exchange (NYSE ICE).

Por fim a Climex é uma aliança entre é uma aliança regional dentro da Europa que providencia um mercado à vista pan-americano para o EUA. Os parceiros da Climex incluem APX B.V., New Values e STX serviços sediadas na Holanda, SENDECO₂ sediada na

Espanha, Vertis Environmental Finance sediada na Hungria, e APX Power Limited sediada no Reino Unido.

Os futuros de European Allowance Units eram já transacionados no mercado bilateral, OTC – *over the counter*, desde 2003 (dois anos antes do início do EU ETS). Todavia, a primeira transação no mercado a vista em bolsa ocorreu em 9 de março de 2005 na EEX. No verão do mesmo ano, junho de 2005, a Powernext, a EXAA e a Climex também introduziram para a negociação em suas plataformas a EUA à vista, já a Nordpool apenas passou a oferecer a negociação de EUA no mercado a vista em outubro de 2005. Em todos os casos mencionados os contratos regram a negociação de uma unidade de EUA, com respectiva entrega física no dia posterior a negociação.

O mercado a vista de créditos de carbono é contínuo, no sentido de que com exceção da EXAA, onde os leilões são executados em datas pré-agendadas durante o ano, usualmente em bases semanais, a EEX, Powernext e a Climex começam a negociar o papel às 9h00 e termina às 17h00 do fuso horário da Europa Central. No caso da Nordpool, a negociação inicia-se uma hora antes, às 8h00 e termina às 15h30 do fuso horário da Europa Central.

No ano de 2006, o total transacionado sob o EU ETS, incluindo valores realizado por meio de corretores, bilaterais, OTC, e bolsas foi da ordem de 817 milhões de toneladas segundo dados da Point Carbon (2007). Destes 583 milhões de toneladas representam o mercado de OTC (*over-the-counter*), e o restante foi negociado em bolsa. A European Climate Exchange ainda mantém a hegemonia do volume negociado, com mais de três quartos do volume negociado em bolsas, se, considerar os contratos de *exchange for physical*, troca por físico, que permitem a liquidação de contratos OTC por meio da bolsa.

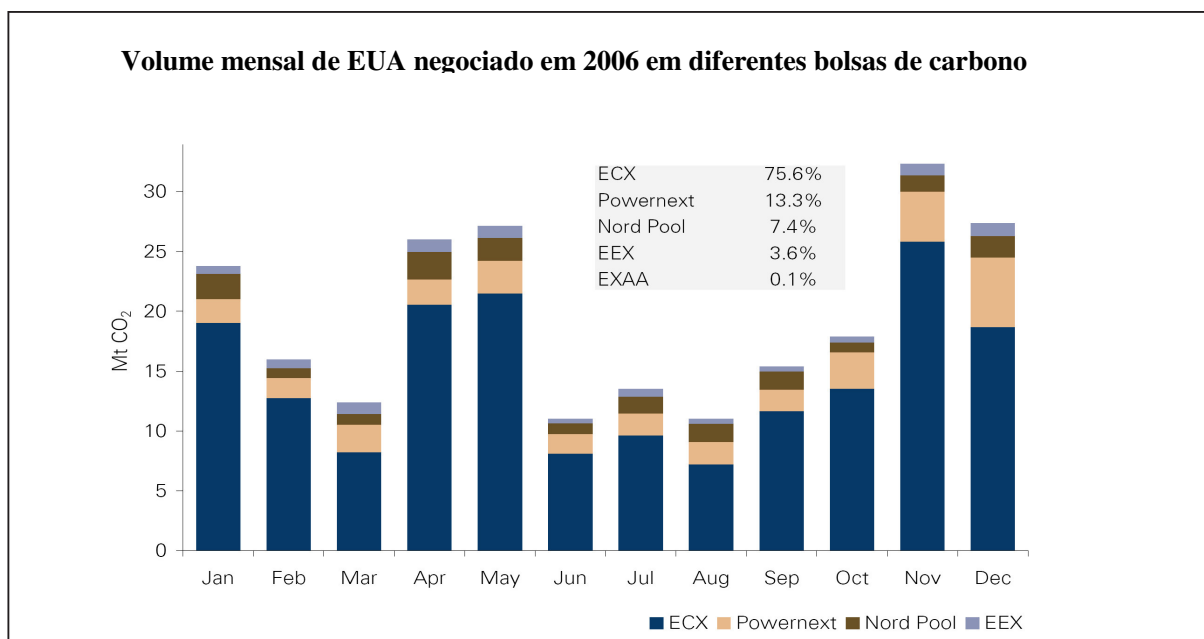


Ilustração 9 – Volume de European Allowance Units negociados em 2006

Fonte: Point Carbon (2007).

No ano de 2006, o EU ETS representou aproximadamente 62% do volume negociado do mercado mundial de créditos de carbono, com créditos representando 1 bilhão de toneladas de CO₂, e aproximadamente 80% do valor total negociado, com negociações avaliadas em cerca de € 18,1 bilhões (dezoito bilhões e cem milhões de euros). O volume negociado no ano de 2006 foi equivalente a 250% do valor negociado em 2005. A Ilustração 9 acima apresenta um gráfico com a participação de cada bolsa no ano de 2006.

A adoção da diretiva sobre negociação de emissões de carbono pela União Europeia introduziu às indústrias intensivas em carbono uma série de fatores de riscos, dentre os quais destacam-se o volume de EUA necessários e a variação dos preços dos créditos de carbono (Daskalakis et al. 2006). O primeiro risco deriva do fato de que as empresas não sabem antecipadamente o número preciso de EUA que será necessário para o atendimento de suas obrigações, enquanto o segundo se deve em razão da alta volatilidade dos preços dos créditos de carbono observada no mercado. Consequentemente, é só uma questão de tempo para que os instrumentos derivativos tradicionais sejam introduzidos no mercado para propiciar o correto gerenciamento de riscos. Em particular em 11 de fevereiro de 2005, iniciou-se a negociação de futuros de EUA na Nordpool, seguida pela ECX e EEX (abril e outubro de 2005, respectivamente). O ativo subjacente destes contratos futuros é os EUA a vista para o primeiro e segundo período do EU ETS, sendo que cada contrato representa 1000 EUA. Os

contratos futuros são negociados diariamente, e encontram-se em negociação contratos para entrega em dezembro de cada ano até 2012. Dessa forma, hoje existem seis contratos em negociação, dezembro de 2007 a dezembro de 2008, dado que os contratos com vencimento para dezembro de 2005 e dezembro de 2006 já expiraram.

Além desses com vencimentos para o final de cada ano, a Nordpool lançou um contrato para vencimento em março, e a ECX introduziu em 21 de julho de 2006 contratos com vencimentos mensais para o ano de 2007 até março de 2008, cobrindo a apenas a fase do EU ETS. Finalmente em 13 de outubro de 2006, a ECX começou a oferecer opções européias sob futuros de EUA. As negociações continuam a ocorrer das 8h00 na Nordpool e ECX, e as 9h00 na EEX, até às 15h30, 18h00 e 17h00 do fuso horário da Europa Central em cada uma dessas bolsas respectivamente. Os Contratos são todos para entrega física em três do vencimento na Nordpool e ECX, e dois na EEX. As datas de vencimento dos contratos futuros variam em cada bolsa, sendo que o vencimento ocorre no penúltimo dia de negociação de novembro no caso da EEX, no primeiro dia útil de dezembro no caso da Nordpool e último dia útil de dezembro no caso da ECX.

O mercado futuro de EUA é de longe muito mais líquido do que o mercado a vista. Particularmente, desde a introdução do mercado até o final de dezembro de 2006, o volume agregado de contratos negociados foi da ordem de 250 milhões de EUA, significativamente mais alto do que os 50 milhões de EUA negociados durante o mesmo período no mercado a vista (Daskalakis et al. 2006). A negociação de contratos futuros é basicamente realizado na ECX, já que a mesma apresenta 86.5% do total do volume negociado, seguida pela Nordpool com 12.5%.

2.3 Caracterização do produto para fins da Pesquisa

Antes de se iniciar a elaboração de um modelo apropriado para apreçar créditos de carbono, ou mais especificadamente European Allowance Units, torna-se importante entender o tipo de ativo que está se a tratar. Basicamente, o estoque de European Allowance Units de uma determinada empresa determina sua capacidade de produção. Caso a empresa não possua European Allowance Units suficientes para continuar a produção acima de seu nível de emissões, terá que realizar investimentos na planta para alterar especificações e melhorar

processos, reduzindo a quantidade marginal de emissões de gases causadores do efeito estufa por unidade produzida, ou alternativamente a empresa poderá adquirir European Allowance Units, CERs ou UERs do mercado, desde que estes sejam mais baratos que € 40 a tonelada de CO₂ no primeiro período do EU ETS, e € 100 a tonelada de CO₂ no segundo período do EU ETS. Dada esta última possibilidade, o CO₂, que as plantas inspiram e os seres humanos expiram, tornou-se a mais nova commodity negociada no mercado europeu. Todavia, há uma diferença fundamental em negociar CO₂ e outras commodities tradicionais. Dado que o produto negociado é na verdade o direito de emitir CO₂, European Allowance Units, ou a ausência de emissão. Vendedores de European Allowance Units são aquelas empresas que poderiam emitir mais CO₂ do que de fato emitem, portanto, estas podem negociar suas cotas de emissão se desejarem. Dessa forma, a emissão de CO₂ gerou ativos, direito de emitir, e ao mesmo tempo passivos, a obrigação de entregar European Allowance Units para cobrir as emissões.

A primeira vista, pode parecer que modelos válidos para ações seriam válidos também para European Allowance Units, mas ao analisar este ponto de forma mais cuidadosa, percebe-se que o valor da ação é determinado pela lucratividade da empresa, sua capacidade de gerar valor ao acionista, já o valor da European Allowance Units decorre das expectativas dos agentes com relação a possível escassez do ativo induzido pelas regras da oferta e demanda.

Mas o ponto mais crucial é o de que as firmas participantes do EU ETS são todos potenciais compradores e vendedores de EU ETS, podendo influenciar a escassez do mercado e seus preços em razão de suas decisões de abatimento de emissões. Caso um grupo industrial de peso, por exemplo, possa abater a custos baixos sua quantidade de emissões em grande quantidade, sua ação irá afetar diretamente a liquidez do mercado e sua dinâmica.

Outro ponto que vale a pena ser mencionado refere-se ao fato de que as quantidades de direitos de emissão fixadas pela Diretiva da União Européia para cada período de negociação já foram especificadas. De modo que todos os participantes do mercado devem respeitar seus limites de emissão, mas a qualquer momento uma empresa pode decidir em investir em abatimento, ou aumentar suas aquisições para cobrir suas necessidades adicionais, e assim influenciar a liquidez de mercado das European Allowance Units.

Vale mencionar que as European Allowance Units possuem limitação quanto a duração de sua validade. Ou seja, o valor de um EUA expira ao final de cada período de comprometimento. A partir do final do primeiro período de comprometimento do Protocolo de Quito (2008 – 2012) os direitos de emissão não utilizados serão convertidos em direitos de emissão para o período seguinte, dado que o carregamento (banking) é permitido. Todavia, a decisão de permitir o carregamento do período pré Protocolo de Quioto (2005 – 2007) para o primeiro período de comprometimento do Protocolo foi deixado à discrição de cada estado membro. Caso a qualquer momento venha a se tornar proibido o carregamento, os direitos de emissão serão extintos ao final de 2007 e as instituições ambientais deverão emitir novos direitos de emissão para as empresas.

Uma outra dificuldade em se negociar esta commodity decorre do fato de que ainda é incerto o tratamento a ser dado para tal ativo, passivo, até a lei criar regras claras sobre tal matéria. Torna-se essencial que os direitos de emissão de CO₂ sejam tratados de modo homogêneo segundo regras contábeis, possibilitando maior transparência a este mercado financeiro em desenvolvimento. Portanto, de acordo com sugestões do International Accounting Standards Board (IASB), a União Européia concordou em identificar os créditos de carbono como ativos intangíveis. No entanto, os países participantes terão que decidir individualmente como regular as atividades de negociação internamente (comissões de negociação, posições proprietárias, dentre outros pontos), dentre as atividades financeiras. O que poderá resultar na necessidade de estar-se sujeito a autorizações e ter a obrigação de se criar controles e fiscalização, tal como no mercado acionário.

Uma abordagem diferente que parece fazer mais sentido do que tratar as European Allowance Units como uma ação, é tratá-las como um fator de produção, dado que as mesmas podem ser exauridas quando da produção de CO₂ e após seu resgate, as European Allowance Units são removidas do mercado. Ademais, em razão de sua homogeneidade e fácil transferência, as variações de curto prazo podem ser facilmente vendidas e/ou adquiridas no mercado a vista. As European Allowance Units, por conseguinte, podem ser comparadas também com materiais operacionais ligados a produção, tal como carvão, eletricidade, gás. Motivo pelo qual a presente pesquisa pretende explorar se os modelos apropriados para o gás natural são capazes de refletir as características da evolução e comportamento dos preços das European Allowance Units.

2.4 Estudos sobre apreçamento de créditos de carbono

O mercado de crédito de carbono ainda esta em amadurecimento, bem como a bibliografia relacionada ao tema. Todavia, no último ano viu-se um crescimento relevante de publicações sobre o tema, principalmente com relação ao problema do correto apreçamento dos ativos de créditos de carbono. Apresentar-se-á a seguir um resumo dos principais trabalhos relacionados revisados durante a elaboração da presente dissertação:

Daskalakis et al. (2006) realizaram um estudo empírico com dados diários do mercado a vista e do mercado futuro das quatro maiores bolsas européias que negociam European Allowance Units. Seu trabalho sugere que os preços a vista das European Allowance Units apresentam volatilidade aleatória, e interrupções decorrentes de violentas alterações de patamar, que podem ser bem retratadas por meio do uso do modelo de difusão com saltos de Merton (1976). Os autores constataram também que o modelo de custo de carregamento demonstrou-se mais preciso para fornecer preços dos contratos futuros sob o denominado primeiro período do European Emission Trade Scheme, European Allowance Units com vencimento até dezembro de 2007, desde que sejam consideradas as curvas de conveniências apropriadas. No entanto, para estabelecer um relacionamento entre o mercado à vista e os preços dos contratos futuros relacionados ao segundo período do European Emission Trade Scheme, o autor propôs um modelo de equilíbrio, fundamentado em estudos empíricos favoráveis de aplicação de processos de difusão com saltos. Os estudos empíricos sobre os preços futuros por meio de tal modelo revelam um significativo prêmio de risco implícito, os quais devem segundo os autores refletir as expectativas do mercado com relação ao nível de preços do mercado a vista para o segundo período do European Emission Trade Scheme, bem como sua taxa de conveniência. Finalmente os autores demonstram os impactos de saltos nos processos dos preços do mercado a vista de créditos de carbono e as implicações para o apreçamento de opções e gerenciamento de risco.

Benz (2006) estuda a aplicação de modelo de alterações de regimes, regime-switching, para apreçar créditos de carbono, dadas as incertezas dos agentes sobre o comportamento deste novo instrumento de política ambiental, e do fato do mercado de créditos de carbono ter apresentado no passado períodos de alta volatilidade seguidos por período de baixa volatilidade. O autor conclui que os modelos capturam de modo adequado as características desta nova classe de ativos.

See (2005) apresenta um estudo sobre o EU ETS, com foco no período de 2005 a 2007, no qual tenta apurar a probabilidade dos preços das EUA caírem abaixo de certo patamar de preços. Para tanto o autor utilizou simulações estocásticas geradas por meio de um modelo computacional de equilíbrio das economias mundiais, com detalhamento dos 15 membros mais importantes da União Européia, e dos 10 países que aderiram posteriormente a União Européia. Os parâmetros que receberam um tratamento estocástico durante as simulações foram crescimento da capacidade de produção (mão de obra), alocação dos novos investimentos, taxa de aumento de eficiência energética, e taxa de elasticidade entre componentes de energia e não energia. A importância da identificação da faixa de preços prováveis para as EUA decorre do fato de que seu conhecimento permitirá aos participantes do EU ETS decidir entre adquirir EUA, ou investir em tecnologias que permitam a redução de emissão de gases causadores do efeito estufa abaixo de seus respectivos limites de emissão, e, por conseguinte, possibilitando a venda de EUA em excesso a terceiros. Enquanto alguns investimentos para redução de emissões por parte dos agentes necessitam apenas da alteração do modo como os negócios são administrados, outros investimentos demandam investimentos vultosos e de longo-prazo. Por conseguinte, o problema do abatimento de emissões vai de encontro com as preocupações normais de uma decisão de investimento, e custo marginal de produção, afetando as políticas de gerenciamento de custos que devem se fundamentar na correta apuração dos preços das EUA. Os resultados obtidos em tal estudo, por meio de simulações de Monte Carlo, demonstram que com probabilidade de 28-48% os preços das European Allowance Units devem ficar abaixo de € 0.40 por tonelada. O preço máximo obtido nas simulações foi de €3.50 a € 6.00 a tonelada de EUA. Em vista disso, o autor conclui que não há incentivo para as empresas investirem em abatimento de emissões durante o primeiro período do EU ETS, a menos que as empresas estejam vislumbrando os possíveis custos a serem incorridos no segundo período do EU ETS, quando então o preço de se adquirir no mercado EUA deve ser mais custoso.

Zhang (2007) explora os efeitos decorrentes do incremento da incerteza sob os preços futuros das European Allowance Units, e custos relacionados à distribuição intertemporal das emissões de gases causadores do efeito estufa. O autor valendo-se de um programa dinâmico analisou os preços dos créditos de carbono sob uma função estocástica convexa dos preços da eletricidade e dos combustíveis, e concluiu que o aumento da incerteza com relação às condições futuras do mercado aumenta a expectativa de preços das European Allowance Units. Dessa forma, o aumento da incerteza faz com que uma empresa neutra a risco reduza

antecipadamente suas emissões de gases causadores do efeito estufa em ordem de suavizar suas curvas de custo marginal de abatimento no tempo.

Paoeella e Taschini (2006) realizaram uma análise econométrica dos preços dos créditos de carbono em ordem de examinar o comportamento incondicional das caudas e dinâmica de heterocedacidade herdada dos retornos das séries das European Allowance Units. Os autores propuseram uma distribuição estável de pareto descrevendo a distribuição incondicional dos retornos, enquanto para a análise condicional os autores propuseram o uso de uma estrutura GARCH.

Seifert et al. (2006) desenvolveram um modelo estocástico de equilíbrio que reflete os fatos estilizados do mercado de EUA e conclui que os créditos de carbono apresentam um processo de volatilidade que varia com o tempo.

Borak et al. (2006) investigam a natureza da taxa de conveniência dos contratos futuros de créditos de carbono. Os autores concluem que o mercado mudou de um backwardation inicial para contango com significante taxa de conveniência nos contratos futuros para entrega em 2008-2012, e interpretam a taxa de conveniência como a expectativa do mercado com relação aos riscos dos preços das European Allowance Units.

Uhrig-Homburg e Wagner (2006a) estudaram a relação entre os preços de mercado a vista e futuro das European Allowance Units do primeiro período do EU ETS e encontraram que ambos estão entrelaçados por meio da abordagem de custo de carregamento. Adicionalmente, os autores provaram que os preços futuros conduzem o processo de descoberta dos preços das European Allowance Units.

Uhrig-Homburg e Wagner (2006b) realizaram uma pesquisa com especialistas sobre o melhor modo de se desenvolver derivativos para as European Allowance Units, e concluíram que há interesse pelo mercado de que seja introduzido um tipo opção para fins de hedge, e propuseram a criação de uma opção padronizada de European Allowance Units.

Rocha (2003) apresenta um trabalho no qual o autor (i) determina o tamanho do mercado global e a participação do Brasil, por meio do MDL, em diversos cenários; (ii) analisa se os CER gerados em projetos de MDL, em especial por projetos de seqüestro de

carbono, poderiam se tornar uma commodity ambiental ou não. O autor conclui que o mercado de carbono já é uma realidade, mas que se encontrava em um estágio inicial de formação. Para estimar o tamanho do mercado Rocha utilizou o Modelo CERT (Carbon Emission Reduction Trade), desenvolvido por Rolf Kappel, Peter Staub, e Jürg M. Grütter, para o Banco Mundial. Nos cenários de referência do Modelo a maior participação brasileira no mercado de CER foi de apenas 3,4%, por meio da venda de 14,4 milhões de toneladas de carbono, gerando uma receita de US\$ 237 milhões ao custo de US\$ 106,3 milhões. O lucro de todos os projetos de MDL no Brasil foi de US\$ 130,7 milhões. Nos cenários alternativos a maior participação foi de 17,8%, por meio da venda de 32,1 milhões de toneladas de carbono, gerando uma receita de US\$ 525,6 milhões ao custo de US\$ 198 milhões. O lucro de todos os projetos de MDL no Brasil neste caso foi de US\$ 327,6 milhões.

Deke et. al (2003) utilizaram o modelo DART (Dynamic Applied Regional Trade), do Kiel Institute for World Economics, para analisar economicamente os impactos do aquecimento global, com foco nos custos associados a cada meta de redução de emissão de gases causadores do efeito estufa. O modelo DART é um modelo multi-regional, multi-setorial, recursivo dinâmico de emissão de gases causadores do efeito estufa em nível mundial, o qual cobre 11 regiões e 11 setores, além de fatores de produção, capital e terras. Os agregados dos setores cobrem inclusive os setores de energia. A estrutura econômica do modelo especifica as características de cada região e aborda o consumo final e a produção. E cada mercado é perfeitamente competitivo. Produção e preços são totalmente flexíveis. Para cada região o modelo incorpora dois tipos de agentes: produtores, divididos por setor, e os consumidores finais, que representam indústrias e governos.

Peterson (2003) analisou os impactos da implementação do EU ETS na Europa e nos mercados internacionais, por meio de um modelo de equilíbrio denominado DART, e adaptado para considerar premissas específicas do EU ETS, bem como inserir os mesmos no contexto mundial.

Kallbekken et al. (2005) utiliza um modelo multi-setorial, multiregional, multi-gas intertemporal de emissão de gases causadores do efeito estufa, no intuito de explorar as eficiências obtidas pelos países em desenvolvimento ao participarem da negociação de créditos de carbono, e também os riscos econômicos de se comprometerem no futuro a reduzir suas próprias emissões. O autor conclui que no futuro o custo econômico poderá fazer com

que os países em desenvolvimento não tenham incentivos para aderir a limitações de emissões de gases causadores do efeito estufa.

Klepper et al. (2006) analisaram os possíveis efeitos da atual estratégia de proteção climática fixada pelos Planos Nacionais de Alocação (National Allocation Plans), NAPs, para o *European Emission Trading Scheme*. Para tanto, os autores utilizaram um modelo multi-regional, multi-setorial, de emissão de gases causadores do efeito estufa, denominado de DART, no intuito de simular os efeitos de tais políticas em 2012, quando as metas estabelecidas pelo Protocolo de Quioto devem ser atendidas. Diferentes cenários foram simulados em ordem de destacar os efeitos do patrocínio de permissões a instalações intensivas em energia, o uso de mecanismos relacionados a projetos, MDL e JI, e restrições suplementares impostas por critérios políticos.

Alstad (2004) analisa a decisão de investimento de se construir uma usina de geração termoelétrica a gás na Noruega por meio de opções reais. Neste trabalho o autor analisa o valor de se adiar um investimento presente na licença de construção de uma planta de 800 MW. O modelo de avaliação simula os preços à vista da energia elétrica e do gás natural, os quais seguem um modelo de preços à vista. Os preços à vista são modelados com base no denominado spark spread, diferença entre o preço da energia elétrica e o custo do gás natural. Os preços dos créditos de carbono são assumidos como fixos em EUR 20 à tonelada. Dado que o trabalho é fundamentado na premissa de que os mercados de energia elétrica e gás natural na bolsa de Nord Pool são eficientes, todas as informações devem estar refletidas nos preços futuros. Dessa forma, os custos decorrentes da aquisição de créditos de carbono e capacidade de geração no sistema elétrico devem estar embutidos nos preços futuros. Neste trabalho o autor conclui que vale a pena esperar para realizar o investimento, dada incerteza dos mercados de energia elétrica e gás.

2.5 Modelagem de preços de créditos de carbono

A presente seção foi baseada principalmente na dissertação de Xu (2004) sobre modelagem estocástica de preços de gás natural, dada que a presente pesquisa teve por base os modelos apresentados naquela dissertação, mas aplicando os ao mercado de carbono. Tais modelos demonstraram-se adequados dado que o comportamento da série de preços de

carbono apresenta características em comum ao da série de preços de gás, tal como comportamento não previsível, reversão à média, e sazonalidade. Os processos estocásticos são a base para o apreamento de quase todos os derivativos e modelos de gerenciamento de riscos no mercado financeiro. Tais processos nos permite modelar a evolução dos preços no tempo, e atribuir probabilidades a possíveis preços no futuro em função dos preços observados hoje e em outros parâmetros relevantes para cada respectivo ativo. No intuito de facilitar o entendimento dos modelos, a seguir apresentam-se alguns conceitos básicos sobre cálculos estocásticos, e processos de reversão a média.

2.5.1 Processo de reversão à média

No mercado de commodities uma importante propriedade é a reversão a média dos preços, a qual deve ser entendida pelo fato dos preços das commodities variarem no tempo em torno de uma tendência determinada pelos custos de produção, e demanda. No intuito refletir tal fenômeno na modelagem dos preços utiliza-se correntemente de processos de reversão a média. O processo de Ito que reflete a característica de reversão à média pode ser descrito pela seguinte equação:

$$dS_t = \alpha^*(L^* - S_t)dt + \sigma^*dW_t. \quad (1)$$

Na EDE acima, W_t é um processo de Wiener padrão, no qual α^* é denominado de taxa de reversão a média ou velocidade de reversão a média, sendo a mesma sempre positiva. L^* é denominada de média de longo prazo ou média no longo prazo, ou seja, tratam-se dos valores dentre os quais S_t tende a oscilar. A σ^* é o termo de difusão, que governa a magnitude do ruído da tendência. Apenas para fins do presente item, as variáveis α^* , L^* e σ^* podem ser constantes no tempo, podem ser funções do tempo, ou aleatórias, sendo que cada escolha representa um modelo diverso.

Nota-se pela equação (1) acima que a tendência é governada pela distância entre os preços correntes e a média de longo prazo. Se o valor corrente da variável S_t for menor que a média de longo-prazo, a tendência de longo prazo será positiva, resultando em uma influência positiva sobre S_t levando a variável a se aproximar da média de longo prazo, L^* . Alternativamente se o valor corrente da variável S_t for maior que a média de longo-prazo, a

tendência de longo prazo será negativa, resultando em uma influência negativa sobre S_t levando a variável a se aproximar da média de longo prazo, L^* . Em vista disso, S_t varia no tempo ao redor da média de longo-prazo, sem e afastar muita desta. Note que quando maior a magnitude da taxa de reversão à média α^* , maior será a força incidente sobre S_t , aumentando por conseguinte a velocidade de convergência de S_t para L^* .

A seguir serão apresentados alguns modelos de reversão a média.

Um modelo básico de reversão à média é o processo Ornstein-Uhlenbeck apresentado em Unlenbeck *et al.* (1930), na qual a EDE é representada por

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma dW_t, \quad (2)$$

onde W_t é um processo padrão de Wiener, e α , L , e σ são positivos e constantes no tempo.

Para transforma a equação (1) na equação (2) basta tornar α^* , L^* e σ^* constantes no tempo. Todavia dado que o processo resultante poderia tomar valores negativos, torna-se necessário algumas adaptações adicionais, tal como substituir o termo de difusão σ em (2) por $\sigma\sqrt{S_t}$. Tal alteração resulta no modelo de Cox-Ingersoll-Ross, apresentado em Cox *et al.* (1985). A EDE passa a ser escrita como:

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t, \quad (3)$$

onde W_t é um processo padrão de Wiener, e α , L , e σ são positivos e constantes no tempo.

Note que o termo da volatilidade $\sigma\sqrt{S_t}$ desaparece quando S_t tende a zero. Dessa forma, sempre que $S_0 > 0$, e $L > 0$, teremos sempre $S_t \geq 0$ para todo $t \geq 0$.

Um outro modelo famoso de reversão à média utilizada para apreçar commodities é o modelo Schwartz-Ross, apresentado em Schwartz (1997), cuja EDE é definido por:

$$dS_t = \alpha(L - \ln S_t)dt + \sigma S_t dW_t, \quad (4)$$

onde W_t é um processo padrão de Wiener, e α , L , e σ são positivos e constantes no tempo.

Neste modelo, S_t apresenta reversão a média de longo prazo $\hat{L} = e^L$. Aplicando o teorema de Ito para $X_t = \ln S_t$, tem-se a seguinte equação:

$$dX_t = \alpha \left(L - \frac{\sigma^2}{2\alpha} - X_t \right) dt + \sigma dW_t, \quad (5)$$

o qual segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck, e ainda se enquadra na fórmula geral apresentada em (1) acima.

Outro modelo para apreçamento de commodities, que pode ser considerado mais intuitivo que o modelo de Schwartz-Ross acima, é conhecido como modelo de Dixit-Pindyck, apresentado em Dixit e Pindyck (1994), o qual assume reversão para a média dos preços de longo prazo, ao invés de reversão para a média de longo prazo do logaritmo dos preços. A EDE de tal modelo pode ser expresso por:

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma S_t dW_t, \quad (6)$$

onde W_t é um processo padrão de Wiener, e α , L , e σ são positivos e constantes no tempo.

Vale ressaltar que as variáveis α^* , L^* e σ^* em (1) acima podem também apresentar comportamentos estocásticos, tal como o apresentado na literatura para alguns modelos de 2 ou 3 fatores, por exemplo.

2.5.2 Modelos de apreçamento de crédito de carbono

Os modelos apresentados a seguir serão aqueles utilizados no restante da presente pesquisa, e são reproduções do trabalho de Xu (2004), sobre modelagem estocástica de preços de gás.

2.5.2.1 Modelos de 1 fator

A EDE que descreve a fórmula generalizado do modelo de 1 fator de Xu (2004) é a seguinte:

$$dS_t = \alpha(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad (7)$$

onde W_t é um processo padrão de Wiener, e $\alpha(t, S_t)$ e $\sigma(t, S_t)$ são funções determinísticas de t , e S_t .

2.3.3.1.1. Modelos de 1 fator sem sazonalidade

Os modelos de 1 fator com reversão a média sem sazonalidade abordados na presente pesquisa, apresentados em Xu (2004), assumem que $\alpha(t, S_t) = \alpha(L - S_t)$ e $\sigma(t, S_t) = \sigma S_t^r$, onde α , L e σ são constantes, e $r = 0$ ou $1/2$. Dessa forma a EDE defini-se por:

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma S_t^r dW_t, \quad (8)$$

Quando $r = 0$, o modelo torna-se o processo de Ornstein-Uhlenbeck apresentado acima, e quando $r = 1/2$, tem-se o modelo de Cox-Ingersoll-Ross.

Tais modelos não serão o foco da presente pesquisa, mas conforme foi apresentado em Xu (2004) estes servirão como instrumentos de explicação do processo de calibragem dos modelos.

No restante da presente dissertação estes modelos serão referidos como modelo 1f-A para $r = 0$, modelo 1f-B para $r = 1/2$.

2.3.3.1.2. Modelos de 1 fator com sazonalidade

Ao analisar as séries de preços de créditos de carbono no capítulo 3 abaixo, nota-se que a sazonalidade é uma importante característica das séries de preço dos créditos de carbono. Em vista disso, conforme apresentado em Xu (2004), considera-se na presente pesquisa que os preços à vista dos créditos de carbono são uma composição de um fator

sazonal $f(t)$ e um fator não sazonal X_t , o qual segue um processo de reversão à média de um fator, com média de longo prazo constante, e volatilidade em função do tempo, conforme segue:

$$S_t = f(t) + X_t, \text{ onde} \quad (9)$$

$$f(t) = bt + \sum_{i=1}^N \beta_i \cos\left(\frac{2\pi i t}{P}\right) + \eta_i \sin\left(\frac{2\pi i t}{P}\right) \quad (10)$$

E X_t segue um processo de reversão à média descrita por uma EDE definida por:

$$dX_t = \alpha(L - X_t)dt + \sigma(t)X_t^r dW_t, \text{ onde} \quad (11)$$

$$\sigma(t) = \exp\left(c + \sum_{j=1}^K \lambda_j \cos\left(\frac{2\pi j t}{P}\right) + w_j \sin\left(\frac{2\pi j t}{P}\right)\right). \quad (12)$$

Na equação acima W_t segue um processo de Wiener, $r = 0, \frac{1}{2}$, ou 1 , e as variáveis b, β_i 's, η_i 's, α, L, c, λ_j 's, e w_j 's são todas constantes, N e K são inteiros positivos, e P é o número de unidades de tempo em que há negociações em um ano.

Note que o termo da volatilidade $\sigma(t)$ apresenta forma exponencial no intuito de assegurar que o número seja positivo. O termo linear bt em $f(t)$ contribui para capturar a tendência de longo prazo dos preços. E o seno e o cosseno na função $f(t)$ e $\sigma(t)$ faz com que a função reflita as altas e baixas periódicas decorrentes das alterações sazonais. Em vista disso, quando $N=1$ e $K=1$, tem-se sazonalidade anual, dado que P é igual a 1 ano. Do mesmo modo, quando $N=2$ e $K=2$ captura-se a sazonalidade semi-anual, dado que este período será igual a $P/2$, meio ano.

No restante da presente dissertação estes modelos serão referidos como modelo 1f-sn-A para $r = 0$, modelo 1f-sn-B para $r = \frac{1}{2}$, modelo 2f-sn-C para $r = 1$.

2.5.2.2 Modelos de 2 fatores

A fórmula generalizada do modelo de 2 fatores apresentada em Xu (2004) pode ser representada pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} dX_t = \mu_1(t, X_t, Y_t)dt + \sigma_1(t, X_t, Y_t)dW_t^1 \\ dY_t = \mu_2(t, X_t, Y_t)dt + \sigma_2(t, X_t, Y_t)dW_t^2 \end{cases} \quad (13)$$

onde W_t^i 's são processos padrões de Wiener, para $i = 1$ e $i = 2$, e $\mu_i(t, X_t, Y_t)$ e $\sigma_i(t, X_t, Y_t)$ são funções determinísticas de t , X_t , e Y_t , para $i = 1$ e $i = 2$.

Em um modelo de dois fatores há duas variáveis aleatórias X_t e Y_t . Tais variáveis podem ser o preço de dois ativos correlacionados. Como, por exemplo, em Tifenbach (2000) *apud* Xu (2004), o autor utiliza um par de preços de ativos de energia simultaneamente, e investiga a correlação entre eles. Em tal trabalho no qual se considerou os preços de dois ativos de energia, gás natural e energia elétrica, há uma função de 1 fator para cada respectivo ativo que observa o processo de reversão e termos de correlação entre as funções. Já em Pilipovic (1997), o autor apresenta um modelo de 2 fatores com reversão à média, no qual o preço à vista reverte para uma tendência de longo prazo, que também apresenta uma distribuição lognormal. Outro exemplo é apresentado em Gibson *et al.* (1990), no qual a primeira variável aleatória é o preço à vista, o qual assume-se que segue um movimento geométrico browniano, e a segunda variável é a taxa instantânea de conveniência do preço à vista, o qual assume-se que segue um processo de reversão à média.

2.3.3.2.1. Modelos de 2 fatores sem sazonalidade

A EDE, apresentada em Xu (2004), que descreve os modelos de 2 fatores sem sazonalidade pode ser expresso pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} dS_t = \alpha(L_t - S_t)dt + \sigma S_t^r dW_t^1 \\ dL_t = \mu(\gamma - L_t)dt + \tau L_t^r dW_t^2 \end{cases}, \quad (14)$$

onde α , σ , μ , γ , τ são constantes, e r pode tomar os seguintes valores: 0, $\frac{1}{2}$ ou 1. Nos presentes modelos assume-se que W_t^1 e W_t^2 são processos padrões de Wiener não correlacionados.

Neste modelo a média de longo prazo dos preços à vista é uma variável aleatória, que difere do famoso modelo de Pilipovic pelo fato de a média de longo prazo seguir um processo de reversão à média, ao invés de seguir um MGB. Tal premissa decorre do fato de Xu (2004) acreditar que os preços à vista devem apresentar um processo de reversão à média, mas não necessariamente possuir uma tendência exponencial de crescimento.

No restante da presente dissertação estes modelos serão referidos como modelo 2f-A para $r = 0$, modelo 2f-B para $r = 1/2$, modelo 2f-C para $r = 1$.

2.3.3.2.2. Modelos de 2 fatores com sazonalidade

O presente modelo, apresentado em Xu (2004), considera que os preços à vista dos créditos de carbono são a composição de um termo sazonal $f(t)$, e um componente não sazonal X_t . Em termos matemáticos tem-se que:

$$S_t = f(t) + X_t, \quad (15)$$

onde

$$f(t) = bt + \sum_{i=1}^N \beta_i \cos\left(\frac{2\pi i t}{P}\right) + \eta_i \sin\left(\frac{2\pi i t}{P}\right), \quad (16)$$

e X_t seguem um processo de reversão a média descrito pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} dX_t = \alpha(L_t - X_t)dt + \sigma(t)X_t^r dW_t^1 \\ dL_t = \mu(\gamma - L_t)dt + \pi L_t^r dW_t^2 \end{cases}, \quad (17)$$

onde

$$\sigma(t) = \exp\left(c + \sum_{j=1}^K \lambda_j \cos\left(\frac{2\pi j t}{P}\right) + \omega_j \sin\left(\frac{2\pi j t}{P}\right)\right). \quad (18)$$

Na equação acima W_t^i 's segue um processo de Wiener; r pode assumir os seguintes valores: 0, $\frac{1}{2}$, 1; β_i 's, η_i 's, α , μ , τ , c , λ_j 's, e ω_j são constantes; N e K são inteiros positivos; e P é o número de dias em que houve negociação em um ano.

No restante da presente dissertação estes modelos serão referidos como modelo 2f-sn-A para $r = 0$, modelo 2f-sn-B para $r = \frac{1}{2}$, modelo 2f-sn-C para $r = 1$.

2.5.3 Preços futuros de créditos de carbono

A presente seção, tal como a seção 2.3 acima, foi baseada principalmente na dissertação de Xu (2004) sobre modelagem estocástica de preços de gás, dada que a presente pesquisa teve por base os modelos apresentados naquela dissertação, e reproduzidos nos itens 2.3.3 acima, e 2.4.2.2. a 2.4.2.4 abaixo.

2.5.3.1 Contratos futuros e a termo

O contrato a termo, *forward*, é um acordo de entrega de uma quantidade específica de um produto em uma data definida no futuro, por um preço estabelecido (preço *forward*), que será pago quando da entrega. As especificações do produto, o ponto de entrega, a quantidade, o preço e a data são descritos no contrato. O contrato envolve duas partes, o comprador que receberá o produto e pagará por ele e o vendedor que entregará o produto. Os contratos a termo são normalmente celebrados diretamente entre produtores e consumidores. O contrato a termo envolve uma única saída de caixa contra o recebimento do ativo na data do vencimento.

O contrato futuro é, da mesma forma, um contrato entre duas partes para a entrega de um produto especificado, em uma data definida, a um preço estabelecido (preço futuro), a ser pago quando da entrega. Os contratos futuros, em geral, são negociados em bolsas de valores, mercadorias e futuros. Os contratos são padronizados com relação às especificações acima. Embora na grande parte dos negócios não haja liquidação física, o contrato futuro estabelece um ponto de entrega do ativo. Em geral, os contratos futuros têm maior liquidez que os contratos a termo. Um dos motivos para tal diferença de liquidez deve-se ao fato dos contratos futuros serem marcados a mercado, e por serem negociado em bolsa, as quais exigem que

compradores e vendedores realizem depósitos de margens, há mitigação do risco de liquidação das partes, o que causa um incremento no risco de crédito da transação em relação a uma operação a termo. Dada a marcação a mercado, ao final de cada dia o contrato é liquidado (parcialmente) com base na variação do preço entre este dia e o dia anterior.

Como os contratos futuros são marcados a mercado, os preços futuros serão maiores que os preços forward se a taxa livre de risco é estocástica e positivamente correlacionada com o preço à vista. Se for negativamente correlacionada, os preços futuros serão menores que o preço forward. Quando a taxa livre de risco é constante, os preços forward e futuro são iguais. Esta demonstração pode ser vista em vários textos, como por exemplo, Hull (2006, p. 127).

2.5.3.2 Mercado a vista versus mercado futuro

O ganho do investidor no mercado futuro ocorrerá quando, no vencimento, o preço à vista da commodity for superior ao esperado na data em que entrou no mercado. Perderá se o preço à vista for inferior. O contrato futuro é uma aposta no que irá acontecer ao preço à vista. Quando o investidor entra no mercado ele assume o risco dos movimentos dos preços à vista que irão prevalecer no decorrer do tempo. O ganho do investidor no mercado futuro é a diferença entre o preço futuro em t e o valor esperado do preço à vista. Esta diferença é exatamente o prêmio de risco. Se o preço futuro está abaixo do valor esperado do preço à vista, o comprador do contrato futuro ganhará.

No intuito de ilustrar os pontos apresentados acima, considere o exemplo adaptado de Weiser (2003) *apud* Gorton *et al.* (2004, p. 6). O exemplo será exibido na Ilustração 10 abaixo. Assume-se que o preço do barril de óleo seja igual a \$30, e que os participantes do mercado esperem que o preço venha a ser \$27 em tre meses. No intuito de atrair investidores para o mercado, o preço do contrato futuro é fixado em \$25, o qual é um desconto do preço à vista esperado no futuro. Tal diferença entre o preço do contrato futuro e o preço à vista esperado no futuro, de \$2, é o denominado prêmio pelo risco o qual os investidores esperam receber por assumir o risco do mercado à vista.

Agora assumo que quando do vencimento do contrato, o óleo seja negociado ao preço à vista esperado de \$27. Um investidor em commodities físicas, que se importa com os

movimentos dos preços à vista, acaba de perder \$3 (i.e. \$30 - \$27). Já um investidor em contratos futuros teria ganhado a diferença entre o preço à vista de 27 e o preço inicial do contrato futuro de \$25, ou seja, \$2. O exemplo apresentado e a Ilustração 10 abaixo retratam o cenário em que o preço à vista esperado no futuro de \$27 se realize. No entanto, caso o preço à vista esperado no futuro de \$27 não se realize, e o preço à vista no futuro observado seja de \$26, então o retorno do investidor no contrato futuro será \$1. Tal resultado é a diferença do prêmio pelo risco (\$27 - \$25 = \$2), menos a diferença entre o preço observado no mercado à vista e o preço esperado à vista no futuro (\$26 - \$25 = \$1). Note que o preço à vista e o preço futuro convergem para o mesmo valor no vencimento. Esta convergência é o resultado da existência de um contrato que prevê a entrega física do produto

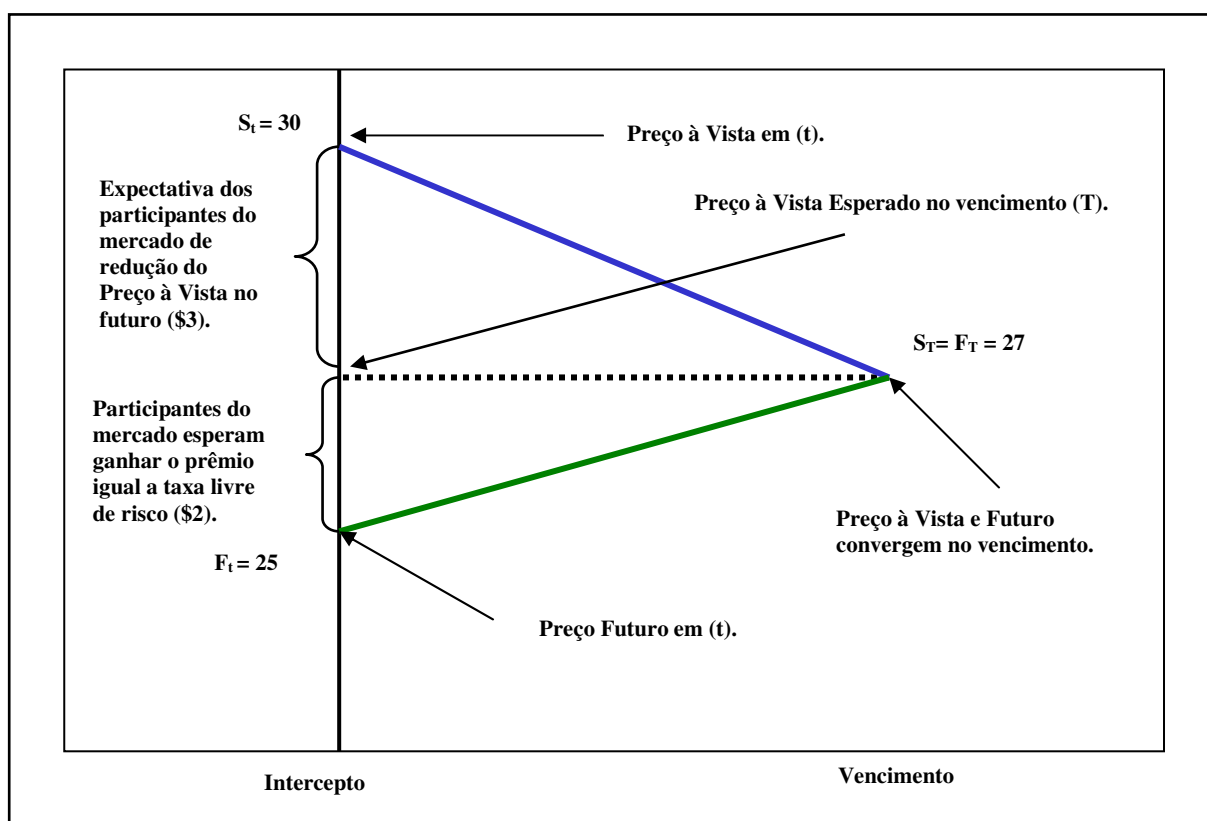


Ilustração 10 – Relação preços à vista versus futuro

Fonte: Adaptado de Gorton *et al.* (2004, p. 6).

Keynes (1930) e Hicks (1939) postularam que em média o prêmio de risco compete aos compradores do futuro. Imaginou uma situação em que produtores de commodities na procura de garantir preços irão vender a produção obtendo um seguro contra as variações de preços quando da colheita. Os investidores (especuladores) irão tomar a posição comprada e

prover este seguro, adquirindo contratos quando o preço futuro é inferior ao valor esperado do preço à vista no vencimento. Este postulado de Keynes ficou conhecido em Finanças como normal *backwardation*². A questão relacionada à verificação ou não deste postulado é de natureza empírica³.

A noção de normal *backwardation* envolve a comparação do preço futuro com o valor esperado do preço à vista, que não é observável quando a posição é tomada no mercado futuro. Na prática, o conceito de *backwardation* é usado para expressar a posição do preço futuro em relação ao preço à vista. Uma *commodity* está em *backwardation* se o preço futuro está abaixo do preço à vista. No sentido do conceito de Keynes há uma equivalência com a existência de um prêmio de risco, já no sentido comum isto não ocorre. Uma *commodity* está em contango se o preço futuro está acima do preço à vista.

Quando o preço futuro é inferior ao valor esperado do preço à vista, é uma situação de *normal backwardation*. Mas não se diz que o mercado está em *backwardation*. Em verdade como , o preço futuro hoje é maior que o preço à vista hoje, o mercado é dito em *contango*. Somente *backwardation* no sentido de Keynes envolve o conceito de prêmio de risco. Além destes conceitos, é usual ainda o termo *backwardation* fraco. Define-se *backwardation* fraco quando o valor presente do preço futuro é inferior ao preço à vista. Para diferenciar de *backwardation* fraco, por vezes usa-se o termo *backwardation* forte que é simplesmente um sinônimo de *backwardation*, ou seja, quando preço à vista hoje é maior que o preço futuro hoje.

2.5.3.3 Fórmulas de preços futuros de apuração de créditos de carbono

No intuito de explicar o procedimento utilizado para encontrar a relação entre os preços futuros e os preços à vista do ativo em questão, Xu (2004) escolheu a equação (14) como exemplo, na qual r foi fixada em $\frac{1}{2}$. Dessa forma, o modelo que servirá de base para as próximas subseções pode ser representado pelo seguinte sistema:

² Keynes (1930, p. 144) assevera que: “In other words, the quoted forward price, though above the present spot price, must fall below the anticipated future spot price by at least the amount of normal backwardation.”

³ Gorton *et al.* (2004, p. 5) cita os seguintes trabalhos empíricos no qual tentou-se medir o prêmio pelo risco em commodities específicas, tais como Gray (1961), Dusak (1973), Jagannathan (1985), Bessembinder (1992), and Kolb (1992). Tais trabalhos, segundo Gorton *et al.* (2004, p. 5), não tiveram sucesso em razão da volatilidade dos preços futuros, motivo pelo qual os autores defendem a utilização de índice de commodities, tal como o estudo realizado por Bodie and Rosansky (1980).

$$\begin{cases} dS_t = \alpha(L_t - S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t^1 \\ dL_t = \mu(\gamma - L_t)dt + \tau\sqrt{L_t}dW_t^2 \end{cases}, \quad (19)$$

onde $\alpha, \sigma, \mu, \gamma, \tau$ são constantes.

2.5.3.4 Premissa de não arbitragem

Na presente pesquisa será considera que a premissa de não arbitragem se sustenta no mercado de crédito de carbono, dado que o mercado apesar de recente, já apresenta grande liquidez, tendo sido negociado em 2006 segundo a Point Carbon (2007) € 18,1 bilhões (dezoito bilhões e cem milhões de euros) de *European Allowance Units*, por meio do mercado à vista, e futuros. Ademais, dado que em setembro de 2007, passará a ser listado futuros e opções de CER na *European Carbon Exchange*, pode se dizer que o mercado de crédito de carbono esta caminhando para maior integração entre os ativos de carbono, eliminando qualquer oportunidade de arbitragem, inclusive entre ativos diferentes de carbono.

A premissa de não arbitragem sustenta que os preços de dois ativos distintos devem relacionar-se de tal modo que não haja oportunidades de arbitragem. Dado que os agentes de mercado reagem rapidamente as todas informações disponíveis, e aproveitam qualquer oportunidade existente, fazendo com que as possibilidades de arbitragem sejam eliminadas de forma instantânea, ou seja, os preços de mercado refletem todas as informações disponíveis, e expectativas dos agentes.

2.5.3.5 Método da equação diferencial parcial

Por meio do presente método devemos construir uma carteira livre de risco, e em seguida obter as equações diferenciais parciais, EDP, que impliquem na ausência de oportunidades de arbitragem.

- Lema de Itô

No intuito de simplificar o tratamento de equações diferenciais estocásticas apresentada-se a seguir uma fórmula que facilitará a obtenção da EDP, o Lema de Itô. Dado

que Xu (2004) escolheu o modelo (19) de 2 fatores como base, o Lema de Itô será aplicado em duas dimensões. Segundo o Lema de Itô, na presença de uma equação suavizadora $V(t, X, Y)$, definida pelo tempo e duas outras variáveis, na qual X_t e Y_t sejam a solução da seguinte EDE definida por:

$$\begin{cases} dX_t = \mu_1(t, X_t, Y_t)dt + \sigma_1(t, X_t, Y_t)dW_t^1 \\ dY_t = \mu_2(t, X_t, Y_t)dt + \sigma_2(t, X_t, Y_t)dW_t^2 \end{cases} \quad (20)$$

onde dW_t^1 e dW_t^2 são movimentos Brownianos padrões em $\mathbb{R}$, com correlação ρ , então, dado $V_t = V(t, X_t, Y_t)$, o incremento dV_t é definido por:

$$dV_t = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial X} dX_t + \frac{\partial V}{\partial Y} dY_t + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} dt + \frac{1}{2} \sigma_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} dt + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} dt, \quad (21)$$

onde a dependência de (t, X_t, Y_t) foi omitida apenas por questões de brevidade.

- EDP

Suponha que em qualquer tempo t , onde os preços dos ativos S , e a média de longo prazo L , o valor do contrato futuro celebrado em qualquer tempo $t_0 \leq t$ com data de liquidação, entrega, em $T \geq t$ possa ser definido pela seguinte função $V(t, S, L; t_0, T)$. Para conseguir eliminar o risco existente da carteira composta por tais contratos, dada à existência de duas fontes de aleatoriedade, deve-se utilizar dois contratos, com datas diferentes, para cancelar o risco da carteira. Dessa forma, o valor da carteira na data t poderá ser definido por:

$$\Pi_t = V(t, S_t, L_t; t_0, T) + \Delta_1 V(t, S_t, L_t; t_0, T_1) + \Delta_2 V(t, S_t, L_t; t_0, T_2), \quad (22)$$

onde:

$$V(t, S_t, L_t; t_0, T_1) = V_1; \quad (23)$$

$$V(t, S_t, L_t; T_0, T_2) = V_2; \text{ e} \quad (24)$$

$$V(t, S_t, L_t; t_0, T) = V_t. \quad (25)$$

Ao se aplicar o Lema de Ito obtém-se que:

$$\begin{aligned} dV_t &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{\partial V}{\partial L} dL_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{1}{2} L_t \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha(L_t - S_t) \frac{\partial V}{\partial S} + \mu(\gamma - L_t) \frac{\partial V}{\partial L} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \tau^2 L_t \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma \sqrt{S_t} dW_t^1 + \frac{\partial V}{\partial L} \tau \sqrt{L_t} dW_t^2 \end{aligned} \quad (26)$$

onde a dependência de (t, S_t, L_t) foi omitida apenas por questões de brevidade no cálculo.

Dado que dV_1 e dV_2 tem a mesma forma, deste ponto em diante,

$$\frac{\partial}{\partial t} + \alpha(L_t - S_t) \frac{\partial}{\partial S} + \mu(\gamma - L_t) \frac{\partial}{\partial L} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \tau^2 L_t \frac{\partial^2}{\partial L^2} \quad (27)$$

será referido como D.

Em vista disso, as alterações de valor da carteira definem-se por:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= dV + \Delta_1 dV_1 + \Delta_2 dV_2 \\ &= (DV + \Delta_1 DV_1 + \Delta_2 DV_2) dt + \sigma \sqrt{S_t} \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} + \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} \right) dW_t^1 \\ &\quad + \tau \sqrt{L_t} \left(\frac{\partial V}{\partial L} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial L} + \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial L} \right) dW_t^2 \end{aligned} \quad (28)$$

No tempo t , Δ_1 e Δ_2 são definidos por:

$$\frac{\partial V}{\partial S} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial S} + \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} = 0, \text{ e} \quad (29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} + \Delta_1 \frac{\partial V_1}{\partial L} + \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial L} = 0. \quad (30)$$

Dado que $d\Pi_t$ é um termo determinístico, $d\Pi_t$ é livre de risco. Se a taxa livre de risco for r , então $d\Pi_t = r\Pi_t dt$, e

$$(DV - rV) + \Delta_1(DV_1 - rV_1) + \Delta_2(DV_2 - rV_2) = 0. \quad (31)$$

Ao se colocar (29), (30) e (31) juntos, obtém-se que:

$$\begin{bmatrix} DV - rV & DV_1 - rV_1 & DV_2 - rV_2 \\ \frac{\partial V}{\partial S} & \frac{\partial V_1}{\partial S} & \frac{\partial V_2}{\partial S} \\ \frac{\partial V}{\partial L} & \frac{\partial V_1}{\partial L} & \frac{\partial V_2}{\partial L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (32)$$

Dada a existência de Δ_1 e Δ_2 , obtém-se que o determinante da matriz (32) é zero, o que implica que suas linhas são dependentes. Portanto, deve existir λ_S e λ_L , independentes na data de liquidação, tal que:

$$DV - rV - \lambda_S \frac{\partial V}{\partial S} - \lambda_L \frac{\partial V}{\partial L} = 0. \quad (33)$$

Ao se expandir o operador D , dado que a equação a (33) acima deve ser válida para todos os valores de S_t e L_t , se $S > 0$, $L > 0$, e $t \in (t_o, T)$, a EDP pode ser escrita por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\alpha(L - S) - \lambda_S) \frac{\partial V}{\partial S} + (\mu(\gamma - L) - \lambda_L) \frac{\partial V}{\partial L} + \frac{1}{2} \sigma^2 S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \tau^2 L \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} - rV = 0. \quad (34)$$

Na equação estocástica (34) acima, $(\alpha(L - S) - \lambda_S)$ e $(\mu(\gamma - L) - \lambda_L)$ são denominados de risco ajustado ou risco neutralizado dos termos de tendência de S e L , respectivamente⁴. Apesar de λ_S e λ_L poderem ser funções arbitrárias de S , L , e t , para simplificar, o modelo considera que $\lambda_S = (\alpha - \tilde{\alpha})(L - S)$ e $\lambda_L = \mu(\gamma - L) - \tilde{\mu}(\tilde{\lambda} - L)$, de modo que

⁴ Para o presente modelo, se $\lambda_S = \lambda_1 \sigma \sqrt{S}$ e $\lambda_L = \lambda_2 \tau \sqrt{L}$, então λ_1 e λ_2 são os preços de mercado para S e L , respectivamente.

$(\alpha(L-S)-\lambda_s)=\tilde{\alpha}(L-S)$ e $(\mu(\gamma-L)-\lambda_L)=\tilde{\mu}(\gamma-L)$. Nestas equações $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\mu}$, e $\tilde{\gamma}$ são parâmetros neutralizados a risco. Portanto, a equação (34) pode ser escrita por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{\alpha}(L-S)\frac{\partial V}{\partial S} + \tilde{\mu}(\gamma-L)\frac{\partial V}{\partial L} + \frac{1}{2}\sigma^2 S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\tau^2 L \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} - rV = 0. \quad (35)$$

- Solução

Ao se buscar uma solução para $V(\cdot)$ na forma linear, onde $V(t, S_t, L_t; t_0, T) = a(t; t_0, T)S_t + b(t; t_0, T)L_t + c(t; t_0, T)$, ao se inserir $V(t, S_t, L_t; t_0, T)$ na equação (35), e ao se comparar os coeficientes de S_t e L_t , obtém-se a seguinte Equação Diferencial Ordinária:

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} = (r + \tilde{\alpha})a \\ \frac{\partial b}{\partial t} = -\tilde{\alpha}a + (r + \tilde{\mu})b \\ \frac{\partial c}{\partial t} = rc - \tilde{\mu}\tilde{\gamma}b \end{cases} \quad (36)$$

Dada a premissa de não arbitragem, na data de liquidação T , o retorno dos contratos futuros é a diferença entre o preço à vista e o valor original do contrato futuro em t_0 , ou seja, $V(T, S_T, L_T; t_0, T) = S_T - F(t_0, T, (S_{t_0}, L_{t_0}))$, onde $F(\cdot)$ é o preço do contrato futuro mencionado acima, observada a seguinte condição

$$\begin{cases} a(T; t_0, T) = 1 \\ b(T; t_0, T) = 0 \\ c(T; t_0, T) = -F(t_0, T, (S_{t_0}, L_{t_0})) \end{cases} \quad (37)$$

Ao resolver a equação (36) acima, obtém-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = e^{\left(r+\tilde{\alpha}\right)(t-T)} \\ b = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}-\tilde{\mu}} \left(e^{\left(r+\tilde{\mu}\right)(t-T)} - e^{\left(r+\tilde{\alpha}\right)(t-T)} \right) \\ c = \frac{\tilde{\mu}\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}-\tilde{\mu}} \left(e^{\left(r+\tilde{\alpha}\right)(t-T)} - e^{r(t-T)} \right) - \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}-\tilde{\mu}} \left(e^{\left(r+\tilde{\mu}\right)(t-T)} - e^{r(t-T)} \right) \\ - F(t_0, T, (S_{t_0}, L_{t_0})) e^{r(t-T)} \end{array} \right. . \quad (38)$$

Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} V(t_0, S_{t_0}, L_{t_0}; t_0, T) &= e^{\left(r+\tilde{\alpha}\right)(t_0-T)} S_{t_0} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}-\tilde{\mu}} \left(e^{\left(r+\tilde{\mu}\right)(t_0-T)} - e^{\left(r+\tilde{\alpha}\right)(t_0-T)} L_{t_0} \right) \\ &+ \frac{\tilde{\mu}\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}-\tilde{\mu}} \left(e^{\left(r+\tilde{\alpha}\right)(t_0-T)} - e^{r(t_0-T)} \right) - \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}-\tilde{\mu}} \left(e^{\left(r+\tilde{\mu}\right)(t_0-T)} - e^{r(t_0-T)} \right) \\ &- F(t_0, T, (S_{t_0}, L_{t_0})) e^{r(t_0-T)} . \end{aligned} \quad (39)$$

Quando o contrato futuro é negociado, nenhum dinheiro muda de mãos, o que implica que se valor inicial é zero, expresso pela seguinte equação:

$$V(t_0, S_{t_0}, L_{t_0}; t_0, T) = 0. \quad (40)$$

Portanto, o preço futuro será igual a:

$$\begin{aligned} F(t_0, T, (S_{t_0}, L_{t_0})) &= e^{\tilde{\alpha}(t_0-T)} S_{t_0} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}-\tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t_0-T)} - e^{\tilde{\alpha}(t_0-T)} \right) L_{t_0} \\ &+ \frac{\tilde{\mu}\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}-\tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t_0-T)} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}-\tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t_0-T)} - 1 \right) , \end{aligned} \quad (41)$$

que pode ser escrito na sua forma neutra ao risco como:

$$\begin{aligned}
F^{\bar{\theta}}(t, T, (S_t, L_t)) = & e^{\tilde{\alpha}(t-T)} S_t + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - e^{\tilde{\alpha}(t-T)} \right) L_t \\
& + \frac{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t-T)} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{42}$$

onde $\bar{\theta}$ é o parâmetro neutralizado a risco, sendo $\bar{\theta} = \left[\tilde{\alpha}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma} \right]$.

2.5.3.6 Método da medida equivalente de Martingales

Na presente subseção apresenta-se uma metodologia de apreçamento que utiliza o princípio da não arbitragem por um outro enfoque. Tal método difere do método de EDP, mas resulta na mesma equação final descrita em (42) acima.

A idéia principal por trás do método da medida equivalente de Martingale é a de ser possível se determinar uma medida de probabilidade sob a qual os ativos financeiros se comportam com um martingale⁵ quando descontados devidamente, valendo-se da noção de ausência de oportunidades de arbitragem, o que torna possível o cálculo dos preços livres de risco por meio da avaliação das expectativas implícitas. Tal método envolve a transformação das distribuições de probabilidade por meio do teorema de Girsanov.

Dado que os preços futuros podem ser considerados como uma expectativa dos preços à vista em um mundo redimensionado, neutro a risco, os investidores não exigem um prêmio extra por incorrem em risco extra. Por conseguinte, o retorno esperado de qualquer ativo será a taxa livre de risco. Para exemplificar as premissas expressas acima, suponha que uma ação não pague dividendos e siga um modelo lognormal, com uma taxa de retorno μ e volatilidade σ , tal que:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{43}$$

⁵ Suponha que no tempo t toda as informações sejam expressas por I_t . Uma variável aleatório X_t que satisfaz a igualdade $E^P = [X_{t+s} | I_t] = X_t$, para todo $s > 0$ será um martingale em relação a probabilidade P .

O preço do contrato futuro por sua vez no tempo t , e data de liquidação T pode ser definido por:

$$F(t, T, S_t) = S_t e^{r(T-t)}, \quad (44)$$

onde r é a taxa de juros livre de risco. Caso a relação apresentada em (44) acima entre $F(t, T, S_t)$ e S_t não seja atendida, haverá oportunidade de arbitragem. Note que $S_t e^{r(T-t)}$ não é a expectativa do preço à vista no mundo real descrito em (43) acima, mas sim a expectativa do preço à vista que segue um modelo lognormal cuja taxa de retorno seja r , ou seja,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (45)$$

Dessa forma, o preço à vista foi redimensionado para um mundo neutro a risco por meio da substituição da taxa de retorno μ pela taxa de juros livre de risco r .

Aceita a premissa de que os preços futuros podem ser considerados com uma expectativa dos preços à vista em mundo neutro a risco, ao se derivar a fórmula do modelo de 2 fatores apresentado em (19) acima, obtém-se que:

$$\begin{cases} dS_t = \tilde{\alpha}(L_t - S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t^1 \\ dL_t = \tilde{\mu}\left(\tilde{\gamma} - L_t\right)dt + \tau\sqrt{L_t}dW_t^2 \end{cases}, \quad (46)$$

onde $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\mu}$, e $\tilde{\gamma}$ são parâmetros neutros a risco.

No intuito de apreçar um contrato futuro deve-se então calcular as expectativas dos preços à vista sob EDE expressa em (46) acima. Ao efetuar tais cálculos os termos aleatórios se cancelam, e a equação passa a ser definida por:

$$\begin{cases} d\bar{L}_t = \tilde{\alpha}(\bar{L}_t - \bar{S}_t)dt \\ d\bar{L}_t = \tilde{\mu}(\tilde{\gamma} - \bar{L}_t)dt \end{cases}, \quad (47)$$

onde $\bar{S}_t$ e $\bar{L}_t$ são expectativas dos valores de S_t e L_t no tempo t , respectivamente. Ao resolver a equação ordinária estocástica por $\bar{L}_t$, com condições de contorno de que $t = t_0$, e $\bar{L}_t = L_{t_0}$, obtém-se que:

$$\bar{L}_t = \left(L_{t_0} - \tilde{\gamma} \right) e^{\tilde{\mu}(t_0-t)} + \tilde{\gamma}. \quad (48)$$

Ao inserir a equação (48) na primeira equação estocástica ordinária por $\bar{S}_t$, valendo-se da equações de contorno de que $t = t_0$ e $\bar{S}_t = S_{t_0}$, obtém-se que:

$$\begin{aligned} \bar{S}_t &= S_{t_0} e^{\tilde{\alpha}(t_0-t)} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(L_{t_0} - \tilde{\gamma} \right) \left(e^{\tilde{\mu}(t_0-t)} - e^{\tilde{\alpha}(t_0-t)} \right) - \tilde{\gamma} \left(1 - e^{\tilde{\alpha}(t_0-t)} \right) \\ &= e^{\tilde{\alpha}(t-T)} S_{t_0} + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t_0-t)} - e^{\tilde{\alpha}(t_0-t)} \right) L_{t_0} + \frac{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t_0-t)} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t_0-t)} - 1 \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Dado que $F^{\tilde{\theta}}(t, T, (S_t, L_t)) = \bar{S}_t$, e o tempo inicial seja $t = t_0$, $\bar{S}_{t_0} = S_{t_0}$ e $\bar{L}_{t_0} = L_{t_0}$ obtém-se que

$$\begin{aligned} F^{\tilde{\theta}}(t, T, (S_t, L_t)) &= e^{\tilde{\alpha}(t-T)} S_t + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - e^{\tilde{\alpha}(t-T)} \right) L_t \\ &+ \frac{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t-T)} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (50)$$

A qual é a mesma fórmula apresenta em (42) acima.

Se $F_t = F^{\tilde{\theta}}(t, T, (S_t, L_t))$, então não será difícil comprovar que sob a medida de probabilidade $\tilde{\theta}$, F_t é martingale. Este é o motivo pelo qual tal método é denominado de método da medida equivalente, MME.

2.5.3.7 Fórmulas de preços de futuros para os Modelos

A seguir apresentam-se as fórmulas dos modelos descritos na subseção 2.4.3 acima, após a aplicação das transformações de apreçamento de futuros apresentadas acima.

- Modelo de 1 fator sem sazonalidade:

$$F^{\tilde{\theta}}(t, T, S_t) = e^{\tilde{\alpha}(t-T)} \left(S_t - \tilde{L} \right) + \tilde{L}. \quad (51)$$

- Modelo de 1 fator com sazonalidade:

$$F^{\tilde{\theta}}(t, T, S_t) = e^{\tilde{\alpha}(t-T)} \left(S_t - \tilde{L} - f(t) \right) + \tilde{L} + f(T). \quad (52)$$

- Modelo de 2 fatores sem sazonalidade:

$$F^{\tilde{\theta}}(t, T, (S_t, L_t)) = e^{\tilde{\alpha}(t-T)} S_t + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - e^{\tilde{\alpha}(t-T)} \right) L_t + \frac{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t-T)} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - 1 \right). \quad (53)$$

- Modelo de 2 fator com sazonalidade:

$$\begin{aligned}
F^{\tilde{\theta}}(t, T, (S_t, L_t)) = & F(T) + e^{\tilde{\alpha}(t-T)}(S_t - f(t)) + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - e^{\tilde{\alpha}(t-T)} \right) L_t \\
& + \frac{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t-T)} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{54}$$

3 METODOLOGIA

O presente trabalho tem por objetivo replicar os modelos e metodologia apresentada em Xu (2004) valendo-se dos dados do mercado de carbono apresentados no Capítulo 3 acima. Dessa forma, apesar dos modelos desenvolvidos em Matlab terem sido adaptados para os dados observados, e parte da análise diferir daquele trabalho, o presente capítulo replica o conteúdo apresentado por Xu (2004).

3.1 Estimação por máxima-verossimilhança

Nesta seção será apresentado o modo como os parâmetros do modelo foram considerados e estimados por meio dos dados históricos.

Ao replicar Xu (2004), foi utilizada a técnica da máxima-verossimilhança, a qual otimiza os valores que maximizam a probabilidade dos dados ocorrerem. Tal procedimento permite estimar os parâmetros de modo consistente, e os parâmetros apresentam mínima variância não viesada à medida que aumento o tamanho da amostra.

Suponha que X seja uma variável aleatória cuja função de densidade da probabilidade seja definida por $f(\theta, X)$, onde $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_K\}$ e K seja um parâmetro desconhecido que precisa ser estimado. Dado uma série de observações $\{X_t\}_{t=1}^n$, a função logarítmica de máxima-verossimilhança é dada por:

$$\xi(\theta, \{X_t\}_{t=1}^n) = \sum_{t=1}^n \ln f(\theta, X_t). \quad (55)$$

O cálculo da máxima-verossimilhança do estimador θ é obtido pela maximização de $\xi(\cdot)$, portanto:

$$\tilde{\theta} = \arg \max_{\theta \in \mathcal{R}^k} \xi(\theta, \{X_t\}_{t=1}^n). \quad (56)$$

3.1.1 Função Característica e Função Densidade da Probabilidade para Processos de Difusão com Saltos

Para aplicar o método da máxima-verossimilhança, é útil ter uma forma analítica da função densidade da probabilidade para a variável estocástica. Dado que os modelos utilizados podem ser classificados como da classe de processo de difusão afim com saltos, *affine jump diffusion process*, este processo pode ser realizado por meio da aplicação da teoria de transformação geral de processos de difusão afins com saltos, valendo de Duffie *et al.* (2000), Anexo A.

Suponha um processo estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ seja um processo de difusão afim com saltos em $\mathbb{R}^n$. De acordo com a teoria de Duffie *et al.* (2000), ao se fixar $u = is$ e $R(X_t, t) = 0$, obtém-se uma fórmula fechada para a expressão característica da função X_T condicional a X_t ($T > t$), definida por:

$$\phi^\theta(s, t, T, X_t) = E^\theta[\exp(is \cdot X_T) | X_t] = \phi^\theta(is, t, T, X_t), \quad i = \sqrt{-1}. \quad (57)$$

A função característica é única, e contém a mesma informação da função densidade da probabilidade, a qual pode ser recuperada pela fórmula inversa da transformação de Fourier. Dessa forma, pode-se explorar o conhecimento de $\phi^\theta(\cdot)$ por meio da derivação da função probabilidade da densidade de X_T condicional a X_t , tal que:

$$f(\theta, X_T | X_t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-is \cdot X_T} \phi^\theta(s, t, T, X_t) ds. \quad (58)$$

Dessa forma, a função densidade da probabilidade pode ser utilizada para construir a máxima-verossimilhança dos modelos apresentados anteriormente.

3.2 Calibragem do modelo de 1 fator sem sazonalidade

Neste caso o modelo de preços à vista de crédito de carbono segue um modelo de reversão à média descrita em (8) acima. Ao fixarmos $r = 0$ e $r = 1/2$, respectivamente, temos dois modelos específicos:

Modelo 1f-A:

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma dW_t. \quad (59)$$

Modelo 1f-B:

$$dS_t = \alpha(L - S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t. \quad (60)$$

Como foi mencionado, os dois modelos acima não são o foco do trabalho, mas servirão para discutir alguns procedimentos importantes no processo de calibragem.

3.2.1 Função Densidade da Probabilidade

3.2.1.1 Modelo 1f-A

- Em tempo contínuo

Dado que o processo do preço S_t descrito em (59) acima pode enquadrar-se em um processo de difusão afim com saltos, ao aplicar a fórmula presente em (58) deduz-se a função densidade da probabilidade condicional de S_{t+1} dado S_t .

Ao inserir (59) em (A2), obtém-se que:

$$X_t = S_t, \quad k_0 = \alpha L, \quad K_1 = -\alpha, \quad H_0 = \sigma^2, \quad H_1 = 0, \quad l_0 = 0, \quad l_1 = 0, \quad v = 0.$$

Valendo-se de (A4) – (A6) e inserindo-a em (57), obtém-se a função característica dada por:

$$\begin{aligned} \phi(s, t, T, S_t) &= E^\theta \left[e^{isT} | S_t \right] \\ &= \Phi^\theta(is, t, T, S_t) \\ &= \exp(A(t, T, s) + B(t, T, s)S_t). \end{aligned} \quad (61)$$

Onde $A(t, T, s)$ e $B(t, T, s)$ satisfazem a seguinte equação:

$$\begin{cases} \partial_t A = -\alpha L B - \frac{1}{2} \sigma^2 B^2, \\ \partial_t B = \alpha B \end{cases} \quad (62)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} A(T, T, s) = 0 \\ B(T, T, s) = is \end{cases} \quad (63)$$

Ao se efetuar a diferença de (62) – (63), obtém-se que:

$$\begin{cases} A(t, T, s) = -isL(e^{\alpha(t-T)} - 1) + \frac{1}{4\alpha} \sigma^2 s^2 (e^{2\alpha(t-T)} - 1) \\ B(t, T, s) = is e^{\alpha(t-T)} \end{cases} \quad (64)$$

De (58) e (61) obtém-se que a função densidade da probabilidade de S_{t+1} dado S_t é

$$f(\theta, S_T | S_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-isS_T} \exp(A(t, T, s) + B(t, T, s)S_t) ds. \quad (65)$$

Ao se aplicar à fórmula apresentada no Anexo A obtém-se que:

$$f(\theta, S_T | S_t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{2\alpha(t-T)})}} \exp\left(-\frac{\alpha((1 - e^{\alpha(t-T)})L + e^{\alpha(t-T)}S_t - S_T)^2}{\sigma^2(1 - e^{2\alpha(t-T)})}\right) \quad (66)$$

- Em tempo discreto:

Na verdade, se o ponto T for próximo de t, então (62) pode ser aproximado por meio da seguinte expressão:

$$\begin{cases} \frac{A(t, T, s) - A(T, T, s)}{t - T} \approx -\alpha L B(T, T, s) - \frac{1}{2} \sigma^2 B(T, T, s)^2 \\ \frac{B(t, T, s) - B(T, T, s)}{t - T} \approx \alpha B(T, T, s) \end{cases} \quad (67)$$

Dadas as condições de contorno apresentadas em (63), os valores de $A(t, T, s)$ e $B(t, T, s)$ podem ser aproximados por:

$$\begin{cases} A(t, T, s) \approx \left(-is\alpha L + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \right)(t-T) \\ B(t, T, s) \approx is + i\alpha s(t-T) \end{cases} \quad (67)$$

Portanto, a função densidade da probabilidade de S_T dado S_t pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned} f(\theta, S_T | S_t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-isS_T} \exp(A(t, T, s) + B(t, T, s)S_t) ds \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(is((1 + \alpha(t-T))S_t - \alpha L(t-T) - S_T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-T)s^2 \right) ds \end{aligned} \quad (68)$$

Após aplicar a fórmula presente no Anexo [*], obtém-se que:

$$f(\theta, S_T | S_t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} \exp\left(-\frac{((1 + \alpha(t-T))S_t - \alpha L(t-T) - S_T)^2}{2\sigma^2(T-t)} \right). \quad (69)$$

- Comparação entre as funções de densidade das probabilidades

Ao se colocar (66) e (69) juntos, nota-se que o segundo aproxima-se do primeiro ao se substituir $e^{\alpha(t-T)}$ por $1+\alpha(t-T)$ e $e^{2\alpha(t-T)}$ por $1+2\alpha(t-T)$. Caso suponha-se que $\alpha(t-T)$ não seja um número grande, então tal substituição não irá causar grandes erros. A Ilustração 17 abaixo demonstra visualmente a diferença de duas funções densidades de probabilidade retiradas de Xu (2004).

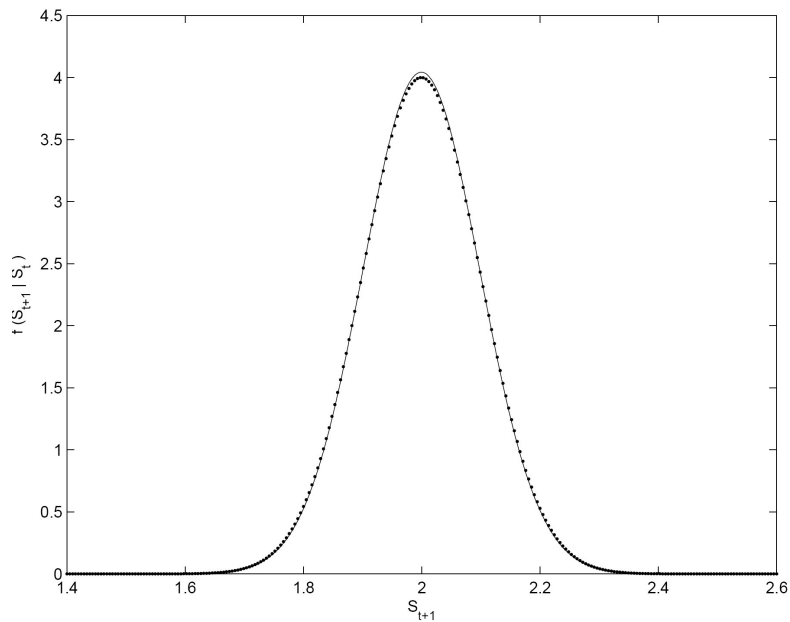


Ilustração 11 – Comparação da densidade do modelo 1f-A

Fonte: Xu (2004).

Nota: A linha sólida representa o gráfico da função de densidade da probabilidade em tempo contínuo, definida em (66) acima. A linha tracejada representa o gráfico da função de densidade da probabilidade em tempo discreto, definida em (69) acima. $S_t = 2$, $T-t = 1$, $\alpha = 0.02$, $L=2$, e $\sigma = 0.1$.

3.2.1.2 Modelo 1f-B

- Em tempo contínuo

De acordo com a definição presente em (A.1), o processo do preço S_t descrito em (60) acima pode ser classificado como um processo de difusão afim. Portanto, deduz-se a função densidades da probabilidade de S_{t+1} dado S_t valendo-se de (58).

Ao inserir (60) acima em (A.2) obtém-se que:

$$X_t = S_t, \quad k_0 = \alpha L, \quad K_1 = -\alpha, \quad H_0 = 0, \quad H_1 = \sigma^2, \quad l_0 = 0, \quad l_1 = 0, \quad v = 0.$$

Ao calcular a diferença de (A.4) – (A.6) e inserindo-a em (57), obtém-se a função característica dada por (61), onde $A(t)$ e $B(t)$ satisfazem a seguinte equação:

$$\begin{cases} \partial_t A = -\alpha L B \\ \partial_t B = \alpha B - \frac{1}{2} \sigma^2 B^2 \end{cases}, \quad (70)$$

dadas as mesma condições de contorno apresentadas em (63).

Ao resolver-se o sistema da equação de Ricatti, obtém-se que:

$$\begin{cases} A(t, T, s) = -\frac{2\alpha L}{\sigma^2} \ln \left[1 + is \frac{\sigma^2}{2\alpha} (e^{\alpha(t-T)} - 1) \right] \\ B(t, T, s) = \frac{ise^{\alpha(t-T)}}{1 + is \frac{\sigma^2}{2\alpha} (e^{\alpha(t-T)} - 1)} \end{cases}. \quad (71)$$

A equação condicional da função densidade da probabilidade definida por S_{t+1} dado S_t define-se por:

$$f(\theta, S_T | S_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-isS_T} \exp(A(t, T, s) + B(t, T, s)S_t) ds. \quad (72)$$

- Em tempo discreto

Do mesmo modo, se T for próximo a t , então (70) pode ser aproximado pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} \frac{A(t, T, s) - A(T, T, s)}{t - T} \approx -\alpha L B(T, T, s) s \\ \frac{B(t, T, s) - B(T, T, s)}{t - T} \approx \alpha B(T, T, s) - \frac{1}{2} \sigma^2 B(T, T, s)^2 \end{cases}. \quad (73)$$

Conjuntamente com a condição de contorno (63), os valores de $A(t, T, s)$ e $B(t, T, s)$ podem ser aproximados por:

$$\begin{cases} A(t, T, s) \approx (-is\alpha L)(t-T) \\ B(t, T, s) \approx is + \left(i\alpha s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2\right)(t-T) \end{cases} \quad (74)$$

Então, a condicional da função densidade da probabilidade de S_T dado S_t pode ser aproximado por:

$$\begin{aligned} f(\theta, S_T | S_t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-isS_T} \exp(A(t, T, s) + B(t, T, s)S_t) ds \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(is((1 + \alpha(t-T))S_t - \alpha L(t-T) - S_T) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t(t-T)s^2\right) ds \end{aligned} \quad (75)$$

Após aplicar os cálculos presentes no Anexo C, tem-se que:

$$f(\theta, S_T | S_t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{S_t(T-t)}} \exp\left(-\frac{((1 + \alpha(t-T))S_t - \alpha L(t-T) - S_T)^2}{2\sigma^2 S_t(T-t)}\right). \quad (76)$$

- Comparação entre as funções de densidade das probabilidades

Para aproximar a função (76) da função (72) aproxima-se A de B em (71). Para A, isto é feito pela substituição de $e^{\alpha(t-T)}$ por $1 + \alpha(t-T)$, e de $\ln\left(1 + is\frac{\sigma^2(t-T)}{2}\right)$ por $is\frac{\sigma^2(t-T)}{2}$. Para

B, isto é feito pela substituição de $e^{\alpha(t-T)}$ por $1 + \alpha(t-T)$, e de $\frac{1}{1 + \frac{is\sigma^2(t-T)}{2}}$ por $1 -$

$is\frac{\sigma^2(t-T)}{2}$, e finalmente omitindo o termo de maior grau $\alpha\sigma^2(t-T)^2$. Ao supor que α , σ ,

(T-t) são suficientemente pequenos, então a substituição não irá causar grandes erros. A Ilustração abaixo demonstra visualmente a diferença de duas funções densidades da probabilidade retiradas de Xu (2004).

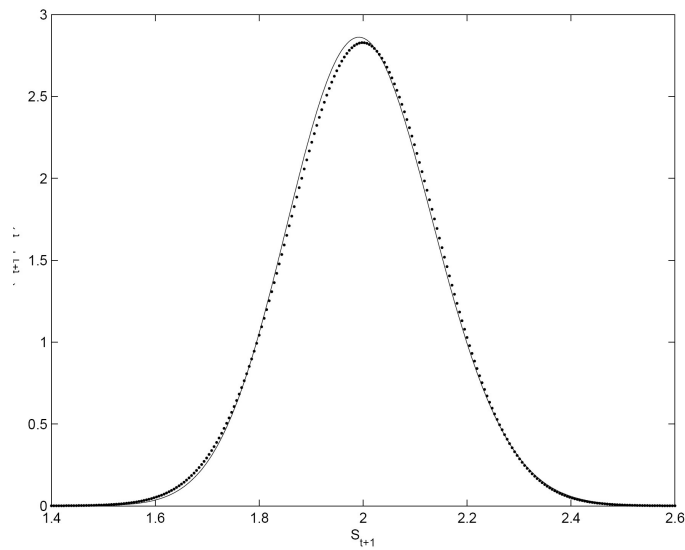


Ilustração 12 - Comparação da densidade do modelo 1f-B

Fonte: Xu (2004).

Nota: A linha sólida representa o gráfico da função de densidade da probabilidade em tempo contínuo, definida em (72) acima. A linha tracejada representa o gráfico da função de densidade da probabilidade em tempo discreto, definida em (76) acima. $S_t = 2$, $T-t = 1$, $\alpha = 0.02$, $L = 2$, e $\sigma = 0.1$.

Em mercados reais, não há transação todos os dias, ou seja, existem aproximadamente 252 dias úteis, e não 365 dias. Nos demais dias a negociação é suspensa. A questão, portanto, reside em como se tratar os dias em que não há negociação para fins de calibragem dos modelos. Na presente dissertação não foram realizadas correções na carteira e no processo de calibragem para considerar o problema dos dias não úteis.

3.2.2 Estimação da máxima-verossimilhança

Suponha que as observações do preço à vista possam ser definidas por $\{S_t\}_{t=1}^n$. Ao se aplicar os procedimentos do método da máxima-verossimilhança, deve-se primeiro:

$$\xi = \log \prod_{t=1}^{n-1} f(\theta, S_{t+1} | S_t). \quad (77)$$

Como foi demonstrado na seção anterior, a função densidade da probabilidade condicional em tempo contínuo pode ser aproximada de forma adequada pela correspondente função densidade da probabilidade em tempo discreto, se σ , α , e $(T-t)$ não forem muito grande. Este será exatamente o caso no mercado de crédito de carbono. Dessa forma, utiliza-se a aproximação definida pelas funções densidade da probabilidade apresentada em (69) e (76) acima. Então, ao se assumir que $\partial \xi / \partial \theta = 0$, os parâmetros podem ser estimados por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(L - S_t)(\alpha(L - S_t) + S_t - S_{t+1})}{\sigma^2 H_t^2} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial L} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha(L - S_t) + S_t - S_{t+1})}{\sigma^2 H_t^2} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{(\alpha(L - S_t) + S_t - S_{t+1})^2}{\sigma^3 H_t^2} \right) = 0 \end{cases}, \quad (78)$$

onde $H_t = 1$ para o modelo 1f-A, e $H_t = \sqrt{S_t}$ para o modelo 1f-B.

Ao se resolver à equação acima, obtém-se que:

$$\alpha = \frac{DE - CF}{C^2 - BE}, \quad (79)$$

$$L = -\frac{B}{C} - \frac{D}{\alpha C}, \quad (80)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\alpha(L - S_t) + S_t - S_{t+1})^2}{H_t^2}}, \quad (81)$$

onde:

$$B = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{S_t^2}{H_t^2}, \quad C = -\sum_{t=1}^{n-1} \frac{S_t}{H_t^2}, \quad D = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{S_t(S_{t+1} - S_t)}{H_t^2}, \quad E = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{H_t^2}, \quad F = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{S_t - S_{t+1}}{H_t^2}. \quad (82)$$

3.2.3 Dados contínuos versus dados discretos

Caso seja adotada a premissa de que os preços dos créditos de carbono seguem os modelos apresentados na presente seção 4.2, que são descritos por uma equação diferencial estocástica estar-se-á assumindo que os preços alteram-se de forma contínua. No entanto, no mercado real, os preços dos créditos de carbono são cotados em tempo discreto. Na confecção da presente dissertação utilizou-se de dados diários dos preços dos créditos de carbono. Dessa forma, fica a pergunta se é possível calibrar os modelos com apenas uma parte das saídas da equação diferencial estocástica.

Para responder a tal indagação, Xu (2004) realizou o seguinte teste empírico:

Primeiro, a fim de fixar o valor de S_0 simulou 200.000 valores, um por um, por meio da forma discreta da equação diferencial estocástica. Para o modelo 1f-A, a fórmula recursiva defini-se por:

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \alpha(L - S_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \epsilon_t .$$

Para o modelo 1f-B, a fórmula recursiva define-se por:

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \alpha(L - S_t)\Delta t + \sigma\sqrt{S_t}\sqrt{\Delta t} \epsilon_t .$$

Nas fórmulas acima, $\epsilon_t \sim N(0,1)$, e $\Delta t = 0.01$.

Selecionaram-se os valores para unidades inteiras de tempo, os quais totalizaram 2001 valores, os quais representa cerca de 1% dos valores originais simulados, formando um subconjunto.

Xu (2004) então utilizou tal subconjunto para estimar os parâmetros, e verificou se o mesmo foi capaz de recuperar os parâmetros da amostra. Após ter realizado tal experimento 50 vezes, o autor obteve 50 resultados estimados, cujas médias e desvios padrões foram calculados da seguinte forma:

Dado uma série de observações aleatórias da variável X , $\{X_t\}_{t=1}^n$, estimou-se a expectativa da média por $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$, e desvio padrão por

$$std(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X_t - E(X))^2}.$$

No trabalho original de Xu (2004), ele demonstrou que a estimação obtida por meio do conjunto parcial de dados foi capaz de recuperar os valores com exatidão. Encorajados por tal conclusão, os modelos foram calibrados com dados diários. Mas vale ressaltar que dado o tamanho de nossa amostra de dados, isso pode resultar em grandes desvios. Na presente dissertação não se tentou resolver o problema do tempo contínuo versus tempo discreto, pois a grande dúvida é na verdade se o modelo foi capaz de recuperar os parâmetros de modo adequado com uma pequena amostra. Tal dificuldade torna-se um dos pontos principais que não foi solucionado na presente pesquisa.

3.3 Calibragem do modelo de 1 fator com sazonalidade

Nesta classe de modelos o preço a vista dos créditos de carbono devem seguir um processo de reversão à média descrita pelas equações (9) a (12). Ao assumir que $r = 0$, $r = \frac{1}{2}$, e $r = 1$, tem-se respectivamente os modelos: 1f-sn-A, 1f-sn-B e 1f-sn-C.

Tais modelos incorporam um fator de sazonalidade na estimação dos dados. Para tanto o modelo primeiro retira o fator sazonal $f(t)$ das observações dos preços futuros, e com a informação desazonalizada $\{X_t\}_{t=1}^n$ estima-se os demais parâmetros por meio do método da máxima-verossimilhança.

3.3.1 Revelação do termo sazonal $f(t)$ dos preços dos futuros

O processo de calibragem consiste em casar as informações estimadas pelo modelo às observadas no mercado. Conforme foi demonstrado no Capítulo 3 acima, a sazonalidade é uma característica presente nas séries de preços de créditos de carbono, tanto no mercado a vista, como no mercado futuro. Nota-se ademais quando analisamos apenas os contratos futuros referentes a 2ª fase do EU ETS, que o termo sazonal é mais facilmente identificado, dados que tais séries sofreram menos impactos com a divulgação de informações em 15 de

maio de 2006 sobre o excesso de créditos no ano de 2005 em torno de 4% do total das emissões, não sendo possível se tal fato se deu em decorrência de abatimentos, ou sobre alocação por parte dos governos.

Dessa forma, faz sentido tentar revelar o termo sazonal $f(t)$ tanto do mercado a vista quando do mercado futuro.

Considere que o histórico de preços do mercado a vista como $\{S_t\}_{t=1}^n$, e os preços futuros como $\{F_{t,T_{ti}} | t = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m\}$, onde T_{ti} é o número dias contados de t em que deverá ocorrer a liquidação, m é o número de preços de contratos futuros observados em t . Estes serão os dados obtidos do mercado real.

Por outro lado, assumindo que os preços a vista sigam um processo descrito pelas equações (9) a (12), tem-se que a função teórica dos preços futuros $F^{\tilde{\theta}}(t, T, S)$ definida por (52), onde t é tempo da observação, T é a data da liquidação do contrato futuro, $\tilde{\theta}$ é um conjunto de parâmetros do ativo, ou seja, $\left[b, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N, \tilde{\alpha}, \tilde{L} \right]$.

No intuito de fazer com que o modelo case com os dados reais, torna-se necessário encontrar um parâmetro que faça com a distância do preço futuro teórico e do preço futuro observado no mercado se torne o menor possível. Caso a distância seja definida como um espaço Euclidiano, então o estimador de $\tilde{\theta}$ pode ser obtido pela minimização da soma dos quadrados da diferença entre $F^{\tilde{\theta}}(t, T, S)$ e $F_{t,T_{ti}}$, para $t = 1, 2, \dots, n$ e $i = 1, 2, \dots, m$. Em termos matemáticos tem-se que:

$$\tilde{\theta} = \arg \min_{\tilde{\theta}} \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m \left(F^{\tilde{\theta}}(t, T_{ti}, S_t) - F_{t,T_{ti}} \right)^2. \quad (83)$$

Após a estimação de $\tilde{\theta}$, $f(t)$ e $\{X_t\}_{t=1}^n$ são facilmente estimados por meio das equações (10) a (12).

3.3.2 Função Densidade da Probabilidade

Nesta subsecção apresenta-se a função densidade da probabilidade de X_{t+1} dado X_t em tempo discreto, derivado da equação diferencial estocástica. A fórmula da função densidade da probabilidade condicional que será empregada no processo de calibragem, define-se por:

$$f(\theta, X_{t+1}|X_t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)H_t} \exp\left(-\frac{(\alpha(L - X_t) + X_t - X_{t+1})^2}{2\sigma(t)^2 H_t^2}\right), \quad (84)$$

onde

$$H_t = \begin{cases} 1 & \text{para o modelo } 1f - sn - A, \\ \sqrt{X_t} & \text{para o modelo } 1f - sn - B, \\ X_t & \text{para o modelo } 1f - sn - C. \end{cases} \quad (85)$$

3.3.3 Estimações

Suponha que os valores de $\{X_t\}_{t=1}^n$ tenham sido obtidos. Ao se aplicar os procedimentos do método da máxima-verossimilhança, assume-se que $\xi = \log \Pi_{t=1}^{n-1} f(\theta, X_{t+1}|X_t)$. Em vista disso, os parâmetros de X_t podem ser estimados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(L - X_t)(\alpha(L - X_t) + X_t - X_{t+1})}{\sigma(t)^2 H_t^2} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial L} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha(L - X_t) + X_t - X_{t+1})}{\sigma(t)^2 H_t^2} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial c} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \left(-1 + \frac{(\alpha(L - X_t) + X_t - X_{t+1})^2}{\sigma(t)^2 H_t^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_j} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \left(-1 + \frac{(\alpha(L - X) + X_t - X_{t+1})^2}{\sigma(t)^2 H_t^2} \right) \cos\left(\frac{2\pi j t}{P}\right) = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \omega_j} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \left(-1 + \frac{(\alpha(L - X_t - X_{t+1}))^2}{\sigma(t)^2 H_t^2} \right) \sin\left(\frac{2\pi j t}{P}\right) = 0 \end{array} \right. \quad (86)$$

Em razão da existência de uma função dependente do tempo $\sigma(t)$ é difícil apresentar uma solução fechada para o sistema. O melhor que pode se fazer é encontrar uma solução numérica.⁶

3.4 Calibragem do modelo de 2 fatores sem sazonalidade

Nestes modelos, o preço a vista dos créditos de carbono seguem um processo de reversão à média descrita pela equação (14). Ao fixar $r = 0$, $r = 1/2$, e $r = 1$, respectivamente, obtém-se três modelos:

Modelo 2f-A

$$\begin{cases} dS_t = \alpha(L_t - S_t)dt + \sigma dW_t^1 \\ dL_t = \mu(\gamma - L_t)dt + \tau dW_t^2 \end{cases} \quad (87)$$

Modelo 2f-B

$$\begin{cases} dS_t = \alpha(L_t - S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t^1 \\ dL_t = \mu(\gamma - L_t)dt + \tau\sqrt{L_t}dW_t^2 \end{cases} \quad (88)$$

Modelo 2f-C

$$\begin{cases} dS_t = \alpha(L_t - S_t)dt + \sigma S_t dW_t^1 \\ dL_t = \mu(\gamma - L_t)dt + \tau L_t dW_t^2 \end{cases} \quad (89)$$

⁶ Para a equação $f(x) = 0$, onde $x \in \mathfrak{R}^n$ e $f(x) : x \rightarrow \mathfrak{R}^n$, se a solução existir e for única, então a solução pode ser obtida resolvendo um problema de otimização equivalente: $x = \arg \min_{x \in \mathfrak{R}^n} \|f(x)\|$, onde $\|\cdot\|$ é definida pelo tamanho de um vetor Euclidiano. Na prática, tal problema de otimização foi resolvido utilizando a função “fminsearch” do Matlab, a qual encontra o mínimo de uma função escalar de múltiplas variáveis.

3.4.1 Revelação do termo não observável L_t dos preços dos futuros

Na presente dissertação foi considerado que em qualquer tempo t é possível se observar os preços a vista e os preços futuros. Todavia, dado que para se implementar a máxima-verossimilhança dos modelos de 2 fatores acima torna-se necessário se obter os valores da média de longo-prazo dos preços a vista $\{L_t\}_{t=1}^n$, a qual é uma variável não observável, faz-se necessário revelar tal variável por meio dos preços futuros. Neste processo, encontra-se $\{L_t\}_{t=1}^n$ e os parâmetros neutros a risco de forma simultânea. O algoritmo utilizado para encontrar tais parâmetros se assemelha com o apresentado no modelo de 1 fator acima.

Considere que no tempo t se observe o preço a vista S_t , e os preços futuros $F_{t,T_{ii}} = (i = 1, 2, 3, \dots, m)$, onde T_{ii} é o número de dias em que ocorrerá a liquidação contados da data t , e m é o número de preços futuros observados no tempo t .

Por outro lado, também é observado os preços futuros teóricos $F^{\tilde{\theta}}(t, T_{ii}, (S_t, L_t)) = A_i + B_i L_t$ dado pela equação (53), onde t é o tempo da observação, T_{ii} é a data de liquidação, $\tilde{\theta}$ é o conjunto de parâmetros do ativo, ou seja, $\left[\tilde{\alpha}, \tilde{\sigma}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, \tilde{\tau} \right]$, $A_i =$

$$e^{\tilde{\alpha}(t-T_{ii})} S_t + \frac{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t-T_{ii})} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T_{ii})} - 1 \right), B_i = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T_{ii})} - e^{\tilde{\alpha}(t-T_{ii})} \right).$$

Suponha que $\tilde{\theta}$ é dado. Em um tempo fixo t , calcula-se os valores dos L_t 's que minimizam a soma ao quadrado das diferenças entre $\{F_{t,T_{ii}}\}_{i=1}^m$ e $\left\{ F^{\tilde{\theta}}(t, T_{ii}, (S_t, L_t)) \right\}_{i=1}^m$. Os valores de L_t 's são aqueles valores ocultos mais prováveis contidos nas informações observadas. Dado que $\tilde{\theta}$ é fixado de modo que exista apenas um conjunto de valores de L_t 's, então valores de L_t pode ser considerado uma função de $\tilde{\theta}$, tal que:

$$L_t(\tilde{\theta}) = \arg \min_{L_t} \sum_{i=1}^m \left(F^{\tilde{\theta}}(t, T_{ii}, (S_t, L_t)) - F_{t,T_{ii}} \right)^2. \quad (90)$$

Ao igualar o derivativo com relação L_t a zero, (90) pode ser simplificado na seguinte expressão:

$$L_t(\tilde{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^m (B_i F_{t,T_{ii}} - A_i B_i)}{\sum_{i=1}^m B_i^2}. \quad (91)$$

Após ter se obtido L_t como uma função de $\tilde{\theta}$, então torna-se $\tilde{\theta}$ uma variável livre de modo que a soma da diferença entre $\{F_{t,T_{ii}}\}_{i=1}^m$ e $\{F^{\tilde{\theta}}(t, T_{ii}, (S_t, L_t))\}_{i=1}^m$ em todo t seja minimizado. Dessa forma, obtém-se o estimador ótimo de $\tilde{\theta}$, definido por:

$$\tilde{\theta} = \arg \min_{\tilde{\theta}} \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m \left(F^{\tilde{\theta}} \left(t, T_{ii}, \left(S_t, L_t(\tilde{\theta}) \right) \right) - F_{t,T_{ii}} \right)^2. \quad (92)$$

Após ter se obtido o $\tilde{\theta}$, $\{L_t\}_{t=1}^n$ pode ser calculado por meio de (91)

3.4.2 Função Densidade da Probabilidade

Para os presentes modelos de 2 fatores sem sazonalidade, temos que dois destes apresentam processo de difusão afim com saltos, e portanto suas funções de densidade da probabilidade condicionais podem ser obtidas por meio da análise da transformação do processo de difusão com saltos, conforme o apresentado na subseção 4.1.1 acima. Apesar de Xu (2004) ter demonstrado o modo como se obter a função densidade da probabilidade em tempo contínuo, conforme apresentado no anexo D daquele trabalho, o autor decidiu utilizar a função densidade da probabilidade em tempo discreto, dado que a mesma precisa ser obtida por meio de método numérico, não havendo benefícios em se adotar a metodologia por tempo contínuo. Na presente dissertação, seguiremos a mesma posição adotada por Xu (2004).

A função densidade da probabilidade de $[S_{t+1}, L_{t+1}]$ condicional a $[S_t, L_t]$ em tempo discreto diretamente da forma discreta da equação diferencial estocástica satisfeita por S_t e L_t , conforme segue:

$$\begin{cases} S_{t+1} - S_t = \alpha(L_t - S_t) + \sigma H_{1t} (W_{t+1}^1 - W_t^1) \\ L_{t+1} - L_t = \mu(\gamma - L_t) + \tau H_{2t} (W_{t+1}^2 - W_t^2) \end{cases} \quad (93)$$

onde:

$$\begin{aligned} H_{1t} &= \begin{cases} 1 & \text{para o modelo } 2f - A \\ \sqrt{S_t} & \text{para o modelo } 2f - B \\ S_t & \text{para o modelo } 2f - C \end{cases} \\ H_{2t} &= \begin{cases} 1 & \text{para o modelo } 2f - A \\ \sqrt{L_t} & \text{para o modelo } 2f - B \\ L_t & \text{para o modelo } 2f - C \end{cases} \end{aligned} \quad (94)$$

Dado S_t e L_t , e considerando que $(W_{t+1}^1 - W_t^1) \sim N(0,1)$, obtém-se que $S_{t+1} \sim N(\alpha(L_t - S_t) + S_t, \sigma^2 H_{1t}^2)$. Do mesmo modo, obtém-se que $L_{t+1} \sim N(\mu(\gamma - L_t) + L_t, \tau^2 H_{2t}^2)$.

Dessa forma, $(W_{t+1}^1 - W_t^1)$ e $(W_{t+1}^2 - W_t^2)$ são independentes, e a função densidade da probabilidade condicional conjunta de $[S_{t+1}, L_{t+1}]$ dado $[S_t, L_t]$ pode ser aproximada pelo produto das funções densidade da probabilidade condicional de cada uma das variáveis, tal que:

$$\begin{aligned} f(\theta, [S_{t+1}, L_{t+1}] | [S_t, L_t]) &\approx f(\theta, S_{t+1} | S_t, L_t) \bullet f(\theta, L_{t+1} | [S_t, L_t]) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma H_{1t}} \exp\left(-\frac{(\alpha(L_t - S_t) + S_t - S_{t+1})^2}{2\sigma^2 H_{1t}^2}\right) \bullet \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau H_{2t}} \exp\left(-\frac{(\mu(\gamma - L_t) + L_t - L_{t+1})^2}{2\tau^2 H_{2t}^2}\right) \end{aligned} \quad (95)$$

3.4.3 Estimações

Suponha que saibamos os valores de $\{S_t\}_{t=1}^n$ e $\{L_t\}_{t=1}^n$. Por conseguinte, aplicando o procedimento geral de máxima-verossimilhança, obtém-se que:

$$\xi = \log \prod_{t=1}^{n-1} f(\theta, [S_{t+1}, L_{t+1}] | [S_t, L_t]), \quad (96)$$

então, ao fixar-se $\partial \xi / \partial \theta = 0$, obtém-se a estimação dos seguintes parâmetros:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(L_t - S_t)(\alpha(L_t - S_t) + S_t - S_{t+1})}{\sigma^2 H_{1t}^2} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{(\alpha(L_t - S_t) + S_t - S_{t+1})^2}{\sigma^3 H_{1t}^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\gamma - L_t)(\mu(\gamma - L_t) + L_t - L_{t+1})}{\tau^2 H_{2t}^2} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\mu(\mu(\gamma - L_t) + L_t - L_{t+1})}{\tau^2 H_{2t}^2} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{(\mu(\gamma - L_t) + L_t - L_{t+1})^2}{\tau^3 H_{2t}^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (97)$$

Ao resolver o sistema acima, obtém-se que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sum_{t=1}^{n-1} ((S_t - S_{t+1})(S_t - L_t) / H_{1t}^2)}{\sum_{t=1}^{n-1} ((S_t - L_t)^2 / H_{1t}^2)}, \\ \sigma &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\alpha(L_t - S_t) + S_t - S_{t+1})^2}{H_{1t}^2}}, \\ \mu &= \frac{DE - CF}{C^2 - BE}, \\ \gamma &= -\frac{B}{C} - \frac{D}{\mu C}, \\ \tau &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\mu(\gamma - L_t) + L_t - L_{t+1})^2}{H_{2t}^2}}, \end{aligned} \quad (98)$$

onde:

$$B = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{L_t^2}{H_{2t}^2}, \quad C = -\sum_{t=1}^{n-1} \frac{L_t}{H_{2t}^2}, \quad D = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{L_t(L_{t+1} - L_t)}{H_{2t}^2}, \quad E = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{H_{2t}^2}, \quad F = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{L_t - L_{t+1}}{H_{2t}^2}. \quad (99)$$

Na prática, as fórmulas são aplicáveis aos valores de L_t obtidos dos preços futuros, conforme descrito na seção anterior.

3.5 Calibragem do modelo de 2 fatores com sazonalidade

Nesta classe de modelos, os preços dos créditos de carbono seguem um processo de reversão à média, descrito por (16) a (18). Ao fixar $r = 0$, $r = 1/2$, e $r = 1$, respectivamente, obtém-se três modelos: modelo 2f-sn-A, modelo 2f-sn-B, e modelo 2f-sn-C.

O primeiro passo no processo de calibragem é revelar os fatores não observáveis, incluindo o termo sazonal $f(t)$ e a média de longo prazo L_t , por meio da minimização da distância entre os preços futuros teóricos e os preços futuros observados no mercado. Neste processo, obtém-se X_t , os parâmetros de $f(t)$, e alguns parâmetros neutros ao risco. Em seguida, após a definição dos valores de X_t e L_t 's, obtém-se os parâmetros desde dois processos estocásticos por meio do método da máxima-verossimilhança.

3.5.1 Revelação do termo não observável L_t , e do termo sazonal $f(t)$ dos preços dos contratos futuros

Para identificar os fatores não observáveis dos modelos, assumimos que:

$$A = f(T_{ii}) + e^{\tilde{\alpha}(t-T_{ii})} (S_t - f(t)) + \frac{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t-T_{ii})} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T_{ii})} - 1 \right), \quad (100)$$

$$B = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T_{ii})} - e^{\tilde{\alpha}(t-T_{ii})} \right). \quad (101)$$

Dessa forma, por meio de (54) obtém-se a função para os preços futuros $F^{\tilde{\theta}}(t, T_{ii}, (S_t, L_t)) = A_i + B_i L_t$. Note que a função dos preços futuros envolve não apenas

$\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma} \end{bmatrix}$ e L_t , mas também, $f(t)$. Portanto, para obter os mesmos precisa-se apenas casar os preços futuros.

Após igualar $\tilde{\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}, \tilde{\mu}, \tilde{\gamma}, b, \beta_1, \dots, \beta_N, \eta_1, \dots, \eta_N \end{bmatrix}$, e definir L_t em função de $\tilde{\theta}$:

$$L_t(\tilde{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^m (B_i F_{t, T_{ii}} - A_i B_i)}{\sum_{i=1}^m B_i^2}, \quad (102)$$

torna-se $\tilde{\theta}$ uma variável livre de modo que a soma da diferença entre $\{F_{t, T_{ii}}\}_{i=1}^m$ e $\left\{F^{\tilde{\theta}}(t, T_{ii}, (S_t, L_t))\right\}_{i=1}^m$ em todo t seja minimizado. Dessa forma, obtém-se o estimador ótimo de $\tilde{\theta}$, definido por:

$$\tilde{\theta} = \arg \min_{\theta \in \tilde{R}^{N_0}} \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m \left(F^{\tilde{\theta}} \left(t, T_{ii}, \left(S_t, L_t(\tilde{\theta}) \right) \right) - F_{t, T_{ii}} \right)^2, \quad (103)$$

onde N_0 é o tamanho do vetor de $\tilde{\theta}$. Após ter se obtido $\tilde{\theta}$, $\{L_t\}_{t=1}^n$, $\{f(t)\}_{t=1}^n$, então calcula-se $\{X_t\}_{t=1}^n$.

3.5.2 Função Densidade da Probabilidade

Por questões de brevidade, será apresentado apenas a função densidade da probabilidade condicional conjunta de $[X_{t+1}, L_{t+1}]$ dado $[X_t, L_t]$ deduzida de sua forma discreta, a qual é utilizada no processo de calibragem. O método de obtenção é o mesmo do apresentado anteriormente.

$$f(\theta, [X_{t+1}, L_{t+1}][X_t, L_t]) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)H_{1t}} \exp\left(-\frac{(\alpha(L_t - X_t) + X_t - X_{t+1})^2}{2\sigma(t)^2 H_{1t}^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau H_{2t}} \exp\left(-\frac{(\mu(\gamma - L_t) + L_t - L_{t+1})^2}{2\tau^2 H_{2t}^2}\right) \quad (104)$$

No qual H_{1t} e H_{2t} são definidos por:

$$H_{1t} = \begin{cases} 1 & \text{para o modelo } 2f - sn - A, \\ \sqrt{X_t} & \text{para o modelo } 2f - sn - B, \\ X_t & \text{para o modelo } 2f - sn - C. \end{cases} \quad (105)$$

$$H_{2t} = \begin{cases} 1 & \text{para o modelo } 2f - sn - A, \\ \sqrt{L_t} & \text{para o modelo } 2f - sn - B, \\ L_t & \text{para o modelo } 2f - sn - C. \end{cases}$$

3.5.3 Estimações

Ao aplicar os procedimentos gerais do método da máxima-verossimilhança, obtém-se estimativas para os parâmetros apresentados em (15) a (17). Para os parâmetros que envolvem L_t , ou seja, μ , γ , τ , descobriu-se que os resultados obtido no modelo de 2 fatores sem sazonalidade são úteis, dado que as estimativas são as mesmas que as apresentadas em (98)

Ao resolver o sistema acima, obtém-se que:

$$\mu = \frac{DE - CF}{C^2 - BE},$$

$$\gamma = -\frac{B}{C} - \frac{D}{\mu C}, \quad (106)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(\mu(\gamma - L_t) + L_t - L_{t+1})^2}{H_{2t}^2}},$$

onde B, C, D, E, e F são os mesmos que os apresentados em (99) acima:

$$B = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{L_t^2}{H_{2t}^2}, \quad C = -\sum_{t=1}^{n-1} \frac{L_t}{H_{2t}^2}, \quad D = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{L_t(L_{t+1} - L_t)}{H_{2t}^2}, \quad E = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{H_{2t}^2}, \quad F = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{L_t - L_{t+1}}{H_{2t}^2}. \quad (107)$$

Para os parâmetros que envolvem X_t , tais como $\alpha, c, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \omega_1, \dots, \omega_k$, os resultados obtidos no modelo de 1 fator com sazonalidade apresentados em (86) são úteis, e os estimadores podem ser obtidos por meio da resolução numérica do seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(L - X_t)(\alpha(L - X_t) + X_t - X_{t+1})}{\sigma(t)^2 H_t^2} = 0 \\ \sum_{t=1}^{n-1} \left(-1 + \frac{(\alpha(L - X_t) + X_t - X_{t+1})^2}{\sigma(t)^2 H_t^2} \right) = 0 \\ \sum_{t=1}^{n-1} \left(-1 + \frac{(\alpha(L - X) + X_t - X_{t+1})^2}{\sigma(t)^2 H_t^2} \right) \cos\left(\frac{2\pi j t}{P}\right) = 0 \\ \sum_{t=1}^{n-1} \left(-1 + \frac{(\alpha(L - X_t - X_{t+1})^2)}{\sigma(t)^2 H_t^2} \right) \sin\left(\frac{2\pi j t}{P}\right) = 0 \end{array} \right. , \quad (108)$$

onde os parâmetros $\sigma(t)$ e P são definidos em (16) a (18).

4 DADOS E ANÁLISE PRELIMINAR DA ESCOLHA DO MODELO

Os dados utilizados na presente dissertação referem-se às cotações diárias do mercado à vista e contratos futuros de European Allowance Units, cotadas na ECX - *European Climate Exchange*, com vencimento para Dezembro de 2006 a Dezembro de 2012, no período compreendidos entre 3 de maio de 2005 até 29 de junho de 2007. A base de dados está disponível na página virtual na internet da ECX no seguinte endereço: <http://www.ecxeurope.com/uploads/documents/ECXCFIFuturesContract-HistoricData-29June2007.xls>.

A seguir serão apresentados os procedimentos adotados para tratamento da base de dados a ser analisada e modelada, e os motivos que justificam sua adoção.

4.1 Descrição dos Dados

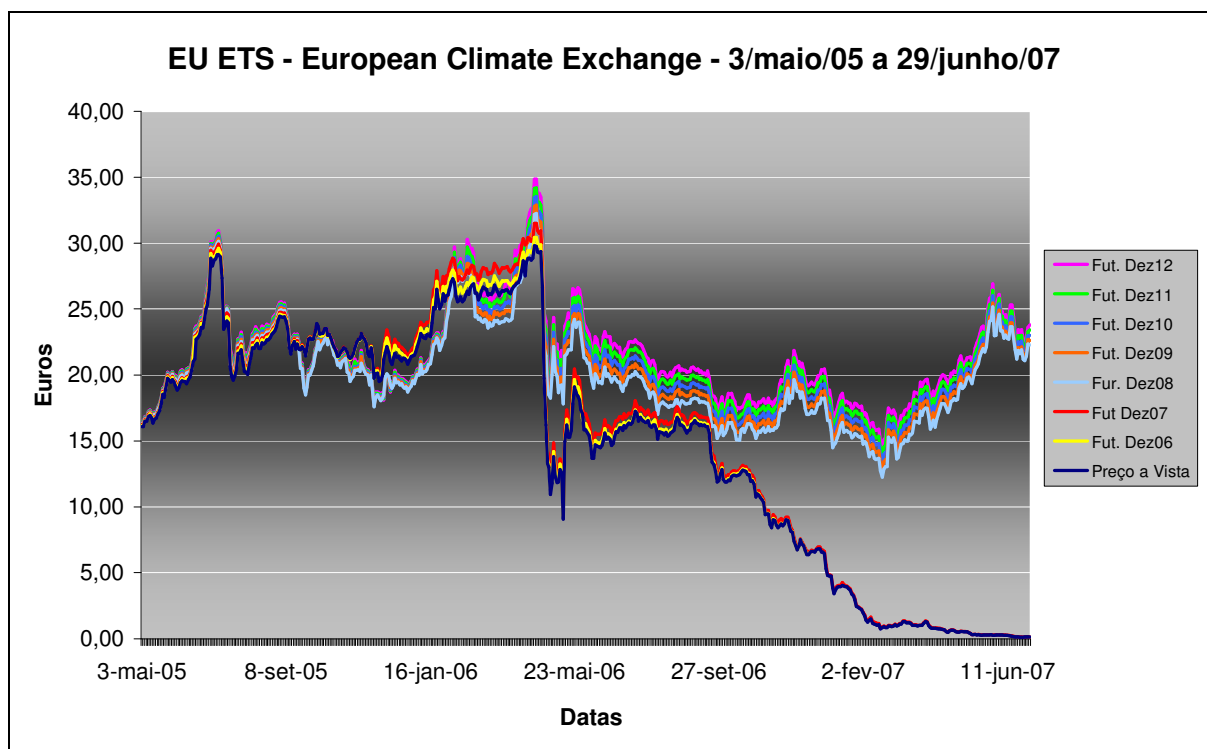


Ilustração 13 – Cotações da European Climate Exchange - ECX

Tabela 5 – Descrição estatística do log retorno dos ativos

	RETSPOT	RET06	RET07	RET08	RET09	RET10	RET11	RET12
Mean	-0.00884	-0.00214	-0.00872	0.00057	0.00059	0.00061	0.00064	0.00066
Median	0.00000	0.00000	0.00000	0.00231	0.00254	0.00256	0.00250	0.00243
Maximum	0.50195	0.48468	0.47446	0.18653	0.19319	0.19117	0.18664	0.18232
Minimum	-0.33647	-0.32333	-0.36291	-0.28825	-0.28108	-0.27427	-0.26778	-0.26159
Std. Dev.	0.06321	0.04698	0.06096	0.03263	0.03222	0.03183	0.03143	0.03193
Skewness	-0.46995	0.74505	-0.56159	-1.29745	-1.24194	-1.21841	-1.34284	-1.31219
Kurtosis	15.95145	40.25279	15.92092	18.25125	18.02142	17.51124	16.53533	15.35591
Jarque-Bera	3892.39400	24209.01000	3882.88800	5524.62600	5351.01300	4997.86700	4395.48400	3683.08000
Probability	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Sum	-4.89908	-0.89485	-4.82831	0.31297	0.32416	0.33865	0.35284	0.36675
Sum Sq. Dev.	2.20970	0.92042	2.05507	0.58886	0.57420	0.56012	0.54627	0.56361
Observations	554.00000	418.00000	554.00000	554.00000	554.00000	554.00000	554.00000	554.00000

Observação: Os dados de RET06 não são comparáveis com os demais.

Tabela 6 – Descrição estatística dos preços dos ativos

	SPOT	F06	F07	F08	F09	F10	F11	F12
Mean	14.9513	19.5563	15.4727	20.1154	20.5060	20.9025	21.3050	21.6989
Median	16.2500	20.4500	17.0000	19.7500	20.0500	20.3500	20.6500	20.9500
Maximum	29.8000	30.4500	31.5000	32.2500	32.9000	33.5500	34.2000	34.8500
Minimum	0.1000	6.4000	0.1100	12.2500	12.8000	13.3000	13.8000	14.3500
Std. Dev.	9.1383	5.7895	9.4722	3.7457	3.7025	3.6690	3.6468	3.6340
Skewness	-0.3734	-0.2780	-0.3516	0.6445	0.7223	0.7951	0.8719	0.9382
Kurtosis	1.8305	2.3296	1.8666	3.2390	3.4011	3.5604	3.7212	3.8884
Jarque-Bera	44.5261	13.2445	41.1426	39.7431	51.9841	65.7396	82.3524	99.6764
Probability	0.0000	0.0013	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Sum	8297.9940	8194.1000	8587.3500	11164.0500	11380.8400	11600.8700	11824.2500	12042.8600
Sum Sq. Dev.	46263.7300	14010.8500	49706.7200	7772.6460	7594.3730	7457.8480	7367.8470	7316.0930
Observations	555.0000	419.0000	555.0000	555.0000	555.0000	555.0000	555.0000	555.0000

Observação: Os dados de RET06 não são comparáveis com os demais.

Tabela 7 – Correlação entre os log retorno dos ativos

	RETSPOT	RET06	RET07	RET08	RET09	RET10	RET11	RET12
RETSPOT	1.0000	0.9886	0.9871	0.5505	0.5493	0.5453	0.5318	0.5114
RET06	0.9886	1.0000	0.9960	0.7534	0.7493	0.7478	0.7368	0.7127
RET07	0.9871	0.9960	1.0000	0.5731	0.5705	0.5668	0.5535	0.5324
RET08	0.5505	0.7534	0.5731	1.0000	0.9851	0.9794	0.9503	0.9267
RET09	0.5493	0.7493	0.5705	0.9851	1.0000	0.9969	0.9717	0.9503
RET10	0.5453	0.7478	0.5668	0.9794	0.9969	1.0000	0.9789	0.9614
RET11	0.5318	0.7368	0.5535	0.9503	0.9717	0.9789	1.0000	0.9894
RET12	0.5114	0.7127	0.5324	0.9267	0.9503	0.9614	0.9894	1.0000

Observação: As correlações relacionadas a RET6 referem-se apenas até 29 de dezembro de 2006, enquanto as demais até 29 de junho de 2007.

Por meio do exame do gráfico da Ilustração 11 acima, nota-se que as séries de preços de créditos de carbono, European Allowance Units, formaram dois grupos com diferentes patamares de preços e expectativas, refletindo uma clara divisão entre os ativos da 1ª fase do

EU ETS, entrega em 2005 a 2007, dos ativos da 2ª fase do EU ETS, entrega em 2008 a 2012, após abril/maio de 2005.

Para entender um pouco sobre tal divisão vale a pena explicar que os analistas de mercado (Ellerman, 2006) atribuíram a queda brusca em parte em razão da divulgação de informação sobre os montantes adquiridos pelos governos, e a situação vendida ou comprada das instituições de cada país. Em tal divulgação ficou claro que o mercado estava longo, com excesso de créditos, o que fez com que os preços se corrigissem. Mas dado que parte de tais informações já eram disponíveis há muito tempo nos NAPs – National Allocation Plans, planos nacionais de alocação de emissões, tal quebra deve ter ocorrido na opinião de Ellerman (2006) em razão de o mercado ter superestimado as projeções de emissão de CO₂, conjuntamente com a recente observada escassez de EUA em 2005, dada a alta do preço do gás natural, o que torna o uso de carvão, mais poluente, vantajoso economicamente apesar dos eventuais custos adicionais com EUA, ou que os agentes de mercado haviam subestimado a capacidade de abatimento realizado pelas empresas, dado que a experiência no mercado de N₂O dos Estados Unidos da América demonstra que abatimentos inesperados sempre ocorrem, motivo pelo qual o sistema de cap-and-trade, limitação de emissões e negociações de créditos, torna-se mais eficiente do ponto de vista econômico do que a simples imposição de taxas.

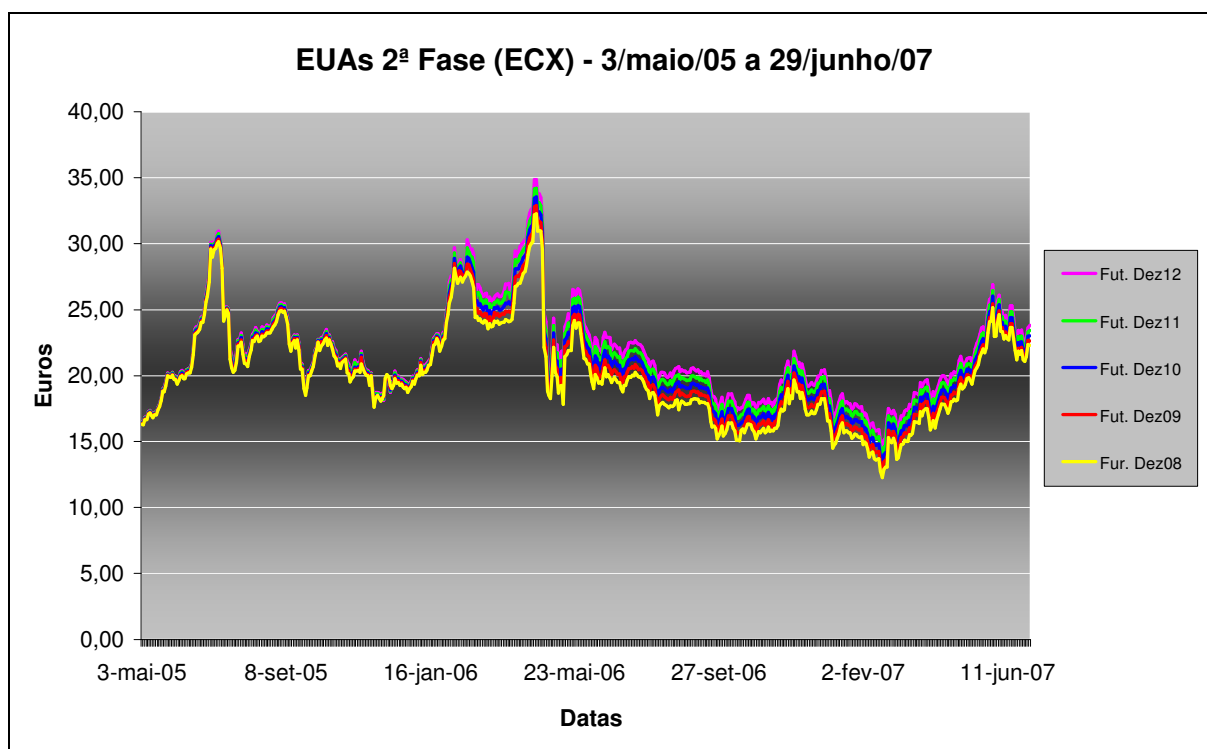


Ilustração 14 – ICE Futures 2ª Fase do EU ETS

Dada que a primeira fase do EU ETS já está se encerrando, ou seja, do momento da conclusão da presente dissertação restavam apenas seis meses para o início da segunda fase do EU ETS, que coincide com a primeira fase do Protocolo de Quioto, janeiro de 2008 a dezembro de 2012, espera-se que os preços em 2008 venham a refletir os fundamentos implícitos nos contratos futuros de 2008 e seguintes, e não os patamares dos preços dos ativos referentes à primeira fase, afetados pelo excesso de demanda, e pela impossibilidade de serem carregados para o segundo período do EU ETS, conforme explicado no Capítulo 2 acima.

Dessa forma, ao analisar a Ilustração 12 acima se nota que as séries apresentam reversão a média, bem como um pouco de sazonalidade relacionada aos invernos europeus, o que já era esperado dado que boa parte dos preços dos créditos de carbono pode ser explicada pelo tempo e combustíveis. Vide gráfico elaborado pela PointCarbon (2007) abaixo:

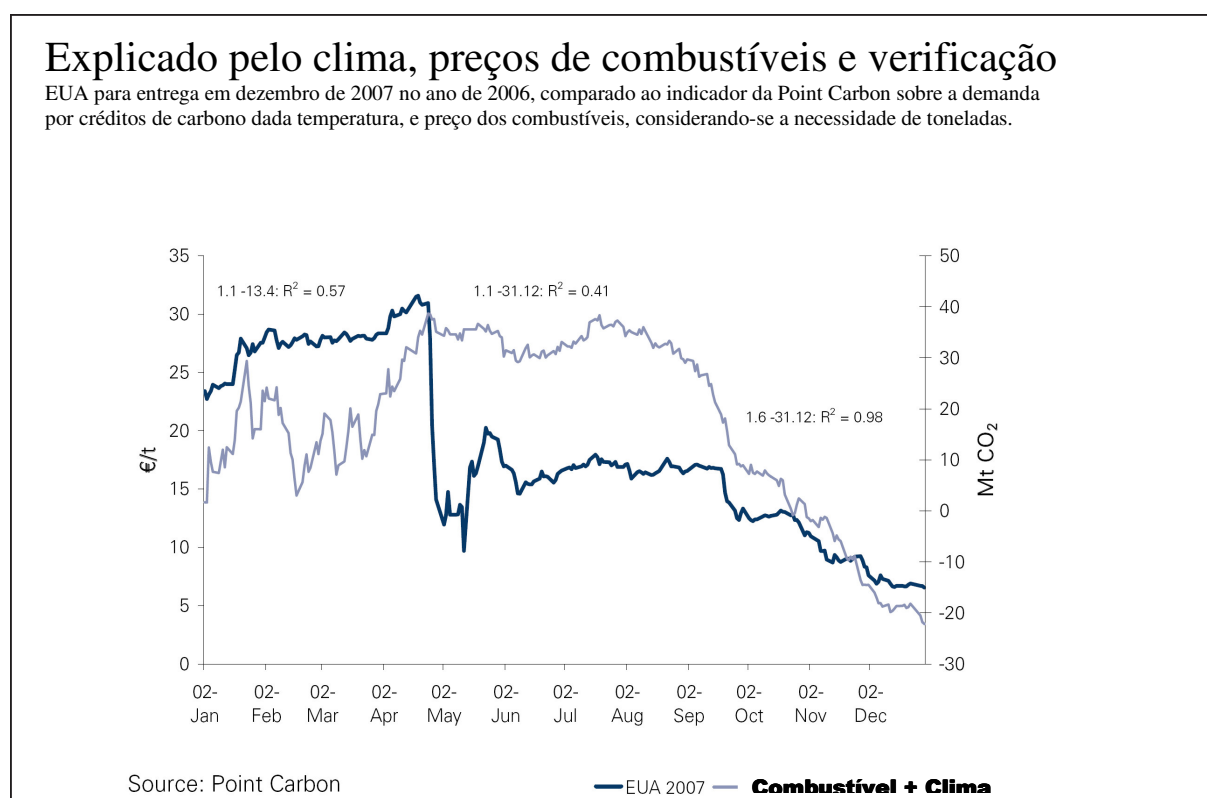


Ilustração 15 – Correlação das European Allowance Units com os preços de combustíveis e Clima

Fonte: Adaptado de Point Carbon (2004).

Na presente dissertação não se pretende empregar modelos que relacionem outros ativos aos créditos de carbono, mas certamente os mesmos podem ser adaptados no futuro para refletir tal condição.

Feitas estas considerações, identificamos que apesar de não existirem modelos específicos para apreçar, modelar, créditos de carbono, faz sentido acreditar que modelos de commodities do tipo insumo operacional, tal como os modelos para óleo e gás talvez demonstrem se adequados para modelar European Allowance Units, dada a presença de reversão à média e sazonalidade também naqueles ativos, além do fato de que como visto acima os ativos possuem correlação, motivo pelo qual o trabalho de Xu (2004) tornou-se a base teórica fundamental para a execução da presente pesquisa.

4.2 Vencimento dos Contratos Futuros

O ECX CFI, *European Climate Exchange Carbon Financial Instrument*, que é um futuro de EUA, foi lançado em 22 de abril de 2005, e iniciou sua negociação em 24 abril de 2005.

Os contratos vencem na última segunda-feira do mês de vencimento/entrega. Se os vencimentos ocorrerem em uma semana onde haja mais de um feriado no Reino Unido, o vencimento se dará na penúltima segunda feira do mês.

Abaixo se apresenta um quadro resumo com todas as datas de vencimento do ECX CFI futures contracts, contratos futuros de EUA negociados na ECX, a qual concentra mais de dois terço do mercado de negociação de EUA. Note que a ECX oferece contratos mensais para a primeira fase do EU ETS (2005 a 2007) até Março de 2008. E contratos anuais para a segunda fase do EU ETS (2008-2012), com vencimento em Dezembro.

Tabela 8 – Datas de Vencimento de Contrato Futuros na ECX

Entrega	2006	2007	2008
Janeiro	n/a	29th	28th
Fevereiro	n/a	26th	25th
Março	27th	26th	31st
Abril	n/a	30th	n/a
Maio	n/a	21st	n/a
Junho	26th	25th	n/a
Julho	n/a	30th	n/a
Agosto	n/a	20th	n/a
Setembro	25th	24th	n/a
Outubro	30th	29th	n/a
Novembro	27th	26th	n/a
Dezembro	18th	17th	15th

Fonte: PointCarbon (2007).

4.3 Especificações dos Contratos Futuros (ECX CFI Futures)

Contratos são Listados:	Mensalmente para a Fase I do EU ETS até Março de 2008. Anualmente, com vencimento em Dezembro de 2008 a 2012, para a Fase II do EU ETS.
Liquidação:	Entrega Física mediante a transferência de EUA.
Período de Entrega:	dias após o dia da negociação (LTD +3)
Tamanho do Contrato (lote):	1000 toneladas CO2 (1000 European Allowance Units).
Garantia do Contrato:	LCH Clearnet garante a performance de todos os ICE Futures registrados em nome de seus membros.
Horário de Negociação:	8h00 até 18h00, horário da Europa Central (CET – Central European Time).
Sistema de Negociação:	Negociações ocorrem na plataforma eletrônica da ICE Futures, conhecida como ICE Platform, a qual é acessível via WebICE

	ou por meio de softwares disponíveis por terceiros.
Preço de Fechamento:	Média dos negócios durante o período de liquidação (17h00 até 17h15, horário da Europa Central (CET – Central European Time)).
Taxa de Negociação para Membros:	EUR 2.00 por lote (EUR 0.002 por tonelada).
Taxa de Negociação para Intermediários	EUR 2.50 por lote (EUR 0.0025 por tonelada).
Taxa de Liquidação da LCH.Clearnet:	EUR 2.00 por lote (EUR 0.002 por tonelada).
Taxa de Entrega da LCH.Clearnet:	EUR 2.00 por lote (EUR 0.002 por tonelada).
Taxa de Associação Anual:	EUR 2,500 por ano.
Margem Inicial:	No momento da transação: EUR 1800 por lote (EUR 1.80 por tonelada) Spread entre Meses: EUR 1300 por lote (EUR 1.30 por tonelada)
Variação de Margem:	LCH.Clearnet calcula o lucro e o prejuízo realizado em cada período no final de cada dia.

4.4 Outros ativos negociados na ECX

Além dos contratos futuros a ECX oferece: (i) Exchange for Physical (EFP) que permitem a liquidação de operações OTC, over-the-counter, entre as partes por meio do uso de contratos futuros, eliminando o risco de liquidação deste tipo de operações. Vale destacar que o volume de tais negócios chega a superar o volume de negócios realizados em bolsa; (ii) desde 13 de outubro de 2006, opções sobre EUA; (iii) a partir de setembro de 2007, será iniciada a negociação de futuros sobre CER, certificados de emissões reduzidas, que são créditos de carbono gerados por projetos que visem a reduzir a emissão de gases causadores do efeito estufa sob os Mecanismos de Desenvolvimento Limpo do Protocolo de Quioto. A partir destes instrumentos será possível se mitigar o risco de variação de preços de créditos de carbono de projeto realizados no Brasil, por exemplo, dado que se tornou prática de mercado inclusive referenciar os preços dos CER a cotação das European Allowance Units.

4.5 Escolha e Tratamento dos Dados

Dado que muitas vezes um ativo não é negociado no mercado a vista, Pindyck (2004) sugere que tal problema pode ser contornado por meio da aplicação da seguinte fórmula:

$$P_t = F1_t \left(\frac{F1_t}{F2_t} \right)^{\frac{n_{ot}}{n_t}},$$

onde, P_t é o preço a vista no dia t ; $F1_t$ e $F2_t$ são os preços dos contratos futuros mais próximos de t , ou seja, o primeiro e o segundo mais próximos, respectivamente; n_{ot} e n_t são o número de dias até t até o vencimento do primeiro e do segundo contrato futuro respectivamente.

A fim de comprovar que tal fórmula reflete os preços observados da série de preços de carbono, segue abaixo um exemplo do cálculo dos preços à vista de EUA, com base nos contrato futuros para entrega em dezembro de 2006 e dezembro de 2007.

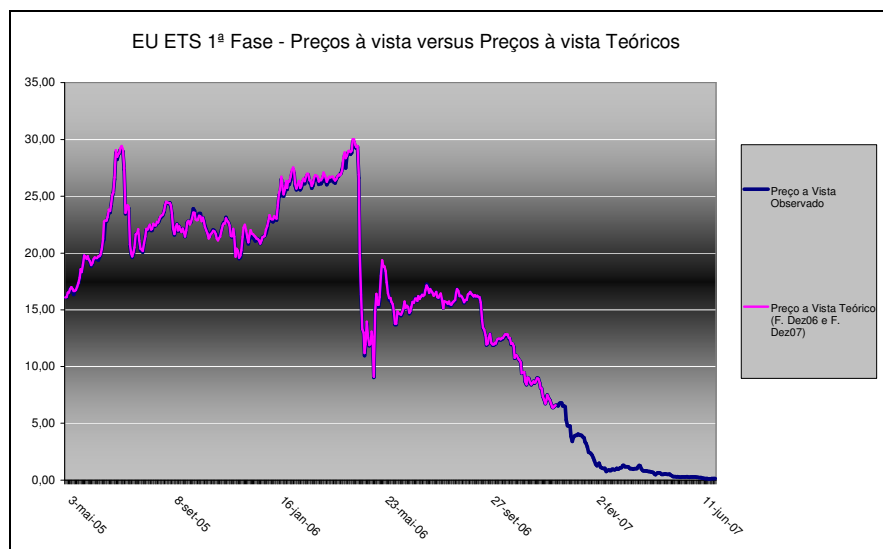


Ilustração 16 – Preço à vista versus Preço à vista teórico

Dessa forma, do mesmo modo que os contratos futuros para entrega em dezembro de 2006 e entrega em dezembro de 2007, são um bom parâmetro para os preços a vista do período de 3 de maio de 2005 a 31 de dezembro de 2006, a presente dissertação, assim como Pindyck (2004) assume que tal regra é válida para os demais contratos, ou seja, em condições normais os contratos para entrega em dezembro de 2007 e dezembro de 2008 seriam uma proxy para os preços a vista de 2006 a 2007, e assim sucessivamente.

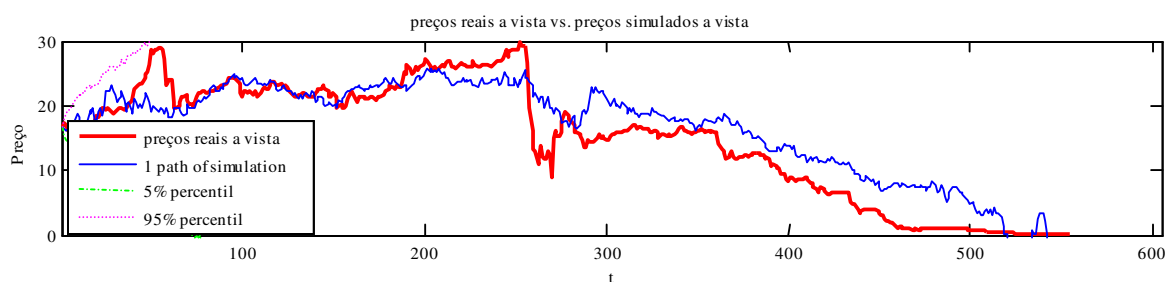


Ilustração 17 – Análise Preliminar

A importância da adoção de tal metodologia se deve ao fato de que as análises preliminares dos dados demonstram que qualquer modelo para preços à vista não seria capaz de refletir os preços implícitos no mercado futuro para os preços das EUA da segunda fase do EU ETS, sem que fossem extraídos os preços à vista implícitos nos contratos futuros para entrega em dezembro de 2008 até dezembro de 2009, e ignorar tal informação iria contra o bom senso.

Do mesmo modo, caso ainda houve o interesse em se modelar os preços das European Allowance Units da primeira fase do EU ETS, conforme apresentado na Ilustração 15 acima, torna-se necessário que a base de dados não contemple os contratos futuros da segunda fase do EU ETS, fazendo com que a média teórica tenda a zero, informação refletida no contrato futuro para entrega em dezembro de 2007. Para maiores informações de como se modelar estocasticamente cenários e probabilidades do European Allowance chegar a zero na primeira fase do EU ETS favor consultar See (20005).

Em vista disso, na presente pesquisa assume-se que as European Allowance Units da primeira fase e da segunda fase são ativos diferentes. Apenas para citar algumas diferenças vale destacar que (i) as EUA não poderão ser carregadas da primeira para a segunda fase; (ii) há um excesso de oferta de EUA da primeira fase que faz com que seu valor tenda a zero neste período; (iii) a multa válida para o caso de emissão de CO₂ acima do limite imposto sobe de € 40 (quarenta euros) a tonelada de CO₂ em excesso na primeira fase, para € 100 (cem euros) a tonelada em excesso na segunda.

Por conseguinte, a fim de gerar as séries utilizadas para o mercado a vista, replicou-se a formula indicada por Pindyck (2004) no intuito de se criar um preço teórico para o mercado a vista das EUA da 2ª fase até 29 de junho de 2007. A adoção de tal procedimento pode gerar distorções, mas esta foi a melhor maneira encontrada para abordar o problema, dado que inclusive da data de conclusão da presente dissertação, havia apenas mais seis meses de vida para o mercado da 1ª fase do ETS.

A Ilustração 16 abaixo indica a comparação entre os preços a vista reais observados no período analisado, 3 de maio de 2005 até 29 de junho de 2007, e o preços teóricos a vista extraídos dos spread dos contratos futuros da segunda fase do EU ETS. Tal procedimento poderá ser alterado assim que houver dados disponíveis para a segunda fase do EU ETS. Nota-se que o descolamento entre os preços a vista teórico e os preços a vista reais deu-se de fato a partir de novembro de 2006 e espera-se que sejam revertidos apenas em 2008, com o advento da segunda fase do EU ETS.



Ilustração 18 – Preço Teórico à Vista das European Allowance Units da 2ª Fase do EU ETS

4.6 Montagem das Carteiras

No intuito de aplicar a metodologia de Xu (2004) foi necessária a elaboração de uma carteira diária com a cotação dos preços a vista das European Allowance Units em cada dia (t), 550 dias no total no período compreendidos entre 3 de maio de 2005 até 29 de junho de 2007, e a cotação de cada contrato futuro observado em t , com entrega a partir de dezembro de 2008 até dezembro de 2012. O programa em Matlab elaborado por Xu (2004) e adaptada a presente pesquisa, conforme será explicado no Capítulo 4 abaixo, utiliza além das cotações do mercado à vista, as cotações dos preços futuros para revelar os parâmetros não observados.

Vale destacar que uma distinção importante com relação à base de dados utilizados por Xu (2004) e na presente dissertação se refere além dos ativos, e do número de cotações diárias disponíveis (2007 observações diárias de gás natural frente a 550 observações diárias de EUA), o fato de que Xu trabalhou com uma base de contratos futuros vencendo dentro do mesmo ano, já na presente pesquisa foram utilizados contratos com entrega superior a um ano, o que fez com que o modelo olhe realmente para as curvas do futuro de longo prazo.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

No presente capítulo serão apresentados apenas os resultados dos modelos que foram capazes de refletir a curva do futuro observada no mercado. Os modelos, com reversão a média, de 1 fator sem sazonalidade, 1 fator com sazonalidade, e 2 fatores sem sazonalidade, por falharem em atender a tal critério, foram considerados inadequados para modelar créditos de carbono. Ademais, os modelos de 1 fator apresentaram parâmetros negativos para α e L , o que também indica que os modelos não são adequados para refletir o comportamento das séries de preços estudadas.

Os modelos de 2 fatores com sazonalidade, e reversão à média, atenderam com sucesso o critério de refletir a curva do futuro observado no mercado. Todavia, como serão apresentados, os modelos foram incapazes de refletir adequadamente as caldas da distribuição, o que indica que não se pode assumir normalidade para retornos de créditos de carbono, e que parte das premissas assumidas nos modelos não refletem a distribuição real observada nas cotações dos preços das European Allowance Units - European Allowance Units da segunda fase do EU ETS.

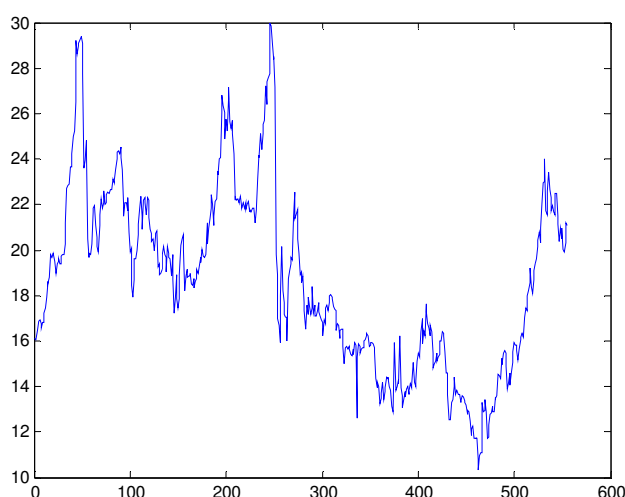


Ilustração 19 – Preços à vista

Como se pode observar por meio da Ilustração 19 acima, os preços teóricos a vista das European Allowance Units da segunda fase do EU ETS, que foram considerados como os

preços a vista reais para fins do modelo, apresentam alta volatilidade, saltos, aparente sazonalidade e reversão à média. Características que aproximam esta nova commodities de outras como gás natural e eletricidade.

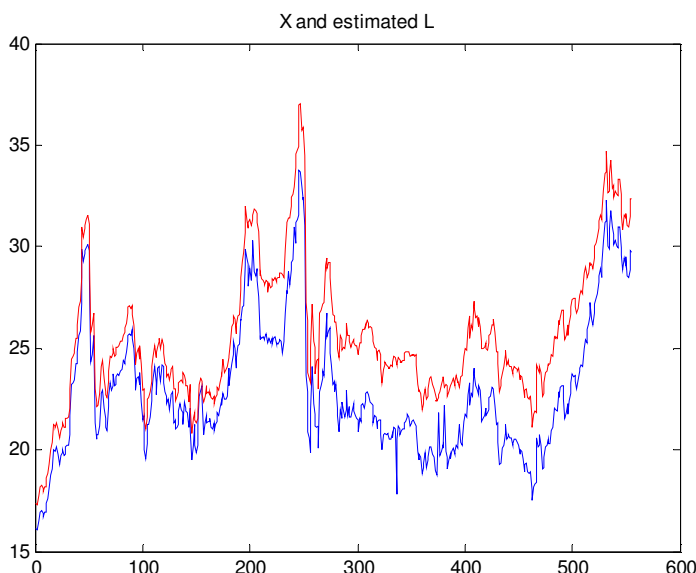


Ilustração 20 – Estimação de X e L

A Ilustração 20 acima, entretanto, indica uma peculiaridade das séries de preços das European Allowance Units, o fato de que os preços futuros de longo prazo parecem seguir o formato da volatilidade do mercado à vista, fazendo com o que a média de longo prazo apresente maior volatilidade do que em outros ativos. Parte desta característica talvez se deva em razão do mercado de crédito de carbono ainda ser novo, e ainda ser incerto a existência de uma média histórica de longo prazo, ou simplesmente do fato do ativo não estar ainda em negociação no mercado à vista, dado que as European Allowance Units da segunda fase só serão negociadas no mercado a vista em 2008. Todavia, o mesmo fenômeno foi observado nos preços a vista e futuro das European Allowance Units da primeira fase.

5.1 Resultados dos Modelos de 2 fatores com sazonalidade

Dado que os três modelos de 2 fatores com sazonalidade compartilham a mesma função para preços futuros definida em (54), a estimação dos valores do parâmetro $f(t)$ são idênticos para os três modelos. Os resultados estão consolidados na Tabela 9 abaixo.

Tabela 9 – Estimação de $f(t)$ para modelos de 2 fatores com sazonalidade

	Dos Dados Artificiais			Dos dados Reais
	Dado	Média	Desvio Padrão	Estimação
b	-0.015	-0.015	0.000024	-0.015578
β_1	0.025	0.025	0.000001	0.025812
β_2	0.0002	0.0002	0.000021	0.000220
η_1	0.026	0.026	0.000014	0.026135
η_2	-0.001	-0.001	0.000011	-0.001282

Por meio do exame da tabela acima se nota que os modelos recuperam o valor dado de modo adequado, o que implica que o modelo está funcionando adequadamente, e que as estimativas geradas são confiáveis. O motivo pelo qual os valores gerados dos parâmetros de $f(t)$ refletirem com alta precisão os valores dados é o de que estes são estimados diretamente dos preços futuros.

Os demais parâmetros apresentam estimações próprias para cada modelo, os quais são apresentados abaixo. Na Tabela 10 a 13 abaixo, apresentam-se os resultados dos modelos 2f-sn-A, 2f-sn-B, e 2f-sn-C, respectivamente. Maiores informações sobre as estimações são apresentadas nas Ilustrações 21 a 23 abaixo, nas quais demonstra-se a adequação das estimativas, o formato das funções objetivas em relação ao valor ótimo de $\tilde{\theta}$, e o comportamento do fator de variação sazonal $f(t)$ e $\sigma(t)$, bem como uma simulação no intuito de permitir verificação visual da eficiência ou não do modelo.

5.1.1 Modelo 2f-sn-A

A Tabela 17 abaixo apresenta os parâmetros do modelo 2f-sn-A para dados reais e dados artificiais.

Tabela 10 – Resultados da estimação para o modelo 2f-sn-A

	Dos Dados Artificiais			Dos dados Reais
	Dado	Média	Desvio Padrão	Estimação

α	0.012	0.012	0.012	0.0013
c	-0.280	-0.280	0.023	-0.2819
λ_1	0.120	0.120	0.042	0.1294
λ_2	0.140	0.140	0.0258	0.1436
ω_1	0.120	0.120	0.0321	0.1291
ω_2	0.025	0.025	0.042	0.0259
μ	0.014	0.014	0.0035	0.014
τ	0.685	0.685	0.068	0.685
γ	26.812	26.812	0.1735	26.812

Por meio do exame da tabela acima se nota que os modelos recuperam o valor dado de modo adequado, o que implica que o modelo está funcionando adequadamente, e que as estimativas geradas são confiáveis.

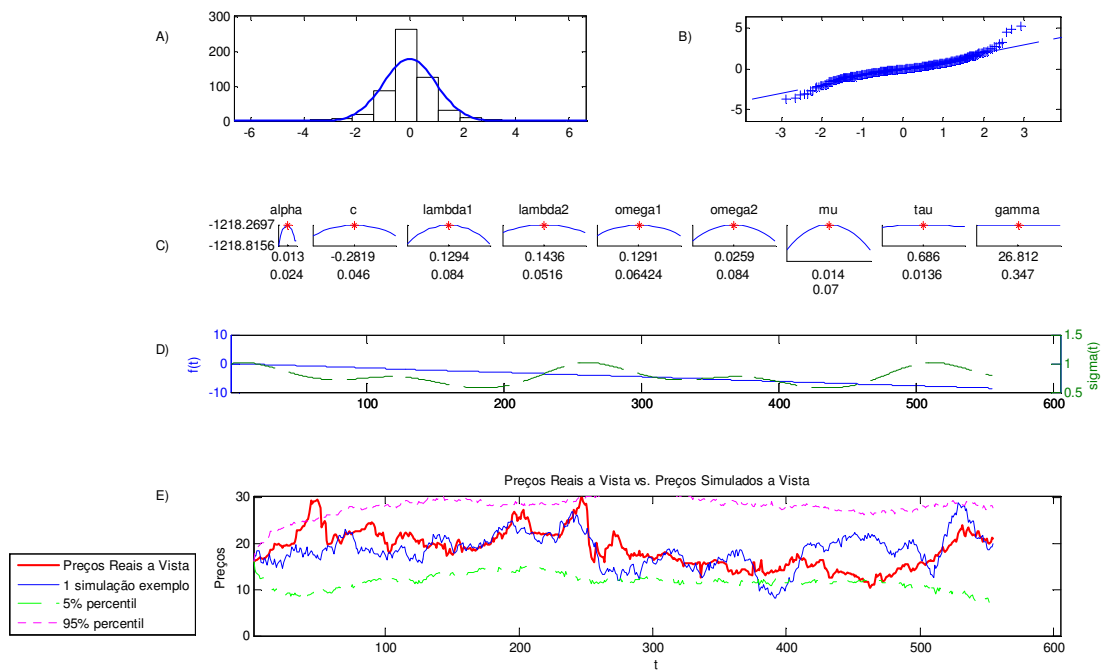


Ilustração 21 – Modelo 2f-sn-A

Nota: A) é o histograma de $Y_t = \frac{\alpha(L_t - X_t) + X_t - X_{t+1}}{\sigma(t)}$, conjuntamente com uma normal

padrão da distribuição da função densidade da probabilidade $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$; B) é o

gráfico do quantil-quantil (*quantile-quantile plot*) de Y_t em relação ao desvio padrão de uma norma padrão; C) são os cortes dos interceptos da função de máxima-verossimilhança em relação aos parâmetros estimados por meio do método da máxima-verossimilhança. Nos gráficos, os números na primeira linha são estimativas dos parâmetros, e os números na segunda linha são os intervalos de confiança, 2 desvios padrões, conforme os apresentados na terceira coluna da Tabela 10 acima. Dado que as estimativas estão todas no topo dos cortes, isso significa que a maximização da verossimilhança teve sucesso; D) é o gráfico de $f(t)$ (curva sólida) e $\sigma(t)$ (curva tracejada); E) é uma simulação dos preços a vista versus o histórico do preços a vista reais.

5.1.2 Modelo 2f-sn-B

A Tabela 11 abaixo apresenta os parâmetros do modelo 2f-sn-B para dados reais e dados artificiais.

Tabela 11 – Resultados da estimação para o modelo 2f-sn-B

	Dos Dados Artificiais			Dos dados Reais
	Dado	Média	Desvio Padrão	Estimação
α	0.016	0.016	0.011	0.00162
c	-1.86	-1.86	0.0225	-1.8622
λ_1	0.066	0.066	0.043	0.0663
λ_2	0.147	0.147	0.0264	0.1473
ω_1	0.128	0.128	0.0301	0.1287
ω_2	0.01	0.01	0.0414	0.0102
μ	0.022	0.022	0.003	0.0134
τ	0.13	0.13	0.0058	0.01307
γ	26.806	26.806	0.1644	26.806

Por meio do exame da tabela acima se nota que os modelos recuperam o valor dado de modo adequado, o que implica que o modelo está funcionando adequadamente, e que as estimativas geradas são confiáveis.

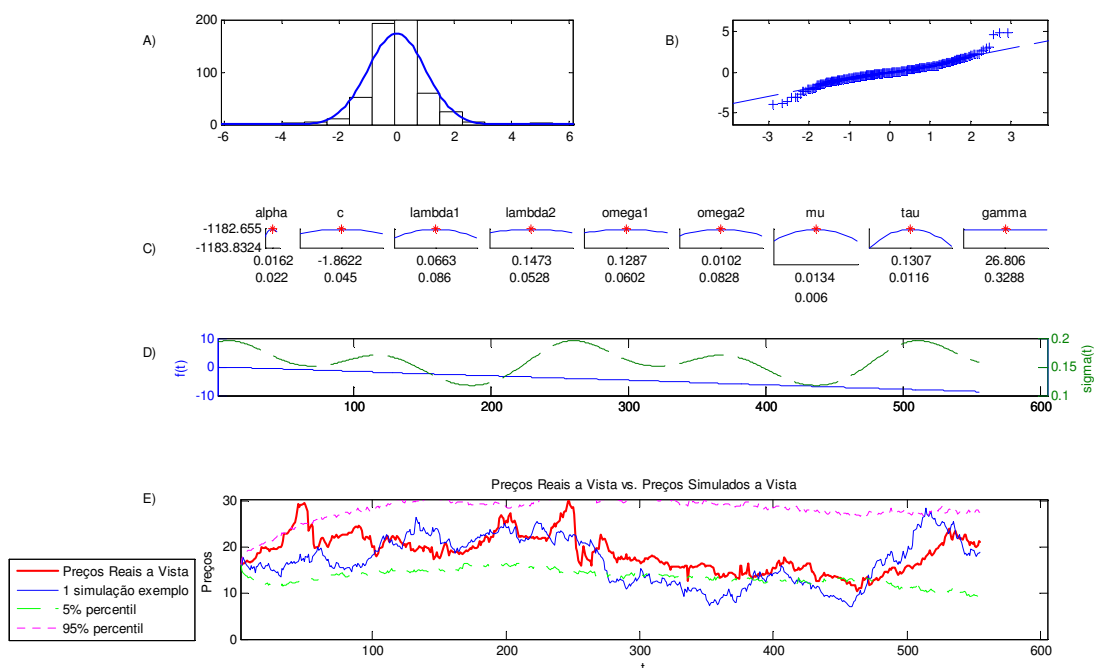


Ilustração 22 – Modelo 2f-sn-B

Nota: A) é o histograma de $Y_t = \frac{\alpha(L_t - X_t) + X_t - X_{t+1}}{\sigma(t)}$, conjuntamente com uma normal

padrão da distribuição da função densidade da probabilidade $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$; B) é o

gráfico do quantil-quantil (*quantile-quantile plot*) de Y_t em relação ao desvio padrão de uma norma padrão; C) são os cortes dos interceptos da função de máxima-verossimilhança em relação aos parâmetros estimados por meio do método máxima-verossimilhança. Nos gráficos, os números na primeira linha são estimativas dos parâmetros, e os números na segunda linha são os intervalos de confiança, 2 desvios padrões, conforme os apresentado na terceira coluna da Tabela 11 acima. Dado que as estimativas estão todas no topo dos corte, isso significa que a maximização da verossimilhança teve sucesso; D) é o gráfico de $f(t)$ (curva sólida) e $\sigma(t)$ (curva tracejada); E) é uma simulação dos preços a vista versus o histórico do preços a vista reais.

5.1.3 Modelo 2f-sn-C

A Tabela 12 abaixo apresenta os parâmetros do modelo 2f-sn-C para dados reais e dados artificiais.

Tabela 12 – Resultados da estimação para o modelo 2f-sn-C

	Dos Dados Artificiais			Dos dados Reais
	Dado	Média	Desvio Padrão	Estimação
α	0.019	0.019	0.0061	0.0195
c	-3.400	-3.400	0.0122	-3.4331
λ_1	0.011	0.011	0.028	0.0119
λ_2	0.150	0.150	0.0153	0.1525
ω_1	0.126	0.126	0.0325	0.1264
ω_2	-0.009	-0.009	0.04	-0.009
μ	0.022	0.022	0.0035	0.007
τ	0.025	0.025	0.0059	0.02552
γ	26.77	26.77	0.1625	26.77

Por meio do exame da Tabela acima se nota que os modelos recuperam o valor dado de modo adequado, o que implica que o modelo está funcionando adequadamente, e que as estimativas geradas são confiáveis.

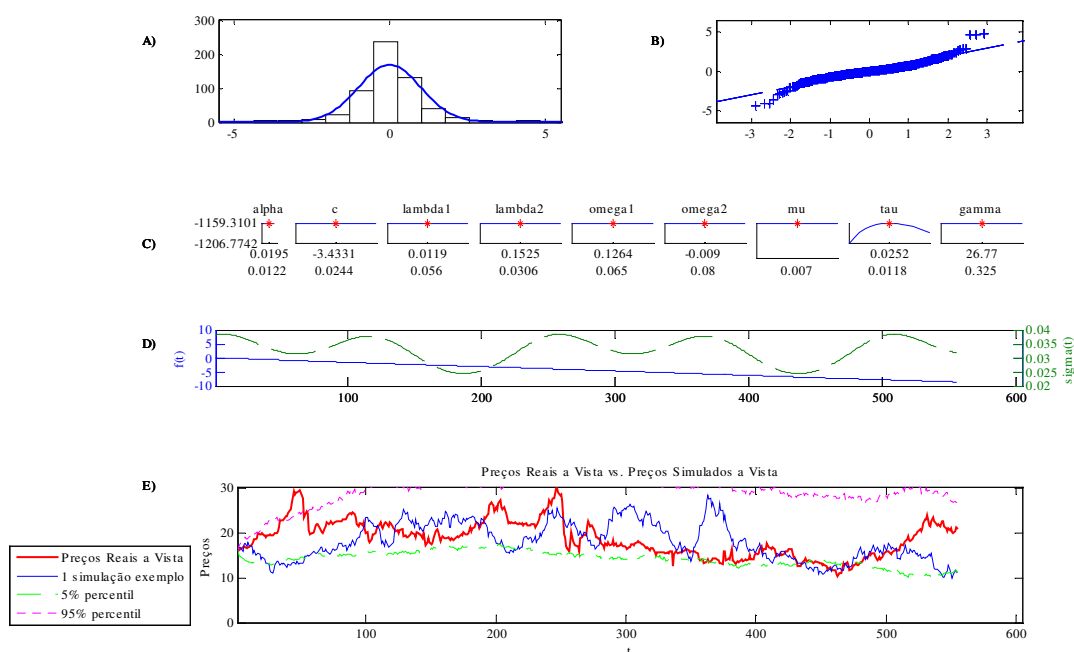


Ilustração 23 – Modelo 2f-sn-C

Nota: A) é o histograma de $Y_t = \frac{\alpha(L_t - X_t) + X_t - X_{t+1}}{\sigma(t)}$, conjuntamente com uma normal padrão da distribuição da função densidade da probabilidade $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$; B) é o gráfico do quantil-quantil (*quantile-quantile plot*) de Y_t em relação ao desvio padrão de uma norma padrão; C) são os cortes dos interceptos da função de máxima-verossimilhança em relação aos parâmetros estimados por meio do método máxima-verossimilhança. Nos gráficos, os números na primeira linha são estimativas dos parâmetros, e os números na segunda linha são os intervalos de confiança, 2 desvios padrões, conforme os apresentados na terceira coluna da Tabela 12 acima. Dado que as estimativas estão todas no topo dos corte, isso significa que a maximização da verossimilhança teve sucesso; D) é o gráfico de $f(t)$ (curva sólida) e $\sigma(t)$ (curva tracejada); E) é uma simulação dos preços a vista versus o histórico do preços a vista reais.

5.1.4 Análise dos Componentes do Modelo

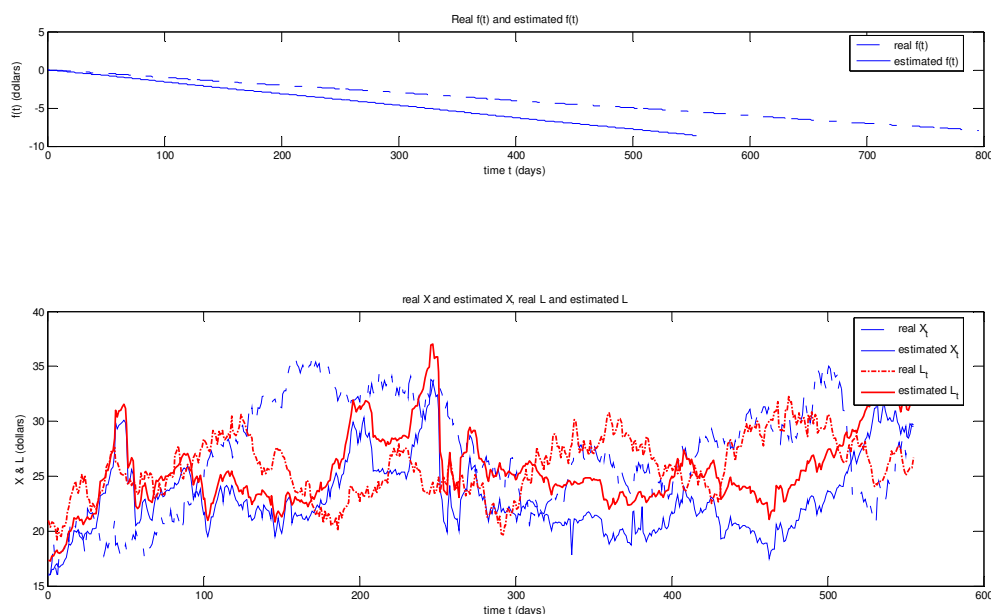


Ilustração 24 – Comparação entre os Parâmetros Estimados e Reais

O gráfico superior da Ilustração 24 acima demonstra que a tendência de queda dos preços é mais acentuada no modelo do que na realidade, contudo tal diferença parece que visa a compensar a diferença da média de longo prazo L observada no gráfico da parte inferior da Ilustração 24, tanto que a distância entre o L real e o L estimado parecem refletir a distância entre $f(t)$ real e o $f(t)$ estimado. Já com relação ao fator X real e X estimado, a diferença decorre do fato de que o X estimado representa apenas um exemplo de simulação, cuja média se for simulado uma série de caminhos estará próximo do comportamento da série real. Neste modelo tanto X como L capturam parte do comportamento sazonal das séries de dados.

O primeiro gráfico da Ilustração 25 abaixo demonstra que a série real dos preços à vista da EUA apresenta uma tendência de queda com relação aos preços observado no início do mercado em 2005, o que faz com que a média de longo prazo seja reduzida para em torno de € 20 (vinte euros) a EUA, segundo estimativa do modelo. Como entrada o valor utilizado foi de das € 21.6 (vinte e um euros, e sessenta centavos) a EUA, fixado com base no contrato mais longo disponível na data t inicial. Este é um dos parâmetros do modelo que pode alterar significativamente o casamento das projeções, mas o modelo é flexível o suficiente para que possam ser gerados diversos cenários.

O segundo gráfico da Ilustração 25 abaixo demonstra que a série de fato apresenta sazonalidade, conforme já era esperado, dado que os preços da EUA são razoavelmente explicados pelo clima e preços de combustíveis, os quais apresentam alta histórica durante o período de inverno do hemisfério norte, e às vezes uma pequena alta no verão dado maior uso de eletricidade para ar condicionados.

O terceiro gráfico abaixo por sua vez demonstra que os parâmetros extraídos dos modelos, além de conseguirem refletir o comportamento das séries reais, também podem ser utilizados para a construção de modelos de risco, dado que com o aumento do intervalo de confiança, torna-se possível aumentar a probabilidade dos preços estarem acima ou abaixo de determinado nível de preços. Outro ponto importante decorre do fato de que dado que os parâmetros estimados refletem um mundo neutro a risco, torna-se possível por meio destes a construção de modelos para apreçar outros derivativos relacionados as European Allowance Units.

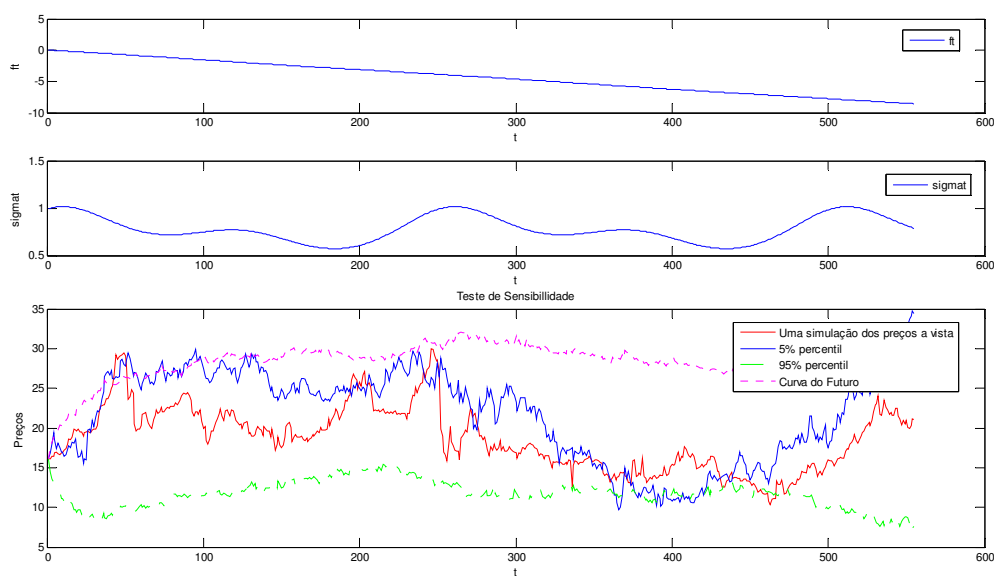


Ilustração 25 – Análise de Sensibilidade

5.1.5 Adequação do modelo aos dados do mercado futuro

O objetivo da presente subseção é demonstrar que os modelos refletem de modo adequado as curvas do mercado futuro. Na verdade, quando da calibração dos modelos os

preços futuros são considerados como entradas. E no processo de extração do termo não observado L_t , e do termo sazonal $f(t)$, os preços futuros são adequados às saídas do modelo de modo a minimizar o erro. Para os presentes modelos o menor valor encontrado em 114 acima foi de 189.65 no modelo 2f-sn-A, cujas curvas são apresentadas abaixo.

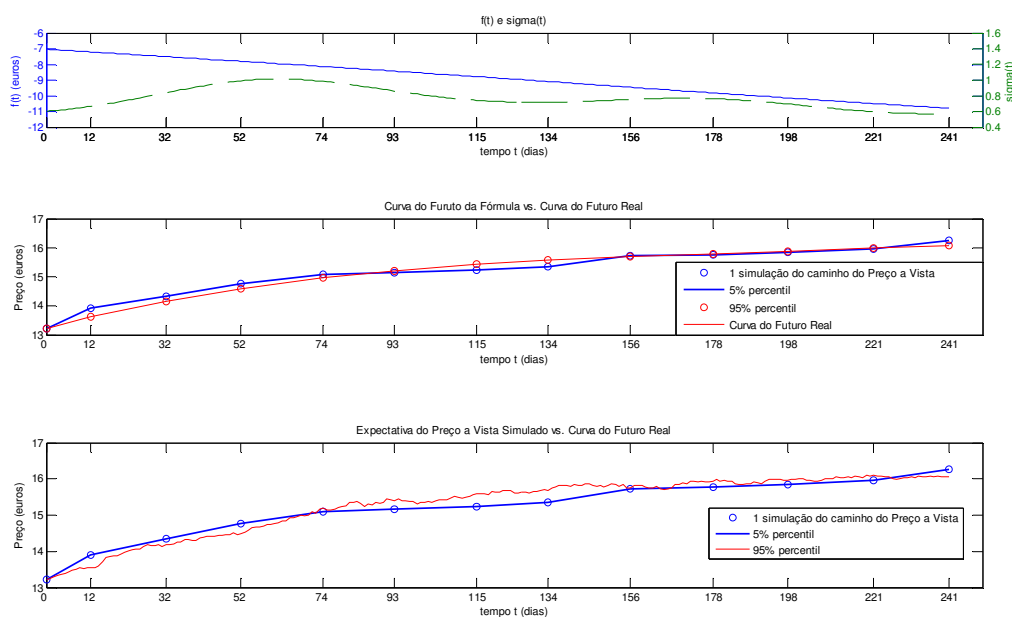


Ilustração 26 – Adequação a Curvas do Futuro

O segundo gráfico da Ilustração 26 acima demonstra que o modelo 2f-sn-A foi capaz de refletir com precisão a curva do futuro real observado no mercado, o que pode indicar que o modelo é adequado dado que foi capaz de otimizar seus parâmetros de modo que o preço futuro teórico refletisse o futuro observado na amostra.

O terceiro gráfico da Ilustração 26 acima apresenta que os preços futuros reais e 1 caminho de simulação quivalente à média de 250 caminhos para S_t . Por fim, o primeiro gráfico da Ilustração 26 acima apresenta o termo sazonal $f(t)$, curva sólida, e a volatilidade sazonal em função de tempo $\sigma(t)$, curva tracejada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve por objetivo apreçar créditos de carbono, ou melhor, modelar os preços das European Allowance Units - European Allowance Units da segunda fase do EU ETS - European Union Emission Trade Scheme. No Capítulo 1, apresentaram-se a motivação e relevância da pesquisa dada a atual conjuntura econômica social e ecológica, o contexto onde a pesquisa se insere na teoria de finanças, e uma síntese de como a pesquisa esta organizada. No Capítulo 2, apresentaram-se os fundamentos das mudanças climáticas, a caracterização do mercado de créditos de carbono, a definição do produto para fins da pesquisa, os estudos conexos já realizados sobre o tema de apreçamento de créditos de carbono, a introdução dos conceitos teóricos utilizados no processo de modelagem, bem como os modelos implementados. No Capítulo 3, fez-se uma introdução dos procedimentos de estimação por máxima-verossimilhança, e identificação da função densidade da probabilidade para cada modelo. Em seguida, explicaram-se os procedimentos de calibragem dos modelos. No Capítulo 4, foram descritos os dados disponíveis, os procedimentos adotados no tratamento dos dados, os motivos que justificaram a escolha dos mesmos, uma análise preliminar de quais modelos parecem se demonstrar adequados para os dados, e por fim o procedimento de formação da carteira de cotações e contratos a serem empregadas na estimação dos modelos. No Capítulo 5, apresentou-se uma análise detalhada dos resultados.

Os resultados encontrados na presente pesquisa dão suporte à conclusão de que as European Allowance Units da segunda fase do EU ETS podem ser apreçadas por meio de modelos de reversão à média, com sazonalidade, desenvolvidos por Xu (2004) para apreçar gás natural, dado que estas importantes características presentes na distribuição das séries de preços, reversão à média e sazonalidade, são capturadas adequadamente pelo modelo.

Os modelos de dois fatores, com reversão à média e sazonalidade, foram capazes de refletir adequadamente as curvas dos mercados futuros reais, contudo os gráficos qq plot apresentados nas Ilustrações 21 a 23 acima demonstram que a distribuições das séries de preços de European Allowance Units não são normais. Esse resultado mostra que os modelos utilizados não capturam adequadamente as distribuições nas caudas das séries, e que talvez fosse adequado à inclusão de volatilidade (variância) estocástica nos modelos, tal como volatilidade GARCH, transformando os modelos em modelos de três fatores estocásticos.

Outra possibilidade também a fim de incrementar os resultados é testar se a inclusão de saltos, *jumps*, os quais podem fazer com que os modelos reflitam de modo mais adequado às distribuições das séries, e as quebras apresentadas.

Esta pesquisa deve ser uma das primeiras a avaliar European Allowance Units da segunda fase do EU ETS por meio de processos estocásticos, e apresentar: (i) os parâmetros livres de risco que podem ser utilizados para apreçar outros derivativos relacionados a créditos de carbono, tais como opções, swaps, futuros de CER, dentre outros; e (ii) modelos calibrados para preços de European Allowance Units que podem ser utilizados no desenvolvimento de ferramentas de gestão de risco de mercado para preços de European Allowance Units. Trabalhos anteriores, talvez por falta de dados, concentram-se em modelos para a primeira fase do EU ETS. Dessa forma, uma importante contribuição metodológica da presente pesquisa perante os demais trabalhos sobre apreçamento de créditos de carbono foi a de apresentar um modo de se extrair os preços à vista das European Allowance Units da segunda fase do EU ETS dos contratos futuros, por meio da fórmula apresentada em Pindyck (2004).

Futuros trabalhos podem aperfeiçoar os resultados obtidos na presente pesquisa, por meio (i) da inclusão de volatilidade estocástica, e saltos; (ii) da utilização de ferramentas que permitam a extração dos dados diretamente dos contratos futuros, tais como filtro de Kalman e filtro de partículas, conforme apresentado em Aiube (2005); ou (iii) testar a modelagem conjunta das European Allowance Units com outros ativos de energia tal como o gás natural, energia elétrica, ou spark-spread, diferença entre o preço da energia elétrica e o custo do gás natural, o dark-spread, diferença entre o preço da energia elétrica e custo do carvão.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AIUBE, Fernando Antonio Lucena. Modelagem dos Preços Futuros de Commodities: Abordagem pelo Filtro de Partículas. Tese Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Julho de 2005.
- ALSTAD, Rolf Magnus. Foss, Jørgen Taule. Investment analysis of CCGT power plants. Norwegian University of Science and Technology. 2004. Tese de mestrado em Economia Industrial e Administração da Tecnologia.
- BENZ, E, TRÜCK, S. Modeling the price dynamics of CO2 emission allowances. Working paper 2006; Bonn Graduate School of Economics.
http://www.bus.qut.edu.au/faculty/schools/economics/documents/Emission_Rights.pdf
- BESSEMBINDER, Hendrik. Systematic Risk, Hedging Pressure, and Risk Premiums in Futures Markets, *Review of Financial Studies* 5, p. 637-667, 1992.
- BLACK, F. SCHOLES, M. Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81. Maio/Junho de 1973. 637-59.
- BODIE, Zvi. ROSANSKY, Victor. Risk and Return in Commodity Futures, *Financial Analysts Journal* (May/June), p. 27-39. 1980.
- BORAK, S. HÄRDLE, W. TRÜCK, S. WERON, R. Convenience yields for CO2 emission allowance futures contracts. Working paper 2006; Humboldt-University of Berlin.
- BRENNAN, M. J.; SCHWARTZ, E. S. Evaluating natural resources investments. *Journal of Business*, 133 p, 58 v, 1985.
- DASKLAKIS, George. PSYCHOYIS, Dimitris e MARKELLOS, Raphael N., Modeling CO2 Emission Allowance Prices and Derivatives: Evidence from the EEX. Junho de 2006. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=912420>
- DEKE, Oliver. PETERSON, Sonja. Integrated Climate Modelling at the Kiel Institute for World Economics. The Dart Model and its Applications. Outubro de 2003. Kiel Insaitute for World Economics.
- DIXIT, A. K. PINDYCK, R. Investment Under Uncertainly. 1994. Princeton Univerty Press.
- DUFFIE, Darrell. PAN, Jun. SINGLETON, Kenneth. Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Difussions. *Econometrica*, Vol. 68, No. 6, Novembro de 2000, 1343 – 1376.
- DUSAK, Katherine. Futures Trading and Investor Returns: An Investigation of Commodity market Risk Premiums. *Journal of Political Economy* 81, p. 1387-1406. 1973.
- ELLERMAN, Denny. BUCHNER, Bárbara. Over-Allocation or Abatement? A Preliminary Analysis of the EU ETS base don the 2005 Emission Data. Fondazione Eni Enrico di

Lavoro. Massachusetts Institute of Technology. Novembro de 2006. Disponível Social Science Research Network Electronic Paper Collection: <http://ssrn.com/abstract=946091>

FELIPETTO, Adriana Vilela Montenegro. Avaliação de concessionária de tratamento de resíduos com opções reais. 22 de fevereiro de 2005. Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Administração. Faculdades IBMEC.

GIBSON, R.; SCHWARTZ, E. S. Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *The Journal of Finance*, 45(3), 959-976, 1990.

GORDON, Garry. ROUWENHORST, K. Geert. Facts and Fantasies About Commodity Futures. National Bureau of Economic Research. Working Paper 10595. Junho de 2004. Disponível em <http://www.nber.org/papers/w10595>.

GRAY, Roger. The Search for a Risk Premium, *Journal of Political Economy* (June), (1961)p. 250-260.

HARRISON, M.; KREPS, D. Martingales and multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 1979.

HARRISON, M.; PLISKA S. Martingales and stochastic integrals in theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 313-316, 1981.

HICKS, John R. (1939), *Value and Capital* (Oxford University Press; Cambridge)

HULL, J. C. *Options, Futures and Other Derivatives*. 6ª Edição. 2006. Pearson Hill.

IPCC – INTERGOVERNMENTAL PANEL ON CLIMATE CHANGE. *Climate change 2001: The scientific basis. Summary for Policy Makers and Technical Summary of the Working Group I Report WNO/UNEP.. 2001^a.*

_____. (IPCCb) – INTERGOVERNMENTAL PANEL ON CLIMATE CHANGE. *Climate Change 2001 – Impacts, Adaptation, and Vulnerability. Contribution of Working Group II to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. McCarthy, J.J.; Canziani, O.F.; Leary, N.A.; Dokken, D.J.; White, K.S. (eds.) Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York. 2001. 98p.

JAGANNATHAN, Ravi. An Investigation of Commodity Futures Prices Using the Consumption-Based Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Journal of Finance* 40, p. 175-191. 1985.

KALLBEKKEN, Steffen. WESTSKOG, Hege. Should Developing Countries Take on Bidding Commitments in a Climate Agreement? An Assessment of Gains and Uncertainty. *The Energy Journal*, Vol. 26, No3. 2005.

KERR, R.A. (2004). Three Degrees of Consensus', *Science*, 305, pp. 932-934.

KEYNES, John M. (1930), *A Treatise on Money*, Vol. 2 (Macmillan; London).

- KLEPPER, Gernot. PETERSON, Sonja. Emission trading, CDM, JI and More: The climate strategy of the EU. *The Energy Journal*, Vol. 27, No.2. 2006 p. 27.
- KOLB, Robert W. Is Normal Backwardation Normal?. *Journal of Futures Markets* 12, p. 75–91. 1992.
- LLEWELLYN, John. The business of climate change. Challenges and Opportunities. Lehman Brothers. Fevereiro de 2007.
- MCT. Ministério de Minas e Tecnologia. Status das atividades de projetos no âmbito do Mecanismo de Desenvolvimento Limpo (MDL) no Brasil e no Mundo. Versão de 15/06/2007.
- MENDELSON, R. et al. (2000), ‘Country-Specific Market Impacts of Climate Change’, *Climatic Change*, 45, pp. 553-569.
- MERTON, R. C. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*. 4. Primavera de 1973. 141-83.
- _____. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 1976; 3; 125-144.
- MIZUNO, Yuji. CDM in Charts. Institute for Global Environmental Strategies. Ver.1.1. Maio de 2007. Págs. 92. Disponível em < <http://www.iges.or.jp/en/cdm/pdf/charts.pdf> >.
- NORDHAUS, W.D. and Boyer, J. Role the DICE again: the Economics of Global Warming, Yale University. 1999,
- _____. The “Stern Review” on the Economics of Climate Change, National Bureau of Economic Research. 2006.
- PAOLELLA, Marc S. e TASCHINI, Luca, An Econometric Analysis of Emission Trading Allowances. November 2006. Swiss Finance Institute Research Paper No. 06-26 Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=947055>
- PETERSON, Sonja. The Eu Emission Trading Scheme and its Competitiveness Effects for European Business. Result form the CGE Model DART. Kiel Institute for World Economics. November 2003. Paper presented at the Joint Researc Workshop “Business and Emission Trading”
- PILIPOVIC, Dragana. (1997). Energy Risk: valuing and managing energy derivatives. (McGraw-Hill, New York).
- PINDYCK, Robert S. Volatility in Natural gas and oil markets. International Research Center for Energy and Economic Development (ICEED). *Journal of Energy and Development*, vol. 30, No1. p. 20. 2004.
- POINT CARBON. Carbon 2007. A new climate for carbon trading. Røine, K. and H. Hasselknippe (eds.) 62 pages. Março de 2007. Disponível em http://www.pointcarbon.com/getfile.php/fileelement_105366/Carbon_2007_final.pdf

- ROCHA, Marcelo Theoto. Aquecimento global e o mercado de carbono: uma aplicação do modelo CERT. Piracicaba, 2003. p. 196. Tese doutorado. Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz
- ROSENZWEIG, Richard. Forrister, Dirk. Youngman, Rob. European Union Emission Trading Scheme, and Technology Policy. A paper on greenhouse gas performance to the TransAtlantic Conference on Energy Policy. 28 de Março de 2005. Natsource LLC.
- SAMUELSON, P. A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, 6, 41-49, Spring, 1965
- SCHWARTZ, E. S. The stochastic behavior of commodity prices: implications for valuation and hedging. *The Journal of Finance*, 52(3), 923-973, 1997.
- SEE, Wee Chiang. Carbon permit prices in the European Emission Trading System: A stochastic analysis. Master of Science in Technology and Policy. Massachusetts Institute of Technology. Junho de 2005, p. 80.
- SEIFERT J, Uhrig-Homburg M, Wagner M. Dynamic behavior of CO₂ spot prices-theory and empirical evidence. Working paper 2006; University of Karlsruhe
- STERN, Nicholas. et al. Stern Review: the Economics of Climate Change. 2006. Disponível em: http://www.hm-treasury.gov.uk/independent_reviews/stern_review_economics_climate_change/stern_review_report.cfm (...)
- TEIXEIRA, Duda. Salvar o planeta dá lucro. Os bons negócios das empresas brasileiras com créditos de carbono. *Revista Veja*, edição 1985, ano 39, nº 48, 6 de dezembro de 2006. Págs. 116 – 120.
- TIFENBACH, B. Numerical Methods for Modeling Energy Derivatives. Tese de mestrado, 2000.
- TOL, R.S.J. (2002), 'Estimates of the Damage Costs of Climate Change, Part II. Dynamic Estimates', *Environmental and Resource Economics*, 21, pp. 165-160.
- UHRIG-HOMBURG, M, WAGNER, Forward price dynamics of CO₂ emission certificates-an empirical analysis. Working paper 2006a; University of Karlsruhe.
- _____. Market dynamics and derivative instruments in the EU emissions trading scheme-an early market perspective. Working paper 2006b; University of Karlsruhe.
- XU, Zhiyong (James). Stochastic Models for Gas Prices. University of Calgary. Agosto de 2004. 119 p. <http://finance.math.ucalgary.ca/papers/JamesXuMSc.pdf>
- ZHANG, Fan. Does Uncertainty Matter? A stochastic dynamic analysis of bankable emission permits trading for global climate change policy. World Bank Policy Research Working Paper 4215, Abril de 2007.

WEISER, Stefan (2003), “The Strategic Case for Commodities in Portfolio Diversification,” *Commodities Now*, p. 7-11.

WORLD BANK. State and Trends of the Carbon Market 2006. CAPOOR, Karan. AMBROSI, Philipe. Maio de 2006.

WORLD RESOURCE INSTITUTE. 2007. Disponível em <http://earthtrends.wri.org/updates/note/105>

ANEXO A – ANÁLISE DA TRANSFORMAÇÃO DE VETORES DE DIFUSÃO AFIM COM SALTOS

O conteúdo do presente anexo é uma reprodução de Xu (2004) resumindo Duffie et al. (2000).

A.1 Processo de difusão afim com saltos

Suponha que X seja um processo de Markov, cujas saídas sejam expressas por $\{X_t, 0 \leq t \leq \infty\}$ em um estado espaço $D \subset \mathfrak{R}^n$. Sob algumas condições regulares, X é a única solução para a equação diferencial estocástica, EDE, tal que:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t + dZ_t, \quad \text{A.1}$$

onde $\mu: (D, \mathfrak{R}+) \rightarrow \mathfrak{R}^n, \sigma: (D, \mathfrak{R}+) \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times n}$; W é um movimento browniano padrão em $\mathfrak{R}^n$; Z seja um processo de salto puro com intensidade $\lambda(X_t, t)$ para $\lambda: (D, \mathfrak{R}+) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ e o salto da distribuição tem amplitude v_t em $\mathfrak{R}^n$ e v_t dependa apenas de t .

Caso:

$$\begin{cases} \mu(x, t) = k_0(t) + K_1(t)x, \\ \sigma(x, t)\sigma(x, t)' = H_0(t) + \sum_{k=1}^n H_1^{(k)}(t) \cdot x_k, \\ \lambda(x, t) = l_0(t) + l_1(t) \cdot x, \end{cases} \quad \text{A.2}$$

onde para cada $0 \leq t \leq \infty$, $k_0(t) \in \mathfrak{R}^n$, $K_1(t) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $H_0(t) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é simétrico, $H_1(t) \in \mathfrak{R}^{n \times n \times n}$ e $H_1^{(k)}$ é simétrico, $l_0(t) \in \mathfrak{R}$, $l_1(t) \in \mathfrak{R}^n$.

A.2 Transformação

Dada uma condição inicial X_0 , o coeficiente acima $\theta = (k_0, K_1, H_0, H_1, l_0, l_1, v_t)$ determina a transformação $\Phi^\theta = C^n \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times D \rightarrow C$ de X_T condicional em X_t definido por:

$$\Phi^\theta(u, t, T, X_t) = E^\theta[e^{u \cdot X_T} | X_t], \quad \text{A.3}$$

onde E^θ significa expectativa sob a distribuição de X^T determinada por θ .

Em Duffie et al. (2000), prova-se que A.3 supondo que $\theta = (k_0, K_1, H_0, H_1, l_0, l_1, v_t)$ é bem comportado em (u, T) , então a transformação Φ^θ em X definido por A.3 existe e pode ser definido por:

$$\Phi^\theta(u, t, T, X_t) = \exp(A(u, t, T) + B(u, t, T) \cdot X_t), \quad \text{A.4}$$

onde $A(\cdot)$ e $B(\cdot)$ satisfazem a seguinte equação de valor complexo de Ricatti:

$$\begin{cases} \frac{\partial A(u, t, T, X_t)}{\partial t} = -k_0(t)' B - \frac{1}{2} B' H_0(t) B + l_0(t)(\varphi(b, t) - 1), \\ \frac{\partial B(u, t, T)}{\partial t} = -K_1(t)' B - \frac{1}{2} B' H_1(t) B + l_1(t)(\varphi(B, t) - 1), \end{cases} \quad \text{A.5}$$

onde a condição de contorno define-se por:

$$\begin{cases} A(u, T, T) = 0, \\ B(u, T, T) = u, \end{cases} \quad \text{A.6}$$

onde $\varphi(c, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(c \cdot z) dv_t(z)$ onde quer que a integral seja bem definida. Esta transformação de saltos φ define a distribuição do tamanho do salto.

A.3 Transformação Extendida

A transformação estendida definida por $\psi^\theta: \mathbb{R}^n \times C^n \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times D \rightarrow C$ de X_T condicional em X_t por:

$$\psi^\theta(v, u, t, T, X_t) = E^\theta[(v \cdot X_T) e^{u \cdot X_T} | X_t]. \quad \text{A.7}$$

A transformação estendida de ψ^θ pode ser computada pela diferenciação da transformação de Φ^θ . Como foi provado em Duffie et al. (2000) tem-se que:

$$\psi^\theta(v, u, t, T, X_t) = \Phi^\theta(u, t, T, X_t)(C(t) + D(t) \cdot X_t), \quad \text{A.8}$$

onde Φ^θ é definida por (A.4), e $C(\cdot)$ e $D(\cdot)$ satisfazem a equação diferencial ordinária apresentada a seguir:

$$\begin{cases} \frac{\partial C(\cdot)}{\partial t} = -k_0(t)' D - B' H_0(t) D - l_0(t) \nabla \varphi(B) D \\ \frac{\partial D(\cdot)}{\partial t} = -K_1(t)' D - B' H_1(t) D - l_1(t) \nabla \varphi(B) D \end{cases}, \quad \text{A.9}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} C(T) = 0 \\ D(T) = v \end{cases}, \quad \text{A.10}$$

onde $\nabla \varphi(c)$ é o gradiente de $\varphi(c)$ com relação a $c \in C^n$.

ANEXO B – DEDUÇÃO DA FUNÇÃO DE PREÇOS FUTUROS PARA MODELOS DE 2 FATORES PELO PROCESSO DE TRANSFORMAÇÃO AFIM

O conteúdo do presente anexo é uma reprodução de Xu (2004).

A equação diferencial estocástica descrita em (19) pode ser reescrita se:

$$d \begin{bmatrix} S_t \\ L_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu\lambda \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_t \\ L_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma\sqrt{S_t} & 0 \\ 0 & \tau\sqrt{L_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{bmatrix}. \quad \text{B.1}$$

Este é um processo de difusão afim com saltos, e em (A.2), $X_t = [S_t, L_t]'$

$$k_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu\gamma \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}, H_0 = 0_{2 \times 2}, H_1 = \begin{bmatrix} (\sigma^2, 0)' & (0, 0)' \\ (0, 0)' & (0, \tau^2)' \end{bmatrix}, l_0 = 0, l_1 = 0_{2 \times 2}, v = 0_{2 \times 1}.$$

A partir de (A.7) – (A.10), tem-se que os preços futuros são definidos por:

$$\begin{aligned} F^{\bar{\theta}}(t, T, (S_t, L_t)) &= E^{\bar{\theta}}[S_T | S_t, L_t] \\ &= \psi^{\bar{\theta}}((1, 0)', (0, 0)', t, T, (S_t, L_t)') \\ &= \Phi^{\bar{\theta}}((0, 0)', t, T, (S_t, L_t)')(C(t) + D_1(t)S_t + D_2(t)L_t) \end{aligned} \quad \text{B.2}$$

onde $\Phi^{\bar{\theta}}((0, 0)', t, T, (S_t, L_t)')$ é computado por (A.4) - (A.6), e $C(t)$ e $D(t)$ satisfazem a seguinte equação:

$$\begin{cases} \partial_t C = -\tilde{\mu} \tilde{\gamma} D_2 \\ \partial_t D_1 = \tilde{\alpha} D_1 \\ \partial_t D_2 = -\tilde{\alpha} D_1 + \tilde{\mu} D_2 \end{cases}, \quad \text{B.3}$$

com as condições de contorno:

$$\begin{cases} C(T) = 0 \\ D_1(T) = 1 \\ D_2(T) = 0 \end{cases} \quad \text{B.4}$$

Dado que $u = (0,0)'$, é fácil obter-se $(B_1, B_2) = (0,0)$. Resolvendo os valores iniciais

apresentados acima (B.3)-(B.4), obtem-se que $C = \frac{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t-T)} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - 1 \right)$,

$D_1 = e^{\tilde{\alpha}(t-T)}$ e $D_2 = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - e^{\tilde{\alpha}(t-T)} \right)$. Dessa forma, os preços futuros são definidos por:

$$\begin{aligned} F^{\tilde{\theta}}(t, T, (S_t, L_t)) &= e^{\tilde{\alpha}(t-T)} S_t + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - e^{\tilde{\alpha}(t-T)} \right) L_t \\ &+ \frac{\tilde{\mu} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\alpha}(t-T)} - 1 \right) - \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha} - \tilde{\mu}} \left(e^{\tilde{\mu}(t-T)} - 1 \right) \end{aligned} \quad \text{B.5}$$

Que é a mesma equação apresentada em (42) e (49).

ANEXO C – A COMPUTAÇÃO DE UMA INTEGRAL

O conteúdo do presente anexo é uma reprodução de Xu (2004).

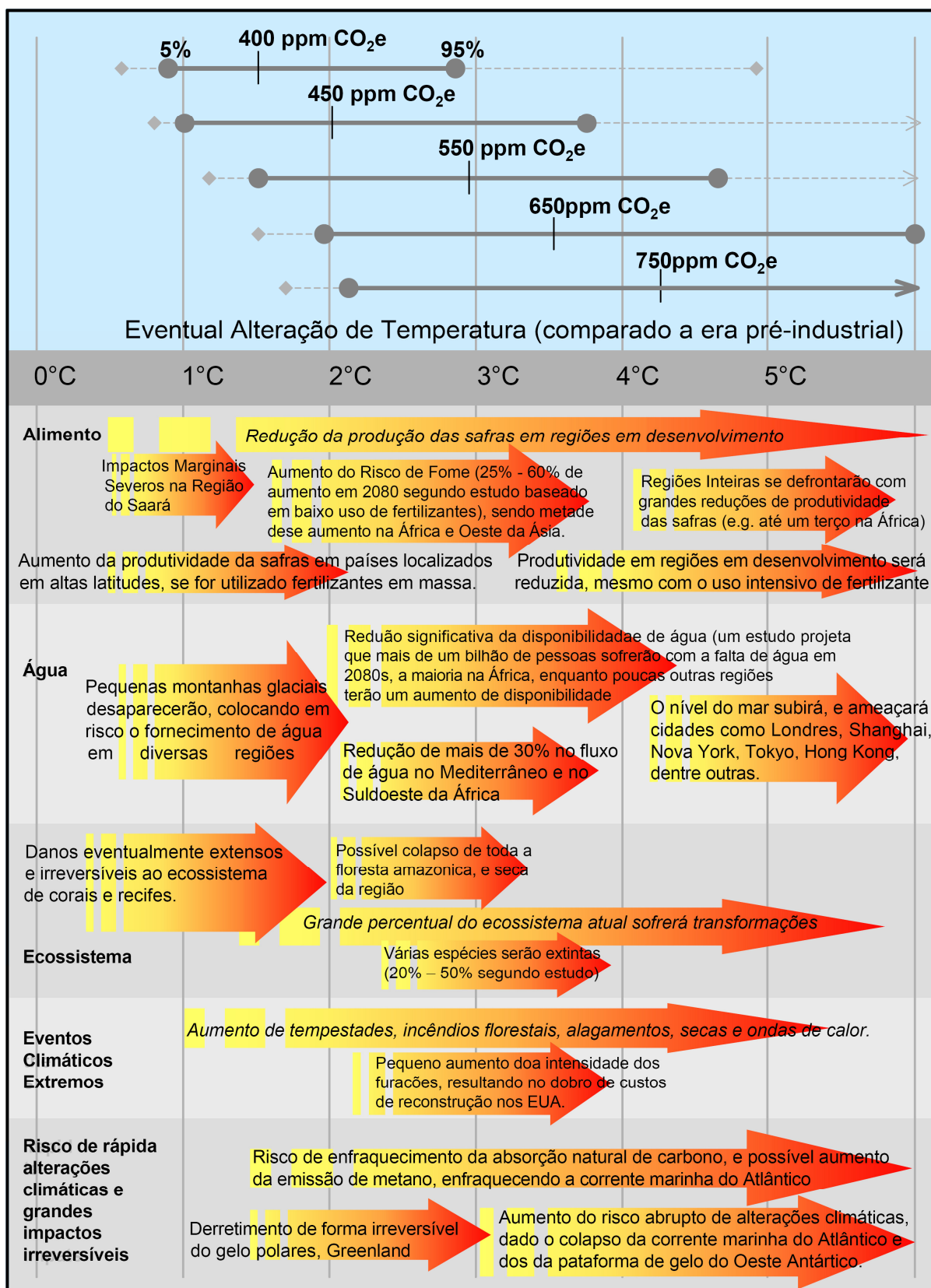
Para a integral definida por:

$$I = \int_{\Re} \exp\left(iks - \frac{\lambda^2 s^2}{2}\right) ds, \quad \text{C.1}$$

se permitir que $x = \lambda_s$, então tem-se que:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\lambda} \int_{\Re} \exp\left(i \frac{k}{\lambda} x - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\Re} \exp\left(-\frac{\left(x - i \frac{k}{\lambda}\right)^2}{2} - \frac{k^2}{2\lambda^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{k^2}{2\lambda^2}\right) \int_{\Re} \exp\left(-\frac{\left(x - i \frac{k}{\lambda}\right)^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{k^2}{2\lambda^2}\right) \int_{\Re} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{k^2}{2\lambda^2}\right) \sqrt{2\pi} \end{aligned} \quad \text{C.2}$$

ANEXO D – ALTERAÇÕES CLIMÁTICAS



Fonte: Adaptado de Stern (2006).

APÊNDICE 1 - Cálculos estocásticos básicos

Processos estocásticos

Uma variável segue um processo estocástico quando seu valor se altera no tempo de forma não previsível. Os processos estocásticos podem ser classificados em tempo discreto e em tempo contínuo. Um processo estocástico em tempo discreto é aquele onde o valor da variável pode alterar-se apenas em medidas fixas de tempo, enquanto um processo estocástico em tempo contínuo é aquele onde a variável pode alterar-se a qualquer tempo. Processos estocásticos também podem ser subdivididos em com variáveis contínuas ou com variáveis discretas. Em um processo de variáveis contínuas, as variáveis podem tomar qualquer valor dentro de uma escala, enquanto em um processo de variáveis discretas, as variáveis podem tomar apenas alguns valores discretos.

Na presente pesquisa serão utilizados modelos estocásticos de variáveis contínuas em tempo contínuo para preços de crédito de carbono. O entendimento de tal processo é a base para entender as próximas seções. Há que se ressaltar que na prática, não se observam os preços de créditos de carbono em variáveis contínuas e em tempo contínuo. Os preços de créditos de carbono são observados em valores discretos, múltiplos de centavos, por exemplo, e somente podem ser alterados durante os horários de negociação em bolsas de valores, ou em balcão. Todavia, assumir modelo com variáveis contínuas e tempo contínuo se demonstra um modo útil de logarmos modelar com sucesso o preço de créditos de carbono, dadas às propriedades apresentadas a seguir.

Propriedade de Markov

De acordo com Hull (2006, p. 264), a propriedade de Markov implica que as distribuições de probabilidades dos preços em qualquer tempo no futuro independe dos preços históricos e do caminho que os preços históricos tomaram para chegar aos preços correntes, ou seja, a propriedade de Markov assume que os preços correntes refletem toda a informação existente, não havendo possibilidade de arbitragem. Portanto, a propriedade de Markov implica na ausência de memória dos preços.

Uma decorrência de se assumir que um processo estocástico em tempo contínuo atende a propriedade de Markov, é que as alterações da variância e da média do processo em medidas sucessivas de tempo passam a ser aditivas, ou seja, se um processo estocástico em tempo contínuo markoviano tem em um ano uma distribuição normal de média zero, e desvio padrão 1, terá em dois anos uma distribuição normal de média zero, e desvio padrão raiz quadrada de dois, dado que o desvio padrão é equivalente a raiz quadrada da variância.

Processo de Wiener

O processo estocástico de Wiener é uma subespécie do processo de Markov com média zero e variância delta tempo, o qual foi utilizado primordialmente por físicos no intuito de explicar o movimento de partículas sujeito a um grande número de choques entre as moléculas, e conhecido no meio acadêmico também como movimento Browniano.

No intuito de facilitar o entendimento dos modelos apresentados a seguir, usaremos a mesma notação utilizada por Xu (2004), ou seja, a seguir devemos entender tanto o processo como a variável de estado do processo no tempo t como W_t . Tal processo deve ser entendido como um processo estocástico em tempo contínuo com as seguintes propriedades:

1. $W_0 = 0$ (com probabilidade 1).
2. $W_t \sim N(0,t)$ para todo $t \geq 0$. Ou seja, para cada t a variável aleatória W_t apresenta distribuição normal com média $E(W_t) = 0$ e $\text{Var}(W_t) = t$.
3. Todo o incremento $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$, em dois diferentes intervalos de tempo, Δt , são independentes. Dessa forma, $W_{t_2} - W_{t_1}$ e $W_{t_4} - W_{t_3}$ são independentes para todo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$. Portanto, W_t segue um processo de Markov.
4. W_t depende de modo contínuo de t , ou seja, qualquer variação de W_t é uma função contínua de t .

Integral de Ito

Se a variável aleatória $\sigma(X_t, t)$ for não antecipativa, ou seja, se a variável for independente do futuro, e for não explosiva tal que

$$E \left[\int_0^T \sigma(X_t, t) dW_t \right] < \infty \quad (1)$$

então, a integral de Itô

$$\int_0^T \sigma(X_t, t) dW_t \quad (2)$$

pode ser definida como

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(X_{t_k}, \tau_k) (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}), \quad (3)$$

onde $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$, $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ e $\delta = \max_{k=1,2,\dots,n-1} \{t_{k+1} - t_k\}$, e a convergência decorre das probabilidades.

Processo de Itô e as equações diferenciais estocásticas

Em um processo de Ito, a variável X_t é definida por uma equação diferencial estocástica, EDE, da seguinte forma:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t, \quad (4)$$

onde, $a(X_t, t)$ é a tendência esperada, ou coeficiente de tendência, e $b(X_t, t)$ é o termo de difusão.

A de função dX_t acima, quando $X_{t_0} = X_0$, é a forma simbólica resumida da seguinte equação integral:

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t a(X_s, s) ds + \int_{t_0}^t b(X_s, s) dW_s, \quad (5)$$

onde W_t é um processo de Wiener, e $\int_{t_0}^t b(X_s, s) dW_s$ uma integral de Itô.

Tanto a tendência esperada, $a(X_t, t)$, como o termo de difusão $b(X_t, t)$ podem alterar-se no tempo em um processo de Ito. Em uma pequena variação de tempo entre t e $t + \Delta t$, as variáveis mudam de X para $X + \Delta X$, onde:

$$\Delta X_t = a(X_t, t) \Delta t + b(X_t, t) \sqrt{\Delta t}. \quad (6)$$

Tal relação envolve uma pequena aproximação. E assume que a tendência esperada e o termo de difusão de X permanecem constantes, e iguais a $a(X_t, t)$ e $b(X_t, t)^2$, respectivamente, durante o intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$.

Processo generalizado de Wiener

Uma das mais simples EDE é aquela onde a tendência esperada e o termo de difusão são independentes da informação recebida durante o tempo, tal que:

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (7)$$

onde W_t é um processo padrão de Wiener, e μ e σ são constantes.

No entanto, na prática, este modelo raramente é utilizado diretamente no apreçamento de ativos, dado que por meio da equação (7) S_t pode tomar um valor negativo, o que é conflitante com a premissa de que os valores dos ativos não podem ser menor que zero.

Movimento geométrico Browniano

Desde de seu desenvolvimento por Black e Scholes (1973) e Merton (1973). Samuelson (1965) este processo estocástico vem sendo utilizado em larga escala na teoria e na prática da economia financeira, por capturar muito bem o movimento das ações e outros derivativos. A EDE é definida pela seguinte equação:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (8)$$

onde W_t é um processo padrão de Wiener, e μ e σ são constantes.

Se considerarmos $X_t = \ln S_t$, então ao aplicar o Lema de Ito, tem-se que:

$$dX_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t, \quad (9)$$

onde $X_t \sim N \left(X_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right)$. Motivo pelo qual o movimento geométrico Browniano,

MGB, é tão popular. Dizemos que S_t é log-normal. Ademais o MGB captura adequadamente a não negatividade dos preços das ações, dado que $S_t = \exp(X_t) > 0$.

Processo de raízes quadradas

Um modelo próximo ao apresentado em (8) acima é o processo de raízes quadradas:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t, \quad (10)$$

onde W_t é um processo padrão de Wiener, e μ e σ são constantes.

Comparado com o processo descrito em (8) acima, o desvio padrão é uma função da raiz quadrada de S_t , ao invés de S_t por si mesma. Tal fato faz com que a variância aumente de forma proporcional a S_t , ao invés da raiz quadrada de S_t . Dessa forma, se a volatilidade dos

preços do ativo não se alterar de forma acentuada quando S_t se altera, tal modelo poderá demonstrar-se adequado.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)