Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Mínimos locais em C^1 versus H^1 com aplicações a problemas elípticos semilineares

por

SANDRA IMACULADA MOREIRA NETO

Brasília
2005

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

Ao meu Senhor, Pai, Mestre e Santificador. A Ele não cabem palavras, apenas o silêncio de um coração feliz, sonhador e eternamente grato.

Aos meus pais, Benedito e Silvia, pelo amor, incentivo e por me mostrarem a importância da educação.

Aos meus irmãos Alessandro e Samuel pelo carinho e por compreenderem minha ausência.

À minha querida orientadora, professora Liliane, pela dedicação, paciência e por me ensinar não somente Matemática.

Ao professor Olímpio pelo incentivo e por sempre acreditar em minhas capacidades.

Ao professor Elves e João Carlos pelas sugestões na finalização deste trabalho.

À Aline e ao Jhone, por serem mais que amigos e sempre me apoiarem nos momentos de dificuldade e se alegrarem comigo nos momentos felizes.

Ao Ângelo, Euro, Fernando e Juliana pela amizade, apoio e por nossas produtivas discussões.

Aos meus amigos do Ministério Universidades Renovadas e da Comunidade Católica na UnB por me ajudarem a conciliar fé e razão. Especialmente: Adriana, Elaina, James, Janaína, Leonan, Marília, Leiriane, Rômulo e Rodrigo Coelho.

Aos colegas e amigos da UnB: Raquel, Adriana, Albérico, Anderson, Bianka, Daniel Ventura, Daniel Guimarães, Jander, Leonardo, Neiton, Débora, Fágner, Fabiana, Thiago, Walter, Marcos Rodrigo, Zhou, Adail, Letícia, Abílio, Elson, Marcos, Willian, Evander, Allan, Anyelle, Sérgio, Miguel, Ricardo, Manuela, Luverci e a todos aqueles que não citei mas sempre estarão em meu coração pelos momentos de alegria e tristezas que passamos juntos.

Aos meus professores da UFV por me revelarem as belezas da Matemática, especialmente à Margareth, Lucy e Marinês.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB, que de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho. Especialmente, à Tânia Sertão e ao prof. José Valdo.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

“A certeza que trago no coração é de que todos os sonhos inspirados no Senhor conduzem-nos para muito além do que podemos ver, sentir, ouvir, tocar... Porque fomos fiéis no pouco, o Senhor nos confiou mais e mais. Ó graça infinita, ó deliciosa aventura.”

(Ivna Sá)

Dedico esta conquista a meus pais, pessoas que amo e respeito.

Resumo

Consideramos um funcional I associado à equação de Euler-Lagrange de um problema elíptico e mostramos que, sob certas condições de crescimento, um mínimo local de I na topologia C^1 é também um mínimo local na topologia H^1.

Aplicamos esses resultados para provarmos a existência de soluções de uma classe de equações elípticas, que são mínimos locais do funcional I.

Adicionalmente, apresentamos um resultado para o caso de I com crescimento supercrítico, no qual um mínimo local em C^1 não é um mínimo local em H^1.

Abstract

We consider a functional I associed to the Euler-Lagrange equation of an elliptic problem. Under suitable assumptions we present a proof that a local minimizer of I in the C^1 topology must be a local minimizer in the H^1 topology.

We apply these results to prove the existence of solutions for a class of elliptic equations by obtaining local minimizers of the functional I.

Moreover, we show that for some problems with supercritical nonlinearities a local minimum in C^1 is not in H^1.

Sumário

Introdução **1**

1 Resultados preliminares **3**

1.1 O Teorema de Brezis-Kato 3

2 Mínimos locais nas topologias C^1 e H^1 **13**

2.1 O Teorema de Brezis-Nirenberg 13

2.2 Soluções de equações elípticas via minimização 21

3 Existência de soluções **32**

3.1 O caso crítico 32

3.2 O caso subcrítico 51

4 Mínimos locais em C^1 mas não em H^1 **57**

4.1 O caso supercrítico 57

A Resultados auxiliares **62**

A.1 Um problema auxiliar 62

A.2 Iteração monotônica 67

A.3 Lema auxiliar 71

B Resultados básicos **73**

Referências Bibliográficas **78**

Introdução

Neste trabalho, consideramos funcionais da forma

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx$$

onde

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$$

e $\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N \geq 1$, é um domíno limitado. Veremos que, de acordo com o Teorema de Brezis-Nirenberg [7], sob certas condições de crescimento (casos subcrítico e crítico), um mínimo local de I na topologia C^1 é também um mínimo local de I na topologia H^1.

Devido ao fato de um argumento de "bootstrap" não ser eficaz no caso crítico, necessitamos estudar o teorema de Brezis-Kato [6] de modo a garantirmos a regularidade da solução do problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio que pode ser ou não limitado.

Utilizamos o resultado de Brezis-Nirenberg [7] para garantir que uma solução do problema (1) encontrada pelo argumento de sub e supersolução é um mínimo local para I na topologia H^1.

Como exemplos das aplicações de Brezis-Nirenberg [7] a problema elípticos semilineares, estudamos um teorema de Ambrosetti-Brezis-Cerami [4], que ilustra o problema (1) em que

$$f(x,u) = \lambda u^q + u^p,$$

onde $0 < q < 1 < p \leq \dfrac{N+2}{N-2}$ e λ é um parâmetro real. Também estudamos um resultado de existência de um mínimo local para o funcional associado à equação de Euler-Lagrange

devido a Alama-Tarantello [2] em que

$$f(x,u) = \lambda u + W(x)f(u),$$

para $W \in C(\overline{\Omega})$ uma função que muda de sinal em um domńio limitado Ω e λ um parâmetro real.

Apresentamos ainda o resultado de Alama- Tarantello [3] em que foi estudado o problema elípitico

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u^q - h(x)u^p, & \\ u &> 0, & \text{em } \Omega \\ u &= 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, $h \geq 0$, $h \in L^\infty(\Omega)$ e $\dfrac{2N}{N-2} < q+1 < p+1$. No problema (2), um mínimo local na topologia C^1 não é um mínimo local na topologia H^1.

Nosso trabalho está organizado como segue.

No primeiro capítulo dedicamo-nos a estudar o Teorema de Brezis-Kato [6].

No capítulo 2 analisamos as condições de crescimento que implica que um mínimo local em C^1 seja também um mínimo local em H^1. Além disso, mostramos que uma solução do problema (1) encontrada via sub e supersolução é um mínimo local para I em H^1.

No capítulo 3 apresentamos exemplos de aplicação dos resultados do capítulo 2, com base nos resultados Ambrosetti-Brezis-Cerami [4] e Alama-Tarantello [2].

No capítulo 4, destacamos o resultado encontrado em [3] onde um mínimo local em C^1 não é mínimo em H^1.

Em todo o texto denotamos uma constante real genérica por C.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo daremos uma prova para o Teorema de Brezis-Kato encontrado em [6]. Veremos que sob certas condições a solução do operador de Schrödinger pertence a todos os espaços $L^p(\Omega),\ 2 \leq p < \infty$. Usaremos tal resultado na demonstração da regularidade de solução no caso crítico, no próximo capítulo.

1.1 O Teorema de Brezis-Kato

Sejam Ω um aberto arbitrário de $\mathbb{R}^N$ (limitado ou não) e $q \in L^1_{loc}(\Omega)$ uma função com valores reais. Consideramos

$$q^+ = \max(q, 0),\ q^- = \max(-q, 0).$$

Assumimos

$$q^- \in L^\infty(\Omega) + L^p(\Omega) \tag{1.1}$$

com

$$\begin{aligned} p = \frac{N}{2} \quad &\textit{quando} \quad N \geq 3, \\ p > 1 \quad &\textit{quando} \quad N = 2, \\ p = 1 \quad &\textit{quando} \quad N = 1. \end{aligned}$$

Teorema 1.1.1. *Seja $g \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ então existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\psi \in H^1_0(\Omega)$ a única solução de*

$$-\Delta\psi - q^-\psi + \lambda\psi = g \quad \textit{em} \quad \Omega \quad \textit{com } \lambda > \lambda_1, \tag{1.2}$$

satisfaz
i) $g \geq 0$ *quase sempre em* Ω *implica* $\psi \geq 0$ *quase sempre em* Ω*;*
ii) $\psi \in \bigcap_{2 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$.

Para demonstrarmos tal resultado precisamos do seguinte lema.

Lema 1.1.1. *Assuma que vale (1.1). Então para cada* $\epsilon > 0$*, existe uma constante* λ_ϵ *tal que*

$$\int_\Omega q^- |u|^2 \, dx \leq \epsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_\epsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

para todo $u \in H^1_0(\Omega)$.

Em particular

$$\int_\Omega q^- |u|^2 \, dx \leq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{1.3}$$

para todo $u \in H^1_0(\Omega)$.

Demonstração do lema: Escrevemos $q^- = q_1 + q_2$ com $q_1 \in L^\infty(\Omega)$ *e* $q_2 \in L^p(\Omega)$. Assim para cada número real $M > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega q^- |u|^2 \, dx = \int_\Omega (q_1 + q_2) |u|^2 \, dx = \int_\Omega q_1 |u|^2 \, dx + \int_\Omega q_2 |u|^2 \, dx &\leq \\
\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{[|q_2|>M]} |q_2| |u|^2 \, dx + \int_{[|q_2|\leq M]} |q_2| |u|^2 \, dx &\leq \\
\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{[|q_2|>M]} |q_2| |u|^2 \, dx + M \int_{[|q_2|\leq M]} |u|^2 \, dx &\leq \\
\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|q_2\|_{L^p([|q_2|>M])} \|u\|^2_{L^t(\Omega)} + M \|u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \\
(\|q_1\|_{L^\infty(\Omega)} + M) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|q_2\|_{L^p([|q_2|>M])} \|u\|^2_{L^t(\Omega)} &
\end{aligned}$$

com

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{t} = 1.$$

No caso em que $N \geq 3$ temos $t = 2^*$, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente de Sobolev. Pelo teorema das Imersões de Sobolev (B.0.5) temos que

$$\|u\|_{L^t(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Quando $N = 2$ temos $p > 1$ e assim $\dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{t} = 1 \Leftrightarrow 2 < t < \infty$. Novamente, segue do teorema das Imersões de Sobolev (B.0.5) que

$$\|u\|_{L^t(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Quando $N = 1$ temos $p = 1$ e assim $\dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{t} = 1$, e portanto

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Para concluirmos o lema em qualquer um dos casos, precisamos mostrar que se M for escolhido suficientemente grande então

$$C^2 \|q_2\|_{L^p([|q_2|>M])} < \epsilon.$$

De fato, segue de $q_2 \in L^p(\Omega)$ e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Note que existe $0 < \epsilon < 1$ tal que $\lambda_\epsilon < \lambda_1$. ■

Demonstração do teorema: (a) Multiplicando (1.2) por $-\psi^-$ e integrando obtemos por (1.3)

$$0 \leq (\lambda - \lambda_1) \int_\Omega \left|\psi^-\right|^2 \leq \int_\Omega |\nabla \psi|^2 - \int_\Omega q^- |\psi|^2 + \lambda \int_\Omega |\psi|^2 = -\int_\Omega g\psi^- \leq 0$$

onde a última desigualdade ocorre devido a $g \geq 0$ e $\psi^- \geq 0$. Assim obtemos $\psi^- \equiv 0$, logo $\psi \geq 0$.

(b) Consideramos três casos

1) $N = 1$; pelo teorema das Imersões de Sobolev (B.0.5)

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Logo $u \in L^2(\Omega) \cap \text{Ł}^\infty(\Omega)$ e pela desigualdade de interpolação $u \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 2$.

2)$N = 2$; pelo teorema das Imersões de Sobolev (B.0.5)

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ 2 \leq q < \infty$$

e nos dois casos o teorema fica provado.

3) $N \geq 3$

Seja $q_k^- = \min(q^-, k)$ um truncamento de q^- e tomamos $\psi_k \in H_0^1(\Omega)$ a única solução de

$$-\Delta\psi_k - q_k^-\psi_k + \lambda\psi_k = g. \tag{1.4}$$

Tal solução existe pelo teorema de Lax-Milgram. De fato, considere a forma bilinear $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$B[u,v] = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega (\lambda - q_k^-)uv.$$

Tal forma é contínua e coerciva pois,

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &\leq \int_\Omega |\nabla u \nabla v| + \int_\Omega \left|-q_k^-\right| |uv| + \int_\Omega |\lambda| \, |uv| \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + (\int_\Omega \left|-q_k^-\right| |u|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega \left|-q_k^-\right| |v|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + k \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \\
&\quad (\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} (\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_1 \|v\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + k \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \max\{\lambda_1, 1\}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

portanto, $B[u,v]$ é contínua. E mais,

$$\begin{aligned}
B[u,u] &= \int_\Omega \nabla u \nabla u - \int_\Omega q_k^- u^2 + \int_\Omega \lambda u^2 \\
&\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \epsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda_\epsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= (1-\epsilon) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + (\lambda - \lambda_\epsilon) \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \min\{(1-\epsilon), (\lambda - \lambda_\epsilon)\} (\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&= \min\{(1-\epsilon), (\lambda - \lambda_\epsilon)\} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $B[u,v]$ é coerciva, pois $\lambda > \lambda_1 > \lambda_\epsilon$ quando $0 < \epsilon < 1$.

Aplicando o teorema de Lax-Milgram encontramos uma única $\psi_k \in H_0^1(\Omega)$ solução de

$$-\Delta\psi - q_k^-\psi + \lambda\psi = g \quad em \quad \Omega \quad (\lambda > \lambda_1). \tag{1.5}$$

Além disso, pela parte a) do teorema concluímos que $\psi_k \geq 0$ em Ω. Vejamos que ψ_k converge fracamente para ψ em $H_0^1(\Omega)$ quando $k \to \infty$. Multiplicando a equação (1.4)

por ψ_k e integrando obtemos,

$$\int_\Omega |\nabla\psi_k|^2 - \int_\Omega q_k^- \psi_k^2 + \int_\Omega \lambda\psi_k^2 = \int_\Omega g\psi_k, \tag{1.6}$$

ou equivalentemente,

$$\int_\Omega |\nabla\psi_k|^2 - \int_\Omega q^- \psi_k^2 + \int_\Omega \lambda_1\psi_k^2 + \int_\Omega (q^- - q_k^-)\psi_k^2 + \int_\Omega (\lambda - \lambda_1)\psi_k^2 = \int_\Omega g\psi_k.$$

Como $\int_\Omega |\nabla\psi_k|^2 - \int_\Omega q^-\psi_k^2 + \int_\Omega \lambda_1\psi_k^2 \geq 0$ por (1.3) e $q^- - q_k^- \geq k$, temos que

$$k\int_\Omega \psi_k^2 + \int_\Omega (\lambda - \lambda_1)\psi_k^2 \leq \int_\Omega g\psi_k.$$

Seja $\alpha = \min(k, \lambda - \lambda_1) > 0$ assim

$$\alpha \int_\Omega \psi_k^2 \leq \int_\Omega g\psi_k$$

e pela desigualdade de Holder temos

$$\alpha \int_\Omega \psi_k^2 \leq (\int_\Omega g^2)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega \psi_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, utilizando a desigualdade de Young obtemos

$$\alpha \left\|\psi_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\epsilon \left\|g\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon \left\|\psi_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Assim

$$(\alpha - \epsilon) \left\|\psi_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\epsilon \left\|g\right\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{1.7}$$

Segue de (1.6), (1.7) e de $g \in L^2(\Omega)$ que

$$\int_\Omega |\nabla\psi_k|^2 \leq C,$$

pois,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\psi_k|^2 \leq \int_\Omega |\nabla\psi_k|^2 + \lambda\int_\Omega \psi_k^2 = \int_\Omega q_k^-\psi_k^2 + \int_\Omega g\psi_k \leq \\ \left\|g\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\psi_k\right\|_{L^2(\Omega)} + k\left\|\psi_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ C(\left\|g\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|g\right\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq C.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Segue de (1.7) e (1.8) que

$$\|\nabla\psi_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C$$

e portanto $\psi_k \to \psi$ fracamente em $H^1_0(\Omega)$.

Queremos provar que para cada $p \in [2,\infty)$ a função $\psi_k \in L^p(\Omega)$. Para simplificar a notação tomamos $\psi_k \equiv \psi$, deste modo nosso problema (1.4) é dado por

$$\begin{aligned} -\Delta\psi - q_k^-\psi + \lambda\psi &= g \\ \psi \in H^1_0(\Omega)\ . & \end{aligned} \tag{1.9}$$

Seja $\psi_n = \min(\psi, n) \geq 0$ e seja $2 \leq p < \infty$. Multiplicando (1.9) por ψ_n^{p-1} e integrando obtemos

$$-\int_\Omega \Delta\psi\psi_n^{p-1}dx - \int_\Omega q_k^-\psi\psi_n^{p-1}dx + \lambda\int_\Omega \psi\psi_n^{p-1}dx = \int_\Omega g\psi_n^{p-1}dx.$$

Por um lado, temos

$$-\int_\Omega \Delta\psi\psi_n^{p-1}dx = (p-1)\int_\Omega \psi_n^{p-2}\nabla\psi\nabla\psi_n dx \geq (p-1)\int_\Omega \psi_n^{p-2}\left|\nabla\psi_n\right|^2 dx$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta\psi\psi_n^{p-1}dx = \int_\Omega g\psi_n^{p-1}dx + \int_\Omega q_k^-\psi\psi_n^{p-1}dx - \lambda\int_\Omega \psi\psi_n^{p-1}dx &= \\ \int_\Omega g\psi_n^{p-1}dx + \int_{[\psi<n]} q_k^-\psi\psi_n^{p-1}dx + \int_{[\psi\geq n]} q_k^-\psi\psi_n^{p-1}dx - \lambda\int_\Omega \psi\psi_n^{p-1}dx &= \\ \int_\Omega g\psi_n^{p-1}dx + \int_{[\psi<n]} q_k^-\psi_n^p dx + \int_{[\psi\geq n]} q_k^-\psi\psi_n^{p-1}dx - \lambda\int_\Omega \psi\psi_n^{p-1}dx &+ \\ \int_{[\psi\geq n]} q_k^-\psi_n^p dx - \int_{[\psi\geq n]} q_k^-\psi_n^p dx &\leq \\ \int_\Omega g\psi_n^{p-1}dx + \int_\Omega q_k^-\psi_n^p dx + \int_{[\psi\geq n]} q_k^-\psi\psi_n^{p-1}dx &= \\ \int_\Omega g\psi_n^{p-1}dx + \int_\Omega q_k^-\psi_n^p dx + \int_{[\psi\geq n]} k\psi n^{p-1}dx &\ . \end{aligned}$$

Concluímos assim que

$$(p-1)\int_\Omega \psi_n^{p-2}\left|\nabla\psi_n\right|^2 dx \leq \int_\Omega g\psi_n^{p-1}dx + \int_\Omega q_k^-\psi_n^p\ dx + \int_{[\psi\geq n]} k\psi n^{p-1}dx \tag{1.10}$$

Pela desigualdade de Hölder, a primeira integral da direita é majorada por

$$\int_\Omega \left|g\psi_n^{p-1}\right| dx \leq (\int_\Omega |g|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega \left|\psi_n^{p-1}\right|^q dx)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_{L^p(\Omega)} \|\psi_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \tag{1.11}$$

onde $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Segue da desigualdade de Interpolação [5, pag. 57] que se $g \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ então $g \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 2$.

Temos ainda que

$$\int_\Omega q_k^- \, |\psi_n|^p \, dx \leq \int_\Omega q^- \, |\psi_n|^p \, dx = \int_\Omega q^- \left|\psi_n^{\frac{p}{2}}\right|^2 dx \quad \leq$$
$$\epsilon \left\|\nabla(\psi_n^{\frac{p}{2}})\right\|_{L^2\Omega}^2 + \lambda_\epsilon \left\|\psi_n^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^2\Omega}^2 = \epsilon \left\|\nabla(\psi_n^{\frac{p}{2}})\right\|_{L^2\Omega}^2 + \lambda_\epsilon \|\psi_n\|_{L^p\Omega}^p$$

onde as desigualdades seguem de $q_k^- \leq q^-$, lema (1.1.1) e $\left\|\psi_n^{\frac{p}{2}}\right\|_{L^2\Omega}^2 = \int_\Omega \left|\psi_n^{\frac{p}{2}}\right|^2 dx = \int_\Omega |\psi_n^p| \, dx = \|\psi_n\|_{L^p(\Omega)}^p$. Como

$$\left\|\nabla(\psi_n^{\frac{p}{2}})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega (\frac{p}{2}\psi_n^{\frac{p-2}{2}} \nabla\psi_n)^2 dx = \frac{p^2}{4} \int_\Omega \psi_n^{p-2} |\nabla\psi_n|^2 dx$$

decorre de (1.10), (1.1), das desigualdades acima e do lema (1.1.1) que

$$\frac{4(p-1)}{p^2} \int_\Omega \left|\nabla(\psi_n^{\frac{p}{2}})\right|^2 dx \leq \|g\|_{L^p(\Omega)} \|\psi_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + \int_\Omega q^- \psi_n^p \, dx + kn^{p-1} \int_{[\psi>n]} \psi \, dx \quad \leq$$
$$\|g\|_{L^p(\Omega)} \|\psi_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + \epsilon \left\|\nabla(\psi_n^{\frac{p}{2}})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_\epsilon \|\psi\|_{L^p(\Omega)}^p + k \int_{[\psi>n]} \psi^p dx \quad .$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno teremos

$$\left\|\nabla(\psi_n^{\frac{p}{2}})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_p \left\{ \|g\|_{L^p(\Omega)} \|\psi_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + \lambda_\epsilon \|\psi\|_{L^p(\Omega)}^p + k \int_{[\psi>n]} \psi^p dx \right\}$$

onde C_p é uma constante que depende de p. Pela desigualdade de Young temos

$$\|g\|_{L^p(\Omega)} \|\psi_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \leq \epsilon \|g\|_{L^p(\Omega)}^p + C_\epsilon (\|\psi_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1})^q = \epsilon \|g\|_{L^p(\Omega)}^p + C_\epsilon \|\psi_n\|_{L^p(\Omega)}^p ,$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Deste modo

$$\left\|\nabla(\psi_n^{\frac{p}{2}})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_p \left\{ \|g\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\psi_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{[\psi>n]} \psi^p dx \right\}$$

onde C_p depende de p mas não depende de k e n. Como

$$\left\|\psi_n^{\frac{p}{2}}\right\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} = [\int_\Omega (\psi_n^{\frac{p}{2}})^{2^*}]^{\frac{2}{2^*}} = [(\int_\Omega \psi_n^{p\frac{2^*}{2}})^{\frac{1}{2^*}\frac{2}{p}}]^{2\frac{p}{2}} = [(\int_\Omega \psi_n^{p\frac{2^*}{2}})^{\frac{1}{2^*}\frac{2}{p}}]^p = \|\psi_n\|^p_{L^{\frac{p2^*}{2}}(\Omega)}.$$

Segue da desigualdade de Sobolev - Gagliardo - Nirenberg que

$$\|\psi_n\|^p_{L^{p\frac{2^*}{2}}(\Omega)} \leq \left\|\nabla(\psi_n^{\frac{p}{2}})\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\|\psi_n\|^p_{L^{p\frac{2^*}{2}}(\Omega)} \leq C_p\left\{\|g\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\psi_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \int_{[\psi>n]} \psi^p dx\right\}.$$

Como $\psi_n \to \psi$ quase sempre em Ω e $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ temos, pelo teorema da Convergência Monótona, que $\|\psi_n\|^p_{L^p(\Omega)} \to \|\psi\|^p_{L^p(\Omega)}$ para todo $p \geq 2$. Assim, passando o limite quando $n \to \infty$ obtemos

$$\|\psi\|^p_{L^{p\frac{2^*}{2}}(\Omega)} \leq C_p\left\{\|g\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\psi\|^p_{L^p(\Omega)}\right\}. \tag{1.12}$$

Sabendo que $g \in L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 2$, que $\psi \in L^2(\Omega)$ e fazendo iterações começando com $p = 2$ obtemos

$$\|\psi\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_2\left\{\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} < \infty.$$

Agora fazendo para $p = 2^*$ obtemos

$$\|\psi\|^{2^*}_{L^{2^*\frac{2^*}{2}}(\Omega)} \leq C_{2^*}\left\{\|g\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} + \|\psi\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)}\right\} < \infty,$$

onde a última desigualdade segue do passo anterior. Continuando este processo e sabendo que $\dfrac{(2^*)^n}{2} \to \infty$, obtemos que $\psi \in L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 2$.

Falta mostrar que

$$\|\psi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p\left\{\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}.$$

Segue da desigualdade de Interpolação que

$$\|g\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega g^p(x)dx = \int_\Omega g^2(x)g^{p-2}(x)dx \leq \|g\|^{p-2}_{L^\infty(\Omega)}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e assim pela desigualdade de Young para $r = \dfrac{p}{p-2}$, $s = \dfrac{p}{2}$ temos

$$\|g\|_{L^p(\Omega)} \leq C(p)\left\{\|g\|_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right\}. \tag{1.13}$$

Como para $a, b > 0$ vale $(a+b)^s \leq \gamma(s)(a^s + b^s)$, com $0 < s < \infty$, $\gamma(s)$ constante real, então segue de (1.12) e (1.13) que

$$\|\psi\|^p_{L^{p\frac{2^*}{2}}(\Omega)} \leq C_p\{\|g\|^p_{L^\infty(\Omega)} + \|g\|^p_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|^p_{L^p(\Omega)}\}. \tag{1.14}$$

Além disso,

$$\|\psi\|^p_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|g\|^p_{L^2(\Omega)} \tag{1.15}$$

pois, sabemos que existe uma única $\psi \in H^1_0(\Omega)$ que satisfaz (1.2). De fato

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla\psi|^2\,dx + \lambda\int_\Omega \psi^2 dx = \int_\Omega q^-\psi^2 dx + \int_\Omega g\psi dx &\leq \\
\int_\Omega |\nabla\psi|^2\,dx + \lambda_1\int_\Omega \psi^2 dx + \|g\|_{L^2(\Omega)}\,\|\psi\|_{L^2(\Omega)} &\Rightarrow \qquad (1.16)\\
(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega \psi^2 dx \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\,\|\psi\|_{L^2(\Omega)} &\Rightarrow \\
(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega \psi^2 dx \leq C(\epsilon)\,\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon\,\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} &\Rightarrow \qquad (1.17)\\
(\lambda-\lambda_1-\epsilon)\int_\Omega \psi^2 dx \leq C(\epsilon)\,\|g\|^2_{L^2(\Omega)} &\Rightarrow \\
\|\psi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|g\|^2_{L^2(\Omega)}\,,&
\end{aligned}$$

onde (1.16) ocorre graças ao lema (1.1.1) e a desigualdade de Holder, enquanto (1.17) decorre da desigualdade de Young.

Para concluir utilizando (1.14) e (1.15) precisamos da seguinte afirmação.

Afirmação: $\|\psi\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|\psi\|^p_{L^2(\Omega)} + \epsilon\,\|\psi\|^p_{L^{p\frac{2^*}{2}}(\Omega)}$.

De fato, seja $2 \leq p \leq p\dfrac{2^*}{2}$, assim $p = 2\lambda + (1-\lambda)p\dfrac{2^*}{2} \Leftrightarrow 1-\lambda = \dfrac{2}{2^*}(1-\dfrac{2\lambda}{p}) = \dfrac{2}{2^*}(\dfrac{p-2\lambda}{p})$.

Deste modo

$$\begin{aligned}
\|\psi\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega \psi^p dx = \int_\Omega \psi^{2\lambda+(1-\lambda)p\frac{2^*}{2}} &\leq \qquad (1.18)\\
(\int_\Omega \left|\psi^2\right| dx)^\lambda (\int_\Omega \left|\psi^{p\frac{2^*}{2}}\right| dx)^{(1-\lambda)} &= \\
(\int_\Omega \left|\psi^2\right| dx)^\lambda (\int_\Omega \left|\psi^{p\frac{2^*}{2}}\right| dx)^{(\frac{2}{2^*}(\frac{p-2\lambda}{p}))} &\leq \\
C(\epsilon)(\int_\Omega \left|\psi^2\right| dx)^{\lambda\frac{p}{2\lambda}} + \epsilon(\int_\Omega \left|\psi^{p\frac{2^*}{2}}\right| dx)^{\frac{p}{p-2\lambda}\frac{2}{2^*}(\frac{p-2\lambda}{p})} &= \qquad (1.19)\\
C(\epsilon)\,\|\psi\|^p_{L^2(\Omega)} + \epsilon\,\|\psi\|^p_{L^{p\frac{2^*}{2}}(\Omega)}&
\end{aligned}$$

onde a desigualdade em (1.18) segue pela desigualdade de Hölder e (1.19) decorre da desigualdade de Young.

Portanto segue da afirmação acima e de (1.14), (1.15) que para todo $p \geq 2$

$$\|\psi\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(q^-)\{\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^\infty(\Omega)}\}.$$

■

Capítulo 2

Mínimos locais nas topologias C^1 e H^1

Sejam $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira regular. Considere o funcional

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx \tag{2.1}$$

em que $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ satisfaz a condição de crescimento

$$|f(x,u)| \leq C(1+|u|^p) \text{ para todo } x \in \Omega, \tag{2.2}$$

onde $1 \leq p \leq \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, $1 \leq p < \infty$ se $N = 1$ ou 2 e f é uma função Carathéodory, isto é, f é mensurável em $x \in \mathbb{R}^N$, para cada u fixado e contínua em $u \in \mathbb{R}$.

Nos baseamos em [7] para garantir neste capítulo que um mínimo do funcional I em C^1 é também um mínimo de I em $H_0^1(\Omega)$. E usaremos tal resultado para mostrar que uma solução encontrada via sub e supersolução é também um mínimo do funcional associado ao problema na topologia de $H_0^1(\Omega)$.

2.1 O Teorema de Brezis-Nirenberg

Teorema 2.1.1. *Suponha que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ é um mínimo local de I na topologia $C^1(\Omega)$, isto é, existe algum número real $r > 0$ tal que*

$$I(u_0) \leq I(u_0+v), \quad para \quad todo \quad v \in C_0^1(\bar{\Omega}), \quad satisfazendo \quad \|v\|_{C^1(\Omega)} \leq r. \tag{2.3}$$

Então u_0 é um mínimo local de I na topologia $H_0^1(\Omega)$, isto é, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$I(u_0) \leq I(u_0 + v), \quad para \quad todo \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad satisfazendo \ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \epsilon_0. \tag{2.4}$$

Demonstração: A demonstração será dividida em três etapas.

Primeira etapa

Afirmação: $u_0 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, para todo $0 < \alpha < 1$.

De fato, lembramos que u_0 satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

no sentido fraco. No caso em que $p < \dfrac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$, usaremos o argumento de "bootstrap" para provar a regularidade da solução e no caso $p = \dfrac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$ usaremos um resultado auxiliar, o Teorema de Brezis - Kato (1.1.1), pois o argumento de "bootstrap" não funciona. De fato, nesse caso segue que se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ então pelo Teorema de Sobolev $u_0 \in L^{2^*}(\Omega)$, assim $f \in L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)$, onde $\dfrac{2^*}{p} = \dfrac{2N}{N+2}$. Agora observe que

$$\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} = \frac{N+2}{2N} - \frac{2}{N} = \frac{1}{2^*} > 0.$$

Então $W^{2,\frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_1}(\Omega)$ com $\dfrac{1}{t_1} = \dfrac{p}{2^*} - \dfrac{2}{N}$ de onde segue que $t_1 = 2^*$ e assim, obtém-se novamente $u_0 \in L^{2^*}(\Omega)$.

Vamos agora construir o argumento de "bootstrap" para o nosso problema, no caso em que $p < 2^* - 1$.

Se $N = 1$ ou $N = 2$, como $u_0 \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \in [2, \infty)$ e $|u_0|^p$ pertence a $L^q(\Omega)$, para todo $q \in [2, \infty)$ temos que $f(x, u_0) \in L^q(\Omega)$ e por (B.0.4) $u \in W^{2,q}(\Omega)$, $2 \leq q < \infty$. Pelo teorema (B.0.6) $u_0 \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < 1 - \dfrac{N}{q} = 1 - \dfrac{2}{q}$, para todo $q \geq 2$.

Se N≥3, defina

$$p_0 = \frac{2^*}{p}.$$

Por (2.2) temos que $f(x, u_0) \in L^{p_0}(\Omega)$ e pelo teorema (B.0.4) $u \in W^{2,p_0}(\Omega)$.

Se $2p_0 > N$, então $u_0 \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$, com $\theta = 1 - \dfrac{N}{2p_0}$, e pelos mesmos argumentos usados no caso $N = 1$ temos que $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para todo $0 < \alpha < 1$.

Se $2p_0 = N$, como $u_0 \in L^q(\Omega)$ para todo $1 < q < \infty$ e, segue de (2.2) que $f(x, u_0) \in L^q(\Omega)$. Segue do teorema (B.0.4) que $u_0 \in W^{2,q}(\Omega)$, para todo $1 < q < \infty$ e pelo teorema (B.0.6) $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para todo $0 < \alpha < 1$.

Se $2p_0 < N$, como $u_0 \in W^{2,p_0}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_0}(\Omega)$ com $\dfrac{1}{t_0} = \dfrac{1}{p_0} - \dfrac{2}{N}$, segue de (2.2) que $f(x, u_0) \in L^{p_1}$, onde

$$p_1 = \frac{t_0}{p} > p_0.$$

Temos ainda que $t_0 > 2^*$, pois

$$t_0 > 2^* \Leftrightarrow \frac{1}{t_0} < \frac{1}{2^*} \Leftrightarrow \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N} < \frac{1}{2^*} \quad \Leftrightarrow \tag{2.6}$$

$$p < (\frac{1}{2^*} + \frac{2}{N})2^* \Leftrightarrow p < (\frac{N-2}{2N} + \frac{2}{N})\frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow p < \frac{N+2}{N-2} \quad . \tag{2.7}$$

Assim, existe $j \in \mathbb{R}$ tal que

$$jp(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{t_0}) > \frac{1}{t_0}. \tag{2.8}$$

Se $p_1 > \dfrac{N}{2}$ então $u_0 \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$, com $\theta = 1 - \dfrac{N}{2p_1}$ e assim, como no caso $N = 1$, segue que $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para todo $0 < \alpha < 1$.

Se $p_1 = \dfrac{N}{2}$ tratamos da mesma forma que $2p_0 = N$.

Se $p_1 < \dfrac{N}{2}$, temos $W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_1}(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{2}{N} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N} = \frac{p}{t_0} - \frac{p}{2^*} + \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N} = p(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{2^*}) + \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N}.$$

Continuando este processo, depois de j etapas, teremos $p_j = \dfrac{t_{j-1}}{p}$ com $p_j \geq \dfrac{N}{2}$, o que nos dá como no caso $N = 1$ que $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para todo $0 < \alpha < 1$. Caso contrário teríamos

$p_j < \dfrac{N}{2}$, e assim

$$0 < \frac{1}{t_j} = \frac{1}{p_j} - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^{j}(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{i-1}}) + \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N} \leq jp(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{2^*}) + \frac{1}{t_0} \tag{2.9}$$

o que contraria (2.8). A última desigualdade da inequação acima segue de

$$\sum_{i=1}^{j}(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{i-1}}) \leq jp(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{2^*}),$$

visto que $\dfrac{1}{t_0} = \dfrac{1}{p_0} - \dfrac{2}{N}$. Passamos à demonstração dessa desigualdade. Observe que $p_0 < p_1 < ... < p_{j-1} < p_j$ pois $p_0 < p_1$, visto que $\dfrac{p}{2^*} > \dfrac{p}{t_0}$ se, e somente se, $\dfrac{N+2}{N-2} > p$. Usaremos o Princípio de Indução Finita para mostrarmos que $p_{j-1} < p_j$; para isso suponhamos que $p_{j-2} < p_{j-1}$. Assim,

$$\frac{1}{p_j} - \frac{1}{p_{j-1}} = \frac{p}{t_{j-1}} - \frac{p}{t_{t-2}} = p(\frac{1}{p_{j-1}} - \frac{2}{N}) - p(\frac{1}{p_{j-2}} - \frac{2}{N}) = p(\frac{1}{p_{j-1}} - \frac{1}{p_{j-2}}) < 0,$$

portanto $p_{j-1} < p_j$. Por um lado temos

$$\frac{1}{p_{i-1}} - \frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_{i-1}} - \frac{p}{t_{i-1}} = \frac{1}{p_{i-1}} - \frac{p}{p_{i-1}} + \frac{2p}{N} = \frac{1-p}{p_{i-1}} + \frac{2p}{N}$$

onde a primeira igualdade segue de $p_i = \dfrac{t_{i-1}}{p}$ e a segunda igualdade segue de $\dfrac{1}{t_{i-1}} = \dfrac{1}{p_{i-1}} - \dfrac{2}{N}$. Por outro lado temos

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_0} - \frac{p}{t_0} = \frac{1}{p_0} - p(\frac{1}{p_0} - \frac{2}{N}) = \frac{1-p}{p_0} + \frac{2p}{N}.$$

Como $0 < p_0 < p_{i-1}$ segue que $\dfrac{1}{p_0} - \dfrac{1}{p_1} \leq \dfrac{1}{p_{i-1}} - \dfrac{1}{p_i}$. Além disso $\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_0} = \dfrac{p}{t_0} - \dfrac{p}{2^*} = p(\dfrac{1}{t_0} - \dfrac{1}{2^*})$, portanto $\sum_{i=1}^{j}(\dfrac{1}{p_i} - \dfrac{1}{p_{i-1}}) \leq \sum_{i=1}^{j} p(\dfrac{1}{t_0} - \dfrac{1}{2^*}) = jp(\dfrac{1}{t_0} - \dfrac{1}{2^*})$.

Concluímos que $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para todo $0 < \alpha < 1$ se $p < \dfrac{N+2}{N-2}$.

Trataremos agora o caso $p = \dfrac{N+2}{N-2}$. Para tanto, escrevemos $f(x, u_0)$ na seguinte forma

$$f(x, u_0) = a(x)u_0 + b(x) \tag{2.10}$$

em que

$$a(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x,u_0(x))}{u_0(x)} & \text{onde } |u_0(x)| > 1 \\ \\ 0 & \text{onde } |u_0(x)| \leq 1 \end{cases}$$

e

$$b(x) = \begin{cases} 0 & \text{onde } |u_0(x)| > 1 \\ \\ f(x,u_0) & \text{onde } |u_0(x)| \leq 1. \end{cases}$$

Se $|u_0(x)| > 1$ então $|a(x)| \leq \left|\dfrac{1}{u_0(x)}\right| C(1+|u_0(x)|^p) \leq 2C|u_0(x)|^{p-1}$ e se $|u_0(x)| \leq 1$ então $|a(x)| = 0$, para todo x. Portanto, $|a(x)| \leq C_1|u_0(x)|^{p-1}$ para todo x em Ω.

Além disso, como $u_0 \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ e assim $|a(x)|^{\frac{N}{2}} \leq (C_1|u_0(x)|^{p-1})^{\frac{N}{2}} = C_2\,|u_0|^{2^*}$ e portanto $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Além disso, segue de (2.2) que $b \in L^\infty(\Omega)$. Aplicando o teorema de Brezis-Kato (1.1.1) a

$$-\Delta u = a(x)u + b(x),$$

ou equivalentemente a,

$$-\Delta u - (a(x)+\lambda)u + \lambda u = b(x)$$

temos que $u_0 \in L^q(\Omega)$, para todo $2 \leq q < \infty$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Por (2.2) temos que $f(x,u_0) \in L^q(\Omega)$, para todo $2 \leq q < \infty$. Do teorema (B.0.4) segue que $u_0 \in W^{2,q}(\Omega)$, para todo $2 \leq q < \infty$ e do teorema (B.0.6) temos $u_0 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para todo $0 < \alpha < 1$. Assim fica provada a afirmação.

No que segue assumiremos, sem perda de generalidade, que $u_0 \equiv 0$.

Segunda etapa: Demonstração do teorema no caso subcrítico, $p < \dfrac{N+2}{N-2}$.

Suponhamos que a conclusão (2.4) não se verifique. Logo,

$$\text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } v_\epsilon \in B_\epsilon \text{ tal que } I(v_\epsilon) < I(0), \tag{2.11}$$

onde $B_\epsilon = \left\{u \in H_0^1(\Omega); \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \epsilon\right\}$.

Provemos que I tem um mínimo em B_ϵ. Para isso, verifiquemos que o funcional I é fracamente semicontínuo inferiormente. Como $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ é convexo e contínuo, logo fracamente semicontínuo inferiormente, basta provar que $\int_\Omega F(x,u)dx$ é fracamente semicontínuo inferiormente. De fato, como f satisfaz (2.2) temos

$$|F(x,u)| = \left|\int_0^u f(x,s)ds\right| \leq \int_0^u |f(x,s)|\,ds \leq \int_0^u C(1+|s|^p)ds \leq C(|u|+|u|^{p+1}). \tag{2.12}$$

Se $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ queremos utilizar o teorema da Convegência Dominada de Lebesgue para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega F(x, u_n)dx = \int_\Omega F(x, u)dx.$$

De fato, como $u \in H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ continuamente para $1 \leq q \leq 2^*$, se $N \geq 3$ e $1 \leq q < \infty$ se $N = 1$ ou $N = 2$, segue de (2.12) que $F(x, u_n) \in L^1(\Omega)$. Além disso, seja (x_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ convergindo fracamante para u. Seja (u_{n_j}) uma subsequência qualquer de (u_n). De agora em diante tomaremos sucessivas subsequências da subsequência (u_{n_j}) mas sempre usando o mesmo índice. Pela imersão compacta de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < 2^*$, se $N \geq 3$ e $1 \leq q < \infty$, se $N = 1$ ou 2. Deste modo se $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ temos $u_{n_j} \to u$ em $L^q(\Omega)$, para $1 \leq q < 2^*$ e pelo teorema (B.0.3) $u_{n_j}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω.

Falta mostrar que existe uma função $\phi(x) \in L^1(\Omega)$ tal que $|F(x, u_n)| \leq \phi(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta mostrar que $u_n^{p+1} \to u^{p+1}$ em $L^1(\Omega)$, e aplicar o teorema (B.0.3). Temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ compactamente, visto que $p+1 < 2^*$. Assim, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ então $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e daí, $u_n^{p+1} \to u^{p+1}$ em $L^1(\Omega)$.

Como B_ϵ é fracamente compacta em $H_0^1(\Omega)$ e I é fracamente semicontínuo inferiormente segue que I assume mínimo em B_ϵ. Seja v_ϵ tal mínimo.

Se provarmos que $v_\epsilon \to 0$ em C^1, obteremos uma contradição entre (2.3) e (2.11). Portanto a hipótese de contradição é falsa e a conclusão (2.4) se verifica neste caso.

Considere a correspondente equação de Euler para v_ϵ envolvendo um multiplicador de Lagrange $\mu_\epsilon \leq 0$, visto que v_ϵ é ponto de mínimo,

$$\langle I'(v_\epsilon), \xi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \mu_\epsilon (v_\epsilon, \xi)_{H_0^1}$$

para todo $\xi \in H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega (\nabla v_\epsilon.\nabla\xi - f(x, v_\epsilon)\xi)dx = \mu_\epsilon \int_\Omega \nabla v_\epsilon.\nabla\xi dx.$$

Então,

$$\int_\Omega (1 - \mu_\epsilon)\nabla v_\epsilon.\nabla\xi dx = \int_\Omega f(x, v_\epsilon)\xi dx$$

para todo $\xi \in H_0^1(\Omega)$ isto é, v_ϵ é solução fraca de

$$-(1 - \mu_\epsilon)\Delta v_\epsilon = f(x, v_\epsilon). \tag{2.13}$$

Como $\mu_\epsilon \leq 0$ temos que $(1-\mu_\epsilon) > 1$, e assim obtemos

$$-\Delta v_\epsilon = Cf(x, v_\epsilon), \text{ com } 0 < C < 1.$$

Pelo argumento de "bootstrap" da primeira etapa obtém-se de $\|v_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} < C$ que $\|v_\epsilon\|_{C^{1,\alpha}} < C$, onde C é uma constante não negativa e independente de ϵ.

Afirmamos que

$$v_\epsilon \to 0 \text{ em } C^1(\Omega), \text{ quando } \epsilon \to 0. \tag{2.14}$$

De fato, como $\|v_\epsilon\|_{C^{1,\alpha}} < C$ temos que $\|v_\epsilon\|_{C^{0,\alpha}} < C$ e $\|\nabla v_\epsilon\|_{C^{0,\alpha}} < C$ e assim, $\|\nabla v_\epsilon\|_\infty < C$. Logo temos pela Desigualdade do Valor Médio que

$$|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)| \leq \sup \|\nabla v_\epsilon\|_\infty |x-y| \leq C|x-y|$$

Assim v_ϵ satisfaz as hipóteses do teorema de Arzelá - Ascoli, logo $v_\epsilon \to v$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ e $v \in C(\overline{\Omega})$. Mas $v_\epsilon \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ e daí $v_\epsilon(x) \to 0$ quase sempre em Ω. Portanto $v \equiv 0$.

Como $|\nabla v_\epsilon(x) - \nabla v_\epsilon(y)| < C|x-y|^\alpha$, para algum $0 < \alpha < 1$ então ∇v_ϵ satisfaz o teorema de Arzelá - Ascoli, logo $\nabla v_\epsilon \to w$ e $w \in C(\overline{\Omega})$. Entretanto $\nabla v_\epsilon \to 0$ em $L^2(\Omega)$, assim $\nabla v_\epsilon(x) \to 0$ quase sempre em Ω. Portanto $w \equiv 0$.

Terceira etapa: Provaremos o teorema no caso crítico, $p = \dfrac{N+2}{N-2}$.

Como o argumento de "bootstrap" não pode ser aplicado usaremos mais uma vez o Teorema de Brezis - Kato (1.1.1), juntamente com o fato de que $\|v_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$, quando $\epsilon \to 0$.

Suponhamos que (2.4) seja falsa, então novamente assumiremos que (2.11) é verdadeira.

Para cada j, considere a função de truncamento

$$T_j(r) = \begin{cases} -j & se \quad r \leq -j, \\ r & se \quad -j < r < j, \\ j & se \quad r \geq j. \end{cases}$$

Sejam

$$f_j(x,s) = f(x, T_j(s)), \qquad F_j(x,u) = \int_0^u f_j(x,s)ds$$

e

$$I_j(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F_j(x,u)dx.$$

Como por hipótese f é contínua em na variável s e temos que $T_j(s) \to s$, quando $j \to \infty$, então $\lim_{j\to\infty} f_j(x,s) = f(x,s)$. Assim, $F_j(x,u(x)) = \int_0^{u(x)} f_j(x,s)ds = \int_0^{u(x)} f(x,s)ds = F(x,u(x))$, se $j \geq |u(x)|$. Logo

$$\int_\Omega F_j(x,u(x))dx = \int_{\{x:|u(x)|>j\}} F_j(x,u(x))dx + \int_{\{x:|u(x)|\leq j\}} F(x,u(x))dx$$

e como $u \in H_0^1(\Omega)$ então med$\{x : |u(x)| > j\} < \epsilon$, para todo $j > j_0$. Daí,

$$\int_{\{x:|u(x)|>j\}} F_j(x,u(x))dx \leq \int_{\{x:|u(x)|>j\}} c(|T_j(u(x))| + |T_j(u(x))|^{p+1})dx < \epsilon,$$

pois $T_j(u) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq 2^*$ e portanto $I_j(u) \to I(u)$ quando $j \to \infty$.

E mais, para cada $\epsilon > 0$ existe algum $j = j(\epsilon) \geq 1$ tal que $I_j(v_\epsilon) < I(0)$ pois $I(v_\epsilon) < I(0)$ *e* $I_j(v_\epsilon) \to I(v_\epsilon)$.

Como B_ϵ é fracamente compacta e $I_{j(\epsilon)}$ é fracamente contínua, temos que $\min I_{j(\epsilon)}$ é atingido em algum ponto de $H_0^1(\Omega)$. Seja w_ϵ tal ponto, então

$$I_{j(\epsilon)}(w_\epsilon) \leq I_{j(\epsilon)}(v_\epsilon) < I(0).$$

Afirmação: $w_\epsilon \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e $w_\epsilon \to 0$ em $C^1(\Omega)$, quando $\epsilon \to 0$.

De fato, a equação de Euler para w_ϵ é

$$-(1-\mu_\epsilon)\Delta w_\epsilon = f_j(x,w_\epsilon). \tag{2.15}$$

como em (2.13).

Note que

$$|f_j(x,u)| \leq C(1+|u|^p), \tag{2.16}$$

pois $|f_j(x,u)| = |f_j(x,T_j(u))| \leq C(1+|T_j(u)|^p)$. Assim temos três possibilidades

$$\begin{array}{rclcll} |T_j(u)|^p & = & |-j|^p & \leq & |u|^p & se \quad u \leq -j \\ |T_j(u)|^p & = & |u|^p & & & se \quad |u| < j \\ |T_j(u)|^p & = & |j|^p & \leq & |u|^p & se \quad j \leq u \end{array}$$

com $p = \dfrac{N+2}{N-2}$ e C uma constante independente de j.

Pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ e $w_\epsilon \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$ segue que $w_\epsilon \to 0$ em $L^{2^*}(\Omega)$. Mais ainda, pelo teorema (B.0.3) existe uma função fixa h de $L^{2^*}(\Omega)$ tal que $|w_\epsilon| \leq h$, para todo $\epsilon > 0$. Logo por (2.16) temos que

$$|f_j(x, w_\epsilon)| \leq C(1 + |w_\epsilon|^p)$$

o que implica por (2.10) que

$$f_j(x, w_\epsilon) = C(1 + a|w_\epsilon|)$$

onde $a = h^{\frac{4}{N-2}} \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, visto que $h \in L^{2^*}(\Omega)$ e a e C independem de ϵ.

Pelo argumento de "bootstrap" da primeira etapa, segue de (2.15) e (2.16) que w_ϵ é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ por uma constante que independe de ϵ. Analogamente a (2.14) mostramos que $w_\epsilon \to 0$ em C^1, visto que $w_\epsilon \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Da afirmação acima segue que para ϵ suficientemente pequeno

$$I(w_\epsilon) \leq I_{j(\epsilon)}(v_\epsilon) < I(0),$$

o que contradiz (2.3).

■

2.2 Soluções de equações elípticas via minimização

No próximo teorema encontraremos uma solução para o problema (2.5) via sub e supersolução. Tal resuldado já é bem conhecido, o que inova o resultado é o fato de tal solução ser mínimo do funcional associado a (2.5) em $H_0^1(\Omega)$.

Para isto consideremos I dado por (2.1) em que f satisfaz

$$f(x,u) + ku \text{ é não decrescente em } u \text{ para quase todo } x, \text{ para alguma constante } k, \quad (2.17)$$

Assumimos que temos uma sub e uma supersolução $\underline{u}$ e $\overline{u}$ em $C(\overline{\Omega})$, respectivamente, no sentido das distribuições e que $\underline{u}$ nem $\overline{u}$ é solução de (2.5).

Teorema 2.2.1. *Nas condições acima existe uma solução u_0 de (2.5), $\underline{u} \leq u_0 \leq \overline{u}$, tal que u_0 é um mínimo local de I em $H_0^1(\Omega)$.*

Para demonstrarmos o teorema precisamos do seguinte lema.

Lema 2.2.1. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e assumindo que, para algum $k \geq 0$, u satisfaz*

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u + ku & \geq & 0 & \text{em } \Omega, \\ u & \geq & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}$$

Então $u \equiv 0$, ou existe $\epsilon > 0$ tal que $u(x) \geq \epsilon\ dist(x, \partial\Omega)$.

Demonstração do lema: Temos que a medida μ definida por $-\Delta u + ku$, no sentido das distribuições, é não negativa em Ω. Podemos assumir $u \not\equiv 0$.

Caso 1 : $\mu \equiv 0$.

Neste caso,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + ku & = & 0 & \text{em } \Omega, \\ u & \geq & 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

e como $k \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ temos que $-ku \in L^1_{loc}\Omega$. Pelo Teorema (B.0.16) temos que $u \in L^{q_0}_{loc}(\Omega)$ com $q_0 = \dfrac{N}{N-2}$. Então $-ku \in L^{q_0}_{loc}(\Omega)$ e novamente pelo Teorema (B.0.16) $u \in L^{q_1}_{loc}(\Omega$ com $q_1 = \dfrac{N}{N-4}$ se $N > 4$. Continuando este processo depois de n etapas teremos $-ku \in L^p_{loc}(\Omega),\ p > \dfrac{N}{2}$. Assim pelo Teorema (B.0.16), $u \in C^{0,\alpha}(\Omega),\ 0 < \alpha < \dfrac{N}{p}$. Então pelo Teorema (B.0.17) $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Fazendo iterações neste processo conseguimos $u \in C^\infty(\Omega)$. Como $u \not\equiv 0$, então $u \geq c_0 > 0$ em alguma bola fechada B contida em Ω. Seja $\Omega_j = \left\{ x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \dfrac{1}{j} \right\}$, para $j \geq 1$ uma sequência de subdomínios de Ω com fronteira suave e $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$. Suponha que $B \subset \Omega_j$, para todo j. Seja h_j a solução, no sentido das distribuições, em $(\Omega_j \setminus B)$ de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta + k)h_j & = & 0 & \text{em } (\Omega_j \setminus B), \\ h_j & = & c_0 & \text{sobre } \partial B, \\ h_j & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega_j. \end{array} \right.$$

De fato segue de (B.0.10) que $h_j \in C^{2,\alpha}(\Omega_j) \cap C^0(\overline{\Omega_j`})$ e pelo Princípio do Máximo temos $u \geq h_j$ em $(\Omega_j \setminus B)$. Novamente pelo Princípio do Máximo temos que $h_j(x)$ é uma sequência não-decrescente e limitada superiormente por $u(x)$, logo convergente. Seja h o limite pontual de h_j quando $j \to +\infty$ .Fazendo $j \to +\infty$ obtemos $u \geq h$ em $(\Omega \setminus B)$ em que h é solução de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (-\Delta + k)h & = & 0 & \text{em } (\Omega \setminus B), \\ h & = & c_0 & \text{sobre } \partial B, \\ h & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Afirmação : $h(x) \geq \epsilon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ em $\Omega \setminus B$, para algum $\epsilon > 0$.
De fato, seja $x \in \partial\Omega$ e $B_{\delta_x}(x)$ de tal forma que $\bigcup_{x\in\partial\Omega} B_{\delta_x}(x)$ recubra toda a fronteira de Ω. Como $\partial\Omega$ é compacta temos que existe $1 \leq n < \infty$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_i}(x_i)$ recobre a $\partial\Omega$. Logo existe $\delta > 0$ tal que

$$N_\delta = \left\{x \in \overline{\Omega} : dist(x, \partial\Omega) < \delta\right\}$$

com $N_\delta \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_i}(x_i)$.

Seja $\overline{\Omega}_\delta = \overline{(\Omega \setminus B) \setminus N_\delta}$ assim $h(x) \geq \delta_0 > 0$, onde $\delta_0 = \min_{\overline{\Omega}_\delta} h(x)$ e se $x \in \Omega_\delta$ então $\delta \leq |x - y| \leq d$, para todo $y \in \partial\Omega$, onde d é o diâmetro de Ω. Deste modo,

$$h(x) \geq \frac{\delta_0}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{\delta_0}{d} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \text{ para todo } x \in \Omega_\delta. \tag{2.18}$$

Vejamos o que acontece próximo à fronteira de Ω. Pelo lema de Hopf temos que existe ϵ_0 tal que $-\epsilon_0 \geq \dfrac{\partial h}{\partial \nu}(x_0)$, para todo $x_0 \in \partial\Omega$, onde $-\epsilon_0 = \max_{x\in\partial\Omega} \left\{\dfrac{\partial h}{\partial \nu}(x)\right\}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial \nu}(x)$ é a derivada normal exterior de h no ponto $x \in \partial\Omega$. Definamos $g(t) = h(x + t(x_0 - x))$, $0 \leq t \leq 1$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt,$$

isto é,

$$h(x_0) - h(x) = \int_0^1 \nabla h(x + t(x_0 - x))(x - x_0)dt.$$

Como $x_0 \in \partial\Omega$, então $h(x_0) = 0$ e obtemos

$$\frac{h(x)}{|x - x_0|} = \int_0^1 h(x + t(x_0 - x)) \frac{(x - x_0)}{|x - x_0|} dt.$$

Assim $h(x) \geq \dfrac{\epsilon_0}{2} |x - x_0| \geq \dfrac{\epsilon_0}{2} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, para todo $x \in B_{\delta_{x_0}}(x_0)$. Portanto

$$h(x) \geq \frac{\epsilon_0}{2} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \text{ para todo } x \in N_\delta \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta_i}(x_i). \tag{2.19}$$

Portanto segue de (2.18) e de (2.19) que

$$h(x) \geq \epsilon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega).$$

A conclusão do lema no caso 1 segue de que $u \geq c_0 > 0$ na bola fechada $B \subset \Omega$ e da desigualdade $u \geq h$ em $(\Omega \setminus B)$.

Caso 2: $\mu \not\equiv 0$.

Seja $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função corte, $0 \leq \xi \leq 1$, tal que, $\xi\mu \not\equiv 0$. Seja v solução de

$$\begin{cases} (-\Delta + k)v &= \xi\mu \quad \text{em } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, . \end{cases}$$

como no caso 1 temos que $v \in C^\infty(\Omega)$ e como v se anula na fronteira de Ω então v é suave fora de um compacto contido em Ω. Novamente segue do lema de Hopf como acima que $v(x) \geq \epsilon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ em Ω para algum $\epsilon > 0$.

Para concluirmos o teorema, basta mostrar que $u \geq v$ em Ω. Para isso, dado qualquer $\alpha > 0$, vamos mostrar que $\overline{u} = u + \alpha \geq v$ em Ω. Note que $\omega^\alpha = \overline{u} - v$ satisfaz

$$(-\Delta + k)\omega^\alpha = (1 - \xi)\mu + k\alpha \geq 0 \; em \; \Omega \tag{2.20}$$

pois, fazendo a diferença entre $(-\Delta + k)v = \xi\mu$ *e* $(-\Delta + k)u = \mu$ encontramos $(-\Delta + k)(u - v) = (1 - \xi)\mu$. Somando-se $k\alpha$ em ambos os lados, encontramos a equação desejada. Além disso ω^α satisfaz

$$\omega^\alpha \geq 0 \text{ em } N_\delta = \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}, \tag{2.21}$$

visto que v é contínua numa vizinhança de $\partial\Omega$ e $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, portanto $|v(x)| < \dfrac{\alpha}{2}$ em N_δ, tomando-se δ suficientemente pequeno (dependendo de α).

Seja (ρ_j) uma sequência regularizante com supp $\rho_j \subset B(0, \dfrac{1}{j})$ e considere $\omega_j^\alpha = \rho_j * \omega^\alpha$. Sabemos que ω_j^α é suave e

$$\begin{aligned} (-\Delta + k)\omega_j^\alpha(x) &= (-\Delta + k)\int_\Omega \rho_j(x - y)\omega^\alpha(y)dy \\ &= \int_\Omega (-\Delta_x + k)\rho_j(x - y)\omega^\alpha(y)dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x + z$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-\Delta + k)\rho_j(x - y)\omega^\alpha(y)dy &= \int_{B(x, \frac{1}{j})} (-\Delta + k)\rho_j(x - y)\omega^\alpha(y)dy \\ &= \int_{B(0, \frac{1}{j})} (-\Delta + k)\rho_j(-z)\omega^\alpha(x + z)dz, \end{aligned}$$

visto que $\rho_j(z) \neq 0$, se e só se $z \in B(0, \frac{1}{j})$, se e só se $|z| < \dfrac{1}{j}$, se e só se $|x-y| < \dfrac{1}{j}$ se e só se $y \in B(x, \frac{1}{j})$, para x fixado. Assim

$$\begin{aligned}
(-\Delta + k)\omega_j^\alpha(x) &= (-\Delta + k)\int_\Omega \rho_j(x-y)\omega^\alpha(y)dy \\
&= (-\Delta + k)\int_{B(0,\frac{1}{j})} \rho_j(-z)\omega^\alpha(x+z)dz \\
&= \int_{B(0,\frac{1}{j})} \rho_j(-z)(-\Delta_x + k)\omega^\alpha(x+z)dz.
\end{aligned}$$

Por outro lado, segue de (2.20) que

$$(-\Delta_x + k)\omega^\alpha(x+z) \geq 0, \text{ para todo } (x+z) \in \Omega.$$

Se $z \in B(0, \frac{1}{j})$, temos que $(x+z) \in \Omega$, se e somente se $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \dfrac{1}{j}$.

Portanto

$$(-\Delta + k)\omega_j^\alpha \geq 0 \text{ sobre } (\Omega - \overline{N_{\frac{1}{j}}}).$$

Deduzimos de (2.21) que

$$\omega_j^\alpha \geq 0 \text{ sobre } N_{\delta - \frac{1}{j}}$$

pois,

$$\begin{aligned}
\omega_j^\alpha(x) = \int_{z \in B(0,\frac{1}{j})} \rho_j(z)\omega^\alpha(x+z)dz \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \\
(x+z) \in N_\delta, \text{ para todo } z \in B(0, \frac{1}{j}) \quad &\Leftrightarrow \\
x \in (N_\delta - z) \quad &\Leftrightarrow \\
x = y - z, \text{ para algum } y \in N_\delta \text{ e para todo } z \in B(0, \frac{1}{j}) \quad &\Leftrightarrow \\
x \in N_{\delta - \frac{1}{j}}. &
\end{aligned}$$

E em particular,

$$\omega_j^\alpha \geq 0 \; em \; \partial(\Omega - \overline{N_{\frac{1}{j}}})$$

desde que $\delta \geq \dfrac{2}{j}$. Passando o limite quando $j \to \infty$ temos pelo teorema (B.0.2) que

$$\omega^\alpha \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Portanto, tomando o limite quando $\alpha \to 0$ em

$$\overline{u} = u + \alpha \geq v$$

obtemos $u \geq v$ em Ω.

Assim

$$u(x) \geq \epsilon \text{ dist}(x, \partial\Omega) \text{ para algum } \epsilon > 0,$$

o que conclui o caso 2 e a demonstração do lema.

■

Demonstração do teorema (2.2.1): Consideramos uma função auxiliar

$$\widetilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(x, \underline{u}(x)) & se \quad s < \underline{u}(x) \\ f(x,s) & se \quad \underline{u}(x) \leq s \leq \overline{u}(x) \\ f(x, \overline{u}(x)) & se \quad s > \overline{u}(x), \end{cases}$$

$\widetilde{f} : \Omega \times [-n, M] \to \mathbb{R}$ contínua em s. Adicionalmente, sejam

$$\widetilde{F}(x,u) = \int_0^u \widetilde{f}(x,s)ds$$

e

$$\widetilde{I}(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \widetilde{F}(x,u)dx.$$

Vejamos que existe u_0 um mínimo de $\widetilde{I}$ na topologia de $H_0^1(\Omega)$. Observe que se

$$s < \underline{u}(x)$$

obtemos de (2.2) que

$$\left|\widetilde{f}(x,s)\right| = |f(x, \underline{u}(x))| \leq C(1 + |\underline{u}(x)|^p) \leq M_1, \text{ pois } \underline{u} \in C(\overline{\Omega}).$$

Se

$$\underline{u}(x) \leq s \leq \overline{u}(x)$$

temos

$$\left|\widetilde{f}(x,s)\right| = |f(x,s)| \leq C(1+|s|^p) \leq C(1+\max\{|\underline{u}(x)|^p, |\overline{u}(x)|^p\}) \leq M_2, \text{ pois } \underline{u}, \overline{u} \in C(\overline{\Omega}),$$

e se

$$s > \overline{u}(x)$$

temos

$$\left|\widetilde{f}(x,s)\right| = |f(x,\overline{u}(x))| \leq C(1+|\overline{u}(x))|^p) \leq M_3.$$

Assim

$$\left|\widetilde{f}(x,s)\right| \leq K$$

onde $K = \max\{M_1,\ M_2,\ M_3\}$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \widetilde{F}(x,u(x))dx\right| &\leq \int_\Omega \left|\widetilde{F}(x,u(x))\right| dx \\
&\leq \int_\Omega K\,|u(x)|\,dx \\
&= K\int_\Omega |u(x)|\,dx \\
&\leq K\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\,(med(\Omega))^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \widehat{K}\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\widetilde{I}(u) = \frac{1}{2}\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \widetilde{F}(x,u)dx \geq \frac{1}{2}\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

logo $\widetilde{I}(u)$ é coercivo.

Mostremos que $\widetilde{I}(u)$ é fracamente semicontínuo inferiormente. De fato, sabemos que $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ é convexo e contínuo, logo é fracamente semicontínuo inferiormente. Temos ainda que

$$\left|\widetilde{F}(x,u(x))\right| \leq K\,|u(x)| \tag{2.22}$$

assim se $u_n \rightharpoonup u$ então, pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega \left|\widetilde{F}(x,u_n)dx\right| \to \int_\Omega \left|\widetilde{F}(x,u)\right| dx.$$

De fato, como $u \in H^1_0(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq 2^*$, de (2.22) segue que $\widetilde{F}(x,u_n) \in L^q(\Omega)$. Além disso, como $u_n \rightharpoonup u$ *em* $H^1_0(\Omega)$ temos pelas imersões compactas

que $u_{n_j} \to u$ *em* $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < 2^*$. Pelo teorema (B.0.3) $u_{n_j}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω e existe $\varphi(x) \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left|\widetilde{F}(x, u_n)\right| \leq \varphi(x), \ \textit{para todo } n.$$

Assim, pelo teorema (B.0.7) temos que o mínimo é atingido. Seja u_0 este mínimo em $H_0^1(\Omega)$. Temos ainda que este satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u &= \widetilde{f}(x, u_0) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por regularidade, $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$, para todo $1 \leq p < \infty$.

Afirmação: $\underline{u} \leq u_0 \leq \overline{u}$

Provaremos a primeira desigualdade e a segunda segue de maneira análoga. Sabemos que

$$-\Delta \underline{u} \leq f(x, \underline{u})$$

e

$$-\Delta u_0 = \widetilde{f}(x, u_0)$$

Assim,

$$-\Delta(\underline{u} - u_0) \leq f(x, \underline{u}) - \widetilde{f}(x, u_0); \tag{2.23}$$

em particular

$$-\Delta(\underline{u} - u_0) \leq 0$$

em $\mathcal{A}$=$\{x \in \Omega; u_0(x) < \underline{u}(x)\}$, pois $\widetilde{f}(x, s) = f(x, \underline{u})$ se $s < \underline{u}(x)$.

Como $\underline{u} - u_0 \leq 0$ sobre $\partial\mathcal{A}$, pelo Princípio do Máximo temos que $\underline{u} - u_0 \leq 0$ em $\mathcal{A}$. Segue que $\mathcal{A} = \emptyset$ e portanto $\underline{u} \leq u_0$ em todo Ω.

Somando $k(\underline{u} - u_0)$ em ambos os lados de (2.23) obtemos

$$-\Delta(\underline{u} - u_0) + k(\underline{u} - u_0) \leq 0 \tag{2.24}$$

pois

$$\begin{aligned} -\Delta(\underline{u} - u_0) + k(\underline{u} - u_0) &\leq f(x, \underline{u}) - \widetilde{f}(x, u_0) + k(\underline{u} - u_0) \\ &= (f(x, \underline{u}) + k\underline{u}) + (\widetilde{f}(x, u_0) + ku_0) \\ &= (f(x, \underline{u}) + k\underline{u}) + (f(x, u_0) + ku_0) \qquad (2.25) \\ &\leq 0 \qquad (2.26) \end{aligned}$$

onde em (2.25) usamos o fato de que $\widetilde{f}(x,u_0) = f(x,u_0)$ se $\underline{u} \leq u_0 \leq \overline{u}$ e em (2.26) usamos o fato de $\underline{u} \leq u_0$ em Ω e $f + ku$ não-decrescente. Segue do lema (2.2.1) que

i)$\underline{u} - u_0 \equiv 0$ ou

ii) existe algum $\epsilon > 0$ tal que $\underline{u}(x) - u_0(x) \leq -\epsilon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, para todo $x \in \Omega$.

Mas i) não ocorre pois, caso contrário, teríamos que $\underline{u}$ é solução.

Analogamente para $\overline{u}$ teremos $\overline{u}(x) - u_0(x) \geq \epsilon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, para todo $x \in \Omega$.

Assim, existe algum $\epsilon > 0$ tal que

$$\underline{u}(x) + \epsilon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq u_0(x) \leq \overline{u}(x) - \epsilon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \tag{2.27}$$

para todo $x \in \Omega$.

Afirmação: Se $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e $\|u - u_0\|_{C^1} \leq \epsilon_0 < \epsilon$ então $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$ em Ω.

De fato, como $u \in C(\overline{\Omega})$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$, então u e $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ são uniformente contínuas. Logo, dado $\widehat{\epsilon} > 0$ existe $\delta_{\widehat{\epsilon}} > 0$ tal que se $|x - y| < \delta_{\widehat{\epsilon}}$, então

$$|u(x) - u(y)| < \widehat{\epsilon}$$

e

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right| < \widehat{\epsilon}.$$

Considere $N_{\delta_{\widehat{\epsilon}}} = \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta_{\widehat{\epsilon}}\}$.

Dado $x \in N_{\delta_{\widehat{\epsilon}}}$ tome $x_1 \in \partial\Omega$ tal que $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = |x - x_1| < \delta_{\widehat{\epsilon}}$. Pelo Teorema do Valor Médio sabemos que existem $\xi_1 \in [x, x_1]$ e $\tau_1 \in [x, x_1]$ tais que

$$u(x) = u(x_1) + \nabla u(\xi_1)(x - x_1)$$

e

$$u_0(x) = u_0(x_1) + \nabla u_0(\tau_1)(x - x_1).$$

Assim, considerando que $u(x_1) = u_0(x_1) = 0$, visto que $x_1 \in \partial\Omega$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \nabla u(\xi_1)(x - x_1) \\ &= u_0(x) + [\nabla u(\xi_1) - \nabla u_0(\tau_1)](x - x_1) \\ &= u_0(x) + [\nabla u(\xi_1) - \nabla u(\tau_1) - \nabla u_0(\tau_1) + \nabla u(\tau_1)](x - x_1). \end{aligned}$$

Como $\xi_1, \tau_1 \in [x, x_1]$ temos $|\xi_1 - \tau_1| \leq |x - x_1| < \delta_{\widehat{\epsilon}}$, logo

$$|[\nabla u(\xi_1) - \nabla u(\tau_1)](x - x_1)| \leq \widehat{\epsilon}\,|x - x_1|\,.$$

Além disso, $\|u - u_0\|_{C^1} \leq \epsilon_0$ implica

$$|\nabla u(\tau_1) - \nabla u_0(\tau_1)|\,|x - x_1| \leq \epsilon_0\,|x - x_1|\,.$$

Portanto,

$$\underline{u}(x)+\epsilon\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)-\widehat{\epsilon}\,|x-x_1|-\epsilon_0\,|x-x_1| \leq u(x) \leq \overline{u}(x)-\epsilon\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)+\widehat{\epsilon}\,|x-x_1|+\epsilon_0\,|x-x_1|\,.$$

Como $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) = |x - x_1|$ temos

$$\underline{u}(x) - \widehat{\epsilon}\,|x - x_1| + (\epsilon - \epsilon_0)\,|x - x_1| \leq u(x) \leq \overline{u}(x) + \widehat{\epsilon}\,|x - x_1| - (\epsilon - \epsilon_0)\,|x - x_1|\,.$$

Como $\widehat{\epsilon}$ é arbitrário, basta tomar $\widehat{\epsilon} = \dfrac{\epsilon - \epsilon_0}{2}$. Portanto

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$$

para todo $x \in N_{\delta_{\widehat{\epsilon}}}$.

Agora, se $x \in (\Omega - N_{\delta_{\widehat{\epsilon}}})$ então $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta_{\widehat{\epsilon}}$ e como $\|u - u_0\|_{C^1} \leq \epsilon_0$, segue de (2.27) que

$$\underline{u}(x)-\epsilon_0+\epsilon\delta_{\widehat{\epsilon}} \leq \underline{u}(x)+\epsilon\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)-\epsilon_0 \leq u(x) \leq \epsilon_0+\overline{u}(x)-\epsilon\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \leq \epsilon_0+\overline{u}(x)-\epsilon\delta_{\widehat{\epsilon}}.$$

Portanto

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \text{ para todo } x \in (\Omega - N_{\delta_{\widehat{\epsilon}}})$$

desde que $\delta_{\widehat{\epsilon}} \geq \dfrac{\epsilon_0}{\widehat{\epsilon}}$, e a afirmação fica provada.

Temos que $\widetilde{F}(x, u) - F(x, u)$ é uma função somente da variável x, desde que $u \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$, pois

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(x,u) - F(x,u) &= \int_0^u \widetilde{f}(x,s)ds - \int_0^u f(x,s)ds \\
&= \int_0^{\underline{u}} \widetilde{f}(x,s)ds + \int_{\underline{u}}^u \widetilde{f}(x,s)ds - \int_0^{\underline{u}} f(x,s)ds - \int_{\underline{u}}^u f(x,s)ds \\
&= \int_0^{\underline{u}} f(x,\underline{u})ds + \int_{\underline{u}}^u f(x,s)ds - \int_0^{\underline{u}} f(x,s)ds - \int_{\underline{u}}^u f(x,s)ds \\
&= \int_0^{\underline{u}} [f(x,\underline{u}) - f(x,s)]ds.
\end{aligned}$$

Assim, $I(u) - \widetilde{I}(u)$ é constante para $\|u - u_0\|_{C^1} < \epsilon_0$ visto que pela afirmação anterior $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$ e

$$\begin{aligned} I(u) - \widetilde{I}(u) &= \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega \widetilde{F}(x,u)dx \\ &= \int_\Omega [\widetilde{F}(x,u) - F(x,u)]dx = c. \end{aligned}$$

Por hipótese u_0 é um mínimo global de $\widetilde{I}$ na topologia de $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\widetilde{I}(u_0) \leq \widetilde{I}(u_0 + u), \quad \text{para todo} \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Se $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e $\|u - u_0\|_{C^1} < \epsilon_0$ segue que

$$I(u_0) = c + \widetilde{I}(u_0) \leq c + \widetilde{I}(u_0 + u) = I(u_0 + u),$$

portanto u_0 é mínimo local de I na topologia C^1.

Pelo teorema (2.1.1) temos que u_0 é também um mínimo local de I na topologia $H_0^1(\Omega)$.

Logo a prova do teorema (2.2.1) está completa. ■

Observação 2.2.1. *Vale ressaltar que em (2.24) precisamos do não-decrescimento da função $f(x,u) + ku$ somente no intervalo $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$.*

Capítulo 3

Existência de soluções

Neste capítulo fornecemos duas aplicações dos resultados do Capítulo 2. A primeira delas é um resultado de Ambrosetti-Brezis-Cerami [4] bastante conhecido e ilustra uma aplicação do teorema (2.1.1) e a segunda, um resultado de Alama-Tarantello [2] e ilustra uma aplicação do teorema (2.2.1).

Os teoremas deste capítulo tratam de múltiplas soluções para problemas da forma (2.5), onde a primeira é obtida via sub e supersolução e a segunda solução segue do Teorema do Passo da Montanha. Nos ateremos a ilustrar as aplicações do Capítulo 2, ou seja, a encontar a primeira solução do problema.

3.1 O caso crítico

Considere o problema elíptico como em Ambrosetti-Brezis-Cerami [4]

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^p & x \in \Omega \\ u &> 0 & x \in \Omega \\ u &= 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $N \geq 1$ e λ é um parâmetro real. Pela dependência de λ nós iremos nos referir ao problema (3.1) como sendo $(3.1)_\lambda$. No que segue, chamaremos de solução de $(3.1)_\lambda$ uma solução clássica $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.1.1. *Para todo $0 < q < 1 < p$ existe $\Lambda \in \mathbb{R}$, $\Lambda > 0$, tal que*
(i) para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema $(3.1)_\lambda$ tem uma solução minimal u_λ tal que $I_\lambda(u_\lambda) < 0$. Além disso u_λ é crescente com respeito a λ;

(ii) para $\lambda = \Lambda$ o problema $(3.1)_\lambda$ tem ao menos uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$;
(iii) para todo $\lambda > \Lambda$ o problema $(3.1)_\lambda$ não admite solução.

Para demonstrarmos o teorema acima precisamos de alguns resultados que enunciamos como lemas. Durante todo o capítulo Λ será o seguinte conjunto

$$\Lambda = \sup \{\lambda > 0 : (3.1)_\lambda \textit{ tem uma } \text{solução}\}.$$

Lema 3.1.1. $0 < \Lambda < \infty$

Demonstração: Seja e a solução de

$$\begin{cases} -\Delta e &= 1 \quad x \in \Omega \\ e &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

(tal solução existe pelo teorema (B.0.10)). Como $0 < q < 1 < p$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que se $0 < \lambda < \lambda_0$, então existe $M = M(\lambda) > 0$ satisfazendo

$$M \geq \lambda M^q \|e\|^q_{L^\infty(\Omega)} + M^p \|e\|^p_{L^\infty(\omega)}.$$

De fato, defina a função

$$g(t) = \lambda \frac{A}{t^{1-q}} + Bt^{p-1}$$

com $A, B > 0$, se mostrarmos que existe $t_0 > 0$ dependento de λ tal que $g(t_0) < 1$ então nosso problema estará resolvido pois fazendo $A = \|e\|^q_\infty$ e $B = \|e\|^p_\infty$ teremos $Mg(M) < M$. Derivando g em relação a t encontramos

$$g'(t) = \lambda A(q-1)t^{q-2} + B(p-1)t^{p-2}$$

fazendo $g'(t_0) = 0$ encontramos $t_0 = (\frac{\lambda A(1-q)}{B(p-1)})^{\frac{1}{p-q}}$. Mostremos que para este t_0 teremos $g(t_0) < 1$ desde que $\lambda < \lambda_0$, para algum $\lambda_0 >$ encontrado.

$$\begin{aligned} g(t_0) = \lambda A(\frac{\lambda A(1-q)}{B(p-1)})^{\frac{q-1}{p-q}} + B(\frac{\lambda A(1-q)}{B(p-1)})^{\frac{p-1}{p-q}} &= \\ \lambda\lambda^{\frac{q-1}{p-q}} A(\frac{A(1-q)}{B(p-1)})^{\frac{q-1}{p-q}} + \lambda^{\frac{p-1}{p-q}} B(\frac{A(1-q)}{B(p-1)})^{\frac{p-1}{p-q}} &= \\ \lambda^{\frac{p-1}{p-q}} A(\frac{A(1-q)}{B(p-1)})^{\frac{q-1}{p-q}} + \lambda^{\frac{p-1}{p-q}} B(\frac{A(1-q)}{B(p-1)})^{\frac{p-1}{p-q}}. \end{aligned}$$

Se $\lambda \approx 0$ então $g(t_0) \approx 0 < 1$.. A função Me verifica

$$M = -\Delta(Me) \geq \lambda(Me)^q + (Me)^p$$

Assim Me é uma supersolução de $(3.1)_\lambda$. Além disso, $\epsilon\phi_1$ onde ϕ_1 é a autofunção associada ao primeiro autovalor do operador $-\Delta$ satisfaz

$$\lambda_1\epsilon\phi_1 = -\Delta(\epsilon\phi_1) \leq \lambda\epsilon^q\phi_1^q + \epsilon^p\phi_1^p$$

para $\epsilon > 0$ tal que

$$\lambda_1\epsilon^{1-q}\phi_1^{1-q}(x) \leq \lambda$$

e todo λ, visto que

$$\lambda_1\epsilon^{1-q}\phi_1^{1-q}(x) \leq \lambda + \epsilon^{p-q}\phi_1^{p-q}$$

e assim

$$\lambda_1\epsilon\phi_1 \leq \lambda\epsilon^q\phi_1^q + \epsilon^p\phi_1^q.$$

Como $-\Delta(Me) \geq 0$ e ϕ_1 é uma autofunção do operador $-\Delta$, segue do lema (A.3.1) que existe $\epsilon >$ tal que

$$\epsilon\phi_1 < Me.$$

Segue do teorema (A.2.1) que $(3.1)_\lambda$ tem uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\epsilon\phi_1 \leq u \leq Me$$

quando $\lambda \leq \lambda_0$ e portanto $\Lambda \geq \lambda_0$.

Seja $\overline{\lambda}$ tal que

$$\overline{\lambda}t^q + t^p > \lambda_1 t \tag{3.2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Tal λ existe, pois

$$t^p - \lambda_1 t = t(t^{p-1} - \lambda_1) > 0 \Leftrightarrow t^{p-1} - \lambda_1 > 0 \Leftrightarrow t > \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}$$

e assim para $t > \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}$ temos que (3.2) acontece. Vejamos o que acontece para $0 < t < \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}$. Como

$$\begin{aligned} \lambda_1 t - t^p < \lambda_1 t \Leftrightarrow \frac{\lambda_1 t - t^p}{t^q} < \frac{\lambda_1 t}{t^q} &= \lambda_1 t^{1-q} \\ &\leq \lambda_1((\lambda_1)^{\frac{1}{p-1}})^{1-q} \\ &= (\lambda_1)^{\dfrac{p-q}{p-1}} \end{aligned}$$

então para $\overline{\lambda} \geq (\lambda_1)^{\frac{p-q}{p-1}}$ temos que (3.2) ocorre.

Se λ é tal que $(3.1)_\lambda$ tem uma solução u, multiplicando $(3.1)_\lambda$ por ϕ_1 e integrando teremos

$$\int_\Omega -\Delta u \phi_1 dx = \int_\Omega \lambda u^q \phi_1 dx + \int_\Omega u^p \phi_1 dx \quad \Leftrightarrow$$
$$\int_\Omega \lambda_1 u \phi_1 dx = \int_\Omega \lambda u^q \phi_1 dx + \int_\Omega u^p \phi_1 dx.$$

Por (3.2) segue que $\lambda_1 u \phi_1 \leq (\overline{\lambda} u^q + u^p)\phi_1$ e assim temos

$$\lambda \int_\Omega u^q \phi_1 dx + \int_\Omega u^p \phi_1 dx \leq \overline{\lambda} \int_\Omega u^q \phi_1 dx + \int_\Omega u^p \phi_1 dx.$$

Logo $\lambda \leq \overline{\lambda}$ o que implica em $\Lambda \leq \overline{\lambda}$. ■

Lema 3.1.2. *Para todo $0 < \lambda < \Lambda$ o problema $(3.1)_\lambda$ tem uma solução.*

Demonstração: Dado $\lambda < \Lambda$ segue da definição de Λ que existe u_μ solução de $(3.1)_\mu$ com $\lambda < \mu < \Lambda$

$$\begin{cases} -\Delta u &= \mu u^q + u^p & x \in \Omega \\ u &> 0 & x \in \Omega \\ u &= 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Temos que u_μ é uma supersolução de $(3.1)_\lambda$ pois,

$$-\Delta u_\mu = \mu u_\mu^q + u_\mu^p \geq \lambda u_\mu^q + u_\mu^p.$$

Como vimos no lema anterior $\epsilon\phi_1$ é uma subsolução de $(3.1)_\lambda$ e segue do lema (A.3.1) que $\epsilon\phi_1 \leq u_\mu$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Pelo teorema (A.2.1) temos que $(3.1)_\lambda$ tem uma solução. ■

Lema 3.1.3. *Assuma que $f(t)$ é uma função contínua tal que $t^{-1}f(t)$ é decrescente para $t > 0$. Seja v e w satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta v &\leq f(v) & x \in \Omega \\ v &> 0 & x \in \Omega \\ v &= 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w & \geq & f(w) & x \in \Omega \\ w & > & 0 & x \in \Omega \\ w & = & 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Então $w \geq v$ *em* Ω.

Demonstração: Segue de (3.3) e (3.4) que

$$-v\Delta w \geq vf(w)$$

e

$$w\Delta v \geq -wf(v)$$

já que $w, v > 0$ em Ω. Assim

$$\begin{aligned} -v\Delta w + w\Delta v &\geq vf(w) - wf(v) \\ &= vw(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Seja θ uma função não decrescente tal que $\theta(0) = 0,\ \theta(t) \equiv 1$ *para todo* $t \geq 1$ *e* $\theta(t) \equiv 0$ para $t \leq 0$. Por exemplo,

$$\theta(t) = \begin{cases} \exp\frac{(t-1)^2}{(t-1)^2-1}, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \leq 0 \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

Seja

$$\theta(t) = \theta(\frac{t}{\epsilon}),$$

tal que $\theta_\epsilon(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Multiplicando (3.5) por $\theta_\epsilon(v-w)$ e integrando obtemos

$$\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta]\theta_\epsilon(v-w)dx \geq \int_\Omega vw[(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v})]\theta_\epsilon(v-w)dx. \tag{3.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\epsilon(v-w)dx &= \\
\int_\Omega [-v\Delta w\theta_\epsilon(v-w) + w\Delta v\theta_\epsilon(v-w)]dx &= \\
\int_\Omega [v\nabla w\nabla\theta_\epsilon(v-w) - w\nabla v\nabla\theta_\epsilon(v-w)]dx &= \\
\int_\Omega [v\nabla w\theta_\epsilon^{'}(v-w)(\nabla v-\nabla w) - w\nabla v\theta_\epsilon^{'}(v-w)(\nabla v-\nabla w)]dx &= \\
\int_\Omega [v\nabla w\theta_\epsilon^{'}(v-w)(\nabla v-\nabla w) - w\nabla v\theta_\epsilon^{'}(v-w)(\nabla v-\nabla w)]dx &+ \\
\int_\Omega v\nabla v\theta_\epsilon^{'}(v-w)(\nabla v-\nabla w)dx - \int_\Omega v\nabla v\theta_\epsilon^{'}(v-w)(\nabla v-\nabla w)dx &= \\
\int_\Omega v\theta_\epsilon^{'}(v-w)(\nabla v-\nabla w)(\nabla w-\nabla v)dx + \int_\Omega (v-w)\theta_\epsilon^{'}(v-w)\nabla v(\nabla v-\nabla w)dx &= \\
-\int_\Omega v\theta_\epsilon^{'}(v-w)(\nabla v-\nabla w)^2dx + \int_\Omega (v-w)\theta_\epsilon^{'}(v-w)\nabla v(\nabla v-\nabla w)dx &\leq \\
\int_\Omega (v-w)\theta_\epsilon^{'}(v-w)\nabla v(\nabla v-\nabla w)dx &= \\
\int_\Omega \nabla v\nabla[\gamma_\epsilon(v-w)]dx = -\int_\Omega \Delta v\gamma_\epsilon(v-w)dx &
\end{aligned}$$

onde $\gamma_\epsilon(t) = \int_0^t s\theta_\epsilon^{'}(s)ds$.

Desde que

$$0 \leq \gamma_\epsilon(t) \leq \epsilon, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta]\theta_\epsilon(v-w)dx &\leq \\
-\int_\Omega \Delta v\gamma_\epsilon(v-w)dx &\leq \\
\int_\Omega f(v)\gamma_\epsilon(v-w)dx &\leq \\
\epsilon\int_\Omega f(v)dx &\leq M\epsilon
\end{aligned}$$

onde $f(v(x)) \leq M$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Deste modo

$$\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta]\theta_\epsilon(v-w)dx \leq M\epsilon$$

e segue de (3.6) que

$$\int_\Omega vw[(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v})]\theta_\epsilon(v-w)dx \leq M\epsilon.$$

Observemos que se $\epsilon \to 0$ então $\theta_\epsilon(v-w) = \theta(\frac{v-w}{\epsilon}) \to 1$, quando $v > w$ então pelo lema de Fatou

$$\int_\Omega vw[(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v})]dx = \int_\Omega vw[(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v})] \lim_{\epsilon \to 0} \theta_\epsilon(v-w)dx$$

Mas

$$\frac{f(v)}{v} < \frac{f(w)}{w} \; para \; v > w$$

pois $t^{-1}f(t)$ é decrescente. Assim

$$\int_{[v>w]} vw[(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v})]dx \geq 0$$

logo $[v > w] = 0$ e portanto $w \geq v$. ■

Lema 3.1.4. *Para todo* $0 < \lambda < \Lambda$ *o problema* $(3.1)_\lambda$ *tem uma solução minimal* u_λ.

Demonstração: Seja v_λ a única solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda v^q & x \in \Omega \\ v &= 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

dada pelo teorema (A.1.1)

Pelo lema (3.1.2) vimos que $(3.1)_\lambda$ tem uma solução para todo $0 < \lambda < \Lambda$. Seja $u > 0$ uma destas soluções, isto é, u satisfaz

$$-\Delta u = \lambda u^q + u^p \geq \lambda u^q$$

e pelo lema (3.1.3) com $w = u$ temos que

$$v_\lambda \leq u \; em \; \Omega.$$

Assim u é uma supersolução de $(3.1)_\lambda$. Pelo teorema (A.2.1) existe u_λ solução minimal de $(3.1)_\lambda$ tal que $v_\lambda \leq u_\lambda \leq u$ para todo $x \in \Omega$.

■

Lema 3.1.5. *Seja $\underline{u} \leq \overline{u}$ respectivamente subsolução e supersolução de $(3.1)_\lambda$, e suponha que $\underline{u}$ não é uma solução. Seja u uma solução minimal tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Então $v_1 := \lambda_1[-\Delta - a(x)] \geq 0$, onde $a = a(x) = \lambda q u^{q-1} + p u^{p-1}$ e $\lambda_1[-\Delta - a(x)]$ denota o primeiro autovalor de $-\Delta - a(x)$ com condição de Dirichelet na fronteira de Ω.*

Observação: Vamos verificar que podemos considerar o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta\phi - a(x)\phi &= \lambda_1\phi, \quad x \in \Omega \\ \phi &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

onde $a(x) = \lambda q u^{q-1}(x) + p u^{p-1}(x)$ e u é a solução minimal encontrada no lema (3.1.4) mesmo no caso em que $a(x)$ se torna ilimitada nas proximidades da fronteira de Ω. Faremos a demonstração como em [17].

Inicialmente vejamos que

$$\frac{\int_\Omega (|\nabla\phi|^2 - a(x)\phi^2)dx}{\int_\Omega \phi^2 dx}$$

é limitado inferiormente.

De fato,

$$\int_\Omega u^{q-1}\phi^2 dx = \int_\Omega u^q(\frac{1}{u}\phi)\phi dx \leq \|u\|_\infty^q \|\frac{\phi}{\delta}\|_2 \|\phi\|_2$$

onde $\delta(x) = \text{dist}\,(x, \partial\Omega)$ e $u(x) \geq C\delta(x)$ pelo lema (2.2.1).

Pela desigualdade de Hardy

$$\|\frac{\phi}{\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} = C\|\phi\|, \text{ para todo } \phi \in H_0^1(\Omega),$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma de Poincaré, assim

$$\int_\Omega u^{q-1}\phi^2 dx \leq CC_2\|u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\phi\|^2\|\phi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Temos ainda que

$$\int_\Omega u^{p-1}\phi^2 dx \leq \|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.9}$$

Segue de (3.8) e (3.9) que

$$\begin{aligned} \frac{\int_\Omega (|\nabla\phi|^2 - a(x)\phi^2)dx}{\int_\Omega \phi^2 dx} &\geq \frac{\|\phi\|^2 - \lambda q C C_2\|u\|^q_{L^\infty(\Omega)}\|\phi\|\|\phi\|_{L^2(\Omega)} - p\|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)}\|\phi\|^2_{\text{Ł}^2(\Omega)}}{\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}} \\ &= \frac{\|\phi\|^2}{\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}} - \lambda q C C_2\|u\|^q_{L^2(\Omega)}\frac{\|\phi\|}{\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}} - p\|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} \geq C. \end{aligned}$$

Como a função $g(t) = t^2 - Ct - C$ é limitada inferiormente então existe v_1 tal que

$$v_1 := \inf_{\substack{\phi \in H_0^1(\Omega) \\ \phi \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx - \int_\Omega a(x)\phi^2 dx}{\int_\Omega \phi^2 dx}.$$

Agora iremos mostrar que

$$\psi(\phi) = \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx - \int_\Omega a(x)\phi^2 dx$$

é semicontínua inferiormente na topologia de $H_0^1(\Omega)$.

De fato, seja (ϕ_n) uma sequência em H tal que $\phi_n \rightharpoonup \phi$ em H. Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compactamente $\phi_{n_i} \to \phi$ em $L^2(\Omega)$ e assim

$$|\int_\Omega u^{q-1}(\phi_n^2 - \phi^2)dx| \leq \|u\|^q_{L^\infty(\Omega)} \|\frac{\phi_n + \phi}{\delta}\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_n - \phi\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

e

$$|\int_\Omega u^{p-1}(\phi_n^2 - \phi^2)dx| \leq \|u\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} \|\phi_n - \phi\|_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega a\phi_n^2 dx \to \int_\Omega a\phi^2 dx$$

e como $\|\phi\|^2$ é convexa e contínua, logo semicontínua inferiormente na norma de $H_0^1(\Omega)$. Portanto ψ é semicontínua inferiormente na topologia de $H_0^1(\Omega)$.

Assim, podemos demonstrar como em [[14], seção 8.12] que o ínfimo na definição de v_1 acima é atingido em alguma autofunção positiva de (3.7)

Demonstração do lema (3.1.5): Suponhamos, por contradição, que $v_1 < 0$ e seja $\overline{\phi}$ a autofunção do problema

$$\begin{cases} -\Delta\overline{\phi} - a\overline{\phi} &= v_1\overline{\phi} \quad x \in \Omega \\ \overline{\phi} &= 0 \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Afirmação: $u - \alpha\overline{\phi}$ é uma supersolução de $(3.1)_\lambda$ para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

De fato,

$$\begin{aligned} -\Delta(u - \alpha\overline{\phi}) - [\lambda(u - \alpha\overline{\phi})^q + (u - \alpha\overline{\phi})^p] &= \\ \lambda u^q + u^p - \alpha v_1\overline{\phi} - \alpha(\lambda q u^{q-1} + p u^{p-1})\overline{\phi} - \lambda(u - \alpha\overline{\phi})^q - (u - \alpha\overline{\phi})^p &\geq \\ u^p - \alpha v_1\overline{\phi} - \alpha p u^{p-1}\overline{\phi} - (u - \alpha\overline{\phi})^p &= \\ -\alpha v_1\overline{\phi} + o(\alpha\overline{\phi}) &> 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

para $\alpha > 0$ pequeno. A última desigualdade ocorre, pois $\alpha > 0$, $v_1 < 0$, $\overline{\phi} > 0$. A desigualdade em (3.11) acontece devido à função $t \to t^q$ ser côncava daí

$$(u - \alpha\overline{\phi})^q \leq u^q - \alpha q u^{q-1}\overline{\phi}$$

pois, se f é uma função côncava então $f(u+v) \leq f(u) + f'(u).v$.

Como consequência $u - \alpha\overline{\phi}$ é uma supersolução de $(3.1)_\lambda$. Como $\underline{u}$ não é uma solução então pelo Princípio do Máximo $u > \underline{u}$ e tomando α suficientemente pequeno teremos $u - \alpha\overline{\phi} \geq \underline{u}$. De fato, de (3.10) segue que

$$-\Delta(-\overline{\phi}) - a(-\overline{\phi}) = v_1(-\overline{\phi}) > 0 \text{ em } \Omega.$$

Além disso,

$$-\Delta(\underline{u} - u) \leq \lambda(\underline{u})^q + (\underline{u})^p - \lambda u^q + u^p < 0 \text{ em } \Omega.$$

Logo pelo lema (A.3.1) existe α pequeno o suficiente para satisfazer $u - \underline{u} \geq \alpha\overline{\phi}$, isto é, $u - \alpha\overline{\phi} \geq \underline{u}$.

Portanto $(3.1)_\lambda$ tem uma solução $\widetilde{u}$ com $\underline{u} \leq \widetilde{u} \leq u - \alpha\overline{\phi}$, contrariando o fato de que u é uma solução minimal. ■

Observação 3.1.1. *Segue do lema (3.1.5) que*

$$\int_\Omega (|\nabla\phi|^2 - a_\lambda\phi^2)dx \geq 0 \tag{3.12}$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$, *onde* $a_\lambda = \lambda q u_\lambda^{q-1} + p u_\lambda^{p-1}$.

Agora estamos em condição de demonstrar o teorema (3.1.1).

Demonstração do teorema (3.1.1)

Passo 1: Seja u_λ solução minimal de $(3.1)_\lambda$ dada pelo lema (3.1.4). Sabemos que o funcional associado a $(3.1)_\lambda$ é dado por

$$I_\lambda(u_\lambda) = \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - \frac{1}{p+1}\|u_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)},$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma de Poincaré.

Como u_λ é solução de $(3.1)_\lambda$ temos

$$\|u_\lambda\|^2 = \lambda\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \|u_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \tag{3.13}$$

Segue de (3.12) para $\phi = u_\lambda$ que

$$\|u_\lambda\|^2 - \lambda q \|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - p \|u_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \geq 0. \tag{3.14}$$

Assim temos

$$I_\lambda(u_\lambda) < 0$$

pois,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda) = \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - \frac{1}{p+1}\|u_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} &= \qquad (3.15)\\
\lambda(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1})\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} &\leq \qquad (3.16)\\
\lambda(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1})\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\frac{\lambda(1-q)}{p-1}\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} &= \\
\lambda(\frac{q-1}{2(q+1)} - \frac{(q-1)}{2(p+1)}\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} &< 0 \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

onde a igualdade em (3.15) segue de (3.13) substuída na expressão de I_λ. A desigualdade em (3.16) segue de (3.13) e (3.14) pois

$$\begin{aligned}
\lambda\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \|u_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} - \lambda q\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - p\|u_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow\\
\lambda(1-q)\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - (p-1)\|u_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow\\
\frac{\lambda(1-q)}{(p-1)}\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} \geq \|u_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} &
\end{aligned}$$

e a desigualdade em (3.17) decorre do fato que $0 < q < 1 < p$ implica $\dfrac{q-1}{p+1} > \dfrac{q-1}{q+1}$.

Falta mostrar que u_λ é crescente com respeito a λ. Para isso consideremos

$$0 < \lambda < k < \Lambda,$$

e u_k solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = ku^q + u^p & x \in \Omega \\ u > 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.18}$$

Tal solução existe graças ao lema (3.1.4). Assim

$$-\Delta u_k = ku_k^q + u_k^p > \lambda u_k^q + u_k^p$$

isto é, u_k é uma supersolução para $(3.1)_\lambda$.

Segue do lema (A.3.1) que existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\epsilon\phi_1 < u_k$ e pelo teorema (A.2.1) existe uma solução v tal que

$$\epsilon\phi_1 \leq v \leq u_k.$$

Como u_λ é solução minimal temos $u_\lambda \leq v \leq u_k$ e assim

$$-\Delta(u_k - u_\lambda) \geq 0$$

com

$$(u_k - u_\lambda)(x_0) = 0, \text{ para todo } x_0 \in \partial\Omega.$$

A desigualdade estrita $u_\lambda < u_k$ decorre do Princípio do Máximo, visto que u_λ não é identicamente igual a u_k.

Passo 2: Seja $\{\lambda_n\}$ uma sequência tal que $\lambda_n \uparrow \Lambda$. Como as soluções $u_n = u_{\lambda_n}$ satisfazem $I_{\lambda_n}(u_n) < 0$, então existe uma constante $C > 0$ independente de n tal que

$$\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \ e \ \|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C.$$

De fato, segue da imersão de $L^{p+1}(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$ que

$$\|u_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} \leq C \|u_n\|^{q+1}_{L^{p+1}(\Omega)}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
0 > I_{\lambda_n}(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - \frac{1}{p+1}\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2}(\lambda\|u_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}) - \frac{\lambda}{q+1}\|u_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} - \frac{1}{p+1}\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \\
&= \lambda(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1})\|u_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \\
&\geq C\lambda(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1})\|u_n\|^{q+1}_{L^{p+1}(\Omega)} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \\
&\geq \Lambda C(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1})\|u_n\|^{q+1}_{L^{p+1}(\Omega)} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1})\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p+1} > 0$, e $p+1 > q+1 > 1$, temos que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C_1$.

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} &= \lambda \|u_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} + \|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \\
&\leq C\lambda \|u_n\|^{q+1}_{L^{p+1}(\Omega)} + \|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \\
&\leq C\Lambda \|u_n\|^{q+1}_{L^{p+1}(\Omega)} + \|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \\
&\leq C_2
\end{aligned}$$

e, tomando $C = \max\{C_1,\ C_2\}$ temos que $C > 0$ e satisfaz

$$\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \ e \ \ \|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C.$$

Como $\{u_n\}$ é limitada em $H^1_0(\Omega)$ existe $u \in H^1_0(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1_0(\Omega).$$

Segue do teorema (B.0.1) que

$$u_n \to u \text{ em } L^s(\Omega),\ 1 \leq s < 2^*$$

e pelo teorema (B.0.3)

$$u_n(x) \to u(x),\ qtp \text{ em } \Omega$$

e ainda, existe $h \in L^s,\ 1 \leq s < 2^*$, tal que

$$|u_n(x)| \leq h(x),\ qtp \text{ em } \Omega.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lambda_n \int_\Omega u_n^q \phi dx \to \Lambda \int_\Omega u^q \phi dx,\ \phi \in H^1_0(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega u_n^p \phi dx \to \int_\Omega u^p \phi dx,\ \phi \in H^1_0(\Omega).$$

Portanto segue de u_n ser solução de $(3.1)_{\lambda_n}$ que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi dx = \lambda_n \int_\Omega u_n^q \phi dx + \int_\Omega u_n^p \phi dx,$$

e tomando o limite quando $n \to \infty$ obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \Lambda \int_\Omega u^q \phi dx + \int_\Omega u^p \phi dx,$$

ou seja, $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ é solução de $(3.1)_\lambda$ no sentido fraco, para $\lambda = \Lambda$.

Passo 3: Suponha por absurdo que existe $\lambda_C > \Lambda$ tal que $(3.1)_{\lambda_C}$ tem solução, mas isto contradiz a definição de Λ. Logo não existe tal λ_C.

■

A partir de agora assumiremos

$$0 < q < 1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}.$$

Sejam

$$f_\lambda(s) = \begin{cases} \lambda s^q + s^p, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$

e

$$F_\lambda(u) = \int_0^u f_\lambda(s) ds.$$

Consideremos o funcional

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F_\lambda(u) dx.$$

No próximo resultado usaremos um argumento semelhante ao do teorema (2.2.1) para chegarmos ao resultado desejado.

Teorema 3.1.2. *Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema $(3.1)_\lambda$ tem uma solução u a qual é um mínimo local de I_λ na topologia H^1.*

Observação 3.1.2. *Utilizando-se essa primeira solução, que é um mínimo local do funcional I no espaço $H_0^1(\Omega)$, então é possível encontrar uma segunda solução via Teorema do Passo da Montanha.*

Demonstração do Teorema (3.1.2): Fixemos $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < \Lambda$ e consideremos as soluções minimais $u_1 := u_{\lambda_1}$ e $u_2 := u_{\lambda_2}$ dos problemas $(3.1)_{\lambda_1}$ e $(3.1)_{\lambda_2}$, respectivamente, encontradas no teorema (**??**). Assim, $u_1 \leq u_2$ e u_1, u_2 são, respectivamente, sub e super-solução de $(3.1)_\lambda$. Além disso,

$$\begin{cases} -\Delta(u_2 - u_1) & = -\Delta u_2 + \Delta u_1 = \lambda_2 u_2^q + u_2^p - \lambda_1 u_1^q - u_1^p \\ & \geq \lambda_1(u_2^q - u_1^q) + (u_2^p - u_1^p) \geq 0, & x \in \Omega \\ u_2 - u_1 & = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e pelo Princípio do Máximo $(u_2 - u_1) \geq 0$ em Ω e assim $u_1 < u_2$, pois $u_1 \not\equiv u_2$, visto que $\lambda_1 < \lambda_2$. Temos ainda pelo lema de Hopf que

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u_2 - u_1)(x_0) < 0, \ x_0 \in \partial\Omega,$$

em que ν é o vetor normal unitário exterior em $\partial\Omega$.

Agora refazemos um argumento semelhante ao do teorema (2.2.1). Para isso considere uma função auxiliar

$$\widetilde{f}_\lambda(x,s) = \begin{cases} f_\lambda(u_1(x)) & se \quad s \leq u_1 \\ f_\lambda(s) & se \quad u_1 < s < u_2 \\ f_\lambda(u_2(x)) & se \quad s \geq u_2, \end{cases}$$

$$\widetilde{F}_\lambda(x,s) = \int_0^u \widetilde{f}_\lambda(x,s)ds$$

e

$$\widetilde{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \widetilde{F}_\lambda(x,u)dx.$$

Afirmação : $\widetilde{I}_\lambda(u)$ é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente.

Para isso observemos que $\widetilde{f}_\lambda(x,s)$ é limitada. De fato,

i) $s < u_1(x)$ e $u_1 \in C^0(\overline{\Omega})$

$$\left|\widetilde{f}_\lambda(x,s)\right| = |\lambda u_1^q(x) + u_1^p(x)| \leq \lambda |u_1^q(x)| + |u_1^p(x)| < M_1;$$

ii)$u_1(x) \leq s \leq u_2(x)$ e $u_1 \in C^0(\overline{\Omega})$

$$\left|\widetilde{f}_\lambda(x,s)\right| = |\lambda s^q(x) + s^p(x)| \leq \lambda |u_2^q(x)| + |u_2^p(x)| < M_2;$$

iii) $s \geq u_2(x)$ e $u_2 \in C^0(\overline{\Omega})$

$$\left|\widetilde{f}_\lambda(x,s)\right| = |\lambda u_2^q(x) + u_2^p(x)| \leq \lambda |u_2^q(x)| + |u_2^p(x)| < M_3.$$

Tomando $M = \min\{M_1, \ M_2, \ M_3\}$ teremos

$$\left|\widetilde{F}_\lambda(x,s)\right| = \left|\int_0^u \widetilde{f}_\lambda(x,s)ds\right| \leq \int_0^u \left|\widetilde{f}_\lambda(x,s)\right| ds \leq M|u|.$$

Logo

$$\int_\Omega \widetilde{F}_\lambda(x,u(x))dx \leq \int_\Omega M|u(x)|\,dx \leq M\|u\|_{L^2(\Omega)} \operatorname{med}(\Omega) \leq C\|u\|.$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \widetilde{F}_\lambda(x,u(x))dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|\end{aligned}$$

temos que se $\|u\| \to +\infty$ então $\widetilde{I}_\lambda(u) \to +\infty$, isto é, $\widetilde{I}_\lambda(u)$ é coercivo.

O termo $\frac{1}{2}\|u\|^2$ é convexo e contínuo, logo fracamente semicontínuo inferiormente. Resta-nos provar que o termo $\int_\Omega \widetilde{F}_\lambda(x,u)dx$ é fracamente semicontínuo inferiormente. Para isso considere uma sequência $\{u_n\}$ que converge fraco para u em $H_0^1(\Omega)$ e pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos que $u_{n_i} \to u$ em $L^2(\Omega)$ e pelo teorema (B.0.3) existe uma função $\phi(x) \in L^1(\Omega)$ tal que $\left|\widetilde{F}(x,u_n)\right| \leq \phi(x)$, para todo n. Assim, pelo teorema da Convergência Dominada

$$\int_\Omega \widetilde{F}_\lambda(x,u_n)dx \to \int_\Omega \widetilde{F}_\lambda(x,u)dx,\ n \to \infty$$

isto é, $\widetilde{F}_\lambda$ é fracamente contínua, logo fracamente semicontínuo inferiormente.

Portanto pelo teorema (B.0.7) concluímos que exite $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ que minimiza $\widetilde{I}_\lambda$. E assim, u_0 é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = \widetilde{f}(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmação :

$$\begin{cases} u_1 < u_0 < u_2 & \textit{em } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}(u_0 - u_1) < 0 & \textit{sobre } \partial\Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}(u_0 - u_2) > 0 & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

De fato,

$$\begin{cases} -\Delta(u_0 - u_1) = -\Delta u_0 + \Delta u_1 = \widetilde{f}_\lambda(x,u_0) - f_\lambda(x,u_1) \geq 0 & x \in \Omega \\ u_0 - u_1 = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

e pelo Princípio do Máximo $u_0 - u_1 \geq 0$ em Ω, isto é, $u_0 > u_1$ em Ω, pois se $u_1 = u_0$ então $\lambda_1 = \lambda$ o que é um absurdo. E mais, pelo lema de Hopf temos

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(u_0 - u_1)(x_0) < 0,\ \text{para todo } x_0 \in \partial\Omega$$

Analogamente, temos que se $u_0 < u_2$ então

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u_0 - u_2)(x_0) > 0, \text{ para todo } x_0 \in \partial\Omega.$$

Considere $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\|v - u_0\|_{C^1(\Omega)} \leq \epsilon$$

com ϵ suficientemente pequeno. Segue da afirmação da página 28 que $u_1(x) \leq v(x) \leq u_2(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Além disso, $I_\lambda(v) - \widetilde{I}_\lambda(v)$ é uma constante para $\|v - u_0\|_{C^1(\Omega)} \leq \epsilon$, pois

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_\lambda(u_0) - I_\lambda(u_0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \int_\Omega \widetilde{F}_\lambda(x, u_0)dx - \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \int_\Omega F_\lambda(x, u_0)dx = \\ \int_\Omega F_\lambda(x, u_0)dx - \int_\Omega \widetilde{F}_\lambda(x, u_0)dx = \\ \int_\Omega (F_\lambda(x, u_0) - \widetilde{F}_\lambda(x, u_0))dx\end{aligned}$$

e $F_\lambda(x, u_0) - \widetilde{F}_\lambda(x, u_0)$ é uma função somente da variável x se $u \in [u_1(x), u_2(x)]$. Como

$$\widetilde{I}_\lambda(u_0) \leq \widetilde{I}_\lambda(u_0 + v), \quad \text{para todo} \quad v \in C_0^1(\overline{\Omega}),$$

temos que se $v \in C_0^1(\bar{\Omega})$, e $\|u_0 - v\|_{C^1} \leq \epsilon$ então

$$I_\lambda(u_0) = C + \widetilde{I}_\lambda(u_0) \leq C + \widetilde{I}_\lambda(u_0 + v) = I_\lambda(u_0 + v).$$

Portanto u_0 é um mínimo local para I na topologia C^1 e pelo teorema (2.1.1) u_0 é um mínimo local de I_λ na topologia $H_0^1(\Omega)$. ■

Para $\lambda \in (0, \Lambda)$ fixado, vamos olhar para uma segunda solução de $(3.1)_\lambda$ na forma $u = u_0 + v$, onde u_0 denota a solução encontrada no lema (3.1.2) e $v > 0$. Assim, se u for solução de $(3.1)_\lambda$ então

$$-\Delta v = -\Delta(v + u_0 - u_0) = -\Delta(u_0 + v) + \Delta u_0$$

logo

$$-\Delta v = \lambda(u_0+v)^q + (u_0+v)^p - u_0^p - \lambda u_0^q. \tag{3.20}$$

Defina

$$g(x,s) = g_\lambda(x,s) = \begin{cases} \lambda(u_0+s)^q + (u_0+s)^p - u_0^p - \lambda u_0^q & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$

e

$$G(v) = G_\lambda(v) = \int_0^v g(x,s)ds.$$

O problema (3.20) tem o seguinte funcional associado

$$J(v) = J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega G(v)dx.$$

Se $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \not\equiv 0$ é um ponto crítico de J, então v é solução fraca de (3.20) e por um argumento de "bootstrap" conseguimos $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Assim, pelo teorema de Schauder $v \in C^2(\Omega)$, isto é, v é uma solução clássica do problema (3.20). E como

$$\begin{cases} -\Delta v &= g(x,v) \geq 0, & x \in \Omega \\ v &= 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

temos pelo Princípio do Máximo que $v > 0$ em Ω. Assim $u = u_0 + v$ é solução de $(3.1)_\lambda$ com $u \neq u_0$.

Lema 3.1.6. *$v = 0$ é um mínimo local de J na topologia de $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Pelo teorema (2.1.1) basta provar que $v = 0$ é um mínimo de J na topologia C^1.

Seja v^+ a parte positiva de v, $(v = v^+ - v^-)$. Assim

$$G(v^+) - F(u_0+v^+) = \int_0^{v^+} g(x,s)ds - \int_0^{u_0+v^+} f_\lambda(x,s)ds =$$

$$\int_0^{v^+} [\lambda(u_0+s)^q + (u_0+s)^p - u_0^p - \lambda u_0^q]ds - \int_0^{u_0+v^+} [\lambda s^q + s^p]ds =$$

$$\frac{\lambda}{q+1}(u_0+v^+)^{q+1} - \lambda u_0^q v^+ + \frac{1}{p+1}(u_0+v^+)^{p+1} - u_0^p v^+ - \frac{\lambda}{q+1}u_0^{q+1} -$$

$$\frac{1}{p+1}u_0^{p+1} - \frac{\lambda}{q+1}(u_0+v^+)^{q+1} - \frac{1}{p+1}(u_0+v^+)^{p+1} =$$

$$-\frac{\lambda}{q+1}u_0^{q+1} - \frac{1}{p+1}u_0^{p+1} - \lambda u_0^q v^+ - u_0^p v^+,$$

então

$$\begin{aligned}
J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega G(v)dx &= \frac{1}{2}\|v^+ - v^-\|^2 - \int_{[v(x)\geq 0]} G(v)dx - \int_{[v(x)<0]} G(v)dx \\
&= \frac{1}{2}\|v^+\|^2 + \frac{1}{2}\|v^-\|^2 - \int_{[v(x)\geq 0]} G(v)dx \\
&= \frac{1}{2}\|v^+\|^2 + \frac{1}{2}\|v^-\|^2 - \int_\Omega G(v^+)dx \\
&= \frac{1}{2}\|v^+\|^2 + \frac{1}{2}\|v^-\|^2 - \int_\Omega F(u_0+v^+)dx \\
&+ \int_\Omega [\frac{\lambda}{q+1}u_0^{q+1} + \frac{1}{p+1}u_0^{p+1} + \lambda u_0^q v^+ + u_0^p v^+]dx \\
&= \frac{1}{2}\|v^+\|^2 + \frac{1}{2}\|v^-\|^2 - \int_\Omega F(u_0+v^+)dx \\
&+ \int_\Omega F(u_0)dx + \int_\Omega [\lambda u_0^q + u_0^p]dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$I(u_0+v^+) = \frac{1}{2}\left\|u_0+v^+\right\|^2 - \int_\Omega F(u_0+v^+)dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v^+ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla v^+\right|^2 dx - \int_\Omega F(u_0+v^+)dx.$$

E como u_0 é solução de $(3.1)_\lambda$ então

$$I(u_0+v^+) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\left\|v^+\right\|^2 + \int_\Omega [\lambda u_0^q + u_0^p]dx - \int_\Omega F(u_0+v^+)dx.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
J(v) = \frac{1}{2}\left\|v^+\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|v^-\right\|^2 - \int_\Omega F(u_0+v^+)dx + \int_\Omega F(u_0)dx + \int_\Omega [\lambda u_0^q + u_0^p]dx = \\
\frac{1}{2}\left\|v^-\right\|^2 + I(u_0+v^+) - \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \int_\Omega F(u_0)dx = \\
\frac{1}{2}\left\|v^-\right\|^2 + I(u_0+v^+) - I(u_0).
\end{aligned}$$

Segue do lema (3.1.2) que

$$I(u_0+v^+) - I(u_0) \geq 0$$

para $\|v^+\|_{C^1(\Omega)} < \epsilon$ e assim

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\left\|v^-\right\|^2 \geq 0,$$

desde que $\|v^+\|_{C^1(\Omega)} < \epsilon$.

Logo $v = 0$ é um mínimo para J na topologia C^1. ■

Resumindo $v \equiv 0$ é m'inimo local de J em $H_0^1(\Omega)$ logo u_0 é local de I_λ em $H_0^1(\Omega)$. Uma segunda solução pode então ser encontrada por meio do Teorema do Passo da Montanha [13].

3.2 O caso subcrítico

Nesta seção, baseados no trabalho de Alama-Tarantello [2] procuramos soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= W(x)f(u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u &> 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave, $N \geq 3$, $W \in C(\overline{\Omega})$ é uma função que muda de sinal em Ω, e f é uma função não-linear superquadrática em zero e no infinito. Pela dependência de λ nos referiremos ao problema (3.21) como sendo $(3.21)_\lambda$.

Vamos assumir as seguintes hipóteses:

(i) Existem constantes $\eta,\ C > 0$ e $q > 2$ tais que

$$0 \leq f(u) \leq Cu^{q-1}$$

para todo $0 \leq u \leq \eta$.

(ii) Existem constantes $A, B > 0$ tais que $|f'(u)| \leq A|u|^{p-2} + B$ para $2 < p < 2^*$.

No artigo [2] os autores encontram a primeira solução para o problema $(3.21)_\lambda$ usando outros argumentos, mas em uma nota (Note pag 458, [2]) eles comentam da possibilidade de se fazer uso do teorema (2.2.1) para encontrarmos a primeira solução positiva. Como nosso objetivo é aplicar os teoremas do Capítulo 2 fizemos alguns ajustes e o utilizamos.

Durante todo a seção ϕ_1 denotará a primeira autofunção do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ bem como λ_1 o primeiro autovalor associado. Pela dependência de λ nós iremos nos referir ao problema (3.21) como sendo $(3.21)_\lambda$.

Definição 3.2.1. *Definamos* Λ *por*

$$\Lambda = \sup\left\{\lambda > \lambda_1 : (3.21)_\lambda \textit{ tem uma solução positiva}\right\}.$$

Teorema 3.2.1. *Seja* Λ *dado pela definição (3.2.1). Suponhamos que* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *e satisfaça as hipóteses* (i), (ii), *e mais*
(iii) existe $2 < q \leq 2^*$ *tal que*

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u^{q-1}} = a > 0. \tag{3.22}$$

Suponhamos ainda que
(iv) existe $2 < q \leq 2^*$ *tal que* $\int_\Omega W(x)\phi_1^q dx < 0$.

Então:
(a) Para cada $\lambda \in (\lambda_1, \Lambda)$, *o problema* $(3.21)_\lambda$ *possui uma solução a qual é um mínimo do funcional* I_λ *em* $H_0^1(\Omega)$ *e mais, se satisfizer as hipóteses que garantam (PS) então temos uma segunda solução positiva.*
(b) Para $\lambda > \Lambda$ *o problema* $(3.21)_\lambda$ *não admite solução positiva.*

Para demonstrarmos o teorema acima precisamos enunciar e demonstrar alguns lemas.Onde o primeiro deles nos dá uma subsolução para o problema $(3.21)_\lambda$.

Lema 3.2.1. *Suponhamos (i). Então para cada* t *satisfazendo*

$$0 < t < \frac{1}{C}\left(\frac{\lambda - \lambda_1}{\|W^-\|_\infty \|\phi_1\|_\infty^{q-2}}\right)^{\frac{1}{q-2}} \tag{3.23}$$

a função $u = t\phi_1$ *é uma subsolução de* $(3.21)_\lambda$.

Demonstração: Seja $t > 0$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\phi(x) \geq 0$. Segue de $(3.21)_\lambda)$ que

$$
\begin{aligned}
t\int_\Omega \nabla\phi_1\nabla\phi\,dx - \lambda t\int_\Omega \phi_1\phi\,dx - \int_\Omega W(x)f(t\phi_1)\phi\,dx &= \\
-(\lambda-\lambda_1)t\int_\Omega \phi_1\phi\,dx - \int_\Omega W(x)f(t\phi_1)\phi\,dx &\leq \\
\int_\Omega W^-(x)f(t\phi_1)\phi\,dx - (\lambda-\lambda_1)t\int_\Omega \phi_1\phi\,dx &\leq \\
\left\|W^-\right\|_\infty \int_\Omega f(t\phi_1)\phi\,dx - (\lambda-\lambda_1)t\int_\Omega \phi_1\phi\,dx &\leq \\
\left\|W^-\right\|_\infty C\int_\Omega (t\phi_1)^{q-1}\phi\,dx - (\lambda-\lambda_1)t\int_\Omega \phi_1\phi\,dx &\leq \\
\left[C\left\|W^-\right\|_\infty t^{q-2}\left\|\phi_1\right\|_\infty^{q-2} - (\lambda-\lambda_1)\right]t\int_\Omega \phi_1\phi\,dx &< \\
\left[C\left\|W^-\right\|_\infty \left\|\phi_1\right\|_\infty^{q-2}\left(\frac{\lambda-\lambda_1}{C\left\|W^-\right\|_\infty \left\|\phi_1\right\|_\infty^{q-2}}\right) - (\lambda-\lambda_1)\right]t\int_\Omega \phi_1\phi\,dx &= \\
\left[(\lambda-\lambda_1)-(\lambda-\lambda_1)\right]t\int_\Omega \phi_1\phi\,dx &= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $t\phi_1$ é uma subsolução de $(3.21)_\lambda$ se assumirmos (3.23). ■

Agora podemos verificar que para λ muito grande o problema $(3.21)_\lambda$ não tem solução positiva.

Lema 3.2.2. *Existe $\overline{\lambda} > \lambda_1$ tal que $(3.21)_\lambda$ não admite solução positiva para qualquer $\lambda \leq \overline{\lambda}$.*

Demonstração: Tomemos $\overline{\lambda} = \lambda_1(\Omega^*)$ onde $\Omega^* \subset \Omega \setminus \overline{\Omega^-}$ é um conjunto aberto com fronteira $\partial\Omega^*$ regular e $\Omega^- = \{x \in \Omega : W(x) < 0\}$. Seja $\phi_1^* > 0$ a primeira autofunção do laplaciano no problema de Dirichlet sobre Ω^*. Multiplicando-se $(3.21)_\lambda$ por ψ_1^* e integrando encontramos

$$
-\int_{\Omega^*} \Delta u\phi_1^* dx - \lambda\int_{\Omega^*} u\phi_1^* dx = \int_{\Omega^*} W^+(x)f(u)\phi_1^* dx,
$$

e usando a segunda identidade de Green obtemos

$$
\int_{\partial\Omega^*} u\frac{\partial\phi_1^*}{\nu}dx - (\lambda-\overline{\lambda})\int_{\Omega^*} u\phi_1^* dx - \int_{\Omega^*} W^+(x)f(u)\phi_1^* dx = 0. \tag{3.24}
$$

Como $\phi_1^* > 0$ temos $\dfrac{\partial \phi_1^*}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega^*$ logo

$$\int_{\partial\Omega^*} u \frac{\partial \phi_1^*}{\nu} dx < 0,$$

e mais, $\int_{\Omega^*} W^+(x) f(u) \phi_1^* dx > 0$. Portanto (3.24) não se verifica para $\lambda \geq \overline{\lambda}$. ■

Lema 3.2.3. *Suponha que $f \in C^1(\mathbb{R})$ e ainda suponhamos que valem (iii) e (iv). Então $\Lambda > \lambda_1$.*

Demonstração: Usaremos teoria da bifurcação para mostrarmos que (3.21) admite soluções positivas para $\lambda > \lambda_1$ próximo a λ_1. Para isso definimos $\mathcal{F} : C_0^{2,\ \beta}(\Omega) \times \mathbb{R} \to C^{0,\ \beta}(\Omega)$ por $\mathcal{F}(u, \lambda) = -\Delta - \lambda u - W(x) f(u)$. Segue de (3.22) que $f(0) = 0$ e $\mathcal{F}(0, \lambda) = 0$ para todo λ, e mais, segue de (iii) que $f'(0) = 0$. Assim $\mathcal{F}_u(0, \lambda_1) v = -\Delta v - \lambda_1 v$.

Logo,

$$N(\mathcal{F}_u(0, \lambda_1)) = \langle \phi_1 \rangle,$$

$$codim R(\mathcal{F}_u(0, \lambda_1)) = 1$$

e

$$\mathcal{F}_{\lambda,u}(0, \lambda_1)\phi_1 = -\phi_1 \notin R(\mathcal{F}_u(0, \lambda_1)).$$

Segue do teorema (B.0.13) que $(0, \lambda_1)$ é um ponto de bifurcação para F.

Fazendo a decomposição

$$C_0^{2,\beta}(\Omega) = \langle \phi_1 \rangle \oplus V,$$

onde $V = \langle \phi_1 \rangle^\perp$ obteremos pelo teorema (B.0.14) uma vizinhança U de $(0, \lambda_1)$ em $C_0^{2,\beta}(\Omega) \times \mathbb{R}$, e funções contínuas $\phi : (-a, a) \to \mathbb{R}$, $\psi : (-a, a) \to V$ com $\phi(0) = \lambda_1$, $\psi(0) = 0$ e

$$\mathcal{F}^{-1} \cap U = \{(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha), \phi(\alpha)) : \alpha \in (-a, a)\} \cup \{(0, \lambda) : (0, \lambda) \in U\}.$$

Seja $u_\alpha = \alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha)$. Note que em particular, $\psi(\alpha) \to 0$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ quando $\alpha \to 0$ e assim $u_\alpha > 0$ em Ω para α suficientemente pequeno.

Vamos mostrar que $\phi(\alpha) > \lambda_1$ para todo α suficientemente peueno. Para tanto precisamos da seguinte afirmação.

Afirmação : $\dfrac{1}{\alpha^{q-1}} \int_\Omega W(x) f(u_\alpha) \phi_1 dx \to a \int_\Omega W(x) \phi_1^q dx$, quando $\alpha \to 0$.

De fato, lembrando que $\psi(\alpha) \to 0$ uniformemente quando $\alpha \to 0$ temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0} \frac{f(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{\alpha^{q-1}} &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{\alpha^{q-1}[\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha)]^{q-1}}.(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha))^{q-1} \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{\alpha^{q-1}[\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha)]^{q-1}}.\alpha^{q-1}(\phi_1 + \psi(\alpha))^{q-1} \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{[\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha)]^{q-1}}.(\phi_1 + \psi(\alpha))^{q-1}
\end{aligned}$$

e por (3.22) temos

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{f(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{[\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha)]^{q-1}}.(\phi_1 + \psi(\alpha))^{q-1} = a\ \phi_1^{q-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^{q-1}} \int_\Omega W(x) f(u_\alpha)\phi_1 dx = \frac{1}{\alpha^{q-1}} \int_{\overline{\Omega}} W(x) f(u_\alpha)\phi_1 dx \quad = \\
\int_\Omega W(x) \frac{f(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{\alpha^{q-1}} \phi_1 dx \to a \int_\Omega W(x)\phi_1^q dx,
\end{aligned}$$

quando $\alpha \to 0$, visto que $\text{med}_{\mathbb{R}^N}(\partial\Omega) = 0$, $\overline{\Omega}$ é compacto e o integrando é contínuo em $\overline{\Omega}$ e converge uniformemente.

Com base na afirmação acima é possível mostrar, por contradição, que $\phi(\alpha) > \lambda_1$. De fato, suponhamos que exista uma sequência $\alpha_n \to 0^+$ com $\psi(\alpha_n) \leq \lambda_1$. Seja u_n a solução postiva do problema $(3.21)_\lambda$ associada a $\lambda = \phi(\alpha_n)$. Assim,

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \Delta u_n \phi_1 dx - \int_\Omega \phi(\alpha_n) u_n \phi_1 dx = \int_\Omega W(x) f(u_n)\phi_1 dx \quad \Leftrightarrow \\
\lambda_1 \int_\Omega \phi(\alpha_n) u_n \phi_1 - \int_\Omega \phi(\alpha_n) u_n \phi_1 dx = \int_\Omega W(x) f(u_n)\phi_1 dx \quad \Leftrightarrow \\
(\frac{\lambda_1 - \phi(\alpha_n)}{\alpha_n^{q-1}}) \int_\Omega \phi(\alpha_n) u_n \phi_1 dx = \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)\phi_1}{\alpha_n^{q-1}} dx
\end{aligned}$$

então segue da afirmação acima quando $\alpha_n \to 0^+$ que

$$0 \leq (\frac{\lambda_1 - \phi(\alpha_n)}{\alpha_n^{q-1}}) \int_\Omega \phi(\alpha_n) u_n \phi_1 dx = \int_\Omega W(x) \frac{f(u_n)\phi_1}{\alpha_n^{q-1}} dx \to \int_\Omega W(x)\phi_1^q < 0,$$

fato este que é impossível. Portanto $\phi(\alpha) > \lambda_1$.

■

Demonstração do teorema (3.2.1): (a) Fixemos $\lambda \in (\lambda_1,\ \Lambda)$. Segue da definição de Λ que existe $\lambda_0 \in (\lambda,\ \Lambda)$ tal que o problema $(3.21)_{\lambda_0}$ admite uma solução u_+.

Afirmação: u_+ é uma supersolução para $(3.21)_\lambda$.

De fato, para qualquer função $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$ em Ω segue de $(3.21)_\lambda$ que

$$\int_\Omega \nabla u_+ \nabla \phi dx - \int_\Omega u_+ \phi dx - \int_\Omega W(x) f(u_+) \phi dx = (\lambda_0 - \lambda) \int_\Omega u_+ \phi dx \geq 0,$$

o que demonstra a afirmação.

Por outro lado, segue do lema (3.2.1) que $u_- = te_1$ é uma subsolução de $(3.21)_\lambda$ e como $-\Delta u_+ \geq 0$ segue do lema (A.3.1) que existe t suficientemente pequeno tal que $u_- < u_+$ em Ω. Para aplicarmos o teorema (2.2.1) precisamos mostrar que

$$f(x,u) = \lambda u + W(x) f(u) + ku$$

é não-decerscente em u, para quase todo $x \in \Omega$ e para alguma constante $k \in \mathbb{R}$, no intervalo $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$ (veja a observação (2.2.1)). Temos que

$$f_u(x,u) = \lambda + W(x) f'(u) + k$$

e por (ii)

$$\begin{aligned} f_u x, u &\geq \lambda - |W(x)| A |u|^{p-2} - B|W(x)| + k \\ &\geq \lambda - MA|u|^{p-2} - BM + k \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

para $k > 0$ escolhido suficientemente grande visto que $u(x) \in [\min_{x \in \overline{\Omega}} \underline{u}(x), \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x)]$ e $M = \max_{x \in \overline{\Omega}} |W(x)|$.

Assim, pelo Teorema (2.2.1) existe uma solução u do problema $(3.21)_\lambda$ tal que $u_- < u < u_+$ e ainda que a solução u é um mínimo em $H_0^1(\Omega)$ do funcional associado ao problema $(3.21)_\lambda$.

A segunda solução é encontrada via Teorema do Passo da Montanha, se o funcional associoado satisfizer hipóteses que garantam (PS). (ver [2])

(b) Segue da definição (3.2.1) juntamente com o lema (3.2.2). ■

Capítulo 4

Mínimos locais em C^1 mas não em H^1

No capítulo 2 deste trabalho mostramos que, para certos funcionais associados a problemas elípticos semilineares, se existir um ponto de mínimo em C^1 então tal ponto também será um mínimo em H^1. Um questionamento possível é se tal resultado será válido para todo funcional. Encontramos a resposta no artigo de Alama-Tarantello [3]. Assim, neste capítulo mostraremos que, sob certas condições, a resposta àquela pergunta será negativa.

4.1 O caso supercrítico

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u^q - h(x)u^p & \\ u &> 0 & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, $h \geq 0$, $h \in L^\infty(\Omega)$ e $2^* < q+1 < p+1$.

O funcional associado ao problema acima é dado por

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2 - \frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{1}{q+1}\left|u\right|^{q+1} + \frac{1}{p+1}h(x)\left|u\right|^{p+1})dx,$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Teorema 4.1.1. *Seja λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$. Se $\lambda < \lambda_1$ e h satisfizer*

$$\int_\Omega [\frac{1}{h(x)}]^{(\frac{q-1}{p-q})\frac{N}{2}} dx < +\infty, \tag{4.2}$$

então $u \equiv 0$ define um mínimo local para I_λ em $H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, se h satisfizer

$$\int_\Omega [\frac{1}{h(x)}]^{(\frac{q+1}{p-q})} dx < +\infty, \tag{4.3}$$

mas existir $x_0 \in \Omega$ tal que

$$\frac{h(x)}{|x-x_0|^r} \leq A, \ com \ \frac{2(p-q)}{q-1} < r < \frac{N(p-q)}{q+1} \tag{4.4}$$

em alguma vizinhança de x_0, então (4.2) não se verifica, e $u \equiv 0$ define um mínimo local para I_λ em $C^1(\Omega)$, mas <u>não</u> define um mínimo local em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração:

Se $q > 1$ então $u \equiv 0$ é um mínimo local para I_λ na norma C^1. De fato, seja $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$, assim

$$\begin{aligned} I_\lambda(v) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla v|^2 - \frac{\lambda}{2}v^2 - \frac{1}{q+1}|v|^{q+1} + \frac{1}{p+1}h(x)|v|^{p+1})dx \geq \\ \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega v^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega v^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |v|^{q+1} dx + \int_\Omega \frac{1}{p+1}h(x)|v|^{p+1} dx \geq \\ \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}\right)\int_\Omega v^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |v|^{q+1} dx \geq \\ \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}\right)\|v\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|v\|^{q+1}_{L^2(\Omega)} \geq 0 \end{aligned}$$

se $\|v\|_{C^1} < \delta$, para δ suficientemente pequeno, visto que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{C^1}$.

Como $I_\lambda(0) = 0$ então $I_\lambda(v) \geq I_\lambda(0)$, isto é $u \equiv 0$ é um mínimo local para I_λ na norma C^1.

Suponhamos que (4.2) se verifique. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(\int_{\{x:h(x)<\delta\}} [\frac{1}{h(x)}]^{(\frac{q-1}{p-q})\frac{N}{2}} dx)^{\frac{2}{N}} \leq \epsilon, \tag{4.5}$$

pois $(\frac{1}{h(x)})^{\frac{q-1}{p-q}} \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, $N \geq 3$ e assim, $\text{med}\{x : h(x) < \delta\} < \epsilon$ para δ suficientemente pequeno.

Primeiramente, estudamos o termo não linear em $I_\lambda(u)$. Denotaremos qualquer constante por C.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [\frac{u^{q+1}}{q+1} - h\frac{u^{p+1}}{p+1}]dx &= \int_{\{x:h(x)<\delta\}} [\frac{u^{q+1}}{q+1} - h\frac{u^{p+1}}{p+1}]dx + \int_{\{x:h(x)\geq\delta\}} [\frac{u^{q+1}}{q+1} - h\frac{u^{p+1}}{p+1}]dx \\
&= \int_{\{x:h(x)<\delta\}} \frac{u^2}{h^{\frac{q-1}{p-q}}}[\frac{u^{q-1}}{q+1}h^{\frac{q-1}{p-q}} - h^{\frac{p-1}{p-q}}\frac{u^{p-1}}{p+1}]dx \\
&+ \int_{\{x:h(x)\geq\delta\}} \frac{u^{2^*}}{h^{\frac{q+1-2^*}{p-q}}}[\frac{u^{q+1-2^*}}{q+1}h^{\frac{q+1-2^*}{p-q}} - h^{\frac{p+1-2^*}{p-q}}\frac{u^{p+1-2^*}}{p+1}]dx \\
&= \int_{\{x:h(x)<\delta\}} \frac{u^2}{h^{\frac{q-1}{p-q}}}[\frac{(uh^{\frac{1}{p-q}})^{q-1}}{q+1} - \frac{(uh^{\frac{1}{p-q}})^{p-1}}{p+1}]dx \\
&+ \int_{\{x:h(x)\geq\delta\}} \frac{u^{2^*}}{h^{\frac{q+1-2^*}{p-q}}}[\frac{(uh^{\frac{1}{p-q}})^{q+1-2^*}}{q+1} - \frac{(uh^{\frac{1}{p-q}})^{p+1-2^*}}{p+1}]dx \\
&\leq C\int_{\{x:h(x)<\delta\}} \frac{u^2}{h^{\frac{q-1}{p-q}}}dx + C\int_{\{x:h(x)\geq\delta\}} \frac{u^{2^*}}{h^{\frac{q+1-2^*}{p-q}}}dx \\
&\leq C(\int_{\{x:h(x)<\delta\}} (u^2)^{\frac{2^*}{2}}dx)^{\frac{2}{2^*}}(\int_{\{x:h(x)<\delta\}} [\frac{1}{h(x)}]^{\frac{q-1}{p-q}\frac{N}{2}}dx)^{\frac{2}{N}} \\
&+ C_\delta(\int_{\{x:h(x)\geq\delta\}} u^{2^*})^{\frac{2^*}{2^*}} \\
&\leq C\epsilon \left\|u\right\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} + C_\delta \left\|u\right\|^{2^*}_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\leq C\epsilon \left\|\nabla u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\delta \left\|\nabla u\right\|^{2^*}_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade segue de (4.5) e a última desigualdade segue da Desigual-

dade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. Assim,

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}u^2 - \frac{1}{q+1}|u|^{q+1} + \frac{1}{p+1}h(x)|u|^{p+1}\right]dx \geq$$
$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\epsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C_\delta\|u\|^{2^*}_{L^2(\Omega)} \geq$$
$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\lambda}{2\lambda_1}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\epsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C_\delta\|u\|^{2^*}_{L^2(\Omega)} \geq$$
$$(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_1} - C\epsilon)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C_\delta\|u\|^{2^*}_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando $0 < \epsilon < (\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4\lambda_1}\frac{1}{C})$ com $C > 1$ encontramos

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{4}(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|u\|^{2^*}_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{4}(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|\nabla u\|^{2^*}_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

se $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} < \epsilon$ suficientemente pequeno.

Portanto $u_0 \equiv 0$ é um mínimo local de I_λ na topologia $H^1_0(\Omega)$.

Assumiremos agora que (4.4) ocorre. Sem perda de generalidade tomemos $x_0 = 0$. Escolhemos uma vizinhança B de x_0 tal que $\overline{B} \subset \Omega$ e fixamos $\phi_1 \in C^\infty_0(B)$. Definimos $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-\sigma}\phi_1(\frac{x}{\epsilon})$, onde $\epsilon > 0$ e $\frac{2}{q-1} < \sigma < \frac{r}{p-q}$. Assim,

$$\int_\Omega \phi_\epsilon^{q+1}(x)dx = \epsilon^{-\sigma(q+1)}\epsilon^N \int_B \phi_1^{q+1}(z)dz =$$
$$\epsilon^{N-\sigma(q+1)}\int_B \phi_1^{q+1}(z)dz = C_1\epsilon^{N-\sigma(q+1)} =$$
$$O(\epsilon^{N-\sigma(q+1)}).$$

Analogamente,

$$\int_\Omega \phi_\epsilon^2(x)dx = O(\epsilon^{N-2\sigma}).$$

Temos ainda que utilizando (4.4) com $x_0 = 0$ obtemos a desigualdade

$$\int_\Omega h(x)\phi_\epsilon^{p+1}(x)dx \leq \int_\Omega A|x|^r\phi_\epsilon^{p+1}(x)dx =$$
$$A\epsilon^r\epsilon^{-\sigma(p+1)}\epsilon^N\int_B \phi_1^{p+1}(z)dz = C_2\epsilon^{r+N-\sigma(p+1)} =$$
$$O(\epsilon^{r+N-\sigma(p+1)}).$$

Como $|\nabla\phi_\epsilon(x)|^2 = \sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial\phi_\epsilon}{\partial x_i}(x))^2$ e $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-\sigma}\phi_1(\frac{x}{\epsilon})$ temos

$$\int_\Omega |\nabla\phi_\epsilon(x)|^2\,dx = \epsilon^{2(-\sigma-1)}\int_\Omega \left|\nabla\phi_1(\frac{x}{\epsilon})\right|^2 dx =$$
$$\epsilon^{2(-\sigma-1)}\epsilon^N\int_B |\nabla\phi_1(z)|^2\,dz = C_3\epsilon^{N+2(-\sigma-1)}.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla\phi_\epsilon(x)|^2\,dx = O(\epsilon^{N+2(-\sigma-1)}). \tag{4.6}$$

Observamos que cada expoente das estimativas acima são positivos, pois

(i) $N-2\sigma-2\geq 0$, visto que $N-2\sigma-2\geq 0 \Leftrightarrow N-2\leq \frac{2r}{p-q} \Leftrightarrow (\frac{p-q}{r})N \geq \frac{2N}{N-2} = 2^*$ e segue de (4.4) que $r < \frac{N(p-q)}{q+1} \Leftrightarrow \frac{q+1}{N} < \frac{p-q}{r} \Leftrightarrow q+1 < N\frac{(p-q)}{r}$ e por hipótese, $2^* < q+1$. Logo $N-2\sigma-2\geq 0$.

(ii) $N-\sigma(q+1)\geq 0$, visto que $N-\sigma(q+1)\geq N-\frac{r}{p-q}(q+1) > N-N\left(\frac{p-q}{q+1}\right)\left(\frac{q+1}{p-q}\right) = 0$;

(iii)$\sigma(q-1)-2\geq 0$, visto que $\sigma(q-1)-2 > \frac{2}{q-1}(q-1)-2 = 0$;

(iv) $\sigma(q-1)\geq 0$, visto que $\sigma(q-1)\geq \frac{2}{q-1}(q-1) = 2 > 0$;

(v) $r-\sigma(p-q)\geq 0$, visto que $r-\sigma(p-q)\geq r-\frac{r}{p-q}(p-q) = 0$.

Segue que $\phi_\epsilon \to 0$ na norma de $H_0^1(\Omega)$, se $\epsilon\to 0$. Pelos cálculos anteriores temos

$$I_\lambda(\phi_\epsilon) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla\phi_\epsilon|^2 - \frac{\lambda}{2}\phi_\epsilon^2 - \frac{1}{q+1}|\phi_\epsilon|^{q+1} + \frac{1}{p+1}h(x)|\phi_\epsilon|^{p+1})dx \leq$$
$$C(\epsilon^{N-2-2\sigma} - \epsilon^{N-2\sigma} - \epsilon^{N-\sigma(q+1)} - \epsilon^{r+N-\sigma(p+1)}) =$$
$$C\epsilon^{N-\sigma(q+1)}(\epsilon^{\sigma(q-1)-2} - \epsilon^{\sigma(q-1)} - 1 - \epsilon^{r-\sigma(p-q)}),$$

isto é,

$$I_\lambda(\phi_\epsilon) = C\epsilon^{N-\sigma(q+1)}(-1+o(1)) < 0 \text{ quando } \epsilon\to 0^+.$$

Portanto $u\equiv 0$ não é um mínimo para I_λ na topologia de $H_0^1(\Omega)$ embora seja um mínimo na topologia de $C^1(\Omega)$.

■

Apêndice A

Resultados auxiliares

Os resultados deste apêndice foram usados no Capítulo 3 deste trabalho.

A.1 Um problema auxiliar

O teorema abaixo garante a existência e a unicidade de solução para o problema (A.1). Daremos duas provas para este teorema, a primeira baseada no método de sub e super-soluções e a segunda baseada no teorema (B.0.7). Tais demontrações também podem ser encontradas em [12] e [17].

Teorema A.1.1. *O problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q & x \in \Omega \\ u &> 0 & x \in \Omega \\ u &= 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{A.1}$$

onde λ e q são parâmetros reais com $\lambda > 0$, $0 < q < 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, um domínio limitado com fronteira regular tem uma única solução positiva.

Primeira Demonstração : Seja e a única solução dada pelo teorema (B.0.10) do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta e &= 1, & x \in \Omega \\ e &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo $e > 0$ em Ω. Como que $0 < q < 1$, dado que $\lambda > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda < \lambda_0$, existe $M = M(\lambda) > 0$ que satisfaz

$$M \geq \lambda M^q \|e\|_\infty^q .$$

De fato,

$$M \geq \lambda M^q \|e\|_\infty^q \Leftrightarrow 1 \geq \lambda M^{q-1} \|e\|_\infty^q$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda \|e\|_\infty^q} \geq M^{q-1} \Leftrightarrow \lambda \|e\|_\infty^q \leq M^{1-q} \Leftrightarrow (\lambda \|e\|_\infty^q)^{\frac{1}{1-q}} \leq M.$$

Assim a função Me satisfaz

$$-\Delta(Me) = M \geq \lambda M^q \|e\|_\infty^q \geq \lambda M^q e^q$$

e daí, Me é uma supersolução do problema (A.1). Além disso, $\epsilon\phi_1$ é uma subsolução de (A.1.1) onde ϕ_1 é a autofunção do operador $-\Delta$ associada ao primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$, visto que para $0 < q < 1$

$$-\Delta(\epsilon\phi_1) = \lambda_1 \epsilon\phi_1 \leq \lambda(\epsilon\phi_1)^q$$

para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\lambda > 0$ fixado.

Tomando ϵ suficientemente pequeno conseguimos

$$\epsilon\phi_1 < Me$$

e assim segue do teorema (A.2.1) que existe uma solução u do problema (A.1.1) tal que

$$\epsilon\phi_1 \leq u \leq Me.$$

A unicidade do problema segue do lema (3.1.3), pois sejam $u,\ w$ soluções do problema (A.1), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q & x \in \Omega \\ u &> 0 & x \in \Omega \\ u &= 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w &= \lambda w^q & x \in \Omega \\ w &> 0 & x \in \Omega \\ w &= 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Por um lado temos

$$u \geq w,$$

e por outro lado temos que

$$w \geq u.$$

Portanto $u = w$ *em* Ω.

■

Segunda demonstração: Primeiramente iremos garantir a existência de uma solução fraca do problema através do teorema (B.0.7) e depois regularizaremos tal solução e assim encontraremos uma solução clássica. Por fim, mostraremos a unicidade da solução.

Considere o funcional associado ao problema

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}dx.$$

Tal funcional é limitado inferiormente, pois

$$\begin{aligned} J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}dx &\geq \\ \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx &= \\ \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} &\geq \\ \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u\|^{q+1}_{L^{2}(\Omega)} &\geq \\ \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\|u\|^{q+1} & \end{aligned}$$

e como a função $g(t) = \frac{1}{2}t^2 - ct^{q+1}$ é limitada inferiormente temos que existe uma constante C tal que

$$J(u) \geq C.$$

E mais, existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $J(u) > J(0)$ se $\|u\| \geq R$, e deste modo,

$$\inf_{H_0^1(\Omega)} J(u) = \inf_{B_R(0)} J(u).$$

Afirmação: J é fracamente semicontínuo inferiormente em $H_0^1(\Omega)$.

De fato, a parte quadrática é convexa e contínua, logo fracamente semicontínuo inferiormente. Falta mostrar que o segundo termo é fracamente semicontínuo inferiormente. Para isso considere a sequência (u_n) em $H_0^1(\Omega)$, $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, segue do teorema das imersões compactas de Sobolev (B.0.1) e $1 < q+1 < 2$ que, a menos de subsequências, $u_n \to u$ em $L^{q+1}(\Omega)$ e pelo teorema (B.0.3) existe uma função $h(x) \in L^{q+1}(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq h(x),\ \ qtp\ em\ \Omega.$$

Pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u_n^{q+1}(x)dx \to \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}(x)dx.$$

Portanto, J é fracamente semicontínuo inferiomente na topologia fraca de $H_0^1(\Omega)$.

Como $B_R(0)$ é fracamente compacta na topologia de $H_0^1(\Omega)$ temos pelo teorema (B.0.7) que J atinge um mínimo em $B_R(0)$, e pelo Princípio do Máximo $u_0 > 0$ em Ω.

Utilizando o argumento de "bootstrap"temos que $u_0 \in C^1(\Omega)$ e como $u_0 > 0$ então $\lambda u_0^q \in C^q(\Omega),\ 0 < q < 1$, pois se $u(x) \neq u(y)$ e $x \neq y$ então

$$\begin{aligned}\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|\lambda u^q(x) - \lambda u^q(y)|}{|x-y|^q} = \lambda \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u^q(x) - u^q(y)|}{|u(x)-u(y)|^q}\frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^q} \leq \\ \lambda \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|^q}{|x-y|^q} \leq \\ \lambda K < \infty.\end{aligned}$$

Se $u(x) = u(y)$ e $x \neq y$ então

$$\sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|\lambda u^q(x) - \lambda u^q(y)|}{|x-y|^q} = 0 < \infty.$$

Deste modo λu^q é Holder contínua com expoente q, ou seja, $\lambda u^q \in C^q(\overline{\Omega})$.

Assim, pelo teorema (B.0.10) existe uma solução $u_0 \in C^{2,q}(\overline{\Omega})$ do problema, isto é, u_0 é uma solução clássica do problema.

Unicidade :

Sejam $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$ duas soluções do problema (A.1), isto é,

$$-\Delta u_1 = \lambda u_1^q \ \text{ e } \ -\Delta u_2 = \lambda u_2^q.$$

Assim

$$\frac{-\Delta u_1}{u_1} = \frac{\lambda u_1^q}{u_1} e \ \ \frac{-\Delta u_2}{u_2} = \frac{\lambda u_2^q}{u_2},$$

e segue que

$$\frac{-\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2} = \frac{\lambda u_1^q}{u_1} - \frac{\lambda u_2^q}{u_2}.$$

Multiplicando a equação acima por $(u_1^2 - u_2^2)$ e integrando obtemos

$$\int_\Omega (\frac{-\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2})(u_1^2 - u_2^2)dx = \int_\Omega (\frac{\lambda u_1^q}{u_1} - \frac{\lambda u_2^q}{u_2})(u_1^2 - u_2^2)dx$$
$$\int_\Omega (-\Delta u_1 u_1 + \frac{\Delta u_1}{u_1}u_2^2 + \frac{\Delta u_2}{u_2}u_1^2 - \Delta u_2 u_2)dx = \int_\Omega (\frac{\lambda u_1^q}{u_1} - \frac{\lambda u_2^q}{u_2})(u_1^2 - u_2^2)dx$$
$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^2 - \nabla u_1 \nabla u_2 \frac{u_2}{u_1} - \nabla u_2 \nabla u_1 \frac{u_1}{u_2} + |\nabla u_2|^2)dx = \int_\Omega (\frac{\lambda u_1^q}{u_1} - \frac{\lambda u_2^q}{u_2})(u_1^2 - u_2^2)dx.$$

Seja $x \in \Omega$, como tanto para $u_1(x) \leq u_2(x)$ ou $u_2(x) \leq u_1(x)$ temos que

$$\lambda \int_\Omega (\frac{u_1^q}{u_1} - \frac{u_2^q}{u_2})(u_1^2 - u_2^2)dx \leq 0$$

e

$$\int_\Omega (\left|\nabla u_1 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\right|^2 + \left|\nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right|^2)dx =$$
$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^2 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_1 \nabla u_2 - \frac{u_1}{u_1}\nabla u_1 \nabla u_2 + \frac{u_1^2}{u_2^2}|\nabla u_2|^2)dx +$$
$$\int_\Omega (|\nabla u_2|^2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1 \nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1 \nabla u_2 + \frac{u_2^2}{u_1^2}|\nabla u_2|^2)dx =$$
$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_1 \nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1 \nabla u_2)dx +$$
$$\int_\Omega (\frac{u_1}{u_2}u_1 \Delta u_2 - \frac{u_1^2}{u_2^2}\Delta u_2 u_2 + \frac{u_2}{u_1}\Delta u_1 u_2 - \frac{u_2^2}{u_1^2}u_1 \Delta u_1)dx =$$
$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_1 \nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1 \nabla u_2)dx$$

então

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 - \frac{u_1}{u_1}\nabla u_1 \nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1 \nabla u_2)dx \geq 0.$$

Assim,

$$0 \leq \lambda \int_\Omega (\frac{u_1^q}{u_1} - \frac{u_2^q}{u_2})dx \leq 0$$

logo $u_1 = u_2$, visto que a medida de Ω é não nula e $\lambda > 0$. ∎

A.2 Iteração monotônica

Nesta seção demonstraremos um teorema que dará a idéia do método conhecido como Iteração Monotônica. Tal teorema garante uma solução minimal para o problema $(3.1)_\lambda$ dado que existem, $\underline{u}$ e $\overline{u}$, respectivamente, sub e supersolução do problema $(3.1)_\lambda$, tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$. Nos baseamos em [10], [11], [12] e [17] para realizar a demonstração deste teorema.

Teorema A.2.1. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Suponha que $\underline{u}$ é uma subsolução e $\overline{u}$ uma supersolução do problema $(3.1)_\lambda$. Então o problema $(3.1)_\lambda$ tem soluções $u,\ v \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que $\underline{u} \leq u \leq v \leq \overline{u}$. Além do mais, qualquer solução U de $(3.1)_\lambda$ com $\underline{u} \leq U \leq \overline{u}$ é tal que $u \leq U \leq v$.*

Demonstração:

Dado $u \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e como $g(x,u)$ é contínua em Ω, então $g(.,u) \in L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 1$. Segue que o problema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta v &= g \quad x \in \Omega \\ v &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma única solução $v \in W^{2,p}(\Omega),\ 1 < p < \infty$.

Segue do teorema das imersões compactas para $p > N$ que

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),\ 0 < \alpha \leq 1 - \frac{N}{p}$$

e assim $v \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Pela teoria de Schauder $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Desta forma podemos definir uma aplicação T que faz corresponder a cada $u \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma função $v \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ que é a única solução do problema acima. Isto é, existe uma aplicação

$$\begin{aligned} T : C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) &\rightarrow C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ u &\rightarrow Tu = v \end{aligned}$$

Mostremos que T é monótona no intervalo $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$, isto é, dados $\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \overline{u}$ temos $Tu_1 = v_1 \leq Tu_2 = v_2$. De fato,

$$\begin{cases} -\Delta(v_1 - v_2) &= -\Delta v_1 + \Delta v_2 = \lambda u_1^q + u_1^p - \lambda u_2^q - u_2^p \\ &= \lambda(u_1^q - u_2^q) + (u_1^p - u_1^p) \leq 0 \qquad x \in \Omega \\ v_1 - v_2 &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{A.2}$$

Pelo Princípio do Máximo temos $v_1 \leq v_2$ em Ω.

Vamos agora às iterações

$$u_n = Tu_{n-1}, \quad u_0 = \underline{u}$$
$$v_n = Tv_{n-1}, \quad v_0 = \underline{v}$$

isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} &= \lambda u_n^q + u_n^p \quad x \in \Omega \\ u_{n+1} &= 0 \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v_{n+1} &= \lambda v_n^q + v_n^p \quad x \in \Omega \\ v_{n+1} &= 0 \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Afirmação : $\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0 = \overline{u}$

De fato,

$$\begin{cases} -\Delta(u_0 - u_1) &= -\Delta u_0 + \Delta u_1 = -\Delta u_0 - \lambda u_0^q - u_0^p \leq 0 \quad x \in \Omega \\ u_0 - u_1 &= 0 \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e pelo Princípio do Máximo $u_0 \leq u_1$ em Ω.

Analogamente,

$$\begin{cases} -\Delta(v_1 - v_0) &= -\Delta u_0 + \Delta u_1 = \lambda v_0^q + v_0^p + \Delta v_0 \leq 0 \quad x \in \Omega \\ v_1 - v_0 &= 0 \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e pelo Princípio do Máximo $v_1 \leq v_0$ em Ω.

E mais,

$$\begin{cases} -\Delta(v_0 - u_1) &= -\Delta v_0 + \Delta u_1 = \lambda v_0^q + v_0^p - \lambda u_0^q - u_0^p = \lambda(v_0^q - u_0^q) + (v_0^p - u_0^p) \geq 0 \quad x \in \Omega \\ v_0 - u_1 &= 0 \qquad\qquad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo $u_1 \leq v_0$ em Ω.

Assim temos

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0 = \overline{u}.$$

Mostremos que $\{u_n\}$ é crescente, faremos isto usando indução e o Princípio do Máximo. Suponhamos que $u_{n-1} \leq u_n$, assim

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1} - u_n) &= -\Delta u_{n+1} + \Delta u_n = \lambda u_n^q + u_n^q - \lambda u_{n-1}^p - u_{n-1}^p \geq 0 \quad x \in \Omega \\ u_{n+1} - u_n &= 0 \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e pelo Princípio do Máximo $u_n \leq u_{n+1}$ *em* Ω.

Analogamente mostra-se que $\{v_n\}$ é decrescente.

Falta mostrar que $u_n \leq v_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, novamente usaremos indução finita e o Princípio do Máximo. Para isso suponhamos que $u_{n-1} \leq v_{n-2}$ e mostremos que $u_n \leq v_{n-1}$. Como

$$\begin{cases} -\Delta(u_n - v_{n-1}) & = -\Delta u_n + \Delta v_{n-1} = \lambda u_{n-1}^q + u_{n-1}^q - \lambda v_{n-2}^p - v_{n-2}^p \leq 0 \quad x \in \Omega \\ \qquad u_n - v_{n-1} & = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

temos pelo Princípio do Máximo que $u_n \leq v_{n-1}$ *em* Ω.

Como $\{v_n\}$ é monótona não - crescente, limitada inferiormente e vale $u_n \leq v_{n-1}$, assim $u_n \leq v_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e como $\{u_n\}$ é não-decrescente e limitada superiormente, logo existem u, v tais que $u_n \to u$ *e* $v_n \to v$ pontualmente.

Da regularidade da subsolução $\underline{u}$ e da supersolução $\overline{u}$ de (A.1) resulta que $\underline{u}, \overline{u} \in L^p(\Omega),\ p \geq 1$ e segue da afirmação anterior que

$$|u_n| \leq |\underline{u}| + |\overline{u}|$$
$$|v_n| \leq |\underline{u}| + |\overline{u}|$$

visto que

$$u_n \leq \overline{u} \leq |\underline{u}| + |\overline{u}|$$

e

$$u_n \geq \underline{u} \geq -(|\underline{u}| + |\overline{u}|).$$

Analogamente temos para v_n. Logo, $|u_n|\,,\ |v_n| \in L^p(\Omega)$. Pelo teorema da Convergência Dominada

$$u_n \to u \text{ e } v_n \to v \text{ em } L^p\Omega.$$

Como g é contínua, existe $k > 0$ tal que

$$|g(x, u_n(x))| \leq k, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega} \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $g(., u_n) \in L^p(\Omega)$ e pelo teorema da Convergência Dominada

$$g(., u_n) \to g(., u) \ em\ L^p(\Omega). \tag{A.3}$$

Como $g(., u_{n-1}),\ u_{n-1} \in L^p(\Omega)$ e satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_n &= g(., u_{n-1}) \quad x \in \Omega \\ u_n &= 0 \qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{A.4}$$

temos pelo teorema (B.0.4) que $u_n \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}$ e existe uma constante C tal que

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|g(., u_{n-1}) - g(., u_{m-1})\|_{L^p(\Omega)}$$

e de (A.4) segue que $\{u_n\} \in W^{2,p}(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy, mas $W^{2,p}(\Omega)$ é espaço de Banach, logo existe $U \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \to U \ em\ W^{2,p}(\Omega)$$

e como

$$\|u_n - U\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_n - U\|_{W^{2,p}(\Omega)}$$

temos que

$$u_n \to U \text{ em } L^p(\Omega).$$

Segue da unicidade do limite que $U = u$. Logo $u_n \to u$ em $W^{2,p}(\Omega)$. Do teorema (B.0.6) podemos concluir que a convergência anterior é também em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Temos ainda que para cada $n \in \mathbb{N},\ u_n \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi dx = \int_\Omega g(x, u_{n-1}(x))\phi dx, \text{ para todo } \phi \in H_0^1(\Omega)$$

e do teorema da Convergência Dominada

$$\int_\Omega g(x, u_{n-1})\phi dx \to \int_\Omega g(x, u)\phi dx, \text{ para todo } \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado, $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ continuamente para $p > N$, então

$$\|u_n - u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \|u_n - u\|_{W^{2,p}(\Omega)}$$

e assim $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Segue então que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx, \text{ para todo } \phi \in H_0^1(\Omega)$$

e portanto

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \int_\Omega g(.,u)\phi dx, \text{ para todo } \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Deste modo mostramos que u é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(.,u) & x \in \Omega \\ u &= 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

mas como $u \in W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Omega)$ e $g(.,u) \in C^\alpha(\Omega)$ temos que $u \in C^2(\Omega)$.

Fazendo uma análise semelhante podemos verificar que $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e mais, $u(x) \leq v(x)$ para cada $x \in \Omega$.

Faremos a última afirmação do teorema usando o Princípio de Indução Finita. Mostraremos que

$$u_n \leq U \leq v_n, \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}, \tag{A.5}$$

onde U é uma solução de $(3.1)_\lambda$ com $\underline{u} \leq U \leq \overline{u}$.

Segue da monotonicidade de T e do fato de $u_0 \leq U \leq v_0$ que

$$u_1 \leq U \leq v_1.$$

Suponhamos que vale para $= k-1$, isto é,

$$u_{k-1} \leq U \leq v_{k-1}$$

então da monotonicidade do operador T temos

$$u_k \leq U \leq v_k.$$

Portanto vale (A.5). Assim, passando o limite em (A.5) temos

$$u \leq U \leq v.$$

■

A.3 Lema auxiliar

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e L o operador fortemente elíptico definido por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0(x)u.$$

O Lema abaixo é a adaptação de um resultado encontrado em [17].

Lema A.3.1. *Se u satisfaz*

$$\begin{cases} Lu & \geq & 0, & x \in \Omega \\ u & > & 0, & x \in \Omega \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

e ϕ_1 é uma autofunção associada ao primeiro autovalor do operador L, isto é, ϕ_1 satisfaz

$$\begin{cases} L\phi_1 & = & \lambda_1\phi_1, & x \in \Omega \\ \phi_1 & > & 0, & x \in \Omega \\ \phi_1 & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

com $u, \phi_1 \in C^1(\overline{\Omega})$, então existe $\alpha > 0$ tal que $u - \alpha\phi_1 > 0$ em Ω.

Demonstração: Pelo lema de Hopf temos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0, \ x_0 \in \partial\Omega.$$

Como $\partial\Omega$ é compacto existe uma vizinhança $N_\delta = \left\{x \in \overline{\Omega} : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\right\} \subset \overline{\Omega}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0, \ x_0 \in N_\delta.$$

Analogamente temos

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x_0) < 0, \ x_0 \in N_\delta.$$

Seja α_1 tal que

$$\alpha_1 \min_{N_\delta} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} > \max_{N_\delta} \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Defina $g(x) = u(x) - \alpha_1\phi_1(x)$. Assim, para $x \in N_\delta$ temos

$$\frac{\partial g}{\partial \nu}(x) < 0$$

e deste modo $g(x) \geq 0$ para todo $x \in N_\delta$, pois $g(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

Como $\overline{\Omega \setminus N_\delta}$ é compacto e $u, \phi_1 \in C^1(\overline{\Omega \setminus N_\delta})$ e $\phi_1 > 0$ então existe α_2 tal que

$$\frac{u(x)}{\phi_1(x)} > \alpha_2, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega \setminus N_\delta}.$$

Portanto, tomando $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ obtemos

$$u - \alpha\phi_1 > 0 \text{ em } \Omega.$$

■

Apêndice B

Resultados básicos

Aqui enunciaremos e daremos referências para suas provas dos principais teoremas utilizados no nosso trabalho.

Teorema B.0.1. (cf. [Brezis, pag. 169]) *Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um domínio limitado de classe C^1. Então temos*

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para todo } q \in [1, 2^*)$$

com injeção compacta, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, e $N \geq 3$.

Teorema B.0.2. (cf. [Brezis, pag. 71]) *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. Então $\rho_n * f \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Teorema B.0.3. (cf. [Brezis, pag. 58]) *Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$. Então existe uma subsequência f_{n_k} de (f_n), e uma função $h \in L^p(\Omega)$, tal que*

$$f_{n_k}(x) \to f(x) \text{ qtp em } \Omega$$

e

$$|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \text{ qtp em } \Omega.$$

Teorema B.0.4. (cf. [Gilbarg-Trudinger, pag 235]) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Então existe uma única função $u \in W^{2,p}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema B.0.5. (cf. [Brezis, pag 168]) *Suponha $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou um domínio limitado com fronteira de classe C^1 e sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\begin{array}{llll} Se & \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0 & temos & W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad onde \ \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} \\ se & \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0 & temos & W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad para\ todo\ q \in [p, \infty[\\ se & \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0 & temos & W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \end{array}$$

com injeções contínuas.

Teorema B.0.6. (cf. [de Figueiredo, pag 103]) *Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então para qualquer $j \geq 0$ a imersão*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$$

onde $0 < \alpha < 1 - \dfrac{N}{p}$ é compacta se $m - 1 < \dfrac{N}{p} < m$.

Teorema B.0.7. (cf. [Struwe, pag 4]) *Suponha que V é um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|$ e seja $M \subset V$ um subconjunto fracamente fechado em V. Suponha $E : M \to \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$ coercivo em M com respeito a V, isto é, $E(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$, $u \in M$ e fracamente sequencialmente semi-contínuo inferiormente, isto é, para qualquer $u \in M$ e qualquer sequência $(u_m) \in M$ tal que $u_m \rightharpoonup u$ verifica-se*

$$E(u) \leq \liminf_{m \to \infty} E(u_m).$$

Então E é limitado inferiormente sobre M e o ínfimo é atingido em M.

A partir de agora o operador L é o seguinte

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x) u.$$

.

Teorema B.0.8. (cf. [Gilbarg-Trudinger, pag 33]) *Seja L um operador eliptico em um domínio limitado Ω. Suponha que*

$$Lu \geq 0 (\leq 0) \ em\ \Omega, \ c \leq 0 \ em \Omega$$

com $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então o máximo (mínimo) de u em $\overline{\Omega}$ é atingido sobre $\partial\Omega$, isto é,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \ (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-)$$

Teorema B.0.9. (cf. [Struwe, pag 17]) *Suponha que $\underline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma subsolução e $\overline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ uma supersolução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(.,u) & \in \Omega \\ u &= u_0 & \partial\Omega \end{cases}.$$

Suponha ainda que existem constantes $M_1,\ M_2 \in \mathbb{R}$ que satisfazem

$$-\infty < M_1 \leq \underline{u} \leq \overline{u} \leq M_2 < \infty$$

quase sempre em Ω. Então existe uma solução fraca $u \in W^{1,2}(\Omega)$ do problema acima satisfazendo a condição $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ quase sempre em Ω.

Teorema B.0.10. (cf. [Gilbarg-Trudinger, pag 106]) *Seja L um operador elíptico em um domínio limitado Ω, com $c \leq 0$, e seja f e os coeficientes de L limitados e pertencentes a $C^\alpha(\Omega)$. Suponha que Ω satisfaz a condição da esfera exterior em cada ponto da fronteira. Então, se ϕ é contínua sobre a fronteira, o problema de Dirichelet,*

$$\begin{cases} Lu &= f & \in \Omega \\ u &= \phi & \partial\Omega \end{cases}.$$

tem uma única solução $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Teorema B.0.11. (cf. [Gilbarg-Trudinger, pag 241]) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{1,1}$, e seja um operador elíptico em um Ω com coeficientes $a^{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$, com $i,\ j = 1, ..., n$ e $c \leq 0$. Então, se $f \in L^p(\Omega)$ e $\phi \in W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, o problema de Dirichlet $Lu = f$ em Ω, $u - \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem uma única solução $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$.*

Teorema B.0.12. (cf. [Gilbarg-Trudinger, pag 109]) *Seja $u \in C^2(\Omega)$ uma solução da equação $Lu = f$ em um conjunto aberto Ω onde f e os coeficientes do operador elíptico L estão em $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Então $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$. Se f e os coeficientes de L estão em $C^\infty(\Omega)$, então $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Teorema B.0.13. (cf. [8], pag 323) *Sejam W, Y espaços de Banach, $\Omega \in W$ um aberto e $G : \Omega \to Y$ duas vezes continuamente diferenciável. Seja $w : [-1,\ 1] \to \Omega$ um arco simples continuamente diferenciável em Ω tal que $G(w(t)) = 0$ para $|t| \leq 1$. Suponha que*

(a) $w'(0) \neq 0$,

(b) $dimN(G'(w(0))) = 2,\ codim(R(G'(w(0)))) = 1$,

(c) $N(G'(w(0)))$é gerado por $w'(0)$ e v, e

(d) $G''(w(0))(w'(0),\ v) \notin R(G'(w(0)))$. Então $w(0)$ é um ponto de bifurcação de $G(w) = 0$ com respeito a $C = \{w(t) :\ t \in [-1,\ 1]\}$ e em alguma vizinhança de $w(0)$ a totalidade de soluções de $G(w) = 0$ forma duas curvas que se interceptam somente em $w(0)$.

Teorema B.0.14. (cf. [9], pag 162) *Sejam $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, X, Y espacos de Banach, V uma vizinhança de 0 e $F : I \times V \to Y$ uma função duas vezes difenciáveis no sentido de Fréchet. Suponha que $\lambda_0 \in I$ e*

(i) $F(\lambda,\ 0) = 0$ para $\lambda \in I$,

(ii) $dim\ N(F_x(\lambda_0,\ 0)) = codim\ R(F_x(\lambda_0,\ 0)) = 1$,

(iii) $F_{\lambda x}(\lambda_0,\ 0)x_0 \notin R(F_x(\lambda_0,\ 0))$ onde $x_0 \in X$ gera $N(F_x(\lambda_0,\ 0))$.

Seja Z algum complemento de span $\{x_0\}$ em X. Então existe um intervalo aberto $\widetilde{I}$ contendo 0 e funções continuamente diferenciáveis $\lambda : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ e $\psi :: \widetilde{I} \to Z$ tais que $\lambda(0) = 0,\ \psi(0) = 0$, e, se $x(s) = s\ x_0 + s\ \psi(s)$, então $F(\lambda(s), x(s)) = 0$. Além disso, $F^{-1}(\{0\})$ próximo a $(\lambda_0, 0)$ consiste precisamente das curvas $x = 0$ e $(\lambda(s), x(s)),\ s \in \widetilde{I}$.

Teorema B.0.15. (cf. [16], pag 149) *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),\ N \geq 1$. Assuma que para quase todo x a função $y \mapsto G_y f(y)$ é somável, onde G_y úma função de Green e seja $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ a função dada por*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G_y(x) f(y) dy. \tag{B.1}$$

Então u satisfaz

$$\begin{aligned} u &\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \\ -\Delta u &= f \quad em\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Além disso, a função u tem derivada no sentido das distribuições dada por

$$\partial_i u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (\frac{\partial G_y}{\partial x_i})(x) f(y) dy,$$

para quase todo x.

Teorema B.0.16. (cf. [16], pag 224) *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p \leq \infty$ com suporte compacto, e u dada por (B.1).*
(i) u é continuamente diferenciável para $N = 1$. Para $N \geq 2$ e $1 \leq p < \dfrac{N}{2}$

$$u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^2) \text{ para todo } q < \infty, \text{ para } p = 1, \ N = 2,$$

$$u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para todo } q < \frac{N}{N-2}, \text{ para } p = 1, \ N \geq 3,$$

$$u \in L^q(\mathbb{R}^N) \ q = \frac{pN}{N-2p}, \text{ para } p > 1, \ N \geq 3.$$

(ii) Se $\dfrac{N}{2} \leq p \leq N$ então u é Hölder contínua em cada ordem $\alpha < 2 - \dfrac{N}{p}$

$$|u(x_0) - u(y)| \leq C_N(\alpha, p)|x - y|^\alpha \|f\|_{L^p(\Omega)} (\mathcal{L}^N(supp(f)))^{\frac{2-\alpha}{n} - \frac{1}{p}}.$$

(iii) Se $N < p$ então u tem uma derivada dada por

$$\partial_i u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (\frac{\partial G_y}{\partial x_i})(x) f(y) dy,$$

a qual é Hölder contínua em cada ordem $\alpha < 1 - \dfrac{N}{p}$, isto é,

$$|u(x_0) - u(y)| \leq D_N(\alpha, p)|x - y|^\alpha \|f\|_{L^p(\Omega)} (\mathcal{L}^N(supp(f)))^{\frac{1-\alpha}{n} - \frac{1}{p}}.$$

onde $D_N(\alpha, p)$ e $C_N(\alpha, p)$ são constantes universais que dependem somente de α e p.

Teorema B.0.17. (cf. [16], pag 226) *Se $f \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto, $K \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ e u dada por (B.1). Então $u \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$.*

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., *Sobolev spaces*, Academic Press, (1975).

[2] Alama, S. & Tarantello, G., *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Calc. Var. 1, (1993) 439-475.

[3] Alama, S. & Tarantello, G., *Some remarks on C^1 versus H^1 minimizers*, C. R. Acad. Paris 319, Série I, (1994) 1165-1169.

[4] Ambrosetti, A. & Brezis, H. & Cerami, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122, (19940) 519-543.

[5] Brezis, H.,*Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, (1987).

[6] Brezis, H. & Kato, T., *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potencials*, J. Math. Pures et Appl., 58, (1979) 137-151.

[7] Brezis, H. & Nirenberg, L., *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris 317, Série I, (1993) 465-472.

[8] Crandall, M. G. & Rabinowitz, P. H., *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Func. Analysis 8, (1971) 321-340.

[9] Crandall, M. G. & Rabinowitz, P. H., *Bifurcation, Perturbation of simple Eigenvalues, and linearized stability*, Arch. Ration. Mech. Anal. 52, (1973) 161-180.

[10] de Figueiredo, D. G., *Equações elípticas não lineares*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (1977).

[11] de Figueiredo, D. G., *Positive solutions of semilinear elliptic problems.* Differential equations (São Paulo, 1981), Lectures Notes in Math., Springer, Berlin-New York, 957 (1982) 34-87.

[12] de Holanda, A. R. F., *Existência de soluções positivas para uma classe de equações elípticas*, Dissertação de Mestrado do Departamento de Matemática, Universidade da Paraíba, (2000).

[13] Ghoussoub, N. & Preiss, D., *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points*, Ann. Inst. H. Poincaré Non Linéaire 6, (1989) 321-330.

[14] Gilbard, D. & Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Berlin: Springer-Verlag, 2 ed, (1983).

[15] Kavian, O., *Introduction a la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Paris, Springer-Verlag, (1993).

[16] Lieb, E. H.& Loss, M., *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol 14, (1997).

[17] Marques, I. A., *Soluções positivas para problemas elípticos com o termo não linear da forma* $\lambda u^q + u^p$, $0 < q < 1 < p$, Dissertação de Mestrado do Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, (1997).

[18] Struwe, M., *Variational methods: Applications to nonlinear PDE and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, (1990).

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo