Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções para um Sistema de Equações Elípticas envolvendo o p-Laplaciano

por

ELSON LEAL DE MOURA

Brasília
2006

Agradecimentos

Agradeço a Deus e Nossa Senhora por me iluminarem a cada dia para esta conquista .
À minha esposa, Desyreé, pelo amor, confiança, ajuda e companheirismo que me dedica a cada instante de nossas vidas.
À minha família: Elísio, Elza, Élcio, Elisiane, Júnior, Ednéia que mesmo na distância estão comigo e estão sempre espiritualmente.
À minha orientadora, Profa. Liliane de Almeida Maia, pela orientação, personalidade e por merecer com dignidade o papel de ser orientadora.
Ao Prof. Olímpio da UFV que sempre acreditou em mim e me deu força para continuar os estudos, receba o meu especial e eterno agradecimento.
Aos meus amigos : Anderson, Zhou, Sandra, Abílio, Fernando, o meu imenso obrigado.
Aos colegas da UnB: Willian Santana, Luverci, Nilton, Jhony, Sérgio, Ricardo, Enio, Zapata, Leonardo, Katrina, Walter, Vagner, Fagner, Janete, Gilberto.
Aos membros da banca : Prof. Everaldo e Prof. Marcelo pelas correções, sugestões para a finalização deste trabalho.
Finalmente agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

´´O futuro tem muitos nomes. Para os fracos, é o inatingível. Para os temerosos, o desconhecido. Para os valentes, é a oportunidade“.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F_u(x,u,v) \\ -\Delta_q v &= F_v(x,u,v), \end{cases}$$

em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, em que Δ_p e Δ_q são definidos por $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ e similarmente para q, utilizando métodos variacionais. Analisamos três casos de não linearidade:

$$|F(x,u,v)| \leq c_3(1 + |u|^r + |v|^s),$$

para alguma constante positiva c_3.
(I) caso sublinear: $r < p$ e $s < q$,
(II) caso superlinear: $p < r < p^*$ e $q < s < q^*$,
(III) caso ressonante : $r = p$ e $s = q$.

Também estudamos a existência de soluções em $\mathbb{R}^N$ para um sistema equivalente com potenciais coercivos e não linearidade superquadrática e subcrítica.

Abstract

In this work we study the existence of solutions for the system

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F_u(x,u,v) \\ -\Delta_q v &= F_v(x,u,v), \end{cases}$$

in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, where Δ_p and Δ_q are defined by $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ and in the same way for q, using variational methods. We analyse three nonlinear cases :

$$|F(x,u,v)| \leq c_3(1 + |u|^r + |v|^s),$$

for some positive constant c_3.
(I) sublinear case: $r < p$ and $s < q$,
(II) superlinear case: $p < r < p^*$ and $q < s < q*$,
(III) resonant case: $r = p$ and $s = q$.

We also study the existence of solutions in $\mathbb{R}^N$ for an equivalent system with coercive potentials and superquadratic and subcritic nonlinearity.

Sumário

Introdução

Neste trabalho apresentaremos um estudo baseado no artigo de Boccardo e Figueiredo [14] sobre a existência de soluções para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F_u(x,u,v) \\ -\Delta_q v &= F_v(x,u,v), \end{cases} \tag{$\mathbb{S}$}$$

em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ onde F_u, F_v designam as derivadas parciais de F com respeito a u e v, respectivamente ; p, q são números reais maiores que 1 e Δ_p, Δ_q são chamados de operadores p-Laplaciano e q-Laplaciano definidos por $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ e similarmente para q.

Mais precisamente, estudaremos a geometria do funcional associado

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\, dx - \int_\Omega F(x,u,v)dx.$$

Damos a esse trabalho um pouco de originalidade considerando um sistema elíptico em $\mathbb{R}^N$ da forma

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2} &= F_u(x,u,v),\ x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v + b(x)\,|v|^{q-2} &= F_v(x,u,v),\ x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{$\mathbb{D}$}$$

sobre a existência de soluções, generalizando o trabalho de Costa [8].

Observamos que existem muitos estudos recentes sobre sistemas elípticos em domínios ilimitados. Dentre eles podemos citar Ali e Tas [12] que tratam do problema ($\mathbb{D}$) com $a = 0,\ b = 0$. Estudaram também o mesmo problema com $p = q = 2$, Furtado, Maia e Silva [15] .

Resultados de existência de soluções para sistemas em domínios limitados têm sido considerados por [22], [25], [13], para as seguintes classes de potenciais F não lineares: $F(x,u,v) = c(x)\,|u|^\beta\,|v|^\gamma$.

O sistema seguinte

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= a(x)\,|u|^{\alpha-2}\,u + b(x)\,|v|^{\beta-2}\,v + f \\ -\Delta_q v &= c(x)\,|u|^{\gamma-2}\,u + d(x)\,|v|^{\delta-2}\,v + g \end{cases}$$

foi estudado por [6]. Em geral, o sistema não é variacional. Entretanto, se $b(x) = c(x)$ e $\beta = \gamma = 2$, se torna variacional com o funcional associado ao problema $(\mathbb{S})$ tendo $F(x,u,v) = a(x)\,|u|^{\alpha} + b(x)uv + d(x)\,|v|^{\delta} + fu + gv$.

Vamos introduzir certas hipóteses sobre as quais o nosso problema $(\mathbb{S})$ será estudado: nosso funcional Φ está bem definido no produto cartesiano dos espaços de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega) = E$ e, além disso, é um funcional de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ [cf. Apêndice A] se assumirmos uma condição de crescimento subcrítico e crítico para F :

$$|F(x,u,v)| \leq c_1(1 + |u|^{p^*} + |v|^{q^*}), \tag{$F.1$}$$

onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$, $1 < p < N$, similarmente para q, $1 < q < N$, e c_1 é uma constante positiva. E, ainda, assumindo os seguintes crescimentos para as derivadas parciais contínuas de F: existe uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$\begin{cases} |F_u(x,u,v)| &\leq& c_2(1 + |u|^{p^*-1} + |v|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}}) \\ |F_v(x,u,v)| &\leq& c_2(1 + |v|^{q^*-1} + |u|^{\frac{p^*(p^*-1)}{q^*}}). \end{cases} \tag{$F.2$}$$

Trabalharemos com hipóteses mais restritivas para F; a geometria de Φ depende fortemente dos valores de r e s nas seguintes estimativas :

$$|F(x,u,v)| \leq c_3(1 + |u|^{r} + |v|^{s}), \tag{$F.3$}$$

para alguma constante positiva c_3. Vamos considerar os seguintes casos:
(I) caso sublinear: $r < p$ e $s < q$,
(II) caso superlinear: $p < r < p^*$ e $q < s < q^*$,
(III) caso ressonante : $r = p$ e $s = q$.

Um fato importante que não será estudado é o caso crítico onde $r = p^*$ e $s = q^*$, em que perdem-se as imersões compactas de Sobolev.

Vamos agora enunciar os nossos resultados principais com respeito ao sistema $(\mathbb{S})$:

Teorema A (caso coercivo) : *Assuma as condições (F.2) e (F.3) com r e s no caso sublinear. Então Φ assume um mínimo global em algum ponto $(u_0, v_0) \in E$, o qual é uma solução fraca para o sistema* $(\mathbb{S})$

Uma pergunta que surge naturalmente, se considerarmos as condições

$$F(x,0,0) = F_u(x,0,0) = F_v(x,0,0) = 0, \tag{F.4}$$

é de como obter uma solução não-trivial para o sistema $(\mathbb{S})$. A resposta a esta pergunta será possível, sob as condições do próximo teorema.

Teorema B (caso coercivo, solução não-trivial) : *Assuma que F satisfaz as condições $(F.2)$, $(F.4)$ e $(F.3)$ com r e s no caso sublinear. Se existem constantes positivas R e $\theta < 1$, e uma função contínua*

$$K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que
$$F(x, t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) \geq t^{\theta} K(x,u,v), \tag{F.5}$$
para $K \geq 0$, $|u|, |v| \leq R$ e $t > 0$ suficientemente pequeno. Então Φ possui um ponto $(u_0, v_0) \neq (0,0)$ de mínimo global.

O próximo teorema envolve um resultado clássico de existência de soluções em Métodos Variacionais, o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [19].

Teorema C (caso superlinear): *Assuma as condições $(F.2), (F.4), (F.3)$ no caso superlinear. Assuma que existam números $R > 0, \theta_p, \theta_q$ com*

$$\frac{1}{p^*} < \theta_p < \frac{1}{p}, \frac{1}{q^*} < \theta_q < \frac{1}{q}$$

tais que

$$0 < F(x,u,v) \leq \theta_p u F_u(x,u,v) + \theta_q v F_v(x,u,v), \textit{para } |u|, |v| \geq R. \tag{F.6}$$

Assuma, ainda, que existam constantes $C > 0$, $\epsilon > 0$ e números $\bar{r} > p, \bar{s} > q$, tais que

$$|F(x,u,v)| \leq C(|u|^{\bar{r}} + |v|^{\bar{s}}), \tag{F.7}$$

para $|u|, |v| \leq \epsilon$ *. Então* Φ *tem um ponto crítico não-trivial.*

Os dois resultados seguintes tratam de $(F.3)$ no caso ressonante. Precisaremos supor outras condições sobre F. Uma delas, a hipótese de não quadraticidade, foi introduzida por Costa-Magalhães [9],[10]: *existem números positivos* c, R, μ, ν *tais que*

$$\frac{1}{p}uF_u + \frac{1}{q}vF_v - F \geq c(|u|^{\mu} + |v|^{\nu}); \ |u|, |v| > R. \qquad (F.8)$$

A outra condição que assumiremos envolve um problema de autovalor. Iremos trabalhar com o seguinte problema :

$$\begin{aligned} -\Delta_p u - aG_u &= \lambda |u|^{p-2} u, \ \Omega \\ -\Delta_q v - aG_v &= \lambda |v|^{q-2} v, \ \Omega \end{aligned} \qquad (*)$$

sujeito à condição de fronteira de Dirichlet, com $a \in L^{\infty}(\Omega)$, tendo (*) um autovalor $\lambda_1(a)$ caracterizado variacionalmente por
$\frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_{\Omega} |\nabla v|^q \, dx - \int_{\Omega} aG(u,v)dx \geq \lambda_1(a) \left(\frac{1}{p}\int_{\Omega} |u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_{\Omega} |v|^q \, dx \right)$,
$\forall (u,v) \in E$.

Vamos introduzir a seguinte condição: $\lambda_1(a) > 0$,

$$\limsup_{|u|,|v| \to \infty} \frac{F(x,u,v)}{G(u,v)} \leq a(x) \in L^{\infty}(\Omega), \qquad (F.9)$$

onde $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$ *é uma função par de classe* C^1 *satisfazendo duas hipóteses:*
$(G.1)$ $\ G(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) = tG(u,v)$
$(G.2)$ $\ G(u,v) \leq k(|u|^p + |v|^q)$, $\ k$ *constante.*

Um exemplo de uma função G que satisfaz estas duas condições é $G(u,v) = |u|^{\beta} |v|^{\gamma}$; $\frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{q} = 1$. Para verificar tal afirmação, basta usar a desigualdade de Young.

Teorema D (caso ressonante) : *Assuma as condições* $(F.2), (F.8), (F.9), (F.3)$ *no caso ressonante. Então o nosso funcional* Φ *é limitado inferiormente e o ínfimo é atingido.*

Teorema E (caso ressonante): *Assuma as condições* $(F.2), (F.4), (F.8)$ *e* $(F.3)$ *no caso ressonante. Suponha, também, que existam números reais positivos* R, ϵ *e funções* b, c *em* $L^\infty(\Omega)$ *tais que*

$$\begin{cases} \lambda_1(b) < 0, F(x,u,v) \geq b(x)G(u,v), |u|, |v| \geq R & (F.10) \\ \\ \lambda_1(c) > 0, F(x,u,v) \leq c(x)\tilde{G}(u,v), |u|, |v| \leq \epsilon, & (F.11) \end{cases}$$

onde $G, \tilde{G}$ *são funções que satisfazem as hipóteses* $(G.1), (G.2)$. *Então o funcional* Φ *possui um ponto crítico não-trivial.*

Agora vamos introduzir as hipóteses para o sistema $(\mathbb{D})$:
Trabalharemos no seguinte espaço:

$E_{p,q} = \left\{(u,v) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,q}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)|u|^p + |\nabla v|^q + b(x)|v|^q\right) dx < \infty\right\}$
com $1 < p, q < N$.

(A_0) $a, b \in C(\mathbb{R}^N)$; $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq b_0 > 0$, onde a_0, b_0 são constantes positivas.

(A_1) $a(x) \to \infty$, $b(x) \to \infty$, quando $|x| \to \infty$.

(F_0) $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $F(x,0,0) = 0$.

$$(F_1) \begin{cases} \left|\dfrac{\partial F}{\partial u}(x,u,v)\right| \leq c_1 |u|^{p_1-1} |v|^{q_1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \\ \\ \left|\dfrac{\partial F}{\partial v}(x,u,v)\right| \leq c_2 |u|^{q_2} |v|^{p_2-1}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde $max\,\{p,q\} \leq p_i + q_i < min\,\{p^*, q^*\}$, para $i = 1,2$; $p^* = \frac{Np}{N-p}$ e $q^* = \frac{Nq}{N-q}$.

$(F_1)_\mu \quad U.\nabla F(x,U) \geq \mu F(x,U) > 0 \;, \forall\; (x,U) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2$ onde $\mu > \max\{p,q\}$.

Estamos diante também de um problema variacional e o funcional associado ao sistema $(\mathbb{D})$ é definido por :

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)\,|u|^p\right) dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^q + b(x)\,|v|^q\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,v)dx,$$

$$(u,v) \in E_{p,q}. \tag{4.1}$$

Com essas hipóteses iremos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema F (caso ressonante) : *Se as hipóteses $(A_0),(A_1),(F_0),(F_1),(F_1)_\mu$ são satisfeitas, então o funcional Φ associado ao problema $(\mathbb{D})$ tem um ponto crítico não-trivial.*

O nosso trabalho será estruturado da seguinte forma:
No Capítulo 1, apresentaremos três teoremas importantes sobre pontos críticos para funcionais em espaços de Banach sobre os quais o trabalho está estruturado.
No Capítulo 2, apresentaremos as demonstrações dos teoremas A, B e C, ou seja, mostraremos a existência de solução não trivial para o sistema $(\mathbb{S})$ nos casos sublinear e superlinear.
No Capítulo 3, apresentaremos as demonstrações dos teoremas D e E, ou seja, mostraremos a existência de solução não trivial para o sistema $(\mathbb{S})$ no caso ressonante.
No Capítulo 4, mostraremos a existência de solução não trivial para o sistema $(\mathbb{D})$, ou seja, demostraremos o teorema F.
No Apêndice A, mostraremos que o funcional associado ao problema $(\mathbb{S})$ está bem definido e é de classe C^1.
No Apêndice B, enunciaremos os principais teoremas e resultados que utilizaremos no decorrer do trabalho.

No que se segue, denotaremos uma constante genérica por C.

Capítulo 1

Resultados abstratos

Neste capítulo iremos enunciar três teoremas importantes sobre os pontos críticos para funcionais em espaços de Banach os quais iremos utilizar durante todo o nosso trabalho. O primeiro e o segundo não serão demonstrados, mas iremos demonstrar o terceiro que é o Teorema do Passo da Montanha via lema da deformação segundo P. Bartolo, V. Benci e D. Fortunato [5].

Teorema 1.1 : *Suponha que E é um espaço de Banach reflexivo com norma $\|.\|$ e seja $M \subset V$ um subconjunto fracamente fechado em E. Suponha $\Phi : M \to \mathbb{R} \cup \infty$ coercivo em M com respeito a E, e fracamente semi-contínuo inferiormente. Então Φ é limitado sobre M e o ínfimo é atingido em M.*

Esse teorema será usado para demonstrarmos os Teoremas A e B mencionados na introdução, isto é, quando estivermos no caso sublinear. Para a demonstração e mais informações sobre o Teorema 1.1, ver Struwe [21], pag.04.

O próximo teorema refere-se à versão mais conhecida do teorema do passo da montanha onde usa-se a condição de compacidade de Palais-Smale [19], pags.04 e 81. Antes vamos definir a condição de Palais-Smale (PS):

Definição (PS) : Seja E um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$. *Dizemos que $\Phi : E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição (PS) se , toda seqüência (u_n, v_n) em E tal que*

$$|\Phi(u_n, v_n)| \leq C \quad e \quad \Phi^{'}(u_n, v_n) \to 0$$

contém uma subseqüência convergente na norma de E.

Teorema 1.2 *(Teorema do Passo da Montanha): Seja E um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Suponha que $\Phi(0) = 0$ e*

(Φ_1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi \geq \alpha$ na ∂B_ρ, e

(Φ_2) existe um $e \in E \backslash \bar{B}_\rho$ tal que $\Phi(e) \leq 0$.

Então Φ possui um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso, c pode ser caracterizado por

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} \Phi(u)$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = 0 \ e \ g(1) = e\}.$$

Agora iremos demonstrar o Teorema do Passo da Montanha via lema da deformação substituindo a condição (PS) pela condição (Ce) segundo P. Bartolo, V. Benci e D. Fortunato [5]. Para isso, introduziremos algumas notações:

Seja E um espaço de Banach e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ para $c \in \mathbb{R}$. Escreveremos

$$\begin{aligned}
K_c &= \left\{u \in E : \Phi(u) = c \text{ e } \Phi^{'}(u) = 0\right\}, \\
A_c &= \{u \in E : \Phi(u) \leq c\}, \\
\tilde{E} &= \left\{u \in E : \Phi^{'}(u) \neq 0\right\}.
\end{aligned}$$

Definição (Ce) : *Dizemos que $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami (Ce) em $]c_1, c_2[$, $(-\infty \leq c_1 < c_2 \leq +\infty)$, se*

(i) toda seqüência limitada $\{u_n\} \subset \Phi^{-1}(]c_1, c_2[)$ para a qual $\{\Phi(u_n)\}$ é limitada e $\Phi^{'}(u_n) \to 0$, possui uma subseqüência convergente e

(ii) $\forall c \in]c_1, c_2[$, existem $\sigma, R, \alpha > 0$ tais que $[c - \sigma, c + \sigma] \subset]c_1, c_2[$ e $\forall u \in \Phi^{-1}([c - \sigma, c + \sigma]), \|u\| \geq R : \left\|\Phi^{'}(u)\right\| \|u\| \geq \alpha$.

Precisaremos do seguinte lema :

Lema C.1 : *Se $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, então existe uma função contínua localmente lipschitziana $f : \tilde{E} \to E$ satisfazendo as condições*

$$\|f(u)\| \leq \frac{2}{\|\Phi^{'}(u)\|}, \ \forall \ u \in \tilde{E} \tag{1.1}$$

$$\left\langle \Phi'(u), f(u) \right\rangle \geq 1, \ \forall \ u \in \tilde{E} \tag{1.2}$$

Demonstração : Considere a função $l : \tilde{E} \to E'$ definida por

$$l(u) = \frac{\Phi'(u)}{\|\Phi'(u)\|^2}.$$

Por argumentos similares usados na prova da existência do chamado campo pseudogradiente [19] pode-se mostrar a existência de uma função contínua localmente lipschitziana $f : \tilde{E} \to E$ satisfazendo as condições :

$$\|f(u)\| \leq 2 \|l(u)\| \ \text{ e } \ \langle l(u), f(u)\rangle \geq \|l(u)\|^2 \ \text{ para todo } u \in \tilde{E}.$$

Então o resultado segue. ∎

Podemos agora enunciar o lema da Deformação:

Lema da Deformação : *Seja E um espaço de Banach real e seja $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (Ce) em $]c_1, c_2[$. Se $c \in \,]c_1, c_2[$ e N é alguma vizinhança de K_c, então existe um homeomorfismo limitado $\eta : E \to E$ e uma constante $\bar{\epsilon} > \epsilon > 0$ tal que $[c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}] \subset]c_1, c_2[$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

$$\eta(A_{c+\epsilon} \setminus N) \subset A_{c-\epsilon}, \tag{1}$$

$$\eta(A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon} \text{ se } K_c = \varnothing, \tag{2}$$

$$\eta(x) = x \text{ se } x \notin \Phi^{-1}(]c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}[). \tag{3}$$

Demonstração : Primeiramente observamos que a condição (Ce) implica que K_c é compacto. De fato, seja $\{u_n\} \subset K_c$ uma seqüência qualquer. Queremos mostrar que $\{u_n\}$ possui uma subseqüência convergente em K_c, pela definição de compacto. Note que $\Phi(u_n) = c,$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\Phi'(u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que exista uma subseqüência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que $\|u_{n_k}\| \to \infty$. Então teríamos $\|u_{n_k}\| \to \infty, \Phi(u_{n_k}) = c,$ para todo $n_k \in \mathbb{N}$, e $\left\|\Phi'(u_{n_k})\right\| \|u_{n_k}\| \to 0,$ para todo $n_k \in \mathbb{N}$. Isto contraria a condição $(Ce)(ii)$. Portanto, $\{u_n\}$ é uma seqüência limitada. Assim, sendo $\{u_n\}$ limitada, $\Phi(u_n) = c$ e $\Phi'(u_n) \to 0$, pela condição $(Ce)(i)$, existe uma subseqüência de $\{u_n\}$ convergente para $u \in X$. Falta mostrar que $u \in K_c$. Temos que $\Phi(u_{n_k}) = c$ e Φ é contínua, então $\Phi(u) = c$.

Analogamente, $\Phi'(u_{n_k}) \to 0$ e Φ' é contínua, então $\Phi'(u) = 0$. Logo $u \in K_c$ e concluímos que K_c é compacto.

Vamos assumir que $K_c \neq \varnothing$ (pois o caso $K_c = \varnothing$ é trivial). Seja M_δ uma vizinhança aberta de K_c, isto é, $M_\delta = \{u \in E : \|u - K_c\| < \delta\}$ onde $\delta > 0$ e $\|u - K_c\|$ denota a distância de u à K_c. Devido à compacidade de K_c, podemos escolher um $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $M_\delta \subset N$. Assim podemos substituir N por M_δ. Note que no caso $K_c = \varnothing$ podemos escolher $M_\delta = \varnothing$ e (2) segue trivialmente de (1).

A hipótese $(Ce)(i)$ implica que existem constantes positivas $\bar{\epsilon}, b, b_1$ tais que

$$\left\|\Phi'(u)\right\| > b \quad \text{para} \quad u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}}) \cap \left(M_\delta \setminus M_{\frac{\delta}{8}}\right), \tag{4}$$

$$\left\|\Phi'(u)\right\| > b_1 \quad \text{para} \quad u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}}) \cap \left(B_R \setminus M_{\frac{\delta}{8}}\right) \tag{5}$$

onde B_R denota a bola fechada em E de centro na origem e raio $R > 0$, em que R é a constante que aparece na condição $(Ce)(ii)$. De fato, suponha que (4) não ocorra, então existiriam seqüências $b_n \to 0, \bar{\epsilon}_n \to 0, \{u_n\} \subset (A_{c+\bar{\epsilon}_n} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}_n}) \bigcap \left(M_\delta \setminus M_{\frac{\delta}{8}}\right)$ satisfazendo $\left\|\Phi'(u_n)\right\| \leq b_n$. Observe que se $u_n \in M_\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}, u_n \in (A_{c+\bar{\epsilon}_n} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}_n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\{u_n\}$ é uma seqüência limitada satisfazendo $\Phi(u_n) = c$ e $\Phi'(u_n) \to 0$.

Logo, por $(Ce)(i)$ existe uma subseqüência de $\{u_n\}$ que converge para $u \in E$. Segue da continuidade de Φ e Φ' que $\Phi(u) = c$ e $\Phi'(u) = 0$. Portanto $u \in K_c$. Por outro lado, $u_n \notin M_{\frac{\delta}{8}}$ $\forall n$, então $u \notin M_{\frac{\delta}{16}}$. Assim, $u \in K_c \setminus M_{\frac{\delta}{16}} = \varnothing$ e chegamos a um absurdo. Concluimos que (4) é verdade. Analogamente (5) também se verifica.

Agora como (4) e (5) valem, podemos tomar $\bar{\epsilon} < \min\left\{\frac{b\delta}{8}, \sigma\right\}$ onde σ é a constante positiva dada pela condição $(Ce)(ii)$.

Assim por (5) e por $(Ce)(ii)$ obtemos

$$\left\|\Phi'(u)\right\| > 0 \quad \text{para}\ u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}}) \setminus M_{\frac{\delta}{8}}. \tag{6}$$

De fato, seja $u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}}) \setminus M_{\frac{\delta}{8}}$. Se $\|u\| < R$ segue por (4) que $\left\|\Phi'(u)\right\| > b_1 > 0$. Caso contrário temos $\|u\| \geq R$ e $u \in \Phi^{-1}([c - \sigma, c + \sigma])$ e segue de $(Ce)(ii)$ que $\left\|\Phi'(u)\right\| \|u\| > \alpha > 0$. Daí, $\left\|\Phi'(u)\right\| > 0$. Portanto, concluimos (6).

Consideramos agora $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ e uma função corte localmente lipschitziana χ construida da seguinte maneira: $\chi : E \to [0, 1]$ tal que

$$\chi(u) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad u \notin \Phi^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \ \text{ou}\ u \in M_{\frac{\delta}{8}} \\ 1, & \text{se} \quad u \in \Phi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \ \text{e}\ u \notin M_{\frac{\delta}{4}}. \end{cases} \tag{7}$$

Em seguida, consideramos a aplicação $V : E \to E$ definida por

$$V(u) = \begin{cases} -\chi(u)f(u), & \text{se} \quad u \in \tilde{E} \\ 0, & \text{se} \quad u \notin \tilde{E} \end{cases} \tag{8}$$

onde f é definida pelo lema C.1.

Obviamente V é localmente lipschitziana em E. Por (1.1), dado $u \in \tilde{E}$,

$$\|V(u)\| = \|-\chi(u)f(u)\| \leq \|f(u)\| \leq \frac{2}{\|\Phi'(u)\|}. \tag{9}$$

Agora iremos mostrar que

$$\|V(u)\| \leq k_1 + k_2 \|u\| \tag{10}$$

onde k_1, k_2 são constantes independentes de $u \in E$. Podemos supor que $u \in \Phi^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}]) \setminus M_{\frac{\delta}{8}}$. Caso contrário, $\chi(u) = 0$, então $V(u) = 0$ trivialmente. Distinguiremos dois casos:

(a) $\|u\| \geq R$: então, como $\bar{\epsilon} < \sigma$, por $(Ce)(ii)$ temos $\left\|\Phi'(u)\right\| \geq \frac{\alpha}{\|u\|}$ e por (9) $\|V(u)\| \leq \frac{2}{\alpha} \|u\|$;

(b) $\|u\| < R$: então por (5) $\left\|\Phi'(u)\right\| > b_1$ e $u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}})$. Usando (9), $\|V(u)\| \leq \frac{2}{b_1}$.

Portanto, $\|V(u)\| \leq \frac{2}{b_1} + \frac{2}{\alpha} \|u\|$, $\forall\, u \in E$ e assim (10) se verifica.

Consideremos agora o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt} &= V(\eta), \\ \\ \eta(0) &= x, \; x \in E. \end{cases} \tag{11}$$

Visto que V é localmente lipschitziana, para cada $x \in E$, (11) possui uma solução $\eta(., x)$ a qual em virtude de (10) é definida em $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$. Se fixarmos $t \in \mathbb{R}^+$, a função $\eta(t, .) : E \to E$ é um homeomorfismo limitado de E para E, por (10).

Observe que de (7) e (8), se $x \in M_{\frac{\delta}{8}}$ ou $x \notin \Phi^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}])$ então $\eta((t, x)) = x$. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $\eta(t, .)$ satisfaz (3).

Para provar que existe um $\bar{t}$ tal que $\eta(\bar{t}, .)$ satisfaz (1) iremos precisar de algumas etapas:

Afirmação 1 : *Para cada $x \in E$ a função real definida por*

$$S_x(t) = \Phi(\eta(t, x)), \; t \in \mathbb{R}^+ \textit{ é não crescente em } \mathbb{R}^+.$$

De fato, para cada $t > 0$:

$$\frac{d}{dt}S_x(t) = \left\langle \Phi'(\eta(t,x)), \frac{d}{dt}\eta(t,x) \right\rangle = \left\langle \Phi'(\eta(t,x)), V(\eta(t,x)) \right\rangle.$$

Então se $\eta(t,x) \notin \tilde{E}$, temos que $\frac{d}{dt}S_x(t) = 0$, pois $V(\eta(t,x)) = 0$. Por outro lado, se $\eta(t,x) \in E$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S_x(t) &= \left\langle \Phi'(\eta(t,x)), -\chi(\eta(t,x))f(\eta(t,x)) \right\rangle \\ &= -\chi(\eta(t,x)) \left\langle \Phi'(\eta(t,x)), f(\eta(t,x)) \right\rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

Do fato $\chi \geq 0$ e do lema C.1,(1.2) temos que

$$\frac{d}{dt}S_x(t) \leq 0. \tag{13}$$

Portanto, por (12) e (13) a Afirmação 1 está verificada. ∎

Para provar (1) é suficiente considerar o conjunto

$$Y = (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \setminus M_\delta$$

e mostrar que

$$\exists\, \bar{t} \text{ tal que } \forall\, x \in Y, \eta(\bar{t}, x) \in A_{c-\epsilon},$$

pois se $u \in A_{c-\epsilon}$ teremos da afirmação 1 que

$$\Phi(\eta(2\epsilon, x)) \leq \Phi(\eta(0,x)) = \Phi(x) \leq c - \epsilon.$$

Para isto considere o conjunto

$$Z = (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \setminus M_{\frac{\delta}{2}}$$

e vamos provar que:

Afirmação 2 : *Para cada $x \in Y$, existe $t_x \leq 2\epsilon$ tal que $\eta(t_x, x) \notin Z$.*

De fato, seja $x \in Y$ e $t > 0$ tal que

$$\eta(\tau, x) \in Z, \ \forall\, \tau \in [0,t]. \tag{14}$$

Queremos mostrar que $t < 2\epsilon$. Observe que dado $x \in Y$

$$c - \epsilon < \Phi(x) = \Phi(\eta(0,x)) \leq c + \epsilon \text{ e } \|x - K_c\| > \delta.$$

Assim como $t \in \mathbb{R}^+, \Phi(\eta(t,x))$ é uma função contínua e não crescente , segue que

$$c - \epsilon < \Phi(\eta(t,x)) \leq c + \epsilon \text{ e } \|\eta(t,x) - K_c\| > \frac{\delta}{2}$$

para $\tau \in [0,t]$ e $t > 0$.

Assim, por (6), $Z \subset \tilde{E}$ e portanto por (7) e o lema C.1,(1.2) obtemos

$$\begin{aligned} \forall\ \tau \in [0,t], \frac{d}{d\tau} S_x(\tau) &= -\chi(\eta(\tau,x)) \left\langle \Phi'(\eta(\tau,x), f(\eta(\tau,x))\right\rangle \\ &= -\left\langle \Phi'(\eta(\tau,x)), f(\eta(\tau,x))\right\rangle \leq -1. \end{aligned}$$

Note que

$$S_x(0) - S_x(t) = \Phi(\eta(0,x)) - \Phi(\eta(t,x)) < (c+\epsilon) - (c-\epsilon) = 2\epsilon,$$

segue que

$$2\epsilon > S_x(0) - S_x(t) = -\int_0^t \frac{d}{d\tau} S_x(\tau) d\tau \geq t.$$

Assim verificamos a Afirmação 2. ■

Observe agora que da afirmação 2 para cada $x \in Y$, existe $t_x \leq 2\epsilon$ onde $\eta(t_x,x) \notin Z$. Pela afirmação 1, $\Phi(\eta(t_x,x)) \leq \Phi(x) \leq c+\epsilon$. Logo, $\eta(t_x,x) \in A_{c-\epsilon}$ ou $\eta(t_x,x) \in M_{\frac{\delta}{2}}$. Se $\eta(t_x,x) \in A_{c-\epsilon}$, temos que $\eta(2\epsilon,x) \in A_{c-\epsilon}$, pois $t_x \leq 2\epsilon$ e vale a primeira afirmação. Agora $\eta(t_x,x) \in M_{\frac{\delta}{2}}$ é o caso que falta considerar.

Seja t_2 o primeiro instante em que $\eta(t_x,x) \in \partial M_{\frac{\delta}{2}}$. Vamos mostrar que :

Afirmação 3 : *Existe $t_0 \leq t_2$ tal que $\eta(t_0,x) \in A_{c-\epsilon}$.*

Suponha que t_0 não exista. Então $\eta(t,x) \in Z, \forall\ t \in [0,t_2]$. Logo , pela afirmação 2 $t_2 < 2\epsilon$. Por outro lado, seja t_1 o primeiro instante antes de t_2 no qual $\eta(.,x)$ toca a fronteira de M_δ. Obviamente,

$$\eta(t,x) \in (A_{c+\epsilon} \setminus A_{c-\epsilon}) \cap \left(M_\delta \setminus M_{\frac{\delta}{2}}\right),\ \forall\ t \in]t_1,t_2[$$

e por (3) temos :

$$\left\|\Phi'(\eta(t,x))\right\| \geq b,\ \forall\ t \in]t_1,t_2[.$$

Usando o lema (C.1)(1.1), podemos escrever

$$\frac{\delta}{2} \leq \|\eta(t_2,x) - \eta(t_1,x)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} V(\eta(t,x))dt\right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\eta(t,x))\|\, dt,$$

pois $\|V(\eta(t,x))\| = \|-\chi(\eta(t,x))f(\eta(t,x))\| \leq \|f(\eta(t,x))\|$, $\forall\ t \in]t_1, t_2[$. Assim,

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\eta(t,x))\|\, dt \leq 2\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\|\Phi'(\eta(t,x))\|} \leq \frac{2}{b}(t_2 - t_1) < \frac{2}{b}t_2,$$

onde obtemos $t_2 > \frac{b\delta}{4}$. Usando agora que $\bar{\epsilon} < \min\left\{\frac{b\delta}{8}, \sigma\right\}$ segue que $t_2 > 2\bar{\epsilon}$ e isto contradiz $t_2 < 2\epsilon$. Portanto a Afirmação 3 está verificada. ■

Para finalizar, das afirmações 2 e 3 com $t_0 \leq t_x \leq 2\epsilon$ segue que $\Phi(\eta(2\epsilon, x)) \leq \Phi(\eta(t_0, x)) \leq c - \epsilon$. Logo $\eta(2\epsilon, x) \in A_{c-\epsilon}$. Assim finalizamos a demonstração do Lema da Deformação. ■

Faremos a seguir a demonstração do Teorema do Passo da Montanha substituindo a condição (PS) pela condição (Ce) em $]c_1, c_2[$ enunciada anteriormente.

Demonstração do Teorema do Passo da Montanha com a condição (Ce) : Pela definição de c temos que $c < \infty$. Note que $c \geq \alpha$. De fato, se $g \in \Gamma$, então $g([0,1]) \cap \partial B_\rho \neq \varnothing$, pois $g([0,1])$ é conexo, $g(0) = 0$, $g(1) = e$ com $e \notin \bar{B}_\rho$. Portanto, temos

$$\max_{g \in \Gamma([0,1])} \Phi(u) \geq \inf_{w \in \partial B_\rho} \Phi(w) \geq \alpha.$$

Logo, $c \geq \alpha$.

Suponha que c não seja ponto crítico e que $K_c = \varnothing$. Usando o Lema da Deformação com $\bar{\epsilon} = \frac{\alpha}{2}$, isso nos garante que existe $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ e um homeomorfismo $\eta : E \to E$ satisfazendo as propriedades desse lema. Pela definição de ínfimo, $\exists g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{g \in \Gamma([0,1])} \Phi(u) \leq c + \epsilon. \tag{15}$$

Considere $\varphi(t) = \eta(g(t)),\ t \in [0,1]$. Temos que $\varphi \in C([0,1])$, pois η e g são contínuas. Observe que $\varphi(0) = \eta(g(0)) = \eta(0)$.

Uma vez que $c \geq \alpha$, então $c - \bar{\epsilon} \geq \frac{\alpha}{2}$ e, portanto,$\Phi(0) = 0 < \frac{\alpha}{2} \leq c - \epsilon$. Isto resulta que $0 \notin \Phi^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}])$. Assim, usando (3) do lema da Deformação $\varphi(0) = 0$.

Note que $\varphi(1) = \eta(g(1)) = \eta(e)$ e que $\Phi(e) \leq 0 < \frac{\alpha}{2} \leq -\bar{\epsilon}$. Analogamente, $\varphi(1) = e$. Logo, temos que $\varphi \in \Gamma$ e pela definição de c obtemos

$$c \leq \max_{u \in \varphi([0,1])} \Phi(u). \tag{16}$$

Por (15), $g([0,1]) \subset A_{c+\epsilon}$. Daí, por (2) do lema da Deformação $\varphi([0,1]) \subset A_{c-\epsilon}$, ou seja,

$$\max_{u \in \varphi([0,1])} \Phi(u) \leq c - \epsilon$$

o que contraria (16). O absurdo vem de se supor que c não é valor crítico. Portanto c é um valor crítico de Φ. ■

Capítulo 2

Problemas do tipo sublinear e superlinear

Começamos este capítulo estabelecendo a estrutura variacional do problema ($\mathbb{S}$) definido na introdução. Considerando o funcional

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q \, dx - \int_\Omega F(x,u,v)dx,$$

definido no produto cartesiano dos espaços de Sobolev $E = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$; a norma em E é a norma da soma, isto é, $\|(u,v)\|_E = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}, \forall\ (u,v) \in E$.

2.1 O caso coercivo

Iniciaremos com a demonstração de dois lemas, os quais nos permitirão demonstrar o Teorema A. Utilizaremos o teorema 1.1 (ver cap.1) sobre funcionais fracamente semi-contínuos inferiormente e coercivos. Em posse desse resultado, mostraremos que existe um ponto $(u_0, v_0) \in E$ onde o mínimo de Φ é atingido. Em seguida, mostraremos que esse ponto (u_0, v_0) é solução fraca do problema ($\mathbb{S}$).

Lema 2.1-a : *Suponha que F satisfaz a condição $(F.3)$ com r, s no caso sublinear. Então Φ é um funcional coercivo em E.*

Demonstração : Seja $(u,v) \in E$ e lembremos que Φ é definido por

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx - \int_\Omega F(x,u,v)dx \\ &= \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|\nabla v\|^q_{L^q(\Omega)} - \int_\Omega F(x,u,v)dx.\end{aligned}$$

Pela hipótese $(F.3)$, temos que

$$\left|\int_\Omega F(x,u,v)dx\right| \leq \int_\Omega |F(x,u,v)|\,dx \leq \int_\Omega c_1(1+|u|^r+|v|^s)dx,$$

para alguma constante c_1 positiva.

Conseqüentemente, usando a definição do funcional Φ acima, obtemos

$$\Phi(u,v) \geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|\nabla v\|^q_{L^q(\Omega)} - c_1\left[|\Omega| + \|u\|^r_{L^r(\Omega)} + \|v\|^s_{L^s(\Omega)}\right],$$

em que $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω.

Visto que Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $1<r<p, 1<s<q$, podemos usar a desigualdade de Hölder para obter

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq A\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \tilde{A}\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \text{ em que } A = A(p,r,\Omega)$$

e

$$\|v\|_{L^s(\Omega)} \leq B\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq \tilde{B}\|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}, \text{ em que } B = B(q,s,\Omega).$$

Assim, existem constantes positivas c_2, c_3 tais que

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - c_2\|u\|^r_{W_0^{1,p}(\Omega)} - c_3\|v\|^s_{W_0^{1,q}(\Omega)} - c_1|\Omega| \\ &= \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}(\frac{1}{p} - c_2\|u\|^{r-p}_{W_0^{1,p}(\Omega)}) + \|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}(\frac{1}{q} - c_3\|v\|^{s-q}_{W_0^{1,q}(\Omega)}) - c_1|\Omega|\end{aligned}$$

Observando que temos por hipótese $r-p<0, s-q<0$, fazendo $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow \infty$ ou $\|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \longrightarrow \infty$, obtemos $\Phi(u,v) \longrightarrow \infty$. Portanto, Φ é coercivo e o lema está demonstrado. ■

Lema 2.1-b : *Sob as hipóteses do Lema 2.1-a, Φ é um funcional fracamente semi-contínuo inferiormente.*

Demonstração : Considere uma seqüência (u_n,v_n) em E; $(u_n,v_n) \rightharpoonup (u,v)$ em E. Pela teoria de convergência fraca $\|(u_n, v_n)\|_E$ é limitada e

$$\frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leq \liminf_n \left\{\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right\}.$$

Por outro lado, temos que $\int_\Omega F(x, u_n, v_n)dx \to \int_\Omega F(x, u, v)dx$. De fato, pelas imersões compactas, $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em $L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)$, então $(u_n(x), v_n(x)) \to (u(x), v(x))$ q.t.p x em Ω.

Defina

$$f_n(x) = F(x, u_n, v_n) \text{ e } g_n(x) = c_1(1 + |u_n|^r + |v_n|^s).$$

Observe que, por (F.3)

$$|F(x, u_n, v_n)| \leq c_1(1 + |u_n|^r + |v_n|^s) = g_n.$$

Como F é de classe C^1 e $(u_n(x), v_n(x)) \to (u(x), v(x))$ q.t.p x em Ω, segue que $f_n \to f$ q.t.p x em Ω. Defina agora $g := c_1(1 + |u|^r + |v|^s)$. Note que pelo teorema B.4 (ver Apêndice B) $\int_\Omega |u_n|^r dx \to \int_\Omega |u|^r dx$ e $\int_\Omega |v_n|^s dx \to \int_\Omega |v|^s dx$, pois $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$ e $r < p, s < q$. Assim, $g_n \to g$ em $L^1(\Omega)$. Usando o T.C. D. de Lebesgue na versão do teorema B.5 (ver Apêndice B) obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x, u_n, v_n)dx = \int_\Omega F(x, u, v)dx.$$

Agrupando estes resultados , segue que

$$\begin{aligned}
\Phi(u, v) &= \frac{1}{q}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - \int_\Omega F(x, u, v)dx \\
&\leq \liminf_n \left\{\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right\} - \left\{\lim_n \int_\Omega F(x, u_n, v_n)dx\right\} \\
&= \liminf_n \left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v_n|^q dx - \int_\Omega F(x, u_n, v_n)dx\right\} \\
&= \liminf_n \Phi(u_n, v_n).
\end{aligned}$$

Portanto,Φ é fracamente semi-contínuo inferiormente. ■

Provados esses dois lemas, usaremos agora o teorema 1.1 (ver cap.1) e assim, concluiremos que o funcional Φ sendo coercivo e fracamente semi-contínuo inferiormente atinge seu ínfimo em E, ou seja, existe um ponto $(u_0, v_0) \in E$; $\Phi(u_0, v_0) = min\ \Phi(u, v), \forall\ (u, v) \in E$.

Resta provar a seguinte afirmação :

Afirmação : *Se F satisfaz $(F.2)$ e (u_0, v_0) é ponto de mínimo de E, então $\Phi^{'}(u_0, v_0) = 0$. Conseqüentemente (u_0, v_0) é solução fraca para o problema $(\mathbb{S})$.*

Verificação da Afirmação : Note que (u, v) satisfaz

$$\frac{\Phi(u + t\varphi, v + t\psi) - \Phi(u, v)}{t} \geq 0, \text{ para } t > 0 \text{ e } \forall\ (\varphi, \psi) \in E.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(u + t\varphi, v + t\psi) - \Phi(u, v)}{t} &= \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u + t\nabla\varphi|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v + t\nabla\psi|^q\,dx\right\} \\
&- \frac{1}{t}\int_\Omega F(x, u + t\varphi, v + t\psi)dx \\
&- \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx - \int_\Omega F(x, u, v)dx\right\} \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla\varphi|^p - |\nabla u|^p}{t}\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega \frac{|\nabla v + t\nabla\psi|^q - |\nabla v|^q}{t}\,dx \\
&- \int_\Omega \frac{F(x, u + t\varphi, v + t\psi) - F(x, u, v)}{t}\,dx\ \geq 0.
\end{aligned}$$

Podemos reescrever a última desigualdade acima da seguinte maneira (veja Apêndice A):

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u + t\nabla\varphi|^{p-2}\,\nabla u\nabla\varphi dx + t\int_\Omega |\nabla u + t\nabla\varphi|^{p-2}\,|\nabla\varphi|^2\,dx \\
+\ &\int_\Omega |\nabla v + t\nabla\psi|^{q}\,\nabla v\nabla\psi dx + t\int_\Omega |\nabla v + t\nabla\psi|^{q-2}\,|\nabla\psi|^2\,dx \\
\geq\ &\int_\Omega \frac{F(x, u + t\varphi, v + t\psi) - F(x, u, v)}{t}dx.
\end{aligned}$$

Usando o Teorema do Valor Médio, existem $\theta_1, \theta_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{F(x, u + t\varphi, v + t\psi) - F(x, u, v)}{t} = F_u(x, \theta_1, v + t\psi) + F_v(x, u + t\varphi, \theta_2) \text{ em q.t.p } x \in \Omega$$

e, mais, $\theta_1(x) \to u(x)$ q.t.p $x \in \Omega$ e $\theta_2(x) \to v(x)$ q.t.p $x \in \Omega$.

Pela condição $(F.2)$, $F_u, F_v \in L^1(\Omega)$. Além disso,

$$F_u(x, \theta_1(x), v + t\psi) \to F_u(x, u(x), v(x)) \text{ q.t.p } x \in \Omega$$

e

$$F_v(x, u + t\varphi, \theta_2(x)) \to F_v(x, u(x), v(x)) \text{ q.t.p } x \in \Omega,$$

o que implica que

$$F_u(x, \theta_1(x), v(x) + t\psi(x))\varphi(x) \to F_u(x, \theta_1(x), v(x) + t\psi(x))\varphi(x) \quad \text{q.t.p } x \in \Omega$$

e

$$F_v(x, u(x) + t\varphi(x), \theta_2(x))\psi(x) \to F_v(x, u(x) + t\varphi(x), \theta_2(x))\psi(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Logo,

$$\frac{F(x, u + t\varphi, v + t\psi) - F(x, u, v)}{t} \to F_u(x, u, v)\varphi + F_v(x, u, v)\psi, \forall(\varphi, \psi) \in E,$$

q.t.p $x \in \Omega,$ quando $t \to 0$. Usando agora o Lema B.6 [cf.Apêndice B], resulta que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi dx \geq \int_\Omega F_u(x, u, v)\varphi dx + \int_\Omega F_v(x, u, v)\psi dx, \forall (\varphi, \psi) \in E.$$

Utilizando o teorema do Divergente e usando $(-\varphi, 0)$ e $(0, -\psi)$, concluimos as igualdades

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega F_u(x, u, v)\varphi dx, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi dx = \int_\Omega F_v(x, u, v)\psi dx, \ \forall \psi \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Finalmente, como (u_0, v_0) é ponto de mínimo para $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, temos que

$$\left\langle \Phi'(u_0, v_0), (\varphi, \psi) \right\rangle = 0, (\varphi, \psi) \in E$$

e segue que (u_0, v_0) é solução fraca do problema $(\mathbb{S})$. ■

Demonstração do Teorema A: demonstrados os lemas 2.1-a, 2.1-b e a afirmação anterior, isto é, mostramos que a condição $(F.3)$ no caso sublinear implica que Φ é um funcional semi-contínuo inferiormente e coercivo e concluimos que um ponto de mínimo é atingido para algum ponto (u_0, v_0) em E. Depois, a condição $(F.2)$ nos garantiu que este mínimo de Φ é um ponto crítico e este é solução do problema $(\mathbb{S})$. Assim, demonstramos o Teorema A. ■

2.2 O caso coercivo, solução não-trivial

Observando a condição $(F.4)$, isto é,

$$F(x,0,0) = F_u(x,0,0) = F_v(x,0,0) = 0$$

concluímos que $(u,v) = (0,0)$ é solução do problema $(\mathbb{S})$. Daí podemos nos indagar, da seguinte maneira: como obter uma solução não-trivial para este problema? A resposta a esta pergunta é: impondo condições apropriadas para F.

Antes de apresentarmos o próximo resultado, faremos uma pequena explanação sobre o primeiro autovalor para o p-Laplaciano.

O problema de autovalor para o p-Laplaciano é encontrar um $\lambda \in \mathbb{R}$ e um $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ não-nulo solução fraca do problema:

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & \lambda\,|u|^{p-2}\,u \text{ em } \Omega \\ u & = & 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em R^N.

O problema de existência de tal par $(u,\lambda) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R}$ foi estudado recentemente por Ananne [3]: mostra-se a existência de uma sequência crescente $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de autovalores; $\lambda_k \to \infty$, onde o primeiro autovalor λ_1 é definido por:

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx; u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_\Omega |u|^p\,dx = 1\right\},$$

possuindo propriedades importantes como:
(i) λ_1 é simples, isto é, se u,v são duas autofunções correspondentes ao autovalor λ_1, então $u = \alpha v$ para algum α.
(ii) λ_1 é isolado, isto é, λ_1 é o único autovalor em $[0,a]$ para algum $a > \lambda_1$.

A principal dificuldade de provar estes e outros resultados relacionados aos problemas de autovalores é a regularidade das autofunções. Tal assunto é estudado por E.Di Benedetto [11]e P. Tolksdorf [23].

Nosso próximo resultado será mostrar que existe um ponto $(u_0,v_0) \neq (0,0)$ em E tal que $\Phi(u_0,v_0) < 0$, usando a noção de autovalor para o p-Laplaciano.

Demonstração do Teorema B: Pelo Teorema A, já temos que o funcional Φ assume um mínimo em E. Considere φ a primeira autofunção para o p-Laplaciano, assim temos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta_p\varphi &=& \lambda_1(p)\,|\varphi|^{p-2}\,\varphi \;\text{ em } \Omega \\ \varphi &=& 0 \;\text{ sobre } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{$\mathbb{S}$.1}$$

e seja ψ a primeira autofunção para o q-Laplaciano, isto é,

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta_q\psi &=& \lambda_1(q)\,|\psi|^{q-2}\,\psi \;\text{ em }\; \Omega \\ \psi &=& 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{$\mathbb{S}$.2}$$

Pela Teoria de Regularização, $\varphi, \psi \in C^{1,\alpha}$ [11],[23]. Assim podemos tomar $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R$ e $\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R$, onde R é a constante dada pela condição $(F.5)$.

Fazendo $(u,v) = (t^{\frac{1}{p}}\varphi, t^{\frac{1}{q}}\psi)$ onde $(\varphi,\psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, temos pela definição de Φ:

$$\Phi(t^{\frac{1}{p}}\varphi, t^{\frac{1}{q}}\psi) = \frac{1}{p}\int_\Omega \left|\nabla(t^{\frac{1}{p}}\varphi)\right|^p dx + \frac{1}{q}\int_\Omega \left|\nabla(t^{\frac{1}{q}}\psi)\right|^q dx - \int_\Omega F(x, t^{\frac{1}{p}}\varphi, t^{\frac{1}{q}}\psi)dx.$$

Por outro lado, da condição $(F.5)$: $F(x, t^{\frac{1}{p}}\varphi, t^{\frac{1}{q}}\psi) \geq t^\theta K(x,\varphi,\psi)$, o que implica que $-\int_\Omega F(x, t^{\frac{1}{p}}\varphi, t^{\frac{1}{q}}\psi \leq -t^\theta \int_\Omega K(x,\varphi,\psi)$. Note ainda que, por hipótese, a integral da função K é finita, pois esta é contínua em $\bar{\Omega}$.

Assim, usando a desigualdade acima, o fato de $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R, \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R$ e os problemas $(\mathbb{S}.1), (\mathbb{S}.2)$, existem constantes positivas A, B, D tais que:

$$\begin{aligned} \Phi(t^{\frac{1}{p}}\varphi, t^{\frac{1}{q}}\psi) &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega t\,|\nabla\varphi|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega t\,|\nabla\psi|^q\,dx - t^\theta\int_\Omega K(x,\varphi,\psi)dx \\ &= t\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla\psi|^q\,dx\right\} - t^\theta\int_\Omega K(x,\varphi,\psi)dx \\ &= t\left\{\frac{\lambda_1(p)}{p}\int_\Omega |\varphi|^p\,dx + \frac{\lambda_1(q)}{q}\int_\Omega |\varphi|^q\,dx\right\} - t^\theta\int_\Omega K(x,\varphi,\psi)dx \\ &= t\left\{\frac{\lambda_1(p)}{p}\,\|\varphi\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{\lambda_1(q)}{q}\,\|\psi\|^q_{L^q(\Omega)}\right\} - t^\theta\int_\Omega K(x,\varphi,\psi)dx \\ &\leq t(A+B) - t^\theta D < 0, \end{aligned}$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno, uma vez que $0 < \theta < 1$. Portanto $\Phi(u_0, v_0) < 0$. Assim, finalizamos a demonstração do Teorema B. ■

2.3 A condição de compacidade de Palais-Smale e o Teorema do Passo da Montanha

Nesta subseção iremos trabalhar no sentido de encontrar, sob certas condições, um ponto crítico não-trivial para o funcional Φ. Mostraremos que Φ satisfaz a condição (PS) e, em seguida, verificaremos que Φ tem a Geometria do Passo da Montanha.

No lema a seguir iremos verificar que Φ satisfaz a condição de compacidade (PS):

Lema (PS) : *Suponha que F satisfaz as condições (F.2), (F.6) e (F.3) no caso superlinear. Então o funcional Φ satisfaz a condição (PS).*

Demonstração do Lema (PS) : de início, iremos mostrar que a seqüência (u_n, v_n) é limitada. De fato, por hipótese, como $\Phi(u_n, v_n)$ é limitada, pela constante $C > 0$,

$$\left| \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |\nabla v_n|^q \, dx - \int_\Omega F(x, u_n, v_n) dx \right| \leq C$$

e ainda, se $\Phi^{'}(u_n, v_n) \to 0$ em $E^{'}$, significa que dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$,

$$\left| \left\langle \Phi^{'}(u_n, v_n), (u_n, 0) \right\rangle \right| \leq \epsilon \, \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

e

$$\left| \left\langle \Phi^{'}(u_n, v_n), (0, v_n) \right\rangle \right| \leq \epsilon \, \|v_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} .$$

Agora, usando a desigualdade triangular e de Cauchy-Schwartz, escolha $c_1 = max \left\{ \theta_p, \theta_q \right\}$, $\forall n \geq n_0$,

$$\Phi(u_n, v_n) - \theta_p \Phi^{'}(u_n, v_n)(u_n, 0) - \theta_q \Phi^{'}(u_n, v_n)(0, v_n) \leq C + c_1 \epsilon (\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \Phi(u_n,v_n) - \left\langle \Phi'(u_n,v_n),(\theta_p u_n,\theta_q v_n)\right\rangle \\
= \ & \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v_n|^q\,dx - \int_\Omega F(x,u_n,v_n)dx \\
- \ & \theta_p\left\{\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla u_n - \int_\Omega F_u(x,u_n,v_n)u_n\right\} \\
- \ & \theta_q\left\{\int_\Omega |\nabla v_n|^{q-2}\nabla v_n\nabla v_n - \int_\Omega F_v(x,u_n,v_n)v_n\right\} \\
= \ & \left(\frac{1}{p}-\theta_p\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx + \left(\frac{1}{q}-\theta_q\right)\int_\Omega |\nabla v_n|^q\,dx \\
- \ & \left\{\int_\Omega F(x,u_n,v_n) - \theta_p F_u(x,u_n,v_n)u_n - \theta_q F_v(x,u_n,v_n)v_n\right\}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, a condição (F.6), (F.2), (F.3), juntamente com os resultados acima, obtemos

$$\begin{aligned}
C + c_1\epsilon\left(\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right) \ &\geq \ \left(\frac{1}{p}-\theta_p\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx + \left(\frac{1}{q}-\theta_q\right)\int_\Omega |\nabla v_n|^q\,dx \\
&= \ M_1\|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} + M_2\|\nabla v_n\|^q_{L^q(\Omega)} \\
&= \ M_1\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + M_2\|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $p,q>1$, a desigualdade acima nos permite concluir que $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ e $\|v_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}$ são limitadas. Assim, a seqüência (u_n,v_n) é limitada em E.

A existência de uma subseqüência fracamente convergente segue do seguinte argumento padrão:

E é o produto cartesiano de espaços reflexivos e, portanto, reflexivo. Na verdade, $W_0^{1,p}(\Omega), W_0^{1,q}(\Omega)$ são espaços uniformemente convexos. Sendo $\{(u_n,v_n)\}\subset E$ limitada, pelo Teorema de Eberlein - Smullian, existe uma subseqüência de $\{(u_n,v_n)\}$ que iremos denotar ainda por $\{(u_n,v_n)\}$; $(u_n,v_n)\rightharpoonup(u,v)$ em E.

Por outro lado, pelo fato das imersões serem compactas, $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ e $W_0^{1,q}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, temos que $(u_n,v_n)\to(u,v)$ em $L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)$. Precisamos mostrar que a seqüência (u_n,v_n) converge em E. Considere a imersão compacta

$$\begin{array}{rccl}
i\ : & E & \hookrightarrow & L^p(\Omega)\times L^q(\Omega) \\
 & (u,v) & \longmapsto & i(u,v)=(u,v)
\end{array}$$

Como o crescimento de F na condição (F.3)- caso superlinear, está abaixo dos expoentes críticos p^* e q^* , vamos definir a aplicação dualidade D, da seguinte forma :

$$\begin{array}{rcl} D \ : \ E & \longrightarrow & E' \\ (u,v) & \longmapsto & D(u,v) = \langle (u,v), . \rangle_E \end{array}$$

onde

$$\langle (u,v),(\varphi,\psi)\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi dx$$

e também, definir

$$J'(u,v)(\varphi,\psi) = \int_\Omega F_u(x,u,v)\varphi dx + \int_\Omega F_v(x,u,v)\psi dx.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi'(u_n,v_n),(\varphi,\psi)\right\rangle &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx + \int_\Omega |\nabla v_n|^{q-2} \nabla v_n \nabla \psi dx \\ &- \int_\Omega (F_u(x,u_n,v_n)\varphi + F_v(x,u_n,v_n)\psi)dx, \end{aligned}$$

aplicando à seqüência (PS), obteremos

$$D(u_n,v_n) = \langle (u_n,v_n), . \rangle = \Phi'(u_n,v_n) + J'(u_n,v_n) \in E'.$$

Agora, note que D é uma isometria e o seu operador inverso D^{-1} existe por [18], pág. 80, isto é,

$$\begin{array}{ll} & \int_\Omega \langle D(u_1) - D(u_2), \nabla u_1 - \nabla u_2 \rangle \, dx \\ \geq & \quad C_p \int_\Omega |\nabla (u_1 - u_2)| \, dx, \ p \geq 2, \\ \text{ou} & \\ \geq & \quad C_p \int_\Omega \frac{|\nabla (u_1-u_2)|^2}{(|u_1|+|u_2|)^{2-p}} dx, \ 1 < p < 2. \end{array}$$

Daí, aplicando D^{-1} podemos conseguir a expressão

$$\begin{aligned} (u_n,v_n) &= D^{-1} \circ \Phi'(u_n,v_n) + D^{-1} \circ J'(u_n,v_n) \\ &= D^{-1} \circ \Phi'(u_n,v_n) + D^{-1} \circ J' \circ i(u_n,v_n) \end{aligned}$$

Como $(u_n,v_n) \to (u,v)$ em $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$, então $i(u_n,v_n) \to i(u,v)$ em $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$. Temos ainda que, J é um funcional de classe $C^1(L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))$ devido à hipótese (F.3)II.

Além disso, $\Phi'(u_n, v_n) \to 0$ em E'. Conseqüentemente,

$$(u_n, v_n) \to \lim_{n\to\infty} D^{-1} \circ \Phi'(u_n, v_n) + \lim_{n\to\infty} D^{-1} \circ J' \circ i(u_n, v_n)$$

isto é,

$$(u_n, v_n) \to D^{-1} \circ J' \circ i(u, v) \in E.$$

Concluimos, então, que Φ satisfaz a condição (PS). ■

Para finalizar este capítulo iremos demonstrar o Teorema C.

Demonstração do Teorema C : Para verificarmos que o funcional Φ tem um ponto crítico não-trivial em E precisaremos mostrar que Φ tem a geometria do passo da montanha.

Afirmação C.1 : *Sobre as condições (F.3) e (F.7), existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|F(x, u, v)| \leq C(|u|^{\bar{r}} + |v|^{\bar{s}} + |u|^r + |v|^s)$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$ e $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, onde $p < r, \bar{r} < p^*$ e $q < s, \bar{s} < q^*$.

Verificação da Afirmação C.1 : Dado $\epsilon > 0$, note que iremos trabalhar com a condição (F.3), isto é, $|F(x, u, v)| \leq c_2(1 + |u|^r + |v|^s), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, x \in \bar{\Omega}$ para obter a seguinte expressão: $|F(x, u, v)| \leq c_3(|u|^r + |v|^s)$ onde $(u, v) \in B = \{(u, v) : |u| \,\text{ou}\, |v| > \epsilon\}$.

De fato, sem perda de generalidade, consideremos $|u| > \epsilon$.

Se $\epsilon = 1$, temos que $1 < |u| < |u|^r$, pois $r > 1$. Daí,

$$\begin{aligned} |F(x, u, v)| &= c_2(1 + |u|^r + |v|^s) \\ &\leq c_2(|u| + |u|^r + |v|^s) \\ &\leq c_2(|u|^r + |u|^r + |v|^s) \\ &\leq c_2(2\,|u|^r + 2\,|v|^s) \\ &= c_3(|u|^r + |v|^s), \end{aligned}$$

onde $c_3 = \max\{2c_2, 2\}$.

Por outro lado, se $|u| > \epsilon$ com $0 < \epsilon < 1$, seja $\epsilon = \frac{1}{1+R}$; $R \in \mathbb{R}^*_+$. Segue que $(1+R)\,|u| > 1$, então $[(1+R)\,|u|]^r > 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
|F(x,u,v)| &\leq c_2(1+|u|^r+|v|^s)\\
&\leq c_2\left\{[(1+R)\,|u|]^r+|u|^r+|v|^s\right\}\\
&= c_2\left\{[(1+R)^r+1]\,|u|^r+|v|^s\right\}\\
&\leq c_2 max\left\{1+(1+R)^r,1\right\}\left\{|u|^r+|v|^s\right\}\\
&= c_4(|u|^r+|v|^s).
\end{aligned}$$

Agora combinando as desigualdades com a condição (F.7), isto é, $|F(x,u,v)| \leq c(|u|^{\bar{r}}+|v|^{\bar{s}})$, para $|u|\,,|v| \leq \epsilon$, obtemos uma constante c_5 ; $c_5 = \max\left\{c_1,c_4\right\}$ e a afirmação está verificada. ■

Pela Afirmação C.1, podemos estimar a integral de F usando a desigualdade de Hölder como segue . De posse da desigualdade $p < r < p^*$, existe um numero t, $t \in [0,1]$, e $r = pt+(1-t)p^*$.
Assim,

$$\|u\|^r_{L^r(\Omega)} = \int_\Omega |u|^r\,dx = \int_\Omega (|u|^p)^t(|u|^{p^*})^{1-t}dx.$$

Tomando $a = \frac{1}{t}$ e $a' = \frac{1}{1-t}$ na desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|u\|^r_{L^r(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^t\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{1-t} = \|u\|^{pt}_{L^p(\Omega)}\,\|u\|^{p^*(1-t)}_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|u\|^{pt}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\|u\|^{p^*(1-t)}_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

Pela desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, e $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq A\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ em que $A = A(p,N)$. Usando ainda a desigualdade de Poincaré, $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq A\,\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$. Logo,

$$\|u\|^r_{L^r(\Omega)} \leq \bar{A}\,\|u\|^{pt}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,\|u\|^{p^*(1-t)}_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \bar{A}\,\|u\|^r_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

para alguma constante $\bar{A} = A^{p^*(1-t)}$.

Usando o mesmo argumento para $\bar{r}, s$ e $\bar{s}$, pois temos $p < \bar{r} < p^*$, $q < s, \bar{s} < q^*$, existirá um $M > 0$; $M = max\left\{A^{p^*(1-t)}, B^{q^*(1-t)}, D^{p^*(1-t)}, E^{q^*(1-t)}\right\}$ conseguiremos a estimativa seguinte

$$\int_\Omega F(x,u,v)dx \leq M\left(\|u\|^r_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\|v\|^s_{W_0^{1,q}(\Omega)}+\|u\|^{\bar{r}}_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\|v\|^{\bar{s}}_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right).$$

Afirmação C.2 : *Se as condições (F.3),(F.7) são satisfeitas, então existem* $\alpha > 0$ *e* $\rho > 0$ *tais que* $\Phi(u,v) > \alpha$ *para* $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} = \rho$.

Verificação da Afirmação C.2: Visto que a Afirmação C.1 já foi verificada, podemos utilizá-la para obter uma desigualdade para o funcional Φ, usando também a sua definição e a desigualdade de Poincaré, como segue :

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &= \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|\nabla v\|^q_{L^q(\Omega)} - \int_\Omega F(x,u,v)dx \\
&\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|\nabla v\|^q_{L^q(\Omega)} \\
&- M\left(\|u\|^{\bar{r}}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|^{\bar{s}}_{W_0^{1,q}(\Omega)} + \|u\|^{r}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|^{s}_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right) \\
&= \frac{1}{p}\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \\
&- M\left(\|u\|^{\bar{r}}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|^{\bar{s}}_{W_0^{1,q}(\Omega)} + \|u\|^{r}_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|^{s}_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Defina $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := X$ e $\|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} := Y$.

Sem perda de generalidade, considere $p < q$. Então, $1 > \frac{1}{p} > \frac{1}{q}$, pois por hipótese, $p, q > 1$, e tome $X \leq \rho < 1$ e $Y \leq \rho < 1$.

Pela hipótese (F.3), caso superlinear, $p < r$, então $X^r < X^p < 1$, e pela mesma hipótese, $q < s$, então $Y^s < Y^q < 1$. Denote $\varsigma = min\{r-p, s-q\}$ e $\tau = min\{\bar{r}-p, \bar{s}-q\}$ e observe que $\rho^{r-p} < \rho^\varsigma < 1$, então $-\rho^{r-p} > -\rho^\varsigma$. Também, se $\rho^{s-q} < \rho^\varsigma < 1$, então $-\rho^{s-q} > -\rho^\varsigma$. Analogamente para τ. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &\geq \tfrac{1}{q}\{X^p + Y^q\} - M\{X^pX^{r-p} + Y^qY^{s-q} + X^pX^{\bar{r}-p} + Y^qY^{\bar{s}-q}\} \\
&\geq \tfrac{1}{q}\{X^p + Y^q\} - M\{X^p\rho^{r-p} + Y^q\rho^{s-q} + X^p\rho^{\bar{r}-p} + Y^q\rho^{\bar{s}-q}\} \\
&\geq \tfrac{1}{q}\{X^p + Y^q\} - M\{(X^p + Y^q)\rho^\varsigma + (X^p + Y^q)\rho^\tau\} \\
&= \{X^p + Y^q\}\left\{\tfrac{1}{q} - M\rho^\varsigma - M\rho^\tau\right\} = \alpha(\rho)
\end{aligned}$$

podemos escolher $\rho > 0$ suficientemente pequeno tal que $\frac{1}{q} - M\rho^\varsigma - M\rho^\tau > 0$ e assim, a afirmação C.2 está verificada. ■

Afirmação C.3 : *Se a condição (F.6) é satisfeita, então existe* $(\varphi, \psi) \in E$ *tal que* $|\varphi|, |\psi| > R$*,* $R > 0$ *constante , onde* $\Phi(\varphi, \psi) < 0$.

Verificação da Afirmação C.3 : Usando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}\left\{F(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)\right\} = \frac{1}{t}\left\{\theta_p F_1(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)t^{\theta_p}u + F_2(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)t^{\theta_q}v\right\}$$

onde F_1, F_2 designam a derivada em relação a segunda e terceira coordenadas, respectivamente. Reescrevendo a condição (F.6) para $\left|t^{\theta_p}u\right|, \left|t^{\theta_q}v\right| \geq R, R > 0$,

$$0 < F(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v) < \theta_p F_1(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)t^{\theta_p}u + \theta_q F_2(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)t^{\theta_q}v.$$

Segue, então que

$$\frac{d}{dt}\left\{F(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v\right\} \geq \frac{1}{t}\left\{F(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)\right\}.$$

Isto implica que

$$\frac{1}{t} \leq \frac{\frac{d}{dt}\left\{F(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)\right\}}{F(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)}.$$

Integrando na variável t de 1 até $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande,

$$ln(t) \leq ln\left\{\frac{F(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)}{F(x, u, v)}\right\}.$$

Como a função logarítmica é crescente e $F(x, u, v) > 0$, $\forall |u|, |v| \geq R$, obtemos a desigualdade

$$F(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v) \geq tF(x, u, v).$$

Por outro lado, usando a definição do funcional Φ e a desigualdade de Poincaré ,

$$\begin{aligned}\Phi(t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v) &= \tfrac{1}{p}\textstyle\int_\Omega \left|\nabla(t^{\theta_p}u)\right|^p dx + \tfrac{1}{q}\int_\Omega \left|\nabla(t^{\theta_q}v)\right|^q dx - \int_\Omega F(x, t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v)dx \\ &\leq \tfrac{t^{\theta_p \cdot p}}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \tfrac{t^{\theta_q \cdot q}}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - t\textstyle\int_\Omega F(x, u, v)dx.\end{aligned}$$

Vimos anteriormente que $\int_\Omega F(x, u, v)dx$ é finita. Lembrando que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e usando o fato de $\theta_p.p < 1, \theta_q.q < 1$ por (F.6), existem constantes

$c_5, c_6, c_7 \in \mathbb{R}_+^*$ tais que

$$\begin{aligned} \Phi(t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v) &\leq t^{\theta_p \cdot p}c_5 + t^{\theta_q \cdot q}c_6 - tc_7 \\ &= t\left\{t^{\theta_p \cdot p-1}c_5 + t^{\theta_q \cdot q-1}c_6 - c_7\right\} \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo $t \to \infty$, temos que $\Phi(t^{\theta_p}u, t^{\theta_q}v) \to -\infty$, se $(u, v) \neq (0, 0)$ está fixado. ■

Concluimos que $(0, 0)$ é mínimo local para Φ , pela hipótese (F.4), e Φ não é limitado inferiormente, isto é, existe uma vizinhança B_R de $(0, 0)$ e $t = t_0$ suficientemente grande com $(t_0^{\theta_p}u, t_0^{\theta_q}v) \in B_\rho^C$ tal que

$$\inf_{\partial B_\rho} \Phi > max\left\{\Phi(0,0), \Phi(t_0^{\theta_p}u, t_0^{\theta_q}v)\right\} = 0.$$

Provada a condição (PS), isto é, Lema (PS), juntamente com as três afirmações anteriores, Φ tem a geometria do passo da montanha e podemos, agora, aplicar o Teorema do Passo da Montanha para garantir a existência de uma solução não-trivial. Assim a demonstração do Teorema C está completa . ■

Capítulo 3

Problemas do tipo ressonante

Neste capítulo estamos interessados em estudar uma situação um pouco diferente daquelas do capítulo 2. Para tanto, vamos fazer um estudo para uma situação chamada de tipo ressonante, ou seja, o caso em que F satisfaz a condição de crescimento (F.3) com $r = p, s = q$. Este caso implicará em novas definições, novas formas de abordagem do problema, isto é, estaremos estabelecendo um novo conceito de compacidade, chamado de condição de Cerami a qual denotaremos por (Ce). Vamos trabalhar também com o problema de autovalor cuja existência será provada usando o Teorema de Multiplicadores de Lagrange na versão de Espaços de Banach. Iremos, também, trabalhar com uma variante do Teorema do Passo da Montanha em que a condição de Palais-Smale usual é substituida pela condição (Ce). Nosso principal objetivo é demonstrar os Teoremas D e E. No final deste capítulo iremos demonstrar um resultado importante que é Princípio do Máximo Forte para o p-Laplaciano.

3.1 O problema de autovalor não-linear

Nesta subseção, trabalharemos com o conceito de problema de autovalor não-linear onde, sob certas condições, buscaremos sua existência pelo método de Lagrange bem como sua caracterização. Mostraremos também que dada uma função em L^∞, o primeiro autovalor associado é uma função contínua na norma L^∞.

Lema D.1: *Seja $G : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ uma função par de classe C^1 satisfazendo as condições*

(G.1),(G.2) definidas na Introdução. Dada uma função $a \in L^\infty$, existem um número real $\lambda_1(a)$ e um vetor $(u_0, v_0) \in E$, tais que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 - aG_u(u_0, v_0) &= \lambda_1(a) u_0 \, |u_0|^{p-2}\,;\ \Omega \\ -\Delta_q v_0 - aG_v(u_0, v_0) &= \lambda_1(a) v_0 \, |v_0|^{q-2}\,;\ \Omega. \end{cases}$$

Além disso,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q \, dx - \int_\Omega aG(u,v)dx \geq \lambda_1(a)\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q \, dx\right\}$$

$\forall\ (u, v) \in E$, onde a igualdade se verifica em (u_0, v_0).

Demonstração do Lema D.1 : Escolha $M > 0$, tal que $\frac{M}{p} > k \, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}$ e $\frac{M}{q} > k \, \|a\|_{L^\infty(\Omega)}$ onde k é a constante em (G.2).
Afirmação D.1.1 : *O funcional J definido por*

$$J(u,v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q - \int_\Omega aG(u,v)dx + M\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q \, dx\right\}$$

é não-negativo, $\forall\ (u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$.

Verificação da Afirmação D.1.1 : Lembremos que a condição (G.2) afirma que temos $G(u, v) \leq k(|u|^p + |v|^q), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Considere $a \in L^\infty(\Omega),\ a(x) \geq 0$ q.t.p $x \in \Omega$. Então

$$-\int_\Omega aG(u,v)dx \geq -k\int_\Omega a(|u|^p + |v|^q)dx.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(|u|^p + |v|^q)dx &= \int_\Omega a\,|u|^p \, dx + \int_\Omega a\,|v|^q \, dx \\ &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\left\{\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|v\|^q_{L^q(\Omega)}\right\}. \end{aligned}$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega aG(u,v)dx &\geq -k\int_\Omega a(|u|^p+|v|^q)dx \\
&\geq -k\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\left\{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+\|v\|^q_{L^q(\Omega)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Pela definição de J, poderemos usar o resultado acima para obter a desigualdade :

$$
\begin{aligned}
J(u,v) &\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}+\frac{1}{q}\|\nabla v\|^q_{L^q(\Omega)}-k\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\left\{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+\|v\|^q_{L^q(\Omega)}\right\} \\
&+ M\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{L^q(\Omega)}\right\}.
\end{aligned}
$$

Agora usando a desigualdade de Poincaré

$$
\begin{aligned}
J(u,v) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}+\left\{\frac{M}{p}-k\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \\
&+ \left\{\frac{M}{q}-k\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}\|v\|^q_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Pela escolha de M e da definição de norma, $J(u,v)$ é não-negativo, $\forall\ (u,v)\in E$. Portanto a afirmação está verificada. ■

Afirmação D.1.2 : *O funcional J definido na Afirmação D.1.1 é coercivo.*

Verificação da Afirmação D.1.2 : Seja

$M_1=\frac{M}{p}-k\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}>0,\ M_2=\frac{M}{q}-k\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}>0.$

Seguindo a verificação da afirmação anterior, exatamente na última desigualdade , temos

$$
\begin{aligned}
J(u,v) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}+M_1\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+M_2\|v\|^q_{L^q(\Omega)} \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Daí, fazendo $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\to\infty$, ou $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\to\infty$, obtemos $J(u,v)\to\infty$. E a afirmação está concluida. ■

Considere a variedade

$$S = \{(u, v) \in E : B(u, v) = 1\},$$

onde

$$B(u, v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx.$$

Vamos olhar para o ínfimo de $\{J(u,v) : (u,v) \in S\}$. Denotemos μ este ínfimo e seja $\{u_n, v_n\} \in S$ uma seqüencia minimizante; $J(u_n, v_n) \to \mu$, o qual implica, s.p.g., que $J(u_n, v_n) \leq \mu + 1$. Seja $(u, v) \in E, (u, v) \neq (0, 0)$, considere s.p.g, $p < q$. Segue que

$$\begin{aligned} J(u,v) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} + M_1\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + M_2\|v\|^q_{L^q(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{q}\left\{\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right\}. \end{aligned}$$

Tomando a seqüencia minimizante $(u_n, v_n) \in S$, temos

$$\mu + 1 \geq J(u_n, v_n) \geq \frac{1}{q}\left\{\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right\}$$

Isto implica que a seqüência $\{u_n, v_n\}$ é limitada em E.

Como os espaços $W_0^{1,p}(\Omega), W_0^{1,q}(\Omega)$ são uniformemente convexos, temos que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0)$ em E. Usando o fato da imersão compacta de $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, podemos obter , passando à subseqüência se necessário,

$$(u_n, v_n) \to (u_0, v_0) \;\text{ em } L^p(\Omega) \times L^q(\Omega),$$

$$(u_n(x), v_n(x)) \to (u_0(x), v_0(x)) \;\text{ q.t.p } x \in \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq h_1(x),\; |v_n(x)| \leq h_2(x),$$

com $h_1 \in L^p(\Omega)$, $h_2(x) \in L^q(\Omega)$. Pela condição (G.2), $G(u_n, v_n) \leq k\left(|u_n|^p + |v_n|^q\right) \leq k(|h_1|^p + |h_2|^q)$ q.t.p $x \in \Omega$. Como G é contínua em $\mathbb{R}^2$, $G(u_n, v_n) \to G(u_0, v_0)$ q.t.p $x \in \Omega$. Segue do T.C.D.L.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega G(u_n, v_n)dx = \int_\Omega G(u_0, v_0)dx.$$

Conseqüentemente, usando a definição de J , a desigualdade de Poincaré e os resultados acima

$$\begin{aligned}
J(u_0, v_0) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p\, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v_0|^q\, dx - \int_\Omega aG(u_0, v_0)dx \\
&+ M\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p\, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v_0|^q\, dx\right\} \\
&= \frac{1}{p}\|u_0\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_0\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - \int_\Omega aG(u_0, v_0)dx \\
&+ M\left\{\frac{1}{p}\|u_0\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_0\|^q_{L^q(\Omega)}\right\} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right\} - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega aG(u_n, v_n) \\
&+ M\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}\right\} \\
&= \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p})(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} + \int_\Omega -aG(u_n, v_n)dx\right\} \\
&+ M\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}\right\} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - \int_\Omega aG(u_n, v_n)dx\right\} \\
&+ M\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}\right\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} J(u_n, v_n) = \mu.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $(u_0, v_0) \in S$, daí conclui-se que o mínimo é atingido em S. De fato, como $u_n \to u_0$ em $L^p(\Omega)$ e $v_n \to v_0$ em $L^q(\Omega)$ temos $\int_\Omega |u_n|^p\, dx \to \int_\Omega |u_0|^p\, dx$ e $\int_\Omega |v_n|^q\, dx \to \int_\Omega |v_0|^q\, dx$. Assim $1 = B(u_n, v_n) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u_n|^p\, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v_n|^q\, dx \to \frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p\, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v_0|^q\, dx = B(u_0, v_0)$. Então $B(u_0, v_0) = 1$, isto é, $(u_0, v_0) \in S$.

Pelo argumento de minimização acima, podemos assumir $u_0, v_0 \geq 0$. De fato, dos resultados de regularidade, [20], [23],tem-se u_0, v_0 de classe $C^1(\bar{\Omega})$ e juntamente com o Princípio do Maximo de Vasquez (ver final deste capítulo), $u_0 > 0, v_0 > 0$. Então, podemos usar a Versão do Teorema de Multiplicadores de Lagrange e obter $\mu_M \in \mathbb{R}$ tal que

$$J^{'}(u_0, v_0)(\varphi, \psi) = \mu_M B^{'}(u_0, v_0)(\varphi, \psi), \ \forall \ (\varphi, \psi) \in E.$$

Usando o Teorema do Divergente podemos concluir que (u_0, v_0) , como na demonstração do Terorema A, é solução do sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 - aG_u(u_0, v_0) + M \left|u_0\right|^{p-2} u_0 & = \mu_M \left|u_0\right|^{p-2} u_0; \ \Omega \\ -\Delta_q v_0 - aG_v(u_0, v_0) + M \left|v_0\right|^{q-2} v_0 & = \mu_M \left|v_0\right|^{q-2} v_0, \ \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Afirmação D.1.3 : *Segue de (G.1) que*

$$G(u, v) = \tfrac{1}{p} u G_u(u, v) + \tfrac{1}{q} v G_v(u, v), \ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.2}$$

Verificação da Afirmação D.1.3 : Se por (G.1), $G(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) = tG(u, v)$, então

$$G(u, v) = \frac{d}{dt} G(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) = G_u(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v).\frac{1}{p}t^{\frac{1}{p}-1}u + G_v(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v).\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}v$$

Substituindo esta expressão em (G.1),

$$\begin{aligned} G(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) &= tG(u, v) \\ &= \frac{1}{p} G_1(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) t^{\frac{1}{p}} u + \frac{1}{q} G_2(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v) t^{\frac{1}{q}} v \end{aligned}$$

onde G_1, G_2 denotam as derivadas em relação à primeira e segunda coordenada, respectivamente. Substituindo $(t^{\frac{1}{p}}u, t^{\frac{1}{q}}v)$ por (u, v) na expressão acima, o resultado segue.

Note que, $J\left(\frac{u}{C^{\frac{1}{p}}}, \frac{v}{C^{\frac{1}{q}}}\right) = \frac{1}{C} J(u, v)$ em que $C = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q \, dx$ e $\left(\frac{u}{C^{\frac{1}{p}}}, \frac{v}{C^{\frac{1}{q}}}\right) \in S, \ \forall \ (u, v) \neq (0, 0)$. Assim, pela minimização acima, temos

$$\mu = J(u_0, v_0) = \inf_{(u,v)\in\mathbb{S}} J(u,v) \leq \inf_{(u,v)\neq(0,0)\in E} \left\{ \frac{J(u,v)}{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx} \right\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx\right) &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx - \int_\Omega aG(u,v) \\ &+ M\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx\right\}, \forall (u,v)\in E. \quad (3.3) \end{aligned}$$

■

Afirmação D.1.4 : *Segue dos resultados (3.1), (3.2),(3.3) nas afirmações anteriores que* $\mu = \mu_M$.

Verificação da Afirmação D.1.4 : De fato, usando (3.3) e a definição de μ, temos

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v_0|^q\,dx\right) &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v_0|^q\,dx - \int_\Omega aG(u_0,v_0)dx \\ &+ M\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v_0|^q\,dx\right\} \leq \mu. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Por (3.2) e (3.1), seguem as igualdades

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v_0|^q\,dx - \int_\Omega aG(u_0,v_0)dx + M\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v_0|^q\,dx\right\} \\ = & \frac{1}{p}\left\{\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx - \int_\Omega aG_u(u_0,v_0)u_0dx + M\int_\Omega |u_0|^p\,dx\right\} \\ + & \frac{1}{q}\left\{\int_\Omega |\nabla v_0|^q\,dx - \int_\Omega aG_v(u_0,v_0)v_0dx + M\int_\Omega |v_0|^q\,dx\right\} \\ = & \frac{1}{p}\left\{\mu_M\int_\Omega |u_0|^p\,dx\right\} + \frac{1}{q}\left\{\mu_M\int_\Omega |v_0|^q\,dx\right\} \\ = & \mu_M\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u_0|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v_0|^q\,dx\right\} \quad (3.5) \end{aligned}$$

Como $(u_0, v_0) \in S$, então reunindo os resultados (3.3),(3.4) e (3.5) obteremos que $\mu \leq \mu_M \leq \mu$. Portanto, a igualdade está satisfeita. ■

Finalmente, provaremos o Lema D.1 da seguinte maneira : escrevendo $\lambda_1(a) = (\mu - M)$, obtemos de (3.3) o segundo resultado do Lema D.1, isto é,

$$(\mu - M)\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx\right\} \leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx - \int_\Omega aG(u,v)dx$$

e obtemos o primeiro resultado do Lema D.1 de (3.1), ou seja,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta_p u_0 - aG_u(u_0,v_0) & = & (\mu_M - M)u_0\,|u_0|^{p-1} = \lambda_1(a)u_0\,|u_0|^{p-1} \\ -\Delta_q v_0 - aG_v(u_0,v_0) & = & (\mu_M - M)v_0\,|v_0|^{q-1} = \lambda_1(a)v_0\,|v_0|^{q-1} \end{array}\right. .$$

■

Lema D.2 : $\lambda_1(a)$ *é contínua em a na norma* L^∞.

Demonstração do Lema D.2 : Pela definição de continuidade, queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, a ser escolhido posteriormente, onde $|\lambda_1(b) - \lambda_1(a)| < \epsilon$, sob a condição de $\|b - a\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta$. De fato, considere o funcional

$$\begin{aligned} J_a(u,v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\,(u)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla\,(v)|^q\,dx - \int_\Omega aG(u,v) \\ &+ M\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx\right\} \end{aligned}$$

$\forall\ (u,v) \in E$ e defina de maneira análoga o funcional $J_b(u,v)$, onde $M > \max\{p,q\}\,k$ $\left\{\|a\|_{L^\infty(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}$ dados no Lema D.1. Pela definição de ínfimo, dado $\epsilon > 0$,

$$\exists\ (u_\epsilon, v_\epsilon) \in S = \left\{(u,v) \in E : \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx = 1\right\},$$

tal que $J_a(u_\epsilon, v_\epsilon) < \mu + \frac{\epsilon}{2}$. Note que temos

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u_\epsilon)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla(v_\epsilon)|^q\,dx - \int_\Omega aG(u_\epsilon, v_\epsilon)dx + M.1 \leq \mu + \frac{\epsilon}{2} \tag{3.6}$$

para $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in S$. Seja $A \geq \max\{kp, kq\}$ onde k é a constante dada na condição (G.2).

Daí,

$$G(u,v) \leq \frac{A}{p}|u|^p + \frac{A}{q}|v|^q = A\left\{\frac{1}{p}|u|^p + \frac{1}{q}|v|^q\right\}.$$

Segue das definições de J_a, J_b para qualquer $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in S$,

$$\begin{aligned} |J_b(u_\epsilon,v_\epsilon) - J_a(u_\epsilon,v_\epsilon)| &= \left|\int_\Omega (b-a)G(u_\epsilon,v_\epsilon)\right| \\ &\leq \int_\Omega |b-a|\,G(u_\epsilon,v_\epsilon) \leq \int_\Omega |b-a|\,A\left(\frac{1}{p}|u_\epsilon|^p\,dx + \frac{1}{q}|v_\epsilon|^q\right)dx \\ &\leq A\,\|b-a\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por outro lado, usando a caracterização de λ_1 do Lema D.1,

$$\begin{aligned} \lambda_1(b) &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u_\epsilon)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla(v_\epsilon)|^q\,dx - \int_\Omega bG(u_\epsilon,v_\epsilon)dx \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(u_\epsilon)|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla(v_\epsilon)|^q\,dx - \int_\Omega bG(u_\epsilon,v_\epsilon)dx + M - M \\ &= J_b(u_\epsilon,v_\epsilon) - M. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Utilizando os resultado acima $(3.6), (3.7), (3.8)$ e o Lema D.1, com $\lambda_1(a) = \mu - M$, e escolhendo $\delta = \frac{\epsilon}{2A}$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_1(b) &\leq J_b(u_\epsilon,v_\epsilon) - M \\ &\leq J_a(u_\epsilon,v_\epsilon) + A\,\|b-a\|_\infty - M \\ &\leq \mu + \frac{\epsilon}{2} + A\,\|b-a\|_\infty - M \\ &< \lambda_1(a) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda_1(b) - \lambda_1(a) < \epsilon$. De maneira análoga, mudando a por b, concluiremos a desigualdade $|\lambda_1(b) - \lambda_1(a)| < \epsilon$. Assim o Lema D.2 está provado. ■

Demonstração do Teorema D : Para a demonstração do Teorema D iremos precisar do lemas D.1 e D.2. Primeiramente, vamos mostrar que o funcional Φ é limitado inferiormente. De fato, da condição (F.9) temos

$$\limsup_{|u|,|v|\to+\infty} \frac{F(x,u,v)}{G(u,v)} \leq a(x) \in L^\infty(\Omega),\ \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Isto significa, pela definição de $\limsup$, que fixado $x \in \bar{\Omega}$

$$\inf_{R>0} \left\{ \sup_{|u|,|v| \geq R} \frac{F(x,u,v)}{G(u,v)} \right\} \leq a(x).$$

Usando a definição de ínfimo nesta expressão acima, dado $x \in \bar{\Omega}$ e dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0, R = R(\epsilon)$ tal que

$$\sup_{|u|,|v| \geq R} \frac{F(x,u,v)}{G(u,v)} \leq a(x) + \epsilon.$$

Logo,

$$F(x,u,v) \leq (a(x) + \epsilon) G(u,v), \ \forall \ x \in \bar{\Omega}, \ |u|, |v| \geq R.$$

Por outro lado, sendo F contínua $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \ x \in \bar{\Omega}$ fixado, e $R = R(\epsilon) > 0$,

$$F(x,u,v) \leq \alpha_\epsilon(x) = \max_{|u|,|v| \in [0,R] \times [0,R]} F(x,u,v)$$

Como $\bar{\Omega}$ é compacto em $\mathbb{R}^N$, então existe uma constante C_ϵ tal que

$$C_\epsilon = \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha_\epsilon(x) \ .$$

Assim , se $|u|, |v| \in [0,R] \times [0,R]$ e $x \in \bar{\Omega}$, existe uma constante C_ϵ onde $F(x,u,v) \leq C_\epsilon$.

Conclui-se então da condição (F.9) que dado $\epsilon > 0$, existe uma constante C_ϵ tal que

$$F(x,u,v) \leq (a(x) + \epsilon) \, G(u,v) + C_\epsilon.$$

Conseqüentemente, substituindo a desigualdade na definição de Φ,

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &\geq \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |\nabla v|^q \, dx - \int_\Omega (a(x) + \epsilon) \, G(u,v) dx - \int_\Omega C_\epsilon \\ &= \frac{1}{p} \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q} \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega (a(x) + \epsilon) \, G(u,v) dx - C_\epsilon \, |\Omega| \, . \end{aligned}$$

Seja agora $0 < \delta < 1$. Como λ_1 é contínuo em a na norma L^∞, pelo Lema D.2 , podemos escolher ϵ e δ tais que $\lambda_1 \left(\frac{a(x)+\epsilon}{1-\delta} \right) = \lambda_1(b) > 0$. Isto é possível pela condição

(F.9). Assim, somando e subtraindo a expressão finita $\delta\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right\}$ na desigualdade acima, obteremos

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}-\int_\Omega (a(x)+\epsilon)\,G(u,v)dx - C_\epsilon\,|\Omega| \\
&= \delta\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right\}-C_\epsilon\,|\Omega| \\
&+ (1-\delta)\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}-\int_\Omega\left(\frac{a(x)+\epsilon}{1-\delta}G(u,v)\right)dx\right\} \\
&\geq \delta\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right\}-C_\epsilon\,|\Omega| \\
&+ (1-\delta)\,.\lambda_1\left(\frac{a(x)+\epsilon}{1-\delta}\right)\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{p(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{L^q(\Omega)}\right\} \\
&\geq \delta\left\{\frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\frac{1}{q}\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right\}-C_\epsilon\,|\Omega|\,.
\end{aligned}$$

Segue que Φ é coercivo , pois

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &\geq \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\left(\frac{\delta}{p}\right)+\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\left(\frac{\delta}{q}\right)-C_\epsilon\,|\Omega| \\
&= \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,c_1+\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)}\,c_2-c_3,
\end{aligned}$$

fazendo $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\to\infty$ ou $\|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}\to\infty$, então $\Phi(u,v)\to\infty$.

Por fim, visto que Φ é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente, então pelo Teorema 1.1 do capítulo 1, Φ é limitado e o ínfimo é atingido. ■

3.2 A condição de compacidade de Cerami e o Teorema do Passo da Montanha

Com o objetivo de mostrarmos o teorema E, utilizaremos uma variante do Teorema do Passo da Montanha com uma outra condição de compacidade, que substitui a condição de Palais-Smale. Trabalharemos com o funcional Φ definido na introdução e suas hipóteses (F.2), (F.8), (F.9),(F.10),(F.11) no caso ressonante com o objetivo de mostrar que este satisfaz a condição (Ce) e tem a geometria do passo da montanha. Trabalharemos com a seguinte definição que é equivalente à apresentada no capítulo 1:

Definição : *Diz-se que um funcional* Φ *de classe* $C^1(E,\mathbb{R})$*, onde* E *é um espaço de Banach, satisfaz a condição de compacidade de Cerami (Ce), se toda seqüência* $(u_n, v_n) \in E$ *tal que*

$|\Phi(u_n, v_n)| < C$ e $(1 + \|(u_n, v_n)\|_E) \left\|\Phi'(u_n, v_n)\right\| \to 0$, C constante,

possui uma subseqüência convergente na norma em E.

Afirmação E.1 : *A condição (PS) implica na condição (Ce).*

Verificação da Afirmação E.1 : Suponha que a seqüência (u_n, v_n) é tal que

$$|\Phi(u_n, v_n)| \leq C \text{ e } \left(1 + \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right) \left\|\Phi'(u_n, v_n)\right\| \to 0.$$

Daí, $\Phi'(u_n, v_n) \to 0$, obrigatoriamente. Assim , pela condição (PS), (u_n, v_n) tem uma subseqüência convergente em E. ∎

O resultado introduzido a seguir envolve a condição (Ce). Para mostrá-lo será preciso trabalhar com uma desigualdade de interpolação.

Lema (Ce) : *Suponha que* F *satisfaz as condições (F.2),(F.8) e (F.3) no caso ressonante. Então o funcional* Φ *satisfaz a condição (Ce).*

Vamos antes enunciar a desigualdade de interpolação e prová-la, pois esta será necessária posteriormente.

Desigualdade de Interpolação : *Suponha para alguma função mensurável* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *;* $0 < a < b < c$, $u \in L^a(\Omega) \bigcap L^c(\Omega)$ *. Então*

$$\int_\Omega |u|^b \leq \left(\int_\Omega |u|^a\right)^{\frac{c-b}{c-a}} \left(\int_\Omega |v|^c\right)^{\frac{b-a}{c-a}}$$

onde $\frac{1}{b} = \frac{t}{a} + \frac{1-t}{c}, t \in (0,1)$.

Demonstração da desigualdade de interpolação : Observe que se $\frac{1}{b} = \frac{t}{a} + \frac{1-t}{c}, t \in (0,1)$, então

$$\begin{aligned} ac &= tbc + (1-t)ab \\ ac &= tbc - ab - tab \\ tb(c-a) &= ac - ab \\ t &= \frac{a(c-b}{b(c-a)}. \end{aligned}$$

Daí,

$$1 - t = \frac{c(b-a)}{b(c-a)}.$$

Precisamos mostrar que

$$\int_\Omega |u|^b \, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^a \, dx \right)^{\frac{bt}{a}} \left(\int_\Omega |u|^c \, dx \right)^{\frac{b(1-t)}{c}}.$$

Note que $\int_\Omega |u|^b \, dx = \int_\Omega |u|^{tb} \, |u|^{(1-t)b} \, dx$, pois $b = tb + (1-t)$ para algum $t \in (0,1)$.

Considere $\alpha = \frac{a}{tb}$. Então seu conjugado será $\alpha' = \frac{c}{(1-t)b}$. Além disso, $\alpha > 1$, por um simples cálculo. Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u|^b \, dx &= \int_\Omega |u|^{tb} \, |u|^{(1-t)b} \, dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |u|^a \, dx \right)^{\frac{tb}{a}} \left(\int_\Omega |u|^c \, dx \right)^{\frac{(1-t)b}{a}}. \end{aligned}$$

Pelo fato anterior com $t = \frac{a(c-b)}{b(c-a)}, 1 - t = \frac{c(b-a)}{b(c-a)}$, segue que

$$\int_\Omega |u|^b \, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^a \, dx \right)^{\frac{c-b}{c-a}} \left(\int_\Omega |u|^c \, dx \right)^{\frac{b-a}{c-a}}.$$

Assim a desigualdade de interpolação está demonstrada. ∎

Demonstração do Lema (Ce) : Considere agora uma seqüência $\{u_n, v_n\}$ em E satisfazendo

$$|\Phi(u_n,v_n)| \leq C \ \text{ e } \ \left(1 + \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right)\left\|\Phi^{'}(u_n,v_n)\right\| \to 0$$

onde C é uma constante positiva.

Primeiramente iremos provar que $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ e $\|v_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}$ são limitadas. Note que

$$\begin{aligned}
& \Phi(u_n,v_n) - \left\langle \Phi^{'}(u_n,v_n), (\frac{1}{p}u_n, \frac{1}{q}v_n)\right\rangle \\
= \ & \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v_n|^q \, dx - \int_\Omega F(x,u_n,v_n)dx \\
- \ & \left\{\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n . \frac{1}{p}\nabla u_n dx + \int_\Omega |\nabla v_n|^{q-2} \nabla v_n . \frac{1}{q}\nabla v_n dx\right\} \\
- \ & \left\{- \int_\Omega F_u(x,u_n,v_n).\frac{1}{p}u_n dx - \int_\Omega F_v(x,u_n,v_n).\frac{1}{q}v_n dx\right\} \\
= \ & \int_\Omega \left(\frac{1}{p}F_u(x,u_n,v_n)u_n + \frac{1}{q}F_v(x,u_n,v_n)v_n - F(x,u_n,v_n)\right) dx \\
\geq \ & \int_\Omega \left(|u_n|^\mu + |v_n|^\nu\right) dx
\end{aligned}$$

pelas condições de crescimento de F, F_u, F_v e pela condição (F.8), com

$$\begin{cases} 0 < \mu < p < p^*, \\ 0 < \nu < q < q^*. \end{cases}$$

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall \ n \geq n_0$, utilizando as hipóteses da condição (Ce),

$$
\begin{aligned}
& \Phi(u_n,v_n) - \left\langle \Phi^{'}(u_n,v_n), \left(\frac{1}{p}u_n, \frac{1}{q}v_n\right)\right\rangle \\
\leq\ & C + \left\|\Phi^{'}(u_n,v_n)\right\|_{E'} \left\|\left(\frac{1}{p}u_n, \frac{1}{q}v_n\right)\right\|_{E} \\
=\ & C + \left\|\Phi^{'}(u_n,v_n)\right\|_{E'} \left(\frac{1}{p}\left\|u_n\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\left\|v_n\right\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}\right) \\
\leq\ & C + \epsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
C + \epsilon \geq \Phi(u_n,v_n) - \left\langle \Phi^{'}(u_n,v_n), (\frac{1}{p}u_n, \frac{1}{q}v_n)\right\rangle \geq \int_\Omega \left(|u_n|^\mu + |v_n|^\nu\right) dx
$$

e daí, concluir que as integrais $\int_\Omega |u_n|^\mu\, dx, \int_\Omega |v_n|^\nu\, dx$ são finitas.

Podemos obter , também, pela desigualdade de Sobolev- Gagliardo- Nirenberg que

$$
\begin{aligned}
\left\|u_n\right\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} &\leq A\left\|u_n\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p^*} < \infty, \\
\left\|v_n\right\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{q^*} &\leq B\left\|v_n\right\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^{q^*} < \infty.
\end{aligned}
$$

Sendo $u_n, v_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis, podemos usar a desigualdade de interpolação [9], [10], da seguinte maneira :

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\int_\Omega |u_n|^p\, dx & \leq & \left(\int_\Omega |u_n|^\mu\, dx\right)^{\frac{p^*-p}{p^*-\mu}} \left(\int_\Omega |u_n|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p-\mu}{p^*-\mu}} = c_2\left\|u_n\right\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{\frac{p^*(p-\mu)}{p^*-\mu}}, \\
\int_\Omega |v_n|^q\, dx & \leq & \left(\int_\Omega |v_n|^\nu\, dx\right)^{\frac{q^*-q}{q^*-\nu}} \left(\int_\Omega |v_n|^{q^*}\, dx\right)^{\frac{q-\nu}{q^*-\nu}} = c_3\left\|v_n\right\|_{L^{q^*}(\Omega)}^{\frac{q^*(q-\nu)}{q^*-\nu}}
\end{array}
\right.
$$

e assim, existem constantes α, β tais que

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\left\|u_n\right\|_{L^p(\Omega)}^p & \leq & \alpha\left\|u_n\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p^*(p-\mu)}{p^*-\mu}}, \\
\left\|v_n\right\|_{L^q(\Omega)}^q & \leq & \beta\left\|v_n\right\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^{\frac{q^*(q-\nu)}{q^*-\nu}}.
\end{array}
\right.
$$

Defina $\tilde{p} := \frac{p^*(p-\mu)}{p^*-\mu}$ e $\tilde{q} := \frac{q^*(q-\nu)}{q^*-\nu}$. Por (F.3), no caso ressonante, $|F(x,u,v)| \leq (1+|u|^p+|v|^q), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Segue da definição do funcional Φ e das desigualdades acima que

$$\begin{aligned}\Phi(u_n,v_n) &\geq \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - C|\Omega| - C\int_\Omega |u_n|^p\,dx - C\int_\Omega |v_n|^q\,dx \\ &\geq \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - C|\Omega| - C\alpha\|u_n\|^{\tilde{p}}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\beta\|v_n\|^{\tilde{q}}_{W_0^{1,q}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Por hipótese , $\Phi(u_n,v_n)$ é limitada, então das desigualdades acima, segue a seguinte estimativa

$$\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v_n\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - C\alpha\|u_n\|^{\tilde{p}}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\beta\|v_n\|^{\tilde{q}}_{W_0^{1,q}(\Omega)} - C|\Omega| \leq constante.$$

Por um simples cálculo, $\tilde{p} < p$ e $\tilde{q} < q$. Disso resulta que, $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \|v_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}$ são limitadas uniformemente em n.

Analogamente ao raciocínio adotado no Lema (PS)(capítulo 2, páginas 23,24,25), concluimos que (u_n,v_n) possui uma subseqüência convergente , ou seja, Φ satisfaz a condição de compacidade de Cerami. ∎

Demonstração do Teorema E : Para mostrar que Φ tem um ponto crítico não-trivial, precisaremos verificar que Φ satisfaz a geometria do Passo da Montanha. De fato, por (F.11), dado $\epsilon > 0$, $F(x,u,v) \leq c(x)\tilde{G}(u,v)$, para todo $|u|, |v| \leq \epsilon$.

Por outro lado, $|F(x,u,v)| \leq c_3(1+|u|^p+|v|^q)$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, pela condição (F.3), caso ressonante. Queremos verificar que $|F(x,u,v)| \leq C\left(|u|^{\bar{r}} + |v|^{\bar{s}}\right)$ para $|u|, |v| > \epsilon$, onde C é uma constante positiva. Sem perda de generalidade, seja $|u| > \epsilon$. Devemos verificar a desigualdade acima para $|v| > \epsilon$ ou $|v| < \epsilon$.

Caso (i) : se $|u| > \epsilon$ e $|v| > \epsilon$:

Nesse caso $\frac{|u|}{\epsilon} > 1$ e $\frac{|v|}{\epsilon} > 1$. Como $1 < p < \bar{r}$ e $1 < q < \bar{s}$, podemos escrever as desigualdades

$$\begin{cases} 1 < \frac{|u|}{\epsilon} < \left(\frac{|u|}{\epsilon}\right)^p < \left(\frac{|u|}{\epsilon}\right)^{\bar{r}} \text{ e} \\ \\ 1 < \frac{|v|}{\epsilon} < \left(\frac{|v|}{\epsilon}\right)^q < \left(\frac{|v|}{\epsilon}\right)^{\bar{s}}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |F(x,u,v)| &\leq c_3\,(1+|u|^p+|v|^q) \\ &\leq c_3\left(\frac{|u|}{\epsilon}+\frac{|v|}{\epsilon}+|u|^p\,\frac{|u|^{\bar{r}}}{|u|^{\bar{r}}}+|v|^q\,\frac{|v|^{\bar{s}}}{|v|^{\bar{s}}}\right) \\ &\leq c_3\left(\frac{|u|^{\bar{r}}}{\epsilon^{\bar{r}}}+\frac{|v|^{\bar{s}}}{\epsilon^{\bar{s}}}+\frac{\epsilon^p}{\epsilon^{\bar{r}}}\,|u|^{\bar{r}}+\frac{\epsilon^q}{\epsilon^{\bar{s}}}\,|v|^{\bar{s}}\right) \\ &\leq C\left(|u|^{\bar{r}}+|v|^{\bar{s}}\right) \end{aligned}$$

para $C = \max\left\{c_3\left(\frac{1}{\epsilon^{\bar{r}}}+\frac{\epsilon^p}{\epsilon^{\bar{r}}}\right), c_3\left(\frac{1}{\epsilon^{\bar{s}}}+\frac{\epsilon^q}{\epsilon^{\bar{s}}}\right)\right\}$.

Caso (ii) : $|u| > \epsilon$ e $|v| < \epsilon$.
Se $0 \leq \epsilon < 1$, então $\frac{|v|^q}{\epsilon^q} < 1$ para $q > 1$. Assim,

$$\begin{aligned} F(x,u,v) &\leq c_3\,(1+|u|^p+|v|^q) \\ &\leq c_3\left(1+|u|^p\,\frac{|u|^{\bar{r}}}{|u|^{\bar{r}}}+|v|^q\,\frac{\epsilon^q}{\epsilon^q}\right) \\ &\leq c_3\left(\frac{|u|^{\bar{r}}}{\epsilon^{\bar{r}}}+|u|^r\,\frac{\epsilon^p}{\epsilon^{\bar{r}}}+\epsilon^q\right) \\ &\leq \max\left\{c_3\left(\frac{1}{\epsilon^{\bar{r}}}+\frac{\epsilon^p}{\epsilon^{\bar{r}}}\right), c_3\epsilon^q\right\}\left\{|u|^{\bar{r}}+1\right\} \\ &= c_1\left\{1+|u|^{\bar{r}}\right\} \\ &\leq c_1\left\{1+|u|^{\bar{r}}+|v|^{\bar{s}}\right\} \\ &\leq c_1\left\{\frac{|u|^{\bar{r}}}{\epsilon^{\bar{r}}}+|u|^{\bar{r}}+|v|^{\bar{s}}\right\} \\ &= c_1\left\{\left(\frac{1}{\epsilon^{\bar{r}}}+1\right)|u|^{\bar{r}}+|v|^{\bar{s}}\right\} \\ &\leq C\left(|u|^{\bar{r}}+|v|^{\bar{s}}\right\} \end{aligned}$$

Finalmente, combinando este resultado com a condição (F.11),

$$F(x,u,v) \leq c(x)\tilde{G}(u,v) + C\left(|u|^{\bar{r}} + |v|^{\bar{s}}\right), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Consideremos $0 < \delta < 1$; δ é um número real a ser escolhido posteriormente. Da desigualdade acima, podemos obter uma estimativa para Φ, a saber:

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx - \int_\Omega c(x)\tilde{G}(u,v)dx \\
&- C\int_\Omega \left(|u|^{\bar{r}} + |v|^{\bar{s}}\right)dx + \delta\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right\} \\
&- \delta\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right\} \\
&= \delta\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right\} \\
&+ (1-\delta)\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx - \int_\Omega \frac{c(x)\tilde{G}(u,v)}{1-\delta}dx\right\} \\
&- C\int_\Omega \left(|u|^{\bar{r}} + |v|^{\bar{s}}\right)dx.
\end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\bar{r}}(\Omega), W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{\bar{s}}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &\geq \delta\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right\} \\
&+ (1-\delta)\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx - \int_\Omega \frac{c(x)\tilde{G}(u,v)}{1-\delta}dx\right\} \\
&- c_1\|u\|^{\bar{r}}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - c_2\|v\|^{\bar{s}}_{W_0^{1,q}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como na demonstração do Teorema D, escolhemos um δ, $0 < \delta < 1$, tal que

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx - \int_\Omega \frac{c(x)\tilde{G}(u,v)}{1-\delta}dx \geq \lambda_1\left(\frac{c(x)}{1-\delta}\right)\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx\right\}$$

onde $\lambda_1\left(\frac{c(x)}{1-\delta}\right) > 0$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &\geq \delta\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q\,dx\right\} \\
&+ (1-\delta)\,\lambda_1\left(\frac{c(x)}{1-\delta}\right)\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\,dx\right\} \\
&- C\,\|u\|^{\bar{r}}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\,\|v\|^{\bar{s}}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\geq \frac{\delta}{p}\,\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \frac{\delta}{q}\,\|v\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - C\,\|u\|^{\bar{r}}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C\,\|v\|^{\bar{s}}_{W_0^{1,q}(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Pelo mesmo argumento usado na demonstração do Teorema C, tomando para tanto $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = a, \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} = b$, fazendo $a+b=\rho$, encontraremos de maneira análoga, um $\epsilon = \epsilon\,(\rho) > 0$, tal que

$$\Phi(u,v) \geq \{a^p + b^q\}\left\{\frac{1}{q} - C.\rho^\varsigma\right\} = \epsilon$$

com $\varsigma = \min\{\bar{r}-p, \bar{s}-q\}$ e ρ escolhido suficientemente pequeno.

Para finalizar esta demonstração, precisamos verificar que existe um $e \in E$ tal que $\Phi(e) < 0$. Note que, pela condição (F.10),

$$F(x,u,v) \geq b(x)G(u,v), \text{para } |u|\,, |v| \geq R \text{ fixado.}$$

Por outro lado, sabemos que $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$, então se $|u|\,, |v| < R$ e $x \in \bar{\Omega}$ existe uma constante $C > 0$; $|F(x,u,v)| \leq C$. Portanto, $\forall x \in \bar{\Omega}, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$-\int_\Omega F(x,u,v)dx \leq -\int_\Omega b(x)G(u,v)dx + C\,|\Omega|\,.$$

Consideremos $(u,v) = (t^{\frac{1}{p}}u_0, t^{\frac{1}{q}}v_0)$, onde (u_0,v_0) corresponde a um par de autofunções associado à $\lambda_1(b)$ na condição (F.10). Segue pela definição de Φ, e da caracterização de (u_0,v_0) no Lema D.1 , que

$$\begin{aligned}
\Phi(t^{\frac{1}{p}}u_0, t^{\frac{1}{q}}v_0) &\leq t\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v_0|^q\,dx - \int_\Omega b(x)G(u_0,v_0)dx\right\} + C\,|\Omega| \\
&= t\lambda_1(b) + C\,|\Omega|\,.
\end{aligned}$$

Fazendo $t \to +\infty$, obtemos que $\lim_{t\to\infty} \Phi(t^{\frac{1}{p}}u_0, t^{\frac{1}{q}}v_0) = -\infty$, pois da condição (F.10) $\lambda_1(b) < 0$.

Conclusão : Pelas condições acima provadas, juntamente com o Lema (Ce), o funcional Φ satisfaz a geometria do Passo da Montanha e, portanto, o resultado segue utilizando a variante do Teorema do Passo da Montanha com a condição de compacidade de Cerami (Teorema 1.2 com a condição (Ce)). ■

Para finalizar este capítulo, iremos enunciar e demonstrar o Princípio do Maximo Forte de Vasquez o qual foi utilizado na página 35.

Teorema (Princípio do Máximo Forte de Vasquez) : *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $1 < p < \infty$. Suponha $u \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que $u \geq 0$ q.t.p $x \in \Omega$, $-\Delta_p u \geq 0$, q.t.p $x \in \Omega$. Então, se $u \not\equiv 0$ sobre Ω, $u > 0$ em Ω.*

Demonstração : A prova deste princípio é feita por contradição. Suponha que u se anule em algum lugar em Ω, mas não seja identicamente nula. Considere $N = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$. Note que $N \subset \Omega$, N não é vazio e também, é fechado, pois basta supor $x_n \in N, x_n \to x$, então, se $x_n \in N$, $u(x_n) = 0$. Como $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u(x_n) \to u(x)$. Daí, $x \in N$. Assim, podemos escolher um $x_0 \in \partial\Omega$ e $x_1 \in \Omega, R > 0$ tais que $\bar{B}_R(x_1) \subset N^c, |x_1 - x_0| = R, u(x_0) = 0$. E ainda, $0 < u < a$ em $B_R(x_1)$, para algum $a > 0$, pois $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Considere o anel $G = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \frac{R}{2} < |x - x_1| < R\right\} \subset \Omega$. A idéia é construir uma solução adequada $\tilde{u}$ para $-\Delta_p \tilde{u} \leq 0$ em G. Consideremos o problema

$$\begin{cases} v'' &= k_1 v', 0 < r < r_1, \\ v(0) &= 0, v(r_1) = v_1, \end{cases}$$

onde $v, v', v'' \geq 0$, para $v(r, k_1, r_1, v_1)$ uma solução de classe C^2 em $[0, r_1]$ com k_1, r_1, v_1 números reais. Resolvendo o problema : tomamos $y = e^{kt}$ onde k é um parâmetro a determinar. Substituindo y', y'' no sistema, usando as condições iniciais, obteremos

$$v(r) = \frac{e^{k_1 r} v_1}{e^{k_1 r_1} - 1} - \frac{v_1}{e^{k_1 r_1} - 1}.$$

Definimos agora $\tilde{u}(x) = v(R - |x - x_1|, k_1, \frac{R}{2}, v_1)$ em G, isto é,

$$\tilde{u} = \frac{e^{k_1 (R - |x - x_1|)} v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1} - \frac{v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1}.$$

Vamos agora calcular uma expressão para $-\Delta_p \tilde{u}$:
Tomamos $x = (x_1, x_2, ..., x_n), x_1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$ e definimos

$$\alpha(x) := k_1(R - |x - x_1|) = k_1 R - k_1 \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Daí, derivando

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = -k_1 . \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^1)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2(x_i - x_i^1) = -k_1 . \frac{(x_i - x_i^1)}{|x - x_1|}.$$

Pela definição de $\tilde{u}(x)$,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} . \frac{e^{\alpha(x)} v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1} = \frac{-k_1 v_1 e^{\alpha(x)}}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1} . \frac{(x_i - x_i^1)}{|x - x_1|}.$$

Pela definição do p-Laplaciano, isto é, $\Delta_p v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla v|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$,
vamos encontrar a seguinte expressão :

$$\nabla \tilde{u} = \frac{-k_1 v_1 e^{k_1 (R - |x - x_1|)}}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1} . \frac{(x_1 - x_1^1, ..., x_n - x_n^1)}{|x - x_1|}.$$

Assim,

$$|\nabla \tilde{u}|^{p-2} = \left| \frac{-k_1 v_1 e^{k_1 (R - |x - x_1|)}}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1} \right|^{p-2} . \left| \frac{(x_1 - x_1^1, ..., x_n - x_n^1)}{|x - x_1|} \right|^{p-2}.$$

Segue que

$$\Delta_p \tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{k_1 v_1 e^{k_1 (R - |x - x_1|)}}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1} \right|^{p-2} . \frac{-k_1 v_1 e^{k_1 (R - |x - x_1|)}}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1} . \frac{(x_i - x_i^1)}{|x - x_1|} \right).$$

Denotamos, para simplificar,

$$A = \left| \frac{k_1 v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1} \right|^{p-2} . \frac{-k_1 v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1}.$$

Portanto, encontramos a expressão

$$\Delta_p \tilde{u} = A \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e^{k_1 (R - |x - x_1|)(p-1)} \frac{(x_i - x_i^1)}{|x - x_1|} \right),$$

e reescrevendo esta expressão,

$$\begin{aligned}
\Delta_p \tilde{u} &= A \sum_{i=1}^{n} \left\{ e^{k_1 (R - |x - x_1|)(p-1))} . (-k_1)(p-1) . \frac{x_i - x_i^1}{|x - x_1|} . \frac{(x_i - x_i^1)}{|x - x_1|} \right\} \\
&+ A \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{k_1 (R - |x - x_1|)(p-1)}}{|x - x_1|^2} \left(1. \, |x - x_1| - (x_i - x_i^1) . \frac{(x_i - x_i^1}{|x - x_1|} \right) \\
&= A \left\{ \frac{-k_1 (p-1) e^{k_1 (R - |x - x_1|)(p-1)}}{|x - x_1|^2} . \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^1)^2 \right\} \\
&+ A \left\{ \frac{e^{k_1 (R - |x - x_1|)(p-1)}}{|x - x_1|^2} . \left(|x - x_1| . n - \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^1)^2}{|x - x_1|} \right) \right\} \\
&= A e^{k_1 (R - |x - x_1|)(p-1)} \left\{ (-k_1 (p-1) + \frac{n}{|x - x_1|} - \frac{1}{|x - x_1|} \right\} \\
&= A e^{k_1 (R - |x - x_1|)(p-1)} \left\{ (-k_1)(p-1) + \frac{n-1}{|x - x_1|} \right\}.
\end{aligned}$$

Agora, observe que temos $v^{'} > 0$ e $v^{'}(0) > 0$, pois

$$v^{'} = \frac{k_1 v_1 e^{k_1(R-|x-x_1|)}}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1}$$

e

$$v^{'}(0) = \frac{k_1 v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1} > 0.$$

Por outro lado,

$$\left|v^{'}\right|^{p-2} = \left|\frac{k_1 v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1}\right|^{p-2} e^{k_1(R-|x-x_1|)(p-2)},$$

$$\left|v^{'}\right|^{p-2} v^{'} = \left|\frac{k_1 v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1}\right|^{p-2} e^{k_1(R-|x-x_1|)(p-2)} \frac{k_1 v_1 e^{k_1(R-|x-x_1|)}}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1}.$$

Então,

$$-\Delta_p \tilde{u} = \left\{\frac{n-1}{|x-x_1|} - (p-1)k_1\right\} \left|v^{'}\right|^{p-2} v^{'}.$$

Afirmamos que $-\Delta_p \tilde{u} \leq 0$ sobre G, para k_1 suficientemente grande. De fato, temos

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{n-1}{|x-x_1|} - (p-1)k_1\right\} \left|v^{'}\right|^{p-2} \\
= &\left\{\frac{n-1}{|x-x_1|} - (p-1)k_1\right\} \left(\frac{k_1 v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1}\right)^{p-2} e^{k_1(R-|x-x_1|)(p-2)} \\
= &\left\{\frac{n-1}{|x-x_1|} k_1^{p-2} - (p-1)k_1^{p-1}\right\} \left(\frac{v_1}{e^{k_1 \frac{R}{2}} - 1}\right)^{p-2} e^{k_1(R-|x-x_1|)(p-2)}.
\end{aligned}$$

Em G, $e^{R-|x-x_1|} < e^{\frac{R}{2}}$, pois se $\frac{R}{2} < |x-x_1| < R$ então $\frac{R}{2} > R - |x-x_1| > 0$.

Assim,

$$\left\{\frac{n-1}{|x-x_1|}-(p-1)k_1\right\}\left|v^{'}\right|^{p-2}v^{'} \leq \left\{\frac{n-1}{|x-x_1|}.k_1^{p-2}-(p-1)k_1^{p-1}\right\}\left\{\frac{v_1 e^{k_1\frac{R}{2}}}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1}\right\}^{p-2} v^{'}$$

Fazendo $k_1 \to \infty$, a afirmação segue.
Por construção, podemos usar o Princípio de Comparação Fraco [18], pag.81, visto que temos
$-\Delta_p \tilde{u} \leq 0 \leq -\Delta_p u$ q.t.p $x \in \Omega$ e, ainda, $\tilde{u} \leq u$ na ∂G, pois basta ver na fronteira de G com $v_1 \leq \max\left\{u(x) : |x-x_1| = \frac{R}{2}\right\}$ que

$$\tilde{u} = \begin{cases} \frac{e^{k_1\frac{R}{2}}v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1} - \frac{v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1}, & |x-x_1| = \frac{R}{2} \\ \\ 0 & , \ |x-x_1| = R\ . \end{cases}$$

Portanto, construimos uma $\tilde{u}$ tal que $\tilde{u} \leq u$ em G. Para finalizar a demonstração, tomamos $h < 1, R = |x_1 - x_0| > 0$. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_0 + h(x_1 - x_0)) &= \frac{v_1 e^{k_1(R-|x_0+h(x_1-x_0)-x_1|)}}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1} - \frac{v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1} \\ &= \frac{v_1 e^{k_1(R-(1-h)|x_0-x_1|)} - v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1} \\ &= \frac{v_1 e^{k_1 hR} - v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1}\ . \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $h \to 0$ e aplicando L'Hospital,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tilde{u}(x_0+h(x_1-x_0))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{v_1(e^{k_1Rh}-1)}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1} = \lim_{h\to 0}\frac{k_1Re^{k_1Rh}v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1} = R.\frac{k_1v_1}{e^{k_1\frac{R}{2}}-1}\ .$$

Como $\tilde{u}(x_0) = u(x_0) = 0$ e $u \geq \tilde{u}$ sobre G, temos

$$
\begin{aligned}
\nabla u(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0 + h(x_1 - x_0)) - u(x_0)}{h} \quad &= \quad \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0 + h(x_1 - x_0)}{h} \\
&\geq \quad \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{u}(x_0 + h(x_1 - x_0))}{h} = v^{'}(0)R > 0 \ .
\end{aligned}
$$

Assim, se $u \not\equiv 0$ temos uma contradição, pois $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u \geq 0$ q.t.p $x \in \Omega$ e $u(x_0) = 0$. Concluímos, portanto, que se $u \not\equiv 0$, então $u > 0$ em Ω. ■

Capítulo 4

Uma classe de sistemas elípticos envolvendo o operador p-Laplaciano em domínio não-limitado

4.1 Notações e hipóteses

Como vimos na Introdução, vamos trabalhar neste capítulo com um sistema que envolve o operador p-Laplaciano num domínio não-limitado. Assim, mostraremos um pouco da diferença de se trabalhar com um domínio limitado, como nos capítulos 1 e 2, e um domínio não-limitado em uma classe de sistemas elípticos quasilineares. Estudaremos um sistema variacional em $\mathbb{R}^N$ da forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta_p u + a(x)\,|u|^{p-2} & = & F_u(x,u,v), \;\; x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v + b(x)\,|v|^{q-2} & = & F_v(x,u,v), \;\; x \in \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \tag{$\mathbb{D}$}$$

onde $1 < p, q < N$; $a, b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo $a(x) \geq a_0 > 0, b(x) \geq b_0 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$ e coercivas, isto é, $\lim_{|x|\to\infty} a(x) = \lim_{|x|\to\infty} b(x) = \infty$.

Os potenciais não-lineares $F_u, F_v : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são também contínuos e satisfazem $F(x,0,0) = F_u(x,0,0) = F_v(x,0,0) = 0$, assim, $(u,v) = (0,0)$ é solução trivial de $(\mathbb{D})$. Queremos encontrar soluções não-triviais.

Iremos considerar a situação variacional na qual $(F_u, F_v) = \nabla F$ para $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Antes de prosseguirmos com nosso problema, vamos mencionar alguns trabalhos sobre problemas não-lineares que nos motivaram a resolver o problema $(\mathbb{D})$ acima: Ali Djellit e Saadia Tas [12] investigaram a existência de uma solução não-trivial para o sistema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \dfrac{\partial F}{\partial u}(x,u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ \\ -\Delta_q v &= \dfrac{\partial F}{\partial v}(x,u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

sob hipóteses de não-quadraticidade de F e cruzamento do primeiro autovalor de um problema associado usando a condição de compacidade de Cerami. David G. Costa [8] estudou um sistema variacional em $\mathbb{R}^N$ na forma

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u &= F_u(x,u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v + b(x)v &= F_v(x,u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde as funções $a, b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são contínuas e coercivas. Sob apropriadas condições de crescimento e regularidade da não-linearidade de F_u, F_v, as soluções fracas são precisamente os pontos críticos referentes a um funcional definido no espaço de Hilbert das funções $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

4.2 Existência de solução não-trivial

No nosso resultado principal, vamos mostrar a existência de uma solução fraca não trivial para o sistema $(\mathbb{D})$ verificando que o funcional associado satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha com a condição de compacidade de Palais- Smale.

Daqui por diante, consideramos as seguintes definições:
(i) O subespaço $E_{p,q} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, definido por

$$E_{p,q} = \left\{ (u,v) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times W^{1,q}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)\,|u|^p + |\nabla v|^q + b(x)\,|v|^q \right) dx < \infty \right\}$$

com $1 < p, q < N$.

(ii) A norma associada ao funcional Φ definida por :

$$\|(u,v)\|_{E_{p,q}} = \|u\|_{E_p}^p + \|v\|_{E_q}^q \,,$$

onde

$$\|u\|_{E_p}^p = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)\,|u|^p\right) dx$$

e

$$\|v\|_{E_q}^q = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^q + b(x)\,|v|^q\right) dx.$$

(iii) O espaço $E_{p,q}$ com a norma definida em (ii) é um espaço de Banach, reflexivo [2], pela hipótese (A_0).

Voltando nossa atenção apenas para as funções a, b, de acordo com as hipóteses exigidas para estas duas funções, obteremos fatos interessantes: considere

$$\mu_{p,q}^{r,s}(a,b) = \inf\left\{\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + a(x)\,|u|^p + |\nabla v|^q + b(x)\,|v|^q\right) dx; \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^r + |v|^s\right) dx = 1\right\},$$

$\forall\ (u,v) \in E_{p,q}$ onde $p \leq r \leq p^*, q \leq s \leq q^*$ e, ainda,
$p^* = \frac{pN}{N-p}, 1 < p < N$, $q^* = \frac{qN}{N-q}, 1 < q < N$.

Note que , se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular e limitado temos

$$\mu_{2,0}^{2,0}(0,0) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx; u \in H^1(\Omega), \int_\Omega |u|^2\,dx = 1\right\} = \lambda_1(\Omega),$$

onde $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do problema :

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \quad \Omega \\ \quad u &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Daí, $\mu_{p,q}^{r,s}(a,b)$ pode ser interpretado como uma generalização natural do primeiro autovalor do Laplaciano.

Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, $1 < p, q < N$, temos

$$\mu_{p,0}^{p^*,0}(0,0) = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx; \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} = 1, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right\} = A$$

onde A é a melhor constante de Sobolev para a imersão

$$A\left\|u\right\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \left\|\nabla u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Para p, q definidos no início , temos que

$$0 < \mu^{r,s}_{p,q}(a,b) \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u\right|^p + a(x)\left|u\right|^p + \left|\nabla v\right|^q + b(x)\left|v\right|^q\right) dx}{\left\|u\right\|^p_{L^r(\mathbb{R}^N)} + \left\|v\right\|^q_{L^s(\mathbb{R}^N)}}$$

$\forall (u,v) \neq (0,0)$ em $E_{p,q}$. De fato, $\forall (u,v) \in E_{p,q}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla u\right|^p + a(x)\left|u\right|^p + \left|\nabla v\right|^q + b(x)\left|v\right|^q\right) dx &\geq min\left\{1, a_0, b_0\right\}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla u\right|^p + \left|u\right|^p\right) dx\right\} \\ &+ min\left\{1, a_0, b_0\right\}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla v\right|^q + \left|v\right|^q\right) dx\right\} \\ &= m_0\left\{\left\|u\right\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \left\|v\right\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^N)}\right\}.\end{aligned}$$

Por outro lado, dado r tal que $p \leq r \leq p^*$, existe $C_r > 0$ tal que $\left\|u\right\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq C_r\left\|u\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$, e também, dado s tal que $q \leq s \leq q^*$, existe $C_s > 0$ tal que $\left\|v\right\|_{L^s(\mathbb{R}^N)} \leq C_s\left\|v\right\|_{W^{1,q}(\mathbb{R}^N)}$.

Então,

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\nabla u\right|^p + a(x)\left|u\right|^p + \left|\nabla v\right|^q + b(x)\left|v\right|^q\right) dx &\geq m_0\left\{\left\|u\right\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \left\|v\right\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^N)}\right\} \\ &\geq m_0\left\{C_r^{-p}\left\|u\right\|^p_{L^r(\mathbb{R}^N)} + C_s^{-q}\left\|v\right\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^N)}\right\} \\ &\geq min\left\{\tfrac{m_0}{C_r^p}, \tfrac{m_0}{C_s^q}\right\}\left\{\left\|u\right\|^p_{L^r(\mathbb{R}^N)} + \left\|v\right\|^q_{L^s(\mathbb{R}^N)}\right\}.\end{aligned}$$

Assim, tomando o ínfimo com (u,v) tais que $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v|^q\,dx = 1$, obtemos

$$\mu_{p,q}^{r,s}(a,b) \geq min\left\{\frac{m_0}{C_s^p}, \frac{m_0}{C_s^q}\right\} > 0.$$

Provaremos agora alguns resultados, com a finalidade de mostrar que o funcional Φ definido em (4.1), satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha. Começaremos com um resultado de imersões compactas, a saber:

Proposição 4.1 : *Suponha que as hipóteses* $(A_0), (A_1)$ *são satisfeitas. Então a imersão*

$$E_{p,q} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

é compacta.

Demonstração : Sem perda de generalidade, queremos mostrar que se $(u_n, v_n) \rightharpoonup (0,0)$ em $E_{p,q}$, então $(u_n, v_n) \to (0,0)$ em $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Como $\{(u_n, v_n)\}$ converge fracamente então é uma seqüência limitada.

Considere a constante positiva C tal que $\|(u_n, v_n)\|_{E_{p,q}} \leq C$, isto é, $\|(u_n, v_n)\|_{E_{p,q}} = \|u_n\|_{E_p}^p + \|v_n\|_{E_q}^q \leq C$. Dado $\epsilon > 0$, fixe $R > 0$ tal que

$$a(x) \geq \frac{2C}{\epsilon} > 0 \text{ e } b(x) \geq \frac{2C}{\epsilon} > 0, \text{ para todo } |x| \geq R.$$

Defina, também, o operador restrição Γ;

$$\begin{array}{rcll} \Gamma & : & W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \times W^{1,q}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) & \longrightarrow & W^{1,p}(B_R, \mathbb{R}) \times W^{1,q}(B_R, \mathbb{R}) \\ & & (u,v) & \longrightarrow & \Gamma(u,v) = (u,v). \end{array}$$

onde B_R denota uma bola de raio R e centro na origem em $\mathbb{R}^N$. Como o operador restrição Γ é contínuo, temos que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (0,0)$ em $W^{1,p}(B_R, \mathbb{R}) \times W^{1,q}(B_R, \mathbb{R}) = E(B_R)$. Pelo fato das imersões compactas

$$W^{1,p}(B_R, \mathbb{R}) \times W^{1,q}(B_R, \mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(B_R, \mathbb{R}) \times L^q(B_R, \mathbb{R}),$$

pois B_R é um domínio limitado, segue que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos

$$\int_{B_R} |u_n|^p\,dx = \|u_n\|_{L^p(B_R)}^p < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$\int_{B_R} |v_n|^q \, dx = \|v_n\|^q_{L^q(B_R)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, pela escolha de R e da condição (A_0),

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\epsilon}\int_{B_R^C} |u_n|^p \, dx &\leq \frac{2}{\epsilon}\int_{B_R^C} \frac{\epsilon a(x)}{2C} |u_n|^p \, dx = \frac{1}{C}\int_{B_R^C} a(x)\, |u_n|^p \, dx \\
&\leq \frac{1}{C}\int_{B_R^C} (|\nabla u_n|^p + a(x)\,|u_n|^p)\, dx = \frac{1}{C}\,\|u_n\|^p_{E_p} \leq 1
\end{aligned}$$

e, também,

$$\frac{2}{\epsilon}\int_{B_R^C} |v_n|^q \, dx \leq \frac{1}{C}\,\|v_n\|^q_{E_q} \leq 1.$$

Logo,

$$\int_{B_R^C} |u_n|^p \, dx \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \int_A |v_n|^q \, dx \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \, dx = \int_{B_R} |u_n|^p \, dx + \int_{B_R^c} |u_n|^p \, dx$$

então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \, dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente para $\{v_n\}$. Finalmente, usando a norma da soma,

$$\|(u_n, v_n) - (0,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)\times L^q(\mathbb{R}^N)} = \|u_n - 0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|v_n - 0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} < 2\epsilon$$

e o resultado da convergência forte segue. ■

Proposição 4.2 : *Suponha que as hipóteses $(A_0), (A_1)$ e (F_1) são satisfeitas. Então a aplicação $N' : E_{p,q} \to E'_{p,q}$ é compacta com $N(u,v) := \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,v)dx$.*

Demonstração : o objetivo é mostrar que dada uma seqüência $\{(u_n, v_n)\} \subset E_{p,q}$ limitada, a menos de subseqüência, $N^{'}(u_n, v_n) \rightarrow N^{'}(u, v)$ fortemente em $E^{'}_{p,q}$.

Note que , pela definição de norma,

$$\begin{aligned} \left\| N^{'}(u_n, v_n) - N^{'}(u, v) \right\| &= \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left| (N^{'}(u_n, v_n) - N^{'}(u, v))(\varphi, \psi) \right| \\ &\leq \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(F_u(x, u_n, v_n) - F_u(x, u, v) \right) \varphi dx \right| \\ &+ \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(F_v(x, u_n, v_n) - F_v(x, u, v) \right) \psi dx \right|. \end{aligned}$$

É suficiente mostrar que esta última soma à direita da desigualdade converge para zero, quando $n \rightarrow \infty$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $R > 0$ suficientemente grande a ser escolhido posteriormente. Sendo $E_{p,q}$ espaço de Banach reflexivo, podemos assumir que

$$\begin{cases} (u_n, v_n) & \rightharpoonup \quad (u, v) \;\text{ em }\; E_{p,q} \\ \\ (u_n(x), v_n(x)) & \rightarrow \quad (u(x), v(x)) \;\text{ q.t.p } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Objetivando verificar que, $\forall\ (\varphi, \psi) \in E_{p,q}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_u(x, u_n, v_n)\varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} F_u(x, u, v)\varphi dx, \;\; n \rightarrow \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_v(x, u_n, v_n)\psi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} F_v(x, u, v)\psi dx, \;\; n \rightarrow \infty,$$

iremos apenas verificar a primeira convergência, pois a outra segue analogamente.

Pela Proposição 4.1, temos a imersão compacta $E_{p,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$(u_n, v_n) \rightarrow (u, v) \;\text{ em }\; L^p(\mathbb{R}^N) \times L^q(\mathbb{R}^N).$$

Por hipótese, $F_u(x, u_n, v_n)$ é contínua em $(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Segue que

$$F_u(x, u_n(x), v_n(x)) \rightarrow F_u(x, u(x), v(x)) \;\text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Então,

$$f_n(x) := F_u(x, u_n(x), v_n(x))\varphi(x) \rightarrow F_u(x, u(x), v(x))\varphi(x) := f(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Definimos

$$g_n := c_1 |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |\varphi| .$$

Observamos que

$$g_n(x) = c_1 |u_n(x)|^{p_1-1} |v_n(x)|^{q_1} |\varphi(x)| \to g(x) = c_1 |u(x)|^{p_1-1} |v(x)|^{q_1} |\varphi(x)| \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e ainda, por (F_1),

$$|f_n| = |F_u(x, u_n, v_n)| \leq c_1 |u_n|^{p_1-1} |v_n|^{q_1} |\varphi| = g_n$$

e pela Proposição 4.1

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Usando o Teorema da Convergencia Dominada de Lebesgue (na versão Apêndice B, [B.5]),

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_v(x, u_n, v_n)\psi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F_v(x, u, v)\psi dx.$$

Assim a proposição fica provada. ∎

Lema 4.3 : *Suponha que as hipóteses* $(A_0), (A_1), (F_1)$ *e* $(F_1)_\mu$ *são satisfeitas. Então o funcional associado ao problema* $(\mathbb{D})$ *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração : Considere o funcional associado ao problema $(\mathbb{D})$ definido por (4.1). Suponha que $|\Phi(u_n, v_n)| \leq C$, $\Phi'(u_n, v_n) \to 0$, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe um n_0 natural tal que $|\Phi(u_n, v_n)| \leq C$ e $\left\|\Phi'(u_n, v_n)\right\| \leq \epsilon, \forall n \geq n_0$.

Assim,$\forall n \geq n_0$,

$$\mu\Phi(u_n, v_n) - \left\langle \Phi'(u_n, v_n), (u_n, v_n) \right\rangle \leq \mu C + \epsilon \|(u_n, v_n)\|_{E_{p,q}} .$$

Por outro lado, sem perda de generalidade, seja $p < q < \mu$. Então, utilizando $(F_0), (F_1)$ e $(F_1)_\mu$

$$\begin{aligned}
& \mu\Phi(u_n,v_n) - \left\langle \Phi^{'}(u_n,v_n),(u_n,v_n)\right\rangle \\
= \ & \mu\left\{\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^p + a(x)\,|u_n|^p\right)dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_n|^q + b(x)\,|v_n|^q\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N}F(x,u_n,v_n)dx\right\} \\
- \ & \left\{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^p + a(x)\,|u_n|^p + |\nabla v_n|^q + b(x)\,|v_n|^q\right)dx - \int_{\mathbb{R}^N}\left(F_u(x,u_n,v_n)u_n + F_v(x,u_n,v_n)v_n\right)dx\right\} \\
= \ & \left(\frac{\mu}{p}-1\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u_n|^p + a(x)\,|u_n|^p\right)dx + \left(\frac{\mu}{q}-1\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_n|^q + b(x)\,|v_n|^q\right)dx \\
+ \ & \int_{\mathbb{R}^N}\left(F_u(x,u_n,v_n)u_n + F_v(x,u_n,v_n)v_n - \mu F(x,u_n,v_n)\right)dx \\
\geq \ & \left(\frac{\mu}{p}-1\right)\|u_n\|_{E_p}^p + \left(\frac{\mu}{q}-1\right)\|v_n\|_{E_q}^q \\
\geq \ & \left(\frac{\mu}{q}-1\right)\left\{\|u_n\|_{E_p}^p + \|v_n\|_{E_q}^q\right\} \\
= \ & \left(\frac{\mu}{q}-1\right)\|(u_n,v_n)\|_{E_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\mu C + \epsilon\,\|(u_n,v_n)\|_{E_{p,q}} &\geq \mu\Phi(u_n,v_n) - \left\langle \Phi^{'}(u_n,v_n),(u_n,v_n)\right\rangle \\
&\geq \left(\frac{\mu}{q}-1\right)\|(u_n,v_n)\|_{E_{p,q}} \ ,
\end{aligned}$$

implicando que a seqüência $\{(u_n,v_n)\}$ é limitada em $E_{p,q}$.

Considere agora a aplicação dualidade D;

$$\begin{array}{rccc}
D\ : & E_{p,q} & \longrightarrow & E^{'}_{p,q} \\
 & (u,v) & \longmapsto & D(u,v)
\end{array}$$

onde $D(u,v) = \langle (u,v),.\rangle_{E_{p,q}} = \Phi^{'}(u,v) + N^{'}(u,v) \quad \in E^{'}_{p,q}$. Novamente, pela monotonicidade do p-Laplaciano em [18], página 80, temos D^{-1} o operador inverso de D, onde D é uma isometria. Aplicando D^{-1} à seqüência (PS), temos

$$(u_n, v_n) = D^{-1}(\Phi'(u_n, v_n)) + D^{-1}(N'(u_n, v_n)).$$

Segue daí que $\{u_n, v_n\}$ possui uma subseqüência convergente, pois por hipótese, $\Phi'(u_n, v_n) \to 0$ e D é uma isometria. De fato, pela Proposição 3.2, N' é operador compacto e vimos acima que a seqüência $\{u_n, v_n\}$ é limitada, assim $N'(u_n, v_n)$ possui uma subseqüência convergente. Conclusão : $\{u_n, v_n\}$ possui uma subseqüência convergente, isto significa que o funcional Φ satisfaz a condição (PS).

Demonstração do Teorema F : É suficiente verificar que o funcional Φ tem a geometria do Passo da Montanha. Segue da condição $(F_1)_\mu$ o seguinte :

(i)$\forall x \in \mathbb{R}^N$ e $|U| \geq 1$, onde $U = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\left| \frac{\nabla F(x, U)}{F(x, U)} \right| \geq \frac{\mu}{|U|}.$$

Integrando de 1 até $|U|$, se $U \geq 1$(ou caso contrário),

$$ln \left| \frac{F(x, U)}{F(x, \pm 1)} \right| \geq ln \, |U|^\mu .$$

Como $F(x, U) > 0$ para todo $U \in \mathbb{R}^2$ e a função logarítmica é crescente,

$$F(x, U) \geq F(x, \pm 1) \, |U|^\mu = \min_{|V|=1} F(x, V) \, |U|^\mu > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, |U| \geq 1.$$

Isto mostra que, dado um conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$ limitado, $\forall x \in B$, como F é de classe C^1, $\exists \bar{c} = \bar{c}(B); F(x, U) \geq \bar{c} \, |U|^\mu$, $\forall x \in B, |U| \geq 1$.

(ii) Considere agora $x \in \mathbb{R}^N$, $0 < |U| \leq 1$. Por $(F_1)_\mu$,

$$\left| \frac{\nabla F(x, U)}{F(x, U)} \right| \geq \frac{\mu}{|U|}.$$

Integrando de $|U|$ até 1, se $0 < |U| \leq 1$,

$$ln \left| \frac{F(x,\pm 1)}{F(x,U)} \right| \geq ln \left(\frac{1}{|U|^{\mu}} \right).$$

Note que , por hipótese, $\mu \geq max\{p,q\} > 1$. Então, $|U|^{\mu} < |U| < 1$. Assim, $\frac{1}{|U|^{\mu}} > 1, U \neq 0$. Temos ainda que $F(x,U) > 0$ e a função logarítmica é crescente, conseqüentemente,

$$\left| \frac{F(x,\pm 1)}{F(x,U)} \right| \geq \frac{1}{|U|^{\mu}}$$

e temos

$$0 \leq F(x,U) \leq \max_{|V|=1} F(x,V) |U|^{\mu}, \forall x \in \mathbb{R}^N,\ 0 < |U| \leq 1.$$

Por (F.1) existe uma constante c_3 tal que $\max_{|V|=1} F(x,V) \leq c_3$. Tome $m = max\{p,q\}$. Segue que $\lim_{|U|\to 0} \frac{F(x,U)}{|U|^m} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $F(x,U) \leq \epsilon |U|^m = \epsilon \left(|u|^2 + |v|^2\right)^{\frac{m}{2}} \leq \epsilon c_4 (|u|^m + |v|^m)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $|U| \leq \delta$. Por outro lado, usando $(F_1), (F_0)$ e a desigualdade de Young

$$\begin{aligned} F(x,u,v) &= \int_0^u F_u(x,s,v)ds + \int_0^v F_v(x,0,s)ds + F(x,0,0) \\ &\leq c_1 \int_0^u |s|^{p_1-1} |v|^{q_1} ds + c_2 \int_0^v |u|^{q_2} |s|^{p_2-1} ds \\ &\leq c_5 \left(|u|^{p_1+q_1} + |v|^{p_1+q_1} + |u|^{p_2+q_2} + |v|^{p_2+q_2}\right),\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Em particular, vale para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $|U| \geq \delta$. Conseqüentemente, juntando essas estimativas obtemos

$$F(x,u,v) \leq \epsilon c_4 (|u|^m + |v|^m) + c_5 \left(|u|^{p_1+q_1} + |v|^{p_1+q_1} + |u|^{p_2+q_2} + |v|^{p_2+q_2}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $U \in \mathbb{R}^2$. Usando a definição de Φ temos

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &= \frac{1}{p} \|u\|_{E_p}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{E_q}^q - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,v)dx \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|_{E_p}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{E_q}^q - \epsilon c_4 \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^m + |v|^m)\, dx \\ &- c_5 \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{p_1+q_1} + |v|^{p_1+q_1} + |u|^{p_2+q_2} + |v|^{p_2+q_2}\right) dx \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|_{E_p}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{E_q}^q - \epsilon c_4 \left(\|u\|_{E_p}^m + \|v\|_{E_q}^m\right) \\ &- c_5 \left(\|u\|_{E_p}^{p_1+q_1} + \|v\|_{E_q}^{p_1+q_1} + \|u\|_{E_p}^{p_2+q_2} + \|v\|_{E_q}^{p_2+q_2}\right). \end{aligned}$$

Isso resulta que, para $\|(u,v)\|_{E_{p,q}} = \rho > 0$ suficientemente pequeno, existe $\alpha = \alpha(\rho) > 0$ tal que

$$\Phi(u,v) \geq \alpha(\rho) > 0.$$

Por outro lado, por (i), $F(x,U) \geq \bar{c}\,|U|^{\mu}\,,\ \forall x \in B, |U| \geq 1$. Fazendo $(u,v) = (tu,tv)$ para $t \in \mathbb{R}$ e usando a definição do funcional Φ segue que

$$\begin{aligned}
\Phi(tu,tv) &\leq t^p\left\{\frac{1}{p}\,\|u\|_{E_p}^p\right\} + t^q\left\{\frac{1}{q}\,\|v\|_{E_q}^q\right\} - t^{\mu}\bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} |U|^{\mu}\,dx \\
&= t^pA + t^qB - t^{\mu}C.
\end{aligned}$$

Finalmente, fazendo $t \to \infty$, como $\mu > \max\{p,q\}$ obtemos que $\Phi(tu,tv) \to -\infty$. Ou seja, existe um $e \in E_{p,q}$ tal que $\Phi(e) < 0$.

Provada a proposição 4.3, isto é, Φ satisfaz a condição (PS) e Φ tem a geometria do passo da montanha, então podemos concluir a existência de uma solução fraca não-trivial para o problema $(\mathbb{D})$ pelo Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.2). $\blacksquare$

Apêndice A

Neste apêndice iremos demonstrar que o funcional Φ é de classe $C^1(E,\mathbb{R})$. Para isto, seja $\Omega \subset R^N$ um domínio limitado e vamos definir Φ da seguinte forma:

$$\Phi : E = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

com a norma $\|.\|_E$ da soma, isto é, $\|(u,v)\|_E = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}$ onde

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla v|^q \, dx - \int_\Omega F(x,u,v)dx$$

com $p, q \in \mathbb{R}$ e maiores que 1, sob a seguinte condição:

$$|F(x,u,v)| \leq A(1 + |u|^{p^*} + |v|^{q^*}), \qquad (F.1)$$

e

$$\begin{cases} |F_u(x,u,v)| & \leq & C\left(1 + |u|^{p^*-1} + |v|^{\frac{q^*(p^*-1)}{p^*}}\right) \\ |F_v(x,u,v)| & \leq & C\left(1 + |v|^{q^*-1} + |u|^{\frac{p^*(q^*-1)}{q^*}}\right) \end{cases} \qquad (F.2)$$

onde A e C são constantes positivas.

Assumindo que p e q são ambos números reais maiores que 1, podemos utilizar o Teorema de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (ver Apêndice B, [B.1]) e obter a existência de uma constante $B = B(p,N)$;

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq B \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Sendo Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, considere

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x), se & x \in \Omega \\ 0, se & x \notin \Omega \end{cases}$$

o prolongamento canônico por zero de u onde $\|\hat{u}\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$.

Consequentemente,

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} = \|\hat{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq B(p,N) \|\nabla \hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = B(p,N) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} ,$$

isto é, a desigualdade de Sobolev-Gagliardo-Niremberg é válida em $W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado.

Vamos, agora, mostrar que $|\Phi(u,v)|$ é finito, $\forall (u,v) \in E$.
De fato, usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
|\Phi(u,v)| &= \left| \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |\nabla v|^q \, dx - \int_\Omega F(x,u,v) \right| \\
&\leq \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |\nabla v|^q \, dx + \int_\Omega |F(x,u,v)| \\
&= \frac{1}{p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{q} \|\nabla v\|_{L^q(\Omega)}^q + \int_\Omega |F(x,u,v)| \\
&= \frac{1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q + \int_\Omega |F(x,u,v)| \, .
\end{aligned}$$

Pela condição $(F.1)$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |F(x,u,v)| &\leq A \int_\Omega (1 + |u|^{p^*} + |v|^{q^*}) \\
&= A \left\{ |\Omega| + \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*} + \|v\|_{L^{q^*}(\Omega)}^{q^*} \right\} \\
&\leq A \left\{ |\Omega| + B^{p^*} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p^*} + D^{q^*} \|\nabla v\|_{L^q(\Omega)}^{q^*} \right\} .
\end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$|\Phi(u,v)| \leq \frac{1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}^q + A \left\{ |\Omega| + B^{p^*} \|u\|_{w_0^{1,p}(\Omega)}^{p^*} + D^{q^*} \|v\|_{w_0^{1,q}(\Omega)}^{q^*} \right\} .$$

Portanto, Φ está bem definido.

Para mostrar que Φ é um funcional de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ e vale

$$\Phi'(u,v)(\varphi,\psi) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi dx - \int_\Omega \left(F_u(x,u,v)\varphi + F_v(x,u,v)\psi \right) dx,$$

é suficiente mostrar que, [20], para todo $(u,v) \in E$, tem-se $\Phi'(u,v) : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi'(u,v)(\varphi,\psi) = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(u + t\varphi, v + t\psi) - \Phi(u,v)}{t},$$

satisfaz $\Phi^{'} \in C(E, E^{'})$.

Vamos mostrar a existência de $\Phi^{'}(u,v)$: temos

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(u+t\varphi, v+t\psi)-\Phi(u,v)}{t} &= \frac{1}{p}\int_\Omega \left(\frac{|\nabla u+t\nabla\varphi|^p-|\nabla u|^p}{t}\right)dx \\
&+ \frac{1}{q}\int_\Omega \left(\frac{|\nabla v+t\nabla\psi|^q-|\nabla v|^q}{t}\right)dx \\
&- \int_\Omega \left(\frac{F(x,u+t\varphi,v+t\psi)-F(x,u,v)}{t}\right)dx
\end{aligned}$$

Defina $h_1(t) := |\nabla u + t\nabla\varphi|^p$. Observe que

$$h_1(t) = |\nabla u+t\nabla\varphi|^p = \left[|\nabla u+t\nabla\varphi|^2\right]^{\frac{p}{2}} = [(\nabla u+t\nabla\varphi).(\nabla u+t\nabla\varphi)]^{\frac{p}{2}}.$$

Daí, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h_1^{'}(t) &= \frac{p}{2}\left[(\nabla u+t\nabla\varphi).(\nabla u+t\nabla\varphi)\right]^{\frac{p-2}{2}}\left[\nabla\varphi.(\nabla u+t\nabla\varphi)+(\nabla u+t\nabla\varphi).\nabla\varphi\right] \text{ ou} \\
h_1^{'}(t) &= \frac{p}{2}\left[|\nabla u+t\nabla\varphi|^2\right]^{\frac{p-2}{2}} 2\nabla\varphi(\nabla u+t\nabla\varphi) \text{ ou} \\
h_1^{'}(t) &= p|\nabla u+t\nabla\varphi|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + p|\nabla u+t\nabla\varphi|^{p-2}t|\nabla\varphi|^2.
\end{aligned}$$

Analogamente obteremos um resultado semelhante trocando p por q e φ por ψ para $h_2(t)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(u+t\varphi, v+t\psi)-\Phi(u,v)}{t} &= \frac{1}{p}\int_\Omega h_1^{'}(t)dx + \frac{1}{q}\int_\Omega h_2^{'}(t)dx \\
&- \int_\Omega \left(\frac{F(x,u+t\varphi,v+t\psi)-F(x,u,v)}{t}\right)dx.
\end{aligned}$$

Usando o T.V.M, existem constantes $\theta_t, \bar{\theta}_t$ tais que $|\theta_t|, |\bar{\theta}_t| < t$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi(u+t\varphi, v+t\psi)-\Phi(u,v)}{t} &= \frac{1}{p}\int_\Omega h_1^{'}(\theta_t)dx + \frac{1}{q}\int_\Omega h_2^{'}(\bar{\theta}_t)dx \\
&- \int_\Omega \left(\frac{F(x,u+t\varphi,v+t\psi)-F(x,u,v)}{t}\right)dx.
\end{aligned}$$

Usando novamente o T.V.M. para a última integral do segundo membro acima, existem α_t e β_t tal que

$$F(x,u+t\varphi,v+t\psi)-F(x,u,v) = F_u(x,\alpha_t,v+t\psi)t\varphi + F_v(x,u+t\varphi,\beta_t)t\psi,$$

onde α_t está entre $u + t\varphi$ e u e β_t entre $v + t\psi$ e v. Como $\alpha_t(x) \to u(x)$ e $\beta_t(x) \to v(x)$ q.t.p x em Ω, quando $t \to 0$ e sendo F contínua, então

$$F_u(x, \alpha_t, v + t\psi)\varphi \to F_u(x, u, v)\varphi, \text{ q.t.p } x \in \Omega$$

e

$$F_v(x, u + t\varphi, \beta_t)\psi \to F_v(x, u, v)\psi \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Pela condição (F.2) e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\Phi'(u, v)(\varphi, \psi) &= \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(u + t\varphi, v + t\psi) - \Phi(u, v)}{t} \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi dx \\
&- \int_\Omega \left(F_u(x, u, v)\varphi + F_v(x, u, v)\psi\right) dx.
\end{aligned}$$

É fácil ver que $\Phi'(u, v)$ é linear. Falta mostrar que é contínuo no espaço E. De fato, seja uma seqüência $\{(u_n, v_n)\}$ em E, tal que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em E. Precisamos verificar que toda subseqüência de $\Phi'(u_n, v_n)$, ainda usando esta notação para suas subseqüências, possui subseqüência convergente para $\Phi'(u, v)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi'(u_n, v_n) - \Phi'(u, v)\right\| &= \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left|\left(\Phi'(u_n, v_n) - \Phi'(u, v)\right)(\varphi, \psi)\right| && (4.1) \\
&\leq \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left|\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \nabla \varphi dx\right| && (4.2) \\
&+ \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left|\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^{q-2} \nabla v_n - |\nabla v|^{q-2} \nabla v\right) \nabla \psi dx\right| && (4.3) \\
&+ \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left|\int_\Omega \left(F_u(x, u_n, v_n) - F_u(x, u, v)\right) \varphi dx\right| && (4.4) \\
&+ \sup_{\|(\varphi,\psi)\| \leq 1} \left|\int_\Omega \left(F_v(x, u_n, v_n) - F_v(x, u, v)\right) \psi dx\right| && (4.5)
\end{aligned}$$

Considere $\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
f_n : \; L^p(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\nabla \varphi &\longmapsto \langle f_n, \nabla \varphi \rangle = \textstyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n . \nabla \varphi.
\end{aligned}$$

Note que, f_n está bem definida, pois

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, \nabla\varphi\rangle| &\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-1} |\nabla\varphi| \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Precisamos verificar que $\langle f_n, \nabla\varphi\rangle \longrightarrow \langle f, \nabla\varphi\rangle, \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, isto é, $f_n \rightharpoonup f$ em $(L^p(\Omega))'$. Para isto, é necessário e suficiente provar que $\|f_n\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq M$. De fato, $\|f_n\|_{L^{p'}(\Omega)} = \left\||\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n\right\|_{L^{p'}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^{(p-2)q} |\nabla u_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} = \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \leq M$, pois $u_n \longrightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, as integrais em (4.2) e (4.3) convergem a zero.

Por outro lado, se $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em E, então $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$ e $v_n \to v$ em $L^q(\Omega)$. Assim, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. x em Ω e $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p x em Ω. Ainda usando o fato de F ser contínua, temos

$$|F_u(x, u_n, v_n) - F_u(x, u, v)| |\varphi| \to 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega$$

e

$$|F_v(x, u_n, v_n) - F_v(x, u, v)| |\psi| \to 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Usando novamente a condição (F.2), as desigualdades de Hölder e Sobolev-Gagliardo-Niremberg, e ainda $\|u_n\|, \|v_n\|$ são limitadas, pois são convergentes, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que os dois últimos termos (4.4), (4.5) convergem a zero.

Conclusão : $\left\|\Phi'(u_n, v_n) - \Phi(u, v)\right\| \to 0$ em E', donde segue a continuidade de Φ' em (u, v). ∎

Apêndice B

Neste apêndice iremos reunir os Teoremas principais que utilizaremos em nosso trabalho.

B.1 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg [S-G-N]) : Se $1 \leq p < N$, então

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$, e além disto, existe uma constante $C = C(p, N)$;

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

B.2 (Desigualdade de Poincaré) : Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$. Então existe uma constante $C = C(p, \Omega)$ tal que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

B.3 (cf.Brezis [23],pg. 58) : Seja (f_n) uma seqüência em L^p e $f \in L^p$;
$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Então existe uma subseqüência (f_{n_k}) de (f_n) onde
(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p. $x \in \Omega$;
(ii)$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ e p.p $x \in \Omega$, com $h \in L^p(\Omega)$.

B.4(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) [T.C.D.L] : Seja f_n uma seqüência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponha que
(i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p. $x \in \Omega$
(ii)$\exists g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

B.5(Versão do T.C.D.L.): Sejam $(f_n), (g_n)$ seqüências de funções em $L^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $f_n \to f$ e $g_n \to g$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Suponha que $|f_n| \leq g_n$ q.s. em $\mathbb{R}^N$ e que

$\lim \|g_n - g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0$. Então $\lim \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0$ e $|f| \leq |g|$ q.s. em $\mathbb{R}^N$.

B.6 (Lema de Fatou) : Seja (f_n) uma seqüência de funções em $L^1(\Omega)$;

(1) para cada $n, f_n(x) \geq 0$ p.p. $x \in \Omega$,

(2)$\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$. Para cada $x \in \Omega$, seja $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Então,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \int_\Omega f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n.$$

B.7 (cf. Brezis [23],pag.35) : Seja (x_n) uma seqüência de um espaço de Banach E. Se $x_n \rightharpoonup x$ na topologia fraca $\Lambda(E, E^{'})$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.

B.8 (cf.Adams [24],pag.25): Seja $\int_\Omega 1dx < \infty$ e $1 \leq r \leq p < \infty$. Se $u \in L^p(\Omega)$, então $u \in L^r(\Omega)$ e $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

B.9 (Desigualdade de Hölder) : Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p^{'}}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e $\int_\Omega |f.g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$.

B.10 (Multiplicadores de Lagrange em Espaços de Banach) : Suponha que F e G são funcionais de Classe C^1 no espaço de Banach X, $G(x_0) = 0$ e X_0 é um extremo local de F quando restrito à $\Im = \{x \in X : G(x) = 0\}$.Então,

(a) $G^{'}(x_0)y = 0, \forall y \in X$ ou

(b) $\exists \mu \in \mathbb{R} : F^{'}(x_0)y = \mu G^{'}(x_0)y, \forall y \in X$.

B.11 (Bartle [4], pag.45) : Suponha para algum $t_0 \in [a, b]$, $f(x, t_0) = \lim_{t\to t_0} f(x, t)$ para cada $x \in X$ e que existe uma função integrável $g \in X$ tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$. Então,

$$\int_\Omega f(x, t_0)d\mu(x) = \lim_{t\to t_0} \int_\Omega f(x, t)d\mu(x).$$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A.; Sobolev Spaces, $1^{\underline{a}}$ ed. Canada; 1975.

[2] ALVES, CLAUDIONOR O.; Existência de solução positiva de equações elípticas não lineares em $\mathbb{R}^N$. Tese de Doutorado;1996- UnB.

[3] ANANE, A.; Etude des valeurs propes et de la résonance pour l'opérateur p-Laplacien. Th. Doct., Université Libre de Bruxelles; 1987.

[4] BARTLE, R.G.; The elements of integration. New York-London-Sydney.1966.

[5] BARTOLO, P.; BENCI, V.; FORTUNATO, D.; Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity. Nonlinear Anal. TMA 7 (1983), 981-1012.

[6] BOCCARDO, L.; FLECKINGER, J.; THÉLIN, F.; Elliptic systems with various growths, preprint.

[7] BREZIS, H.; Analyse Fonctionnelle: Theórie et Apllications. Mason;1987.

[8] COSTA, D.G.; On a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^N$. EJDF 07(1994),1-14.

[9] COSTA, D.G.; MAGALHÃES, C.A.; Variational elliptic problems which are non-quadratic at infinity. Nonl. Anal. TMA 23 (1994), 1401-1412.

[10] COSTA, D.G., MAGALHÃES, C.A.; A variational approach to non-cooperative elliptic systems. Nonl. Anal. TMA 25 (1995), 699-715.

[11] DIBENEDETO, E.; $C^{1+\alpha}$ Local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. Nonl. Anal. TMA 8 (1983), 827-850.

[12] DJELLI, A., TAS, SAADIA; Existence of solutions for a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^N$ involving the p-Laplacian. EJDF 2003 (2003), 1-8.

[13] FELMER, P., MANÁSEVICH, R. F.; THÉLIN, F.; Existence and uniquess of positive solutions for certain quasilinear elliptic systems. Comm. Part. Dif. Eq. 17 (1992), 2013-2029.

[14] FIGUEIREDO, D. G., BOCCARDO, L.; Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations. Nonl. Dif. Eq. Appl. 9 (2002), 309-323.

[15] FURTADO, M. F.; MAIA, L.A.; SILVA,E.A.B.; Solutions for a resonant elliptic system with coupling in $\mathbb{R}^N$. Comm. Partial Diff. Eq. 27 (2002), Nº 7-8, 1515-1536.

[16] MELO, A. L.; Existência multiplicidade regularidade e simetria de soluções de equações elípticas quasilineares. Tese de Doutorado, 2000. UnB.

[17] Ó, J. M.; Solutions to perturbed eigenvalue problems of the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$. EJDE 1997 (1997), 1-15.

[18] PERAL, I.; Multiplicity of solutions for the p-laplacian. Second School on Nonlinear Funtional Analysis and Applications to Differential Equations, 21 April-9 May, Trieste-Italy, 1997.

[19] RABINOWITZ, P. H.; Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. 1º ed. Providence, R.I: AMS;1986. Regional Conf. Ser. in Math.(65).

[20] SHAWARTZ, J.; Nonl. Anal., Gordon and Breach Science Publisshers, N.Y. (1969)

[21] STRUWE, M.;Variational methods, Appl. to Nonl. Part. Dif. Eq. and Hamiltonian systems. 2º ed., vol.34.

[22] THÉLIN, F.; Première valeur prope d'un systtème elliptique non lineaire .C.R. Acad. Sci., Paris 311 (1990), 603-606.

[23] TOLKSDORF, P.; Refularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. J. Dif. Eq. 51 (1984), 126-150.

[24] VASQUEZ, J.L.; A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations, Appl. Math. and Optization 12 (1984), 191-202.

[25] VÉLIN, J., THÉLIN,F. Existence and non existence of nontrivial solutions for some nonlinear elliptic systems, Rev. Mat. Univ. Compl. Madrid 6 (1993), 153-194.