

PISOS MISTOS AÇO-CONCRETO COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS SOB AÇÃO  
DE CARGAS DE GRAVIDADE: ANÁLISE ESTÁTICA NÃO-LINEAR E  
DINÂMICA, EXPERIMENTAL E NUMÉRICA

Tiago José Limoeiro de Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

---

Prof. Eduardo de Miranda Batista, D.Sc.

---

Prof. Ronaldo Carvalho Battista, Ph.D.

---

Prof. Alexandre Landesmann, D.Sc.

---

Prof. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco, Ph.D.

---

Prof. Gilson Queiroz, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

SETEMBRO DE 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

OLIVEIRA, TIAGO JOSÉ LIMOEIRO DE

Pisos Mistos Aço-concreto com Ligações Semi-rígidas sob Ação de Cargas de Gravidade: Análise Estática Não-linear e Dinâmica, Experimental e Numérica [Rio de Janeiro] 2007

XXXVI, 230 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, 2007)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Pisos mistos
2. Ligações semi-rígidas
3. Análise experimental
4. Análise numérica

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*“Deus de nossos Pais, e Senhor de misericórdia, dai-me a Sabedoria que partilha do vosso trono... Fazei-a, pois, descer de vosso santo céu, e enviai-a do trono de vossa glória. Para que, junto de mim, tome parte em meus trabalhos, e para que eu saiba o que vos agrada.” (Sabedoria 9, 1; 4; 10)*



*A Deus.*

## AGRADECIMENTOS

A minha mãe, que milagrosamente Deus permitiu presenciar este momento, e ao meu pai, que ao lado de minha mãe lutou para que chegasse até aqui.

A minha mulher, pelos vários momentos em que estive ausente para concluir este trabalho e a minha família, em especial aos meus irmãos Lucas e Adriana e tias Tonha, Caçula e Elzinha.

Ao meu orientador acadêmico Eduardo de Miranda Batista, co-autor desta pesquisa e que me ajudou em muitos momentos de forma incondicional.

Ao professor Ronaldo Carvalho Battista que, mesmo não sendo meu orientador, agiu em diversos momentos como se também o fosse.

Aos técnicos do Lab. de Estruturas da COPPE: Ailton, Anísio, Arnaldo, Flávio Sarquis, Manoel, Santiago, Vicente, Zé Maria, Clodoaldo e Flávio e ao soldador Gilmar e seu auxiliar Cláudio, sem os quais os ensaios experimentais não teriam sido realizados.

Aos professores da COPPE Carlos Magluta, Eliane Carvalho, Ibrahim Sheata, Michèle Pfeil, Ney Roitman, Romildo Toledo e Fernando Ribeiro que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Aos amigos e companheiros de mestrado e doutorado mais antigos Adcleides, Cleber, Daniel, Emerson, Fabrício, George e Walber.

Aos amigos Alexandre, Ana, Carlos Cortês, Carlos Rossigali, Cíntia, Eugênia, Gadea, Guilherme, Janine, Jonilson, Luis Alvariño, Marcos, Maurício, Reila, Vivian e Wendel.

A Luzidelle, Sandra, Thelmo, Célio e aos funcionários da secretaria Bete, Jairo, Rita, Raul e Wilma, que sempre me atenderam de forma muito solícita.

Ao engenheiro José Luis Costa Souza, que me iniciou na profissão de engenheiro estrutural. Ao engenheiro Bogdan Dygas e aos antigos colegas da Enpro, que me ensinaram muitos detalhes da profissão. Ao engenheiro e professor Ademir Santos, a quem tenho uma enorme admiração profissional.

À Capes, Codeme Engenharia S/A, Gerdau Açominas, Holcim do Brasil S/A, ICEC– Indústria da Construção, Infraero e à Metform, pelas doações e suporte financeiro.

Enfim, a todos que acreditaram e que de alguma forma contribuíram para a realização deste sonho e que também fazem parte dele, dedico, de todo o coração, esta tese.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

PISOS MISTOS AÇO-CONCRETO COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS SOB AÇÃO  
DE CARGAS DE GRAVIDADE: ANÁLISE ESTÁTICA NÃO-LINEAR E  
DINÂMICA, EXPERIMENTAL E NUMÉRICA

Tiago José Limoeiro de Oliveira

Setembro/2007

Orientador: Eduardo de Miranda Batista

Programa: Engenharia Civil

Nesta tese, são apresentados modelos, ferramentas e uma metodologia apropriada para o projeto avançado de sistemas de pisos mistos aço-concreto semicontínuos com ligações semi-rígidas, envolvendo a verificação dos equilíbrios estático e dinâmico da estrutura e dos estados limites últimos e de serviço. Destaque é conferido à avaliação teórico-experimental do comportamento de uma tipologia de ligação constituída por cantoneiras de assento e alma e armaduras na laje de concreto, testada em laboratório por meio de protótipos cruciformes. Um protótipo de laje mista com ligações semi-rígidas viga-viga em escala real foi também testado experimentalmente a fim de avaliar as características dinâmicas e o mecanismo de colapso plástico deste tipo de estrutura. Adicionalmente, dois programas computacionais foram elaborados para análise de pisos mistos: por meio do programa Grecon, a estrutura do piso é representada como uma grelha não-linear, enquanto que por meio do programa PAEST3D é representada como uma estrutura espacial, onde merece destaque a implementação de um elemento de casca tridimensional que possibilita a consideração da ortotropia geométrica da laje, além da possibilidade de aplicação de um sistema de controle passivo de vibrações. Por fim, os benefícios econômicos e estruturais promovidos pela metodologia de projeto apresentada ficam evidentes em um estudo de caso de uma estrutura real onde é proposta uma nova concepção semicontínua em contrapartida à concepção tradicional do projeto original, sendo aplicados atenuadores dinâmicos de massa para redução e controle de vibrações.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

STEEL TO CONCRETE COMPOSITE FLOORS WITH SEMI-RIGID  
CONNECTIONS: NON-LINEAR STATIC AND DYNAMIC, EXPERIMENTAL  
AND COMPUTATIONAL ANALYSIS

Tiago José Limoeiro de Oliveira

September/2007

Advisor: Eduardo de Miranda Batista

Department: Engenharia Civil

This thesis presents models, tools and an appropriate methodology for the design of partially restrained steel to concrete floor systems, involving the verification of static and dynamic structural equilibrium as well as the structural behaviour under ultimate and service loads. Special attention is addressed to the evaluation of the theoretical and experimental behaviour of a typology of connection constituted by web and seat angles and reinforcement in the concrete slab, tested in laboratory with cruciform specimens. A composite slab with semi-rigid beam-to-girder connections was also tested in order to evaluate the dynamic characteristics and the plastic collapse mechanism of this type of structure. In addition, two softwares were developed for the analysis of composite floors: with the software Grecon, the floor is represented as a non-linear grid, whereas with the software PAEST3D, the floor is represented as a spatial structure with the use of a tridimensional shell element to enable the consideration of the slab orthotropy, besides the application of a passive control system of vibrations. Finally, the economic and structural benefits promoted by the use of the presented methodology become clear through a case study of a real structure where is proposed a new semicontinuous conception instead of the traditional original one, with the application of tuned mass dampers to reduce and control excessive vibrations.

<b>CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO II: MODELO TEÓRICO PARA LIGAÇÕES MISTAS COM CANTONEIRAS.....</b>	<b>7</b>
II.1 REPRESENTAÇÃO FÍSICA.....	7
II.2 REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA.....	8
II.3 O MÉTODO DOS COMPONENTES.....	10
II.4 MODELO PARA LIGAÇÃO MISTA COM CANTONEIRAS.....	11
II.4.1 Fase anterior à cura do concreto .....	11
II.4.1.1 Rigidez inicial .....	12
II.4.1.2 Momento último .....	14
II.4.2 Fase posterior à cura do concreto .....	16
II.4.2.1 Rigidez inicial .....	16
II.4.2.2 Momento último .....	18
II.4.2.3 Capacidade de rotação.....	18
<b>CAPÍTULO III: ANÁLISE EXPERIMENTAL DE LIGAÇÕES MISTAS COM CANTONEIRAS.....</b>	<b>25</b>
III.1 DESCRIÇÃO DOS ESPÉCIMES .....	26
III.2 DESCRIÇÃO DO ENSAIO.....	30
III.3 INSTRUMENTAÇÃO.....	32
III.4 AQUISIÇÃO DOS SINAIS .....	34
III.5 CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS.....	36
III.6 COMPORTAMENTO $M \times \theta$ DAS LIGAÇÕES ENSAIADAS .....	38
<b>CAPÍTULO IV: PROGRAMAS PARA ANÁLISE COMPUTACIONAL DE PISOS MISTOS.....</b>	<b>55</b>
IV.1 FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA ANÁLISE DE GRELHAS MISTAS .....	58
IV.1.1 Matriz de Rigidez .....	58
IV.1.2 Modelo para análise plástica.....	61
IV.1.3 Sistema de equações lineares e matriz de rotação.....	68

IV.1.4	Implementação computacional .....	69
IV.2	FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS ESPACIAIS.	71
IV.2.1	Elemento de pórtico espacial .....	71
IV.2.1.1	Matriz de rigidez.....	71
IV.2.1.2	Matriz de rotação .....	75
IV.2.1.3	Excentricidades nos extremos do elemento de pórtico espacial	77
IV.2.2	Elemento de Casca .....	79
IV.2.2.1	Tópicos sobre o Método dos Elementos Finitos.....	79
IV.2.2.2	Relações de deformação $x$ deslocamento e tensão $x$ deformação em coordenadas cartesianas.....	80
IV.2.2.3	Energia potencial estacionária .....	81
IV.2.2.4	Interpolação .....	84
IV.2.2.5	Matrizes de elemento.....	86
IV.2.2.6	Formulação isoparamétrica .....	88
IV.2.2.7	Elemento de casca geral tridimensional .....	90
IV.2.2.7.1	Sistemas de coordenadas .....	92
IV.2.2.7.2	Geometria e campo de deslocamentos .....	94
IV.2.2.7.3	Campo de deformações e matriz de rigidez .....	97
IV.2.2.7.4	Interpolação mista .....	100
IV.2.2.7.5	Vetor de forças devido às cargas distribuídas .....	108
IV.2.2.7.6	Compatibilização com elementos de pórtico espacial.....	109
IV.2.3	Análise dinâmica .....	111
IV.2.3.1	Conceitos fundamentais.....	112
IV.2.3.2	Sistema com múltiplos graus de liberdade .....	116
IV.2.3.3	Superposição modal.....	118
IV.2.3.4	Matrizes de massa.....	122
IV.2.3.5	Controle passivo de vibrações .....	124
IV.2.4	Implementação computacional .....	130

**CAPÍTULO V: ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE UM PISO MISTO SEMICONTÍNUO..... 135**

V.1	CONCEPÇÃO ESTRUTURAL DO PROTÓTIPO .....	136
V.2	DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO.....	139

V.3	CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS E DAS PROPRIEDADES DOS	
ELEMENTOS	.....	149
V.4	ENSAIOS DINÂMICOS .....	152
V.4.1	Descrição dos ensaios.....	152
V.4.2	Instrumentação e sistema de aquisição de sinais.....	153
V.4.3	Análise dos resultados .....	155
V.5	ENSAIOS ESTÁTICOS .....	166
V.5.1	Descrição dos ensaios e sistema de carga.....	166
V.5.2	Instrumentação e aquisição dos sinais.....	174
V.5.3	Análise dos resultados .....	178
<b>CAPÍTULO VI: ESTUDO DE CASO .....</b>		<b>190</b>
VI.1	DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA .....	191
VI.2	ANÁLISE ESTÁTICA DA NOVA CONCEPÇÃO PROPOSTA.....	193
VI.3	ANÁLISE DINÂMICA DAS CONCEPÇÕES DE PROJETO.....	203
<b>CAPÍTULO VII: CONCLUSÕES .....</b>		<b>219</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>		<b>227</b>

# Índice de Figuras

---

<b>Fig. I-1</b> Concepções convencional (a) e avançada (b) para modelagem de nós estruturais [1]. .....	2
<b>Fig. I-2</b> Ligações mistas: (a) e (b) viga-viga, (c) e (d) viga-pilar.....	3
<b>Fig. I-3</b> Evolução do emprego do aço nas estruturas no Brasil (fonte: site <a href="http://www.cbca-ibs.org.br">www.cbca-ibs.org.br</a> ). .....	5
<b>Fig. II-1</b> Vigas metálicas conectadas à coluna por meio de cantoneiras de assento e topo – representação física de um nó estrutural.....	8
<b>Fig. II-2</b> Curvas momento x rotação segundo o <i>Eurocode 3</i> [7]: (a) aproximação trilinear; (b) aproximação bilinear. ....	9
<b>Fig. II-3</b> Modelo mecânico para determinação da rigidez inicial da ligação metálica, [9]. .....	12
<b>Fig. II-4</b> Mecanismo de colapso das cantoneiras de alma em flexão segundo Chen e Lui [11]. .....	15
<b>Fig. II-5</b> Modelo mecânico para determinação da rigidez inicial da ligação mista da Fig. I-2(a), no caso de construções escoradas na fase de cura do concreto [9]. .....	16
<b>Fig. II-6</b> (a) Aproximação OABD para comportamento dos conectores de cisalhamento [1]; (b) Curva carga x deslocamento típica de <i>push tests</i> [14]. .....	19
<b>Fig. II-7</b> Comportamento idealizado de um tirante de concreto armado [15]. .....	20
<b>Fig. II-8</b> Deformações ao longo do tirante de concreto armado: (a) formação da primeira fissura; (b) estado de fissuração estabilizado [15]. .....	21
<b>Fig. II-9</b> Diagrama tensão versus deformação simplificado para armaduras envolvidas pelo concreto [15]. .....	23
<b>Fig. III-1</b> Ligações do grupo 1: (a)Vista superior; (b)Ligação 1(a); (c)Ligação 1(b)....	27
<b>Fig. III-2</b> Ligações do grupo 2: (a)Vista superior; (b)Ligação 2(a); (c)Ligação 2(b)....	28
<b>Fig. III-3</b> Pórtico de ensaio: (a) Vista frontal; (b) Corte A-A.....	29
<b>Fig. III-4</b> Configuração do ensaio para a fase anterior à cura do concreto.....	31



<b>Fig. III-5</b> Configuração do ensaio para a fase posterior à cura do concreto. ....	<b>31</b>
<b>Fig. III-6</b> Medição das rotações locais e globais por meio de transdutores de deslocamento e inclinômetros. ....	<b>32</b>
<b>Fig. III-7</b> Medição do escorregamento entre as mesas das vigas secundárias e a laje de concreto. ....	<b>33</b>
<b>Fig. III-8</b> Extensômetros nas barras de aço principais da laje de concreto. ....	<b>33</b>
<b>Fig. III-9</b> Medição da carga nos parafusos e do nível de tensões nas cantoneiras e mesas inferiores das vigas secundárias. ....	<b>34</b>
<b>Fig. III-10</b> Sistema para aquisição dos sinais – exemplo típico para um circuito/canal referente a um sensor (resistência ativa). ....	<b>35</b>
<b>Fig. III-11</b> Equipamentos constituintes do sistema de aquisição dos sinais e controlador dos atuadores hidráulicos (CAH). ....	<b>36</b>
<b>Fig. III-12</b> Diagrama tensão x deformação das amostras das barras de aço ensaiadas. ....	<b>37</b>
<b>Fig. III-13</b> Comportamento $M x \theta_l$ da ligação 1(a). ....	<b>39</b>
<b>Fig. III-14</b> Comportamento $M x \theta_l$ da ligação 1(b). ....	<b>39</b>
<b>Fig. III-15</b> Comportamento $M x \theta_l$ da ligação 2(a). ....	<b>40</b>
<b>Fig. III-16</b> Comportamento $M x \theta_l$ da ligação 2(b). ....	<b>40</b>
<b>Fig. III-17</b> Comportamento $M x \theta_l$ experimental das ligações ensaiadas. ....	<b>40</b>
<b>Fig. III-18</b> Comportamento $M x \theta_g$ experimental das ligações ensaiadas. ....	<b>41</b>
<b>Fig. III-19</b> Estado de fissuração estabilizado e extensão das fissuras: ligação 1(a). ....	<b>44</b>
<b>Fig. III-20</b> Estado de fissuração estabilizado e extensão das fissuras: ligação 1(b). ....	<b>44</b>
<b>Fig. III-21</b> Estado de fissuração estabilizado e extensão das fissuras: ligação 2(a). ....	<b>45</b>
<b>Fig. III-22</b> Estado de fissuração estabilizado e extensão das fissuras: ligação 2(b). ....	<b>45</b>
<b>Fig. III-23</b> Ligação 1(a): deformações específicas nas barras de aço <sup>1</sup> . ....	<b>49</b>
<b>Fig. III-24</b> Ligação 1(a): Carga axial instalada nos parafusos <sup>2</sup> . ....	<b>49</b>
<b>Fig. III-25</b> Ligação 1(a): Tensões principais $\sigma_{\max}$ das cantoneiras de alma <sup>3</sup> . ....	<b>49</b>
<b>Fig. III-26</b> Ligação 1(a): Tensões principais $\sigma_{\min}$ das cantoneiras de alma. ....	<b>50</b>

<b>Fig. III-27</b> Ligação 1(b): deformações específicas nas barras de aço.....	<b>50</b>
<b>Fig. III-28</b> Ligação 2(a): deformações específicas nas barras de aço <sup>1</sup> . .....	<b>50</b>
<b>Fig. III-29</b> Ligação 2(a): Carga axial instalada nos parafusos.....	<b>51</b>
<b>Fig. III-30</b> Ligação 2(a): Tensões principais $\sigma_{\max}$ das cantoneiras de alma <sup>1</sup> . .....	<b>51</b>
<b>Fig. III-31</b> Ligação 2(a): Tensões principais $\sigma_{\min}$ das cantoneiras de alma <sup>1</sup> .....	<b>51</b>
<b>Fig. III-32</b> Ligação 2(b): deformações específicas nas barras de aço <sup>1</sup> . .....	<b>52</b>
<b>Fig. III-33</b> Mecanismo plástico de deformação das cantoneiras de alma. ....	<b>53</b>
<b>Fig. III-34</b> Deformação das cantoneiras de assento nas ligações 1(b) e 2(a). ....	<b>53</b>
<b>Fig. III-35</b> Deformação da forma metálica e fissuração na laje de concreto ao redor dos pontos de aplicação de carga. ....	<b>54</b>
<b>Fig. IV-1</b> Graus de liberdade do elemento de grelha. ....	<b>58</b>
<b>Fig. IV-2</b> Consideração de um nó fictício (nó 2) para montagem da matriz de rigidez de elementos de grelha não-prismáticos com conexões elásticas nas bordas. ....	<b>59</b>
<b>Fig. IV-3</b> Componentes da capacidade de rotação requerida [22]. ....	<b>62</b>
<b>Fig. IV-4</b> Distribuição da curvatura para uma viga com diferentes tipos de carregamento [22]. ....	<b>63</b>
<b>Fig. IV-5</b> Modelo numérico/mecânico utilizado para representação do mecanismo de colapso plástico em uma viga mista. ....	<b>67</b>
<b>Fig. IV-6</b> Graus de liberdade nodais do elemento de grelha nos referenciais local e global. ....	<b>69</b>
<b>Fig. IV-7</b> Fluxograma ilustrativo da análise não-linear física de grelhas mistas efetuada com o programa <i>Grecon</i> . ....	<b>70</b>
<b>Fig. IV-8</b> Graus de liberdade do elemento de pórtico espacial. ....	<b>71</b>
<b>Fig. IV-9</b> Elemento de pórtico espacial com conexões elásticas nas bordas. ....	<b>72</b>
<b>Fig. IV-10</b> Graus de liberdade locais e globais do elemento de pórtico espacial. ....	<b>76</b>
<b>Fig. IV-11</b> Rotações utilizadas na construção da matriz de rotação de elementos de pórtico espacial, no caso de um membro disposto aleatoriamente no espaço (a) e de membros verticais (b) e (c). ....	<b>76</b>

<b>Fig. IV-12</b> Excentricidades nos extremos do elemento de pórtico espacial [26].	<b>78</b>
<b>Fig. IV-13</b> Função $\phi$ que varia suavemente sobre uma superfície [27].	<b>79</b>
<b>Fig. IV-14</b> Sistema conservativo com $n$ graus de liberdade [27].	<b>81</b>
<b>Fig. IV-15</b> Corpo elástico tridimensional e elemento hexaédrico [29].	<b>83</b>
<b>Fig. IV-16</b> Elemento bilinear de quatro nós.	<b>85</b>
<b>Fig. IV-17</b> Componentes da família de elementos isoparamétricos: (a) elemento de superfície (plano bilinear); (b) elemento sólido trilinear.	<b>88</b>
<b>Fig. IV-18</b> Elemento de casca constituído pela combinação de um elemento de placa com um elemento para estado plano de tensão.	<b>90</b>
<b>Fig. IV-19</b> Elemento de casca do tipo sólido degenerado bilinear e sistemas de coordenadas [29].	<b>91</b>
<b>Fig. IV-20</b> (a) Indicação do vetor espessura; (b) Graus de liberdade do elemento de casca e vetores ortogonais; (c) deslocamentos de um ponto P nas direções de $v_1^n$ e $v_2^n$ devido a pequenas rotações $\beta_n$ e $\alpha_n$ do vetor espessura, respectivamente [27].	<b>94</b>
<b>Fig. IV-21</b> Obtenção do vetor posição de um ponto no elemento.	<b>95</b>
<b>Fig. IV-22</b> Pontos de ligação para o elemento bilinear MITC4 [29].	<b>107</b>
<b>Fig. IV-23</b> Grau de liberdade fictício $\gamma$ para o elemento de casca e rotações no referencial global.	<b>110</b>
<b>Fig. IV-24</b> Sistema dinâmico básico [32].	<b>112</b>
<b>Fig. IV-25</b> Respostas do sistema dinâmico básico da Fig. IV-24 em vibração livre não amortecida (a) e com amortecimento subcrítico [32].	<b>115</b>
<b>Fig. IV-26</b> Deslocamentos obtidos em uma viga engastada e livre por meio do método da superposição modal [32].	<b>119</b>
<b>Fig. IV-27</b> Relação entre amortecimento e frequência (amortecimento de Rayleigh) [32].	<b>121</b>
<b>Fig. IV-28</b> Controle passivo de ciclo fechado [34].	<b>124</b>
<b>Fig. IV-29</b> Atenuadores de massa sincronizados para redução de vibrações em uma laje de edifício (a) e em uma laje de um protótipo experimental (b) [37].	<b>125</b>

<b>Fig. IV-30</b> Sistema dinâmico com 2 graus de liberdade representando uma viga engastada e livre com atenuador de massa [34]. .....	<b>126</b>
<b>Fig. IV-31</b> Alocação de memória; apontadores para identificação da posição do primeiro termo de um vetor de números reais ( $i_1$ ) e de números inteiros ( $i_2$ ). .....	<b>130</b>
<b>Fig. IV-32</b> Fluxograma do programa <i>PAEST3D</i> . .....	<b>134</b>
<b>Fig. V-1</b> Protótipo experimental: piso misto semicontínuo. ....	<b>138</b>
<b>Fig. V-2</b> Anteprojeto da viga secundária interna (VS – W 250x22,3): (a) sistema semicontínuo adotado; (b) hipotético sistema estrutural tradicional com viga bi-apoiada. ....	<b>139</b>
<b>Fig. V-3</b> Viga secundária interna (VS). .....	<b>140</b>
<b>Fig. V-4</b> Viga secundária de borda (VS_b). .....	<b>141</b>
<b>Fig. V-5</b> Viga principal (VP). .....	<b>142</b>
<b>Fig. V-6</b> Viga principal de borda (VP_b). .....	<b>143</b>
<b>Fig. V-7</b> Ligações da viga principal com as secundárias: (a) vista lateral; (b) ligação entre VS e VP – Ligação LC; (c) ligação entre VS_b Oeste e VP– Ligação LE. ....	<b>144</b>
<b>Fig. V-8</b> Vista lateral da ligação entre as vigas secundárias ou secundárias de borda e a viga principal de borda. ....	<b>145</b>
<b>Fig. V-9</b> Vistas das ligações entre a viga secundária de borda e a viga principal e a viga principal de borda. ....	<b>145</b>
<b>Fig. V-10</b> Disposições das armaduras no protótipo. ....	<b>147</b>
<b>Fig. V-11</b> Montagem da grelha metálica. ....	<b>148</b>
<b>Fig. V-12</b> Montagem da forma metálica e soldagem dos conectores. ....	<b>148</b>
<b>Fig. V-13</b> Detalhe das armaduras na região do encontro entre a VP e a VS. ....	<b>148</b>
<b>Fig. V-14</b> Concretagem da laje. ....	<b>149</b>
<b>Fig. V-15</b> Diagrama tensão x deformação do aço das armaduras da laje. ....	<b>149</b>
<b>Fig. V-16</b> Curvas $M x \theta$ teóricas das ligações semi-rígidas mistas do protótipo. ....	<b>151</b>
<b>Fig. V-17</b> Ensaio do tipo <i>heel impact</i> . ....	<b>152</b>
<b>Fig. V-18</b> Impactômetro. ....	<b>153</b>

<b>Fig. V-19</b> Instrumentação e sistema de aquisição dos sinais (sistema da <i>Lynx</i> ) nos testes dinâmicos.....	<b>154</b>
<b>Fig. V-20</b> Fotos da utilização do analisador de espectro (a) e do equipamento da <i>Lynx</i> (b). .....	<b>155</b>
<b>Fig. V-21</b> Modelo <i>I</i> - malha de elementos de casca (sólido degenerado) utilizada para representar o protótipo da laje: (a) vista superior e seção transversal; (b) módulos (elementos) utilizados para compor a malha – em vermelho está representada a superfície média da casca. ....	<b>156</b>
<b>Fig. V-22</b> (a) Primeiro modo de vibração da estrutura; (b) Segundo modo de vibração da estrutura. ....	<b>157</b>
<b>Fig. V-23</b> (a) Terceiro modo de vibração da estrutura; (b) Quarto modo de vibração da estrutura. ....	<b>158</b>
<b>Fig. V-24</b> Auto-espectro de resposta do acelerômetro AC N obtido nos ensaios do tipo <i>heel impact</i> .....	<b>158</b>
<b>Fig. V-25</b> Auto-espectro de resposta do acelerômetro AC S obtido nos ensaios do tipo <i>heel impact</i> .....	<b>159</b>
<b>Fig. V-26</b> Fase relativa entre os acelerômetros AC N e AC S. ....	<b>159</b>
<b>Fig. V-27</b> Auto-espectro de resposta do acelerômetro AC NE obtido nos ensaios do tipo <i>heel impact</i> .....	<b>159</b>
<b>Fig. V-28</b> Auto-espectro de resposta do acelerômetro AC SO obtido nos ensaios do tipo <i>heel impact</i> .....	<b>160</b>
<b>Fig. V-29</b> Fase relativa entre os acelerômetros AC NE e AC SO. ....	<b>160</b>
<b>Fig. V-30</b> Método do decremento logarítmico. ....	<b>161</b>
<b>Fig. V-31</b> Resposta da estrutura (acelerômetro AC N) nos testes para identificação das taxas de amortecimento do 1º, 3º e 4º modos. ....	<b>162</b>
<b>Fig. V-32</b> Trecho da resposta filtrada da estrutura (acelerômetro AC N) utilizada para determinação da taxa de amortecimento do 1º modo. ....	<b>162</b>
<b>Fig. V-33</b> Trecho da resposta filtrada da estrutura (acelerômetro AC NE) utilizada para determinação da taxa de amortecimento do 3º modo. ....	<b>162</b>

<b>Fig. V-34</b> Trecho da resposta filtrada da estrutura (acelerômetro AC NE) utilizada para determinação da taxa de amortecimento do 4º modo. ....	<b>163</b>
<b>Fig. V-35</b> Resposta da estrutura (acelerômetro AC C) nos testes para identificação da taxa de amortecimento do 2º modo. ....	<b>163</b>
<b>Fig. V-36</b> Trecho da resposta filtrada da estrutura (acelerômetro AC C) utilizada para determinação da taxa de amortecimento do 2º modo. ....	<b>163</b>
<b>Fig. V-37</b> História temporal da força aplicada na estrutura pelo cilindro do “impactômetro”. ....	<b>164</b>
<b>Fig. V-38</b> Resposta da estrutura medida com o acelerômetro AC N no ensaio com o “impactômetro”. ....	<b>164</b>
<b>Fig. V-39</b> Resposta da estrutura medida com o acelerômetro AC S no ensaio com o “impactômetro”. ....	<b>165</b>
<b>Fig. V-40</b> Resposta da estrutura medida com o acelerômetro AC NE no ensaio com o “impactômetro”. ....	<b>165</b>
<b>Fig. V-41</b> Resposta da estrutura medida com o acelerômetro AC SO no ensaio com o “impactômetro”. ....	<b>165</b>
<b>Fig. V-42</b> Escoramento das vigas do protótipo da laje. ....	<b>167</b>
<b>Fig. V-43</b> Sistema com 32 pontos de carga. ....	<b>168</b>
<b>Fig. V-44</b> Deslocamentos ( $m$ ) do piso obtidos via modelo $I$ da Fig. V-21 para um sistema com: (a) 32 cargas pontuais ( $P=43,1\text{ kN}$ ) posicionadas segundo a Fig. V-43; (b) carregamento uniformemente distribuído ( $q=23\text{ kN/m}^2$ ). ....	<b>169</b>
<b>Fig. V-45</b> Montagem do sistema de carga: cruzetas e vigas de distribuição. ....	<b>169</b>
<b>Fig. V-46</b> Vista da viga do pórtico de ensaio, do atuador hidráulico, da viga rígida, das vigas de distribuição, das cruzetas e detalhe das patolas de carga. ....	<b>170</b>
<b>Fig. V-47</b> Viga dos pórticos de ensaio. ....	<b>171</b>
<b>Fig. V-48</b> Coluna dos pórticos de ensaio. ....	<b>172</b>
<b>Fig. V-49</b> Contraventamento dos pórticos de ensaio. ....	<b>173</b>
<b>Fig. V-50</b> Vista frontal do contraventamento. ....	<b>174</b>
<b>Fig. V-51</b> Planta de instrumentação parcial para os ensaios estáticos. ....	<b>175</b>

<b>Fig. V-52</b> Vista dos extensômetros colados nas armaduras das ligações mistas. ....	<b>176</b>
<b>Fig. V-53</b> Sensores de deslocamento utilizados para medição das rotações locais das ligações: (a) resistivos (ponte completa); (b) potenciômetros. ....	<b>177</b>
<b>Fig. V-54</b> Medição da flecha no vão viga secundária interna (FL_VSN). ....	<b>177</b>
<b>Fig. V-55</b> Sistema de aquisição de dados nos ensaios estáticos. ....	<b>178</b>
<b>Fig. V-56</b> Modelo 2: discretização utilizada e visão geral dos elementos de grelha. ..	<b>180</b>
<b>Fig. V-57</b> Deslocamentos das vigas secundárias internas medidos nos pontos de posicionamento dos sensores FL_VSN e FL_VSS - Fig. V-51. ....	<b>181</b>
<b>Fig. V-58</b> Deslocamentos das vigas secundárias de borda medidos nos pontos de posicionamento dos sensores FL_VSNE e FL_VSSO - Fig. V-51. ....	<b>182</b>
<b>Fig. V-59</b> Deslocamentos da viga principal VP medidos no ponto de posicionamento do sensor FL_VP- Fig. V-51. ....	<b>182</b>
<b>Fig. V-60</b> Deslocamentos das vigas principais de borda medidos nos pontos de posicionamento dos sensores FL_VPbN e FL_VPbS - Fig. V-51. ....	<b>182</b>
<b>Fig. V-61</b> Curva $q$ x $\theta_l$ das ligações LE ou LD. ....	<b>183</b>
<b>Fig. V-62</b> Curva $q$ x $\theta_l$ da ligação LC. ....	<b>184</b>
<b>Fig. V-63</b> Deformações médias nas mesas inferiores tracionadas das vigas secundárias internas. ....	<b>185</b>
<b>Fig. V-64</b> Processo de fissuração estabilizado na laje. ....	<b>186</b>
<b>Fig. V-65</b> Evolução das deformações médias nas armaduras das ligações da laje. ....	<b>186</b>
<b>Fig. V-66</b> Carga instalada nas camadas de parafusos em tração das abas das cantoneiras de alma adjacentes à alma da viga principal na ligação LE. ....	<b>187</b>
<b>Fig. V-67</b> Carga instalada nas camadas de parafusos em tração das abas das cantoneiras de alma adjacentes à alma da viga principal na ligação LC. ....	<b>187</b>
<b>Fig. V-68</b> Carga instalada nas camadas de parafusos em tração das abas das cantoneiras de alma adjacentes à alma da viga principal na ligação LD. ....	<b>188</b>
<b>Fig. V-69</b> Tensões principais mínimas das cantoneiras de alma da ligação LC. ....	<b>188</b>
<b>Fig. V-70</b> Tensões principais máximas das cantoneiras de alma da ligação LC. ....	<b>189</b>

<b>Fig. VI-1</b> Planta baixa de um pavimento do edifício garagem (EDG) do aeroporto internacional do Rio de Janeiro. ....	<b>191</b>
<b>Fig. VI-2</b> Trecho da estrutura do EDG a ser analisado. ....	<b>192</b>
<b>Fig. VI-3</b> Distribuição dos esforços obtida no anteprojeto da nova concepção de piso semicontínuo para as fases anterior e posterior à cura do concreto nas vigas secundárias VS1 (a) e VS2 (b). ....	<b>194</b>
<b>Fig. VI-4</b> Distribuição dos esforços obtida no anteprojeto da nova concepção para as fases anterior (a) e posterior (b) à cura do concreto nas vigas principais. ....	<b>195</b>
<b>Fig. VI-5</b> Modelos mecânicos para avaliação dos parâmetros físicos de uma ligação viga-coluna metálica com placa de extremidade nas fases: (a) anterior à cura do concreto; (b) posterior à cura do concreto. ....	<b>197</b>
<b>Fig. VI-6</b> VS1/VP1 e VS2/VP2: Detalhe da ligação entre vigas secundárias e vigas principais na nova concepção proposta de piso semicontínuo. ....	<b>198</b>
<b>Fig. VI-7</b> VPINT: Vista lateral (a) e frontal (b) da ligação das vigas principais com os pilares na nova concepção proposta de piso semicontínuo – armaduras inexistentes para VPEXT. ....	<b>198</b>
<b>Fig. VI-8</b> Detalhe das ligações entre vigas secundárias e vigas principais e entre vigas principais e pilares tal qual executado segundo o projeto original do piso (concepção mais tradicional com vigas bi-rotuladas). ....	<b>199</b>
<b>Fig. VI-9</b> Modelos de elemento de grelha utilizados para análise estática não-linear física do piso misto semicontínuo: (a) vigas secundárias; (b) vigas principais. ....	<b>200</b>
<b>Fig. VI-10</b> Distribuição dos esforços da nova concepção obtida com o programa Grecon para as fases anterior e posterior à cura do concreto nas vigas VS1. ....	<b>200</b>
<b>Fig. VI-11</b> Distribuição dos esforços da nova concepção obtida com o programa Grecon para as fases anterior e posterior à cura do concreto nas vigas VS2. ....	<b>201</b>
<b>Fig. VI-12</b> Esforços da nova concepção obtida com o programa Grecon para as fases anterior (a) e posterior (b) à cura do concreto nas vigas principais. ....	<b>201</b>
<b>Fig. VI-13</b> Comportamento $M \times \theta$ das ligações entre vigas secundárias e principais (a) e vigas principais e pilares (b) sob cargas últimas. ....	<b>202</b>
<b>Fig. VI-14</b> Curvas carga $\times$ deslocamento de pontos da estrutura sob cargas últimas. .	<b>202</b>



<b>Fig. VI-15</b> Disposição das vagas dos veículos no primeiro pavimento do edifício garagem (EDG).....	<b>204</b>
<b>Fig. VI-16</b> Formas modais de vibração do piso misto semicontínuo (modelo 3). .....	<b>206</b>
<b>Fig. VI-17</b> Consideração das cargas móveis sobre a estrutura.....	<b>208</b>
<b>Fig. VI-18</b> Trajetórias dos carregamentos utilizados; ponto de observação (PO); localização dos atenuadores dinâmicos sincronizados (ADS). .....	<b>209</b>
<b>Fig. VI-19</b> Respostas nos domínios do tempo e da frequência para o caso 1. ....	<b>211</b>
<b>Fig. VI-20</b> Respostas nos domínios do tempo e da frequência para o caso 2. ....	<b>212</b>
<b>Fig. VI-21</b> Respostas nos domínios do tempo e da frequência para o caso 3. ....	<b>213</b>
<b>Fig. VI-22</b> Respostas nos domínios do tempo e da frequência para o caso 4. ....	<b>214</b>
<b>Fig. VI-23</b> Respostas nos domínios do tempo e da frequência para os casos 5 e 6. ....	<b>215</b>

# Índice de Tabelas

---

<b>Tab. II-1</b> Coeficientes de rigidez para componentes individuais [7].....	14
<b>Tab. II-2</b> Larguras efetivas para linhas de parafusos de cantoneiras de alma [8]. .....	14
<b>Tab. II-3</b> Coeficientes de rigidez para os componentes relativos à laje de concreto armado. ....	17
<b>Tab. III-1</b> Características mecânicas médias das amostras das barras de aço.....	37
<b>Tab. III-2</b> Constantes carga/deformação para os parafusos ensaiados. ....	37
<b>Tab. III-3</b> Resistências características do concreto para as lajes dos protótipos.....	38
<b>Tab. III-4</b> Características físicas das ligações do grupo 1.....	41
<b>Tab. III-5</b> Características físicas das ligações do grupo 2.....	42
<b>Tab. V-1</b> Características mecânicas do aço das armaduras da laje.....	150
<b>Tab. V-2</b> Constantes de calibração dos parafusos das cantoneiras de alma. ....	150
<b>Tab. V-3</b> Propriedades e resistências das vigas do protótipo.....	151
<b>Tab. V-4</b> Propriedades das ligações semi-rígidas mistas do protótipo (Fig. V-7).....	151
<b>Tab. V-5</b> Frequências dos quatro primeiros modos de vibração da estrutura.....	157
<b>Tab. V-6</b> Taxas de amortecimento dos quatro primeiros modos de vibração. ....	161
<b>Tab. VI-1</b> Dimensões das vigas utilizadas.....	195
<b>Tab. VI-2</b> Resistência ao momento fletor das vigas utilizadas no sistema semicontínuo. .....	196
<b>Tab. VI-3</b> Parâmetros físicos das ligações para a fase anterior à cura do concreto.....	197
<b>Tab. VI-4</b> Parâmetros físicos das ligações para a fase posterior à cura do concreto...	198
<b>Tab. VI-5</b> Verificação dos deslocamentos sob cargas de serviço.....	203
<b>Tab. VI-6</b> Frequências naturais de vibração da estrutura de piso do EDG segundo os três modelos elaborados.....	205

# Lista de Símbolos

---

## LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS:

$a_n$  – espessura do nó  $n$  no elemento de casca geral tridimensional

$a_{rms}$  – valor médio quadrático de aceleração

$b_{ef,wa}$  - larguras equivalentes de  $T-stubs$  utilizados para representar o comportamento de cantoneiras de alma em flexão

$c$  – coeficiente de amortecimento

$c_{at}$  – coeficiente de amortecimento do atenuador de vibrações

$c_c$  – amortecimento crítico

$c_{ob}$  – cobrimento das armaduras

$d$  – distância da linha média da aba da cantoneira de assento à mesa superior da viga metálica

$d_l$  – distância da linha média da aba da cantoneira de assento ao bordo inferior da cantoneira de alma

$d_a$  – distância do ponto de aplicação de carga ao eixo da viga principal nos ensaios com os protótipos cruciformes

$d_{Ac,ef}$  - distância entre o centro de gravidade da área de concreto efetiva e a linha média da aba da cantoneira de assento

$d_b$  – diâmetro de um parafuso

$d_{conc}$  – espessura da mesa de concreto, excluindo-se a altura das nervuras

$det[\mathbf{j}]$  – determinante da matriz jacobiana para o caso bidimensional

$det[\mathbf{J}]$  – determinante da matriz jacobiana para o caso tridimensional

$d_i$  – distância de uma dada camada de parafusos em tração à linha média da aba da cantoneira de assento em uma ligação com cantoneiras de assento e alma

$d_{wa}$  – distância entre um parafuso e a borda horizontal da cantoneira de alma

$e_b$  – distância, na direção de transferência de uma força em uma ligação com cantoneiras, entre uma linha de parafusos e uma borda da cantoneira de assento

$e_{co}$  – distância da face do elemento de apoio ao primeiro conector

$e_{wa}$  – distância entre um parafuso e a borda vertical da cantoneira de alma

$f$  – frequência cíclica (Hz)

$f_c(t)$  – força de controle ao longo do tempo

$f_{ck}$  – resistência característica do concreto à compressão

$f_{ctm}$  – resistência à tração média do concreto

$f_p$  – frequência do caminhar humano

$f_{ot}$  – frequência ótima do atenuador de vibrações

$f_u$  – resistência à tração do aço

$f_y$  – tensão de escoamento do aço

$f_{y,r}$  – tensão de escoamento do aço das armaduras

$h_c$  – distância da mola equivalente da região comprimida de uma ligação metálica com cantoneiras de assento e alma ao centro de rotação

$h_{eq}$  – altura equivalente de uma laje de concreto ortotrópica na direção das nervuras

$h_s$  – altura do perfil metálico

$h_t$  – distância da mola equivalente da região tracionada de uma ligação metálica com cantoneiras de assento e alma ao centro de rotação

$k$  – coeficiente de rigidez

$k_{at}$  – coeficiente de rigidez do atenuador de vibrações

$k_b$  – rigidez de um parafuso à tração

$k_{bfc}$  – rigidez da alma e mesa inferior da viga em compressão

$k_{bs}$  – rigidez de um parafuso ao corte

$k_{bwb}$  – rigidez da alma de uma viga secundária à pressão de contato

$k_{bwt}$  – rigidez da alma da viga em tração

$k_c$  – fator de correção devido a uma distribuição não uniforme de tensões normais em elementos fletidos para consideração da fissuração como uma analogia ao comportamento de um tirante de concreto

$k_{c\bar{f}b}$  – rigidez da mesa da coluna em flexão

$k_{conc}$  - rigidez do concreto em tração

$k_{cwc}$  – rigidez da alma da coluna em compressão

$k_{cws}$  – rigidez da alma da coluna em cisalhamento

$k_{cwt}$  – rigidez da alma da coluna em tração

$k_{ef,c}$  - rigidez equivalente dos componentes da região comprimida de uma ligação com cantoneiras de assento e alma

$k_{ef,i}$  - rigidez da mola equivalente de uma dada camada da ligação na região tracionada

$k_i$  – rigidez rotacional da ligação no nó  $i$  do elemento estrutural

$k_j$  – rigidez rotacional da ligação no nó  $j$  do elemento estrutural

$k_{epb}$  – rigidez da chapa de extremidade em flexão

$k_{sab}$  – rigidez da cantoneira de assento à pressão de contato

$k_{wa}$  – rigidez das cantoneiras de alma à flexão

$k_{wab}$  – rigidez das cantoneiras de alma à pressão de contato

$k_r$  - rigidez das armaduras em tração

$k_s$  - rigidez dos conectores em cisalhamento

$k_t$  – rigidez da mola equivalente da região tracionada de uma ligação metálica com cantoneiras de assento e alma

$k_{t,lsr}$  – rigidez rotacional do elemento de conexão utilizado para representar ligações semi-rígidas segundo a representação não-linear de Goldberg-Richard

$k_{t,rp}$  – rigidez rotacional do elemento de conexão utilizado para representação da formação de rótulas plásticas nos vãos de vigas mistas

$k_\theta$  – rigidez inicial de uma ligação

$k_{\theta,me}$  – rigidez inicial rotacional de uma ligação com cantoneiras de assento e alma antes da cura do concreto

$k_{\theta,mi}$  – rigidez inicial rotacional de uma ligação com cantoneiras de assento e alma após a cura do concreto

$k'_{\theta,mi}$  – rigidez inicial rotacional de uma ligação com cantoneiras de assento e alma após a cura do concreto, considerando a contribuição do concreto em tração

$k_{\theta,p}$  – rigidez plástica da ligação

$l$  – comprimento do elemento

$l_{la}$  – largura da laje

$l_t$  – comprimento de transmissão da força da armadura no interior da fissura para o concreto

$m$  - massa

$m_{at}$  – massa do atenuador de vibrações

$m_y$  – distância entre as linhas de escoamento no mecanismo de plastificação das cantoneiras de alma

$n$  – fator de forma da ligação utilizado em curvas  $M \times \theta$  segundo Goldberg-Richard

$p_b$  – distância entre linhas de parafusos na direção de transferência de uma força em uma ligação com cantoneiras

$p_{wa}$  – distância entre as camadas de parafusos das cantoneiras de alma

$q$  - carga distribuída por  $m^2$  de laje

$q_{ac}$  - carga distribuída por metro linear de viga antes da cura do concreto

$q_{dc}$  - carga distribuída por metro linear de viga após a cura do concreto

$q_v$  - carga distribuída por metro linear de viga

$t$  - tempo

$t_i$  – espessura de uma placa

$y_{conc}$  – distância do centro de gravidade da laje de concreto não fissurada à mesa superior da viga secundária

$y_g$  – distância do ponto de aplicação da resultante  $V_{wa}$  ao bordo inferior da cantoneira de alma

$y_r$  – distância do centro de gravidade das armaduras em tração à mesa superior da viga metálica

$z_0$  - distância entre os centros de gravidade das seções não fissuradas, sem a contribuição das armaduras, da mesa de concreto e da viga composta

$z_t$  – distância entre as resultantes de tração e compressão em uma ligação puramente metálica constituída por cantoneiras de alma e assento

## LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$A_b$  – área da seção transversal de um parafuso

$A_c$  – área de concreto

$A_{c,ef}$  – área de concreto efetiva

$AC\ C$  – acelerômetro do centro do protótipo da laje

$AC\ N$  – acelerômetro norte

$AC\ NE$  – acelerômetro nordeste

$AC\ S$  – acelerômetro sul

$AC\ SO$  – acelerômetro sudoeste

ADS – Atenuador Dinâmico sintonizado em frequência

$A_r$  – área das armaduras em tração

$C_p$  – constante de calibração dos parafusos utilizados nos testes experimentais

$CPO$  – coluna do pórtico de ensaio do protótipo da laje

DFT – transformada discreta de Fourier

$E_a$  – módulo de elasticidade do aço

$E_c$  – módulo de elasticidade do concreto

ELC\_LSR – elemento de conexão para representação de ligações semi-rígidas

ELC\_RPd – elemento de conexão para representação de rótulas plásticas em vigas mistas com cargas uniformemente distribuídas

ELC\_RPp – elemento de conexão para representação de rótulas plásticas em vigas mistas com uma carga pontual

ELC\_RP2p – elemento de conexão para representação de rótulas plásticas em vigas mistas com mais de uma carga pontual

ESC – construção escorada na fase anterior à cura do concreto

Est – estágio da análise: anterior ou posterior à cura do concreto

$F_c$  – força de compressão em uma ligação com cantoneiras de assento e alma

$F_{cr}$  – força que provoca fissuração na área de concreto efetiva  $A_{c,ef}$

$F_{ei\_LC}$ ,  $i=1,6$  – sensores acoplados às armaduras da ligação central no protótipo da laje

$F_{ei\_LD}$ ,  $i=1,6$  – sensores acoplados às armaduras da ligação leste no protótipo da laje

$F_{ei\_LE}$ ,  $i=1,6$  – sensores acoplados às armaduras da ligação oeste no protótipo da laje

$F_i$  – força de tração em uma dada camada de parafusos em uma ligação com cantoneiras de assento e alma

FL\_VP – transdutor de deslocamento posicionado no vão da viga principal no protótipo da laje

FL\_VPbN – transdutor de deslocamento posicionado no vão da viga principal de borda norte no protótipo da laje

FL\_VPbS – transdutor de deslocamento posicionado no vão da viga principal de borda sul no protótipo da laje

FL\_VSN – transdutor de deslocamento posicionado no vão da viga secundária norte no protótipo da laje

FL\_VSNE – transdutor de deslocamento posicionado no vão da viga secundária de borda nordeste no protótipo da laje

FL\_VSS – transdutor de deslocamento posicionado no vão da viga secundária sul no protótipo da laje

FL\_VSSO – transdutor de deslocamento posicionado no vão da viga secundária de borda sudoeste no protótipo da laje

$Fp(t)$  – força devida ao caminhar humano

$F_s$  – força de corte nos conectores em uma ligação mista com cantoneiras

$G$  – módulo de elasticidade transversal do material

$HP_p$  – funções de interpolação associadas aos pontos de ligação no processo de interpolação mista

$I$  – momento de inércia à flexão do elemento

$I_y$  – momento de inércia em torno do eixo  $y$

$I_z$  – momento de inércia em torno do eixo  $z$

$J$  – inércia à torção do elemento

$L_a$  – largura do elemento de apoio na direção das armaduras



$L_b$  – comprimento de um parafuso

$LC$  – ligação do centro do protótipo de laje

$LD$  – ligação leste do protótipo de laje

$LE$  – ligação oeste do protótipo de laje

$L_{ef}$  – largura da laje onde são acomodadas as armaduras das ligações mistas

$L_r$  – distância do eixo do elemento de apoio ao primeiro conector

$L_{wa}$  – comprimento de uma cantoneira de alma

$M$  – momento fletor em um elemento

$M_d$  – momento máximo no vão da viga

ME\_VSN – extensômetro acoplado à mesa inferior da viga secundária norte do protótipo da laje

ME\_VSS - extensômetro acoplado à mesa inferior da viga secundária sul do protótipo da laje

$M_{Fiss}$  – momento de fissuração na mesa de concreto

$M_{j,Rd}$  – resistência à flexão de projeto da ligação segundo o *Eurocode*

$M_n$  – momento nominal

$M_p$  – momento de plastificação da viga mista

$M_{u,me}$  – resistência à flexão de uma ligação puramente metálica constituída por cantoneiras de alma e assento

$M_{u,mi}$  – resistência à flexão de uma ligação mista constituída por cantoneiras de alma e assento

$M_y$  – momento de início de escoamento da fibra mais inferior da viga mista

$M_0$  - momento plástico de uma ligação

$M'_1, M'_2$  - momentos negativos nos apoios da viga mista

$NP$  – número de incrementos de carga na análise não-linear

$N_S$  – número de conectores na região de momento negativo em uma ligação mista

$N_{S,d}$  – esforço normal em um tirante de concreto

PO – ponto de observação

$Q_i$  – esforço característico em um elemento estrutural

$R_d$  – resistência de projeto de um elemento estrutural

$S(\omega)$  – densidade espectral

$T$  – período de vibração da estrutura

$T_c$  – tipo de construção

$U$  – energia de deformação elástica

$VP$  – Viga principal do protótipo da laje

$VP_b$  – Viga principal de borda do protótipo da laje

$VP1, VP2$  – vigas principais do piso do edifício garagem do terminal 2 do aeroporto internacional do Rio de Janeiro

$VPINT$  – ligação das vigas principais com os pilares internos do edifício garagem do terminal 2 do aeroporto internacional do Rio de Janeiro

$VPEXT$  – ligação das vigas principais com os pilares de borda do edifício garagem do terminal 2 do aeroporto internacional do Rio de Janeiro

$VPO_1, VPO_2, VPO_3$  – viga do sistema de carga 1, 2 e 3 do protótipo da laje

$VS$  – Viga secundária interna do protótipo da laje

$VS_b$  – Viga secundária de borda do protótipo da laje

$VS1, VS2$  – vigas secundárias do piso do edifício garagem do terminal 2 do aeroporto internacional do Rio de Janeiro

$V_{wa,y}$  – força cortante por unidade de comprimento em uma cantoneira de alma

$V_{wa}$  – força cortante resultante em uma cantoneira de alma

$X(\omega)$  – auto-espectro

$X^*(\omega)$  – conjugado do auto-espectro

### **LETRAS GREGAS:**

$\alpha_m$  – relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto

$\gamma_i$  – coeficiente de ponderação dos esforços

$\delta_2$  - deslocamento devido à carga variável

$\Delta_{FI}$  – leitura do flexímetro posicionado próximo à mesa inferior da viga secundária nos ensaios com os protótipos cruciformes para obtenção das rotações locais

$\Delta_{FP.A.C}$  – deslocamento do ponto de aplicação de carga nos ensaios com os protótipos cruciformes

$\Delta_{FS}$  – leitura do flexímetro posicionado próximo à mesa superior da viga secundária nos ensaios com os protótipos cruciformes para obtenção das rotações locais

$\delta_t$  - deslocamento devido ao carregamento total

$\Delta t$  – intervalo de integração numérica

$\Delta_{u,r}$  – alongamento último das armaduras

$\Delta_{u,s}$  – “deslizamento” último dos conectores de cisalhamento

$\Delta_{u,sa}$  – deslocamento último da cantoneira de assento

$\Delta V$  – variação de tensão verificada na ponte de Wheatstone montada em um circuito para leitura dos sinais de resposta de um sensor elétrico por meio de um equipamento do tipo *Data Logger*

$\Delta \varepsilon_{,sr}$  – diferença entre a deformação do aço no interior da fissura e no ponto de escorregamento nulo

$\varepsilon_c$  – deformação do concreto

$\varepsilon_s$  – deformação do aço

$\varepsilon_{s,my}$  – deformação média de escoamento da armadura envolvida pelo concreto

$\varepsilon_{s,mu}$  – deformação média última da armadura envolvida pelo concreto

$\varepsilon_{sy}$  – deformação de escoamento da armadura isolada

$\varepsilon_{su}$  – deformação última da armadura isolada

$\eta$  – fator de redução da rigidez inicial de uma ligação utilizado na aproximação trilinear do seu comportamento segundo o Eurocode 3

$\eta_r$  – fator de redução da rigidez inicial de uma ligação utilizado na aproximação bilinear do seu comportamento segundo o Eurocode 3

$\theta$  – rotação em uma ligação

$\theta_{er}$  – parcela elástica da capacidade de rotação requerida de uma ligação

$\theta_g$  – rotação global em uma ligação

$\theta_l$  – rotação local em uma ligação  
 $\theta_{pq}$  - rotação ‘quase plástica’ da seção de momento máximo do vão da viga mista  
 $\theta_{pr}$  – parcela plástica da capacidade de rotação requerida de uma ligação  
 $\theta_{rq}$  – capacidade de rotação requerida de uma ligação  
 $\theta_u$  – capacidade de rotação de uma ligação  
 $\theta_0$  - rotação recuperada quando a ligação é descarregada sob o momento plástico  
 $\mu$  – relação entre a massa do atenuador e a massa modal da estrutura  
 $\xi$  - taxa de amortecimento  
 $\xi_{ot}$  - taxa de amortecimento ótima do atenuador de vibrações  
 $\pi_p$  – energia potencial total  
 $\rho$  – massa específica do material  
 $\rho_s$  - taxa de armadura  
 $\rho_{s,ef}$  - taxa efetiva de armadura  
 $\sigma_n$  – tensão em uma dada fibra do concreto da seção do elemento homogeneizada  
 $\sigma_s$  – tensão do aço  
 $\tau_{sm}$  – tensão de aderência média ao longo do comprimento de introdução  $l_t$   
 $\nu$  - coeficiente de Poisson  
 $\phi$  – diâmetro da armadura  
 $\phi_{pd}$  – curvatura na seção de momento máximo do vão da viga mista  
 $\phi_{pu}$  - curvatura na seção de momento máximo da viga mista quando esta estiver submetida ao momento  $M_p$   
 $\phi_y$  – curvatura correspondente ao momento  $M_y$  da viga mista  
 $\phi_{yq}$  – parcela elástica da curvatura na seção de momento máximo do vão da viga mista  
 $\psi$  – fator de forma da curva  $M \times \theta$  para representação de ligações segundo o Eurocode  
 $\omega$  – frequência circular (rad/s)  
 $\omega_{at}$  - frequência circular do atenuador de vibrações  
 $\omega_c$  - frequência circular de centro de banda preconizada na ISO2631-2

$\omega_d$  - frequência circular do sistema dinâmico amortecido

$\Omega$  - potencial das forças externas

### **VETORES E MATRIZES:**

$[\mathbf{Aux}_1]$  e  $[\mathbf{Aux}_2]$  - matrizes auxiliares para obtenção da matriz  $[\mathbf{B}]$  que relaciona as deformações e os deslocamentos nodais de um elemento de casca geral tridimensional

$[\mathbf{B}]$  - matriz que relaciona as deformações e os deslocamentos nodais de um elemento

$[\mathbf{B}']$  - matriz que relaciona as deformações e os deslocamentos nodais de um elemento no referencial local

$[\tilde{\mathbf{B}}^{AS}]$  - matriz assumida que relaciona as deformações no referencial covariante e os deslocamentos nodais de um elemento

$[\mathbf{C}]$  – matriz de amortecimento global da estrutura

$\{\mathbf{d}_{casca}\}$  – vetor de deslocamentos do elemento de casca geral tridimensional segundo o sistema de coordenadas local nodal

$\{\mathbf{d}_e\}$  – vetor de deslocamentos do elemento segundo o referencial global

$\{\mathbf{d}'_e\}$  – vetor de deslocamentos do elemento segundo o referencial local

$\{\bar{\mathbf{d}}'_e\}$  - vetor de deslocamentos do elemento de pórtico espacial no referencial local segundo os graus de liberdade do plano médio da laje, para compatibilização entre os elementos de pórtico espacial e os elementos de casca

$\{\mathbf{D}\}$  – vetor de deslocamentos nodais global da estrutura

$\{\dot{\mathbf{D}}\}$  - vetor de velocidades nodais global da estrutura

$\{\ddot{\mathbf{D}}\}$  - vetor de acelerações nodais global da estrutura

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  e  $\mathbf{e}_z$  – vetores de base do sistema de coordenadas global (x y z)

$\mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y$  e  $\mathbf{e}'_z$  – vetores de base do sistema de coordenadas local (x' y' z')

[**E**] – matriz de propriedades do material

[**E'**] – matriz de propriedades do material no referencial local

[**Exc**] – matriz por meio da qual são introduzidas as excentricidades nos extremos dos elementos de pórtico espacial com relação ao plano médio da laje

{**F**} – vetor de forças por unidade de volume do elemento

{**F<sub>ext</sub>(t)**} - vetor de forças modais de vibração

{**F<sub>I</sub>**} - vetor de forças de inércia da estrutura

{**F<sub>a</sub>**} - vetor de forças de amortecimento da estrutura

{**F<sub>e</sub>**} - vetor de forças elásticas da estrutura

**g<sub>ξ</sub>, g<sub>η</sub> e g<sub>ζ</sub>** - vetores de base covariante

**g<sup>ξ</sup>, g<sup>η</sup> e g<sup>ζ</sup>** – vetores de base contravariante

[**H**] - matriz que contém as funções de interpolação

[**k<sub>c</sub>**] - matriz de rigidez de um elemento de casca que contém os termos de cisalhamento

[**k<sub>casca</sub>**] – matriz de rigidez do elemento de casca geral tridimensional com cinco graus de liberdade por nó segundo o sistema de coordenadas local nodal

[**k<sub>casca</sub>**]<sup>SCLN</sup><sub>24 x 24</sub> - matriz de rigidez do elemento de casca geral tridimensional com seis graus de liberdade por nó segundo o sistema de coordenadas local nodal

[**k<sub>e</sub>**] – matriz de rigidez do elemento segundo o referencial global

[**k<sub>f</sub>**] – matriz de rigidez de um elemento de casca que contém os termos de flexão

[**k<sub>grelha</sub>**] – matriz de rigidez para elementos de grelha

[**k<sub>grecnp</sub>**] - matriz de rigidez para elementos não-prismáticos de grelha com ligações

$[\mathbf{k}_m]$  - matriz de rigidez de um elemento de casca que contém os termos de membrana

$[\mathbf{k}_{port}]$  – matriz de rigidez para elementos de pórtico espacial

$[\bar{\mathbf{k}}_{port}]$  - matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial segundo os graus de liberdade do plano médio da laje, para compatibilização entre os elementos de pórtico espacial e os elementos de casca

$[\mathbf{k}_{portc}]$  – matriz de rigidez para elementos de pórtico espacial com ligações nos bordos

$[\mathbf{K}]$  – matriz de rigidez global da estrutura

$[\mathbf{j}]$  – matriz jacobiana para o caso bidimensional

$[\mathbf{j}']$  – matriz jacobiana no referencial local

$[\mathbf{J}]$  – matriz jacobiana para o caso tridimensional

$[\mathbf{M}]$  – matriz de massa global da estrutura

$[\mathbf{M}_{casca}]$  – matriz de massa do elemento de casca geral tridimensional

$[\mathbf{M}_{port}]$  – matriz de massa do elemento de pórtico espacial

$\{\mathbf{P}\}$  – vetor de forças nodais aplicadas à estrutura

$\{\mathbf{r}_e\}$  – vetor de forças do elemento devidas a cargas distribuídas nos elementos de grelha e de pórtico espacial ou deformações e tensões iniciais, forças de volume e de superfície nos elementos de casca, segundo o referencial global

$\{\mathbf{r}'_e\}$  – vetor de forças do elemento devidas a cargas distribuídas nos elementos de grelha e de pórtico espacial ou deformações e tensões iniciais, forças de volume e de superfície nos elementos de casca, segundo o referencial local

$\{\bar{\mathbf{r}}'_e\}$  - vetor de forças devidas a cargas distribuídas do elemento de pórtico espacial no referencial local segundo os graus de liberdade do plano médio da laje, para compatibilização entre os elementos de pórtico espacial e os elementos de casca

$\{\mathbf{r}_e\}_{se}$  - vetor de forças nodais devidas a forças por unidade de superfície do elemento

de casca geral tridimensional com cinco graus de liberdade por nó definido no sistema de coordenadas local nodal

$\{\mathbf{r}_e\}_{24 \times 1}^{SCLN}$  - vetor de forças nodais devidas a forças por unidade de superfície do elemento de casca geral tridimensional com seis graus de liberdade por nó definido no sistema de coordenadas local nodal

$\{\mathbf{r}_e\}_{24 \times 1}^{Se}$  - vetor de forças nodais devidas a forças por unidade de superfície do elemento de casca geral tridimensional com seis graus de liberdade por nó definido no sistema de coordenadas global

$\{\mathbf{R}\}$  – vetor de forças global da estrutura

$[\mathbf{R}_{port}]$  – matriz que compõe a matriz de rotação do elemento de pórtico espacial

$[\mathbf{S}]$  – matriz de rigidez global do elemento de grelha com três nós

$[\mathbf{S}_{AA}]$ ,  $[\mathbf{S}_{BB}]$ ,  $[\mathbf{S}_{AB}]$ ,  $[\mathbf{S}_{BA}]$  – partes integrantes da matriz de rigidez global reordenada do elemento de grelha com três nós

$[\mathbf{S}'_G]$  - matriz de rigidez global reordenada do elemento de grelha com três nós

$[\mathbf{T}']$  - matriz que relaciona as coordenadas locais e globais

$[\mathbf{T}_{casca}]$  – matriz de rotação do elemento de casca geral tridimensional com seis graus de liberdade por nó

$[\mathbf{T}_{exc}]$  - matriz de transformação que relaciona os graus de liberdade do plano médio da laje, expressos no vetor  $\{\bar{\mathbf{d}}_e\}$ , e do centro de gravidade do elemento de pórtico espacial, expressos no vetor  $\{\mathbf{d}'_e\}$ , para compatibilização entre os elementos de pórtico espacial e os elementos de casca

$[\mathbf{T}_{grelha}]$  – matriz de rotação do elemento de grelha

$[\mathbf{T}_{port}]$  – matriz de rotação do elemento de pórtico espacial

$[\mathbf{T}_\epsilon]$  - matriz que relaciona os campos de deformação nos referenciais local e global

$[\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon]$  - matriz que relaciona os campos de deformação nos referenciais local e covariante



$\{\mathbf{u}\}$  - campo de deslocamentos

$\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n$  e  $\mathbf{v}_3^n$  - vtores unitários que definem as direções dos vetores  $V_1^n, V_2^n$  e  $V_3^n$

$V_1^n, V_2^n$  e  $V_3^n$  – vetores que definem o sistema de coordenadas local nodal do elemento de casca geral tridimensional

$\mathbf{x}$  – vetor posição no referencial global (x y z)

$\mathbf{X}'$  – vetor posição no referencial local (x' y' z')

$\{\mathbf{X}(t)\}$  – vetor que contém as amplitudes de deslocamento modais de vibração

$\{\dot{\mathbf{X}}(t)\}$  – vetor que contém as amplitudes de velocidade modais de vibração

$\{\ddot{\mathbf{X}}(t)\}$  – vetor que contém as amplitudes de aceleração modais de vibração

$\{\epsilon\}$  - campo de deformações do elemento

$\{\epsilon'\}$  - campo de deformações do elemento no referencial cartesiano local

$\{\tilde{\epsilon}\}$  - campo de deformações do elemento no referencial covariante

$\{\tilde{\epsilon}^{AS}\}$  - campo de deformações assumidas do elemento no referencial covariante

$\{\epsilon_0\}$  – campo de deformações iniciais do elemento

$\{\sigma\}$  – campo de tensões

$\{\sigma'\}$  – campo de tensões do elemento no referencial local

$\{\sigma_0\}$  – campo de tensões iniciais do elemento

$\{\phi\}$  - forma modal de vibração

$\{\phi^S\}$  - vetor de forças por unidade de superfície

$[\Phi]$  - matriz cujas colunas representam as formas modais de vibração

$[\partial]$  - operador diferencial

# Capítulo I: Introdução

---

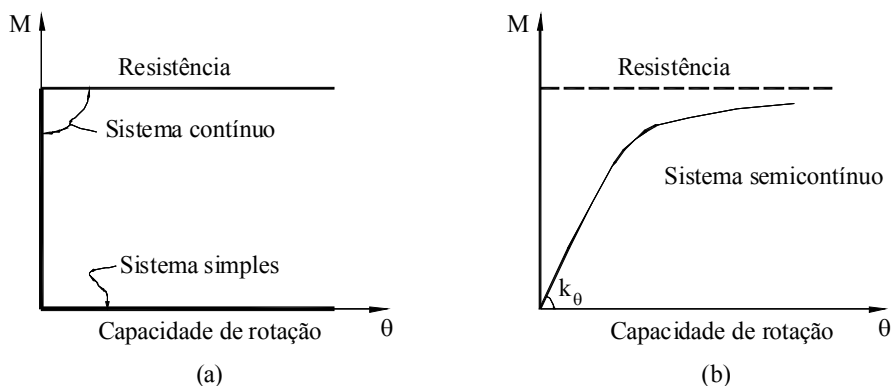
Presente desde os primórdios da humanidade, ainda que sem o estereótipo de Ciência Exata, a Engenharia, ou capacidade de engenhar, tem constituído uma ferramenta essencial à construção e organização racional do espaço, conferindo, pois, ao ser humano uma grande capacidade de adaptação ao meio ambiente.

Basicamente, a função do engenheiro tem sido a de observar, identificar e descrever, física e matematicamente as ações intervenientes no espaço, assim como promover soluções e/ou empreendimentos que permitam o bem-estar social, utilizando-se para isto de materiais estruturais, estejam eles em sua forma bruta, tal qual se encontram na natureza, ou beneficiada.

Se uma equação pudesse traduzir simplificadaamente este processo, talvez a que melhor o fizesse seja  $\sum \gamma_i Q_i \leq R_d$ , já numa linguagem mais apropriada à Engenharia moderna, onde o lado esquerdo da equação representa o somatório dos esforços no elemento estrutural, que deve ser inferior à sua resistência (termos à direita), incluídos os devidos coeficientes de ponderação/minoração. De nada vale, pois, o completo conhecimento do material e do comportamento do elemento isoladamente se a determinação dos esforços, proveniente da análise estrutural, onde o elemento interage, muitas vezes não linearmente com outros componentes da estrutura, não é feita de maneira correta, e vice-versa.

Com efeito, enfoque maior tem sido conferido, seja na formação de novos profissionais, seja em práticas usuais de projeto, à determinação da resistência e comportamento dos materiais (isto tem também se refletido em códigos/normas de projeto), quando a formação de um engenheiro estrutural moderno deveria englobar as esferas da resistência dos materiais, da análise estrutural, análise experimental e análise computacional, cada vez mais necessária no contexto das grandes obras da Engenharia contemporânea. Sendo assim, discussões em torno de temas tais como análise não-linear e dinâmica de estruturas têm se tornado uma constante nos meios acadêmicos, ao passo que entre os engenheiros estruturais estes assuntos, especialmente em países menos desenvolvidos, se mostram ainda incipientes.

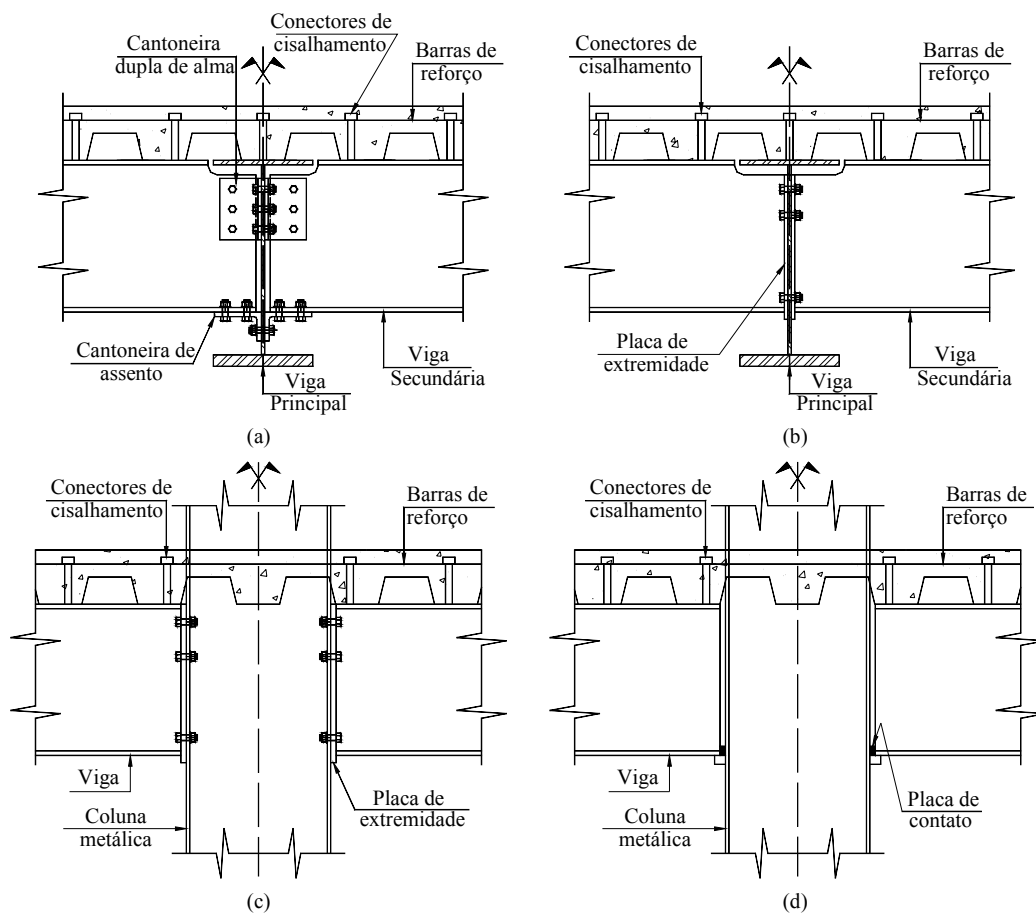
O conceito de ligações semi-rígidas é outro excelente exemplo. Mesmo sendo objeto de estudos desde o início do século XX, os nós estruturais na grande maioria dos projetos têm sido tratados como rígidos ou flexíveis, isto é, tendo a capacidade de transferir todo o momento fletor aos elementos conectados sem que estes experimentem quaisquer rotações relativas, ou de permitir livremente as rotações sem qualquer transferência de momentos. Claramente, estes conceitos são puramente idealizações destes elementos, o que tem conduzido muitas vezes a interpretações equivocadas do comportamento estrutural, apesar de simplificarem bastante o processo de análise. Se antigamente os pórticos eram tratados unicamente como contraventados e não contraventados, ou indeslocáveis e deslocáveis, de acordo com a presença ou não de um sistema rígido de elementos que oferecesse resistência à ação de forças horizontais, aos poucos conceitos de pórticos contínuos, semicontínuos e rotulados têm sido empregados, Fig. I-1.



**Fig. I-1 Concepções convencional (a) e avançada (b) para modelagem de nós estruturais [1].**

A depender do tipo de análise efetuada (elástica ou plástica), as ligações podem ser classificadas quanto à rigidez (rígidas, semi-rígidas e flexíveis) e quanto à capacidade resistente (resistentes, parcialmente resistentes e rotuladas). Inúmeros bancos de dados têm sido elaborados com o intuito de constituir fontes de informações endereçadas à análise estrutural com ligações semi-rígidas, destacando-se os de Goverdhan [2], Nethercot [3], [4] e Kish e Chen [5]. Em sua maioria, fornecem dados sobre ligações metálicas viga-pilar com chapas de extremidade ou cantoneiras de topo, assento e/ou cantoneiras de alma.

Nas duas últimas décadas do século XX, o foco das pesquisas científicas sobre o assunto se transferiu para as ligações semi-rígidas mistas aço-concreto. Neste novo conceito, armaduras são introduzidas na laje de concreto na região de momentos negativos de vigas mistas, conferindo, assim, com os demais componentes metálicos (chapas de extremidade, cantoneiras, chapas de contato, por exemplo) o caráter misto da ligação. Além disso, conectores de cisalhamento se encarregam de transferir os esforços das armaduras para a viga e componentes metálicos – Fig. I-2.



**Fig. I-2 Ligações mistas: (a) e (b) viga-viga, (c) e (d) viga-pilar.**

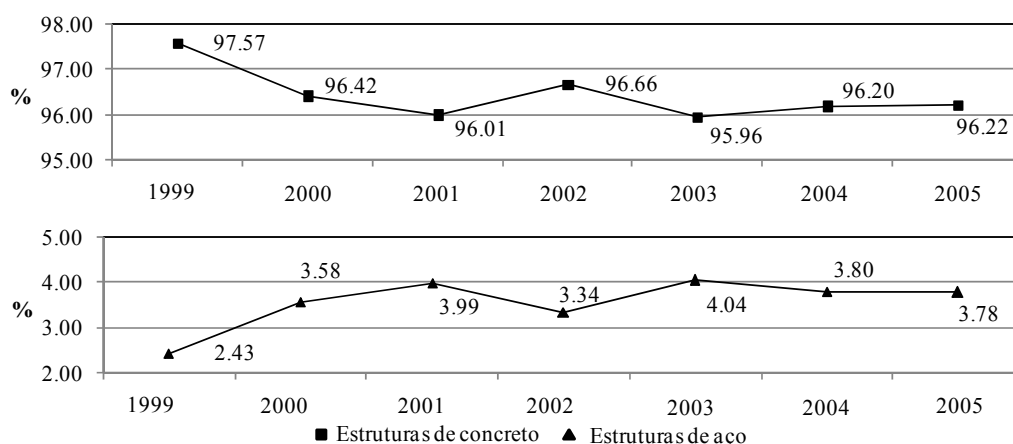
Além dos já conhecidos benefícios que as ligações semi-rígidas metálicas podem propiciar, tais como transferência de uma parcela dos momentos fletores do vão para os apoios, com redução de deslocamentos e ganho de redundância estrutural [6], a adição de armaduras na laje confere grande ductilidade à ligação, além de promover um melhor controle da fissuração ao redor dos apoios.

Se a adoção em práticas usuais de projeto de pórticos semicontínuos já é uma realidade, o mesmo não pode ser afirmado com relação à concepção de sistemas de pisos aço-concreto semicontínuos, com o uso de ligações semi-rígidas mistas para conectar vigas secundárias às principais, o que certamente conduziria a projetos mais econômicos [6]. Dentre os diversos fatores que podem justificar tal fato pode-se citar a carência de pesquisas experimentais com foco em ligações viga-viga, haja vista que o foco ainda paira sobre as ligações viga-coluna.

Durante muito tempo, as vantagens associadas à rapidez e praticidade na execução, elevada resistência e qualidade industrial do material, otimização do espaço útil no interior da edificação com a concepção de grandes vãos para reduzidas alturas de vigas e as levezas estrutural e estética/visual da edificação, foram utilizadas como contrapartida ao elevado custo econômico de uma solução em estrutura metálica ou mista, em um ambiente da Construção Civil nacional onde impera a cultura do concreto armado. Entretanto, isto já não basta. Com o surgimento do concreto de alto desempenho ao lado da já consolidada tecnologia do concreto protendido, elevadas resistências associadas a seções mais esbeltas também passaram a propiciar obras em concreto armado com grandes vãos e semelhante leveza estética/visual. O desenvolvimento da indústria de pré-fabricados também trouxe a praticidade e qualidade industrial característicos da construção metálica, além da popularização de sistemas de lajes nervuradas, cogumelo, e alveolares, entre outros. Conforme pode ser observado na Fig. I-3, apesar do crescimento verificado nos últimos anos, o emprego do aço em estruturas metálicas ainda é pequeno no Brasil.

Portanto, faz-se necessário que uma proposta estrutural em aço seja também competitiva economicamente em face de outras soluções em concreto armado e protendido, haja vista que as vantagens supracitadas já não parecem tão evidentes no atual contexto técnico-econômico. Neste aspecto, acredita-se que um dos caminhos seja a elaboração de projetos avançados de estruturas metálicas e mistas, mais especificamente, o projeto de pisos mistos aço-concreto semicontínuos, com o uso de

ligações mistas viga-viga parcialmente resistentes além das ligações viga-pilar, conduzindo a reduções em peso de aço da ordem de 15 a 25% quando comparado com o sistema tradicional/convencional com vigas bi-rotuladas.



**Fig. I-3 Evolução do emprego do aço nas estruturas no Brasil (fonte: site [www.cbca-ibs.org.br](http://www.cbca-ibs.org.br)).**

Entretanto, concepções avançadas de pisos semicontínuos exigem análises numéricas mais sofisticadas, envolvendo a consideração da plasticidade em vigas e ligações, sendo o estado limite último muitas vezes definido pela configuração de mecanismos de colapso plástico. Portanto, para a execução de tais análises é necessário o uso de modelos bem calibrados, referentes ao comportamento momento versus rotação das ligações e à formação de rótulas plásticas nas vigas metálicas e/ou mistas, assim como se deve prever a fissuração nos elementos de concreto.

Além disso, o engenheiro deve estar ciente de que, ao fazer uso de aços de elevada resistência e de análises plásticas, obtendo, por conseguinte, um viga bastante esbelto, problemas de vibrações excessivas podem ocorrer ao longo da vida útil da estrutura. Portanto, o conceito de projeto avançado aqui defendido não se limita ao equilíbrio estático das estruturas como também se estende ao equilíbrio dinâmico, com a verificação da percepção e conforto humano quanto a vibrações excessivas. Ademais, sendo detectada a possibilidade de vibrações excessivas ainda na fase de projeto, defende-se aqui a aplicação de soluções dinâmicas como o projeto de sistemas de controle de vibração, mais especificamente, sistemas de controle passivos do tipo atenuadores de massa sintonizados em frequência, quando o comum é a solução por meio do enrijecimento estrutural quando o problema já é evidente e constatado ao longo do uso da estrutura, sendo desta forma uma medida corretiva e não planejada.

Sendo assim, este trabalho constitui um esforço no sentido de definir e apresentar diretrizes para o projeto avançado de pisos mistos aço-concreto semicontínuos, estimulando o uso de ligações semi-rígidas metálicas e mistas e, mais particularmente, de ligações mistas viga-viga com cantoneiras, envolvendo a verificação dos estados limite últimos e de serviço, e dos equilíbrios estático e dinâmico.

Para isto, é apresentado no capítulo II um modelo teórico desenvolvido em [6] para representar o comportamento de uma tipologia de ligação mista constituída por cantoneiras de assento e alma, utilizada para conectar uma viga a uma pilar ou duas vigas entre si em um sistema de piso misto - Fig. I-2(a). No capítulo III, são apresentados os resultados de uma campanha experimental realizada no laboratório de estruturas da COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, onde quatro protótipos cruciformes, representativos de um nó estrutural de um sistema de piso, foram testados para avaliação do comportamento momento versus rotação dessa tipologia de ligação e uma variante (sem cantoneiras de alma), sendo os resultados desta pesquisa também utilizados para aferir e calibrar o modelo teórico apresentado no capítulo II.

No capítulo IV, são apresentadas duas ferramentas computacionais para a análise estrutural de projetos avançados de pisos mistos aço-concreto semicontínuos. Em um primeiro programa, Grecon, a estrutura do piso pode ser modelada como uma grelha não-linear, sendo possível a análise de pisos mistos não escorados na fase anterior à cura do concreto. Numa segunda ferramenta, baseada no Método dos Elementos Finitos, PAEST3D, o piso é modelado como uma estrutura espacial, sendo o comportamento global avaliado por meio de análises estáticas e dinâmicas com possibilidade de redução e controle de vibrações por meio da aplicação de atenuadores dinâmicos sintonizados (ADSs) na frequência de um modo de vibração da estrutura. No capítulo V, são apresentados os resultados de outra campanha experimental realizada no laboratório de estruturas da COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, onde um piso misto semicontínuo em escala real ( $60 m^2$  de área) com ligações segundo a tipologia da Fig. I-2(a) foi testado estática e dinamicamente a fim de se avaliar a metodologia de projeto proposta e os modelos empregados. No capítulo VI, por sua vez, um estudo de caso envolvendo uma estrutura de piso misto real de grande porte é realizado com o intuito de empregar todos os modelos e ferramentas desenvolvidos, testados e apresentados nesta tese de forma a aplicar a metodologia aqui defendida. Por fim, no capítulo VII são apresentadas as conclusões deste estudo.

# Capítulo II: Modelo Teórico para Ligações Mistas com Cantoneiras

---

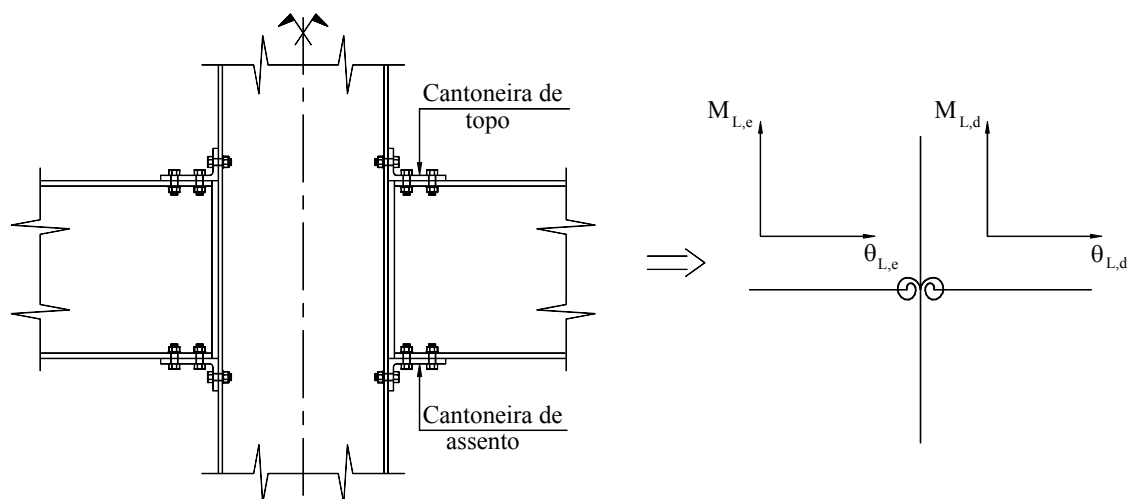
## II.1 REPRESENTAÇÃO FÍSICA

Ao avaliar a real influência do comportamento de ligações semi-rígidas na resposta do pórtico ou estrutura em questão, o engenheiro é conduzido a assumir algumas hipóteses simplificadoras com o intuito de representar física e matematicamente o nó estrutural – o conceito de nó estrutural tem, neste caso, um caráter mais abrangente, incluindo não somente os elementos de ligação propriamente ditos como também os componentes deformáveis dos elementos conectados; em um nó viga-coluna, a deformação da alma do pilar devido à força de corte pode também ser considerada, por exemplo.

Assim, como uma primeira simplificação, os componentes da ligação não são representados em seu tamanho real, finito, mas sim por meio de uma mola de natureza rotacional, concentrada nos nós de ligação dos elementos que constituem o modelo numérico/analítico elaborado para analisar o comportamento da estrutura em questão.

Na Fig. II-1, um nó estrutural de ligação entre duas vigas e uma coluna é apresentado.





**Fig. II-1 Vigas metálicas conectadas à coluna por meio de cantoneiras de assento e topo – representação física de um nó estrutural.**

Como se pode notar, o comportamento tridimensional do nó é suprimido, sendo apenas o comportamento planar considerado – em geral, a presença de lajes de concreto com grande rigidez no seu plano justifica tal prerrogativa. Além disso, apenas o comportamento momento versus rotação é comumente considerado, assumindo-se, pois, que o nó estrutural confere continuidade quanto à transmissão de esforços cisalhantes e axiais – nada impede, todavia, que o nó seja representado por uma mola de caráter mais abrangente, com a consideração de deformações referentes a solicitações de outras naturezas.

## II.2 REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA

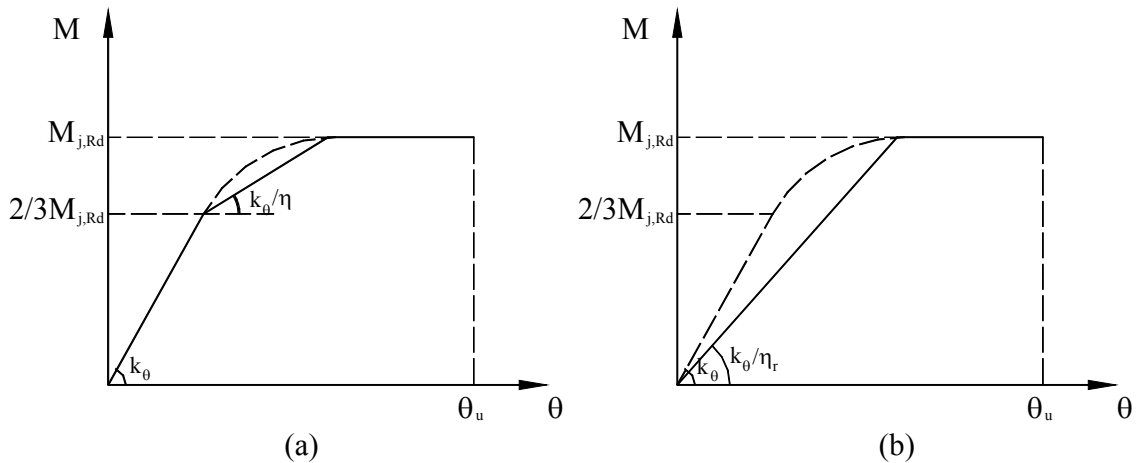
Como ilustrado na Fig. II-1, o comportamento das molas representativas da ligação entre elementos estruturais é caracterizado pela curva momento x rotação ( $M \times \theta$ ). Diversas são as formas para elaboração destas curvas, sendo que as que mais se destacam são aquelas baseadas em parâmetros físicos tais como rigidez inicial,  $k_\theta$ , resistência à flexão,  $M_{j,Rd}$  e capacidade de rotação,  $\theta_u$ . Segundo o *Eurocode 3*, [7], o comportamento momento x rotação de uma conexão, Fig. II-2, pode ser definido segundo três trechos:

□ 1º trecho:  $M = k_\theta \times \theta$ , para  $M \leq 2/3 M_{j,Rd}$  ;

□ 2º trecho:  $M = \frac{k_\theta}{(1,5 \times M / M_{j,Rd})^\psi} \times \theta$ , para  $2/3 M_{j,Rd} < M \leq M_{j,Rd}$  ;

□ 3º trecho (patamar):  $M = M_{j,Rd}$  .

onde  $\psi$  é um fator que depende do tipo da conexão, assumindo um valor igual a 2,7 para conexões com cantoneiras de topo, assento e alma ou chapas de extremidade, por exemplo.



**Fig. II-2 Curvas momento x rotação segundo o Eurocode 3 [7]: (a) aproximação trilinear; (b) aproximação bilinear.**

O uso de uma representação não linear para o comportamento de ligações semi-rígidas exige, pois, um programa para análise estrutural mais sofisticado, do qual carece, não raro, um escritório de projetos. Sendo assim, algumas simplificações são possíveis, como a aproximação trilinear ( $\eta = 7$  ou  $8,5$ ), ilustrada na Fig. II-2(a). Ainda com um propósito de simplificação, a aproximação bilinear também é sugerida em [7], adotando-se, entretanto, uma rigidez elástica constante como uma fração da rigidez inicial - Fig. II-2(b); o coeficiente  $\eta_r$  é função do tipo de conexão, assumindo valores correspondentes a  $3,0$  e  $2,0$  para ligações mistas com chapas de extremidade e chapas de contato, respectivamente. Maiores detalhes podem ser encontrados em [1] e [7].

O grau de sofisticação na modelagem do nó implica, pois, no tipo de análise a ser efetuada. Uma análise elástica com  $k_j = k_o$  poderá ser realizada desde que o momento atuante seja inferior a  $2/3M_{jrd}$  - a ligação deve, também, ter resistência suficiente para transmitir os esforços entre os elementos conectados.

Se a análise é rígido-plástica, Fig. I-1(a), a característica dominante é a resistência à flexão. Rótulas plásticas podem se formar na ligação ou nos elementos conectados, a depender se o nó é parcialmente ou completamente resistente, devendo os pontos de formação de rótulas possuir capacidade de rotação suficiente para a formação de um mecanismo.

Por fim, uma análise elasto-plástica também é possível, sendo utilizada a curva  $M \times \theta$  não linear da Fig. II-2 para representar o comportamento da ligação – a capacidade de rotação neste caso também é uma variável a ser avaliada.

Outra formulação bastante utilizada para representar o comportamento de ligações semi-rígidas é a de Goldberg-Richard [8], Eq.(II-1), que, além da rigidez inicial e resistência à flexão, utiliza também uma rigidez plástica,  $k_{\theta,p}$ , e um fator de forma,  $n$ , que mede o grau de angulosidade ou curvatura da curva:

$$\frac{M}{M_0} = \frac{(1 - \bar{k}_p) \frac{\theta}{\theta_0}}{\left[ 1 + \left| (1 - \bar{k}_p) \frac{\theta}{\theta_0} \right|^n \right]^{1/n}} + \bar{k}_p \frac{\theta}{\theta_0}, \quad \bar{k}_p = \frac{k_{\theta,p}}{k_\theta} \quad \text{Eq.(II-1)}$$

onde  $\theta_0$  é a rotação recuperada quando a ligação é descarregada sob o momento plástico  $M_0$  -  $M_0 = k_\theta \times \theta_0$ . Como se pode notar, apesar de mais complexa, esta expressão representa melhor o comportamento da ligação, uma vez que é não linear, contínua e capaz de representar fenômenos relativos ao ganho, *hardening*, ou perda, *softening*, de rigidez pós-escoamento por meio do parâmetro  $k_{\theta,p}$ .

### II.3 O MÉTODO DOS COMPONENTES

Modelos analíticos, empíricos, numéricos (elementos finitos) e mecânicos têm sido ao longo dos anos empregados para estimar os parâmetros físicos necessários à obtenção da curva  $M \times \theta$  representativa do comportamento de uma ligação. Pesquisas experimentais, por sua vez, têm indicado quais métodos têm produzido resultados teóricos mais correlatos com a realidade.

Dentre os diversos modelos existentes, o método dos componentes [7] tem se mostrado bastante atrativo por sua simplicidade e eficiência, o que tem justificado o seu largo uso na comunidade científica e nos escritórios de projeto. Modelo mecânico por natureza, o método consiste basicamente em:

- Identificar os componentes que efetivamente contribuem para a deformação do nó;
- Representar tais elementos por meio de molas de natureza translacional caracterizadas por relações constitutivas do tipo  $F \times \delta$  (força x deslocamento);

- Agrupar os componentes segundo o tipo de solicitação (tração, compressão, cisalhamento ou flexão), associando-os em série ou paralelo para obtenção de molas equivalentes para cada camada/linha de parafusos da ligação;
- Compatibilizar estes elementos de deformação (molas) a fim de estimar os parâmetros físicos necessários à obtenção da curva  $M x \theta$ .

Pode-se perceber, desde já, que uma das vantagens do método é a possibilidade de se considerar, de maneira simples, a deformação do elemento de apoio, como a flexão da mesa do pilar ou a deformação por compressão e cisalhamento da alma, numa ligação viga-coluna sem enrijecedores, por exemplo.

## **II.4 MODELO PARA LIGAÇÃO MISTA COM CANTONEIRAS**

Neste item, procura-se, sucintamente, descrever o modelo teórico desenvolvido em [6] e aperfeiçoado em [9], baseado no método dos componentes, para representar o comportamento  $M x \theta$  da tipologia de ligação mista submetida à campanha experimental, tipologia esta constituída por cantoneiras de assento, barras de reforço na laje de concreto, conectores de cisalhamento e cantoneiras de alma - Fig. I-2(a).

Haja vista que sistemas de pisos mistos não são, em geral, escorados na fase anterior à cura do concreto, o que, inclusive, é uma das características que tornam a solução ainda mais atrativa, expressões para determinação dos parâmetros físicos relativos ao comportamento da ligação nesta fase também são apresentados – a viga e os componentes metálicos da ligação devem, pois, resistir aos carregamentos desta etapa sem a participação da laje de concreto.

Apesar de o modelo estar focado em ligações viga-viga, a teoria também pode ser estendida a nós viga-coluna desde que, na ausência de enrijecedores, sejam também considerados os elementos de deformação do pilar. Finalmente, a teoria está limitada aos casos em que não há desbalanceamento de momentos entre as vigas conectadas à viga principal ou coluna, seja no sentido da maior ou menor inércia.

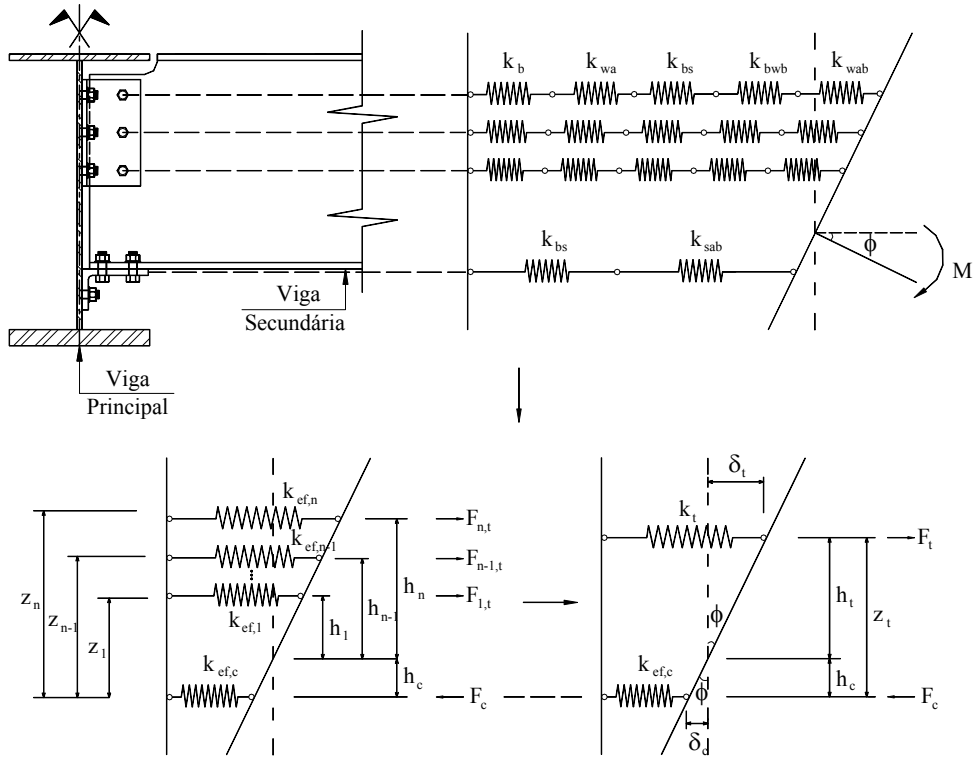
### **II.4.1 Fase anterior à cura do concreto**

Uma vez que muitas vezes a sobrecarga referente à vida útil da estrutura é pouco significativa com relação ao peso próprio, sendo, pois, a fase anterior à cura do concreto determinante no projeto, a consideração da rigidez da ligação nesta fase, mesmo que

pequena, pode implicar em economia para a obra. Sendo assim, neste item, os parâmetros referentes à rigidez inicial e resistência à flexão para a ligação puramente metálica são estimados.

#### II.4.1.1 Rigidez inicial

O modelo mecânico, elástico, apresentado na Fig. II-3, pode ser utilizado para estimar a rigidez inicial da ligação puramente metálica:



**Fig. II-3 Modelo mecânico para determinação da rigidez inicial da ligação metálica, [9].**

onde  $k_b$  e  $k_{bs}$  são os coeficientes de rigidez dos parafusos à tração e ao corte;  $k_{wa}$  é a rigidez das cantoneiras da alma à flexão e  $k_{wab}$ ,  $k_{bwb}$  e  $k_{sab}$  são os coeficientes de rigidez relativos à pressão de contato (*bearing*) das cantoneiras da alma, da alma da viga secundária e da cantoneira de assento, respectivamente.

Por sua vez,  $k_{ef,i}$  corresponde à rigidez da mola equivalente de uma dada camada da ligação na região tracionada, obtida por meio de uma associação em série[7]:

$$k_{ef,i} = \frac{1}{\frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_{bs}} + \frac{1}{k_{wa}} + \frac{1}{k_{bwb}} + \frac{1}{k_{wab}}} \quad \text{Eq.(II-2)}$$

onde os termos  $k_{bs}$ ,  $k_{wab}$  e  $k_{bwb}$  podem ser desconsiderados desde que a aba da cantoneira de alma adjacente à alma da viga secundária seja considerada como um corpo rígido [10].

A rigidez equivalente dos componentes da região comprimida pode ser estimada por [9]:

$$k_{ef,c} = \frac{1}{\frac{1}{k_{bs}} + \frac{1}{k_{sab}}} \quad \text{Eq.(II-3)}$$

Por meio do equilíbrio de forças e momentos e compatibilidade entre deslocamentos e rotações na Fig. II-3, a rigidez inicial da ligação metálica,  $k_{\theta,me}$ , pode ser estimada [9]:

$$k_{\theta,me} = \frac{z_t^2}{\left(\frac{1}{k_{ef,c}} + \frac{1}{k_t}\right)} \quad \text{Eq.(II-4a)}$$

sendo a distância  $z_t = h_c + h_t$  e a rigidez da mola equivalente da região tracionada dadas por [9]:

$$k_t = \left( \sum_{i=1}^n k_{ef,i} \times h_i^2 \right) / h_t^2 \quad \text{Eq.(II-4b)}$$

$$h_t = \frac{\sum_{i=1}^n (k_{ef,i} \times h_i^2)}{\sum_{i=1}^n (k_{ef,i} \times h_i)} \quad \text{Eq.(II-4c)}$$

$$k_{ef,c} \times h_c = \sum_{i=1}^n (k_{ef,i} \times (z_i - h_c)) \quad \text{Eq.(II-4d)}$$

A rigidez de cada componente individual de deformação pode ser avaliada segundo a Tab. II-1 [7], onde  $A_b$ ,  $d_b$  e  $L_b$  são a área da seção transversal, o diâmetro e comprimento dos parafusos;  $E$  e  $f_{ui}$  ( $i = b$  ou  $p$ ) são o módulo de deformação longitudinal e a tensão de tração última do aço;  $d_{M16}$  é um diâmetro de referência, enquanto que  $t_i$  refere-se à espessura da placa considerada. Finalmente,  $e_b$  e  $p_b$  são, na direção de transferência da força, a distância entre a linha de parafusos e o bordo da

chapa e distância entre linhas de parafusos. Vale salientar que estes coeficientes referem-se sempre a uma linha constituída por dois parafusos.

**Tab. II-1 Coeficientes de rigidez para componentes individuais [7].**

Elemento	$K$
Parafusos em tração	$1,6 \times E \times A_b / L_b$
Cantoneiras da alma em flexão	$0,85 \times E \times b_{ef,wa} \times t_{wa}^3 / m_{wa}^3$
Parafusos em corte	$16 \times d_b^2 \times f_{ub} / d_{M16}$
Placas conectadas por parafusos sujeitos a corte	$24 \times k_b \times k_a \times d_b \times f_{up},$ $k_b = \min(0,25 \times e_b / d_b + 0,5; 0,25 \times p_b / d_b + 0,375; 1,25)$ $k_a = \min(1,5 \times t_p / d_{M16}; 2,5)$

A variável  $b_{ef,wa}$  corresponde a larguras equivalentes de *T-stubs* utilizados para representar o comportamento das cantoneiras da alma à flexão, podendo ser avaliada segundo a Tab. II-2 [8] – as variáveis encontram-se identificadas na Fig. II-4.

**Tab. II-2 Larguras efetivas para linhas de parafusos de cantoneiras de alma [8].**

Parafusos	$b_{ef,wa}$
Internos	$\min = (2 \times \pi \times m_{wa}; 4 \times m_{wa} + 1,25 \times e_{wa}; 2 \times p_{wa}; p_{wa})$
Externos	$\min = \left( \begin{array}{l} \pi \times m_{wa} + p_{wa}; 2 \times m_{wa} + 0,625 \times e_{wa} + 0,5 \times p_{wa}; 2 \times \pi \times m_{wa}; \pi \times m_{wa} + d_{wa}; \\ 4 \times m_{wa} + 1,25 \times e_{wa}; 2 \times m_{wa} + 0,625 \times e_{wa} + d_{wa}; p_{wa} / 2 + d_{wa} \end{array} \right)$

#### II.4.1.2 Momento último

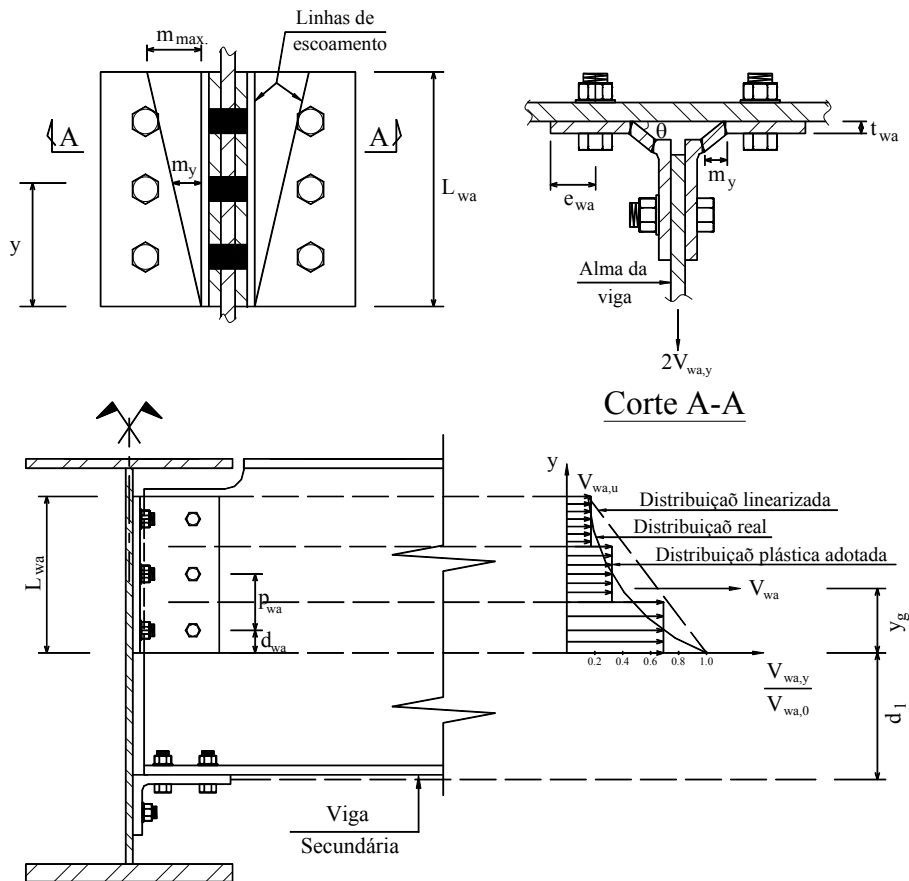
A capacidade resistente da ligação na fase anterior à cura do concreto pode ser estimada a partir dos estudos desenvolvidos por Chen e Lui [11], onde o mecanismo de colapso se caracteriza pela formação, ao longo da altura das cantoneiras, de linhas de escoamento segundo a Fig. II-4. A força de corte resultante  $V_{wa}$  e sua posição  $y_g$  podem ser dadas por:

$$V_{wa} = L_{wa} \times \frac{(V_{wa,0} + V_{wa,u})}{2} \quad \text{Eq.(II-5)}$$

$$y_g = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times V_{wa,u} + V_{wa,0}}{V_{wa,u} + V_{wa,0}} \times L_{wa} \quad \text{Eq.(II-6)}$$

onde  $V_{wa,u}$  e  $V_{wa,0}$  são a força cortante por unidade de comprimento fazendo-se  $m_y = m_{máx}$  e  $m_y = 0$  na Eq.(II-7), desenvolvida a partir do equilíbrio entre trabalho externo e interno e considerando-se a interação entre força cortante e momento fletor no mecanismo de colapso ( $f_y$  é a tensão de escoamento):

$$\left(\frac{V_{wa,y}}{V_{wa,0}}\right)^4 + \frac{m_y}{t_{wa}} \times \left(\frac{V_{wa,y}}{V_{wa,0}}\right) = 1, V_{wa,0} = \frac{t_{wa} \times f_y}{2} \quad \text{Eq.(II-7)}$$



**Fig. II-4 Mecanismo de colapso das cantoneiras de alma em flexão segundo Chen e Lui [11].**

Assim, a capacidade resistente da ligação da Fig. I-2(a) na fase anterior à cura do concreto pode ser estimada, desprezando-se a resistência plástica da cantoneira de assento, por:

$$M_{u,me} = 2 \times V_{wa} \times (y_g + d_1) \quad \text{Eq.(II-8)}$$



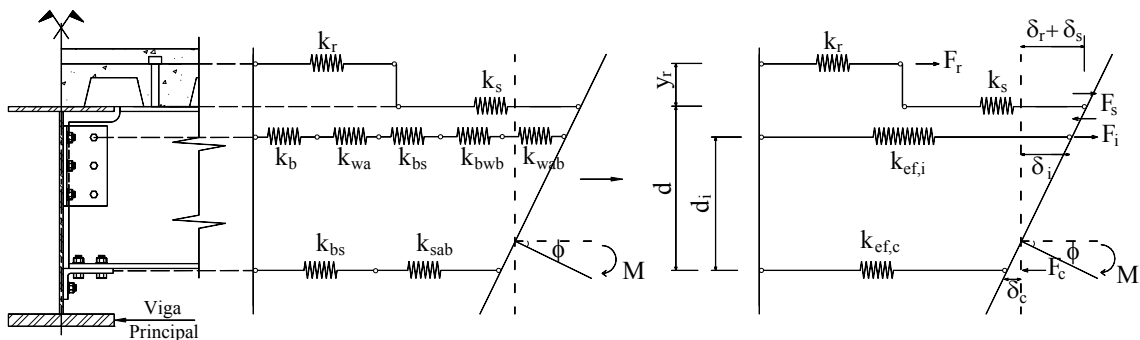
## II.4.2 Fase posterior à cura do concreto

Depois do período de cura do concreto, as barras de aço presentes na laje passam a interagir com os componentes metálicos da ligação, sendo a transferência de esforços realizada por meio de conectores de cisalhamento. Vale salientar, entretanto, que a depender de quão significativa seja a contribuição dos componentes metálicos à rigidez inicial da ligação, poder-se-á também considerar a contribuição do concreto, o que será mais discutido no Capítulo III – neste momento, pois, a contribuição do concreto para a rigidez inicial da ligação será desprezada.

Nos itens seguintes, expressões desenvolvidas em [6] e [9] são sugeridas para estimar os parâmetros físicos relativos à ligação mista ilustrada na Fig. I-2(a).

### II.4.2.1 Rigidez inicial

O seguinte modelo, elaborado de maneira análoga àquele sugerido em [12] para representar o comportamento de ligações com chapas de extremidade, pode ser utilizado para estimar a rigidez inicial da ligação, no caso de construções escoradas na fase anterior à cura do concreto:



**Fig. II-5 Modelo mecânico para determinação da rigidez inicial da ligação mista da Fig. I-2(a), no caso de construções escoradas na fase de cura do concreto [9].**

O equilíbrio de forças no modelo da Fig. II-5 -  $F_c = F_r + F_p$  -, a consideração da interação completa entre a laje de concreto e a viga metálica -  $F_r = F_s$  - e a compatibilidade entre deslocamentos e rotações,

$$\phi \cong \tan g\phi = \frac{\delta_r + \delta_s + \delta_c}{d} = \frac{\delta_c + \delta_i}{d_i} \quad \text{Eq.(II-9)}$$

conduz a um sistema de equações em função das forças nas armaduras,  $F_r$ , e da força no nível onde se localiza a primeira linha de parafusos,  $F_i$ .

Tomando-se a solução deste sistema e, uma vez que o momento fletor na ligação pode ser dado por

$$M = F_r \times (d + y_r) + F_i \times d_i, \quad \text{Eq.(II-10)}$$

a rigidez inicial rotacional da ligação para a fase mista, no caso de construções escoradas na fase de cura do concreto, pode ser estimada por [9]:

$$k_{\theta,mi} = \frac{\frac{d_i}{k_{ef,c}} \times (2 \times d + y_r) - d \times (d + y_r) \times \left( \frac{1}{k_{ef,c}} + \frac{1}{k_{ef,i}} \right) - d_i^2 \times \left( \frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_{ef,c}} \right)}{\frac{1}{k_{ef,c}^2} - \left( \frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_{ef,c}} \right) \times \left( \frac{1}{k_{ef,c}} + \frac{1}{k_{ef,i}} \right)} \quad \text{Eq.(II-11a)}$$

Para as construções não escoradas na fase de cura do concreto, o que, aliás, é a concepção mais comum, admite-se que a capacidade resistente das cantoneiras de alma tenha sido esgotada sob as cargas referentes a esta fase, com a plastificação parcial ou completa destes elementos, desprezando-se, pois, sua contribuição para a rigidez inicial. A Eq.(II-11b) pode então ser utilizada para estimar a rigidez da ligação [9]:

$$k_{\theta,mi} = \frac{d \times (d + y_r)}{\frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_{ef,c}}} \quad \text{Eq.(II-11b)}$$

Vale salientar que a Eq.(II-11b) pode também ser utilizada para estimar a rigidez inicial desta tipologia de ligação sem as cantoneiras da alma, cuja concepção pode ser aplicada a construções escoradas na fase de cura do concreto.

Os coeficientes de rigidez das barras de aço em tração,  $k_r$ , e dos conectores de cisalhamento,  $k_s$ , podem ser estimados segundo a Tab. II-3:

**Tab. II-3 Coeficientes de rigidez para os componentes relativos à laje de concreto armado.**

Elemento	$k$
Armaduras em tração	$k_r = E \times A_r / L_r, L_r = L_a / 2 + e_{co}$
Conectores de cisalhamento ( <i>studs</i> )	$k_s = 200 \times N_s$

onde  $E$  e  $A_r$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e área das barras de reforço;  $L_a$  e  $e_{co}$  são a largura do elemento de apoio na direção longitudinal das barras e a distância da face do elemento de apoio ao primeiro conector.

O parâmetro  $N_s$  corresponde ao menor valor entre o número de conectores na região de momento negativo e a quantidade mínima necessária à interação completa, enquanto que a constante  $200 \text{ kN/mm}$  refere-se ao valor médio sugerido em [12] para a rigidez ao cisalhamento de conectores soldados tipo pino com cabeça, *studs*, a qual, segundo estudos, pode variar entre  $110$  e  $350 \text{ kN/mm}$ . A referência [1] adota um valor correspondente a  $100 \text{ kN/mm}$ .

#### II.4.2.2 Momento último

Admitindo-se que a interação entre a laje de concreto e a viga metálica seja completa, que a cantoneira de assento tenha capacidade suficiente para resistir aos esforços provenientes das fases anterior e posterior à cura do concreto e o estado limite último seja caracterizado pelo escoamento das barras de reforço na laje, o momento último da ligação mista pode ser estimado por:

$$M_{u,mi} = M_{u,me} + A_r \times f_{y,r} \times (d + y_r) \quad \text{Eq.(II-12a)}$$

e, na ausência das cantoneiras de alma,

$$M_{u,mi} = A_r \times f_{y,r} \times (d + y_r) \quad \text{Eq.(II-12b)}$$

onde  $f_{y,r}$  corresponde à tensão de escoamento do aço das armaduras e  $M_{u,me}$  refere-se à contribuição das cantoneiras da alma segundo a Eq.(II-8).

#### II.4.2.3 Capacidade de rotação

A capacidade de rotação disponível de uma ligação é uma variável essencial quando o engenheiro faz uso de análises rígido ou elasto-plásticas, sejam elas baseadas em um comportamento idealizado da ligação ou não, segundo as Fig. I-1 e Fig. II-2.

Em sistemas contínuos, as rótulas plásticas se formam nos elementos, projetados segundo seções compactas, possuidoras de grande capacidade de redistribuição dos esforços, o que confere certa ductilidade ao sistema. Em estruturas constituídas por ligações parcialmente resistentes, por sua vez, em geral as rótulas plásticas se formarão primeiramente nas ligações. Estas devem possuir, pois, capacidade de rotação suficiente para continuar a se deformar e permitir que outras rótulas se formem nos vãos, caracterizando, assim, o mecanismo de colapso.

Para a tipologia de ligação mista em estudo, os principais recursos de deformação que contribuem para a capacidade de rotação são o alongamento último das

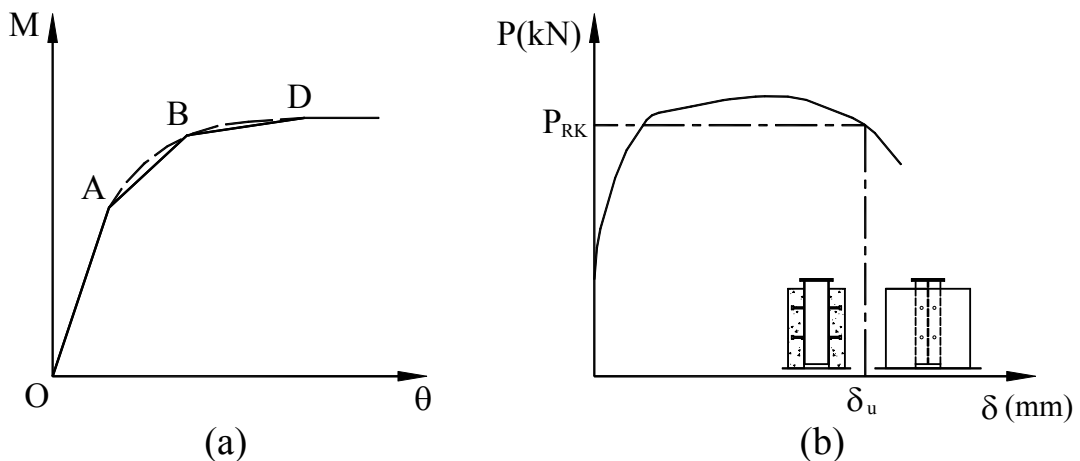
armaduras,  $\Delta_{u,r}$ , a deformação da cantoneira de assento,  $\Delta_{u,sa}$ , e o escorregamento entre a viga metálica e a laje de concreto,  $\Delta_{u,s}$ , apesar da interação completa.

Sendo assim, a capacidade de rotação pode ser estimada, com o auxílio da Fig. II-5 por:

$$\theta_u = \frac{\Delta_{u,r} + \Delta_{u,s} + \Delta_{u,sa}}{d} \quad \text{Eq.( II-13)}$$

onde, segundo [13], a deformação da cantoneira de assento pode ser estimada por um valor correspondente a 4 mm.

O deslizamento último dos conectores de cisalhamento pode ser estimado segundo a Fig. II-6(a), uma aproximação trilinear OABD para o comportamento destes elementos [1]. Na Fig. II-6(b), a forma real de uma curva carga x deslocamento dos conectores em um ensaio experimental é apresentada [14].



**Fig. II-6 (a) Aproximação OABD para comportamento dos conectores de cisalhamento [1]; (b) Curva carga x deslocamento típica de *push tests* [14].**

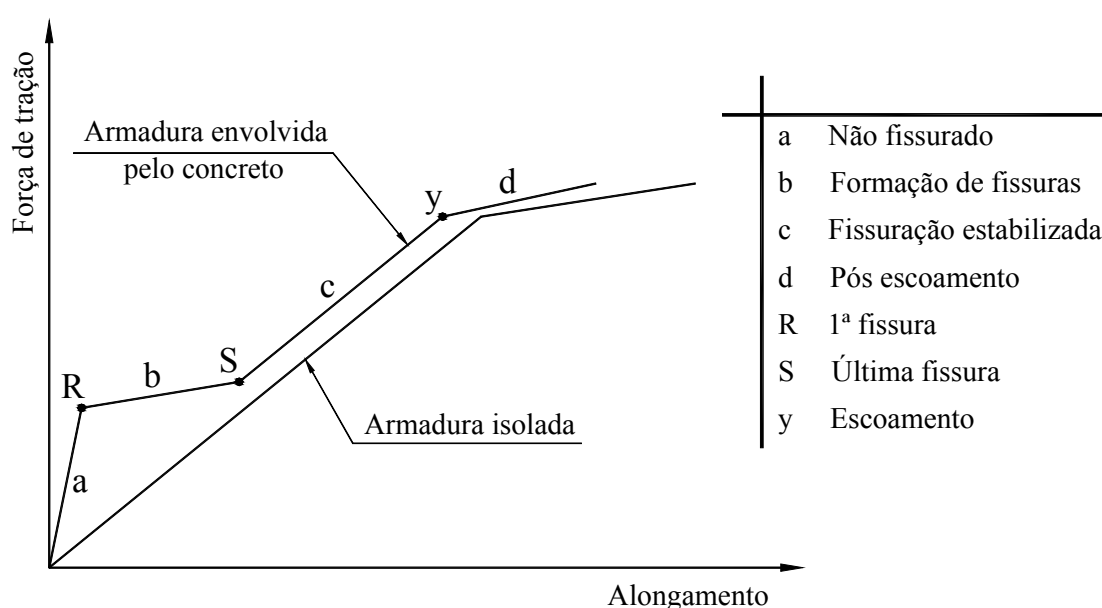
O deslizamento último,  $\Delta_{u,s} = S_b$ , seria função do deslocamento em A,  $S_A$ , quando é suposto o começo do escoamento do conector mais solicitado, sob uma carga correspondente a 70% da sua resistência. Pode-se supor então que:

$$\text{Eq.( II-14)}$$

onde  $F_s^B$  e  $F_s^A$  seriam, respectivamente, a força nos conectores nos pontos B (início do escoamento das armaduras) e A. Maiores detalhes podem ser encontrados em [1].

Estimar o alongamento último das barras de reforço em tração requer, de certa forma, um pouco mais de cuidado. O processo de fissuração do elemento de concreto armado assume, pois, papel fundamental, fazendo-se necessário atentar para os comportamentos distintos das relações tensão versus deformação referentes a armaduras envolvidas pelo concreto e isoladas.

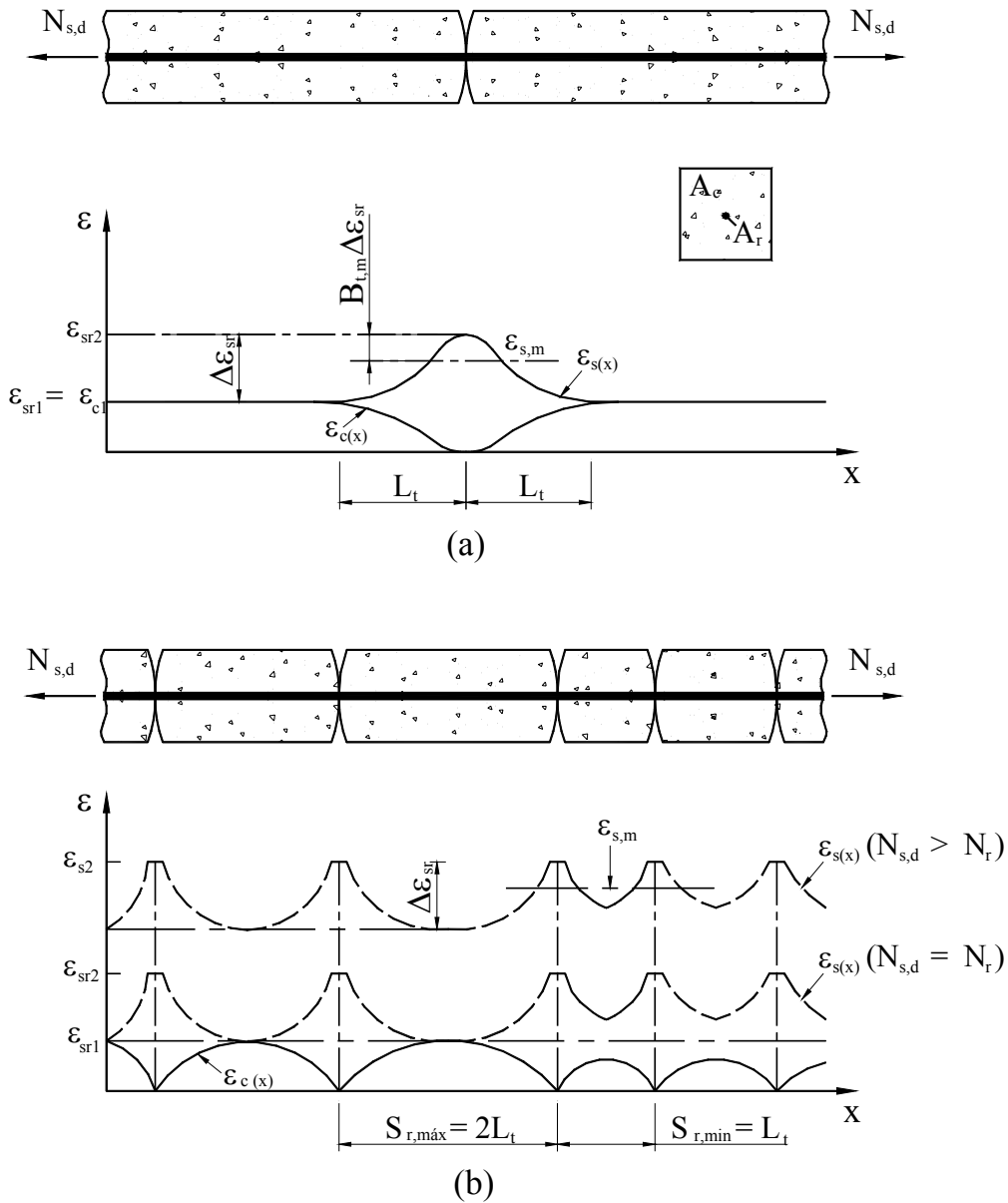
A teoria descrita a seguir, apresentada em [15], foi desenvolvida em torno do comportamento idealizado de um tirante de concreto armado, Fig. II-7, devendo, pois, o leitor perceber desde já a dificuldade em se estender tal teoria ao comportamento de membros fletidos.



**Fig. II-7 Comportamento idealizado de um tirante de concreto armado [15].**

As deformações no concreto e no aço ao longo do comprimento do tirante são ilustradas na Fig. II-8, referentes ao processo de formação da primeira fissura, Fig. II-8(a), e ao estado de fissuração estabilizado, Fig. II-8(b).

Entre fissuras, as forças de tração na armadura são transferidas para o concreto por meio de forças de aderência, constituindo, pois, o concreto desta região um fator de enrijecimento das mesmas – *tension stiffening effects*. A distância entre fissuras máxima, onde o escorregamento entre o concreto e o aço ocorre, pode ser tomada como o dobro do comprimento de introdução/transmissão  $l_t$ .



**Fig. II-8 Deformações ao longo do tirante de concreto armado: (a) formação da primeira fissura; (b) estado de fissuração estabilizado [15].**

A força que deve ser introduzida no concreto por aderência (ou interação com outras partes da estrutura) para promover a fissuração dentro da área de concreto efetiva,  $A_{c,ef}$ , no final do comprimento de introdução pode ser dada, no caso da fissuração estabilizada, por:

$$F_{cr} = A_{c,ef} \times f_{ctm} \times (1 + \alpha_m \times \rho_{s,ef}) \times k_c \quad \text{Eq. (II-15)}$$

onde  $f_{ctm}$  é a resistência à tração média do concreto,  $\alpha_m$  é razão entre os módulos de elasticidade longitudinal do aço e do concreto e  $\rho_{s,ef}$  é a taxa efetiva de armadura,  $A_r/A_{c,ef}$ .

O efeito benéfico do enrijecimento das armaduras promovido pelo seu envolvimento no concreto pode ser considerado por meio de um diagrama tensão versus deformação modificado, ilustrado na Fig. II-9 e composto por quatro trechos [15]:

□ Não fissurado:

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_{s1}, \quad 0 < \sigma_s \leq \sigma_{sr1} \quad \text{Eq.( II-16a)}$$

□ Formação de fissuras:

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_{s2} - \frac{B_t(\sigma_s - \sigma_{sr1}) + (\sigma_{srn} - \sigma_s)}{(\sigma_{srn} - \sigma_{sr1})}(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}), \quad \sigma_{sr1} < \sigma_s \leq \sigma_{srn} \quad \text{Eq.(II-16b)}$$

□ Fissuras estabelecidas:

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_{s,2} - \beta_t(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}), \quad \sigma_{srn} < \sigma_s \leq f_y \quad \text{Eq.(II-16c)}$$

□ Pós escoamento:

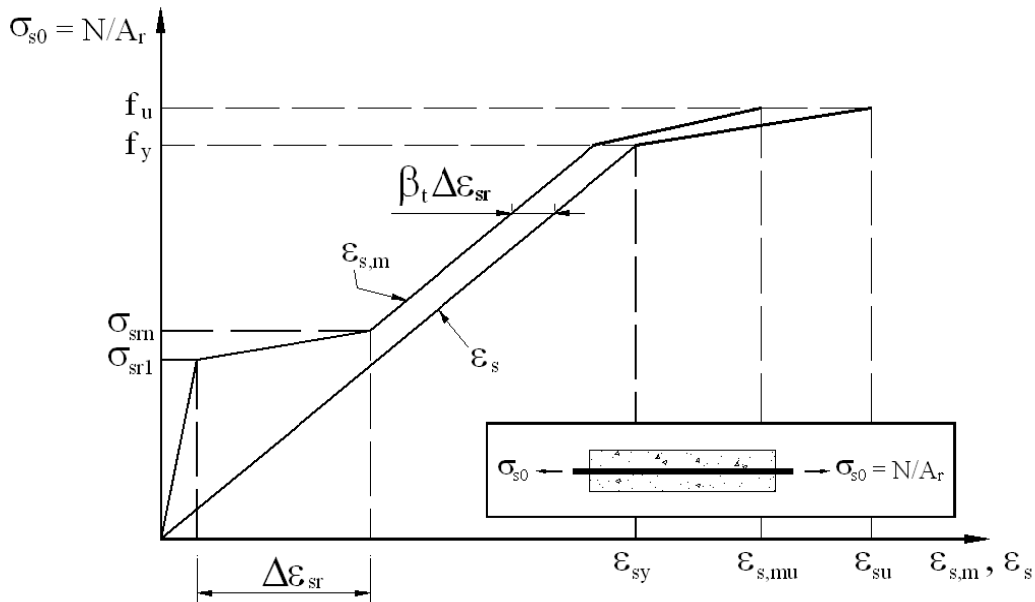
$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_{sy} - \beta_t(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) + \delta \left( \frac{1 - \sigma_{sr1}}{f_y} \right) (\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{sy}), \quad f_y < \sigma_s < f_u \quad \text{Eq.(II-16d)}$$

onde:

- $\varepsilon_{sy}$  é a deformação correspondente à tensão de escoamento;
- $\sigma_s$  é a tensão do aço na fissura;
- $\sigma_{sr1} = (f_{ctm} \times k_c(1 + \alpha_m \times \rho_s) / \rho_s)$  é a tensão do aço na fissura, quando a primeira fissura se forma;
- $\sigma_{srn}$  é a tensão do aço na fissura, quando a última fissura se forma;
- $\beta_t = 0,40$  e  $\delta = 0,80$ ;
- $\varepsilon_{s1}$  é a deformação do aço no concreto não fissurado;
- $\varepsilon_{s2}$  é a deformação do aço na fissura;
- $\varepsilon_{sr1}$  é a deformação do aço no ponto de escorregamento nulo sob tensões atingindo  $f_{ctm}$ ;
- $\varepsilon_{sr2}$  é a deformação do aço na fissura sob tensões atingindo  $f_{ctm}$ .

O valor  $\Delta\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}$  pode ser dado pela Eq.(II-17) [1], [15]:

$$\Delta\varepsilon_{sr} = \frac{k_c \times f_{ctm}(1 + \alpha_m \times \rho_s)}{\rho_s \times E_s} - \frac{k_c \times f_{ctm}}{E_c} = \frac{k_c \times f_{ctm}}{E_s \times \rho_s} \quad \text{Eq.(II-17)}$$



**Fig. II-9 Diagrama tensão versus deformação simplificado para armaduras envolvidas pelo concreto [15].**

A consideração de uma área efetiva de concreto nas expressões anteriores é uma tentativa de se considerar a não uniformidade das tensões transferidas pela armadura por aderência no final do comprimento de introdução. Este fato, além da introdução da constante  $k_c$  na Eq.(II-17), [1] e [14], permite, mesmo que simplificada, a extensão da teoria a membros fletidos, sujeitos, também, a uma distribuição não uniforme de tensões normais:

$$k_c = 0,9 \text{ ou } \frac{1}{1 + \frac{d_{conc}}{2 \times z_0}} \geq 0,7 \quad \text{Eq.(II-18)}$$

onde  $d_{conc}$  é a espessura da mesa de concreto, excluindo-se a altura das nervuras, e  $z_0$  é a distância entre os centros de gravidade das seções não fissuradas, sem a contribuição das armaduras, da mesa de concreto e da viga composta; o valor de  $k_c = 0,9$  é sugerido sob posições conservadoras.



Finalmente, o alongamento último das armaduras pode ser estimado por:

$$\Delta_{u,r} = \begin{cases} 2 \times l_t \times \varepsilon_{s,mu}, & \rho < 0,8\% \\ (L_a/2 + l_t) \times \varepsilon_{s,mu}, & \rho \geq 0,8\% \text{ e } e_{co} < l_t \\ (L_a/2 + l_t) \times \varepsilon_{s,mu} + (e_{co} - l_t) \times \varepsilon_{s,my}, & \rho \geq 0,8\% \text{ e } e_{co} > l_t \end{cases} \quad \text{Eq.(II-19)}$$

onde  $\varepsilon_{s,mu}$  e  $\varepsilon_{s,my}$  são a deformação média última e de escoamento da armadura envolvida pelo concreto, obtidas por meio da Eq.( II-16d) tomando-se  $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{su}$  e  $\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{sy}$ , respectivamente. O comprimento de transmissão  $l_t$  sobre o qual o deslocamento último é estimado pode ser obtido por [1]:

$$l_t = k_c \times f_{ctm} \times \phi / (4 \times \tau_{sm} \times \rho_s) \quad \text{Eq.( II-20)}$$

onde  $\phi$  é o diâmetro das armaduras e  $\tau_{sm}$  é a tensão de aderência média ao longo do comprimento de introdução, podendo ser adotado um valor aproximado de  $1,8f_{ctm}$  [15].

Vale salientar que, em geral, em nós compostos a primeira e principal fissura se dará entre a face do elemento de apoio e o primeiro conector (distância  $e_{co}$ ), com o escoamento do aço ocorrendo no interior desta fissura e também uma possível ruptura.

Finalmente, a metodologia aqui apresentada é baseada em modelos referentes a elementos tracionados, fazendo-se alguns ajustes para aplicação a membros fletidos. Mesmo com a introdução de alguns parâmetros com o intuito de se considerar a não uniformidade de tensões normais na flexão,  $k_c$ , e a limitação da influência da armadura à área em volta da mesma,  $A_{c,ef}$ , a influência da curvatura ainda não é abordada, conduzindo, não raro, à perda de correlação entre resultados teóricos e experimentais. Na referência [16], o efeito da curvatura no processo de fissuração de elementos fletidos é mais discutido.

## Capítulo III: Análise Experimental de Ligações Mistas com Cantoneiras

---

Como citado anteriormente, a principal meta desta etapa da pesquisa é aferir o modelo proposto em [6] e [9] para representar o comportamento momento versus rotação,  $M \times \theta$ , de ligações mistas constituídas por cantoneiras de alma, assento e barras de reforço na laje de concreto - Fig. I-2(a) - e, em adição, constituir um banco de dados sobre o comportamento desta tipologia de ligação.

Sendo assim, uma campanha experimental, executada no Laboratório de Estruturas da COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, foi planejada de maneira a avaliar o comportamento real de um nó de um sistema de piso misto com ligações semi-rígidas segundo a referida tipologia.

Os protótipos foram desenvolvidos utilizando-se como referência o projeto estrutural de uma edificação construída na cidade de Salvador/Ba, Brasil, para a instalação de uma filial de uma rede de supermercados, projeto este elaborado segundo uma concepção tradicional baseada em vigas simplesmente apoiadas – mais detalhes sobre esta estrutura, avaliada segundo as concepções tradicional e baseada em vigas semicontínuas podem ser encontrados em [6] e [9]. Todos os perfis e cantoneiras metálicos foram doados pela *ICEC – Indústria da Construção*, ao passo que os

conectores de cisalhamento e formas metálicas, *steel deck*, foram doados pela **Codeme Engenharia S/A**; o cimento *Ciminas*, utilizado na fabricação do concreto, foi doado pela **Holcim** do Brasil S/A.

### III.1 DESCRIÇÃO DOS ESPÉCIMES

Durante a campanha experimental, quatro modelos cruciformes foram testados, constituídos, invariavelmente, por duas vigas secundárias conectadas à alma de uma viga principal por meio de ligações semi-rígidas mistas – Fig. III-1 e Fig. III-2. As vigas foram projetadas de maneira a haver interação completa entre estas e a laje de concreto e as barras de aço em regiões de momento positivo (projeto fictício/referência) e negativo, respectivamente, tendo sido, para isto, utilizados conectores de cisalhamento do tipo *stud*,  $f_u = 415 \text{ MPa}$ .

O sistema *steel deck* (*MF – 75 Metform*), aço tipo *ASTM A 653 Grau 40*,  $f_{y,min} = 280 \text{ MPa}$ , foi também utilizado, não havendo continuidade da forma metálica sobre a viga principal. O aço utilizado nas vigas foi o *ASTM A 572 Grau 50*,  $f_{y,min} = 345 \text{ MPa}$  e  $f_{u,min} = 450 \text{ MPa}$ , enquanto que as cantoneiras foram fabricadas com o aço *A 36*,  $f_{y,min} = 250 \text{ MPa}$  e  $f_{u,min} = 400 \text{ MPa}$ ; as barras de aço, por sua vez, eram constituídas pelo aço *CA 50*,  $f_{y,min} = 500 \text{ MPa}$  e  $f_{u,min} = 550 \text{ MPa}$ , enquanto todos os parafusos utilizados eram de alta resistência, *ASTM A325*,  $f_{y,min} = 635 \text{ MPa}$  e  $f_{u,min} = 825 \text{ MPa}$ , não tendo sido utilizado qualquer controle de torque – todas as ligações se dão, pois, unicamente por apoio. Por fim, as lajes de concreto foram projetadas segundo  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ .

Além disso, telas soldadas, constituídas pelo aço *CA 60*,  $f_{y,min} = 600 \text{ MPa}$ , foram dispostas sobre as armaduras principais de todos os protótipos, tendo sido utilizadas como referência as bitolas e taxas sugeridas pelos fabricantes dos sistemas *steel deck* para controle da fissuração provocada pela retração do concreto.

Dois grupos de ligações foram testados, 1 e 2, variando-se, pois, a taxa de armadura, espessura das cantoneiras e diâmetro dos parafusos – Fig. III-1 e Fig. III-2. Em cada grupo, duas tipologias de ligação foram testadas, com e sem a presença da dupla de cantoneiras de alma, (a) e (b), respectivamente – isto foi feito com o intuito de tornar a análise um pouco mais abrangente, haja vista que o engenheiro pode optar, no caso de pisos escorados na fase de cura do concreto, por não utilizar as cantoneiras de alma.

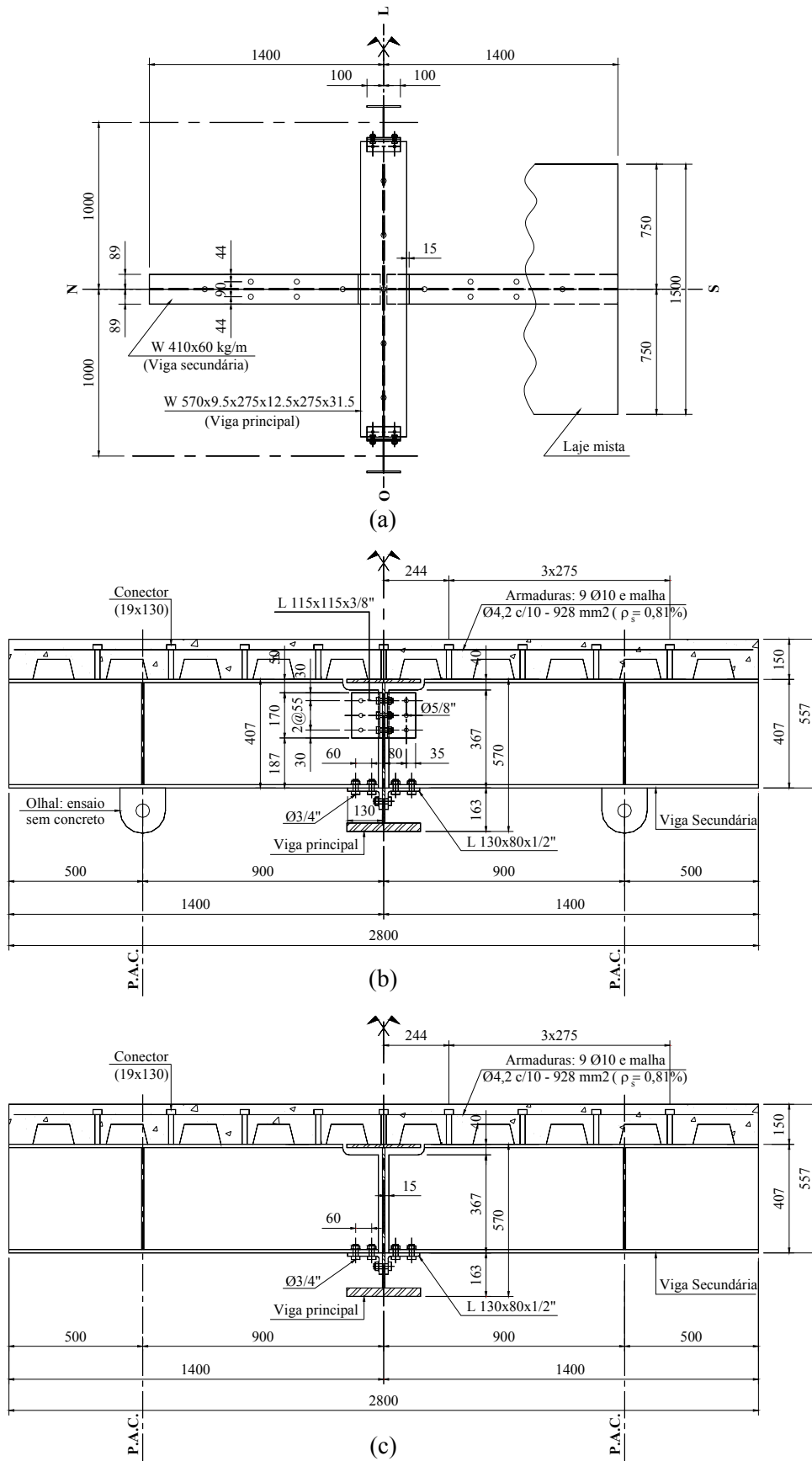


Fig. III-1 Ligações do grupo 1: (a)Vista superior; (b)Ligação 1(a); (c)Ligação 1(b).

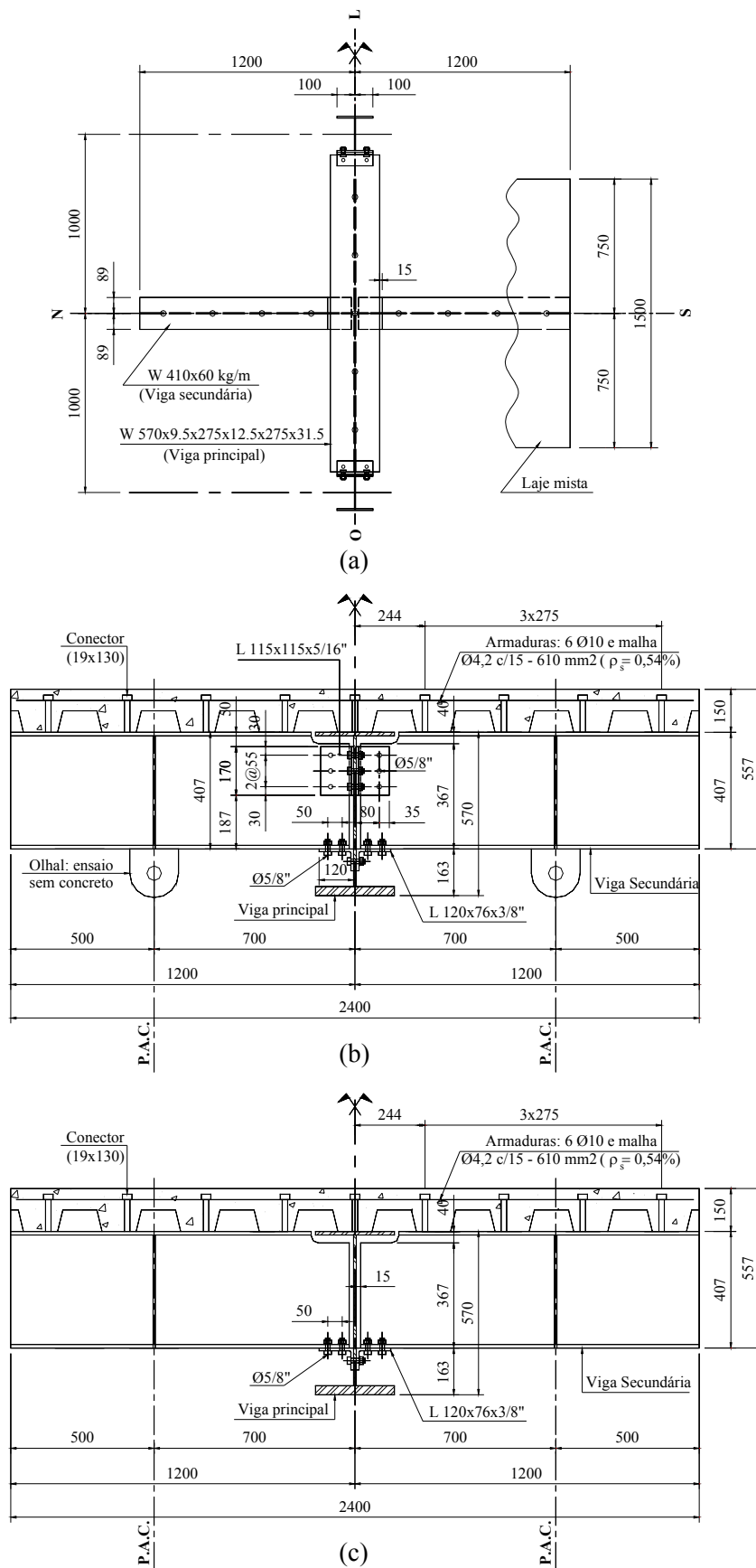
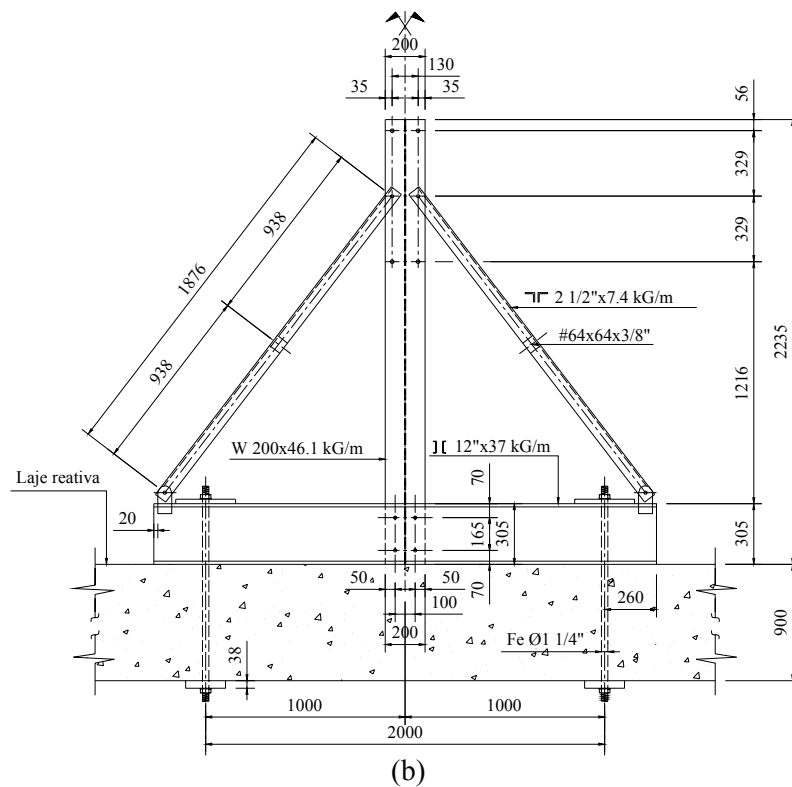
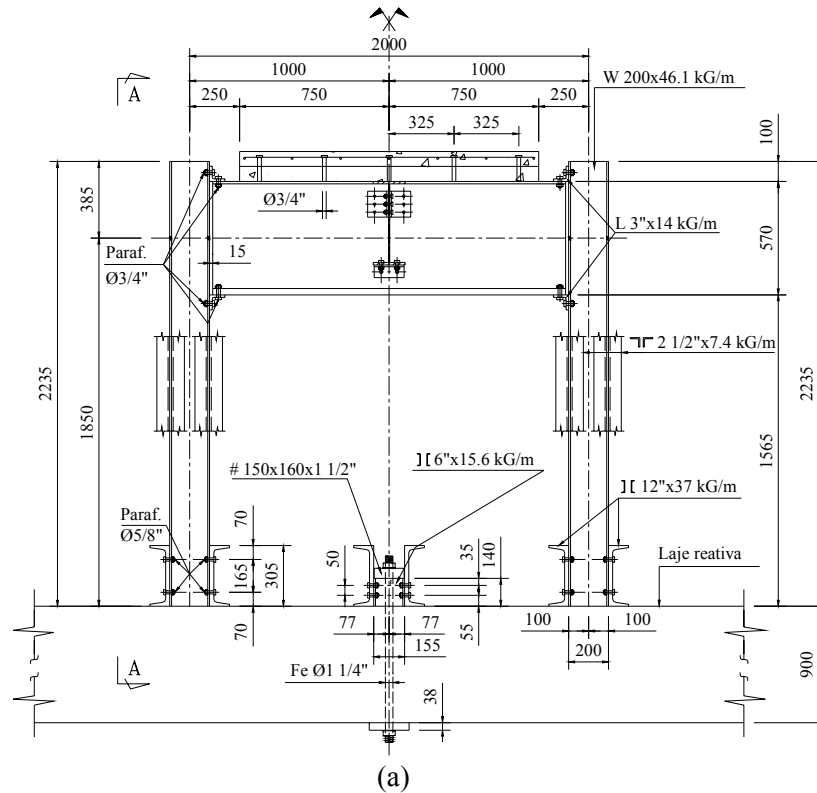


Fig. III-2 Ligações do grupo 2: (a)Vista superior; (b)Ligação 2(a); (c)Ligação 2(b).

O pórtico de ensaio é ilustrado na Fig. III-3, sendo o aço constituinte dos elementos de mesma especificação que aquele utilizado em vigas e cantoneiras metálicas dos protótipos testados.



**Fig. III-3 Pórtico de ensaio: (a) Vista frontal; (b) Corte A-A.**

Os pontos de aplicação de carga, *P.A.C.*, correspondem aos pontos de inflexão das vigas secundárias no projeto fictício, cuja configuração e cargas atuantes são as mesmas que no projeto de referência [6], com exceção da sobrecarga de utilização, de  $15 \text{ kN/m}^2$  – esta modificação foi proveniente da impossibilidade de a empresa doadora das vigas fornecer as vigas secundárias segundo o projeto original, isto é, de referência.

O comprimento total das vigas secundárias foi então determinado adicionando-se à distância entre o ponto de aplicação da carga e o eixo da viga principal (com as necessárias folgas construtivas) o comprimento necessário à ancoragem das barras de reforço na laje de concreto. Por fim, a largura da laje adotada, correspondente a  $1500 \text{ mm}$ , equivale à largura colaborante da laje para as vigas mistas secundárias, podendo, no entanto, ser aplicado um limite superior correspondente a sete vezes a largura do elemento de apoio para acomodação das armaduras.

### **III.2 DESCRIÇÃO DO ENSAIO**

Apenas as ligações com cantoneiras de alma foram testadas antes do lançamento do concreto, avaliando-se, unicamente, a rigidez inicial da ligação metálica, uma vez que a capacidade resistente das cantoneiras pode ser avaliada também durante a fase mista – vide Eq.(II-12a). Além disso, o comportamento momento versus rotação de ligações com cantoneiras de alma e/ou assento e topo tem sido bastante testado - [8], [10] e [11]. O efeito da presença de tensões iniciais nas ligações mistas, provenientes das cargas de construção não é, pois, avaliado – este efeito é avaliado em uma tipologia semelhante de ligação em [17], onde chapas de corte se fazem presentes em lugar das cantoneiras de alma.

Após a cura do concreto, o comportamento das ligações mistas com e sem cantoneiras de alma foi então observado, coletando-se dados relativos à rigidez inicial, capacidade resistente e de rotação das ligações e procedendo-se com o ensaio até que houvesse a falência ou deformação excessiva de algum componente.

Dois atuadores hidráulicos<sup>1</sup> foram utilizados para aplicar carga ao sistema, tendo sido utilizado, invariavelmente, o controle de deslocamento.

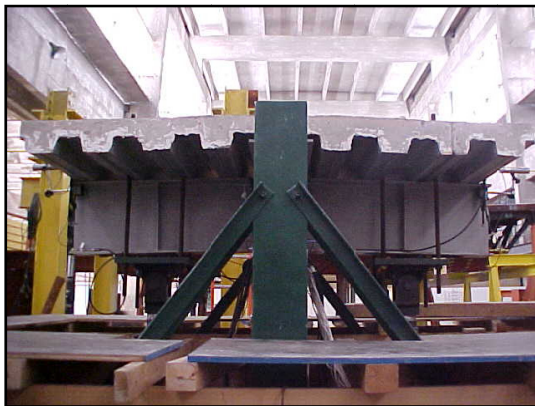
---

1. Atuador hidráulico modelo 202.32, capacidade: 77 Kip ( $\approx 342 \text{ kN}$ ); Célula de carga modelo 661.22, capacidade:  $\approx 500 \text{ kN}$ . MTS Systems Corporation, Minneapolis, Minnesota.

Antes do lançamento do concreto, os atuadores eram acoplados aos olhais soldados nas mesas inferiores das vigas secundárias, sendo então avaliada a rigidez inicial da ligação metálica - Fig. III-4. Após a concretagem e o período de cura, os olhais eram retirados e a aplicação da carga era feita na face superior da laje, Fig. III-5, sendo então avaliado o comportamento da ligação mista.



**Fig. III-4** Configuração do ensaio para a fase anterior à cura do concreto.



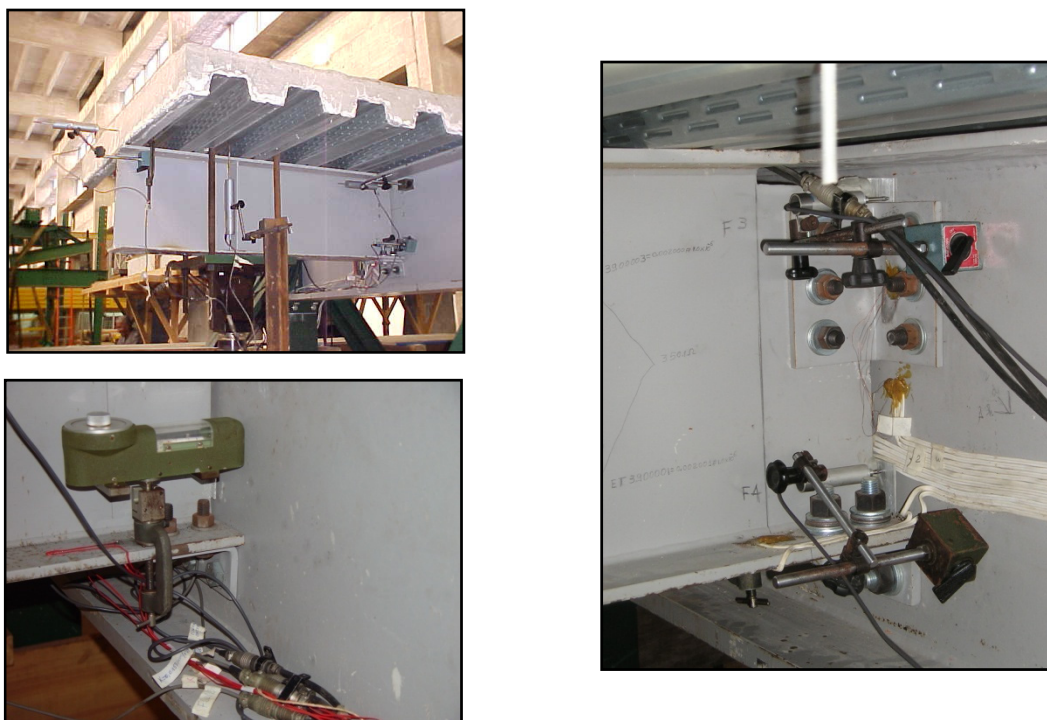
**Fig. III-5** Configuração do ensaio para a fase posterior à cura do concreto.



### III.3 INSTRUMENTAÇÃO

Uma vez que a principal meta dos ensaios era obter a curva momento versus rotação das ligações, toda a instrumentação foi planejada em torno desta prerrogativa, procurando-se, sempre que possível, trabalhar com um razoável nível de redundância nas mais importantes medidas experimentais.

Sendo assim, as rotações locais das ligações foram obtidas com o auxílio de flexímetros<sup>1</sup> que indicavam o deslocamento relativo entre as almas das vigas secundárias e a alma da viga principal (referência), estando posicionados o mais próximo possível das mesas superior e inferior das vigas secundárias – Fig. III-6. Em adição, inclinômetros<sup>2</sup> foram posicionados na mesa inferior das vigas secundárias, conferindo, pois, uma medida de referência para as rotações locais – Fig. III-6.



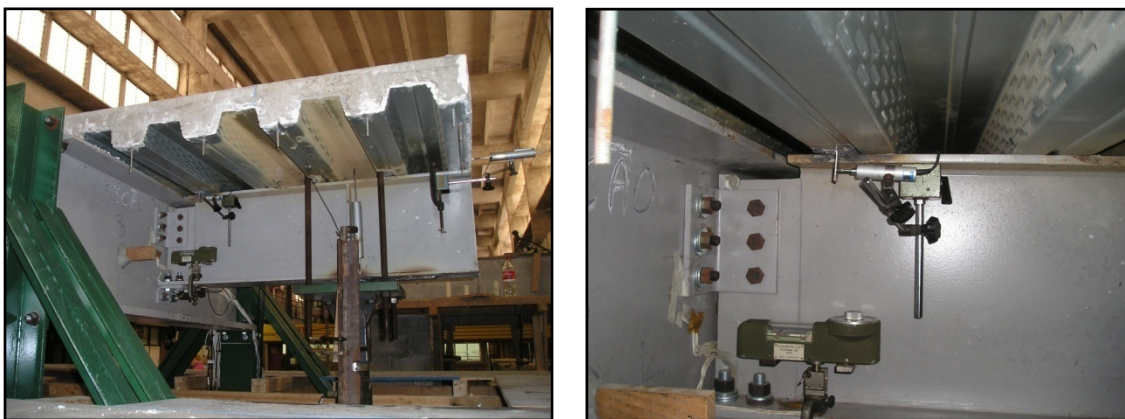
**Fig. III-6 Medição das rotações locais e globais por meio de transdutores de deslocamento e inclinômetros.**

Além disso, também como medida de referência, as rotações globais foram obtidas por meio de flexímetros<sup>1</sup> posicionados ao longo da linha referente ao ponto de aplicação da carga, medindo-se, pois, a deflexão da viga neste local - Fig. III-6.

1. Transdutores lineares de deslocamento da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd: DTH – A –20* (20 mm de curso), *DT – 50A* (50 mm de curso), *DT – 100A* (100 mm de curso).

2. Inclinômetro da *Stoppan S/A*, Berne, Switzerland.

Com o intuito de medir o deslocamento relativo/deslizamento entre as mesas superiores das vigas secundárias e a laje de concreto, flexímetros foram posicionados próximos às extremidades das vigas secundárias, o que forneceu uma noção do comportamento dos conectores de cisalhamento (*studs*) – Fig. III-7.



**Fig. III-7 Medição do escorregamento entre as mesas das vigas secundárias e a laje de concreto.**

O nível de tensão nas mesas inferiores das vigas secundárias era acompanhado por meio de extensômetros elétricos de resistência<sup>1</sup>, Fig. III-9, posicionados próximos ao extremo adjacente à viga principal, o que também constituía um meio para avaliar o nível de carga introduzido nas cantoneiras de assento e seus parafusos.



**Fig. III-8 Extensômetros nas barras de aço principais da laje de concreto.**

As deformações em todas as armaduras principais eram também medidas por meio de extensômetros<sup>1</sup>, Fig. III-8, posicionados na altura da viga principal, necessários,

1. Extensômetros elétricos de resistência da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd: KFG-5-120-C1-11L1M2R* (Resistência:  $120 \Omega$ ; comprimento:  $5 \text{ mm}$ ; *gage factor*:  $2,11 \pm 1\%$ ); Extensômetros elétricos de resistência da  $\equiv M \equiv M \equiv$  - *Micro Measurements, measurements group, inc.: EA-06-125AD-120* (Resistência:  $120 \Omega$ ; comprimento:  $3,2 \text{ mm}$ ; *gage factor*:  $2,04 \pm 0,5\%$ ).

por exemplo, à identificação de uma possível distribuição de tensões não uniforme na laje/armaduras - efeito *shear-lag*. Vale salientar que as armaduras secundárias (telas soldadas) foram posicionadas sobre as barras principais de maneira que estas últimas eram dispostas abaixo da cabeça dos pinos conectores.

Finalmente, nas ligações com cantoneiras de alma, rosetas<sup>1</sup> foram utilizadas para avaliar o nível de tensões na aba da cantoneira adjacente à alma da viga principal, sendo posicionadas o mais próximo possível das prováveis linhas de plastificação segundo a Fig. II-4.

Além disso, a carga axial nos parafusos era medida por meio de extensômetros<sup>2</sup> inseridos no fuste destes elementos, Fig. III-9, promovendo-se, assim, uma visão geral da distribuição de cargas na ligação.



**Fig. III-9 Medição da carga nos parafusos e do nível de tensões nas cantoneiras e mesas inferiores das vigas secundárias.**

#### III.4 AQUISIÇÃO DOS SINAIS

Uma vez identificados e instrumentados os componentes que permitiriam o acompanhamento e evolução dos ensaios, os sensores eram conectados a um equipamento de leitura (não contínua) e armazenamento de sinais<sup>3</sup> composto de 5 a 15 *slots* (cartões) para montagem dos circuitos.

1. Extensômetros elétricos de resistência da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd*: Três extensômetros a  $60^\circ$  ( $\Delta$ ) - *KF-2-D4-11* (Resistência:  $120 \Omega$ ; comprimento:  $2 \text{ mm}$ ; *gage factor*:  $2,10$  a  $2,13$ ); Dois extensômetros a  $90^\circ$  e um na bisetriz, a  $45^\circ$  - *KFG-3-120-D17-11-N1-5-C2* (Resistência:  $120 \Omega$ ; comprimento:  $3 \text{ mm}$ ; *gage factor*:  $2,09 \pm 1\%$ ).

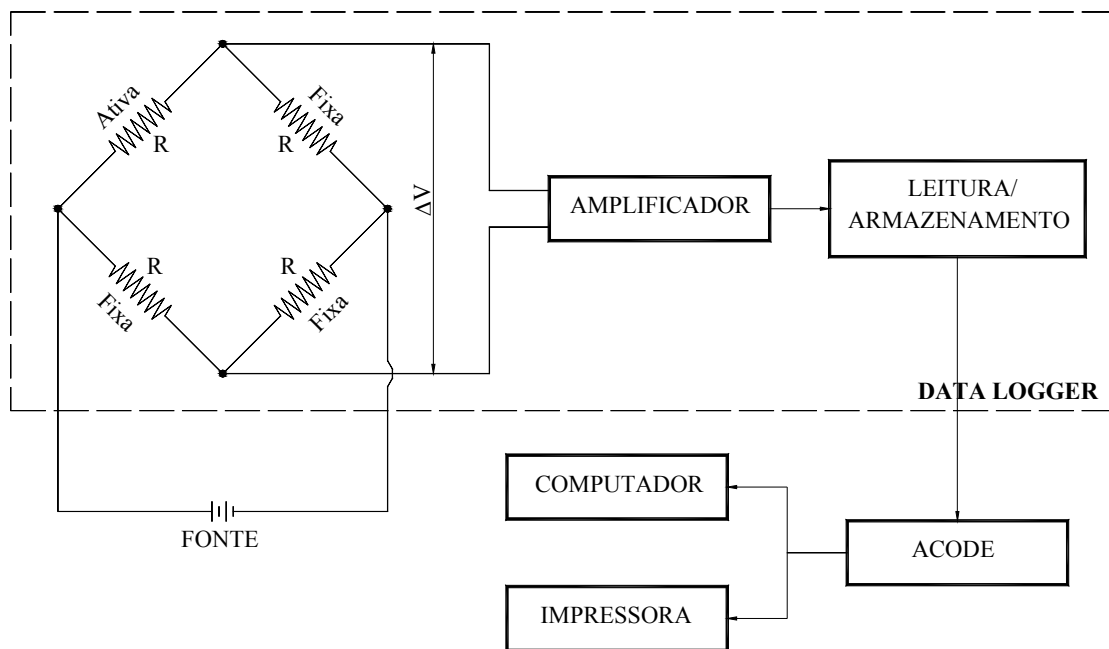
2. Extensômetros elétricos de resistência da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd*: *KFG-3-120-C20-11* (Resistência:  $120 \Omega$ ; comprimento:  $3 \text{ mm}$ ; *gage factor*:  $2,03 \pm 1\%$ ).

3. *Data Logger* – equipamento eletrônico da *Hewlett Packard*, modelo *3497 A*, que efetua leituras e armazena dados.

Podem ser utilizados até 20 canais em cada cartão, nos quais resistências elétricas são adicionadas (ou não) às dos sensores, configurando-se, assim, circuitos elétricos do tipo ponte de *Wheatstone*, Fig. III-10 – todos os circuitos montados eram com  $\frac{1}{4}$  de ponte.

Os circuitos eram alimentados com uma fonte<sup>1</sup> elétrica, estabelecendo-se uma voltagem em torno de 2 V, sendo então as variações  $\Delta V$  lidas e armazenadas. A comunicação entre o equipamento de leitura e o computador era feita por meio de um programa de aquisição de sinais<sup>2</sup>, responsável pela análise e impressão gráfica dos dados.

Finalmente, uma impressora também foi utilizada para acompanhamento dos ensaios. As Fig. III-10 e Fig. III-11 fornecem uma visão geral do sistema de aquisição dos sinais. Maiores detalhes podem ser encontrados em [18] a cerca da instrumentação, tratamento e aquisição de sinais em análises experimentais.

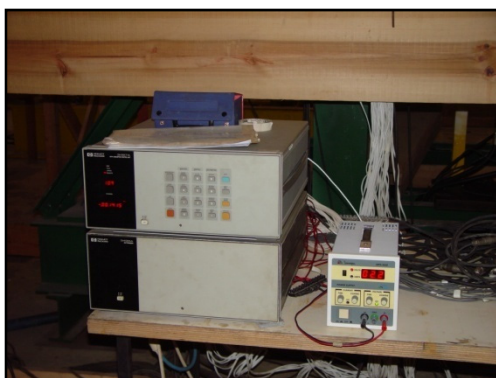


**Fig. III-10 Sistema para aquisição dos sinais – exemplo típico para um circuito/canal referente a um sensor (resistência ativa).**

1. Fonte DC Minipa, modelo MPS – 303 D. Equipamento digital capaz de fornecer uma tensão de saída de 0 a 30 V DC e corrente de 0 a 3 A DC.

2. Acode: Programa computacional em linguagem Quick Basic que coleta, analisa e disponibiliza graficamente dados medidos.





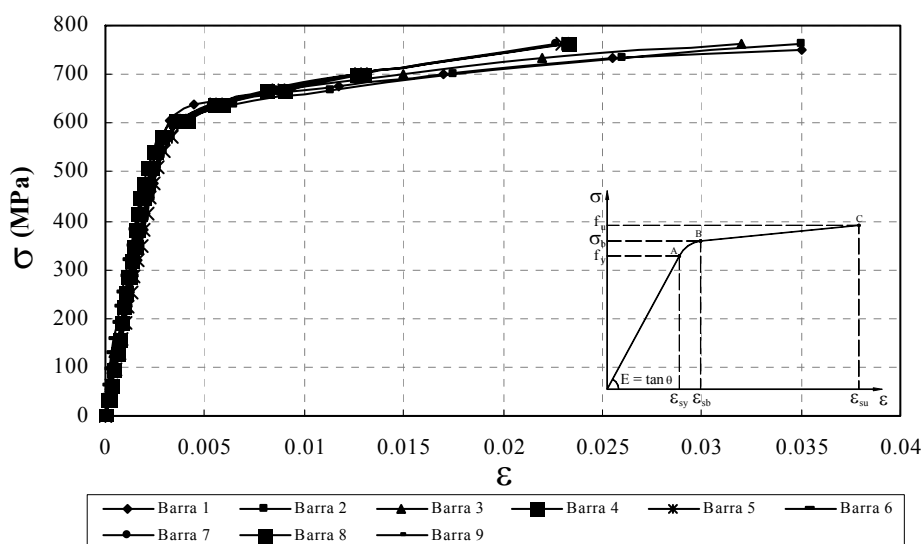
**Fig. III-11 Equipamentos constituintes do sistema de aquisição dos sinais e controlador dos atuadores hidráulicos (CAH).**

### **III.5 CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS**

Dentre os materiais constituintes dos elementos testados, apenas o aço das vigas e cantoneiras não foi caracterizado em laboratório, assumindo-se, pois, as especificações do fabricante.

No caso das barras de aço, alguns trechos foram extraídos do feixe de barras utilizado para confeccionar as armaduras das lajes de concreto ensaiadas. Utilizando-se extensômetros mecânicos<sup>1</sup>, estes trechos foram submetidos a ensaios de tração simples, sendo então obtidos os diagramas tensão versus deformação para cada espécime, Fig. III-12, e algumas características mecânicas do aço utilizado, Tab. III-1 – haja vista o número de espécimes testados, as características obtidas conferem apenas uma razoável noção do comportamento do material; ademais, a dispersão dos resultados encontrados é pequena. Dentre as características avaliadas, apenas a deformação última das armaduras não foi aferida, adotando-se valores fornecidos pelo fabricante.

1. Extensômetro mecânico da *Amsler*, com base de medida de 100 mm.



**Fig. III-12 Diagrama tensão x deformação das amostras das barras de aço ensaiadas.**

**Tab. III-1 Características mecânicas médias das amostras das barras de aço.**

$E$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$\epsilon_{sy}$	$\sigma_b$ (MPa)	$\epsilon_{sb}$	$\epsilon_{su}^1$
209650,0	527,0	0,00257	608,0	0,0039	0,08

Os parafusos, por sua vez, após serem instrumentados com extensômetros, foram submetidos a ensaios de tração simples, sendo então obtidas as curvas carga x deformação e as constantes  $C_p$ , Tab. III-2, necessárias para avaliar as cargas instaladas nos parafusos durante os ensaios dos protótipos cruciformes. Vale salientar que os ensaios eram não destrutivos e conduzidos no estágio elástico do material.

**Tab. III-2 Constantes carga/deformação para os parafusos ensaiados.**

Parafuso <sup>2</sup>	PA – O1	PA – O2	PA – O3	PA – L1	PA – L2	PA – L3
$C_p$ (kN/ $\mu\epsilon$ )	0,0301	0,0311	0,0342	0,0312	0,0311	0,0302

1. Deformação última mínima das barras segundo especificações do fabricante.
2. Nomenclatura utilizada para especificar os parafusos: PA – Parafuso; O – Oeste; L – Leste; 1, 2, 3 – posições dos parafusos, ordenados de cima para baixo nas cantoneiras de alma. Vide Fig. III-1 e Fig. III-2.

Finalmente, durante a concretagem das lajes, cerca de dez corpos de prova<sup>1</sup> eram moldados para avaliar a resistência característica à compressão do concreto<sup>2</sup>,  $f_{ck}$ , sendo então rompidos em uma prensa universal quando da realização dos ensaios dos protótipos. Os resultados obtidos estão discriminados na Tab. III-3.

**Tab. III-3 Resistências características do concreto para as lajes dos protótipos.**

Ligação	1(a)	1(b)	2(a)	2(b)
$f_{ck}$ (MPa)	26,3	28,0	36,6	32,6

### III.6 COMPORTAMENTO $M \times \theta$ DAS LIGAÇÕES ENSAIADAS

Uma vez instrumentados, realizada a concretagem e passado o período de cura do concreto, os protótipos eram submetidos à carga, lembrando-se que as ligações com cantoneiras de alma eram também ensaiadas antes do lançamento do concreto.

As curvas momento versus rotação,  $M \times \theta$ , eram então elaboradas de maneira simples, com o momento  $M$  atuante na ligação sendo obtido pelo produto entre a carga aplicada pelos atuadores hidráulicos e a distância dos mesmos à alma da viga principal, adicionando-se o momento oriundo do peso próprio da estrutura – a presença de rótulas mecânicas nos pontos de aplicação da carga garantia a transmissão apenas de forças (Fig. III-5).

Por sua vez, as rotações locais,  $\theta_l$ , como já mencionado, eram obtidas pela composição das medidas dos flexímetros instalados próximos às mesas superior,  $\Delta_{FS}$ , e inferior,  $\Delta_{FI}$ , distantes  $h$  mm - Fig. III-6:

$$\theta_l \cong \text{tg} \theta_l = \frac{\Delta_{FS} + \Delta_{FI}}{h} \quad \text{Eq.(III-1)}$$

Por sua vez, as rotações globais,  $\theta_g$ , eram obtidas com o auxílio das medidas provenientes dos flexímetros instalados no ponto de aplicação de carga,  $\Delta_{FP.A.C.}$ :

$$\theta_g \cong \text{tg} \theta_g = \frac{\Delta_{FP.A.C.}}{d_a} \quad \text{Eq.(III-2)}$$

onde  $d_a$  é a distância do ponto de aplicação da carga ao eixo da alma da viga principal.

1. Corpos de prova cilíndricos com 10 cm de diâmetro e 20 cm de altura, curados em câmara úmida até a execução dos ensaios.

2. Concreto produzido com cimento *Ciminas CPV ARI Plus* (alta resistência inicial), brita 1 e areia média, tendo sido realizada a cura por meio de cobertores umidificados num período de 7 dias.

As figuras Fig. III-13 a Fig. III-16, ilustram o comportamento  $M \times \theta_l$  de todas as ligações, obtido via análises experimental e teórica, Eq.(II-1) e item II.4. Na Fig. III-17, todas as ligações são apresentadas em conjunto (resultados experimentais).

Vale ressaltar que, a menos que se especifique o contrário, os resultados experimentais apresentados constituem a média dos valores obtidos para o par de ligações em cada modelo ensaiado.

Finalmente, na Fig. III-18, apresenta-se o comportamento  $M \times \theta_g$  para as ligações ensaiadas. Observe-se, pois, a diferença de valores em termos de rigidez e rotação entre os comportamentos das ligações considerando-se as rotações locais e globais.

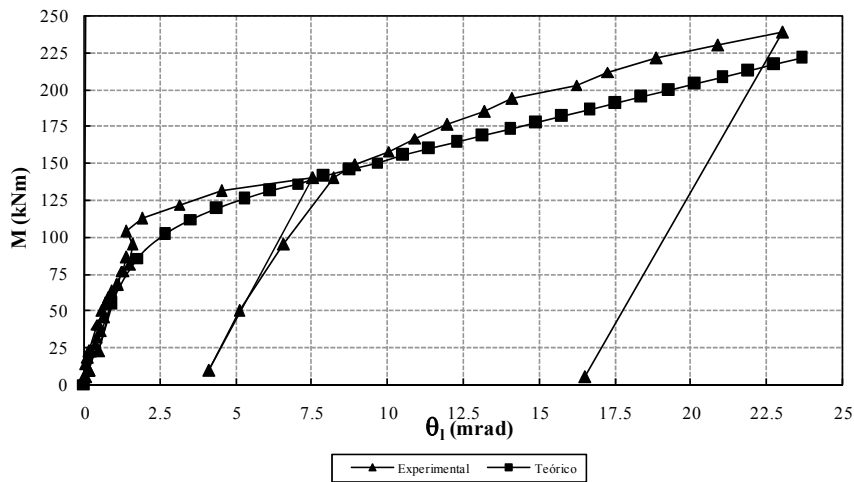


Fig. III-13 Comportamento  $M \times \theta_l$  da ligação 1(a).

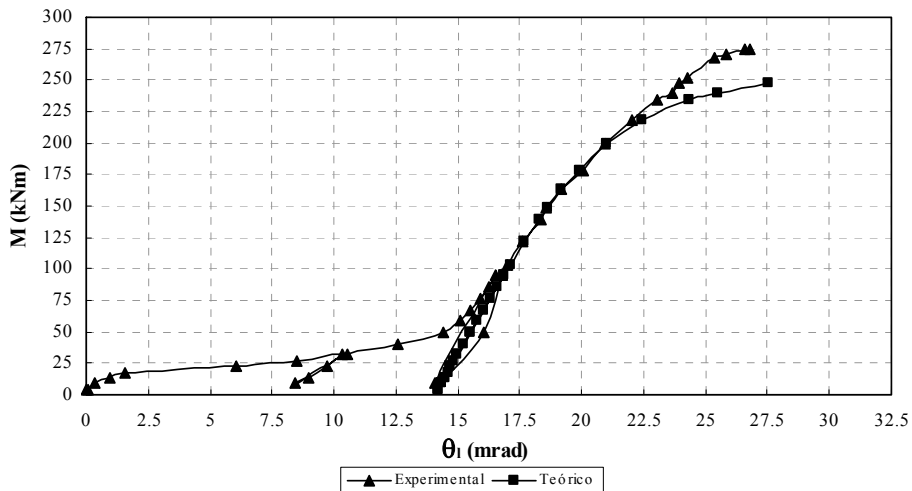
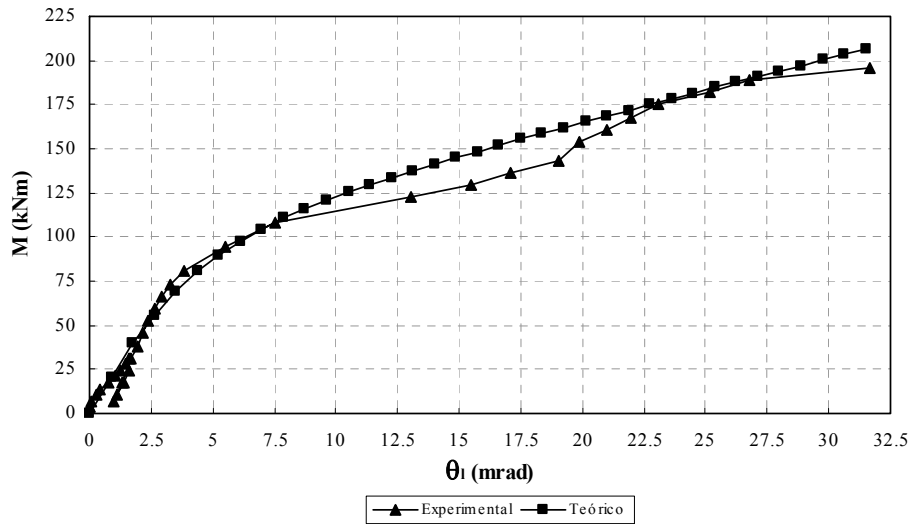
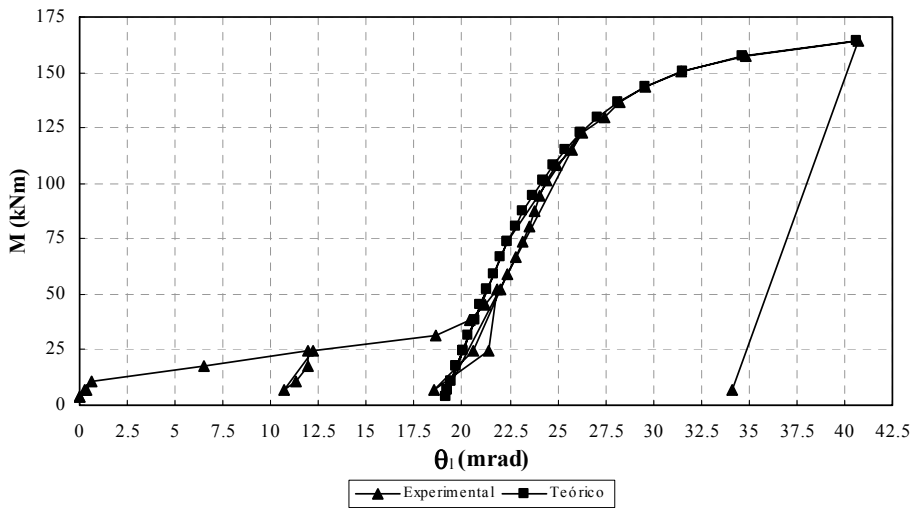


Fig. III-14 Comportamento  $M \times \theta_l$  da ligação 1(b).

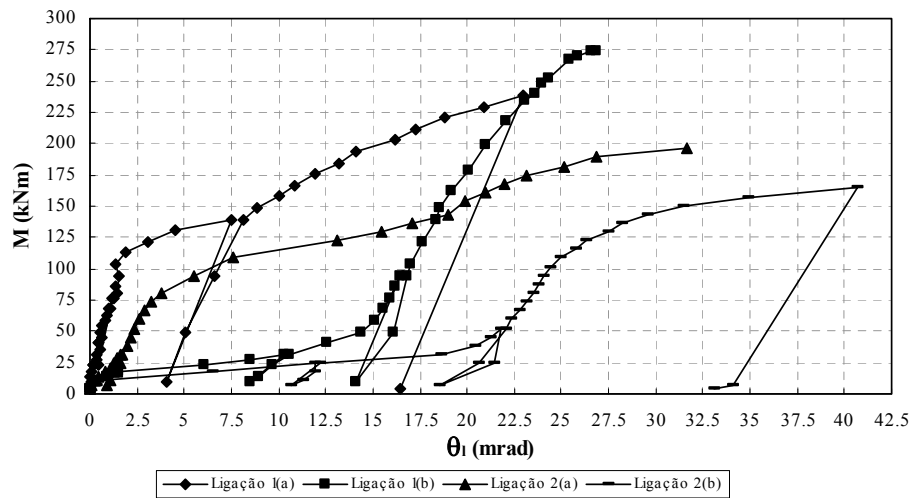




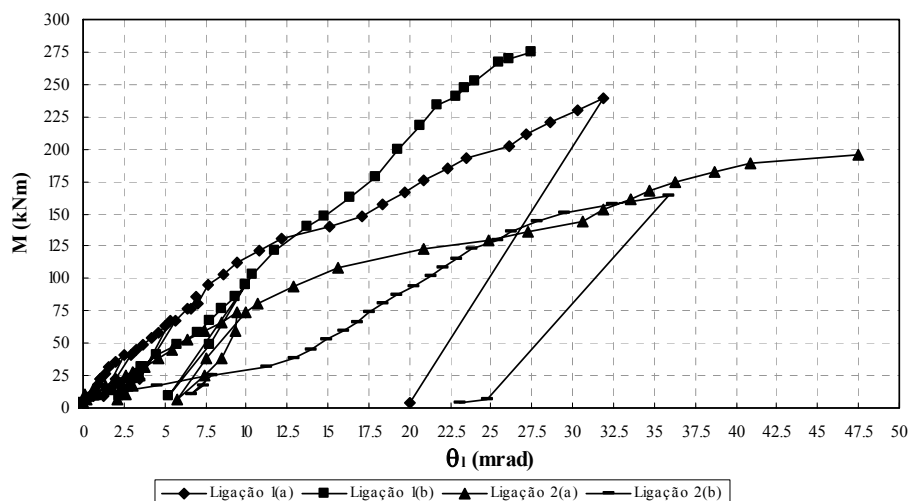
**Fig. III-15 Comportamento  $M \times \theta_1$  da ligação 2(a).**



**Fig. III-16 Comportamento  $M \times \theta_1$  da ligação 2(b).**



**Fig. III-17 Comportamento  $M \times \theta_1$  experimental das ligações ensaiadas.**



**Fig. III-18 Comportamento  $M \times \theta_g$  experimental das ligações ensaiadas.**

Nas tabelas Tab. III-4 e Tab. III-5 as principais características das ligações, referentes à rigidez inicial,  $k_{\theta,me}$  e  $k_{\theta,mi}$ , rigidez plástica,  $k_{\theta,p}$ , capacidade resistente,  $M_{u,mi}$ , capacidade de rotação,  $\theta_u$  e fatores de forma,  $n$ , são discriminadas. A rigidez inicial experimental foi obtida a partir do descarregamento dos protótipos durante os ensaios, enquanto que a capacidade resistente experimental aqui discriminada corresponde ao momento último obtido no ensaio<sup>1</sup>; a rigidez plástica teórica foi determinada segundo indicações presentes no *Eurocode 3* [7], Fig. II-2, sendo os valores  $k_{\theta} / 7$  e  $\theta$  os que promoveram as melhores concordâncias com os resultados experimentais para as ligações tipo (a) e (b), respectivamente.

**Tab. III-4 Características físicas das ligações do grupo 1.**

Ligação	Análise	$k_{\theta,me}$ (kNm/rad)	$k_{\theta,mi}$ (kNm/rad)	$k_{\theta,p}$ (kNm/rad)	$M_u$ (kNm)	$\theta_u$ (mrad)	$n$
1 (a)	Exp.(E)	5165,0	36103,0	5963,0	238,6	23,0	2,0
	Teo.(T)	5681,0	34814,0	4973,0	322,0	29,3	-
	$\Delta = T/E$	<b>1,10</b>	<b>0,96</b>	<b>0,83</b>	<b>1,35</b>	<b>1,27</b>	-
1 (b)	Exp.(E)	-	35330,0	-	274,6	26,8	3,0
	Teo.(T)	-	34814,0	-	261,0	30,9	-
	$\Delta = T/E$	-	<b>0,99</b>	-	<b>0,95</b>	<b>1,15</b>	-

1. A capacidade resistente experimental poderia ser determinada de outras formas, sendo obtida, por exemplo, pela intersecção da curva momento versus rotação experimental com a reta  $M = k_{\theta}/3$  ou  $M = k_{\theta}/3,5$ , como é sugerido em [7].

**Tab. III-5 Características físicas das ligações do grupo 2.**

Ligação	Análise	$k_{\theta,me}$ (kNm/rad)	$k_{\theta,mi}$ (kNm/rad)	$k_{\theta,p}$ (kNm/rad)	$M_u$ (kNm)	$\theta_u$ (mrad)	$n$
2 (a)	Exp.(E)	4242,0	26234,0	3095,0	195,9	31,6	1,9
	Teo.(T)	3300,0	24100,0	3443,0	223,3	26,7	-
	$\Delta = T/E$	<b>0,78</b>	<b>0,92</b>	<b>1,11</b>	<b>1,14</b>	<b>0,85</b>	-
2 (b)	Exp.(E)	-	25641,0	-	164,5	40,7	2,0
	Teo.(T)	-	24100,0	-	173,3	29,8	-
	$\Delta = T/E$	-	<b>0,94</b>	-	<b>1,05</b>	<b>0,73</b>	-

Pode-se perceber nas Fig. III-13 e Fig. III-15 uma perda razoável de rigidez nas ligações com cantoneiras de alma, o que, a princípio, poderia sugerir o começo do escoamento das armaduras na laje de concreto.

As capacidades resistentes teóricas das ligações 1(a) e 2(a), entretanto, se observadas as Tab. III-4 e Tab. III-5, correspondem a 322,0 e 223,3 kNm, respectivamente, ao passo que os pontos em que ocorre esta perda excessiva de rigidez indicam  $M = 103,6$  e  $94,5$  kNm, ou seja, bem inferiores às previsões. Além disso, as medidas dos extensômetros das barras de aço indicam deformações específicas<sup>1</sup> em torno de  $\varepsilon_s = 0,86$  ‰ para a ligação 1(a) e  $\varepsilon_s = 2,06$  ‰ para a ligação 2(a), ratificando, pois, a hipótese de que as armaduras ainda não estão escoando – vide Tab. III-1. Alguma outra variável deve, pois, estar intervindo.

Para compreender melhor este fenômeno, devem-se observar concomitantemente os comportamentos das ligações sem e com cantoneiras de alma.

A observação das Fig. III-14 e Fig. III-16 revela a existência de um “patamar” no gráfico sob carga ainda baixas. Em todas as ligações ensaiadas, o momento em que ocorre a primeira e principal fissura no concreto, entre o eixo da viga principal e o primeiro conector na viga secundária, é basicamente o mesmo, uma vez que é dependente da resistência à tração do concreto e do módulo de resistência elástico da viga mista.

1. As deformações específicas medidas conferem uma noção da deformação nas barras de aço, não sendo necessariamente a deformação média ou no interior da principal fissura, uma vez que a posição desta variou para cada modelo ensaiado. Vale lembrar, pois, que o valor da deformação das barras no interior da fissura principal é, como ilustrado na Fig. II-8, superior às deformações em outros pontos da armadura.

No entanto, a partir deste momento as cantoneiras de alma passam a desempenhar papel fundamental no comportamento da ligação, controlando a abertura desta fissura principal, retardando o aparecimento de outras e, portanto, retardando a configuração do estado de fissuração estabilizado - Fig. II-7 e Fig. II-8.

Assim, nas ligações 1(b) e 2(b), após o aparecimento da primeira fissura esta continua a abrir, enquanto que uma segunda e terceira fissuras se formam aparentemente em seqüência, configurando-se, praticamente, um estado de fissuração estabilizado, Fig. III-20 e Fig. III-22, sob cargas ainda baixas, o que é caracterizado pelo patamar nas Fig. III-14 e Fig. III-16 – neste trecho ocorre um incremento de rotações em torno de 13 e 18 *mrad* para as ligações 1(b) e 2(b), respectivamente.

Como visto, para as ligações 1(a) e 2(a), a configuração do estado de fissuração estabilizado seria retardada pela presença das cantoneiras de alma. A tarefa mais difícil é, pois, determinar como e quando ocorreria tal fenômeno. Toda esta discussão, no entanto, parece esclarecer a perda de rigidez que ocorre no gráfico das Fig. III-13 e Fig. III-15. Além disso, fotografias referentes a esta etapa do ensaio indicam o aparecimento<sup>1</sup> da segunda e terceira fissuras neste momento, reiterando, pois, a hipótese aqui sugerida – Fig. III-19 e Fig. III-21.

Sendo assim, a Eq.( II-15) pode ser utilizada para estimar a força necessária para promover a fissuração dentro da área de concreto efetiva, sendo o momento fletor dado por:

$$M_{Fiss} = F_{cr} \times d_{Ac,ef} \quad \text{Eq.(III-3)}$$

onde  $d_{Ac,ef}$  é a distância entre o centro de gravidade da área de concreto efetiva e a cantoneira de assento, desprezando-se a parcela de carga instalada nas cantoneiras de alma. A área de concreto efetiva, utilizada na obtenção de  $F_{cr}$  pode ser estimada segundo indicações em [15]:

$$A_{c,ef} = l_{la} \times 2,5(c_{ob} + \phi / 2) \quad \text{Eq.(III-4)}$$

onde  $l_{la}$  é a largura da laje,  $c_{ob}$  o cobrimento das armaduras e  $\phi$  o diâmetro médio das barras.

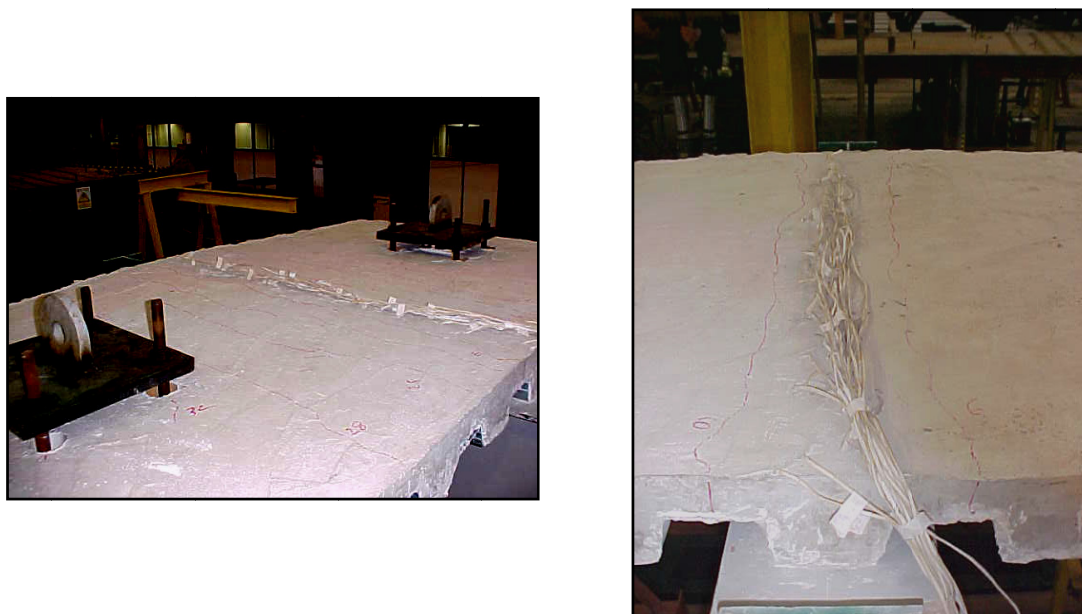
---

1. O termo “aparecimento” indica apenas o momento em que as fissuras tornaram-se perceptíveis, não se podendo, pois, afirmar que este tenha sido o exato momento da formação das mesmas.

Os valores assim obtidos foram  $M_{Fiss} = 103$  e  $99,4$   $kNm$  para as ligações 1(a) e 2(a), respectivamente, obtendo-se, assim, boa correlação com os resultados experimentais – estes foram, portanto, os valores utilizados na Eq.(II-1) para representar teoricamente o comportamento das ligações tipo (a) em lugar da capacidade resistente; isto justifica, também, a necessidade, para estas ligações, de se considerar uma reserva de rigidez, uma vez que ainda não se chegou à capacidade resistente, o que é aqui representado, por simplificação, por meio de  $k_{\theta,p}$ .



**Fig. III-19 Estado de fissuração estabilizado e extensão das fissuras: ligação 1(a).**



**Fig. III-20 Estado de fissuração estabilizado e extensão das fissuras: ligação 1(b).**



**Fig. III-21 Estado de fissuração estabilizado e extensão das fissuras: ligação 2(a).**



**Fig. III-22 Estado de fissuração estabilizado e extensão das fissuras: ligação 2(b).**

Pode-se perceber, por meio das Tab. III-4 e Tab. III-5, que os valores teóricos e experimentais para as capacidades resistentes das ligações do grupo 2 e da ligação 1(b) apresentam boa correlação, ao passo que para a ligação 1(a) a capacidade resistente da ligação parece não ter sido alcançada – neste ensaio houve puncionamento da laje de concreto, com posterior excessiva deformação da forma metálica, o que impediu a continuidade do mesmo, ficando comprometida, pois, a obtenção das capacidades resistente e de rotação para a ligação 1(a). Após a observação deste fenômeno, armaduras em forma de malha foram adicionadas ao redor dos furos abertos nas lajes para passagem dos tirantes, Fig. III-5, aumentando, pois, a resistência da laje ao puncionamento.

Neste momento, percebe-se que a pequena distância entre o atuador e o eixo da viga principal introduziu fatores limitantes aos ensaios das ligações tipo (a), especialmente as ligações do grupo 1, com maiores taxas de armadura e, portanto, maiores capacidades resistentes, exigindo, pois, a aplicação de elevadas cargas pontuais, promovedoras de possíveis colapsos locais inicialmente não previstos – punção da laje

de concreto e posterior deformação excessiva da forma metálica. Poder-se-ia, pois, nestes casos, abdicar dos pontos de inflexão das vigas secundárias no projeto de referência/fictício, com a adoção de maiores distâncias entre o atuador e o eixo da viga principal, em prol da aplicação de menores cargas pontuais.

No caso das ligações do grupo 2, os valores teóricos e experimentais para as capacidades de rotação apresentam boa correlação, apesar de agora os valores teóricos serem inferiores aos experimentais – os valores assumidos para o escorregamento e deformação últimos dos conectores de cisalhamento e da cantoneira de assento na Eq.( II-13), respectivamente, podem ser discutidos. As medições do escorregamento entre a laje de concreto e a mesa superior da viga secundária indicam valores da ordem de 2 a 3 *mm*, enquanto que o valor teórico para a deformação última dos conectores segundo a Eq.( II-14) corresponde a 0,81 *mm*, portanto bem inferior aos resultados experimentais. As deformações das cantoneiras de assento obtidas experimentalmente, por sua vez, indicam valores da ordem de 3 a 5,5 *mm*, quando o valor teórico assumido é de 4 *mm*.

Ainda observando as Tab. III-4 e Tab. III-5, pode-se perceber boa correlação entre os resultados teóricos e experimentais para a rigidez rotacional das ligações, seja para o estado anterior ou posterior à cura do concreto. Os resultados referentes à ligação 1(a), no entanto, merecem maior atenção.

Os valores discriminados na Tab. III-4 para a rigidez inicial da ligação 1(a) mista correspondem aos obtidos experimentalmente após a fissuração do concreto ter se estabilizado (conforme discutido anteriormente) e teoricamente considerando-se a rigidez das armaduras, conforme discutido no item II.4.2.1. A observação da Fig. III-13, no entanto, indica que a rigidez inicial da ligação é bastante superior à rigidez obtida por meio de descarregamentos, correspondente ao estado pós fissurado e indicado na Tab. III-4.

Como já discutido quando da avaliação das capacidades resistentes e momento correspondente a um estado de fissuração estabilizado, nas ligações do tipo (a) as cantoneiras de alma apresentam a propriedade de controlar a abertura das fissuras no concreto, retardando, pois, a configuração do estado de fissuração estabilizado.

Sendo assim, no estágio antefissuração espera-se que o concreto contribua também para a rigidez inicial da ligação, o que, no entanto, só se verificou na ligação 1(a), não se percebendo efeito na ligação 2(a). A observação das Fig. III-19 a Fig. III-22 talvez ajude a compreender tal fato.

Pode-se perceber que para a ligação 1(a) a primeira e principal fissura não se estende até a forma metálica, enquanto que nas demais ligações, inclusive a ligação 2(a), isto é verificado, indicando que, para a ligação 1(a) o concreto se encontra mais íntegro no estágio inicial e capaz, portanto, de contribuir mais efetivamente para a rigidez inicial da ligação. Não basta, pois, adicionar qualquer cantoneira de alma à ligação; as cantoneiras de alma, ou melhor, a ligação metálica deve possuir rigidez (relativa à viga) suficiente para, além de retardar o mecanismo de fissuração, garantir uma participação mais efetiva da laje de concreto.

Sendo assim, a rigidez inicial da ligação mista considerando-se a contribuição do concreto em tração poderia ser estimada segundo a Eq.(III-5):

$$k'_{\theta,mi} = \frac{(d + y_{conc})^2}{\frac{1}{k_{conc}} + \frac{1}{k_c}} \quad \text{Eq.(III-5)}$$

onde  $y_{conc}$  é a distância do centro de gravidade da laje de concreto não fissurada à mesa superior da viga secundária e  $k_{conc}$  é a rigidez do concreto em tração, estimada por:

$$k_{conc} = \frac{E_c \times A_c}{L_r} \quad \text{Eq.(III-6)}$$

onde  $E_c$  e  $A_c$  são o módulo de elasticidade longitudinal e área do concreto, respectivamente; a variável  $L_r$  já se encontra discriminada.

Comparando-se as Eq.(III-5), Eq.(II-11a) e Eq.(II-11b), pode-se perceber, com o auxílio da Fig. II-5, que a contribuição das cantoneiras da alma é desprezada<sup>1</sup> assim como a ligação entre a laje de concreto e a viga metálica é considerada, neste caso, rígida, negligenciando-se, pois, possíveis deslizamentos entre estes elementos.

---

1. Como já mencionado, as cantoneiras de alma apresentam pouca contribuição para a rigidez no estágio composto, apesar de seu papel no controle da fissuração. A observação das Tab. III-4 e Tab. III-5 revela que, após a estabilização das fissuras, a rigidez das ligações tipo (a) e (b) são praticamente idênticas.



A distância útil a se considerar, portanto, na Eq.(III-5) deve ser a distância do centro de gravidade do concreto não fissurado até a cantoneira de assento ( $d + y_{conc}$ ). Haveria, pois, uma maior rigidez ao cisalhamento sob cargas mais baixas, quando as rotações na viga e ligações mistas são ainda pequenas - cerca de  $1,87 \text{ mrad}$  para a ligação 1(a) – e, portanto, o concreto ainda se encontra relativamente íntegro.

Esta maior rigidez se deveria, aparentemente, à colaboração da forma metálica nervurada e corrugada na transferência dos esforços na interface laje/viga metálica por meio da aderência química e mecânica<sup>1</sup>. Quando o concreto se encontra fissurado e, portanto, com maiores rotações, somente os conectores mecânicos – pinos com cabeça – seriam efetivos na transferência dos esforços, haja vista que não haveria mais aderência química e a aderência mecânica com a forma seria reduzida pela consideração de um volume de concreto menor, isto é, efetivo - Eq.(III-4).

Vale frisar que, a partir da etapa limite, até a qual se considera a participação do concreto, foram ouvidos “estalos” na forma metálica, caracterizando, aparentemente, a perda de aderência entre o concreto e a mesma e reiterando, por conseguinte, a hipótese de que ela estaria colaborando na transmissão dos esforços cisalhantes até aquela etapa. Obviamente, como este fenômeno só ocorreu neste protótipo, torna-se indevido considerar esta teoria uma verdade incontestável. Maiores informações sobre a contribuição das formas metálicas na transferência dos esforços entre o concreto e a viga metálica podem ser encontrados em [19].

Portanto, por meio da Eq.(III-5), a rigidez inicial da ligação 1(a) considerando a contribuição do concreto foi estimada, obtendo-se o valor teórico de  $69850,6 \text{ kNm/rad}$ , tendo sido este o valor utilizado na Eq.(II-1) para representar o comportamento da ligação - Fig. III-13. O valor experimental obtido foi de  $69291,0 \text{ kNm/rad}$ , muito próximo, mais uma vez, do valor teórico.

As Fig. III-23 a Fig. III-32 ilustram a evolução das deformações específicas nas barras de aço, das tensões principais nas cantoneiras de alma e das cargas axiais nos parafusos localizados nas abas das cantoneiras de alma adjacentes à alma da viga principal– ligações tipo (a).

---

1. Pode-se verificar o comportamento inicial mais rígido da ligação entre a laje de concreto e a viga metálica na curva típica de *push tests* - Fig. II-6.

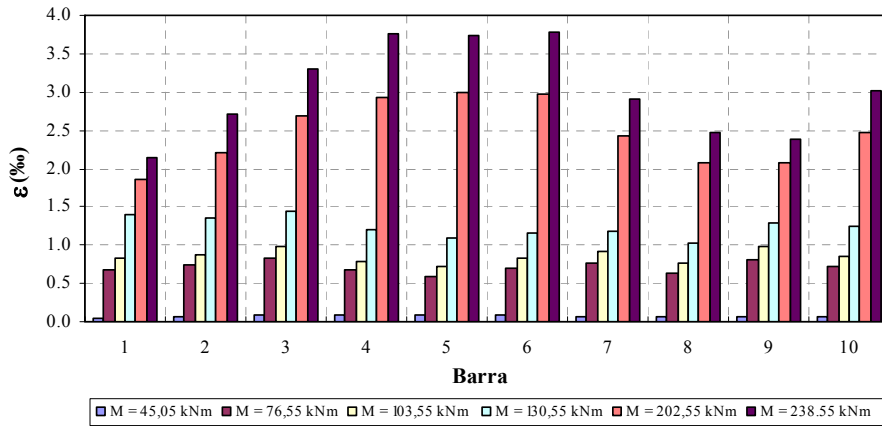


Fig. III-23 Ligação 1(a): deformações específicas nas barras de aço<sup>1</sup>.

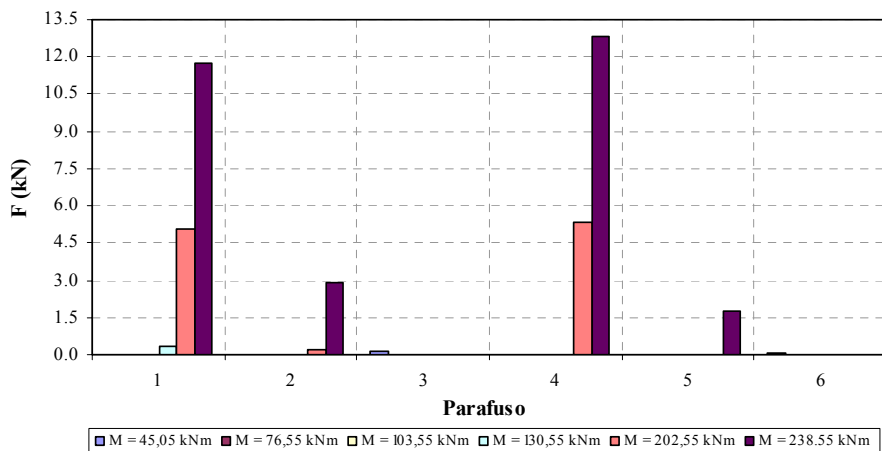


Fig. III-24 Ligação 1(a): Carga axial instalada nos parafusos<sup>2</sup>.

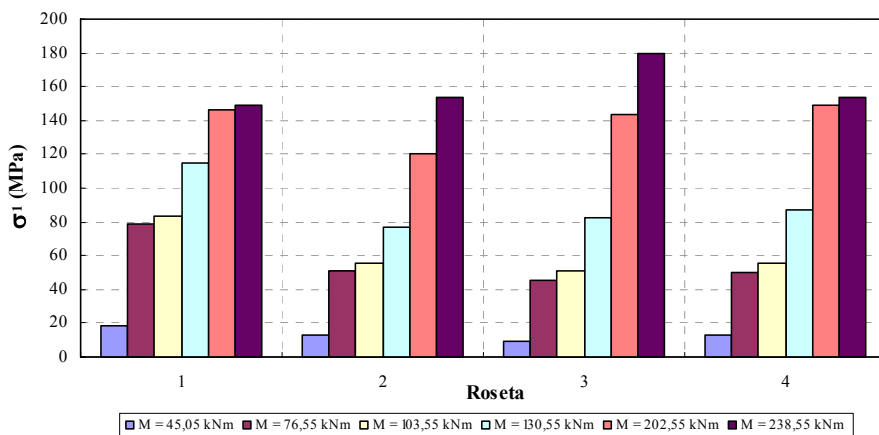


Fig. III-25 Ligação 1(a): Tensões principais  $\sigma_{\max}$  das cantoneiras de alma<sup>3</sup>.

1. Barras de aço numeradas no sentido oeste – leste de 1 a 9, ligações do grupo 1, e 1 a 6, ligações do grupo 2. Os números 10 (ligações do grupo 1) e 7 (grupo 2) correspondem à média das deformações de todas as barras – vide Fig. III-1 e Fig. III-2.

2. Parafusos ordenados de cima para baixo: 1 a 3 - lado oeste; 4 a 6 - lado leste.

3. Rosetas nomeadas segundo a seguinte convenção: 1 e 2 – cantoneiras do lado norte; 3 e 4 – lado sul.

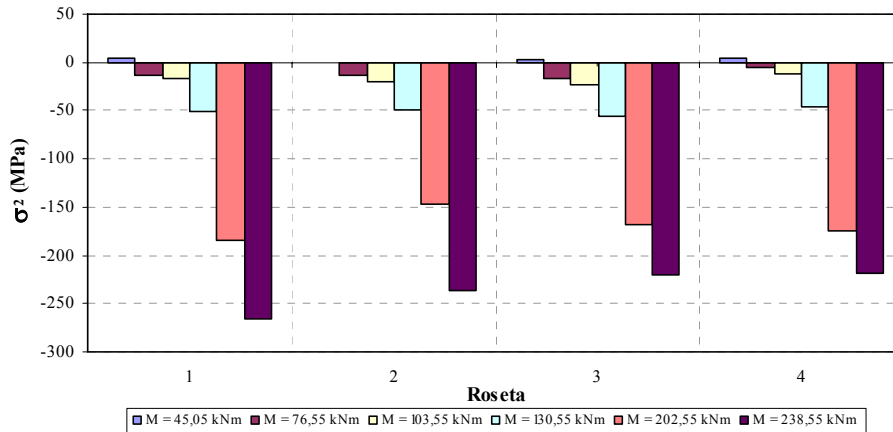


Fig. III-26 Ligação 1(a): Tensões principais  $\sigma_{\min}$  das cantoneiras de alma.

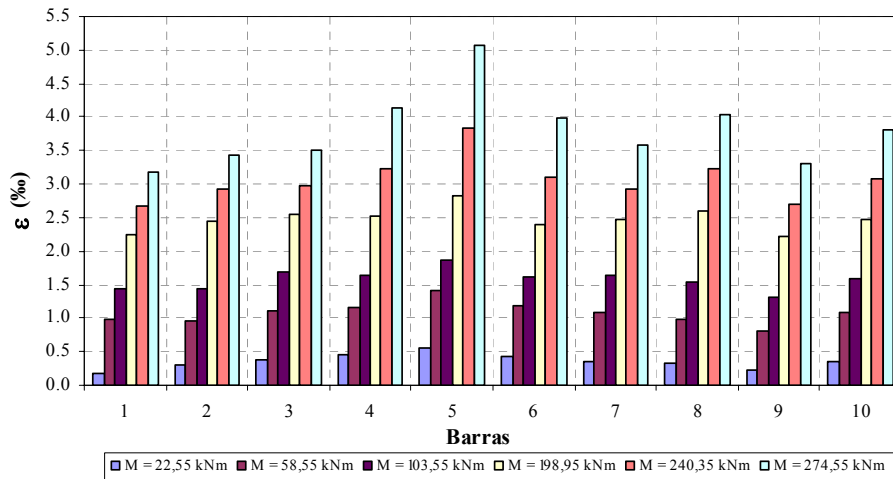


Fig. III-27 Ligação 1(b): deformações específicas nas barras de aço.

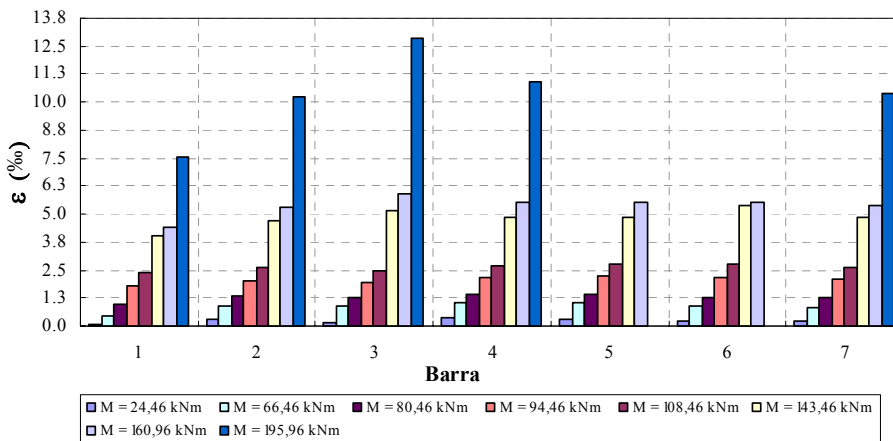


Fig. III-28 Ligação 2(a): deformações específicas nas barras de aço<sup>1</sup>.

1. As deformações nas barras 5 e 6, na última etapa do ensaio, não foram medidas – provável descolamento dos extensômetros.

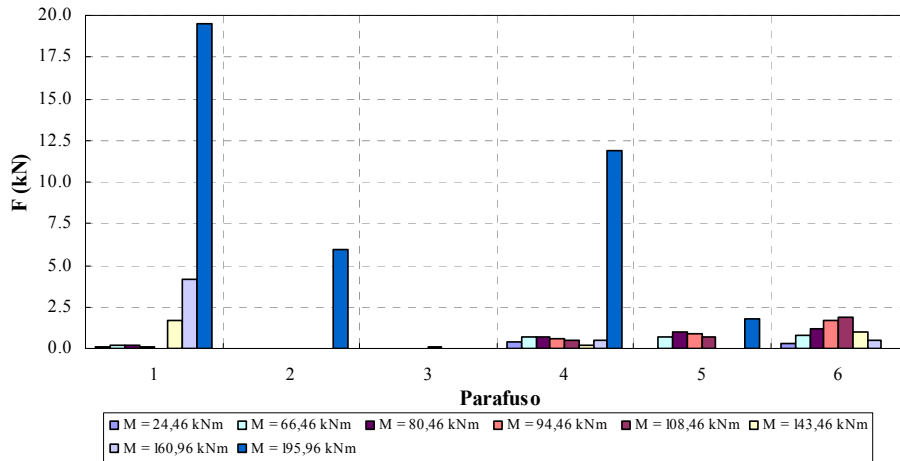


Fig. III-29 Ligação 2(a): Carga axial instalada nos parafusos.

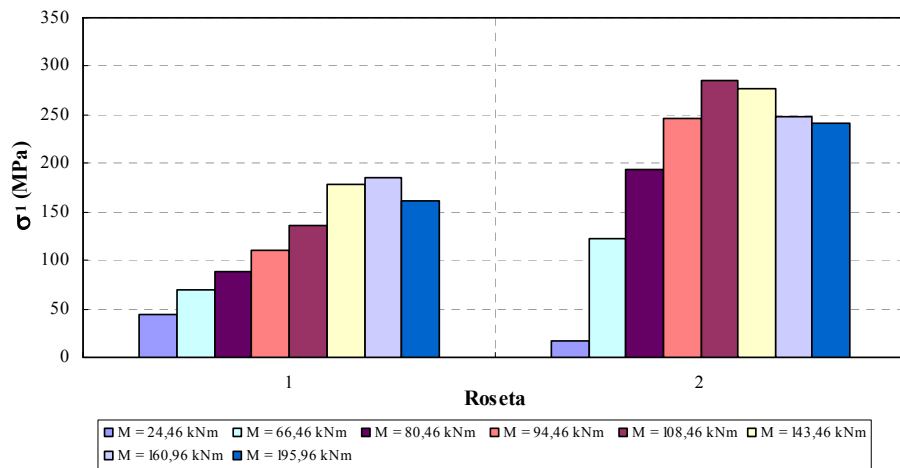


Fig. III-30 Ligação 2(a): Tensões principais  $\sigma_{\max}$  das cantoneiras de alma<sup>1</sup>.

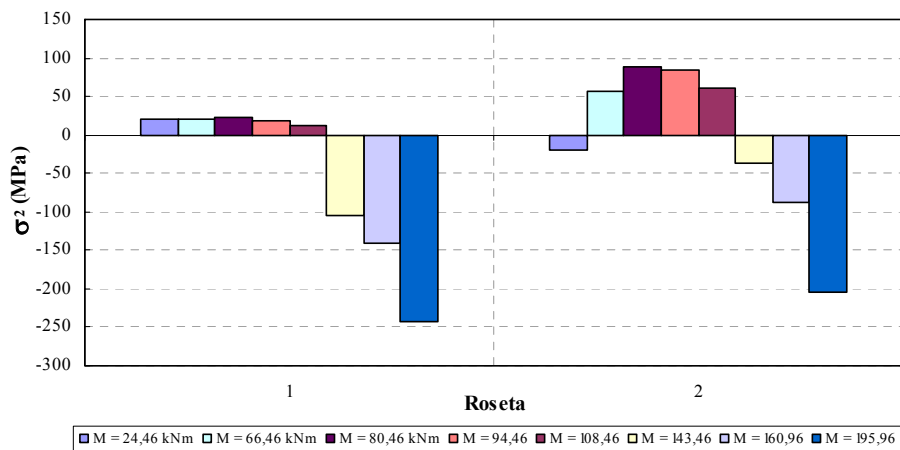
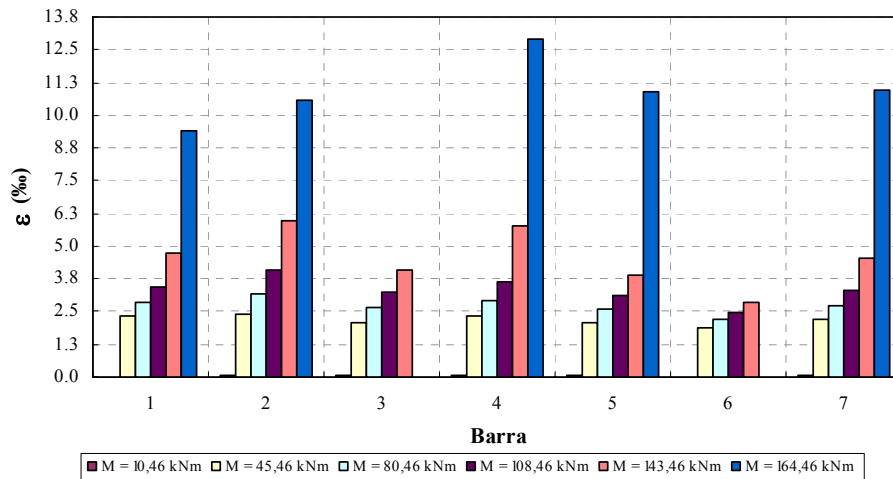


Fig. III-31 Ligação 2(a): Tensões principais  $\sigma_{\min}$  das cantoneiras de alma<sup>1</sup>.

1. Somente as tensões nas cantoneiras do lado norte, 1 e 2, foram medidas – vide Fig. III-1 e Fig. III-2.



**Fig. III-32 Ligação 2(b): deformações específicas nas barras de aço<sup>1</sup>.**

Pode-se perceber, da observação das Fig. III-23, Fig. III-27, Fig. III-28 e Fig. III-32 um considerável aumento das deformações nas barras de aço em torno dos pontos de grande perda de rigidez<sup>2</sup> nos gráficos  $M \times \theta_l$  das ligações (Fig. III-13 a Fig. III-16), caracterizando, pois, a abertura de fissuras na laje de concreto – o modelo teórico que descreve o processo de fissuração de um tirante de concreto armado, Fig. II-8, é bastante útil no entendimento deste fenômeno.

Vale salientar que nas ligações do grupo 2, com menores taxas de armadura, após a estabilização do processo de fissuração, as barras de aço se encontram próximas do escoamento –  $\varepsilon_{s,médio} = 2,06\%$  e  $\varepsilon_{s,médio} = 2,20\%$  para as ligações 2(a) e 2(b), respectivamente -, o que não foi verificado para as ligações do grupo 1, com maiores taxas de armadura. As aberturas das fissuras nas lajes do grupo 2 foram, pois, maiores que as do grupo 1. Como já afirmado anteriormente, haja vista os altos valores de cargas pontuais aplicadas para as ligações do grupo 1 (causadoras de possíveis colapsos localizados), as deformações específicas finais das barras deste grupo (tomando-se a média dos valores das barras) foram inferiores às do grupo 2, da ordem de 3 a 4% e 10 a 11%, respectivamente.

A observação dos histogramas de deformações nas barras revela que, excetuando-se as últimas etapas, houve uniformidade nas deformações destes elementos, não havendo efeito considerável de *shear lag*.

1. As deformações nas barras 3 e 6, na última etapa do ensaio, não foram medidas – provável descolamento dos extensômetros.

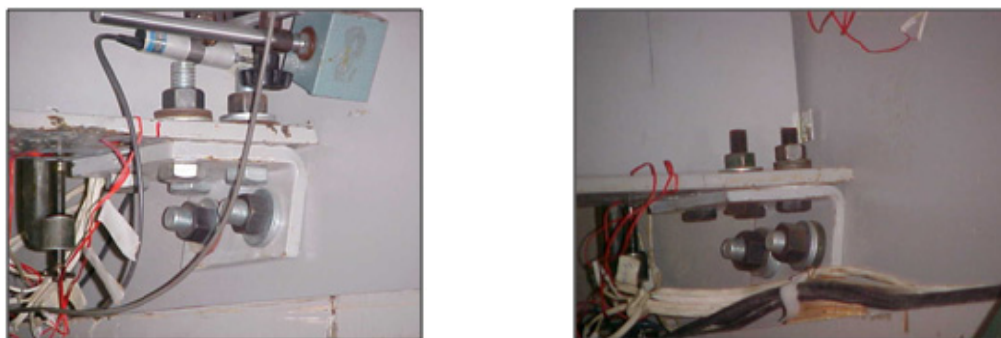
2.  $M = 103,55 \text{ kNm}$  – ligação 1(a);  $M = 22,55 \text{ kNm}$  – ligação 1(b);  $M = 94,46 \text{ kNm}$  – ligação 2(a);  $M = 10,46 \text{ kNm}$  – ligação 2(b).

A observação das figuras Fig. III-24 e Fig. III-29, mais precisamente das últimas etapas, e da Fig. III-33 revela que as cantoneiras de alma se comportam basicamente segundo o modelo da Fig. II-4, com os parafusos tracionados e a linha neutra plástica se estendendo por toda a altura das mesmas. Por sua vez, as Fig. III-25, Fig. III-26, Fig. III-30 e Fig. III-31 indicam um já iniciado processo de plastificação das cantoneiras de alma, com o esgotamento de suas capacidades resistentes.



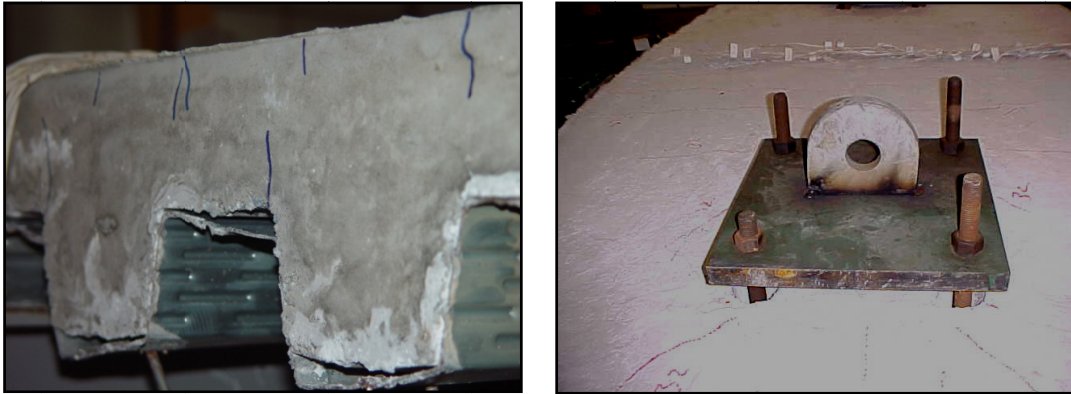
**Fig. III-33 Mecanismo plástico de deformação das cantoneiras de alma.**

Vale salientar que, em torno de  $M = 143,46 \text{ kNm}$ , as cantoneiras de assento na ligação 2(a) encostaram na alma da viga principal, Fig. III-34, o que se verifica graficamente, Fig. III-15, pelo súbito ganho de rigidez da ligação – isto também ocorreu nos ensaios das ligações 2(b), sem a percepção de qualquer efeito nos resultados obtidos e 1(b), onde também se verifica o ganho súbito de rigidez na Fig. III-14, em torno de  $M = 240,35 \text{ kNm}$ , quando aparentemente já havia uma tendência à constituição de um “patamar”, havendo, pois, uma pequena perda de correlação teórico-experimental neste trecho final; como a deformação média das barras ainda se encontra entre os trechos *A* e *B*, Fig. III-12 e Fig. III-27, a ligação ainda pode oferecer alguma rigidez ao conjunto, apesar da ausência das cantoneiras de alma, como na ligação 2(a).



**Fig. III-34 Deformação das cantoneiras de assento nas ligações 1(b) e 2(a).**

Por fim, os ensaios foram interrompidos devido à deformação excessiva da forma metálica e puncionamento da laje de concreto na ligação 1(a), deformação excessiva da forma e cantoneiras de assento na ligação 1(b); deformação excessiva das cantoneiras de alma, ligação 2(a), e assento, ligação 2(a) e 2(b). Verificaram-se, em todos os ensaios, problemas de fissuração localizados em torno do ponto de aplicação das cargas, apesar das malhas de reforço adicionadas nestes locais – Fig. III-35.



**Fig. III-35 Deformação da forma metálica e fissuração na laje de concreto ao redor dos pontos de aplicação de carga.**

## Capítulo IV: Programas para Análise Computacional de Pisos Mistos

---

De posse de modelos analíticos aferidos experimentalmente, seja o discutido nos capítulos II e III acerca do comportamento de ligações mistas com cantoneiras de assento e alma, seja o referente a outras tipologias de ligações semi-rígidas, naturalmente o próximo passo é a sua aplicação em uma ferramenta computacional de análise de sistemas de pisos mistos semicontínuos.

Diversos programas para análise estrutural estão disponíveis no mercado, porém ou não contemplam análises não-lineares físicas e geométricas ou, por seu caráter extremamente abrangente (*Abaqus*, *Ansys*, por exemplo) tornam-se proibitivos, isto é, inapropriados ao dia-a-dia do ambiente de um escritório de projetos, prestando-se a situações extremamente específicas de análise.

Sendo assim, o programa computacional *Grecon* desenvolvido por Oliveira [6] continua sendo uma simples e eficiente ferramenta de análise de sistemas de pisos mistos aço-concreto semicontínuos sob cargas de gravidade. Esta ferramenta é capaz de:

- Realizar a análise incremental não-linear física de estruturas de grelha;
- Incorporar elementos de conexão não-lineares para representar ligações semi-rígidas segundo a Eq.(II-1). Neste ponto, o programa *Grecon* foi aperfeiçoado, permitindo-



se a consideração de valores de rigidez pós-fissuração, representados pela variável  $k_{\theta p}$ , para levar em consideração o processo de fissuração da laje de concreto tal qual discutido e apresentado nos capítulos II e III;

- Contemplar elementos com inércia variável em “salto”; por meio desta habilidade, pode-se simular simplificadamente o processo de fissuração na laje de concreto;
- No caso de pisos mistos não-escorados na fase de construção, contemplar o estágio anterior e o posterior à cura do concreto, com propriedades dos elementos de grelha e das ligações referentes à seção puramente metálica e mista, respectivamente;
- Representar a formação de rótulas plásticas nos elementos de viga. Também neste ponto, o programa *Grecon* foi aperfeiçoado, considerando relações momento versus curvatura reais de vigas mistas e não mais idealizadas (comportamento elasto-plástico perfeito) tais quais utilizadas em [6].

Entretanto, a representação de estruturas de piso unicamente como uma grelha pode, em algumas situações, não ser suficiente para a completa análise do comportamento estrutural. Muitas hipóteses são consideradas: os apoios, por exemplo, são admitidos como fixos, desprezando-se a interação entre as colunas e o vigamento do piso – o comportamento de pórtico é, portanto, negligenciado. Além disso, a laje não é representada com um elemento de placa ou casca, sendo considerada por meio de seções de viga homogeneizadas (vigas metálicas acopladas, em sua parte superior, a mesas de concreto delimitadas por larguras colaborantes de laje). Portanto, foi desenvolvida uma nova ferramenta computacional, voltada à análise de estruturas em três dimensões – *PAEST3D*. Baseada no Método dos Elementos Finitos, esta nova ferramenta é capaz de:

- Realizar a análise linear estática e dinâmica de estruturas espaciais;
- Incorporar elementos de pórtico espacial com conexões lineares para representar ligações semi-rígidas segundo a aproximação bi-linear do Eurocode 3, Fig. II-2;
- Incorporar elementos de casca fina ou espessa, onde se admitem deformações por cortante – Teoria de Mindlin;
- Realizar a análise de cascas ortotrópicas<sup>1</sup>; por meio desta habilidade, permite-se a

---

1. A ortotropia aqui referida não é aquela referente ao material, onde se tem propriedades físicas distintas em duas direções principais ortogonais. Refere-se aqui à ortotropia conferida por características geométricas, onde a forma da casca confere à mesma uma rigidez predominante em uma direção.

representação de lajes mistas com fôrma de aço incorporada (*steel-deck*), onde a geometria trapezoidal das fôrmas confere à laje um comportamento mais unidirecional;

- Permitir a análise dinâmica de estruturas com possibilidade de redução e controle de vibrações por meio da consideração de sistemas de controle passivo (atenuadores dinâmicos sincronizados ou sintonizados em frequência). Como um dos benefícios da adoção de ligações semi-rígidas é a adoção de seções mais esbeltas, problemas de vibrações excessivas podem ser preponderantes, exigindo, portanto, uma análise mais cuidadosa;
- Incorporar cargas dinâmicas móveis, como o caminhar de pessoas e a passagem de veículos sobre a estrutura.

Observa-se, desde já, que uma ferramenta não substitui a outra, mas se complementam. Assim, entende-se que a análise de um piso misto deve ser efetuada inicialmente com o programa *Grecon*, onde a estrutura do piso é tratada como uma grelha não-linear física, podendo as seções dos elementos ser escolhidas e dimensionadas com base em códigos de projeto. Em seguida, o comportamento global deve ser avaliado, sendo a estrutura representada por meio de elementos de pórtico espacial e casca, sendo efetuadas análises lineares estáticas e dinâmicas (vibrações excessivas podem então ser investigadas assim como a possibilidade de implantação de algum sistema de controle). Além disso, neste momento podem ser incluídos os pilares e as ações horizontais devidas, por exemplo, a forças dinâmicas de vento, apesar do foco deste trabalho ser a análise de pisos sob ação de cargas de gravidade.

Presume-se aqui, portanto, na avaliação do comportamento de edifícios de andares múltiplos com pisos mistos semicontínuos, a existência de sistemas de contraventamento para absorção de esforços horizontais (caso mais comum), funcionando a laje e a maior parte do vigamento do piso como um diafragma rígido; vale salientar que em [20] é apresentado um procedimento para avaliação do comportamento de pórticos semicontínuos sob ação de forças horizontais.

Como a formulação do programa *Grecon* é bastante discutida em [6], apresentar-se-ão apenas os pontos mais relevantes relativos à análise matricial de grelhas mistas não-lineares, enquanto que se discorrerá mais profundamente acerca da formulação matricial para análise de estruturas espaciais utilizada no programa *PAEST3D*.

## IV.1 FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA ANÁLISE DE GRELHAS MISTAS

### IV.1.1 Matriz de Rigidez

Como dito anteriormente, neste tipo de análise apenas elementos de barra são considerados, não sendo a laje representada como elemento de casca ou placa. Assim, o piso é modelado como uma grelha de vigas mistas, onde se distinguem três graus de liberdade por nó: duas rotações, associadas ao momento de torção e momento fletor, e uma translação, associada ao esforço cortante (Fig. IV-1).



**Fig. IV-1** Graus de liberdade do elemento de grelha.

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento de grelha podem ser utilizados diversos métodos, tendo sido o processo de Mohr<sup>1</sup> e o método da rigidez os processos utilizados em [6] para a obtenção dos coeficientes de rigidez – Eq.(IV-1). Considerando “*E*” e “*G*” os módulos de elasticidade longitudinal e transversal do material, “*l*” o comprimento do elemento e “*I*” e “*J*” as inércias à flexão e à torção da seção do elemento, vem:

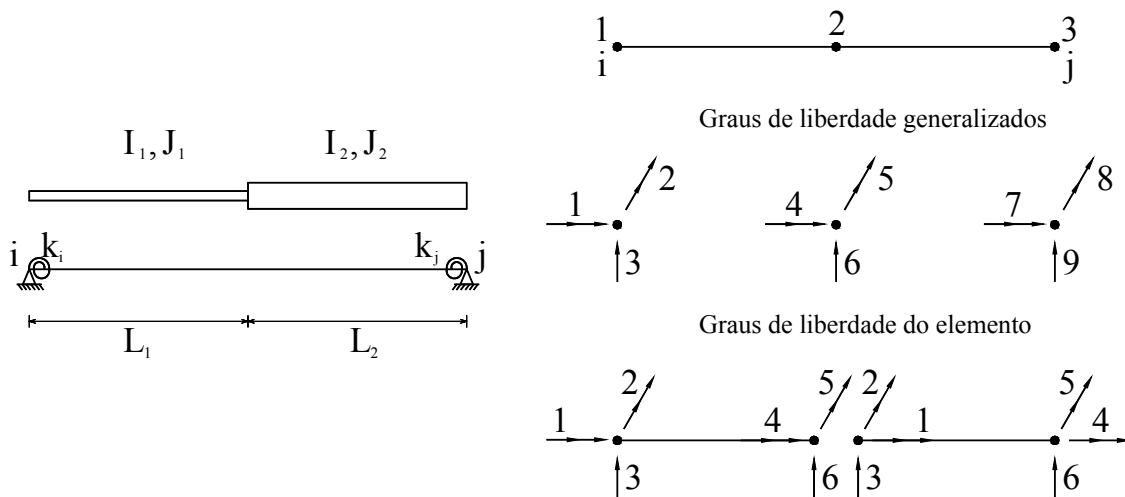
$$[\mathbf{k}_{grelha}] = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \\ & & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & \\ & \text{Simétrica} & & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \\ & & & & \frac{12EI}{l^3} & \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-1)}$$

Entretanto, a matriz expressa em Eq.(IV-1) não é capaz de contemplar elementos de conexão associados aos extremos do elemento de grelha, necessários para a representação de ligações semi-rígidas. Além disso, faz-se necessária a formulação de

1. No processo de Mohr, uma viga conjugada é criada de maneira a haver equivalência entre a sua equação de momentos fletores e a equação de linha elástica da viga original.

um elemento de grelha com inércia variável “em salto” a fim de considerar, mesmo que simplifiadamente, o processo de fissuração na laje de concreto - na região próxima aos apoios, em que a mesa de concreto se encontra fissurada, seria considerada apenas a inércia da viga metálica, ao passo em que nos trechos não fissurados é considerada a inércia da viga mista (o programa deve ser capaz fazer esta análise automaticamente).

Sendo assim, a obtenção de uma matriz de rigidez para elementos não-prismáticos com conexões elásticas nas bordas constitui um imperativo. Isto pode ser feito considerando-se um nó fictício no ponto em que ocorre a mudança de inércia do elemento (Fig. IV-2), após o que se monta o sistema de equações globais do sistema e impõe-se a condição de que só deve haver ações e deslocamentos prescritos nos apoios [6]. A matriz de rigidez para elementos não prismáticos com conexões  $[K_{grencp}]$  pode então ser dada pela Eq.(IV-2).



**Fig. IV-2 Consideração de um nó fictício (nó 2) para montagem da matriz de rigidez de elementos de grelha não-prismáticos com conexões elásticas nas bordas.**

$$[k_{grencp}] = [S_{BB}] - [S_{BA}][S_{AA}]^{-1}[S_{AB}] \quad \text{Eq.(IV-2)}$$

onde os índices  $A$  e  $B$  referem-se, respectivamente, aos graus de liberdade sem restrição (4, 5 e 6) e impedidos (1, 2, 3, 7, 8, 9) no sistema da Fig. IV-2. As matrizes  $[S_{AA}]$ ,  $[S_{BB}]$ ,  $[S_{AB}]$  e  $[S_{BA}]$  por sua vez, constituem partes integrantes da matriz  $[S'_G]$  (Eq.(IV-4), obtida a partir da reordenação da matriz de rigidez global  $[S]$  (Eq.(IV-3) do elemento de grelha com “3” nós descrito na Fig. IV-2 [6];  $k_i$  e  $k_j$  são, respectivamente, os coeficientes de rigidez das conexões dos nós  $i$  e  $j$ .

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix}
\frac{GJ}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{4C_1EJ(1+3D_1)}{L_1} & \frac{-6C_1EJ(1+2D_1)}{L_1^2} & 0 & \frac{2C_1EJ}{L_1} & \frac{6C_1EJ(1+2D_1)}{L_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{12C_1EJ(1+D_1+H_1)}{L_1^3} & 0 & 0 & \frac{-6C_1EJ(1+2H_1)}{L_1^2} & \frac{-12C_1EJ(1+D_1+H_1)}{L_1^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{GJ}{L_1} + \frac{GJ_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\
4C_1EJ(1+3H_1)/L_1 + & 6C_1EJ(1+2H_1)/L_1^2 + & 0 & \frac{2C_2EJ_2}{L_2} & \frac{6C_2EJ_2(1+2D_2)}{L_2^2} & 0 & \frac{2C_2EJ_2}{L_2} & \frac{6C_2EJ_2(1+2D_2)}{L_2^2} \\
4C_2EJ_2(1+3D_2)/L_2 & 6C_2EJ_2(1+2D_2)/L_2^2 & 0 & 0 & \frac{6C_2EJ_2(1+2D_2)}{L_2^2} & 0 & 0 & 0 \\
12C_1EJ(1+D_1+H_1)/L_1^3 + & 12C_1EJ_2(1+D_2+H_2)/L_2^3 & 0 & 0 & \frac{-6C_2EJ_2(1+2H_2)}{L_2^2} & \frac{-12C_2EJ_2(1+D_2+H_2)}{L_2^3} & 0 & 0 \\
12C_2EJ_2(1+D_2+H_2)/L_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{GJ_2}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{4C_2EJ_2(1+3H_2)}{L_2} & \frac{6C_2EJ_2(1+2H_2)}{L_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4C_2EJ_2(1+3H_2)}{L_2} & \frac{6C_2EJ_2(1+2H_2)}{L_2^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12C_2EJ_2(1+D_2+H_2)}{L_2^3} & \frac{12C_2EJ_2(1+D_2+H_2)}{L_2^3}
\end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-3)}$$

$$C_1 = 1/(4H_1 + 1), D_1 = 0, H_1 = EI_1/(L_1K_i)$$

$$C_2 = 1/(4D_2 + 1), H_2 = 0, D_2 = EI_2/(L_2k_j)$$

$$[S'_G] = \begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{47} & S_{48} & S_{49} \\ S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{57} & S_{58} & S_{59} \\ S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{67} & S_{68} & S_{69} \\ \hline S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{17} & S_{18} & S_{19} \\ S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{27} & S_{28} & S_{29} \\ S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{37} & S_{38} & S_{39} \\ S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{77} & S_{78} & S_{79} \\ S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{87} & S_{88} & S_{89} \\ S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{97} & S_{98} & S_{99} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-4)}$$

A fissuração na laje de concreto em regiões de momento fletor negativo é, portanto, assumida ocorrer de forma abrupta, isto é, uma vez identificado que a tensão trativa na fibra mais extrema da mesa de concreto ultrapassa a resistência à tração do material,  $f_{ct}$ , adota-se para aquele trecho a inércia fissurada do elemento, para a qual só contribui o perfil metálico. O valor da tensão em uma dada fibra do concreto da seção do elemento homogeneizada pode ser dado por [21]:

$$\sigma_n = \frac{1}{\alpha_m} \frac{My}{I_n}, \alpha_m = \frac{E_a}{E_c} \quad \text{Eq.(IV-5)}$$

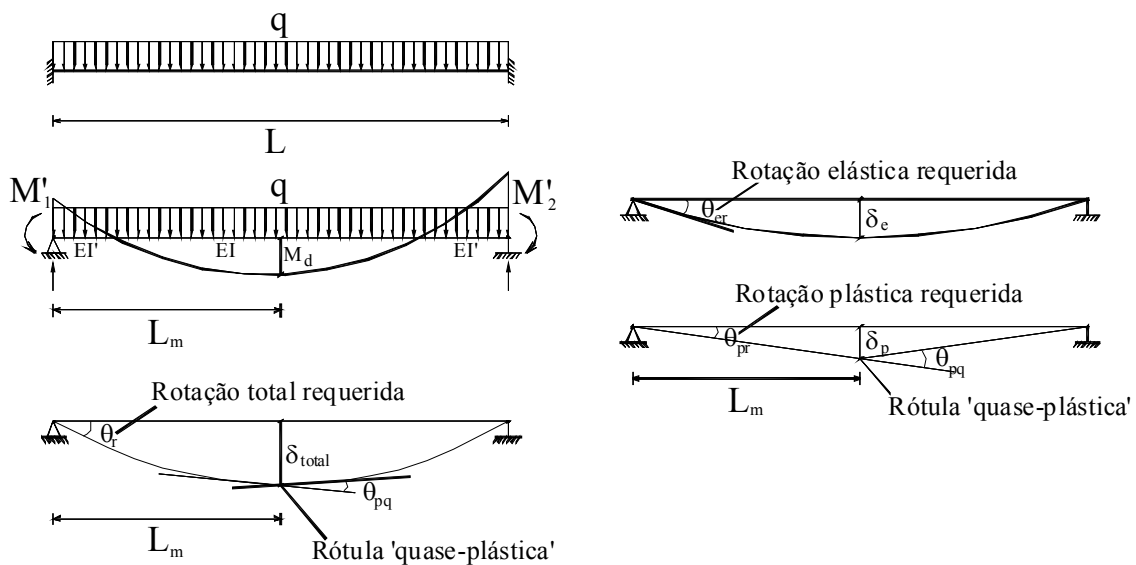
onde  $M$  é o momento fletor atuante na seção,  $y$  é a distância da fibra ao centro de gravidade da seção homogeneizada e  $I_n$  corresponde à sua inércia flexional sendo, ainda,  $\alpha_m$  a razão entre os módulos de elasticidade longitudinal do aço,  $E_a$ , e do concreto,  $E_c$ .

#### IV.1.2 Modelo para análise plástica

Ao se avaliar o comportamento estrutural de um piso misto, pode-se realizar uma análise rígido-plástica ou elasto-plástica (Fig. I-1), sendo o estado limite último caracterizado pela formação de um mecanismo de colapso plástico, onde rótulas plásticas são formadas nos apoios e vãos. Uma vez que vigas mistas apresentam resistência ao momento fletor positivo bem superior ao momento negativo (viga metálica isolada ou com armadura na laje), os momentos nos apoios devem ser inferiores ao momento máximo no vão. Observe o leitor que isto não ocorrerá no caso de pisos mistos contínuos, submetidos a uma análise elástica. Sendo assim, o projeto de sistemas de pisos mistos semicontínuos com a adoção de ligações semi-rígidas constitui uma alternativa estrutural bastante atraente sob o ponto de vista da economia e

comportamento estrutural. Nestes tipos de sistema estrutural, as rótulas plásticas se formarão primeiramente nos apoios, mais precisamente nas ligações (desde que sejam parcialmente resistentes); estas devem, pois, possuir capacidade de rotação suficiente  $\theta_u$ , Eq.( II-13), para continuar a se deformar e permitir que outras rótulas plásticas se formem também no vão, configurado então o mecanismo de colapso. Vale salientar, entretanto, que se a ligação não for suficiente rígida com relação à viga, a rótula plástica se formará primeiramente no vão desta última para então se formar na ligação (ou não).

A capacidade de rotação requerida  $\theta_{rq}$ , seria então a mínima capacidade de rotação que a ligação deve possuir para permitir a formação da rótula plástica no vão. Segundo Li et al [22], a capacidade de rotação requerida é constituída por uma parcela elástica,  $\theta_{er}$ , e outra plástica,  $\theta_{pr}$  (Fig. IV-3), estando esta última presente somente quando o momento máximo do vão ( $M_d$ ) for superior ao momento de início de escoamento da fibra mais inferior do perfil metálico ( $M_y$ ).



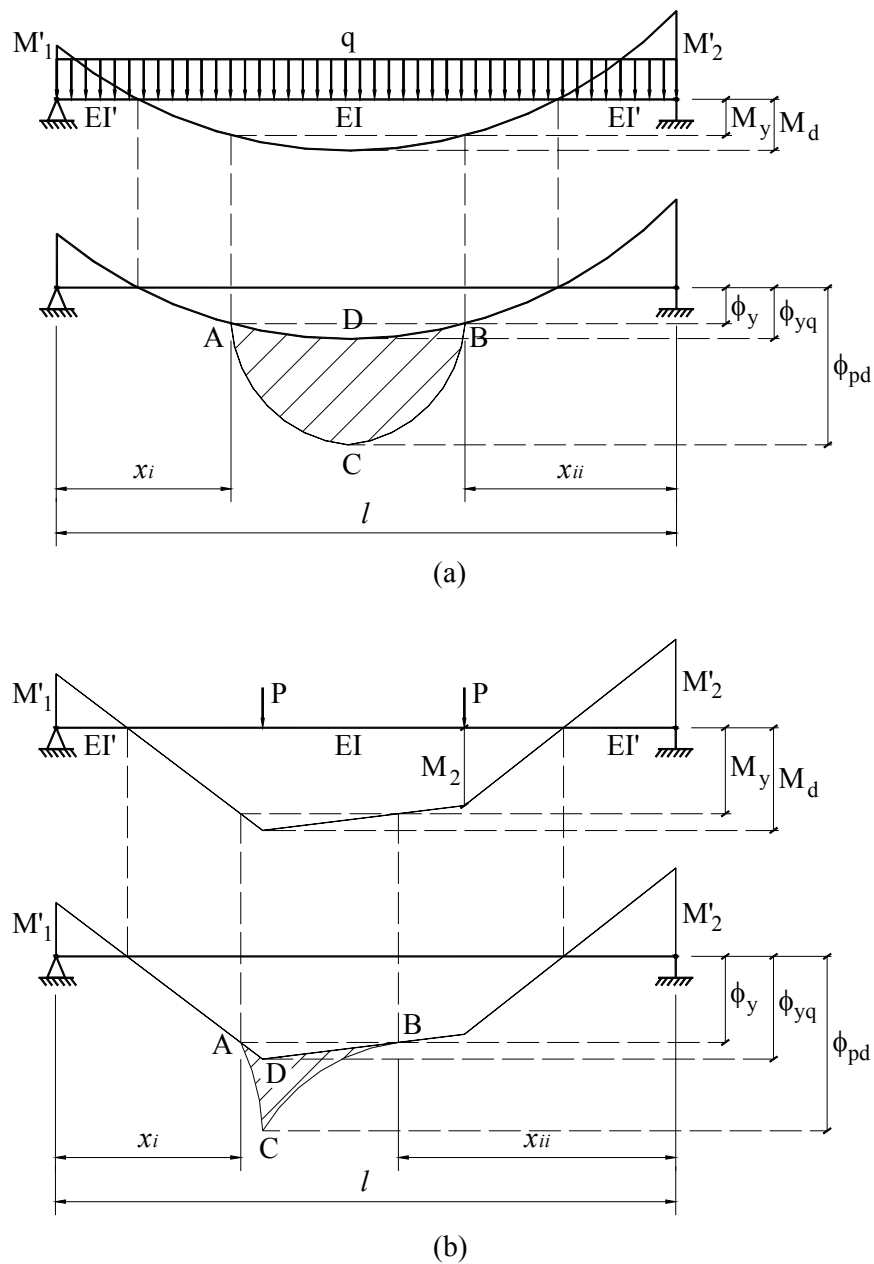
**Fig. IV-3 Componentes da capacidade de rotação requerida [22].**

Observou-se que a parcela elástica  $\theta_{er}$  é diretamente proporcional ao momento máximo no vão, ao comprimento da viga e inversamente proporcional à rigidez flexional  $EI$ , dependendo também, entre outros fatores, da relação entre os momentos nas ligações e o momento máximo no vão.

Por sua vez, a parcela plástica  $\theta_{pr}$  é dependente da rotação plástica  $\theta_{pq}$  da seção de momento máximo no vão, sendo  $\theta_{pq}$  função da curvatura nesta seção ( $\phi_{pd}$ ). Portanto, esta parcela é influenciada pelo tipo de carregamento, pontual ou distribuído. Li et al

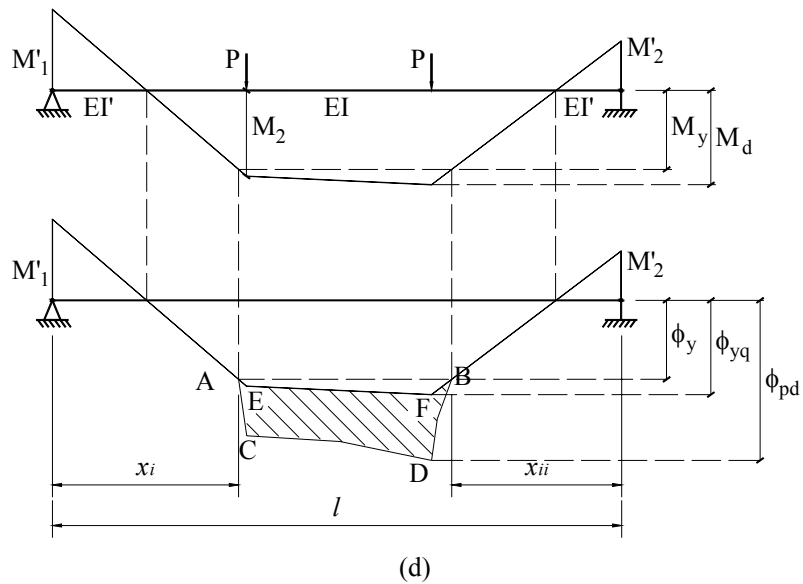
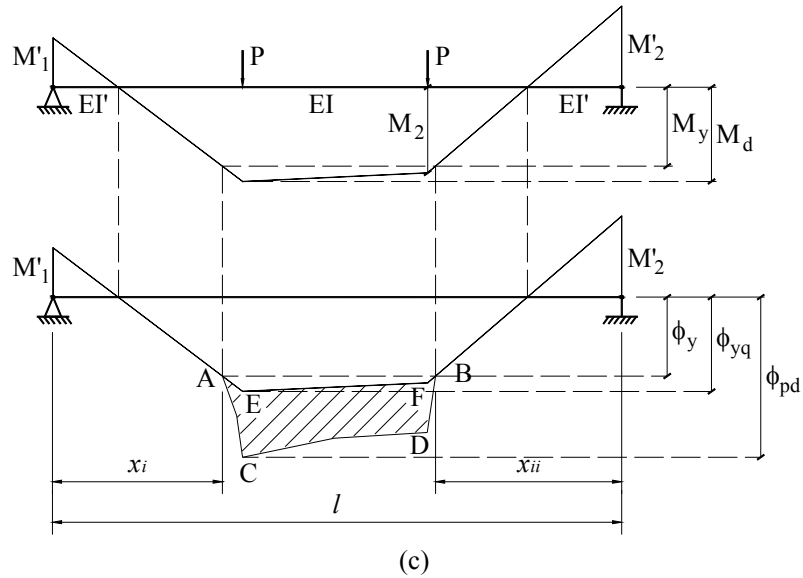
[22] sugerem um modelo analítico para determinação das parcelas elástica e plástica da capacidade de rotação requerida para os casos de carregamento da Fig. IV-4, comparando os resultados teóricos com experimentais.

Observando a Fig. IV-4, pode-se perceber que a menor capacidade de rotação requerida corresponde a uma viga com uma única carga pontual, ao passo que o sistema com duas cargas pontuais corresponde à maior capacidade de rotação ( $\theta_{pr}$  é diretamente proporcional a  $\theta_{pq}$ , correspondente à área em hachura na Fig. IV-4).



**Fig. IV-4 Distribuição da curvatura para uma viga com diferentes tipos de carregamento [22].**





**Fig. IV-4 (continuação) Distribuição da curvatura para uma viga com diferentes tipos de carregamento [22].**

A curvatura da seção de momento máximo após o início do escoamento da fibra mais extrema do perfil metálico pode ser dada pela Eq.(IV-6) [22]:

$$\phi_{pd} = \phi_{yq} + \left( \phi_{pu} - \frac{M_p}{EI} \right) \left( \frac{M_d - M_y}{M_p - M_y} \right)^2, \quad \text{Eq.(IV-6)}$$

$$\phi_{pu} = 5,7 \left( \frac{h_s}{t_c} \right)^{0,2} \phi_y, \quad \phi_y = \frac{M_y}{EI}, \quad \phi_{yq} = \frac{M_d}{EI} \quad \text{Eq.(IV-6a)}$$

onde  $\phi_{pu}^1$  e  $\phi_y$  correspondem à curvatura na seção de momento máximo quando esta estiver submetida ao momento último  $M_p$  e de início de escoamento  $M_y$ , respectivamente;  $h_s$  e  $t_c$  são as alturas do perfil metálico e da laje de concreto.

Por sua vez, a rotação ‘quase plástica’ da seção de momento máximo  $\theta_{pq}$  pode ser obtida por meio das áreas com hachura nos diagramas da Fig. IV-4 [22]. Assim, para cargas distribuídas:

$$\theta_{pq} = 0,533a(l - x_i - x_{ii})(M_d - M_y)^2 \quad \text{Eq.(IV-7a)}$$

Para uma carga pontual ou duas cargas distribuídas segundo a Fig. IV-4b:

$$\theta_{pq} = \frac{1}{3}a(l - x_i - x_{ii})(M_d - M_y)^2 \quad \text{Eq.(IV-7b)}$$

Para duas cargas pontuais, com  $M_1' \leq M_2'$  segundo a Fig. IV-4c:

$$\theta_{pq} = C_1 + C_2a(M_d - M_y)^2, \quad \text{Eq.(IV-7c)}$$

$$C_1 = \frac{1}{3}(\phi_{p2} - \phi_{yq2})[(l_{ii} - x_{ii}) + 2(l - l_i - l_{ii})]$$

$$C_2 = \frac{1}{3}[(l_i - x_i) + (l - l_i - l_{ii})]$$

$$a = \left(\phi_{pu} - \frac{M_p}{EI}\right) \left(\frac{1}{M_p - M_y}\right)^2$$

Para duas cargas pontuais, com  $M_1' > M_2'$  segundo a Fig. IV-4d:

$$\theta_{pq} = C_1^* + C_2^*a(M_d - M_y)^2, \quad \text{Eq.(IV-7 d)}$$

$$C_1^* = \frac{1}{3}(\phi_{p1} - \phi_{yq1})[(l_i - x_i) + 2(l - l_i - l_{ii})]$$

$$C_2^* = \frac{1}{3}[(l_{ii} - x_{ii}) + (l - l_i - l_{ii})]$$

---

1. A relação entre  $\phi_{pu}$  e  $\phi_y$  dada pela Eq.(IV-6a) é válida no caso de perfil metálico com aço de tensão  $f_y = 275 \text{ MPa}$ .

Observe que a rotação na seção de momento máximo do vão  $\theta_{pq}$  é diretamente proporcional ao momento aplicado  $M_d$ . Portanto, como  $\theta_{pq}$  é diretamente proporcional a  $\theta_{pr}$ , conclui-se que quanto maior o momento máximo  $M_d$  maior será a capacidade de rotação requerida. Sugere-se inclusive em [23] que não se adotem valores para  $M_d$  superiores a 90% da capacidade resistente plástica  $M_p$  da viga mista, a fim de se reduzir o valor da capacidade de rotação requerida, uma vez que se diminuiria a parcela plástica contribuinte  $\theta_{pr}$ .

Finalmente, a formação de rótulas plásticas em vigas mistas em seções de momento positivo poderia ser simulada simplificada por meio de elementos de conexão com rigidez rotacional (Fig. IV-5) cujas curvas momento versus rotação seriam, atingido o valor  $M_y$  na seção, caracterizadas pelo conjunto de equações Eq.(IV-7a) a Eq.(IV-7d). Assim, o valor da rigidez rotacional do elemento de conexão para rótulas plásticas seria, no caso de cargas distribuídas,

$$k_{t,rp} = \frac{dM_d}{d\theta_{pq}} = \frac{1}{2\sqrt{0,533a(l - x_i - x_{ii})\theta_{pq}}} \quad \text{Eq.(IV-8a)}$$

para uma carga pontual ou duas cargas distribuídas segundo a Fig. IV-4b,

$$k_{t,rp} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}a(l - x_i - x_{ii})\theta_{pq}}} \quad \text{Eq.(IV-8b)}$$

para duas cargas pontuais, com  $M_1' \leq M_2'$  segundo a Fig. IV-4c,

$$k_{t,rp} = \frac{1}{2\sqrt{C_2a(\theta_{pq} - C_1)}} \quad \text{Eq.(IV-8c)}$$

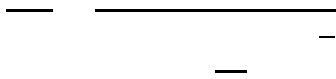
para duas cargas pontuais, com  $M_1' > M_2'$  segundo a Fig. IV-4d,

$$k_{t,rp} = \frac{1}{2\sqrt{C_2^*a(\theta_{pq} - C_1^*)}} \quad \text{Eq.(IV-8d)}$$

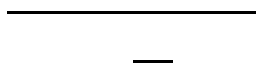
Por sua vez, as ligações semi-rígidas também são representadas por meio de elementos de conexão com rigidez rotacional cujas curvas momento versus rotação são caracterizadas pela Eq.(II-1). Assim, o valor da rigidez rotacional do elemento de conexão para ligações pode ser dado pela Eq.(IV-9a) ou pelas equações Eq.(IV-9b) e Eq.(IV-9c) no caso de se desprezar a rigidez plástica  $k_{\theta,p}$ :



Eq.(IV-9a)

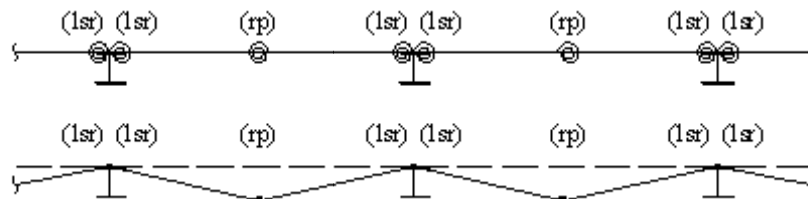


Eq.(IV-9b)



Eq.(IV-9c)

lembrando que  $k_{\theta}$  é a rigidez inicial da ligação e  $\theta_0$  é a rotação recuperada quando a ligação é descarregada sob o momento resistente  $M_{\theta}$ , sendo  $n$  o fator de forma da ligação. Observe o leitor desde já a vantagem do método, sendo as rotações nas ligações  $\theta$  e a capacidade de rotação requerida  $\theta_r$  resultados automáticos da análise.



**Fig. IV-5 Modelo numérico/mecânico utilizado para representação do mecanismo de colapso plástico em uma viga mista.**

Portanto, o modelo de análise plástica adotado corresponde ao modelo de rótulas plásticas concentradas, sendo satisfeitas as três condições necessárias na análise plástica [24]: condição de mecanismo (Fig. IV-5), condição de equilíbrio (somatório de forças e momentos em qualquer corpo livre deve ser nulo) e condição de momento plástico (momentos superiores a  $M_p$  ou  $M_{\theta}$  não podem ser resistidos pelo sistema).

### IV.1.3 Sistema de equações lineares e matriz de rotação

Uma vez baseada no método da rigidez, a análise matricial de uma grelha se desenvolve em torno da resolução do sistema de equações lineares descrito pela Eq.(IV-10), cujas incógnitas são os deslocamentos  $\{\mathbf{D}\}$  correspondentes aos  $n_{gl}$  graus de liberdade da estrutura:

$$[\mathbf{K}]_{n_{gl} \times n_{gl}} \{\mathbf{D}\}_{n_{gl} \times 1} = \{\mathbf{R}\}_{n_{gl} \times 1} \quad \text{Eq.(IV-10)}$$

onde  $\{\mathbf{R}\}$  é o vetor de forças nodais provenientes das cargas aplicadas diretamente nos nós ou das cargas distribuídas aplicadas nos elementos [6] e  $[\mathbf{K}]$  é a matriz de rigidez global da estrutura, estando todas as matrizes expressas no referencial global (x y z), matrizes estas construídas por meio das contribuições de todos os elementos da estrutura de acordo com as suas incidências.

Entretanto, as matrizes de rigidez,  $[\mathbf{k}_{grencp}]$ , vetor de deslocamentos  $\{\mathbf{d}'_e\}$  e de forças  $\{\mathbf{r}'_e\}$  dos elementos de grelha são montados no referencial local (x' y' z'), necessitando, pois, ser transformados para o referencial global para então ser inseridos na Eq.(IV-10). Isto é feito com a matriz de rotação  $[\mathbf{T}_{grelha}]$ , que relaciona os graus de liberdade locais aos globais (Fig. IV-6) e Eq.(IV-11) a Eq.(IV-14):

$$\{\theta'_{x1} \ \theta'_{y1} \ w'_1 \ \theta'_{x2} \ \theta'_{y2} \ w'_2\}^T = [\mathbf{T}_{grelha}] \{\theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_1 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_2\}^T, \quad \text{Eq.(IV-11)}$$

$$\{\mathbf{d}'_e\} = [\mathbf{T}_{grelha}] \{\mathbf{d}_e\} \quad \text{Eq.(IV-11a)}$$

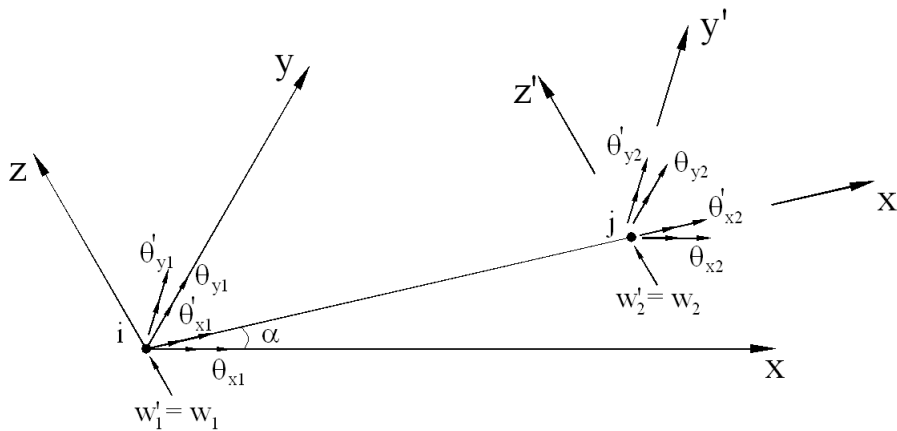
$$\{T'_1 \ M'_1 \ V'_1 \ T'_2 \ M'_2 \ V'_2\}^T = [\mathbf{T}_{grelha}] \{r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5 \ r_6\}^T, \quad \text{Eq.(IV-12)}$$

$$\{\mathbf{r}'_e\} = [\mathbf{T}_{grelha}] \{\mathbf{r}_e\} \quad \text{Eq.(IV-12a)}$$

$$[\mathbf{k}_e] = [\mathbf{T}_{grelha}]^T [\mathbf{k}_{grencp}] [\mathbf{T}_{grelha}] \quad \text{Eq.(IV-13)}$$

$$[\mathbf{T}_{grelha}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-14)}$$

onde  $T_i, M_i$  e  $V_i$  são, respectivamente, o momento de torção, momento fletor e força cortante associados ao nó  $i$  e  $[k_e]$  é a matriz de rigidez do elemento de grelha não-prismático com conexões nos bordos, expressa no referencial global.

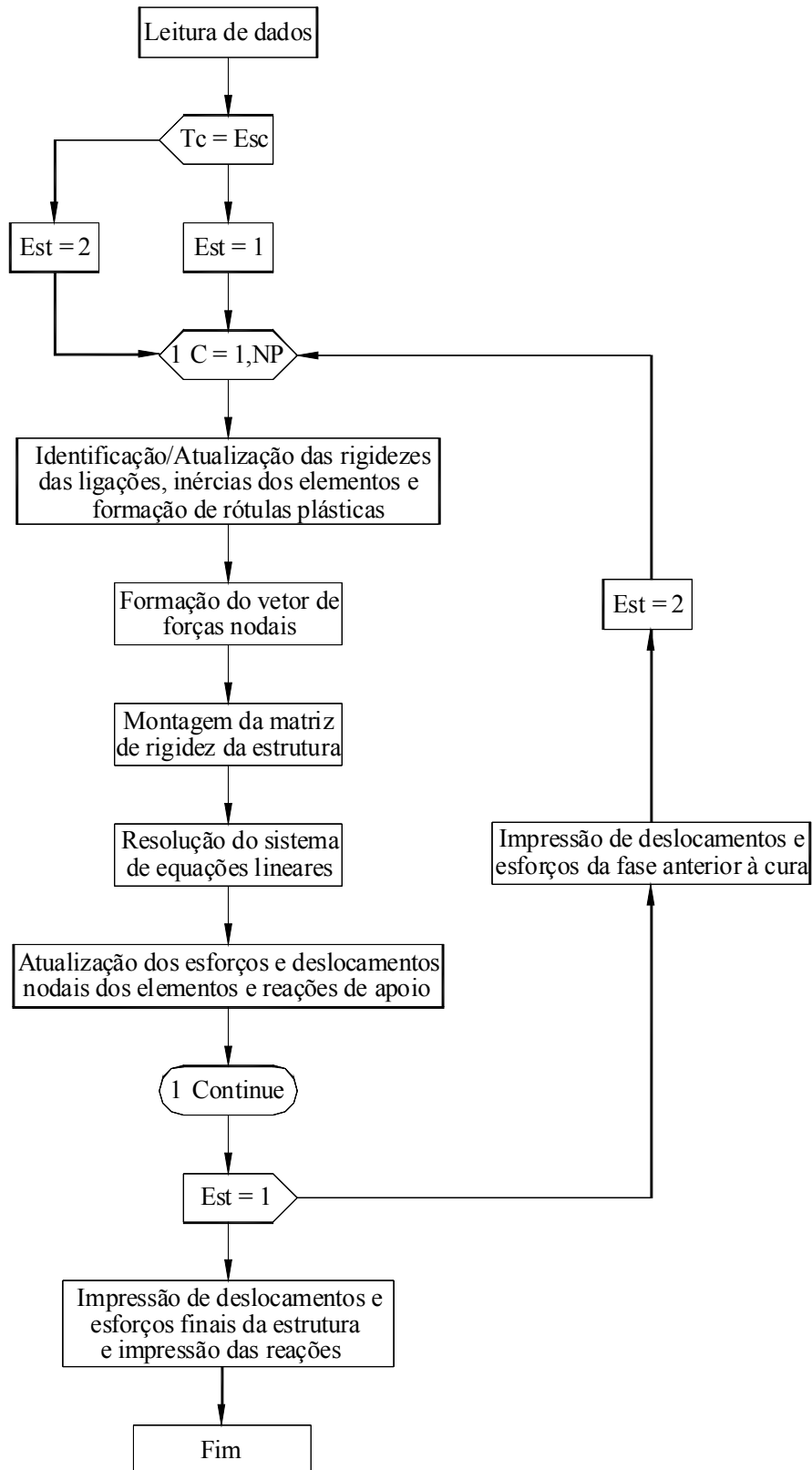


**Fig. IV-6 Graus de liberdade nodais do elemento de grelha nos referenciais local e global.**

#### IV.1.4 Implementação computacional

Uma vez que se objetiva a execução de uma análise não-linear física, levando-se em conta a formação de rótulas plásticas em vigas mistas, a degradação da rigidez das ligações semi-rígidas e o processo de fissuração na laje de concreto, a resolução do sistema de equações descrito na Eq.(IV-10) deve ser feita  $NP$  vezes, fazendo-se necessária a aplicação das ações externas em  $NP$  passos, configurando-se então a análise incremental. Deve-se lembrar que a análise numérica deve também atentar para os casos de pisos mistos não-escorados na fase de cura do concreto, considerando-se dois estágios, onde as ligações semi-rígidas e elementos de grelha apresentarão comportamentos distintos, com propriedades próprias de cada fase, isto é, com o concreto endurecido ou não.

Assim, por meio dos esforços provenientes de cada incremento de carga, a degradação da rigidez rotacional das ligações, Eq.(IV-9), a formação de rótulas plásticas nas vigas, Eq.(IV-8), e o processo de fissuração da laje de concreto, por meio da identificação das tensões no concreto segundo a Eq.(IV-5), podem transcorrer, sendo as matrizes de rigidez dos elementos atualizadas a cada passo da análise. Segue um fluxograma que resume o processo de análise (Fig. IV-7) [6].



**Fig. IV-7 Fluxograma ilustrativo da análise não-linear física de grelhas mistas efetuada com o programa *Grecon*.**

Na figura Fig. IV-7,  $T_c$  refere-se ao tipo de construção, escorada (Esc) ou não, o que interfere na quantidade de estágios (Est), a qual pode assumir um valor igual a dois, no caso de pisos não-escorados na fase de concretagem e onde se farão presentes os estágios anterior e posterior à cura do concreto, ou igual a um, para o caso de pisos escorados na fase de cura do concreto;  $C$  é um contador referente ao número de passos (NP) da análise.

## IV.2 FORMULAÇÃO MATRICIAL PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS ESPACIAIS

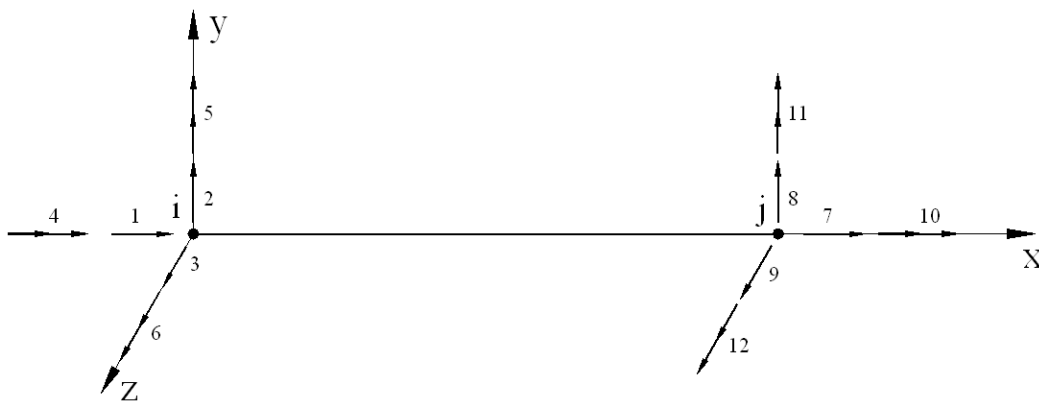
Neste item, procura-se desenvolver e/ou apresentar as expressões necessárias à realização da análise matricial de estruturas espaciais constituídas por elementos de barra, representados por meio de membros de pórtico espacial, e elementos de casca. As matrizes referentes aos elementos de pórtico espacial são obtidas via método da rigidez, sendo naturalmente uma extensão das expressões apresentadas no item IV.1, enquanto que as matrizes referentes aos elementos de casca são obtidas via Método dos Elementos Finitos, por meio da formulação variacional.

### IV.2.1 Elemento de pórtico espacial

#### IV.2.1.1 Matriz de rigidez

Na análise de estruturas espaciais constituídas por elementos de barra, são considerados seis graus de liberdade por nó (Fig. IV-8) [25]:

- Três translações: grau de liberdade 1, que causa esforço normal; graus 2 e 3 que causam esforço cortante e momento fletor;
- Três rotações: grau de liberdade 4, que causa momento de torção; graus 5 e 6 que causam esforço cortante e momento fletor.



**Fig. IV-8** Graus de liberdade do elemento de pórtico espacial.

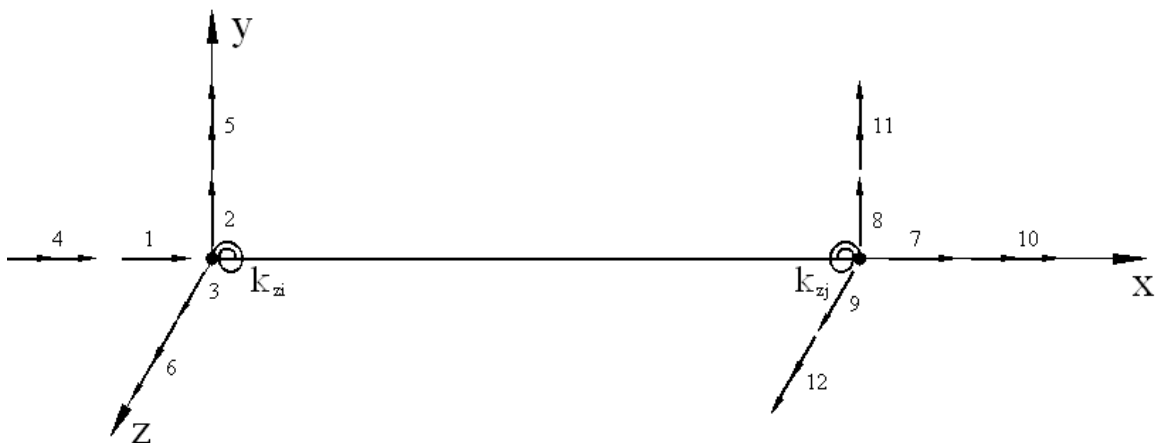


Assim como no elemento de grelha, o coeficiente de rigidez  $k_{ij}$  corresponde à ação no grau de liberdade  $i$  devida a uma translação ou rotação unitária no grau de liberdade  $j$ , estando todos os outros graus de liberdade restringidos. Tomando-se as figuras Fig. IV-1 e Fig. IV-8 observa-se que o único tipo de grau de liberdade não definido corresponde à translação no eixo do elemento, que causa esforço normal. Os coeficientes de rigidez associados a este grau de liberdade podem facilmente ser obtidos da Resistência dos Materiais [21]:

$$k_{11} = k_{77} = \frac{EA}{l}; \quad k_{17} = k_{71} = -\frac{EA}{l} \quad \text{Eq.(IV-15)}$$

Sendo assim, a matriz de rigidez para elementos de pórtico espacial pode ser dada pela Eq.(IV-16) [25], onde  $A$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são, respectivamente, a área e os momentos principais de inércia em torno dos eixos  $Y$  e  $Z$ , estando as demais variáveis já identificadas anteriormente.

No caso de elementos de pórtico espacial prismáticos com conexões elásticas nas bordas (Fig. IV-9) relativas à flexão em torno do eixo maior de inércia ( $Z$ ), a matriz de rigidez é dada pela Eq.(IV-17), montada a partir da Eq.(IV-16) e da matriz de rigidez para elemento de grelha prismático com conexões nas bordas definida em [6], fazendo-se a correspondência entre os graus de liberdade 2, 6, 8 e 12 do elemento de pórtico espacial e 3, 2, 6, e 5 do elemento de grelha, respectivamente.



**Fig. IV-9 Elemento de pórtico espacial com conexões elásticas nas bordas.**

$$[\mathbf{k}_{port}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\ \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 \\ \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 \\ \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_z}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

*Simétrica*

Eq.(IV-16)

$$[\mathbf{k}_{portc}] = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{12EI_z C(1+H+D)}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z C(1+2D)}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z C(1+H+D)}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z C(1+2H)}{l^2} \\
\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 \\
\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 \\
\frac{4EI_z C(1+3D)}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z C(1+2D)}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z C}{l} & 0 \\
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{12EI_z C(1+H+D)}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z C(1+2H)}{l^2} & 0 \\
\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 \\
\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{4EI_z C(1+3H)}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z C(1+3H)}{l}
\end{bmatrix}$$

Simétrica

Eq.(IV-17)

$$D = \frac{EI_z}{lk_{zj}} ; H = \frac{EI_z}{lk_{zi}} ; C = \frac{1}{12HD + 4(D+H) + 1}$$

### IV.2.1.2 Matriz de rotação

Como visto na análise de grelhas, o sistema de equações lineares descrito pela Eq.(IV-10) é resolvido segundo o referencial global (x y z), enquanto que a matriz de rigidez e os vetores de forças e deslocamentos dos elementos são montados no referencial local (Fig. IV-10). Faz-se, pois, também necessária uma matriz de rotação para o elemento de pórtico espacial,  $[\mathbf{T}_{port}]$ , obtida por meio de rotações sucessivas dos eixos globais (x y z) a fim de se obter os eixos locais ( $x_M y_M z_M$ ) [25] (Fig. IV-11):

$$[\mathbf{T}_{port}]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{port}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{R}_{port}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{R}_{port}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{R}_{port}] \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-18)}$$

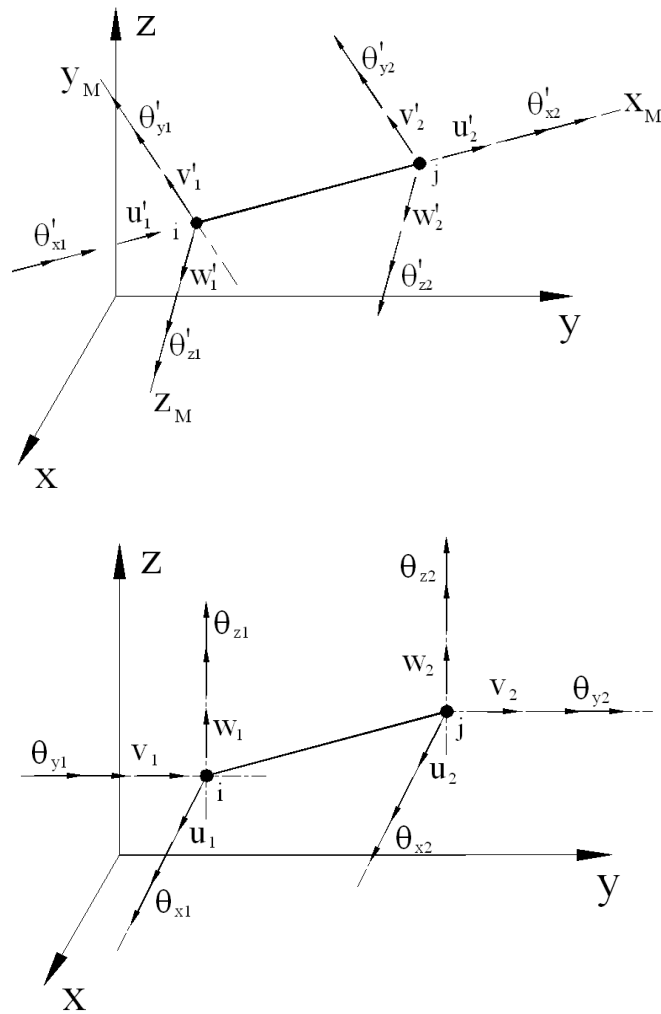
$$[\mathbf{R}_{port}] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{(-C_y \text{sen}\alpha + C_x C_z \text{cos}\alpha)}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \frac{(C_x \text{sen}\alpha + C_y C_z \text{cos}\alpha)}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_y^2} \text{cos}\alpha \\ \frac{(-C_y \text{cos}\alpha + C_x C_z \text{sen}\alpha)}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \frac{(C_x \text{cos}\alpha - C_y C_z \text{sen}\alpha)}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \text{sen}\alpha \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-18a)}$$

$$[\mathbf{R}_{port}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_z \\ C_z \text{sen}\alpha & \text{cos}\alpha & 0 \\ -C_z \text{cos}\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Eq.(IV-18b)}$$

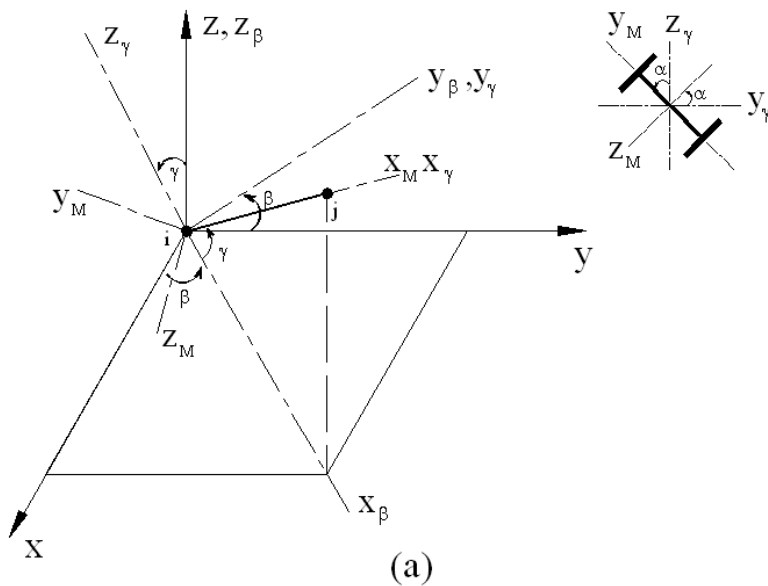
$$C_x = \frac{x_j - x_i}{l}; \quad C_y = \frac{y_j - y_i}{l}; \quad C_z = \frac{z_j - z_i}{l}$$

onde  $l$  é o comprimento do elemento e a Eq.(IV-18b) é válida no caso de elementos verticais, sendo a Eq.(IV-18a) válida para os demais casos. Além disso,  $\alpha$  refere-se ao ângulo entre  $y$  e  $y_M$ , no caso de membros verticais, e ao ângulo entre o plano vertical e  $y_M$ , nos demais casos (Fig. IV-11)

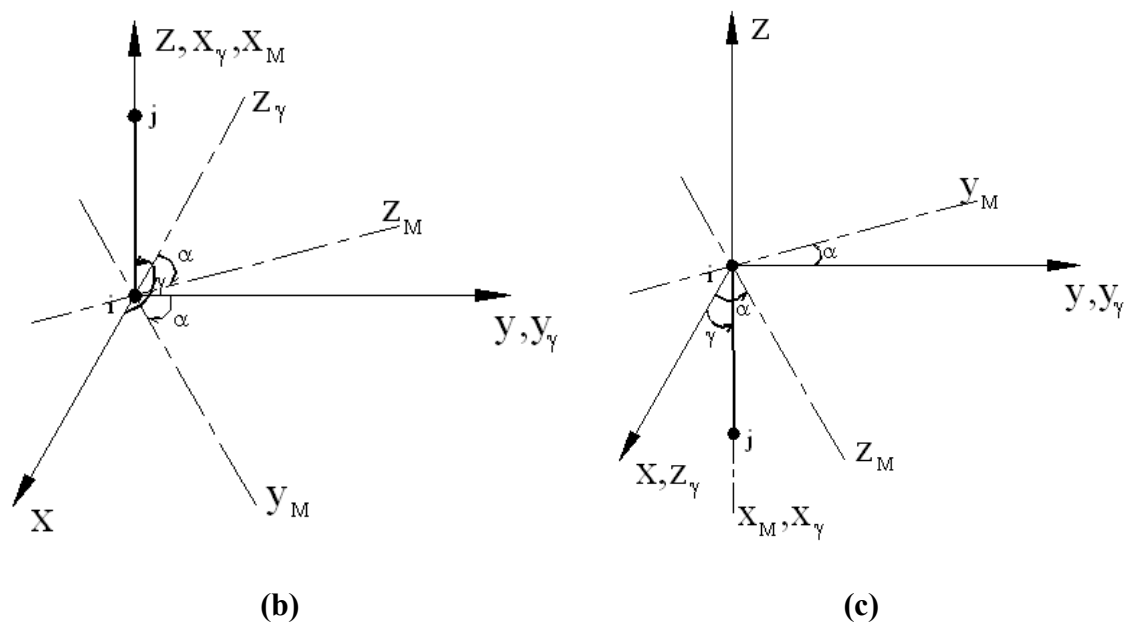
Sendo assim, as equações Eq.(IV-11) a Eq.(IV-13) podem ser reescritas para o elemento de pórtico espacial, dando origem às equações Eq.(IV-19) a Eq.(IV-21).



**Fig. IV-10** Graus de liberdade locais e globais do elemento de pórtico espacial.



**Fig. IV-11** Rotações utilizadas na construção da matriz de rotação de elementos de pórtico espacial, no caso de um membro disposto aleatoriamente no espaço (a) e de membros verticais (b) e (c).



**Fig. IV-11 (continuação) Rotações utilizadas na construção da matriz de rotação de elementos de pórtico espacial, no caso de um membro disposto aleatoriamente no espaço (a) e de membros verticais (b) e (c).**

$$\{u'_1 \ v'_1 \ w'_1 \ \theta'_{x1} \ \theta'_{y1} \ \theta'_{z1} \ \dots \ \theta'_{z2}\}^T = [\mathbf{T}_{port}]\{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ \dots \ \theta_{z2}\}^T \quad \text{Eq.(IV-19)}$$

$$\{\mathbf{d}'_e\} = [\mathbf{T}_{port}]\{\mathbf{d}_e\} \quad \text{Eq.(IV-19a)}$$

$$\{\mathbf{r}'_e\} = [\mathbf{T}_{port}]\{\mathbf{r}_e\} \quad \text{Eq.(IV-20)}$$

$$[\mathbf{k}_e] = [\mathbf{T}_{port}]^T [\mathbf{k}_{port}] [\mathbf{T}_{port}] \quad \text{Eq.(IV-21)}$$

### IV.2.1.3 Excentricidades nos extremos do elemento de pórtico espacial

Na maioria das estruturas de piso, o centro de gravidade das vigas não se situa no plano médio da laje, havendo, pois, excentricidades  $e_i$  e  $e_j$  nos extremos do elemento (Fig.4.12). Faz-se necessária então uma matriz de transformação  $[\mathbf{T}_{exc}]$  que relacione os graus de liberdade do plano médio da laje, expressos no vetor  $\{\bar{\mathbf{d}}'_e\}$ , e do centro de gravidade do elemento de pórtico, expressos no vetor  $\{\mathbf{d}'_e\}$ .

Pode-se demonstrar [26], que  $[\mathbf{T}_{exc}]$  pode ser dada por:

$$[\mathbf{T}_{exc}]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} [\mathbf{Exc}(e_i)]_{6 \times 6} & [\mathbf{0}]_{6 \times 6} \\ [\mathbf{0}]_{6 \times 6} & [\mathbf{Exc}(e_j)]_{6 \times 6} \end{bmatrix}, \quad \text{Eq.(IV-22)}$$

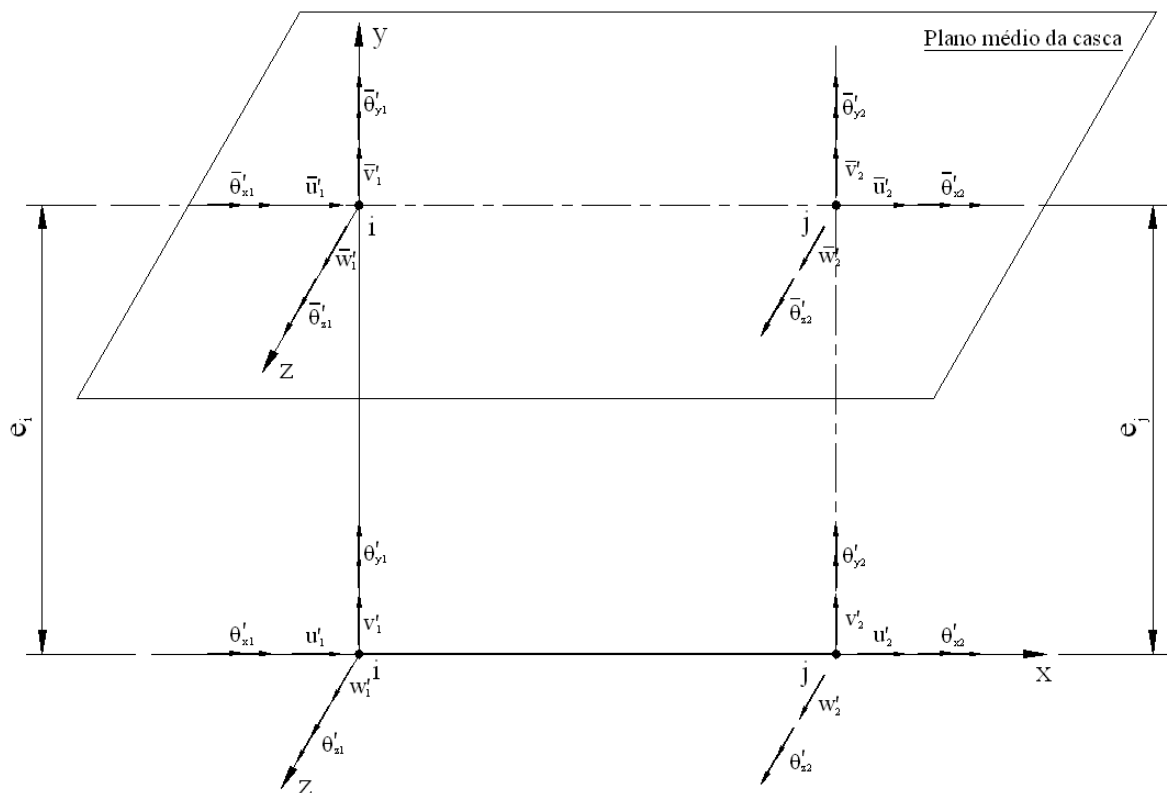
$$[\mathbf{Exc}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-22a)}$$

sendo válidas as seguintes relações [26]:

$$\{\mathbf{d}'_e\} = [\mathbf{T}_{exc}]\{\bar{\mathbf{d}}'_e\} \quad \text{Eq.(IV-23)}$$

$$\{\bar{\mathbf{r}}'_e\} = [\mathbf{T}_{exc}]^T\{\mathbf{r}'_e\} \quad \text{Eq.(IV-24)}$$

$$[\bar{\mathbf{k}}_{port}] = [\mathbf{T}_{exc}]^T[\mathbf{k}_{port}][\mathbf{T}_{exc}] \quad \text{Eq.(IV-25)}$$



**Fig. IV-12 Excentricidades nos extremos do elemento de pórtico espacial [26].**

## IV.2.2 Elemento de Casca

### IV.2.2.1 Tópicos sobre o Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) constitui um método de análise de estruturas e do contínuo, raramente exato, aplicado originalmente à análise de tensões, mas que se estendeu à condução de calor, eletricidade e outras áreas [27].

O método consiste em representar o contínuo por meio de um conjunto de elementos finitos conectados uns aos outros nos pontos nodais (nós), onde se procura garantir a compatibilidade da grandeza física em análise (temperatura ou deslocamento, por exemplo), requisito básico do comportamento do contínuo. A grandeza física em análise é representada por meio de uma função  $\phi$  (em geral um polinômio simples) a qual varia suavemente no interior de cada elemento.

Seja um problema de condução de calor em uma região retangular no plano xy [27]. Poder-se-ia representar a variação da temperatura por meio de uma função  $\phi$  que, no interior de um dado elemento quadrilateral de quatro nós, utilizado para discretizar contínuo (Fig. IV-13), poderia ser interpolada segundo a função “bilinear” expressa na Eq.(IV-26) [27]:

$$\phi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad \text{Eq.(IV-26)}$$

onde " $a_1$ ", " $a_2$ ", " $a_3$ " e " $a_4$ " são constantes obtidas em função dos valores nodais da função  $\phi$  no elemento, a saber,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  e  $\phi_4$ .

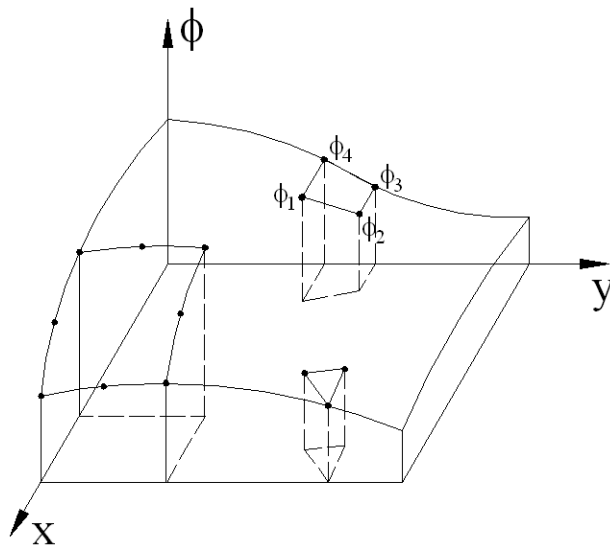


Fig. IV-13 Função  $\phi$  que varia suavemente sobre uma superfície [27].



Portanto, a função  $\phi$  é interpolada a partir da posição  $(x,y)$  no interior do elemento e dos seus valores nodais no contorno, garantindo assim a sua continuidade entre os elementos. A variação da grandeza física em análise é, pois, obtida a partir de simples funções válidas no interior de cada elemento. Percebe-se desde já que quanto maior a discretização (maior quantidade de elementos), mais próxima da solução exata estará a solução por meio do MEF. Entretanto, vale salientar que uma discretização composta por poucos bons elementos pode produzir melhores resultados que outra com muitos pobres elementos. Na figura Fig. IV-13, ilustram-se os elementos triangular, quadrilateral de quatro nós (família de Lagrange) e quadrilateral de oito nós (família de Serendipity).

#### IV.2.2.2 Relações deformação x deslocamento e tensão x deformação em coordenadas cartesianas

Focando-se agora no problema de análise de tensões, tem-se que as relações entre deslocamentos e deformações em três dimensões podem ser obtidas da Teoria Linear da elasticidade [28], sendo dadas na forma matricial por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-27)}$$

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{D}]\{u\} \quad \text{Eq.(IV-27a)}$$

onde  $\epsilon_x, \epsilon_y$  e  $\epsilon_z$  são deformações normais ou lineares e  $\gamma_{xy}, \gamma_{zy}, \gamma_{zx}$  são deformações angulares ou distorcionais;  $u, v$  e  $w$  constituem o campo de deslocamentos expressos em função de  $x, y$  e  $z$ ;  $[\mathbf{D}]$  é um operador diferencial.

Por sua vez, a relação entre tensões e deformações em três dimensões pode ser expressa segundo a lei de Hook pela Eq.(IV-28):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{E}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-28)}$$

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\epsilon}\} \quad \text{Eq.(IV-28a)}$$

onde  $[\mathbf{E}]$  é uma matriz simétrica de propriedades do material, a qual para materiais isotrópicos assume a seguinte forma [27]:

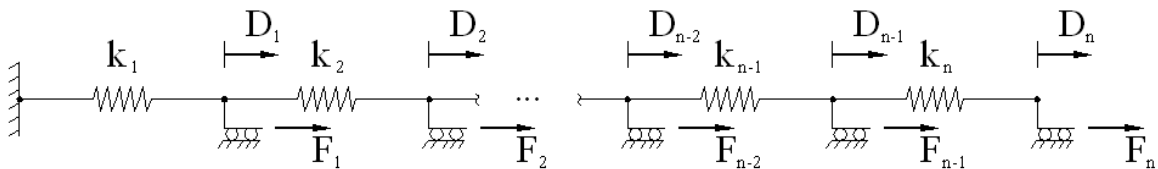
$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} (1-\nu)c & \nu c & \nu c & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu)c & \nu c & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu)c & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & \textit{Simétrica} & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-29)}$$

$$c = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

onde  $E$  e  $G$  são, respectivamente, o módulo de deformação longitudinal e transversal do material;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

### IV.2.2.3 Energia potencial estacionária

Seja o sistema estrutural conservativo<sup>1</sup> ilustrado na Fig. IV-14.



**Fig. IV-14 Sistema conservativo com  $n$  graus de liberdade [27].**

1. Um sistema estrutural é dito conservativo se o trabalho realizado pelas forças internas, que em corpos elásticos é igual à variação na energia de deformação, e o realizado pelas forças externas é independente da trajetória.

Pode-se definir a energia de um sistema mecânico por meio de sua configuração<sup>1</sup>, sem se fazer alusão à forma com que a estrutura chegou à mesma (história de deformações e deslocamentos). Denomina-se energia potencial total  $\pi_p$  à soma da energia de deformação elástica  $U$  (armazenada por meio do trabalho das forças internas) mais o potencial das forças externas  $\Omega$  (trabalho das forças externas):

$$\pi_p = U + \Omega \quad \text{Eq.(IV-30)}$$

Assim, para o sistema conservativo da Fig. IV-14, a energia potencial total pode ser expressa pela Eq.(IV-31)[27]:

$$\pi_p = \left[ \frac{1}{2} k_1 D_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (D_2 - D_1)^2 + \dots + \frac{1}{2} k_n (D_n - D_{n-1})^2 \right] - [F_1 D_1 + F_2 D_2 + \dots + F_n D_n] \quad \text{Eq.(IV-31)}$$

O princípio da energia potencial total estacionária afirma que, dentre todas as configurações admissíveis<sup>2</sup> de um sistema conservativo, aquela que satisfaz as equações de equilíbrio produz uma energia potencial estacionária com respeito a pequenas variações admissíveis de deslocamento [27]. Além disso, se a condição estacionária é mínima, o equilíbrio é dito estável. Aplicando-se este princípio ao sistema com  $n$  graus de liberdade da Fig. IV-14, vem:

$$d\pi_p = \frac{\partial \pi_p}{\partial D_1} dD_1 + \frac{\partial \pi_p}{\partial D_2} dD_2 + \dots + \frac{\partial \pi_p}{\partial D_n} dD_n = 0 \quad \text{Eq.(IV-32)}$$

Para que a Eq.(IV-32) seja válida para qualquer pequena variação admissível dos deslocamentos, os coeficientes de  $dD_i$  devem zerar separadamente,

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial D_i} = 0, \quad i = 1, n \quad \text{Eq.(IV-33)}$$

o que conduz a “ $n$ ” equações em função das “ $n$ ” incógnitas do problema, de solução, portanto, determinada.

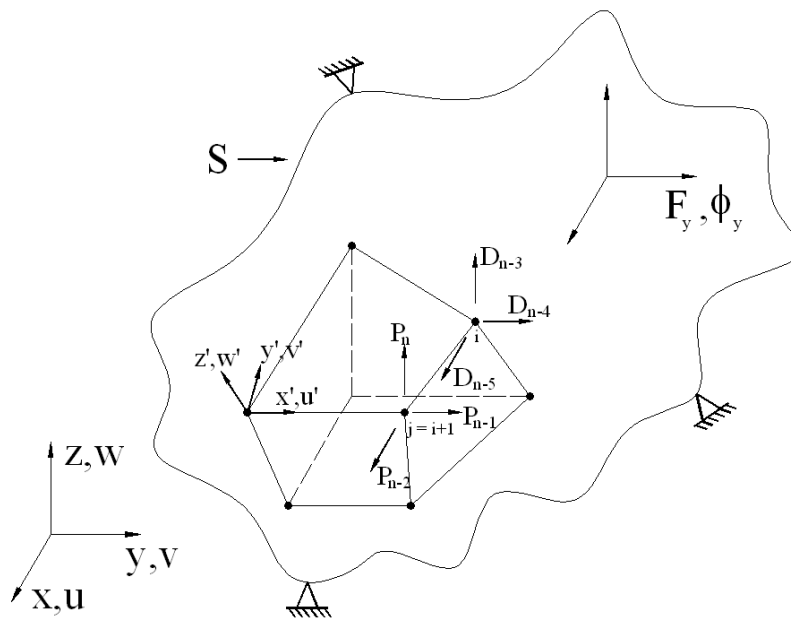
1. A configuração de um sistema é o conjunto de posições de todas as partes da estrutura.
2. Diz-se que uma configuração é admissível se forem satisfeitas a compatibilidade interna e as condições de contorno essenciais (valores prescritos para alguns graus de liberdade).

A energia potencial de um corpo elástico (Fig. IV-15) pode ser escrita de uma forma mais geral segundo o funcional<sup>1</sup> expresso na Eq.(IV-34) [27]:

$$\pi_p = \int_v \left( \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [\mathbf{E}] \{\epsilon\} - \{\epsilon\}^T [\mathbf{E}] \{\epsilon_0\} + \{\epsilon\}^T \{\sigma_0\} \right) dv \quad \text{Eq.(IV-34)}$$

$$- \int_v \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dv - \int_s \{\mathbf{u}\}^T \{\boldsymbol{\phi}^S\} ds - \{\mathbf{D}\}^T \{\mathbf{P}\}$$

onde o primeiro termo corresponde à energia de deformação elástica e os últimos termos ao potencial das forças externas. Na primeira integral, os termos entre parênteses representam a energia de deformação elástica por unidade de volume correspondente ao trabalho realizado pelas tensões durante deformações infinitesimais de um elemento de volume.



**Fig. IV-15 Corpo elástico tridimensional e elemento hexaédrico [29].**

Ainda referente à Eq.(IV-34), tem-se que  $\{\mathbf{F}\}$  e  $\{\boldsymbol{\phi}^S\}$  são forças de volume e forças por unidade de superfície, respectivamente;  $\{\mathbf{P}\}$  representa um vetor de cargas concentradas e  $\{\mathbf{D}\}$  corresponde ao vetor de deslocamentos relativos aos  $n$  graus de liberdade - Eq.(IV-35).

1. Um funcional correspondente a uma integral que implicitamente contém equações diferenciais que descrevem o problema.

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\phi}^S\} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{D}\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{P}\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-35)}$$

Finalmente,  $\{\boldsymbol{\epsilon}_0\}$  e  $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$  são vetores correspondentes a deformações e tensões iniciais. As demais variáveis já se encontram identificadas.

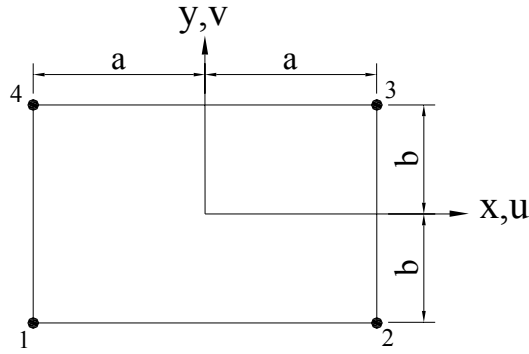
#### IV.2.2.4 Interpolação

Como visto anteriormente, o Método dos Elementos Finitos constitui um procedimento de discretização do contínuo, onde a grandeza física em análise é representada por meio de funções aproximadas dentro de cada elemento, fazendo-se uso, pois, do método de Rayleigh-Ritz. Neste método, a grandeza física em questão, por exemplo, o campo de deslocamentos em um corpo elástico submetido a cargas, é aproximada por uma série cujo termo típico é uma função  $f_i = f(x,y,z)$  vezes uma amplitude  $a_i$  (coordenada generalizada) [27].

$$u = \sum_{i=1}^l (a_i f_i) \quad v = \sum_{i=l+1}^m (a_i f_i) \quad w = \sum_{i=m+1}^n (a_i f_i) \quad \text{Eq.(IV-36)}$$

Os campos de deslocamentos assim definidos seriam aplicados na Eq.(IV-27), obtendo-se então o campo de deformações  $\{\boldsymbol{\epsilon}\}$ , sendo então obtida a expressão para a energia potencial total - Eq.(IV-34). Aplicando-se então o princípio da energia potencial total estacionária  $\frac{\partial \pi_p}{\partial a_i} = 0$ , o problema é solucionado para os diversos  $a_i$ . Entretanto, neste procedimento os coeficientes  $a_i$  não possuem um significado físico evidente. Ao se aplicar o método de Rayleigh-Ritz no Método dos Elementos Finitos, procura-se associar os parâmetros  $a_i$  aos graus de liberdade, isto é, deslocamentos nodais  $\{\mathbf{d}\}$  dos elementos da estrutura discretizada. Além disso, as funções  $f_i$  passam a ser entendidas como funções de forma ou funções de interpolação que assumem o papel de interpolar o campo de deslocamentos no interior do elemento em função dos valores nodais  $\{\mathbf{d}\}$ .

Seja por exemplo o elemento bilinear de quatro nós da Fig. IV-16, utilizado em problemas de estado plano de tensão e deformação.



**Fig. IV-16 Elemento bilinear de quatro nós.**

O campo de deslocamento  $u$  para este elemento pode ser aproximado pela já definida Eq.(IV-26):

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad \text{Eq.(IV-26a)}$$

$$u = [1 \ x \ y \ xy] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [1 \ x \ y \ xy] \{\mathbf{a}\} \quad \text{Eq.(IV-26b)}$$

Como  $u$  deve assumir os valores nodais nos pontos 1, 2, 3 e 4, vem:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & ab \\ 1 & a & -b & -ab \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & -a & b & -ab \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{a}\} \quad \text{Eq.(IV-37)}$$

Aplicando a Eq.(IV-37) na Eq.(IV-26b), vem:

$$u = [1 \ x \ y \ xy] [\mathbf{A}]^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix},$$

$$u = \left[ \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \quad \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \quad \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \quad \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix},$$

$$u = [H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-38)}$$

O mesmo procedimento é válido para o deslocamento  $v$ . As funções  $H_1$  a  $H_4$  são as funções de interpolação para o elemento bilinear de quatro nós. O campo de deslocamentos total  $\{\mathbf{u}\}$ , numa forma matricial, pode ser dado por:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 & H_4 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 & H_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-39)}$$

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{d}\} \quad \text{Eq.(IV-39a)}$$

onde  $[\mathbf{H}]$  é a matriz que contém as funções de interpolação.

#### IV.2.2.5 Matrizes de elemento

Introduzidos os conceitos de energia potencial total e funções de interpolação (desdobramento do método de Rayleigh-Ritz), pode-se então chegar às expressões/matrizes utilizadas comumente no Método dos Elementos Finitos.

Tomando-se o campo de deslocamentos  $\{\mathbf{u}\}$  definido na Eq.(IV-39a) em função dos deslocamentos nodais do elemento  $\{\mathbf{d}_e\}$  e introduzindo na Eq.(IV-27a), que define o campo de deformações, tem-se:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\boldsymbol{\partial}]\{\mathbf{u}\} = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{H}]\{\mathbf{d}_e\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{d}_e\} \quad \text{Eq.(IV-40)}$$

$$[\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{H}] \quad \text{Eq.(IV-40a)}$$

onde  $[\mathbf{B}]$  é uma matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento.

Introduzindo agora  $\{\epsilon\}$  definido segundo a Eq.(IV-40) na Eq.(IV-34), tem-se que a energia potencial total de um corpo elástico discretizado em elementos finitos pode ser dada por [27]:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{numel} \{\mathbf{d}_e\}_n^T [\mathbf{k}_e]_n \{\mathbf{d}_e\}_n - \sum_{n=1}^{numel} \{\mathbf{d}_e\}_n^T \{\mathbf{r}_e\}_n - \{\mathbf{D}\}^T \{\mathbf{P}\} \quad \text{Eq.(IV-41)}$$

onde  $\{\mathbf{P}\}$  é o vetor de cargas aplicadas à estrutura e  $[\mathbf{k}_e]$  e  $\{\mathbf{r}_e\}$  são, respectivamente, a matriz de rigidez e o vetor de forças do elemento - Eq.(IV-42) e Eq.(IV-43), respectivamente [27] -, estando as demais variáveis já previamente identificadas.

$$[\mathbf{k}_e] = \int_{ve} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dv \quad \text{Eq.(IV-42)}$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{r}_e\} = \int_{ve} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\epsilon_0\} dv - \int_{ve} [\mathbf{B}]^T \{\sigma_0\} dv + \int_{ve} [\mathbf{H}]^T \{\mathbf{F}\} dv \\ + \int_{se} [\mathbf{H}]^T \{\Phi^S\} ds \end{aligned} \quad \text{Eq.(IV-43)}$$

A equação Eq.(IV-41) pode ser reescrita em função do vetor de deslocamentos global da estrutura  $\{\mathbf{D}\}$ , que contém todos os graus de liberdade dos elementos, desde que  $[\mathbf{k}_e]$  e  $\{\mathbf{r}_e\}$  sejam substituídos pela matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  e vetor de forças  $[\mathbf{R}]$  globais da estrutura [27]:

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{\mathbf{D}\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{D}\} - \{\mathbf{D}\}^T \{\mathbf{R}\} \quad \text{Eq.(IV-44)}$$

onde:

$$[\mathbf{K}] = \sum_{n=1}^{numel} [\mathbf{k}_e]_n, \quad \{\mathbf{R}\} = \{\mathbf{P}\} + \sum_{n=1}^{numel} \{\mathbf{r}_e\}_n \quad \text{Eq.(IV-45)}$$

Na equação Eq.(IV-45), o somatório representa a contribuição de cada matriz de elemento segundo os devidos graus de liberdade globais da estrutura.

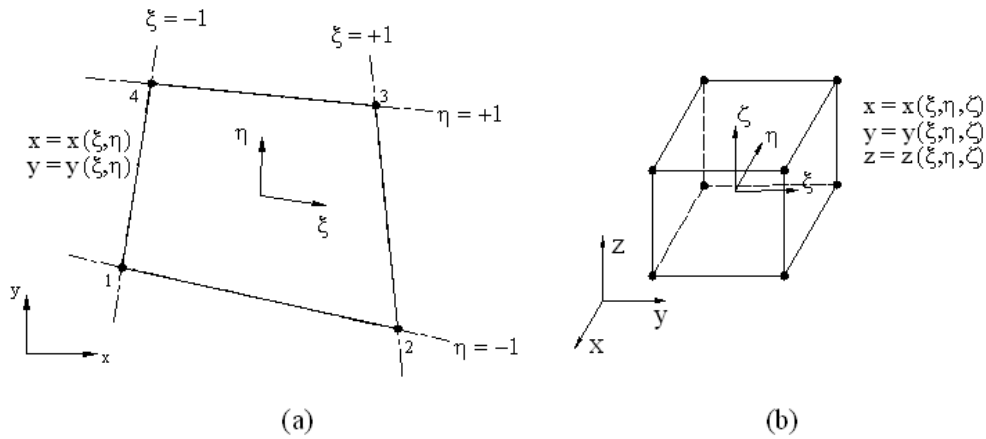


A aplicação do princípio da energia potencial total estacionária<sup>1</sup> à Eq.(IV-44),  $\left\{ \frac{\partial \pi_p}{\partial \mathbf{D}_i} \right\} = \{ \mathbf{0} \}$ , produz o conjunto de equações algébricas expresso na Eq.(IV-10) e reproduzido aqui como Eq.(IV-46), cuja solução corresponde aos valores dos deslocamentos globais  $D_i$  [27].

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\} \quad \text{Eq.(IV-46)}$$

#### IV.2.2.6 Formulação isoparamétrica

Seja o elemento quadrilateral de quatro nós da Fig. IV-17(a) abaixo, mapeado segundo as coordenadas  $\xi$  e  $\eta$ , denominadas coordenadas naturais.



**Fig. IV-17 Componentes da família de elementos isoparamétricos: (a) elemento de superfície (plano bilinear); (b) elemento sólido trilinear.**

Na formulação isoparamétrica, não existe a necessidade de os elementos serem retangulares, podendo os lados, inclusive, ser curvos. As coordenadas naturais também não necessitam ser ortogonais, variando entre  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$  para os elementos planos e  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$  para os elementos de volume (Fig. IV-17b).

Os deslocamentos e a geometria são aproximados com as mesmas funções de interpolação, daí o termo elemento isoparamétrico. Para o quadrilátero bilinear, tem-se a Eq.(IV-47), sendo  $u$ , por exemplo, o deslocamento na direção  $x$  num problema de estado plano de tensões, ou qualquer outra grandeza física em análise.

1. A solução do problema via princípio da energia potencial estacionária é considerada como a formulação fraca no Método dos Elementos Finitos (formulação variacional), enquanto que a solução via equações diferenciais é considerada como formulação forte, onde se estabelecem condições que devem ser satisfeitas em cada ponto material.

$$x = \sum_{i=1}^4 H_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^4 H_i y_i; \quad u = \sum_{i=1}^4 H_i u_i \quad \text{Eq.(IV-47)}$$

Tomando-se o mesmo processo utilizado na determinação das funções de interpolação para o quadrilátero bilinear da Fig. IV-16, as funções de forma para o elemento isoparamétrico da Fig. IV-17(a) são facilmente identificadas [27]:

$$H_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad H_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad \text{Eq.(IV-48)}$$

$$H_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad H_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Entretanto, as integrais presentes nas Eq.(IV-42) e Eq.(IV-43), que fornecem a matriz de rigidez e vetor de forças do elemento, estão expressas em função das coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , enquanto que os deslocamentos são expressos na formulação isoparamétrica em função das coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$ . Além disso, a diferenciação dos deslocamentos também é feita em função das coordenadas cartesianas. Deve-se, pois, mudar o domínio de integração, sendo as integrais avaliadas numericamente por meio de um processo conhecido como quadratura de Gauss<sup>1</sup>.

No caso do elemento da Fig. IV-17(a) ser utilizado num problema de estado plano de tensões, a matriz de rigidez seria avaliada segundo a Eq.(IV-49), onde  $\det[\mathbf{j}]$  refere-se ao determinante da matriz jacobiana da transformação de coordenadas que, para o caso bidimensional é dada pela Eq.(IV-50):

$$[\mathbf{k}_e] = \int_{v_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}][\mathbf{B}] dv = \int_{s_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}][\mathbf{B}] t ds_e = \iint [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}][\mathbf{B}] t dx dy,$$

$$[\mathbf{k}_e] = \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} [\mathbf{B}]^T (\xi, \eta) [\mathbf{E}][\mathbf{B}] (\xi, \eta) t \det[\mathbf{j}] d\xi d\eta \quad \text{Eq.(IV-49)}$$

---

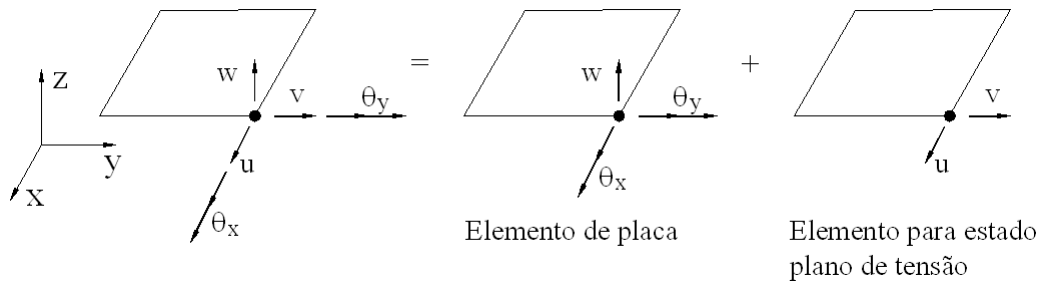
1. No processo de quadratura, Gauss avalia a integral de uma função  $\phi = \phi(\xi)$  da seguinte forma:  $\int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \phi(\xi_i) w_i$ , ou seja, a integral é aproximada por meio do somatório de  $n$  produtos  $\phi(\xi_i) w_i$ , sendo, pois, a função avaliada em pontos pré-determinados e ponderada por meio de pesos  $w_i$ . Gauss estabeleceu locações  $\xi_i$  e pesos  $w_i$  que conferissem uma maior precisão para um dado número de termos  $n$ , isto é, para uma dada ordem de quadratura. Analogamente, para um caso bidimensional ter-se-ia  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(\xi_i, \eta_j) w_i w_j$ .

2. No caso bidimensional,  $\det[\mathbf{j}]$  corresponde a um fator que relaciona as áreas  $dx dy$  e  $d\xi d\eta$ .

$$[j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-50)}$$

#### IV.2.2.7 Elemento de casca geral tridimensional

Diversos elementos têm sido desenvolvidos para representar o comportamento de uma casca no espaço. Dentre as diferentes formulações existentes, uma das mais simples é a representação de uma casca por meio de um conjunto de elementos planos, formados pela associação de um elemento de placa, que lhe confere o comportamento de flexão, com um elemento para estado plano de tensão, que lhe confere o comportamento de membrana - Fig. IV-18.



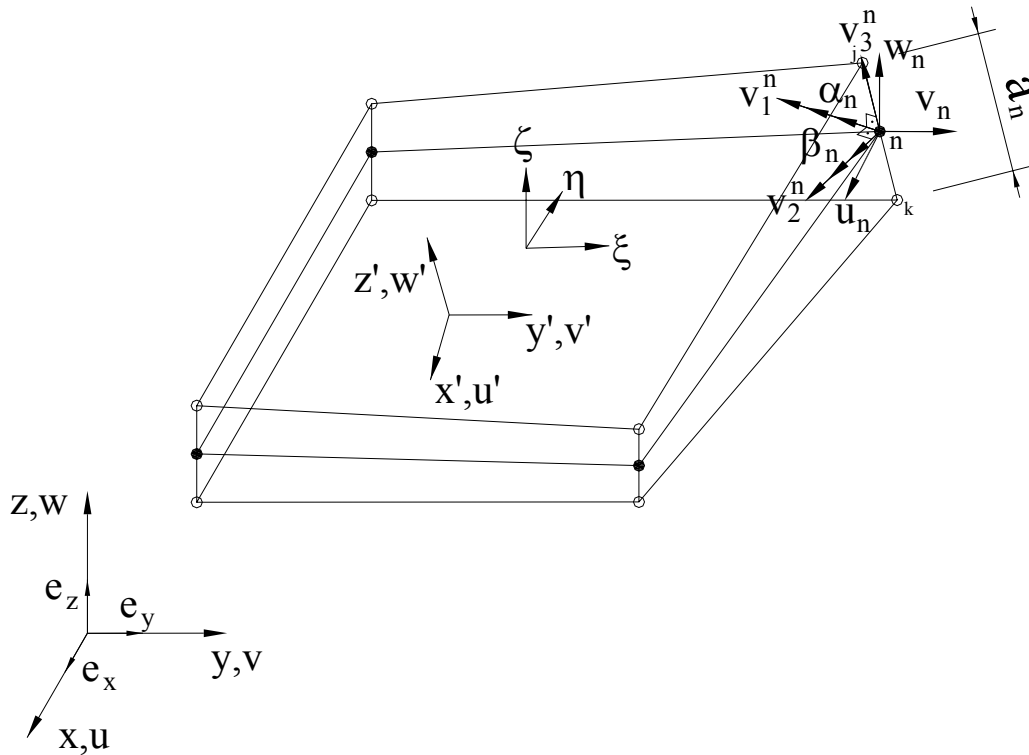
**Fig. IV-18 Elemento de casca constituído pela combinação de um elemento de placa com um elemento para estado plano de tensão.**

Outra forma de encarar o problema é o desenvolvimento de elementos diretamente da teoria clássica de cascas. Estes elementos, entretanto, são muito mais complexos, introduzindo-se, inclusive, entre os graus de liberdade do elemento, derivadas de ordem superior dos deslocamentos [30].

Elementos sólidos também podem ser utilizados para representar estruturas de cascas, porém o custo computacional é elevado devido à presença de nós ao longo da espessura, além da possibilidade do mau condicionamento da matriz de rigidez no caso de elementos de espessura reduzida [27] [31].

Como variante dos elementos sólidos se situam os elementos sólidos degenerados, formados a partir da condensação dos nós das faces superior e inferior do elemento em um único nó, implicando a definição de uma superfície de referência, normalmente associada à superfície média do elemento (Fig. IV-19). Nesta superfície de referência se definem propriamente os nós do elemento, com os cinco graus de

liberdade associados (três translações e duas rotações), apesar de os nós das superfícies superior e inferior do elemento também ser utilizados na definição da geometria.



**Fig. IV-19 Elemento de casca do tipo sólido degenerado bilinear e sistemas de coordenadas [29].**

Os elementos sólidos degenerados são formulados com base na Teoria de Mindlin, onde vale a hipótese de que a normal à superfície média original do elemento permanece, após as deformações, como uma linha reta, mas não necessariamente perpendicular à superfície média. Não se desprezam, pois, as deformações por cortante, o que é feito nas formulações baseadas na Teoria de Kirchoff, própria para cascas finas.

Sendo assim, os elementos sólidos degenerados podem representar cascas espessas e finas, porém, como em outros elementos baseados na Teoria de Mindlin, problemas relativos ao excesso de rigidez por cortante, *shear locking*, podem surgir quando a casca se torna muito fina. Em vista disso, integração seletiva [27] e interpolação mista das componentes de deformação relativas ao cortante [29] podem ser alternativas viáveis, sendo a última utilizada como recurso no presente trabalho.

Finalmente, vale salientar que a componente de tensão normal à superfície média da casca é tomada como zero.

#### IV.2.2.7.1 Sistemas de coordenadas

São quatro os sistemas de coordenadas (Fig. IV-19) utilizados para representar o elemento de casca implementado, a saber, sistema de coordenadas global, natural, local e local nodal.

O sistema de coordenadas global (x y z) é definido pelos vetores de base ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ) e define a geometria e o campo de deslocamentos global  $\{u \ v \ w\}^T$  da casca.

O sistema de coordenadas natural, por sua vez, é utilizado no mapeamento isoparamétrico do elemento de casca. Os eixos  $\xi e \eta$ , tangentes à superfície média e  $\zeta$ , eixo linear segundo a espessura da casca<sup>1</sup>, variam no intervalo [-1; +1].

O sistema de coordenadas local (x' y' z') é definido em cada ponto da superfície média, sendo utilizado na determinação das tensões e deformações locais do elemento. O vetor  $\mathbf{z}'$ , normal à superfície média, pode ser obtido em função das tangentes às curvas  $\xi = cte$  e  $\eta = cte$  [31]:

$$\mathbf{z}' = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \quad \text{Eq.(IV-51)}$$

sendo o vetor unitário dado por:

$$\mathbf{e}'_z = \frac{\mathbf{z}'}{|\mathbf{z}'|} = \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.(IV-51a)}$$

Definindo-se a direção  $\mathbf{x}'$  como tangente à coordenada natural  $\xi$ , vem [30]:

$$\mathbf{x}' = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad \text{Eq.(IV-52)}$$

sendo o vetor unitário dado pela Eq.(IV-52a):

---

1. Portanto,  $\zeta$  não é necessariamente normal à superfície média da casca.

$$\mathbf{e}'_x = \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-52a)}$$

Finalmente, o vetor unitário que define a direção  $\mathbf{y}'$  é dado por:

$$\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}'_z \times \mathbf{e}'_x = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-53)}$$

Assim, a matriz que relaciona as coordenadas locais e globais pode ser dada por [27]:

$$[\mathbf{T}'] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}, \quad \text{Eq.(IV-54)}$$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}'] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-54a)}$$

Por fim, o sistema de coordenadas local nodal é caracterizado pelos vetores ( $V_1^n$ ,  $V_2^n$ ,  $V_3^n$ ), tomados em cada um dos  $n$  nós que definem a superfície média do elemento [27]. O vetor espessura  $V_3^n$  pode ser obtido por meio das coordenadas superiores e inferiores ao nó  $n$  (Fig. IV-19),

$$\mathbf{V}_3^n = \begin{Bmatrix} x^j \\ y^j \\ z^j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-55)}$$

podendo ser reescrito em função do seu versor  $\mathbf{v}_3^n$  e da espessura  $a_n$  associada ao nó  $n$ :

$$\mathbf{V}_3^n = a_n \mathbf{v}_3^n \quad \text{Eq.(IV-55a)}$$

---

1. Observe que o vetor  $V_3^n$  não é necessariamente normal à superfície média, mas trata-se de um vetor espessura que apresenta a vantagem de garantir a continuidade geométrica entre elementos adjacentes.

Os outros vetores  $V_1^n$  e  $V_2^n$ , que definem os graus de liberdade de rotação  $\alpha$  e  $\beta$ , podem ser obtidos segundo abaixo [31]:

$$V_1^n = e_x \times V_3^n \text{ (se } V_3^n \text{ possuir componente em y)} \quad \text{Eq.(IV-55b)}$$

$$V_1^n = e_y \times V_3^n \text{ (se } V_3^n \text{ não possuir componente em y)} \quad \text{Eq.(IV-55c)}$$

$$V_2^n = V_3^n \times V_1^n \quad \text{Eq.(IV-55d)}$$

com os versores  $v_1^n$  e  $v_2^n$  calculados de maneira usual.

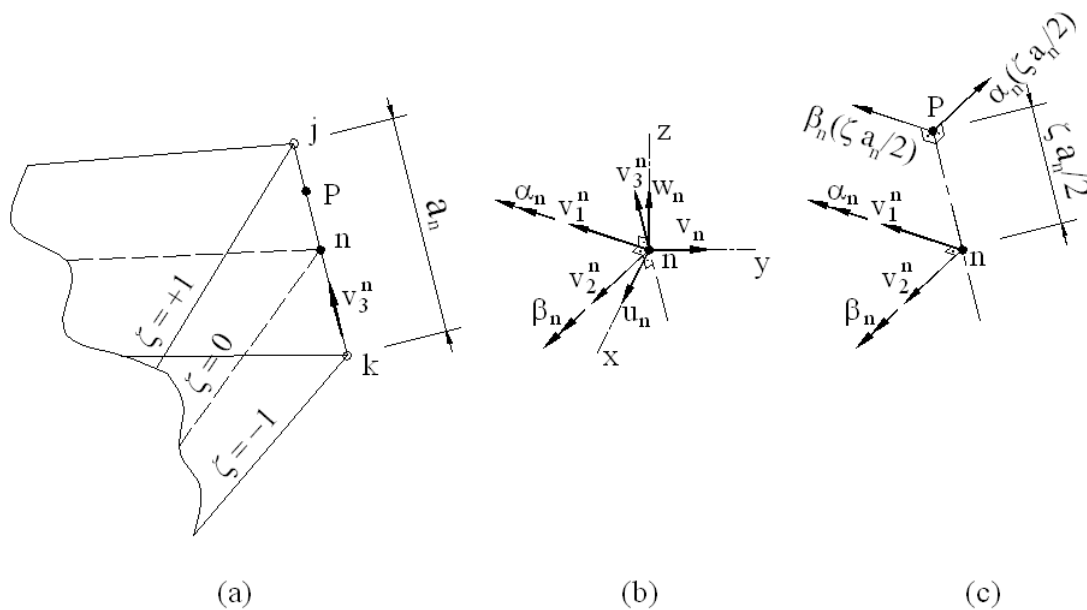
Sendo assim, o vetor que define os graus de liberdade do elemento pode ser escrito segundo a Eq.(IV-56), ressaltando-se que os graus de liberdade de translação já se encontram no referencial global:

$$\{\mathbf{d}_{casca}\}_{5Nn\acute{o}s \times 1} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \alpha_1 \ \beta_1 \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n \ \alpha_n \ \beta_n\}^T \quad \text{Eq.(IV-56)}$$

onde  $Nn\acute{o}s$  representa o número de nós do elemento.

#### IV.2.2.7.2 Geometria e campo de deslocamentos

Seja a figura Fig. IV-20.



**Fig. IV-20 (a) Indicação do vetor espessura; (b) Graus de liberdade do elemento de casca e vetores ortogonais; (c) deslocamentos de um ponto P nas direções de  $v_1^n$  e  $v_2^n$  devido a pequenas rotações  $\beta_n$  e  $\alpha_n$  do vetor espessura, respectivamente [27].**

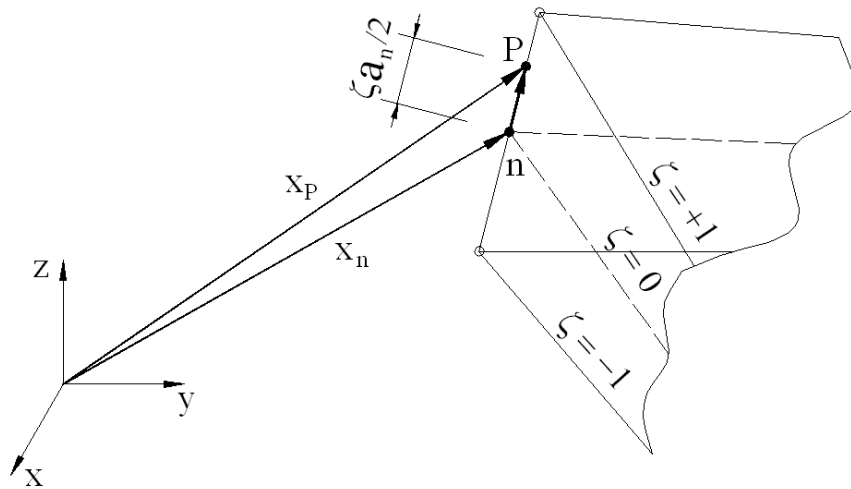
As coordenadas cartesianas (x y z) de qualquer ponto no elemento podem ser dadas por [29]:

$$\begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} H_n(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} H_n(\xi, \eta) \zeta \frac{a_n}{2} \begin{Bmatrix} v_{3x}^n \\ v_{3y}^n \\ v_{3z}^n \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-57)}$$

onde  $H_n(\xi, \eta)$  são as funções de interpolação que, para o elemento quadrilateral bilinear<sup>1</sup> (quatro nós) são definidas pela Eq.(IV-48).

A expressão definida na Eq.(IV-57) indica que um ponto  $P$  qualquer no elemento pode ser obtido pela soma do vetor posição do ponto na superfície média mais o versor do vetor direção espessura  $v_3^n$  multiplicado pelo módulo  $\zeta a_n/2$ , incididas as devidas interpolações (Fig. IV-21):

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix}_P = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{Bmatrix}_n + \frac{\zeta a_n}{2} \begin{Bmatrix} v_{3x}^n \\ v_{3y}^n \\ v_{3z}^n \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-58)}$$



**Fig. IV-21** Obtenção do vetor posição de um ponto no elemento.

As componentes na direção  $x$  dos vetores deslocamento do ponto  $P$  devidos a rotações pequenas  $\alpha_n$  e  $\beta_n$ ,  $u_{P,\alpha_n}$  e  $u_{P,\beta_n}$ , podem ser obtidas com a projeção destes vetores sobre o eixo  $x$  (Fig. IV-20c).

1. Apesar de a formulação ser válida para elementos com qualquer número de nós, procurar-se-á a partir deste ponto dar ênfase ao elemento quadrilateral de quatro nós, implementado no programa desenvolvido.



$$u_{P,\alpha_n} = \left( -\alpha_n \zeta \frac{a_n}{2} \begin{Bmatrix} v_{2x}^n \\ v_{2y}^n \\ v_{2z}^n \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\alpha_n \zeta \frac{a_n}{2} v_{2x}^n \quad \text{Eq.(IV-59a)}$$

$$u_{P,\beta_n} = \left( \beta_n \zeta \frac{a_n}{2} \begin{Bmatrix} v_{1x}^n \\ v_{1y}^n \\ v_{1z}^n \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_n \zeta \frac{a_n}{2} v_{1x}^n \quad \text{Eq.(IV-59b)}$$

Assim, o deslocamento total de um ponto  $P$  na direção  $x$ ,  $u_P$ , pode ser dado pela Eq.(IV-60):

$$u_P = u_n - \alpha_n \zeta \frac{a_n}{2} v_{2x}^n + \beta_n \zeta \frac{a_n}{2} v_{1x}^n \quad \text{Eq.(IV-60)}$$

Generalizando para  $v$  e  $w$ , o campo de deslocamentos  $\{\mathbf{u}\}$  no elemento pode ser dado por [29]:

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, \zeta) \\ v(\xi, \eta, \zeta) \\ w(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} H_n(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} H_n(\xi, \eta) \zeta \frac{a_n}{2} \begin{bmatrix} -v_{2x}^n & v_{1x}^n \\ -v_{2y}^n & v_{1y}^n \\ -v_{2z}^n & v_{1z}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-61)}$$

Arranjando a Eq.(IV-61) numa outra forma, vem [30]:

$$\{\mathbf{u}\} = \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} \begin{bmatrix} H_n(\xi, \eta) & 0 & 0 & -H_n(\xi, \eta) \zeta \frac{a_n}{2} v_{2x}^n & H_n(\xi, \eta) \zeta \frac{a_n}{2} v_{1x}^n \\ 0 & H_n(\xi, \eta) & 0 & -H_n(\xi, \eta) \zeta \frac{a_n}{2} v_{2y}^n & H_n(\xi, \eta) \zeta \frac{a_n}{2} v_{1y}^n \\ 0 & 0 & H_n(\xi, \eta) & -H_n(\xi, \eta) \zeta \frac{a_n}{2} v_{2z}^n & H_n(\xi, \eta) \zeta \frac{a_n}{2} v_{1z}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-62)}$$

Agrupando-se todos os graus de liberdade, ter-se-ia:

$$\{\mathbf{u}\}_{3 \times 1} = [\mathbf{H}]_{3 \times 5Nn\acute{o}s} \{\mathbf{d}_{casca}\}_{5Nn\acute{o}s \times 1} \quad \text{Eq.(IV-63)}$$

onde  $[\mathbf{H}]$  é a matriz que contém as funções de interpolação para o elemento de casca.

### IV.2.2.7.3 Campo de deformações e matriz de rigidez

Viu-se que para a obtenção do campo de deformações  $\{\epsilon\}$  são necessárias derivadas dos deslocamentos com relação às coordenadas cartesianas  $x, y$  e  $z$ , Eq.(IV-27) e Eq.(IV-27a), quando os deslocamentos  $u, v$  e  $w$  são expressos em função das coordenadas naturais  $\xi, \eta$  e  $\zeta$  - Eq.(IV-61). Assim, deve-se primeiramente obter as derivadas do campo de deslocamentos com relação às coordenadas naturais e depois correlacioná-las com as derivadas em relação às coordenadas cartesianas, o que pode ser feito com o auxílio da matriz jacobiana  $[J]$  para o caso tridimensional<sup>1</sup> [27].

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{Bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} J^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & J^{-1} \end{bmatrix}_{9 \times 9} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ \vdots \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix}_{9 \times 1} \quad \text{Eq.(IV-64)}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{Eq.(IV-64a)}$$

Por sua vez, com o auxílio da Eq.(IV-62), pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}_{9 \times 1} = \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} & 0 & 0 & -\frac{\partial H_n}{\partial \xi} \zeta \frac{a_n}{2} v_{2x}^n & \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \zeta \frac{a_n}{2} v_{1x}^n \\ \frac{\partial H_n}{\partial \eta} & 0 & 0 & -\frac{\partial H_n}{\partial \eta} \zeta \frac{a_n}{2} v_{2x}^n & \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \zeta \frac{a_n}{2} v_{1x}^n \\ 0 & 0 & 0 & -H_n \frac{a_n}{2} v_{2x}^n & H_n \frac{a_n}{2} v_{1x}^n \\ 0 & \frac{\partial H_n}{\partial \xi} & 0 & -\frac{\partial H_n}{\partial \xi} \zeta \frac{a_n}{2} v_{2y}^n & \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \zeta \frac{a_n}{2} v_{1y}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -H_n \frac{a_n}{2} v_{2z}^n & H_n \frac{a_n}{2} v_{1z}^n \end{bmatrix}_{9 \times 5} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{5 \times 1} \quad \text{Eq.(IV-65)}$$

1. Para o caso tridimensional, o determinante da matriz jacobiana  $det[J]$  representa a relação entre os volumes  $dx dy dz$  e  $d\xi d\eta d\zeta$ .

$$\{u, \xi \ u, \eta \ u, \zeta \ v, \xi \ \dots \ w, \zeta\}_{9 \times 1}^T = [\mathbf{Aux}_1]_{9 \times 5Nn\acute{o}s} \{\mathbf{d}_{casca}\}_{5Nn\acute{o}s \times 1} \quad \text{Eq.(IV-65a)}$$

Reescrevendo a Eq.(IV-27),

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 9} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix}_{9 \times 1} \quad \text{Eq.(IV-66)}$$

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{Aux}_2]_{6 \times 9} \{u, \eta \ u, \zeta \ v, \eta \ \dots \ w, \zeta\}_{9 \times 1}^T \quad \text{Eq.(IV-66a)}$$

e inserindo as equações Eq.(IV-64) e Eq.(IV-65) na Eq.(IV-66), chega-se à matriz de deformação deslocamento  $[\mathbf{B}]$  do elemento de casca de quatro nós utilizada na Eq.(IV-42) para a determinação da matriz de rigidez do elemento:

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{Aux}_2]_{6 \times 9} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix}_{9 \times 9} [\mathbf{Aux}_1]_{9 \times 20} \quad \text{Eq.(IV-67)}$$

Finalmente, deve-se expressar a relação tensão  $\times$  deformação segundo o sistema de coordenadas local do elemento ( $x' \ y' \ z'$ ), impondo-se então a condição de que tensões normais à superfície média valem zero ( $\sigma'_z = 0$ ) [27]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \sigma'_z \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{zx} \\ \tau'_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & & & & & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon'_x \\ \epsilon'_y \\ \epsilon'_z \\ \gamma'_{xy} \\ \gamma'_{zx} \\ \gamma'_{zy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-68)}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = [\mathbf{E}']\{\boldsymbol{\epsilon}'\} \quad \text{Eq.(IV-68a)}$$

onde  $k$  corresponde a um fator de correção no intuito de se tomar em consideração a variação parabólica da deformação por cisalhamento ao longo da espessura do elemento, podendo ser considerado igual a  $5/6$ .

Pode-se demonstrar que os campos de deformação nos referenciais local e global relacionam-se segundo a Eq.(IV-69) [27]:

$$\{\boldsymbol{\epsilon}'\} = [\mathbf{T}_\epsilon]\{\boldsymbol{\epsilon}\} \quad \text{Eq.(IV-69)}$$

podendo-se também escrever [27]:

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{T}_\epsilon]^T [\mathbf{E}'] [\mathbf{T}_\epsilon] \quad \text{Eq.(IV-70)}$$

onde  $[\mathbf{T}_\epsilon]$  pode ser entendida como uma matriz que transforma a relação tensão-deformação de um sistema de coordenadas cartesianas alinhado como a casca (sistema local) para o sistema de coordenadas cartesianas global [29]:

$$[\mathbf{T}_\epsilon] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & n_1 l_1 & m_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & n_2 l_2 & m_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & n_3 l_3 & m_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-71)}$$

Por meio das equações Eq.(IV-42), Eq.(IV-67) e Eq.(IV-70), a matriz de rigidez para o elemento de casca de quatro nós pode então ser avaliada:

$$[\mathbf{k}_e]_{20 \times 20} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}]_{20 \times 6}^T [\mathbf{E}]_{6 \times 6} [\mathbf{B}]_{6 \times 20} \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta \quad \text{Eq.(IV-72)}$$

Vale salientar que, como o sistema de coordenadas local ( $x' y' z'$ ) é definido em cada ponto do elemento, a matriz  $[\mathbf{T}_\epsilon]$  deve ser avaliada em cada ponto de integração de Gauss no processo de integração numérica indicada na Eq.(IV-72).

#### IV.2.2.7.4 Interpolação mista

O processo de obtenção da matriz de rigidez para um elemento de casca isoparamétrico geral descrito no item IV.2.2.7.3 corresponde a uma formulação baseada unicamente nos deslocamentos. Elementos degenerados sólidos formulados desta maneira podem apresentar deformações de corte transversal (*shear locking*) e de membrana (*membrane locking*) espúrias, isto é, incorretas, no caso de elementos de baixa e alta ordem (elementos curvos), respectivamente [29].

Os elementos assim formulados seriam incapazes de, por exemplo, no caso de uma casca fina sujeita à flexão pura, apresentar deformações de corte transversal nulas; ou, no caso de elementos curvos (elemento de nove nós, por exemplo), tem-se a incapacidade de apresentar deformações de membrana nulas, também nos estados de flexão pura [30].

Seja por exemplo um elemento de placa baseado na teoria de Mindlin, onde se admitem as deformações por corte transversal. Pode-se obter uma expressão para a rigidez segundo a Eq.(IV-73) [30]:

$$[\mathbf{k}_e] = [\mathbf{k}_f] + \beta'[\mathbf{k}_c], \quad \beta' = k \frac{GL^2}{Et^2} \quad \text{Eq.(IV-73)}$$

onde  $[\mathbf{k}_f]$  e  $[\mathbf{k}_c]$  correspondem às matrizes de rigidez que contêm os termos de flexão e corte, respectivamente, e  $\beta'$  corresponde a um fator de penalidade. Observa-se que quando a relação  $L/t$  torna-se muito grande (vão grande em relação à espessura da placa),  $\beta' \rightarrow \infty$  e a rigidez do elemento é devida quase que inteiramente a componentes de corte “parasitas” (o elemento é muito rígido e os deslocamentos são muito menores que os valores exatos).

Também a matriz de rigidez para um elemento de casca pode ser obtida com a sobreposição dos efeitos de membrana, corte e flexão,  $[\mathbf{k}_m]$ ,  $[\mathbf{k}_c]$  e  $[\mathbf{k}_f]$ , respectivamente:

$$[\mathbf{k}_e] = [\mathbf{k}_m] + [\mathbf{k}_c] + [\mathbf{k}_f] \quad \text{Eq.(IV-74)}$$

Uma das formas de contornar o problema, seja de deformações de corte espúrias (relacionadas a  $[\mathbf{k}_c]$ ), seja de deformações de membrana incorretas (relacionadas a  $[\mathbf{k}_m]$ ) é a utilização de integração numérica reduzida ou seletiva, integrando-se separadamente

cada uma das matrizes na Eq.(IV-74). Nesta alternativa, ao se utilizar uma ordem de integração inferior à adequada, procura-se obter um erro numérico que compense o erro energético [30].

Outra forma de contornar o problema, mais geral, é o método da interpolação mista das componentes tensoriais, “*Mixed Interpolation of Tensor Componentes*” [29], onde se procura interpolar as componentes de deformação no plano e de corte transversal independentemente, por meio de funções de interpolação relacionadas a “pontos de ligação” onde as deformações são obtidas com base nas funções de interpolação usuais dos deslocamentos.

O primeiro passo é escrever o tensor de deformações completo em coordenadas naturais  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , segundo um referencial covariante [29]:

$$\begin{aligned} \epsilon = & \tilde{\epsilon}_{\xi\xi} \mathbf{g}^\xi \mathbf{g}^\xi + \tilde{\epsilon}_{\eta\eta} \mathbf{g}^\eta \mathbf{g}^\eta + \tilde{\epsilon}_{\zeta\zeta} \mathbf{g}^\zeta \mathbf{g}^\zeta + \tilde{\epsilon}_{\xi\eta} (\mathbf{g}^\xi \mathbf{g}^\eta + \mathbf{g}^\eta \mathbf{g}^\xi) \\ & + \tilde{\epsilon}_{\xi\zeta} (\mathbf{g}^\xi \mathbf{g}^\zeta + \mathbf{g}^\zeta \mathbf{g}^\xi) + \tilde{\epsilon}_{\eta\zeta} (\mathbf{g}^\eta \mathbf{g}^\zeta + \mathbf{g}^\zeta \mathbf{g}^\eta) \end{aligned} \quad \text{Eq.(IV-75)}$$

onde  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  são as componentes covariantes de deformação correspondentes aos vetores de base covariante

$$\mathbf{g}_\xi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} ; \quad \mathbf{g}_\eta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} ; \quad \mathbf{g}_\zeta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \quad \text{Eq.(IV-76)}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-76a)}$$

e  $\mathbf{g}^\xi$ ,  $\mathbf{g}^\eta$  e  $\mathbf{g}^\zeta$  são os vetores de base contravariante, em função dos quais é expresso o tensor de deformações da Eq.(IV-75).

Ao contrário do sistema cartesiano de coordenadas, onde os vetores de base  $\mathbf{e}_i$ ,  $i=1, 2, 3$ , são ortogonais, no sistema de coordenadas naturais os vetores de base covariante  $\mathbf{g}_i$ ,  $i=1, 2, 3$ , não são ortogonais entre eles, assim como os correspondentes vetores de base contravariantes  $\mathbf{g}^j$ ,  $j=1, 2, 3$ . Além disso, num referencial covariante os vetores de base não possuem comprimento unitário em geral. Os vetores de base contravariante são ortogonais aos vetores de base covariante, devendo ser satisfeitas as seguintes relações em notação tensorial [29]

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j &= \delta_i^j, \quad \delta_i^j = 1 \text{ se } i = j \text{ e } \delta_i^j = 0 \text{ se } i \neq j \\ \mathbf{g}_i &= g_{ij} \mathbf{g}^j, \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \end{aligned}$$

As componentes covariantes do tensor de deformação *Green-Lagrange* podem ser obtidas, após processo de deformação inicial entre o instante  $0$  e  $t$  por [29]:

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t \mathbf{g}_i \cdot {}^t \mathbf{g}_j - {}^0 \mathbf{g}_i \cdot {}^0 \mathbf{g}_j) \quad \text{Eq.(IV-77)}$$

onde  $i, j=1,2,3$  e correspondem a  $(\xi, \eta$  e  $\zeta)$ .

Tem-se ainda, fazendo-se  $r_1 = \xi$ ,  $r_2 = \eta$  e  $r_3 = \zeta$ :

$${}^0 \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i} \quad \text{Eq.(IV-78a)}$$

$${}^t \mathbf{g}_i = \frac{\partial (\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial r_i} = {}^0 \mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \quad \text{Eq.(IV-78b)}$$

Substituindo as expressões Eq.(IV-78a) e Eq.(IV-78b) na Eq.(IV-77), vem:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \left( {}^0 \mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \right) \cdot \left( {}^0 \mathbf{g}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \right) - {}^0 \mathbf{g}_i \cdot {}^0 \mathbf{g}_j \right] \\ \tilde{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \cdot {}^0 \mathbf{g}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \cdot {}^0 \mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \right) \end{aligned} \quad \text{Eq.(IV-79)}$$

onde o último termo da Eq.(IV-79) pode ser desprezado no caso de análises lineares. A equação Eq.(IV-79) pode ser então utilizada para obtenção de cada uma das componentes covariantes do tensor de deformações. Assim, para a componente  $\tilde{\epsilon}_{\xi\xi}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\xi\xi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) \\ \tilde{\epsilon}_{\xi\xi} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad \text{Eq.(IV-80)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{Bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix}$$

onde as derivadas do campo de deslocamentos  $\{\mathbf{u}\}$  e do vetor posição  $\mathbf{x}$  em relação a cada uma das coordenadas naturais podem ser obtidas da Eq.(IV-65) e da matriz jacobiana expressa na Eq.(IV-64a), respectivamente. Assim, representando na forma matricial em função dos graus de liberdade do elemento, vem:

$$\tilde{\epsilon}_{\xi\xi} = \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial H_n}{\partial \xi} \zeta \frac{a_n}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} v_{2x}^n + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{2y}^n + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{2z}^n \right) \\ \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \zeta \frac{a_n}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} v_{1x}^n + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{1y}^n + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{1z}^n \right) \end{bmatrix}_{1 \times 5}^T \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{5 \times 1} \quad \text{Eq.(IV-81a)}$$

Seguindo o mesmo raciocínio para as outras componentes, vem:

$$\tilde{\epsilon}_{\eta\eta} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta},$$

$$\tilde{\epsilon}_{\eta\eta} = \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial H_n}{\partial \eta} \zeta \frac{a_n}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} v_{2x}^n + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{2y}^n + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{2z}^n \right) \\ \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \zeta \frac{a_n}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} v_{1x}^n + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{1y}^n + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{1z}^n \right) \end{bmatrix}_{1 \times 5}^T \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{5 \times 1} \quad \text{Eq.(IV-81b)}$$



$$\tilde{\epsilon}_{\zeta\zeta} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta},$$

$$\tilde{\epsilon}_{\zeta\zeta} = \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -H_n \frac{a_n}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} v_{2x}^n + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_{2y}^n + \frac{\partial z}{\partial \zeta} v_{2z}^n \right) \\ H_n \frac{a_n}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} v_{1x}^n + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_{1y}^n + \frac{\partial z}{\partial \zeta} v_{1z}^n \right) \end{bmatrix}_{1 \times 5}^T \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{5 \times 1} \quad \text{Eq.(IV-81c)}$$

$$\tilde{\epsilon}_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right),$$

$$2\tilde{\epsilon}_{\xi\eta} = \sum_{n=1}^{Nn\acute{o}s} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \\ -\zeta \frac{a_n}{2} \left[ \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} v_{2x}^n + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{2y}^n + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{2z}^n \right) + \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} v_{2x}^n + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{2y}^n + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{2z}^n \right) \right] \\ \zeta \frac{a_n}{2} \left[ \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} v_{1x}^n + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{1y}^n + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{1z}^n \right) + \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} v_{1x}^n + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{1y}^n + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{1z}^n \right) \right] \end{bmatrix}_{1 \times 5}^T \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{5 \times 1} \quad \text{Eq.(IV-81d)}$$

$$\tilde{\epsilon}_{\xi\zeta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right),$$

$$2\tilde{\epsilon}_{\xi\xi\zeta} = \sum_{n=1}^{Nnós} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \\ -\frac{a_n}{2} \left[ \zeta \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} v_{2x}^n + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_{2y}^n + \frac{\partial z}{\partial \zeta} v_{2z}^n \right) + H_n \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} v_{2x}^n + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{2y}^n + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{2z}^n \right) \right] \\ \frac{a_n}{2} \left[ \zeta \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} v_{1x}^n + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_{1y}^n + \frac{\partial z}{\partial \zeta} v_{1z}^n \right) + H_n \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} v_{1x}^n + \frac{\partial y}{\partial \xi} v_{1y}^n + \frac{\partial z}{\partial \xi} v_{1z}^n \right) \right] \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{5 \times 1} \quad \text{Eq.(IV-81e)}$$

$$\tilde{\epsilon}_{\eta\zeta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right),$$

$$2\tilde{\epsilon}_{\eta\zeta} = \sum_{n=1}^{Nnós} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \\ -\frac{a_n}{2} \left[ \zeta \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} v_{2x}^n + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_{2y}^n + \frac{\partial z}{\partial \zeta} v_{2z}^n \right) + H_n \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} v_{2x}^n + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{2y}^n + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{2z}^n \right) \right] \\ \frac{a_n}{2} \left[ \zeta \frac{\partial H_n}{\partial \eta} \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} v_{1x}^n + \frac{\partial y}{\partial \zeta} v_{1y}^n + \frac{\partial z}{\partial \zeta} v_{1z}^n \right) + H_n \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} v_{1x}^n + \frac{\partial y}{\partial \eta} v_{1y}^n + \frac{\partial z}{\partial \eta} v_{1z}^n \right) \right] \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{5 \times 1} \quad \text{Eq.(IV-81f)}$$

O ponto chave no processo de interpolação mista é a determinação do denominado tensor de deformações assumidas  $\tilde{\epsilon}^{AS}$ , cujas componentes  $\tilde{\epsilon}_{ij}^{AS}$  são obtidas interpolando-se nos pontos de ligação as componentes do tensor de deformações obtidas

com as equações Eq.(IV-81a) a Eq.(IV-81f) (baseadas unicamente em funções de interpolação dos deslocamentos). Assim, para o elemento quadrilateral de quatro nós (MITC4), que não apresenta deformações espúrias de membrana, as únicas componentes interpoladas são aquelas relativas à deformação por corte transversal, a saber,  $\epsilon_{\xi\xi}$  e  $\epsilon_{\eta\zeta}$  [30], tendo-se, para um dado ponto de Gauss  $(\xi, \eta, \zeta)$ :

$$\tilde{\epsilon}_{\xi\xi}^{AS}(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{\epsilon}_{\xi\xi}(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{Eq.(IV-82a)}$$

$$\tilde{\epsilon}_{\eta\eta}^{AS}(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{\epsilon}_{\eta\eta}(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{Eq.(IV-82b)}$$

$$\tilde{\epsilon}_{\zeta\zeta}^{AS}(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{\epsilon}_{\zeta\zeta}(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{Eq.(IV-82c)}$$

$$\tilde{\epsilon}_{\xi\eta}^{AS}(\xi, \eta, \zeta) = \tilde{\epsilon}_{\xi\eta}(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{Eq.(IV-82d)}$$

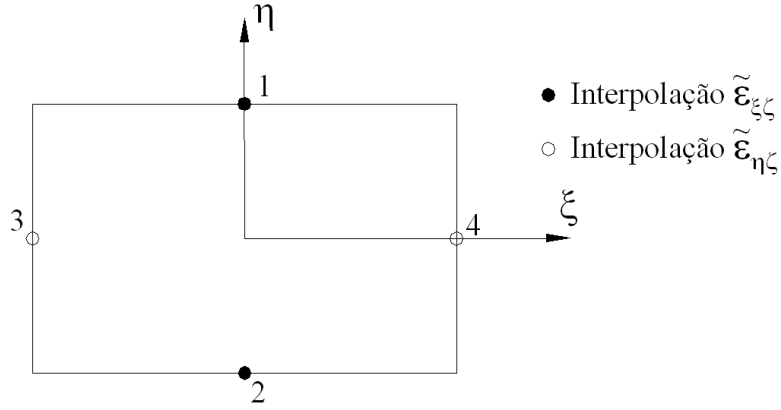
$$\tilde{\epsilon}_{\xi\zeta}^{AS}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{p=1}^2 HP_p(\xi, \eta) \tilde{\epsilon}_{\xi\zeta}(\xi_p, \eta_p, 0) \quad \text{Eq.(IV-82e)}$$

$$\tilde{\epsilon}_{\eta\zeta}^{AS}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{p=3}^4 HP_p(\xi, \eta) \tilde{\epsilon}_{\eta\zeta}(\xi_p, \eta_p, 0) \quad \text{Eq.(IV-82f)}$$

onde as funções  $HP_p(\xi, \eta)$ ,  $p = 1, 2, 3, 4$ , correspondem a funções de interpolação associadas aos pontos de ligação  $(\xi_p, \eta_p, 0)$  (Fig. IV-22), avaliadas no ponto de Gauss em análise [29]:

$$HP_1 = \frac{1}{2}(1 + \eta); \quad HP_2 = \frac{1}{2}(1 - \eta); \quad \text{Eq.(IV-83)}$$

$$HP_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi); \quad HP_4 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$



**Fig. IV-22 Pontos de ligação para o elemento bilinear MITC4 [29].**

Sendo assim, pode-se definir uma matriz deformação-deslocamento assumida,  $[\tilde{\mathbf{B}}^{AS}]$ , por meio das equações Eq.(IV-81), Eq.(IV-82) e Eq.(IV-83):

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{\xi\xi}^{AS} \\ \tilde{\epsilon}_{\eta\eta}^{AS} \\ \tilde{\epsilon}_{\zeta\zeta}^{AS} \\ \tilde{\gamma}_{\xi\eta}^{AS} \\ \tilde{\gamma}_{\xi\zeta}^{AS} \\ \tilde{\gamma}_{\eta\zeta}^{AS} \end{Bmatrix} = [\tilde{\mathbf{B}}^{AS}]_{6 \times 5N\text{nós}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N\text{nós}} \end{Bmatrix}_{5N\text{nós} \times 1} \quad \text{Eq.(IV-84)}$$

Os campos de deformação nos referenciais local e covariante relacionam-se segundo a Eq.(IV-85) [30]:

$$\{\epsilon'\} = [\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon] \{\tilde{\epsilon}\} \quad \text{Eq.(IV-85)}$$

e como

$$\{\tilde{\epsilon}^{AS}\} = [\tilde{\mathbf{B}}^{AS}] \{\mathbf{d}_{casca}\}, \quad \text{Eq.(IV-86)}$$

define-se, introduzindo a Eq.(IV-86) na Eq.(IV-85), a matriz deformação-deslocamento no referencial local:

$$[\mathbf{B}'] = [\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon] [\tilde{\mathbf{B}}^{AS}] \quad \text{Eq.(IV-87)}$$

A matriz de transformação  $[\tilde{\mathbf{T}}_\epsilon]$  pode ser dada por [30]:

$$[\tilde{\mathbf{T}}_e] = \begin{bmatrix} T_{11}^2 & T_{12}^2 & T_{13}^2 & T_{11}T_{12} & T_{11}T_{13} & T_{12}T_{13} \\ T_{21}^2 & T_{22}^2 & T_{23}^2 & T_{21}T_{22} & T_{21}T_{23} & T_{22}T_{23} \\ T_{31}^2 & T_{32}^2 & T_{33}^2 & T_{31}T_{32} & T_{31}T_{33} & T_{32}T_{33} \\ 2T_{11}T_{21} & 2T_{12}T_{22} & 2T_{13}T_{23} & (T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21}) & (T_{11}T_{23} + T_{13}T_{21}) & (T_{12}T_{23} + T_{13}T_{22}) \\ 2T_{11}T_{31} & 2T_{12}T_{32} & 2T_{13}T_{33} & (T_{11}T_{32} + T_{12}T_{31}) & (T_{11}T_{33} + T_{13}T_{31}) & (T_{12}T_{33} + T_{13}T_{32}) \\ 2T_{21}T_{31} & 2T_{22}T_{32} & 2T_{23}T_{33} & (T_{21}T_{32} + T_{22}T_{31}) & (T_{21}T_{33} + T_{23}T_{31}) & (T_{22}T_{33} + T_{23}T_{32}) \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-88)}$$

onde cada termo  $T_{ij}$  ( $i=1,2,3$  e  $j=1,2,3$ ) pode ser obtido da relação abaixo [30]:

$$[\mathbf{T}]_{3 \times 3} = [\mathbf{J}^-]_{3 \times 3}^T [\mathbf{T}']^T \quad \text{Eq.(IV-89)}$$

onde  $[\mathbf{J}^-]$  e  $[\mathbf{T}']$  correspondem à inversa da matriz jacobiana Eq.(IV-64a) e à matriz de transformação local-global Eq.(IV-54), respectivamente.

Sendo assim, a matriz de rigidez para o elemento de casca MITC4, implementado no programa desenvolvido, pode então ser determinada com base na matriz  $[\mathbf{B}']$  definida em termos das derivadas dos deslocamentos com respeito às coordenadas locais cartesianas ( $x'$   $y'$   $z'$ ) [31]:

$$[\mathbf{k}_{casca}]_{20 \times 20} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{B}']_{20 \times 6}^T [\mathbf{E}']_{6 \times 6} [\mathbf{B}']_{6 \times 20} \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta \quad \text{Eq.(IV-90)}$$

onde a matriz de propriedades do material  $[\mathbf{E}']$  segundo eixos ortogonais alinhados com a casca ( $x'$   $y'$   $z'$ ) é dada na Eq.(IV-68).

#### IV.2.2.7.5 Vetor de forças devido às cargas distribuídas

O vetor de forças devido às cargas distribuídas na superfície do elemento pode ser dado por:

$$\{\mathbf{r}_e\}_{Se} = \int_{Se} [\mathbf{H}]^T \{\boldsymbol{\phi}^S\} ds$$

$$\{\mathbf{r}_e\}_{Se} = \int_{Se} [\mathbf{H}]_{20 \times 3}^T \{\boldsymbol{\phi}^S\}_{3 \times 1} dx' dy' = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{H}]^T(\xi, \eta) \{\boldsymbol{\phi}^S\} \det[\mathbf{j}'] d\xi d\eta \quad \text{Eq.(IV-91)}$$

onde a matriz  $[\mathbf{H}]$  de funções de interpolação é dada pela Eq.(IV-63) e o vetor  $\{\boldsymbol{\phi}^S\}$  que contém as forças por unidade de superfície é dado pela Eq.(IV-35), sendo  $x'$  e  $y'$  eixos locais tangentes à superfície média do elemento. O determinante da matriz

jacobiana  $[j']$ , presente na Eq.(IV-91), representa a relação entre as áreas  $dx'dy'$  e  $d\xi d\eta$  sendo a matriz  $[j']$  expressa segundo a Eq.(IV-92):

$$[j'] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \xi} & \frac{\partial y'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x'}{\partial \eta} & \frac{\partial y'}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-92)}$$

Utilizando a regra da cadeia e observando a Eq.(IV-54), vem:

$$\frac{\partial x'}{\partial \xi} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} = l_1 J_{11} + m_1 J_{12} + n_1 J_{13} \quad \text{Eq.(IV-93a)}$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \xi} = l_2 J_{11} + m_2 J_{12} + n_2 J_{13} \quad \text{Eq.(IV-93b)}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \eta} = l_1 J_{21} + m_1 J_{22} + n_1 J_{23} \quad \text{Eq.(IV-93c)}$$

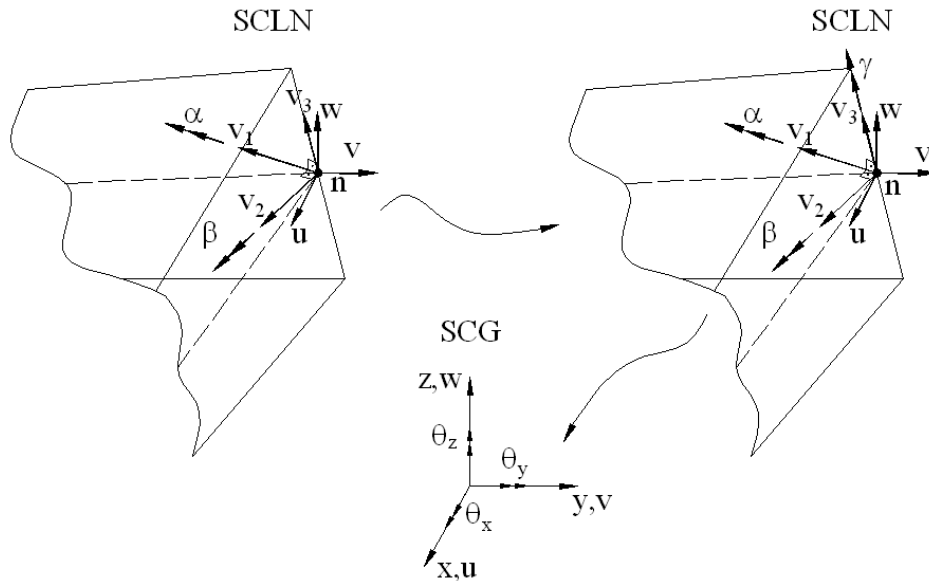
$$\frac{\partial y'}{\partial \eta} = l_2 J_{21} + m_2 J_{22} + n_2 J_{23} \quad \text{Eq.(IV-93d)}$$

estando assim definidos todos os termos da matriz jacobiana  $[j']$ . Nas expressões acima,  $l_i$ ,  $m_i$  e  $n_i$  ( $i = 1, 2$ ) são os cossenos diretores dos eixos  $x'$  e  $y'$  com respeito aos eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$  - Eq.(IV-54) -, enquanto que  $J_{ik}$  ( $i = 1, 2$  e  $k = 1, 2, 3$ ) correspondem a termos da matriz jacobiana expressos na Eq.(IV-64a).

#### IV.2.2.7.6 Compatibilização com elementos de pórtico espacial

Como visto, os elementos de pórtico espacial são formulados com seis graus de liberdade por nó (Fig. IV-8) ao passo que o elemento de casca implementado neste trabalho (MITC4) apresenta cinco graus de liberdade por nó. Sendo assim, faz-se necessário expandir as matrizes do elemento de casca com o intuito de contemplar a adição de um grau de liberdade fictício à formulação original, a saber, a rotação  $\gamma$  em torno do vetor espessura  $v_3^n$  (Fig. IV-23).

Todos os termos adicionais na matriz de rigidez e no vetor de forças do elemento de casca relacionados ao novo grau de liberdade fictício  $\gamma$  são zerados, com exceção do termo da diagonal da matriz de rigidez, tomando como muito pequeno (cerca de  $10^{-10}$  vezes o menor termo da matriz de rigidez do elemento). Assim, a matriz de rigidez do elemento de casca bilinear, originalmente quadrada de ordem 20, passará a ser de ordem 24; o vetor de forças, originalmente com 20 posições, passará a ter 24, e assim sucessivamente.



**Fig. IV-23 Grau de liberdade fictício  $\gamma$  para o elemento de casca e rotações no referencial global.**

Além disso, apesar dos graus de liberdade de translação do elemento de casca já estarem referenciados ao sistema de coordenadas global SCG ( $x$  e  $y$ ), o mesmo não acontece para as rotações  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , em torno dos vetores  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ , respectivamente. Sendo assim, quando da presença de elementos de pórtico, faz-se necessária a matriz de rotação  $[\mathbf{T}_{casca}]$ , obtida considerando-se as seguintes relações:

$$\begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{Bmatrix}^{SCLN} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{1x}^n & v_{1y}^n & v_{1z}^n \\ 0 & 0 & 0 & v_{2x}^n & v_{2y}^n & v_{2z}^n \\ 0 & 0 & 0 & v_{3x}^n & v_{3y}^n & v_{3z}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ \theta_{xn} \\ \theta_{yn} \\ \theta_{zn} \end{Bmatrix}^{SCG} \quad \text{Eq.(IV-94)}$$

$$\{\mathbf{d}\}_n^{SCLN} = [\mathbf{T}_{casca}]_n \{\mathbf{d}\}_n^{SCG} \quad \text{Eq.(IV-94a)}$$

Como são quatro nós por elemento, vem:

$$\{\mathbf{d}_e\}_{24 \times 1}^{SCLN} = [\mathbf{T}_{casca}]_{24 \times 24} \{\mathbf{d}_e\}_{24 \times 1}^{SCG} \quad \text{Eq.(IV-95)}$$

$$[\mathbf{T}_{casca}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{T}_{casca}]_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{T}_{casca}]_{n+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{T}_{casca}]_{n+2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{T}_{casca}]_{n+3} \end{bmatrix}_{24 \times 24} \quad \text{Eq.(IV-95a)}$$

Sendo assim, as matrizes de rigidez e o vetor de forças devidas a cargas distribuídas na superfície, para o elemento de casca com seis graus de liberdade por nó no referencial global, podem ser dados por:

$$[\mathbf{k}_e]_{24 \times 24} = [\mathbf{T}_{casca}]_{24 \times 24}^T [\mathbf{k}_{casca}]_{24 \times 24}^{SCLN} [\mathbf{T}_{casca}]_{24 \times 24} \quad \text{Eq.(IV-96a)}$$

$$\{\mathbf{r}_e\}_{24 \times 1}^{Se} = [\mathbf{T}_{casca}]_{24 \times 24}^T \{\mathbf{r}_e\}_{24 \times 1}^{SCLN} \quad \text{Eq.(IV-96b)}$$

onde a matriz  $[\mathbf{k}_{casca}]_{24 \times 24}^{SCLN}$  e o vetor  $\{\mathbf{r}_e\}_{24 \times 1}^{SCLN}$  correspondem à matriz de rigidez, Eq.(IV-90), e ao vetor de forças, Eq.(IV-91), definidos no sistema de coordenadas local nodal SCLN (as rotações referenciadas aos vetores  $v_1, v_2$  e  $v_3$  em cada nó  $n$  do elemento) e expandidos para a consideração do grau de liberdade  $\gamma$  em cada nó.

### IV.2.3 Análise dinâmica

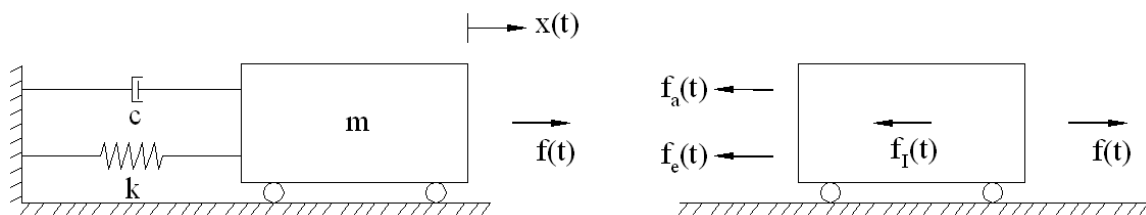
Em face ao grande avanço observado na tecnologia dos materiais, com o surgimento, por exemplo, de concretos de alto desempenho e aços de elevada resistência, estruturas esbeltas e com grandes vãos têm se tornado uma constante, sendo cada vez mais susceptíveis a problemas de vibrações excessivas. Sendo assim, julga-se aqui que a análise dinâmica das estruturas em conjunto com a análise estática não-linear discutida no item IV.1 devem constituir etapas obrigatórias de um projeto estrutural, embora os resultados das análises possam indicar um comportamento linear e de caráter basicamente estático, indicação esta só obtida após a realização de análises mais avançadas ou por meio da avaliação de um engenheiro de projetos com vasta experiência.



Neste item, procura-se desenvolver e/ou apresentar os conceitos e expressões necessários à obtenção e resolução das equações diferenciais de movimento de sistemas com um ou múltiplos graus de liberdade, cuja solução corresponde às histórias temporais dos deslocamentos de pontos da estrutura submetida a carregamentos dinâmicos determinísticos, onde se conhece completamente a variação da força no tempo. Tais conceitos são então incluídos no programa desenvolvido *PAEST3D*, fazendo-se então possível a análise de pisos mistos (ou qualquer outro tipo de estrutura espacial) submetidos a carregamentos dinâmicos e a avaliação do conforto e da percepção humana quanto a níveis de vibrações segundo normas internacionais.

#### IV.2.3.1 Conceitos fundamentais

Seja o sistema com  $1$  grau de liberdade da Fig. IV-24, onde se distinguem as propriedades físicas essenciais de qualquer sistema estrutural, a saber, massa  $m$ , rigidez  $k$  e amortecimento  $c$  (mecanismo de dissipação de energia).



**Fig. IV-24 Sistema dinâmico básico [32].**

As equações de movimento de qualquer sistema estrutural podem ser obtidas segundo o princípio dos trabalhos virtuais, métodos variacionais de energia (Princípio de Hamilton) ou de maneira direta, por meio do Princípio de D'Alembert que, no caso do sistema com um grau de liberdade da Fig. IV-24, parece ser o de aplicação mais imediata.

Baseado na 2ª Lei de Newton no caso de a massa ser invariante com o tempo, o princípio de D'Alembert indica que a massa desenvolve forças de inércia proporcionais à aceleração, mas em sentido contrário a ela [32]:

$$p(t) - m\ddot{x}(t) = 0 \quad \text{Eq.(IV-97)}$$

As equações de movimento definidas segundo Eq.(IV-97) representam, na verdade, equações de equilíbrio dinâmico, uma vez que todas as forças que agem na

massa compõem  $p(t)$ . Assim, para o sistema dinâmico básico da Fig. IV-24, a Eq.(IV-97) conduz a:

$$f_I(t) + f_a(t) + f_e(t) = f(t) \quad \text{Eq.(IV-98)}$$

Uma vez que as forças de inércia resistem às acelerações na forma  $f_I(t) = m\ddot{x}(t)$  e assumindo um amortecimento viscoso, isto é, resistente à velocidade na forma  $f_a(t) = c\dot{x}(t)$ , a Eq.(IV-98) conduz à forma mais usual das equações de movimento de um sistema com um único grau de liberdade:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad \text{Eq.(IV-98a)}$$

Na análise do sistema dinâmico básico da Fig. IV-24 sob vibração livre, diversas variáveis e conceitos utilizados na avaliação do comportamento dinâmico de estruturas com múltiplos graus de liberdade são apresentados. Sendo assim, seja agora a forma homogênea da equação de movimento do sistema com 1 grau de liberdade:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad \text{Eq.(IV-99)}$$

cuja solução, isto é, a resposta em vibração livre do sistema da Fig. IV-24, pode ser expressa na seguinte forma [32], sendo  $G$  um número complexo:

$$x(t) = G \exp(st) \quad \text{Eq.(IV-100)}$$

Introduzindo a Eq.(IV-100) na Eq.(IV-99) e definindo a relação,

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{Eq.(IV-101)}$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular ou frequência circular do sistema não amortecido, obtém-se a Eq.(IV-102) [32]:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \quad \text{Eq.(IV-102)}$$

No caso de vibração livre não amortecida ( $c=0$ ), obtém-se  $s = \pm i\omega$ , e a resposta da estrutura pode ser dada por [32]:

$$x(t) = G_1 \exp(i\omega t) + G_2 \exp(-i\omega t) \quad \text{Eq.(IV-103)}$$

que, após desenvolvimentos matemáticos e impondo as condições de contorno iniciais pode ser reescrita segundo a Eq.(IV-103a),

$$x(t) = \rho \cos(\omega t + \theta) \quad \text{Eq.(IV-103a)}$$

onde  $\rho$  e  $\theta$  (ângulo de fase) são função de  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ . A resposta do sistema em vibração livre não amortecida é ilustrada na Fig. IV-25(a) [32].

No caso de vibrações livres amortecidas, a solução da Eq.(IV-102) é dada por [32]:

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad \text{Eq.(IV-104)}$$

Distinguem-se, pois, três situações, dependendo se o termo dentro da raiz é positivo, negativo ou nulo, sendo as duas últimas aqui discutidas. Quando o termo dentro da raiz se anula, diz-se que o coeficiente de amortecimento assume um valor crítico,  $c_c$ , dado por:

$$c_c = 2m\omega \quad \text{Eq.(IV-105)}$$

Neste caso, tem-se o sistema criticamente amortecido e nenhuma oscilação ocorre na resposta em vibração livre. Por sua vez, quando o termo dentro da raiz assume valores negativos ( $c < c_c$ ), caso mais usual nas estruturas, tem-se o sistema com amortecimento subcrítico e a Eq.(IV-104) assume a forma:

$$s = -\xi\omega \pm i\omega_d, \quad \text{Eq.(IV-106)}$$

$$\xi = c/c_c; \quad \omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

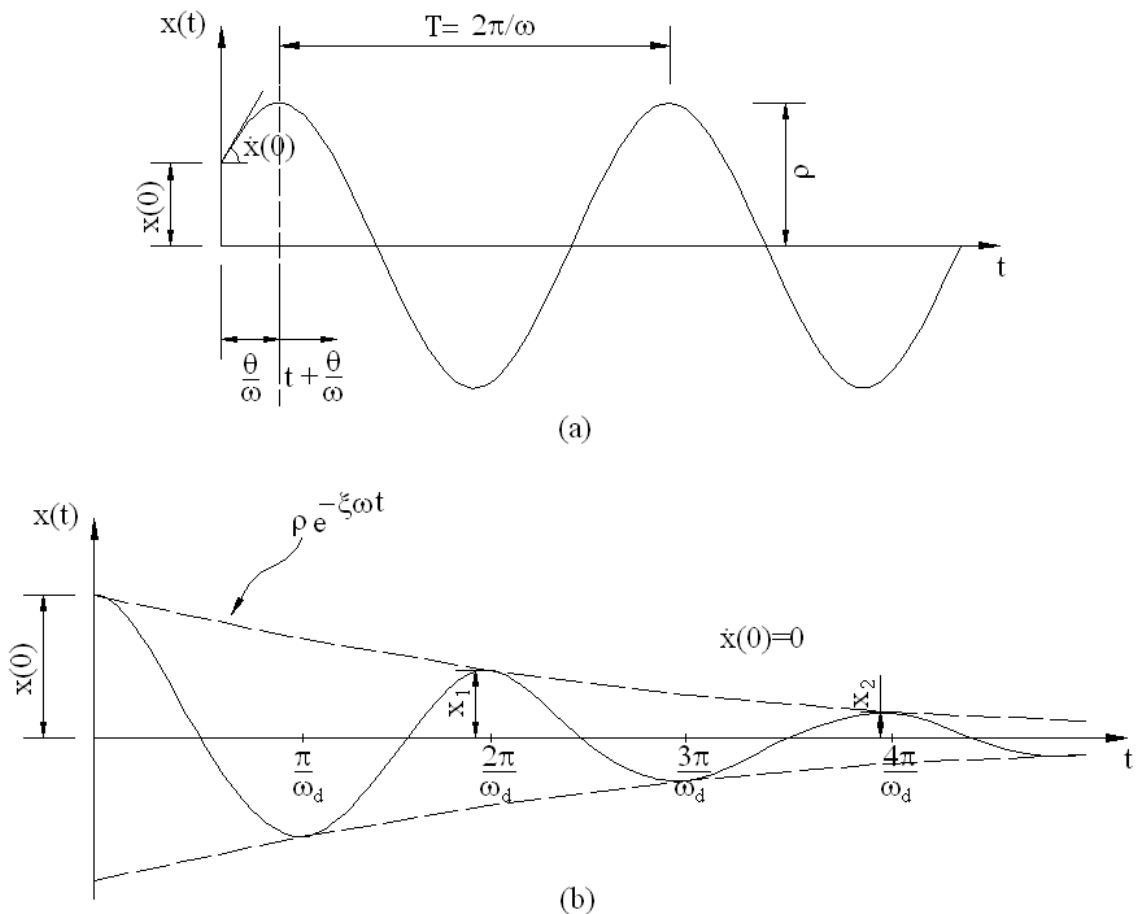
onde  $\xi$  é o fator ou taxa entre o amortecimento da estrutura e o amortecimento crítico, e  $\omega_d$  é a frequência circular do sistema dinâmico amortecido, aproximadamente igual  $\omega$  no caso de sistemas fracamente amortecidos. A resposta em vibração livre amortecida assume então a forma [32]:

$$x(t) = [G_1 \exp(i\omega_D t) + G_2 \exp(-i\omega_D t)] \exp(-\xi\omega t) \quad \text{Eq.(IV-107)}$$

que pode ser reescrita segundo a Eq.(IV-107a),

$$x(t) = \rho \cos(\omega_d t + \theta) \exp(-\xi\omega t) \quad \text{Eq.(IV-107a)}$$

onde  $\rho$  e  $\theta$  são constantes dependentes das condições de contorno iniciais. A representação gráfica da Eq.(IV-107a) é ilustrada na Fig. IV-25 (b).



**Fig. IV-25 Respostas do sistema dinâmico básico da Fig. IV-24 em vibração livre não amortecida (a) e com amortecimento subcrítico [32].**

Finalmente, vale salientar que a frequência de movimento de um sistema estrutural é comumente referida em termos da frequência cíclica  $f$ , definida por:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{Eq.(IV-108)}$$

#### IV.2.3.2 Sistema com múltiplos graus de liberdade

Como se viu para o sistema dinâmico básico com 1 grau de liberdade da Fig. IV-24, a equação de movimento nada mais é do que uma equação que exprime o equilíbrio das forças que agem na massa  $m$ . Para um sistema com múltiplos graus de liberdade, as equações do movimento do sistema representam  $N$  equações de equilíbrio de forças para cada um dos  $N$  graus de liberdade da estrutura discretizada.

Assim, aplicando-se a Eq.(IV-98) para cada um dos  $N$  graus de liberdade da estrutura, vem [32]:

$$\begin{aligned} f_{I_1}(t) + f_{a_1}(t) + f_{e_1}(t) &= f_1(t) \\ f_{I_2}(t) + f_{a_2}(t) + f_{e_2}(t) &= f_2(t) \\ &\vdots \\ f_{I_n}(t) + f_{a_n}(t) + f_{e_n}(t) &= f_n(t) \end{aligned} \quad \text{Eq.(IV-109)}$$

ou, numa forma matricial:

$$\{\mathbf{F}_I\} + \{\mathbf{F}_a\} + \{\mathbf{F}_e\} = \{\mathbf{R}\} \quad \text{Eq.(IV-109a)}$$

As forças de inércia, amortecimento e elástica para um grau de liberdade  $i$  podem ser dadas por:

$$f_{I_i}(t) = m_{i1}\ddot{D}_1 + m_{i2}\ddot{D}_2 + m_{i3}\ddot{D}_3 + \cdots + m_{in}\ddot{D}_N \quad \text{Eq.(IV-110a)}$$

$$f_{a_i}(t) = c_{i1}\dot{D}_1 + c_{i2}\dot{D}_2 + c_{i3}\dot{D}_3 + \cdots + c_{in}\dot{D}_N \quad \text{Eq.(IV-110b)}$$

$$f_{e_i}(t) = k_{i1}D_1 + k_{i2}D_2 + k_{i3}D_3 + \cdots + k_{in}D_N \quad \text{Eq.(IV-110c)}$$

onde, assim como os já definidos coeficientes de influência de rigidez  $k_{ij}$ , o coeficiente  $m_{ij}$  (que compõe a matriz de massa  $[\mathbf{M}]$ ) corresponde à força de inércia na direção  $i$  dada uma aceleração unitária na direção  $j$ , e o coeficiente  $C_{ij}$  (que compõe a matriz de amortecimento  $[\mathbf{C}]$ ) corresponde à força de amortecimento na direção  $i$  dada uma velocidade unitária na direção  $j$ . Sendo assim, tem-se:

$$\{\mathbf{F}_I\} = [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{D}}\} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{D}_1 \\ \ddot{D}_2 \\ \vdots \\ \ddot{D}_n \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-111a)}$$

$$\{\mathbf{F}_a\} = [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{D}}\} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{D}_1 \\ \dot{D}_2 \\ \vdots \\ \dot{D}_n \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-111b)}$$

$$\{\mathbf{F}_e\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-111c)}$$

Introduzindo as equações Eq.(IV-111a), Eq.(IV-111b) e Eq.(IV-111c) na Eq.(IV-109a), chega-se à forma matricial das equações de movimento para um sistema linear com  $N$  graus de liberdade [32]:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{D}}(t)\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{D}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}(t)\} = \{\mathbf{R}(t)\} \quad \text{Eq.(IV-112)}$$

Como no caso de 1 grau de liberdade, é de muita valia a análise do sistema sob vibração livre não amortecida, onde a Eq.(IV-112) assume a seguinte forma:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{Eq.(IV-113)}$$

cuja solução pode ser assumida harmônica e segundo a Eq.(IV-114) [32]:

$$\{\mathbf{D}\} = \{\boldsymbol{\phi}\} \text{sen}(\omega t + \theta) \quad \text{Eq.(IV-114)}$$

onde  $\{\boldsymbol{\phi}\}$  constitui um vetor de ordem  $N$  (forma modal de vibração) e  $\omega$  representa a frequência de vibração do vetor  $\{\boldsymbol{\phi}\}$ .

Substituindo a Eq.(IV-114) na Eq.(IV-113), chega-se ao problema de autovalores generalizado expresso na Eq.(IV-115), donde se obtêm  $N$  soluções  $(\omega_i^2, \{\boldsymbol{\phi}_i\})$ :

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{Eq.(IV-115)}$$

sendo os autores  $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$  ortogonais em relação à matriz de massa  $[\mathbf{M}]$  e rigidez  $[\mathbf{K}]$ , isto é:

$$\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T [\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\phi}_j\} = 0, \text{ se } i \neq j \quad \text{Eq.(IV-116a)}$$

$$\{\boldsymbol{\phi}_i\}^T [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\phi}_j\} = 0, \text{ se } i \neq j \quad \text{Eq.(IV-116b)}$$

### IV.2.3.3 Superposição modal

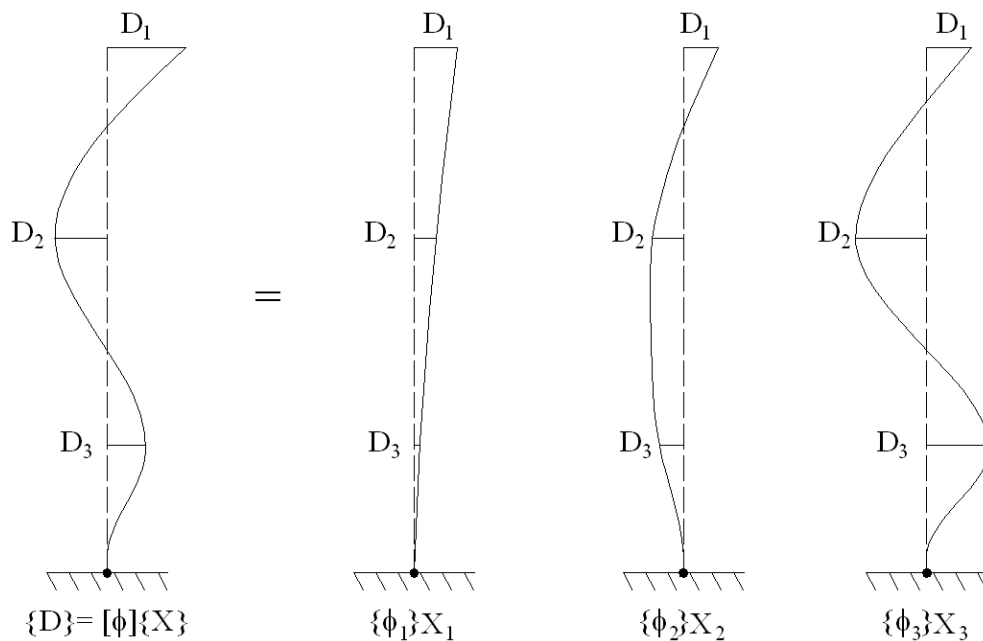
No método da superposição modal, ao invés de se avaliar a resposta dinâmica da estrutura por meio da resolução das  $N$  equações diferenciais de movimento acopladas expressas na Eq.(IV-112), busca-se, por meio de uma transformação de coordenadas, avaliar a resposta por meio da resolução de  $n \leq N$  equações diferenciais de movimento desacopladas, expressas em função de coordenadas normais ou generalizadas.

Para isto, as formas modais de vibração livre não amortecida  $\{\boldsymbol{\phi}_j\}$  obtidas do problema de autovalores generalizado, Eq.(IV-115), são utilizadas para aproximar a resposta da estrutura (Fig. IV-26). A contribuição do modo  $j$  para a resposta da estrutura seria dada pelo produto do autovetor  $\{\boldsymbol{\phi}_j\}$  pela sua amplitude modal  $X_j$ , também denominada coordenada normal ou generalizada da estrutura. A resposta total da estrutura seria obtida pela soma das contribuições de todos os  $N$  modos da estrutura discretizada:

$$\{\mathbf{D}\}_{Nx1} = X_1\{\boldsymbol{\phi}_1\} + X_2\{\boldsymbol{\phi}_2\} + \dots + X_N\{\boldsymbol{\phi}_N\} = \sum_{j=1}^N X_j \{\boldsymbol{\phi}_j\} \quad \text{Eq.(IV-117)}$$

$$\{\mathbf{D}\}_{Nx1} = [\boldsymbol{\Phi}]\{\mathbf{X}\} \quad \text{Eq.(IV-117a)}$$

onde a matriz  $[\boldsymbol{\Phi}]$  contém os  $N$  autovetores  $\{\boldsymbol{\phi}_j\}$  e o vetor  $\{\mathbf{X}\}$  contém as suas  $N$  amplitudes modais. Vale salientar que pode ser utilizado na análise um número menor do que os  $N$  modos da estrutura discretizada (caso mais comum), obtendo-se ainda assim uma resposta bastante precisa.



**Fig. IV-26 Deslocamentos obtidos em uma viga engastada e livre por meio do método da superposição modal [32].**

Observa-se, portanto, que a matriz  $[\boldsymbol{\Phi}]$  representa uma matriz de transformação das coordenadas generalizadas  $\{\mathbf{X}\}$  para as coordenadas geométricas  $\{\mathbf{D}\}$ .

Introduzindo agora a Eq.(IV-117a) na equação de movimento de um sistema com múltiplos graus de liberdade definida pela Eq.(IV-112), e tomando-se  $\{\ddot{\mathbf{D}}\} = [\boldsymbol{\Phi}]\{\ddot{\mathbf{X}}\}$  e  $\{\dot{\mathbf{D}}\} = [\boldsymbol{\Phi}]\{\dot{\mathbf{X}}\}$ , vem:

$$[\mathbf{M}][\boldsymbol{\Phi}]\{\ddot{\mathbf{X}}\} + [\mathbf{C}][\boldsymbol{\Phi}]\{\dot{\mathbf{X}}\} + [\mathbf{K}][\boldsymbol{\Phi}]\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{R}\} \quad \text{Eq.(IV-118)}$$



Multiplicando a Eq.(IV-118) pelo transposto do autovetor  $\{\Phi_j\}$ , lembrando da propriedade de ortogonalidade dos autovetores com relação à matriz de massa e rigidez, e assumindo a mesma propriedade para a matriz de amortecimento<sup>1</sup>, vem:

$$\{\Phi_j\}^T [\mathbf{M}][\Phi]\{\ddot{\mathbf{X}}\} + \{\Phi_j\}^T [\mathbf{C}][\Phi]\{\dot{\mathbf{X}}\} + \{\Phi_j\}^T [\mathbf{K}][\Phi]\{\mathbf{X}\} = \{\Phi_j\}^T \{\mathbf{R}\} \quad \text{Eq.(IV-118a)}$$

$$\{\Phi_j\}^T [\mathbf{M}]\{\Phi_j\}\ddot{X}_j(t) + \{\Phi_j\}^T [\mathbf{C}]\{\Phi_j\}\dot{X}_j(t) + \{\Phi_j\}^T [\mathbf{K}]\{\Phi_j\}X_j(t) = \{\Phi_j\}^T \{\mathbf{R}\} \quad \text{Eq.(IV-118b)}$$

Introduzindo agora os conceitos de massa, amortecimento, rigidez, força e frequência modais ou generalizadas,  $m_j, c_j, k_j, f_j$  e  $\omega_j$ ,

$$m_j = \{\Phi_j\}^T [\mathbf{M}]\{\Phi_j\} \quad \text{Eq.(IV-119a)}$$

$$c_j = \{\Phi_j\}^T [\mathbf{C}]\{\Phi_j\} \quad \text{Eq.(IV-119b)}$$

$$k_j = \{\Phi_j\}^T [\mathbf{K}]\{\Phi_j\} \quad \text{Eq.(IV-119c)}$$

$$f_j = \{\Phi_j\}^T \{\mathbf{R}\} \quad \text{Eq.(IV-119d)}$$

$$\omega_j^2 = \frac{k_j}{m_j} \quad \text{Eq.(IV-119e)}$$

a Eq.(IV-118b) assume a forma geral da equação de movimento para um grau de liberdade generalizado  $j$ :

$$m_j \ddot{X}_j(t) + c_j \dot{X}_j(t) + k_j X_j(t) = f_j(t) \quad \text{Eq.(IV-120)}$$

A comparação entre as equações Eq.(IV-98a) e Eq.(IV-120) comprova que a principal virtude do método é a transformação das  $N$  equações diferenciais acopladas

---

1. Esta hipótese é válida desde que se assuma que a matriz de amortecimento seja proporcional à matriz de rigidez e/ou de massa, o que não acontecerá no caso de estruturas em que o acontecimento não é distribuído uniformemente ao longo da mesma, como em certas tipologias específicas de estruturas constituídas por dois materiais distintos.

representativas do sistema discretizado com  $N$  graus de liberdade em  $n \leq N$  equações diferenciais modais desacopladas representativas de  $n \leq N$  sistemas dinâmicos básicos com 1 grau de liberdade. Sendo assim, analogamente ao sistema básico com 1 grau de liberdade, o coeficiente de amortecimento modal  $c_j$  pode ser expresso em função da taxa de amortecimento modal  $\xi_j$  obtida via métodos experimentais:

$$C_j = \xi_j C_c = 2\xi_j \omega_j m_j \quad \text{Eq.(IV-121)}$$

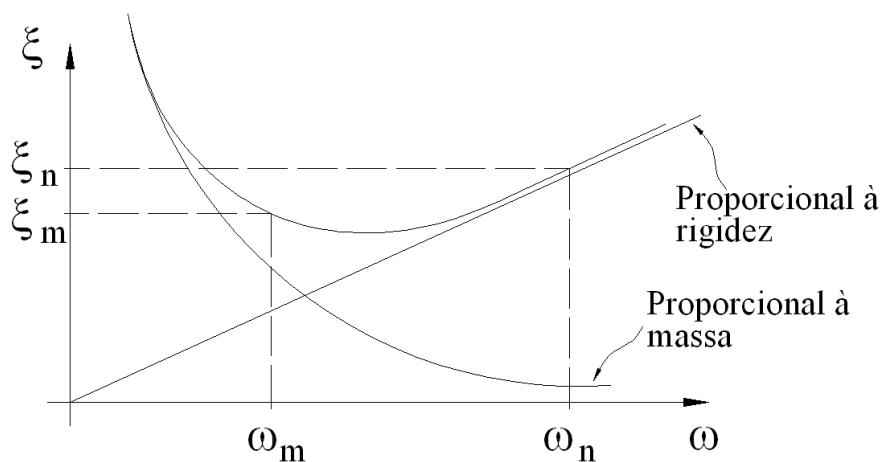
Vale salientar que, em geral, o coeficiente de amortecimento  $c_j$  é tomado como proporcional à massa e rigidez segundo a Eq.(IV-122):

$$C_j = a_0 m_j + a_1 k_j \quad \text{Eq.(IV-122)}$$

Dividindo-se a Eq.(IV-122) pelo amortecimento crítico, chega-se à Eq.(IV-123), cuja representação gráfica é ilustrada na Fig. IV-27 [32]:

$$\xi_j = \frac{a_0}{2\omega_j} + \frac{a_1 \omega_j}{2} \quad \text{Eq.(IV-123)}$$

Conhecendo-se as taxas de amortecimento e frequência circulares de dois modos, pode-se com o auxílio da Eq.(IV-123) determinar as constantes  $a_0$  e  $a_1$  e, portanto, as taxas de amortecimento de outros modos envolvidos na análise.



**Fig. IV-27** Relação entre amortecimento e frequência (amortecimento de Rayleigh) [32].

#### IV.2.3.4 Matrizes de massa

Dentre todas as matrizes necessárias à realização da análise dinâmica de estruturas espaciais constituídas por elementos de pórtico espacial e casca, a única ainda não definida é a matriz de massa, haja vista que a matriz de rigidez para estes dois tipos de elemento já foi apresentada e a matriz de amortecimento é normalmente tomada proporcional às matrizes de rigidez e massa.

Uma das formas mais simples de representar a matriz de massa é segundo uma forma discreta (*lumped-mass matrix*), onde somente os graus de liberdade translacionais são considerados, assumindo-se que a massa é concentrada em cada um dos nós da estrutura discretizada, sendo, pois, a matriz de massa diagonal. Outra forma (utilizada no presente trabalho) de representar a matriz de massa é segundo sua forma consistente (*consistent-mass matrix*), considerando-se graus de liberdade translacionais e rotacionais, sendo obtida por meio das mesmas funções de interpolação utilizadas na obtenção da matriz de rigidez do elemento, provindo daí o nome consistente. Sendo assim, a matriz de massa consistente para o elemento de pórtico espacial pode ser expressa pela Eq.(IV-124) [33], onde  $\rho$  é a massa específica do elemento, estando as demais variáveis já identificadas. A matriz de massa global para o elemento de pórtico espacial pode então ser dada pela mesma transformação expressa pela Eq.(IV-21) para obtenção da matriz de rigidez global.

Por sua vez, a matriz de massa consistente para o elemento de casca tridimensional da Fig. IV-19 pode ser dada pela Eq.(IV-125), onde a matriz  $[\mathbf{H}]$  é a matriz que contém as funções de interpolação para o elemento de casca, definida na Eq.(IV-63), e  $\det[\mathbf{J}]$  é o determinante do jacobiano transformação de coordenadas, definido na Eq.(IV-64a). Observe aqui que, assim como para a matriz de rigidez do elemento de casca, a matriz  $[\mathbf{M}_{casca}]$  é definida segundo cinco graus de liberdade por nó no SCLN (sistema de coordenadas local nodal). A fim de compatibilizar os elementos de casca e pórtico espacial, esta matriz também deve ser expandida a fim de contemplar mais um grau de liberdade por nó (rotação fictícia em torno do eixo definido pelo vetor  $v_3$  - Fig. IV-23) segundo os mesmos procedimentos descritos no item IV.2.2.7.6 para a matriz de rigidez. A obtenção da matriz de massa no referencial global também segue a mesma transformação descrita pela Eq.(IV-96a).

$$[\mathbf{M}_{port}] = \rho A l \begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5Al^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{11l}{210} + \frac{I_z}{10Al} & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I_z}{5Al^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13l}{420} + \frac{I_z}{10Al} \\
\frac{13}{35} + \frac{6I_y}{5Al^2} & 0 & -\frac{11l}{210} - \frac{I_y}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I_y}{5Al^2} & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_y}{10Al} & 0 & 0 \\
\frac{J}{3A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J}{6A} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{l^2}{105} + \frac{2I_y}{15A} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13l}{420} + \frac{I_y}{10Al} & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_y}{30A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{l^2}{105} + \frac{2I_z}{15A} & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_z}{30A} & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5Al^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11l}{210} - \frac{I_z}{10Al} & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I_z}{5Al^2} & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 \\
\frac{13}{35} + \frac{6I_y}{5Al^2} & 0 & -\frac{11l}{210} - \frac{I_y}{10Al} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} - \frac{6I_y}{5Al^2} & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_y}{10Al} & 0 & 0 \\
\frac{J}{3A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J}{6A} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{l^2}{105} + \frac{2I_y}{15A} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13l}{420} + \frac{I_y}{10Al} & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_y}{30A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{l^2}{105} + \frac{2I_z}{15A} & 0 & \frac{13l}{420} - \frac{I_z}{10Al} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{140} - \frac{I_z}{30A} & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

*Simétrica*

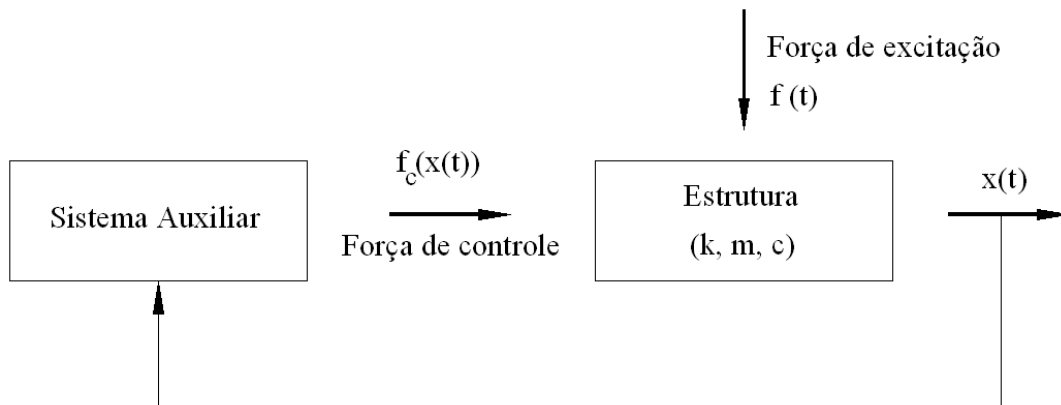
Eq.(IV-124)

$$[\mathbf{M}_{casca}] = \int_v [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] \rho dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] \rho \det [\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta \quad \text{Eq.(IV-125)}$$

#### IV.2.3.5 Controle passivo de vibrações

Sistemas de controle dinâmico ativos, passivos ou híbridos têm sido propostos em geral com o intuito de garantir a segurança e/ou conforto em estruturas pré-existentes sujeitas a problemas de vibrações excessivas. Entende-se aqui, entretanto, que a aplicação de sistemas de controle deve ser feita não apenas como uma ação corretiva, mas também deve ser feita ainda na fase de projeto de novas estruturas para as quais, devido a suas características dinâmicas, seja de fraco amortecimento, seja de proximidade com as futuras frequências das cargas de excitação, existe a probabilidade da ocorrência de problemas de vibração excessiva ao longo de sua vida útil.

Diversas formas de atenuação de vibrações têm sido propostas na literatura, desde o enrijecimento estrutural (aumento de rigidez sem aumentar demasiadamente a massa) e aumento do amortecimento até sistemas de controle ativo. Entretanto, uma das mais eficientes formas de controle de vibrações é a aplicação de sistemas de controle passivo (SCP) de ciclo fechado (Fig. IV-28), onde a magnitude da força de controle  $f_c(t)$  depende diretamente das amplitudes de resposta  $x(t)$  da estrutura [34].



**Fig. IV-28 Controle passivo de ciclo fechado [34].**

Neste tipo de sistema, as características do sistema auxiliar (massa, rigidez e amortecimento) são determinadas em função das propriedades dinâmicas da estrutura, sendo de suma importância, pois, a correta identificação estrutural e calibração do dispositivo de controle. Atenuadores dinâmicos sintonizados em frequência ADS (*tuned mass dampers*) têm sido largamente utilizados como sistemas de controle

passivos para a atenuação de vibrações em estádios, pontes e edifícios altos como o *City Corp Center* nos Estados Unidos (EUA), havendo inúmeras publicações na literatura. Battista [34], [35], [36] tem desenvolvido inúmeras pesquisas em torno da análise dinâmica endereçada a diversos ramos da Engenharia, aplicando a teoria de controle de vibrações em diversas estruturas submetidas aos mais variados tipos de carregamentos dinâmicos (vento, sismos, caminhar humano etc.), destacando-se a concepção de atenuadores de massa como medidas corretivas em lajes de edifícios, o que vem ao encontro do tema desta dissertação (Fig. IV-29).



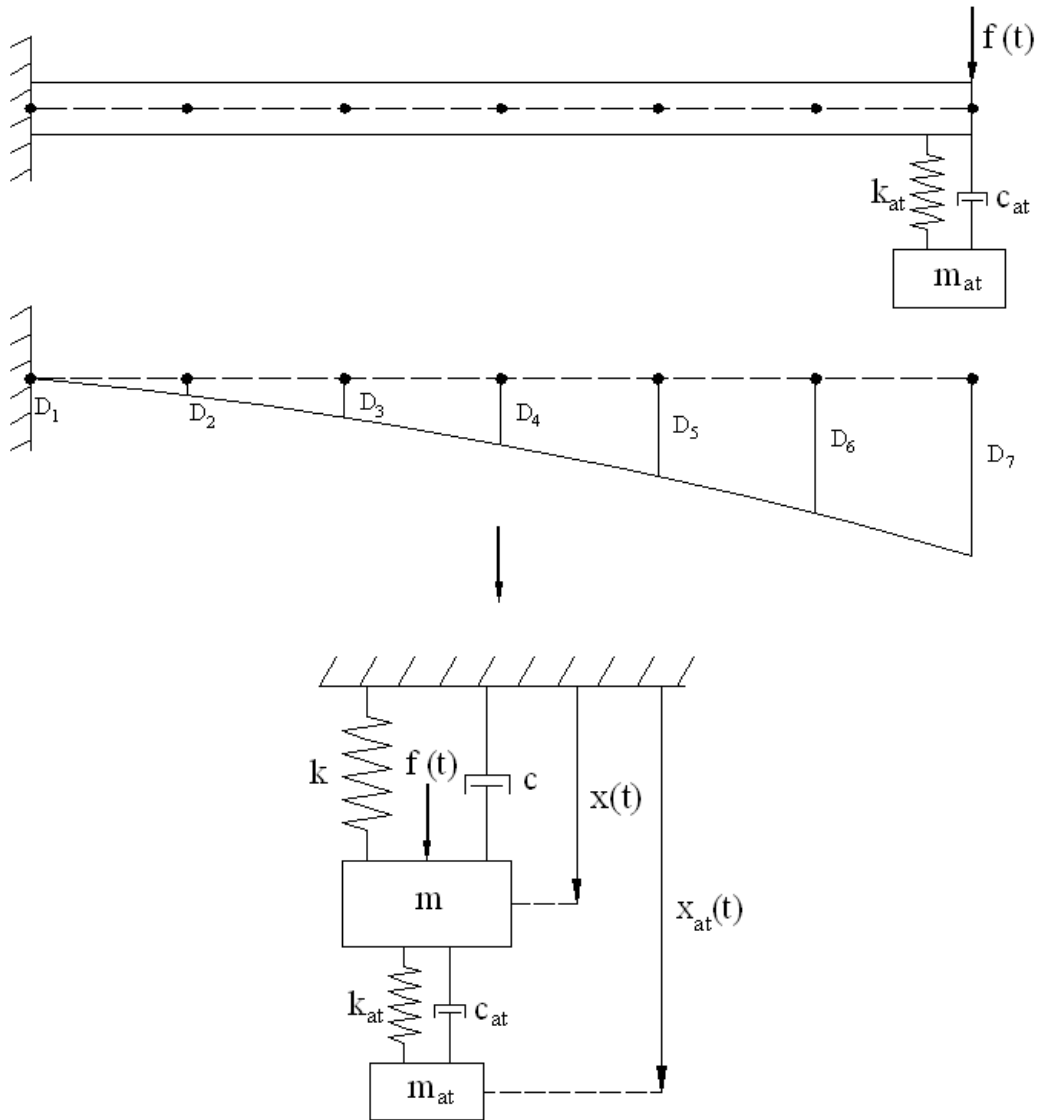
(a)



(b)

**Fig. IV-29** Atenuadores de massa sincronizados para redução de vibrações em uma laje de edifício (a) e em uma laje de um protótipo experimental (b) [37].

As equações diferenciais de movimento para uma estrutura com um sistema de controle passivo do tipo massa-mola-amortecedor podem ser escritas observando-se o sistema dinâmico com dois graus de liberdade da Fig. IV-30, a saber, o grau de liberdade do atenuador e outro da estrutura, isto é, um grau de liberdade generalizado ou modal qualquer:



**Fig. IV-30 Sistema dinâmico com 2 graus de liberdade representando uma viga engastada e livre com atenuador de massa [34].**

Assim, para uma estrutura com um atenuador sintonizado num modo qualquer, tem-se [38]:

$$m\ddot{X}(t) + c\dot{X}(t) - c_{at}(\dot{x}_{at}(t) - \dot{X}(t)) + kX(t) - k_{at}(x_{at}(t) - X(t)) = f(t) \quad \text{Eq.(IV-126)}$$

$$m_{at}\ddot{x}_{at}(t) + c_{at}(\dot{x}_{at}(t) - \dot{X}(t)) + k_{at}(x_{at}(t) - X(t)) = 0 \quad \text{Eq.(IV-127)}$$

ou numa forma matricial, para dois graus de liberdade:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{X}}(t)\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{X}}(t)\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{X}(t)\} = \{\mathbf{F}_{ext}(t)\}, \quad \text{Eq.(IV-128)}$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_{at} \end{bmatrix}; [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c + c_{at} & -c_{at} \\ -c_{at} & c_{at} \end{bmatrix}; [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k + k_{at} & -k_{at} \\ -k_{at} & k_{at} \end{bmatrix}; \quad \text{Eq.(IV-129)}$$

$$\{\mathbf{X}\} = \begin{Bmatrix} X \\ x_{at} \end{Bmatrix}; \{\mathbf{F}_{ext}\} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde  $m_{at}$ ,  $c_{at}$  e  $k_{at}$  são, respectivamente, a massa, o amortecimento e a rigidez do atenuador. Portanto, como se pode ver, a matriz de amortecimento  $[\mathbf{C}]$  do sistema não é proporcional à matriz de rigidez e massa.

Entretanto, as equações Eq.(IV-126) a Eq.(IV-129) são válidas para um atenuador acoplado ao ventre da forma modal. Caso contrário, devem-se corrigir as expressões acima por meio da coordenada do autovetor referente ao grau de liberdade onde está posicionado o atenuador,  $\phi^{i=at}$ . Assim, as equações de movimento se tornam [38]:

$$m\ddot{X}(t) + c\dot{X}(t) - \phi^{i=at}c_{at}(\dot{x}_{at}(t) - \phi^{i=at}\dot{X}(t)) + kX(t) - \phi^{i=at}k_{at}(x_{at}(t) - \phi^{i=at}X(t)) = f(t) \quad \text{Eq.(IV-126a)}$$

$$m_{at}\ddot{x}_{at}(t) + c_{at}(\dot{x}_{at}(t) - \phi^{i=at}\dot{X}(t)) + k_{at}(x_{at}(t) - \phi^{i=at}X(t)) = 0 \quad \text{Eq.(IV-127a)}$$

continuando válida a Eq.(IV-128), mas necessitando a Eq.(IV-129) ser reescrita [38]:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_{at} \end{bmatrix}; [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c + (\phi^{i=at})^2c_{at} & -\phi^{i=at}c_{at} \\ -\phi^{i=at}c_{at} & c_{at} \end{bmatrix}; \quad \text{Eq.(IV-129a)}$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k + (\phi^{i=at})^2k_{at} & -\phi^{i=at}k_{at} \\ -\phi^{i=at}k_{at} & k_{at} \end{bmatrix}; \{\mathbf{X}\} = \begin{Bmatrix} X \\ x_{at} \end{Bmatrix}; \{\mathbf{F}_{ext}\} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Generalizando para  $n_{at} \geq l$  atenuadores dispostos fora do ventre do modo:

$$m\ddot{X}(t) + c\dot{X}(t) - \sum_{i=1}^{n_{at}} [\phi^i c_{at}^i (\dot{x}_{at}^i(t) - \phi^i \dot{X}(t))] + kX(t) - \sum_{i=1}^{n_{at}} [\phi^i k_{at}^i (x_{at}^i(t) - \phi^i X(t))] = f(t) \quad \text{Eq.(IV-126b)}$$

$$m_{at}^i \ddot{x}_{at}^i(t) + c_{at}^i (\dot{x}_{at}^i(t) - \phi^i \dot{X}(t)) + k_{at}^i (x_{at}^i(t) - \phi^i X(t)) = 0 \quad \text{Eq.(IV-127b)}$$

continuando válida a Eq.(IV-128), mas necessitando a Eq.(IV-129) ser reescrita:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & m_{at}^{i=1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & m_{at}^{i=2} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & & \vdots \\ & & & & & m_{at}^{i=n_{at}} \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c + \sum_{i=1}^{n_{at}} (\phi^i)^2 c_{at}^i & -\phi^{i=1} c_{at}^{i=1} & -\phi^{i=2} c_{at}^{i=2} & 0 & \dots & -\phi^{i=n_{at}} c_{at}^{i=n_{at}} \\ & c_{at}^{i=1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & c_{at}^{i=2} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & & \vdots \\ & & & & & c_{at}^{i=n_{at}} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.(IV-129b)}$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k + \sum_{i=1}^{n_{at}} (\phi^i)^2 k_{at}^i & -\phi^{i=1} k_{at}^{i=1} & -\phi^{i=2} k_{at}^{i=2} & 0 & \dots & -\phi^{i=n_{at}} k_{at}^{i=n_{at}} \\ & k_{at}^{i=1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & k_{at}^{i=2} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & & \vdots \\ & & & & & k_{at}^{i=n_{at}} \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{X}\} = \begin{Bmatrix} X \\ x_{at}^{i=1} \\ x_{at}^{i=2} \\ \vdots \\ x_{at}^{i=n_{at}} \end{Bmatrix}; \{\mathbf{F}_{ext}\} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vale salientar que, em geral, outros modos ( $n$ ) estão envolvidos na análise. Sendo assim, as equações modais para um modo  $j$  e para um atenuador  $i$ , tomam a seguinte forma:

$$m_j \ddot{X}_j(t) + c_j \dot{X}_j(t) - \sum_{i=1}^{nat} \left[ \phi_j^i c_{at}^i \left( \dot{x}_{at}^i(t) - \sum_{k=1}^n \phi_k^i \dot{X}_k(t) \right) \right] + k_j X_j(t) - \sum_{i=1}^{nat} \left[ \phi_j^i k_{at}^i \left( x_{at}^i(t) - \sum_{k=1}^n \phi_k^i X_k(t) \right) \right] = f_j(t) \quad \text{Eq.(IV-126c)}$$

$$m_{at}^i \ddot{x}_{at}^i(t) + c_{at}^i \left( \dot{x}_{at}^i(t) - \sum_{k=1}^n \phi_k^i \dot{X}_k(t) \right) + k_{at}^i \left( x_{at}^i(t) - \sum_{k=1}^n \phi_k^i X_k(t) \right) = 0 \quad \text{Eq.(IV-127c)}$$

Hartog [39] indica algumas expressões para o projeto de atenuadores do tipo massa-mola-amortecedor (ADS) de forma a otimizar o desempenho destes dispositivos. Apesar de estas expressões serem referentes a casos em que o amortecimento estrutural é nulo ( $c_j = 0$ ), elas continuam úteis para balizar o projeto de atenuadores em estruturas com  $c_j \neq 0$ . Sendo  $f_{est}$  a frequência da estrutura, a frequência e taxa de amortecimento ótimas do atenuador,  $f_{ot}$  e  $\xi_{ot}$ , respectivamente, podem ser dadas por:

$$f_{ot} = \frac{1}{1 + \mu} f_{est} \quad \text{Eq.(IV-130)}$$

$$\xi_{ot} = \sqrt{\frac{(3\mu)}{(8(1 + \mu)^3)}} \quad \text{Eq.(IV-131)}$$

$$\mu = \frac{m_{at}}{m_j} \quad \text{Eq.(IV-132)}$$

Vale salientar que a efetividade do atenuador é basicamente dependente da calibração em frequência e da relação entre as massas  $\mu$ , podendo ser indicados os seguintes valores práticos [34]:

$$0,5\% \leq \mu \leq 7\% ; \quad 0,9 < \frac{\omega_{at}}{\omega_j} < 1,0 \quad \text{Eq.(IV-133)}$$

Magluta [38] apresenta um valioso estudo paramétrico sobre o assunto, indicando relações de massa e frequência efetivas para atenuadores de vibração em sistemas com amortecimento diferente de zero.

#### IV.2.4 Implementação computacional

O programa computacional *PAEST3D* foi elaborado em linguagem Fortran, utilizando como base o código fonte do programa em Elementos Finitos para elasticidade plana desenvolvido por Ribeiro [40]. A escolha deste código fonte base se deu devido ao fato de que neste programa é feita uma alocação de memória, sendo definidas previamente as posições dos vetores na memória do computador, otimizando-a e reduzindo, pois, o tempo de análise – para isto são utilizados “apontadores”  $i_1, i_2, \dots$  (Fig. IV-31).

$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$	$i_6$	$i_7$	$i_8$	$i_9$	$i_{10}$	$i_{11}$	
e	ie	ix	id	x	f	u	jdiag	a <sub>m</sub>	xl	ul	
$i_{11}$	$i_{12}$	$i_{13}$	$i_{14}$	$i_{15}$	$i_{16}$	$i_{17}$	$i_{18}$	$i_{19}$	$i_{20}$	$i_{21}$	$i_{22}$
fl	sl	ld	a <sub>mm</sub>	ml	R	Eigv	tt	w	a <sub>r</sub>	b <sub>r</sub>	
$i_{22}$	$i_{23}$	$i_{24}$	$i_{25}$	$i_{26}$	$i_{27}$	$i_{28}$	$i_{29}$	$i_{30}$	$i_{31}$	$i_{32}$	$i_{33}$
vec	d	rtolv	bup	blo	bupc	autv	autvm	masc	ksi	Hist	
$i_{33}$	$i_{34}$	$i_{35}$	$i_{36}$	$i_{37}$	$i_{38}$	$i_{39}$	$i_{40}$				
smodal	mmodal	cmodal	fmodal	propat	propev	posev					

$$i_1 = 1 + 10 * \text{numat}, i_2 = (i_1 + \text{numtel} * 15 - 1) * 2 + 1$$

**Fig. IV-31 Alocação de memória; apontadores para identificação da posição do primeiro termo de um vetor de números reais ( $i_1$ ) e de números inteiros ( $i_2$ ).**

Como afirmado anteriormente, este programa é capaz de realizar a análise linear estática e dinâmica com possibilidade de redução e controle de vibrações de estruturas espaciais constituídas por elementos de pórtico espacial com ou sem conexões (item IV.2.1) e elementos de casca quadrilaterais (elemento sólido degenerado MITC4,

apresentado no item IV.2.2.7). Estão disponíveis quatro módulos, identificados pela variável *itipan*, que define o tipo de análise:

- Análise estática linear (*itipan* = 1);
- Análise de vibrações livres – determinação das frequências naturais e formas modais de vibração (*itipan* = 2);
- Análise de vibrações forçadas – método da superposição modal (*itipan* = 3);
- Análise de vibrações forçadas com redução e controle de vibrações (*itipan* = 4).

No módulo 4, a redução e o controle de vibrações são feitos por meio do uso de atenuadores dinâmicos sintonizados (ou sincronizados) em frequência, acoplando novos graus de liberdade ao conjunto de equações diferenciais modais da estrutura segundo as equações Eq.(IV-126c) e Eq.(IV-127c), produzindo então um sistema com amortecimento não proporcional como descrito no item IV.2.3.5. Nos itens a seguir, procura-se sucintamente descrever as principais sub-rotinas que compõem o programa, sendo o fluxograma do mesmo ilustrado esquematicamente na Fig. IV-32:

- **Sub-rotina *contr*** – Esta é a sub-rotina de controle, na qual as demais estão inseridas e organizadas. Inicialmente são identificados os arquivos de entrada e saída de dados assim como o número de nós (*nnode*), de elementos (*numel*), de tipos de materiais (*numat*), número de graus de liberdade por nó (*ndf*) e módulo de análise (*itipan*). Se o módulo escolhido for diferente de 1 (*itipan* ≠ 1), define-se o número de modos (*nroot1*) a ser utilizado na aproximação da resposta via método da superposição modal e o número de nós com massas concentradas (*nnm*) para análise de vibrações livres. Se o módulo for o 3º ou o 4º, define-se também se existem forças variáveis no tempo e cargas móveis (caminhar humano ou veículos). Finalmente, se o módulo escolhido é o 4º, define-se também o número de atenuadores de vibração ADS (*n<sub>at</sub>*);
- **Sub-rotina *rdata*** – Comum a todos os módulos, sendo responsável pela leitura e armazenamento dos dados mais gerais do problema nos seguintes vetores/matrizes: propriedade dos materiais {**e**}, propriedades dos diversos tipos de elementos {**ie**}, conectividades dos elementos {**ix**}, graus de liberdade restringidos {**id**}, coordenadas nodais {**x**}, forças nodais e deslocamentos prescritos {**f**};

- **Sub-rotina numeq** – Comum a todos os módulos, sendo responsável pela identificação, para cada grau de liberdade não restringido da estrutura, do número da equação correspondente no sistema de equações da estrutura;
- **Sub-rotina profil** – Comum a todos os módulos, sendo responsável pela montagem do vetor  $\{\mathbf{jdiag}\}$  onde são computadas as alturas de coluna para armazenamento das matrizes de rigidez e massa na forma *skyline*, sendo armazenado o menor número possível de zeros e diminuindo-se, assim, a largura de banda destas matrizes;
- **Sub-rotina pload** – Comum a todos os módulos, sendo responsável pela montagem do vetor de forças nodais global da estrutura  $\{\mathbf{u}\}$ ;
- **Sub-rotina pform** – Comum a todos os módulos, sendo responsável por computar as forças devidas aos deslocamentos prescritos  $\{\mathbf{fl}\}$ , pela construção das matrizes de rigidez  $\{\mathbf{sl}\}$  e massa  $\{\mathbf{ml}\}$  dos elementos no referencial local e das matrizes de rigidez  $\{\mathbf{am}\}$  e massa  $\{\mathbf{amm}\}$  da estrutura no referencial global. A montagem da matriz de massa só ocorre se o módulo escolhido for diferente de 1;
- **Sub-rotina actcol** – Presente apenas no módulo 1, sendo responsável pela redução do sistema de equações lineares algébricas, utilizando a eliminação de Gauss com decomposição  $L^tDL$ . Os resultados do problema (deslocamentos) são armazenados no próprio vetor  $\{\mathbf{u}\}$ ;
- **Sub-rotina rdatam** – Presente nos módulos 2 a 4, é responsável pela leitura e armazenamento dos nós com massas concentradas  $\{\mathbf{masc}\}$  e, especificamente para os módulos 3 e 4, pela leitura e armazenamento das variáveis necessárias à análise de vibrações forçadas: taxas de amortecimento modais  $\{\mathbf{ksi}\}$ , tempo máximo de análise, intervalo de tempo para integração numérica e histórias temporais das forças  $\{\mathbf{Hist}\}$ ;
- **Sub-rotina admassa** – Presente nos módulos 2 a 4, é responsável pela adição de massas concentradas na matriz de massa global da estrutura;
- **Sub-rotina sspace** – Presente nos módulos 2 a 4, é responsável pelo cálculo dos autovalores  $\{\mathbf{Eigv}\}$  (frequências naturais) e autovetores  $\{\mathbf{autvm}\}$  (formas modais de vibração), pelo método do subespaço [29];

- **Sub-rotinas `rdatacv` e `rdatacv_pos`** – Presente nos módulos 3 e 4, é responsável pela leitura e armazenamento dos dados referentes a cargas móveis, quando existirem, `{propecv}` e `{poscv}`, respectivamente. No caso do caminhar humano, são lidos dados referentes à velocidade do caminhar, frequência do caminhar e peso do indivíduo; no caso de veículos, velocidade inicial, aceleração e peso por eixo do veículo – com estes dados é possível traçar a trajetória do indivíduo ou do veículo ao longo da estrutura discretizada e ao longo do tempo de análise (história temporal e da posição das forças com relação aos nós da estrutura);
- **Sub-rotina `rdatared`** – Presente apenas no módulo 4, é responsável pela leitura e armazenamento dos dados referentes aos atenuadores dinâmicos de vibração `{propat}`: massa, amortecimento e rigidez do atenuador, assim como o grau de liberdade em que ele atua;
- **Sub-rotina `matriz modal`** – Presente nos módulos 3 e 4, é responsável pelo cálculo e armazenamento da massa, amortecimento, rigidez e força modal para cada modo de vibração incluído na análise, `{mmodal}`, `{cmodal}`, `{smodal}`, `{fmodal}`, respectivamente;
- **Sub-rotina `runge kutta`** – Presente nos módulos 3 e 4, é responsável pela resolução do sistema de equações diferenciais modais da estrutura (podendo ou não estar incluídos graus de liberdade generalizados dos atenuadores, como no caso do módulo 4). Para isto é utilizado o integrador numérico de 4ª ordem Runge Kutta. Nesta sub-rotina, são também impressos os deslocamentos, as velocidades e acelerações ao longo do tempo;
- **Sub-rotina `wdata`** – Presente no módulo 1, é responsável pela impressão dos deslocamentos nodais resultantes da análise estática linear. Para visualização destes resultados, é utilizado o pós-processador *View 3D* desenvolvido por Ribeiro [40];
- **Sub-rotina `wdatav`** – Presente nos módulos 2 a 4, é responsável pela impressão das formas modais. Também para visualização destes resultados, é utilizado o pós-processador *View 3D* desenvolvido por Ribeiro [40].

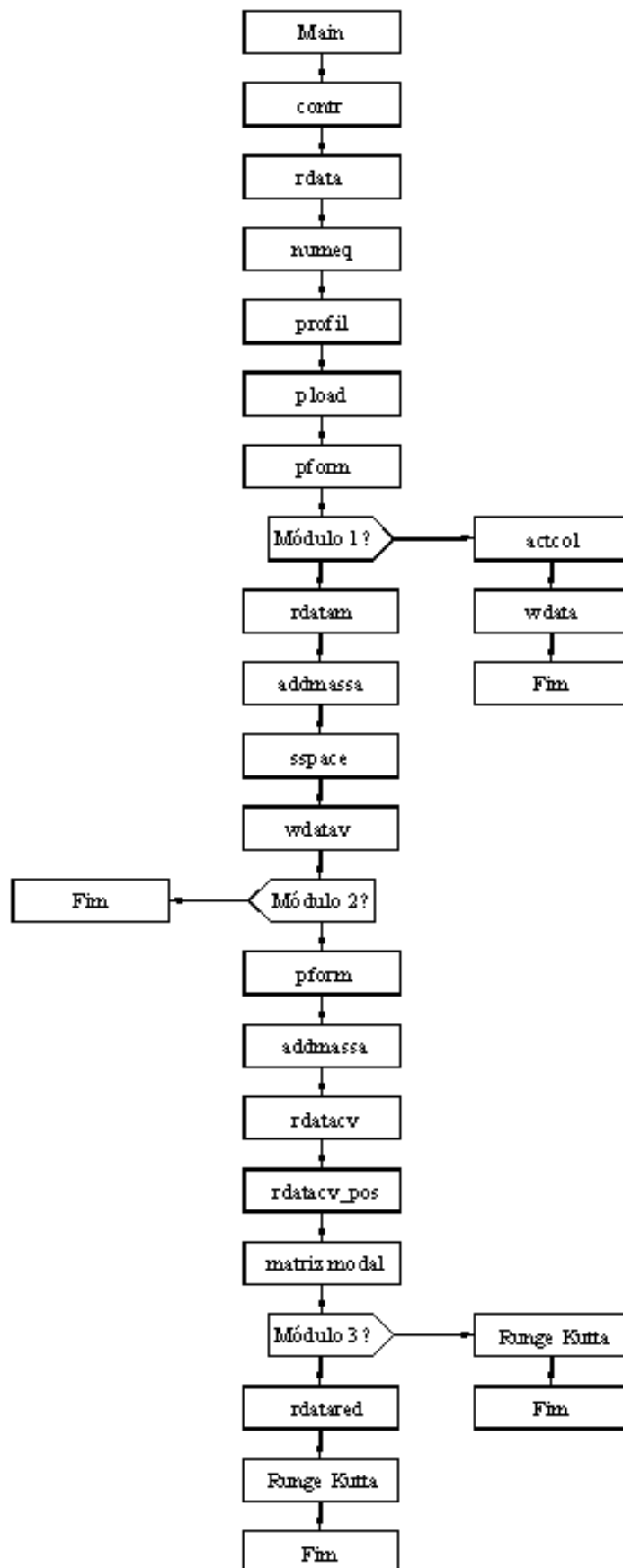


Fig. IV-32 Fluxograma do programa *PAEST3D*.

# **Capítulo V: Análise Teórico-Experimental de um Piso Misto Semicontínuo**

---

Neste capítulo, descrevem-se os resultados obtidos da análise teórico-experimental do sistema estrutural de um piso misto semicontínuo composto por ligações semi-rígidas mistas viga-viga com cantoneiras de assento e alma e barras de aço na laje de concreto com forma de aço incorporada, segundo a tipologia ilustrada na Fig. I-2a. A campanha experimental foi realizada no Laboratório de Estruturas da COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Como visto nas análises relatadas no capítulo III, o comportamento desta tipologia de ligação mista é bastante influenciado pelo processo de fissuração na laje de concreto, haja vista a ligação metálica propriamente dita (cantoneiras de assento e alma) possuir pouca rigidez rotacional. Cabe então a seguinte pergunta: até que ponto os modelos experimentais cruciformes, tal qual utilizado na campanha experimental do capítulo III e comumente utilizados na literatura e meio científico em geral, seriam representativos para avaliar o comportamento momento versus rotação da tipologia da Fig. I-2a? E mais, a continuidade da laje de concreto, com a presença de regiões



comprimidas, não amenizaria a influência da fissuração do concreto no comportamento da ligação?

A análise de um piso misto em escala real poderia então responder a estes questionamentos, assim como a outros, além de constituir uma fonte de informações preciosa acerca do comportamento não-linear físico de vigas mistas semicontínuas, especialmente no tocante ao desenvolvimento do mecanismo de colapso deste sistema estrutural. Além disso, os resultados experimentais podem ser utilizados para calibrar e aferir as ferramentas computacionais desenvolvidas e descritas no capítulo IV.

## V.1 CONCEPÇÃO ESTRUTURAL DO PROTÓTIPO

Todo o projeto do protótipo da laje foi concebido tomando-se como premissa básica o espaço disponível no Laboratório de Estruturas da COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, cuja largura da placa de reação é de nove metros. Além disso, o protótipo deveria constituir um modelo em escala real e não reduzido de um sistema de piso misto semicontínuo constituído por um viga composto por vigas principais apoiadas em pilares e vigas secundárias apoiadas nas vigas principais por meio de ligações flexíveis e semi-rígidas mistas segundo a tipologia da Fig. I-2a, com as dimensões dos elementos e dos vãos sendo características de estruturas mistas reais.

Considerando-se que deveria ainda haver espaço disponível para o posicionamento do sistema de carga, a largura da laje do protótipo foi definida em  $5\text{ m}$ , adotando-se dois vãos de  $2,5\text{ m}$ , o que é usual quando se utilizam lajes com forma de aço incorporada do tipo *steel-deck*. Por sua vez, o comprimento total da laje foi também definido em função da disponibilidade de espaço físico no laboratório, fixando-se  $12\text{ m}$ , ou seja, dois vãos de  $6\text{ m}$ , o que também pode ser considerado usual nesta tipologia de estrutura, sendo este o vão a ser vencido pelas vigas secundárias.

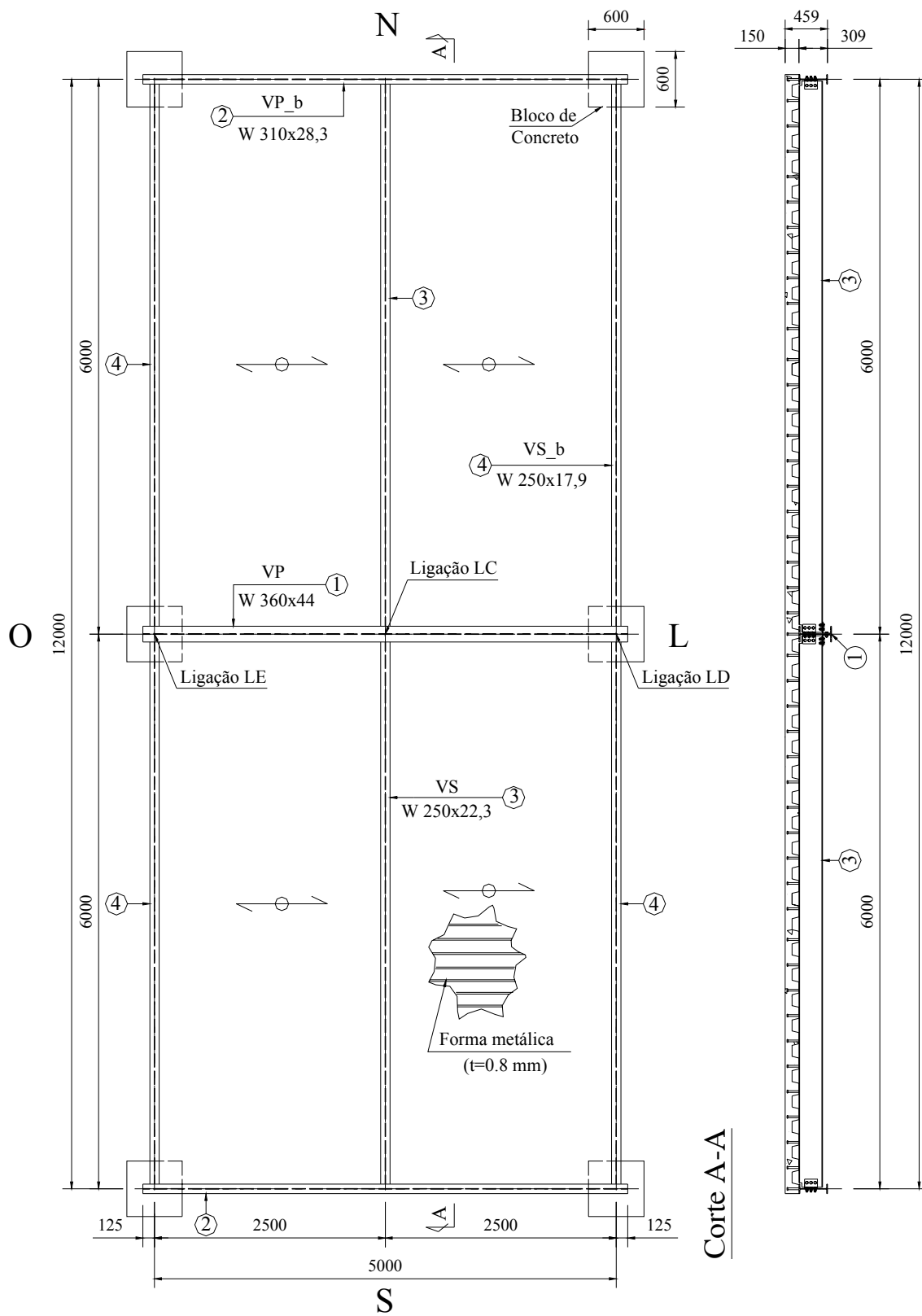
De posse do vão das vigas secundárias, fez-se o pré-dimensionamento destes elementos considerando-se uma relação altura da viga/vão de  $25$  ( $h = l/25$ ), chegando-se a um valor de referência para a altura das vigas em torno de  $240\text{ mm}$ . Selecionaram-se, pois, dentre os perfis metálicos laminados disponíveis no mercado com aço do tipo ASTM A572 Grau 50, aqueles com altura mais próxima deste valor de referência, chegando-se então aos perfis W 250x17,9 e W250x22,3 para as vigas secundárias de borda (VS\_b) e vigas secundárias internas (VS), respectivamente, como pode ser visto na Fig. V-1.

O próximo passo foi então a definição do grau de continuidade para as ligações entre as vigas secundárias e a viga principal, adotando-se o valor  $q_v l^2/24$ , onde  $q_v$  é a carga distribuída por metro linear de viga (Leon e Ammerman [41] sugerem um grau de continuidade entre  $q_v l^2/24$  e  $q_v l^2/14$  para esta tipologia de ligação).

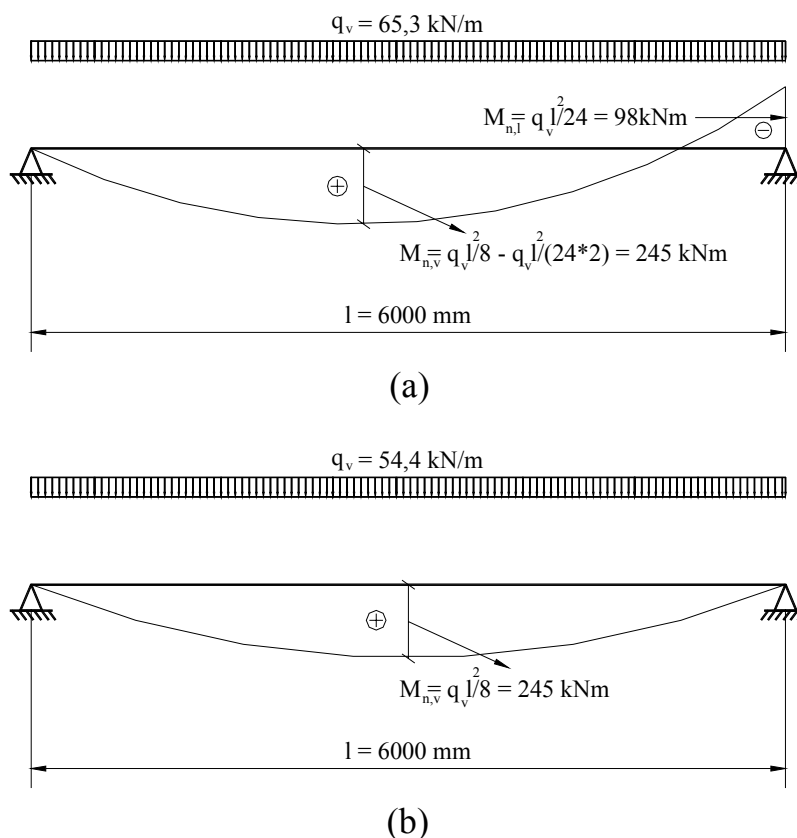
Assim, para o grau de continuidade escolhido, as vigas secundárias selecionadas, uma laje de concreto com  $150\text{ mm}$  de espessura total e um coeficiente de segurança unitário, determinou-se o valor da sobrecarga a ser aplicada na laje de tal sorte que o estado limite último da estrutura fosse caracterizado por um mecanismo de colapso plástico onde rótulas plásticas fossem formadas pelo menos no vão da viga secundária interna (VS) e na ligação mista entre esta e a viga principal. Chegou-se então a um valor de sobrecarga em torno de  $q=26\text{ kN/m}^2$ , sendo então projetada a ligação mista (espessura das cantoneiras, diâmetro dos parafusos e das barras de aço etc.) segundo a tipologia da Fig. I-2a e o modelo descrito e experimentado nos capítulos II e III, ligação esta capaz de fornecer o grau de continuidade requerido.

Vale salientar que a adoção deste grau de continuidade ( $q_v l^2/24$ ) na estrutura representa um acréscimo em torno de  $20\%$  na capacidade de carga estimada para o piso, quando se compara a solução adotada com um hipotético sistema de piso similar e tradicional onde a viga secundária interna seria conectada à viga principal por meio de ligações flexíveis, como atesta a Fig. V-2, onde a resistência nominal (resistência para um coeficiente de segurança unitário) ao momento fletor positivo da viga secundária interna escolhida, W 250x22,3, é  $M_n = 245\text{ kNm}$ .

Com o valor definido da sobrecarga a ser aplicada, as demais vigas do piso puderam ser projetadas, assim como todo o sistema de carga, utilizando-se para isto o método dos Estados Limites Últimos e os códigos de projeto *Eurocode 3* [7] e 4 [14], *AISC LRFD* [42] e a norma brasileira *NBR 8800* [43], sendo toda a estrutura do protótipo projetada com coeficiente de segurança unitário enquanto que todo o sistema de carga foi projetado com os coeficientes de segurança apropriados e estabelecidos nos manuais de projeto citados. Por fim, toda a estrutura do piso foi modelada com os programas *Grecon* e *PAEST3D* a fim de se avaliar o comportamento teórico da estrutura do piso, seja quanto aos estados limites de serviço (deslocamentos, formação de fissuras, vibrações), seja quanto aos estados limites últimos (caracterização do mecanismo de colapso plástico) como será visto nos itens subseqüentes.



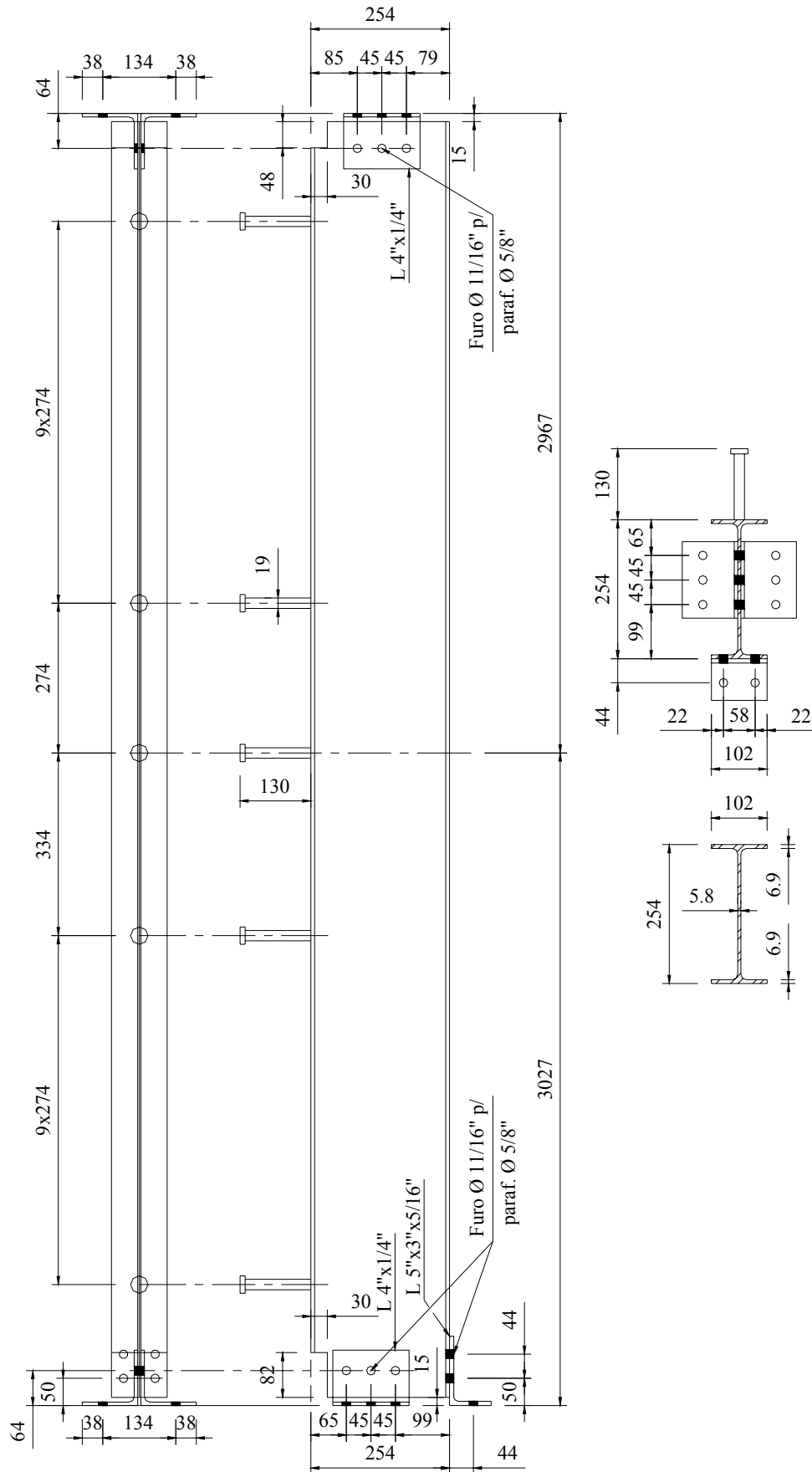
**Fig. V-1 Protótipo experimental: piso misto semicontínuo.**



**Fig. V-2 Anteprojeto da viga secundária interna (VS – W 250x22,3): (a) sistema semicontínuo adotado; (b) hipotético sistema estrutural tradicional com viga bi-apoiada.**

## V.2 DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO

O protótipo experimental é constituído por uma laje de concreto com forma de aço incorporada (*steel deck*) com  $150\text{ mm}$  de altura total e  $60\text{ m}^2$  de área, solidarizada a vigas metálicas por meio de conectores de cisalhamento, constituindo, assim, um sistema de piso com vigas mistas - Fig. V-1. As vigas mistas secundárias internas (VS), Fig. V-3, e de borda (VS\_b), Fig. V-4, são conectadas à viga principal (VP), Fig. V-5, por meio de ligações semi-rígidas mistas (Fig. V-7) segundo o modelo descrito e experimentado no capítulo II e no capítulo III. Por sua vez, as vigas secundárias se conectam às vigas principais de borda (VP\_b), Fig. V-6, por meio de ligações flexíveis constituídas apenas por uma dupla de cantoneiras de alma (Fig. V-8); na Fig. V-9 são apresentadas fotografias destas ligações. Blocos de concreto armado quadrados com  $600\text{ mm}$  de lado, ancorados na laje de reação do laboratório, foram utilizados como apoios para a viga principal e as vigas principais de borda.



**Fig. V-3 Viga secundária interna (VS).**

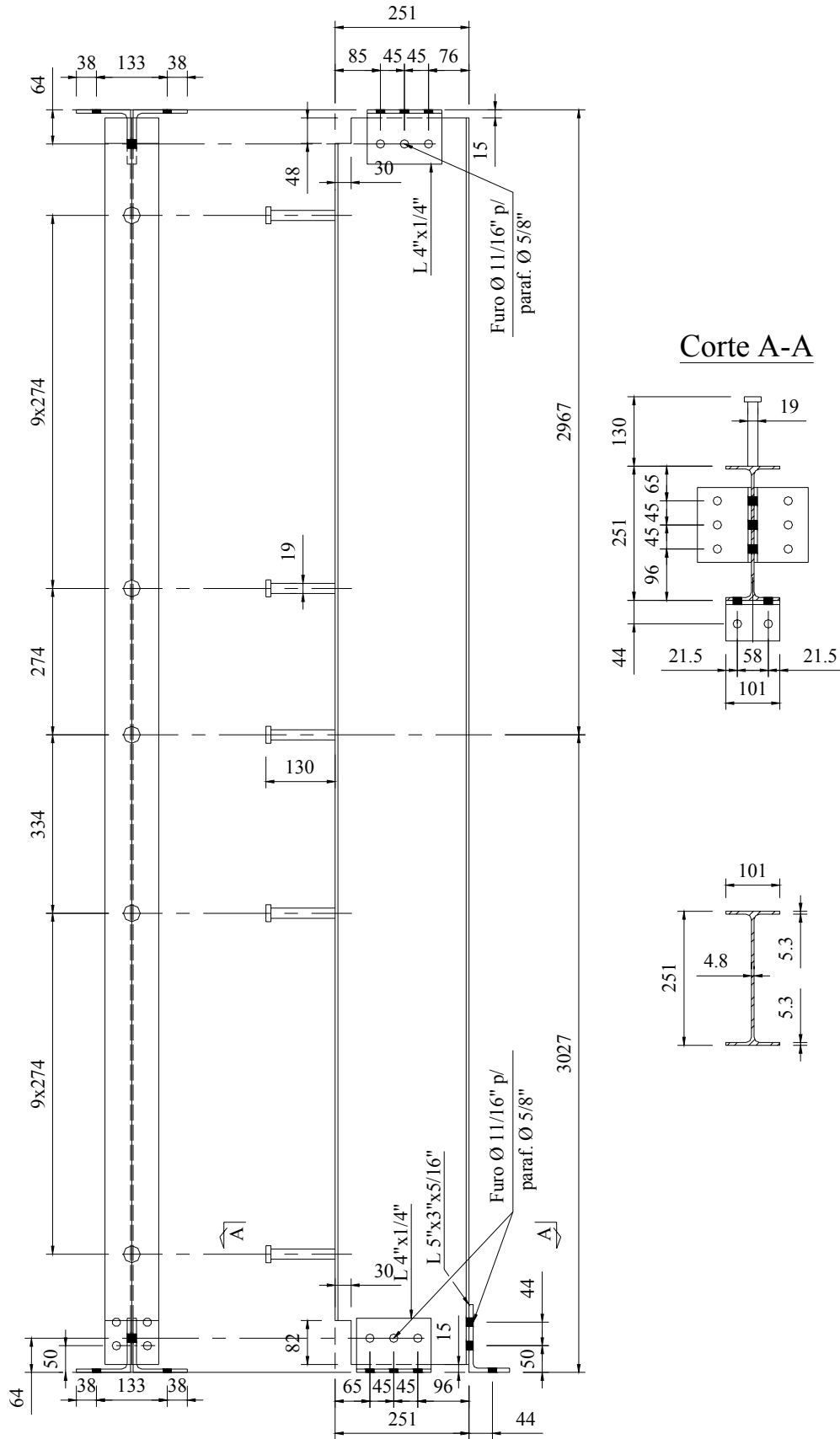
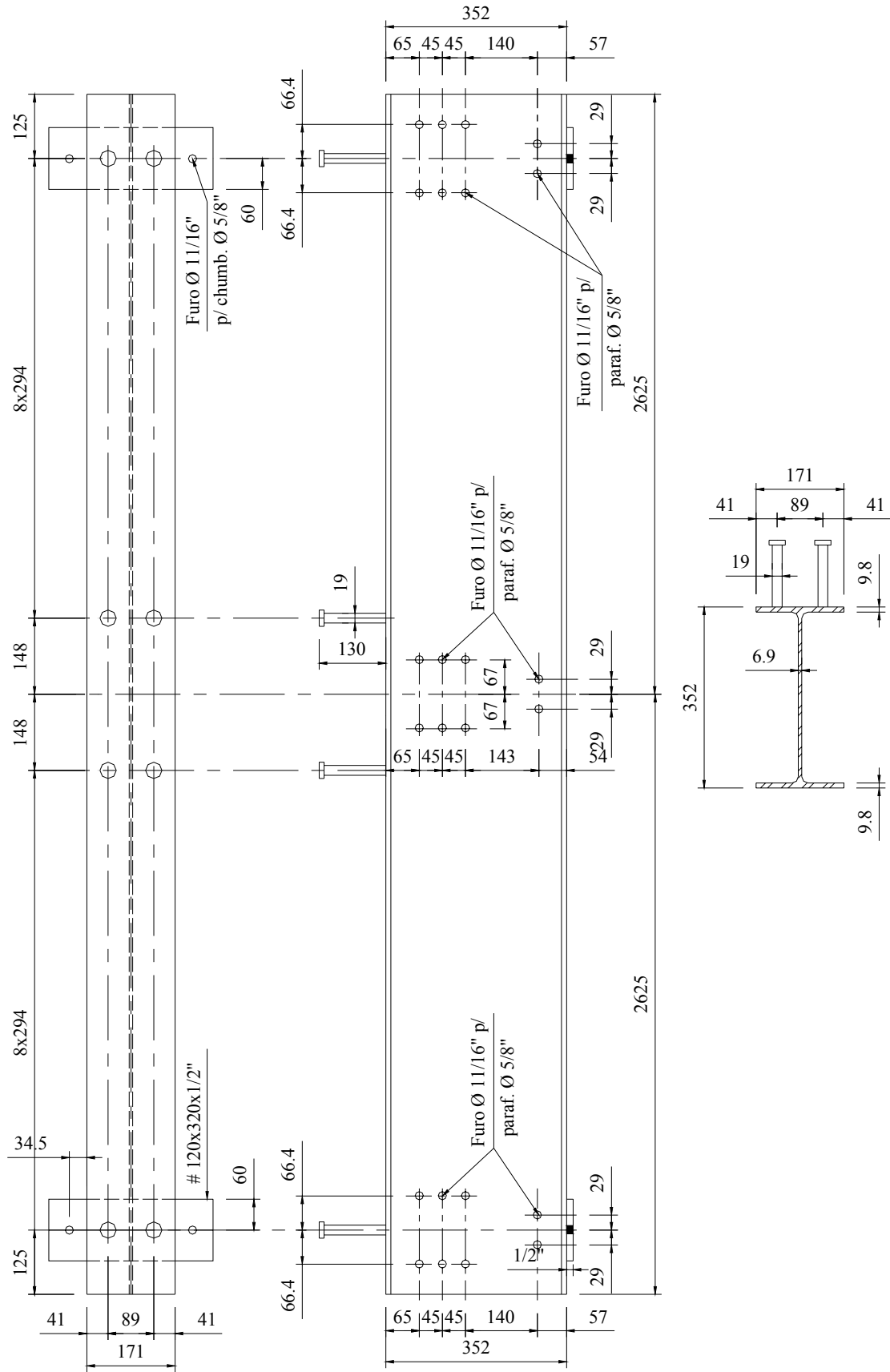


Fig. V-4 Viga secundária de borda (VS\_b).



**Fig. V-5 Viga principal (VP).**

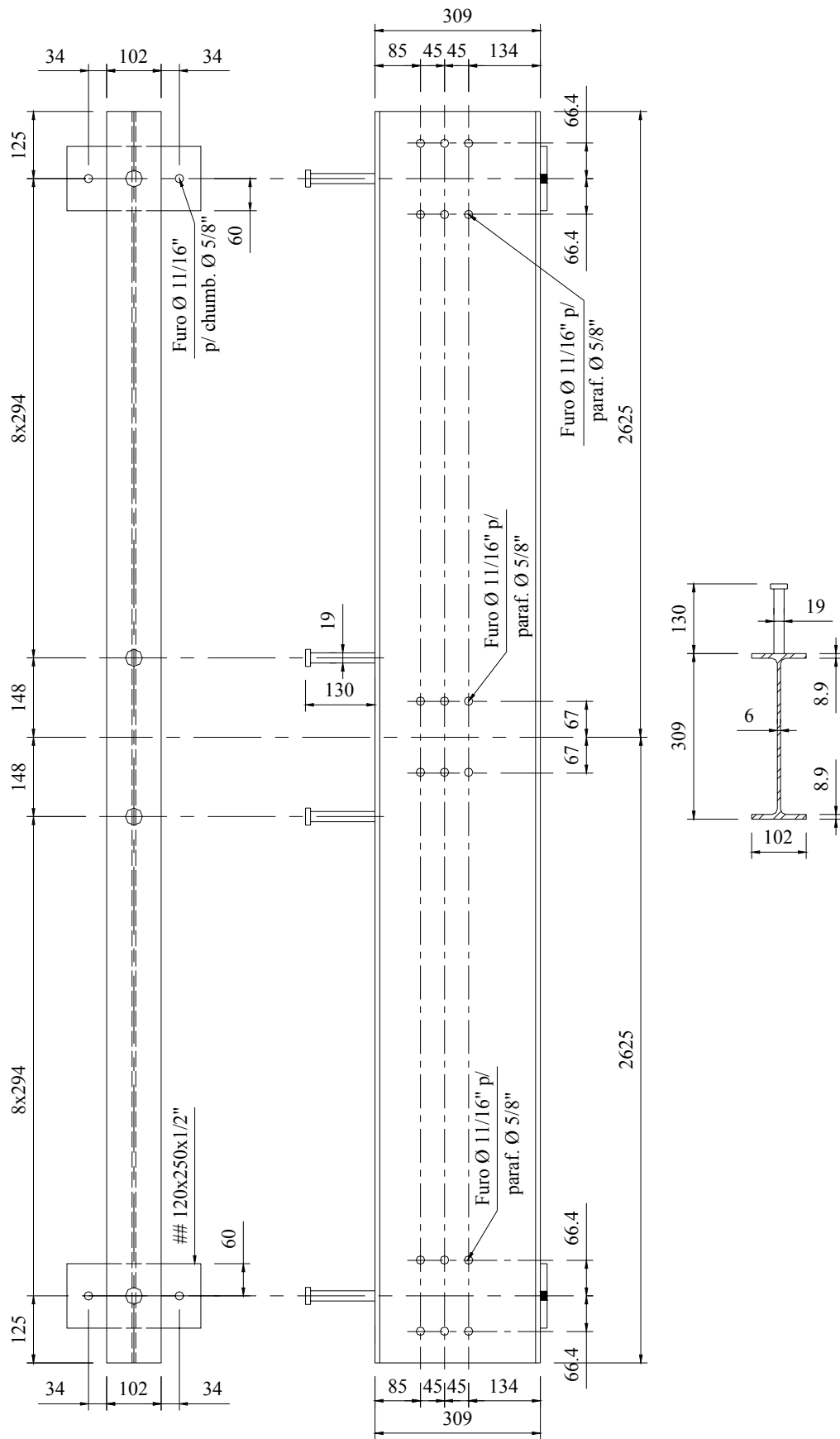
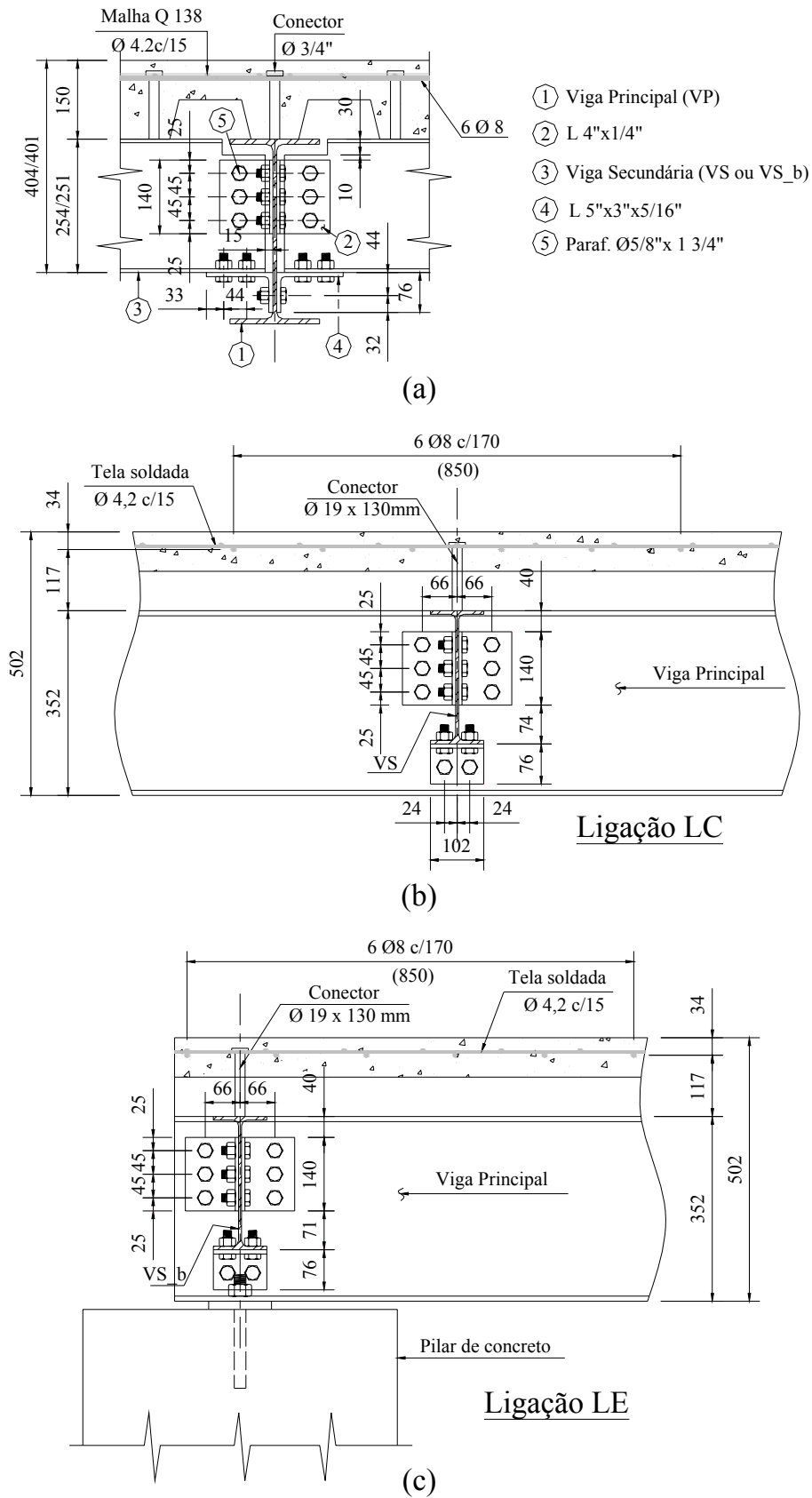
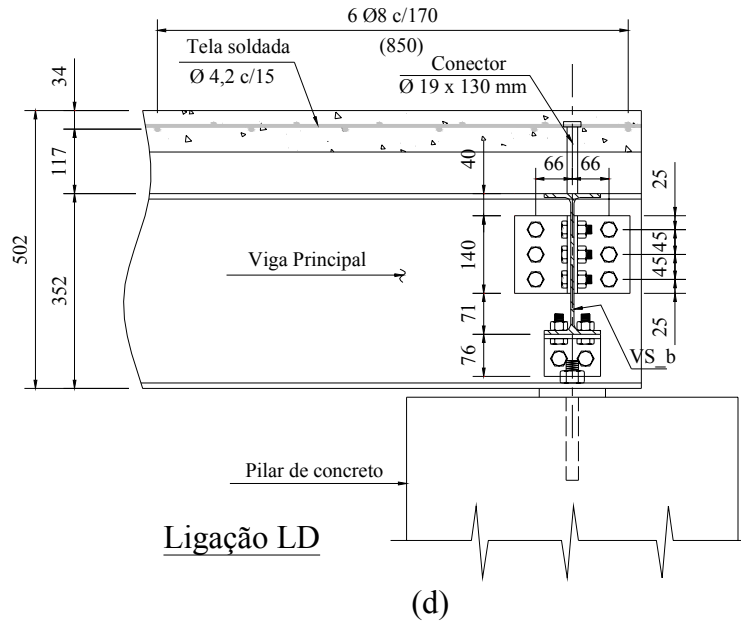


Fig. V-6 Viga principal de borda (VP\_b).

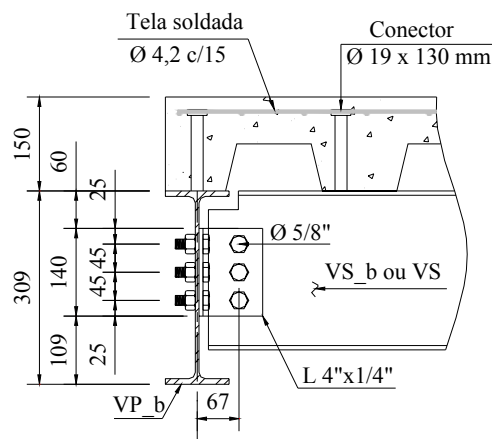




**Fig. V-7** Ligações da viga principal com as secundárias: (a) vista lateral; (b) ligação entre VS e VP – Ligação LC; (c) ligação entre VS\_b Oeste e VP– Ligação LE.



**Fig. V-7 (continuação) Ligações da viga principal com as secundárias: (d) ligação entre VS\_b Leste e VP– Ligação LD.**



**Fig. V-8 Vista lateral da ligação entre as vigas secundárias ou secundárias de borda e a viga principal de borda.**



**Fig. V-9 Vistas das ligações entre a viga secundária de borda e a viga principal e a viga principal de borda.**

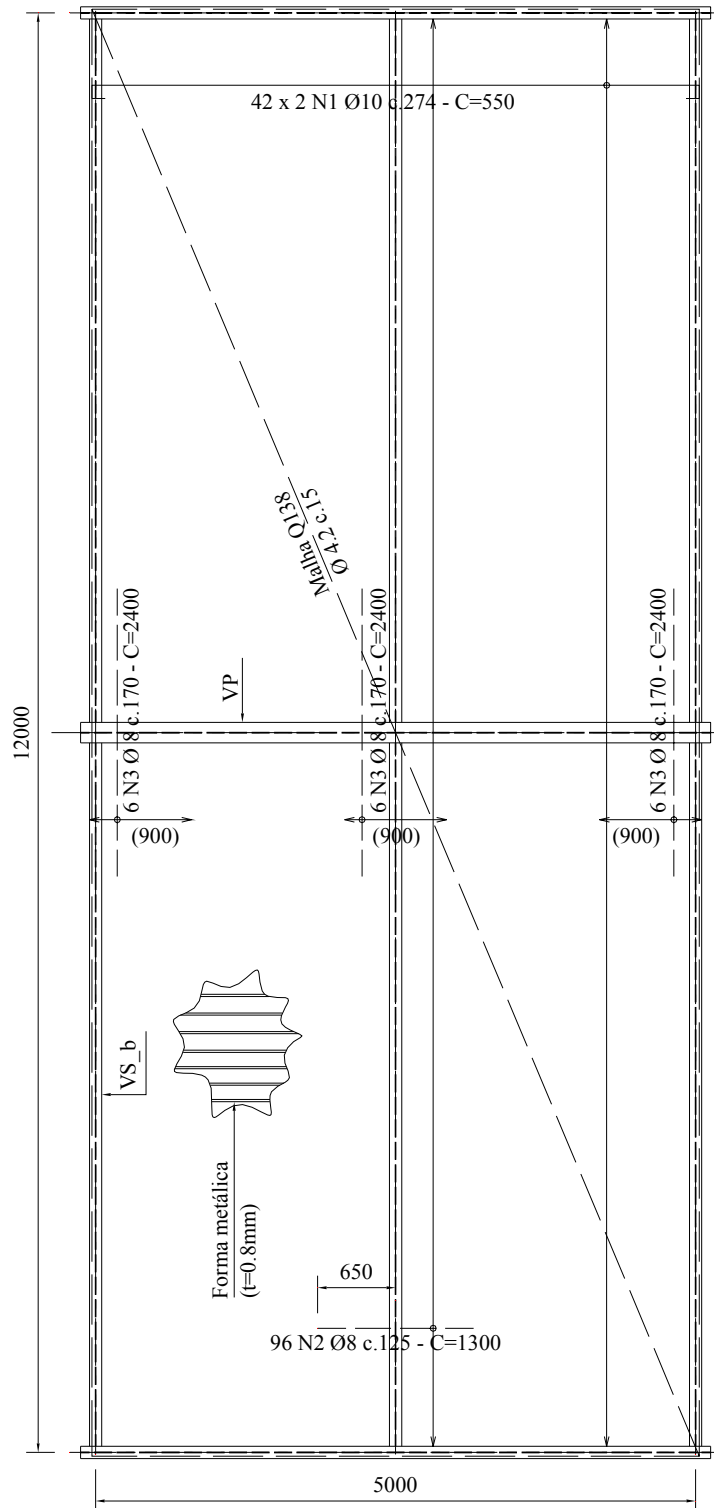
Assim como nos protótipos cruciformes, o aço utilizado nas vigas (doadas neste caso pela **Gerdau Acominas**) é do tipo *ASTM A 572 Grau 50*,  $f_{y,min} = 345 \text{ MPa}$  e  $f_{u,min} = 450 \text{ MPa}$ , enquanto que as cantoneiras foram fabricadas com o aço *A 36*,  $f_{y,min} = 250 \text{ MPa}$  e  $f_{u,min} = 400 \text{ MPa}$ ; as barras de aço, por sua vez, são constituídas pelo aço *CA 50*,  $f_{y,min} = 500 \text{ MPa}$  e  $f_{u,min} = 550 \text{ MPa}$ , enquanto todos os parafusos utilizados são de alta resistência, *ASTM A325*,  $f_{y,min} = 635 \text{ MPa}$  e  $f_{u,min} = 825 \text{ MPa}$ , não tendo sido utilizado qualquer controle de torque – todas as ligações se dão, também, unicamente por apoio. Vale salientar que toda a fabricação das vigas (furação e ajustes para as dimensões de projeto) foi doada pela **Codeme Engenharia S/A**.

Os conectores de cisalhamento, do tipo pino com cabeça (*stud bolt*,  $f_{u,min} = 415 \text{ MPa}$ ), são de diâmetro  $\phi = 19 \text{ mm}$  e altura total  $130 \text{ mm}$ , projetados em quantidade tal que se garantisse a interação total entre as vigas metálicas e a laje de concreto em regiões de momento fletor positivo e entre as armaduras e componentes metálicos das ligações mistas nas regiões de momento fletor negativo.

A forma metálica (sistema *steel deck MF – 75*, doado pela **Metform**) foi projetada com espessura de  $0,8 \text{ mm}$ , tendo a forma trapezoidal com altura da nervura de  $75 \text{ mm}$  e aço tipo *ASTM A 653 Grau 40*,  $f_{y,min} = 280 \text{ MPa}$ . Com esta espessura da forma metálica e para o vão da laje de  $2500 \text{ mm}$ , não haveria a necessidade de escorar a laje na fase anterior à cura do concreto. Entretanto, como a capacidade de carga estimada para o piso era de cerca de  $26 \text{ kN/m}^2$ , a forma metálica não seria suficiente para constituir a armadura positiva para a laje (além disso, seria esperado para este nível de carregamento o colapso da laje mista por cisalhamento longitudinal), fato este que motivou o posicionamento de armaduras adicionais de flexão no interior das nervuras; ademais, armaduras adicionais negativas também foram posicionadas perpendicularmente às vigas secundárias internas a fim de se impor uma condição de continuidade na laje sobre estas vigas e assim garantir um quinhão de carga ainda maior para estes elementos e conseqüentemente maiores solicitações para ligação entre estas vigas e a viga principal – ligação LC. Na Fig. V-10, são ilustrados o detalhamento e disposição destas armaduras.

Além disso, telas soldadas (malha *Q138 -  $\phi 4.2 \text{ c.15}$* ) constituídas pelo aço *CA 60*,  $f_{y,min} = 600 \text{ MPa}$ , foram dispostas na face superior da laje em toda a sua extensão, tendo sido utilizadas como referência as bitolas e taxas sugeridas pelos fabricantes dos sistemas *steel-deck* para controle da fissuração provocada pela retração do concreto.

Por fim, a resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias ( $f_{ck}$ ) foi definida como  $20\text{ MPa}$ , tendo sido o mesmo usado em uma central de concretagem e lançado no local com o auxílio de uma bomba. As figuras Fig. V-11, Fig. V-12, Fig. V-13 e Fig. V-14 ilustram a montagem e concretagem do protótipo.



**Fig. V-10 Disposições das armaduras no protótipo.**



**Fig. V-11 Montagem da grelha metálica.**



**Fig. V-12 Montagem da forma metálica e soldagem dos conectores.**



**Fig. V-13 Detalhe das armaduras na região do encontro entre a VP e a VS.**

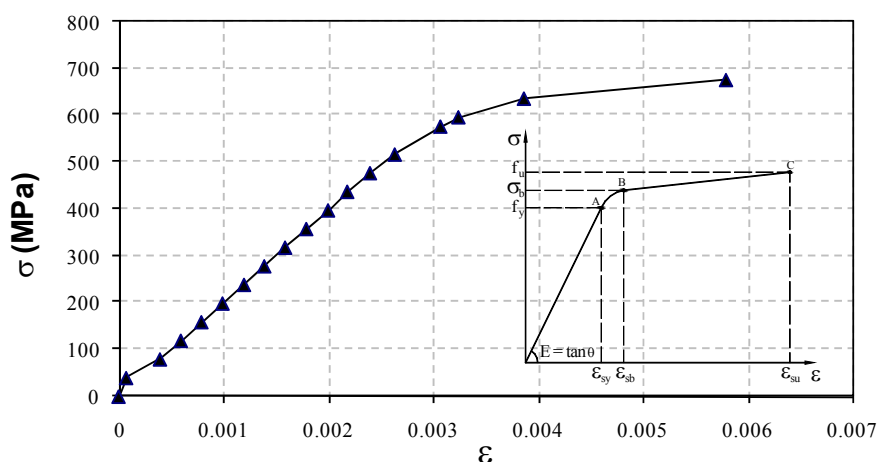




**Fig. V-14 Concretagem da laje.**

### V.3 CARACTERIZAÇÃO DOS MATERIAIS E DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

Como as barras de aço das ligações mistas LE, LC e LD foram obtidas do mesmo lote que as barras utilizadas nos protótipos cruciformes apresentados no capítulo III, apenas uma amostra adicional foi utilizada para caracterização das propriedades mecânicas do material (como relatado na ocasião, a dispersão destes resultados é bastante pequena). Após o posicionamento de dois extensômetros elétricos de resistência, a amostra foi submetida ao ensaio de tração simples, sendo a curva tensão versus deformação obtida mostrada na Fig. V-15 e as características mecânicas discriminadas na Tab. V-1. Mais uma vez, vale salientar que a deformação última das barras não foi medida, indicando-se a especificação do fabricante.



**Fig. V-15 Diagrama tensão x deformação do aço das armaduras da laje.**

**Tab. V-1 Características mecânicas do aço das armaduras da laje.**

$E$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$\varepsilon_{sy}$	$\sigma_b$ (MPa)	$\varepsilon_{sb}$	$\varepsilon_{su}^1$
198300,0	517,0	0,00263	636,0	0,0039	0,08

Observando-se as tabelas Tab. III-1 e Tab. V-1, confirma-se que as propriedades mecânicas do aço das armaduras dos protótipos cruciformes e do protótipo da laje são bastante próximas.

Assim como nos protótipos cruciformes, os parafusos das cantoneiras de alma das ligações mistas foram instrumentados com extensômetros elétricos de resistência, de tal sorte que estes elementos constituiriam “células” de carga por meio das quais, a partir de constantes de calibração pré-definidas, poder-se-ia estimar a carga axial nestes parafusos durante os ensaios. Sendo assim, estes parafusos instrumentados foram submetidos a ensaios de tração simples, obtendo-se então as constantes de calibração discriminadas na Tab. V-2.

**Tab. V-2 Constantes de calibração dos parafusos das cantoneiras de alma.**

Ligação	$C_p$ (kN/ $\mu\varepsilon$ )					
	1ª camada		2ª camada		3ª camada	
	P 01	P02	P03	P04	P05	P06
LE	0,0683	0,0866	0,0986	0,0890	0,1176	0,0858
LC	0,0388	0,0407	0,0341	0,0389	0,0352	0,0392
LD	0,0413	0,0405	0,0398	0,0401	0,0399	0,0377

Finalmente, durante a concretagem da laje cerca de dez corpos de prova<sup>2</sup> foram moldados para avaliar a resistência característica à compressão do concreto,  $f_{ck}$ , sendo então rompidos em uma prensa universal quando da realização do ensaio estático da laje. O valor médio obtido foi de 22 MPa.

Uma vez caracterizados os materiais que compõem o protótipo, as resistências e propriedades da ligação e das vigas mistas podem ser enumeradas, estando discriminadas nas tabelas Tab. V-3 e Tab. V-4.

1. Deformação última mínima das barras segundo especificações do fabricante.

2. Corpos de prova cilíndricos com 10 cm de diâmetro e 20 cm de altura, curados em câmara úmida até a execução dos ensaios.

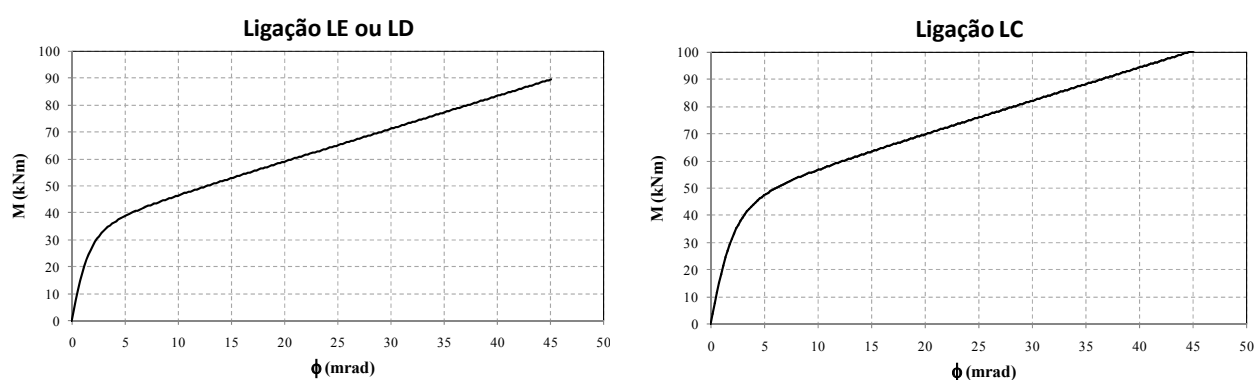
**Tab. V-3 Propriedades e resistências das vigas do protótipo.**

Elemento		Viga metálica			Viga mista
Item	Perfil	A (mm <sup>2</sup> )	I <sub>x</sub> (mm <sup>4</sup> )	I <sub>y</sub> (mm <sup>4</sup> )	M <sub>n</sub> (kNm)
VS_b	W 250x17,9	2225	21717426	912315	185
VS	W 250x22,3	2800	28190357	1224295	245
VP_b	W 310x28,3	3563	53236730	1579367	309
VP	W 360x44	5645	119263526	8176111	546

**Tab. V-4 Propriedades das ligações semi-rígidas mistas do protótipo (Fig. V-7).**

Ligação	$L_{ef}$ (mm)	$A_r$ (mm <sup>2</sup> )	$k_{\theta,mi}$ (kNm/rad)	$M_u$ (kNm)	$k'_{\theta,mi}$ (kNm/rad)	$k_{\theta,p}$ (kNm/rad)	$M_{Fiss}$ (kNm)	$n$ (-)	$\theta_u$ (mrad)
LE/LD	900	385	8500	95	20000	1215	35	2	48
LC	1200	413	8750	101	20000	1250	46	2	42

Na tabela Tab. V-4, a rigidez da ligação mista após o processo de fissuração se estabilizar,  $k_{\theta,mi}$ , foi obtida por meio da expressão Eq.(II-11a), enquanto que a resistência ao momento fletor da ligação,  $M_u$ , foi obtida por meio da Eq.(II-12a). Por sua vez, a rigidez inicial da ligação mista considerando a contribuição do concreto em tração,  $k'_{\theta,mi}$ , assim como o momento fletor correspondente à configuração do processo de fissuração estabilizado,  $M_{Fiss}$ , foram obtidos por meio das expressões Eq.(III-5) e Eq.(III-3), respectivamente. A rigidez da ligação pós-fissuração,  $k_{\theta,p}$ , foi mais uma vez estimada como  $k_{\theta,mi}/7$ , enquanto que o fator de forma adotado foi 2. Por fim, a capacidade de rotação da ligação,  $\theta_u$ , foi estimada por meio da Eq.( II-13). Na figura Fig. V-16 ilustra-se o comportamento  $M \times \theta$  das ligações segundo a Eq.(II-1).



**Fig. V-16 Curvas  $M \times \theta$  teóricas das ligações semi-rígidas mistas do protótipo.**



Vale salientar que para a determinação das propriedades das ligações foi adotado um trecho de laje colaborante ( $L_{ef}$ ) de até sete vezes a largura do elemento de apoio (mesa da viga principal) [41], dentro do qual todas as armaduras são consideradas efetivas para a ligação, inclusive as da malha para controle da retração do concreto, totalizando a área de aço  $A_r$  indicada na Tab. V-4. Ademais, preferencialmente deve-se dispor as armaduras no trecho correspondente à largura efetiva da viga mista conectada.

#### V.4 ENSAIOS DINÂMICOS

O principal objetivo dos testes dinâmicos foi avaliar as características dinâmicas da estrutura, a saber, frequências naturais de vibração e formas modais correspondentes, além das taxas de amortecimento dos modos fundamentais. Uma vez realizada a identificação estrutural, poder-se-ia então calibrar modelos numéricos desenvolvidos a partir das ferramentas apresentadas no capítulo IV para representar a estrutura de piso misto em análise.

##### V.4.1 Descrição dos ensaios

Dois tipos de ensaios dinâmicos foram realizados. Num primeiro ensaio, conhecido como *heel impact*, aplicavam-se impactos na laje por meio do calcanhar de um indivíduo, colocando a estrutura em vibrações livres - Fig. V-17. A partir da resposta da estrutura podiam ser determinados os modos de vibração, frequências e taxas de amortecimento.



**Fig. V-17 Ensaio do tipo *heel impact*.**

Em um segundo ensaio, aplicavam-se impactos na laje por meio de um equipamento denominado “impactômetro”. Este equipamento consiste basicamente de um cilindro previamente instrumentado e calibrado o qual, solto em queda livre de um suporte metálico, aplica um impacto na estrutura, sendo então medidos a força e o

respectivo intervalo de tempo - Fig. V-18. Portanto, neste caso, tanto a força como a resposta da estrutura eram medidos.



**Fig. V-18 Impactômetro.**

#### **V.4.2 Instrumentação e sistema de aquisição de sinais**

A instrumentação do protótipo para os ensaios dinâmicos consistiu do posicionamento estratégico de cinco acelerômetros<sup>1</sup> de tal sorte que, baseado em modelo computacional preliminar, pudessem ser identificadas as características dinâmicas principais da estrutura, como formas modais, frequências naturais de vibração e taxas de amortecimento - Fig. V-19.

Para aquisição dos sinais, foram utilizados dois equipamentos: um analisador de espectro<sup>2</sup> da *Hewlett Packard* e o sistema *ADS2000*<sup>3</sup> da *Lynx* - Fig. V-20. Com o analisador de espectros, o auto-espectro da resposta dos acelerômetros era gerado em tempo real, e as frequências naturais e fases relativas entre os acelerômetros podiam ser medidas imediatamente – este foi, pois, o equipamento utilizado nos ensaios do tipo *heel impact* para determinação das frequências e modos de vibração da estrutura. Com o sistema *Lynx* (*AqDados* e *AqDanalysis*), apesar dos dados poderem ser apresentados em tempo real, era necessário um pós-processamento<sup>4</sup> para obtenção dos auto-espectros de

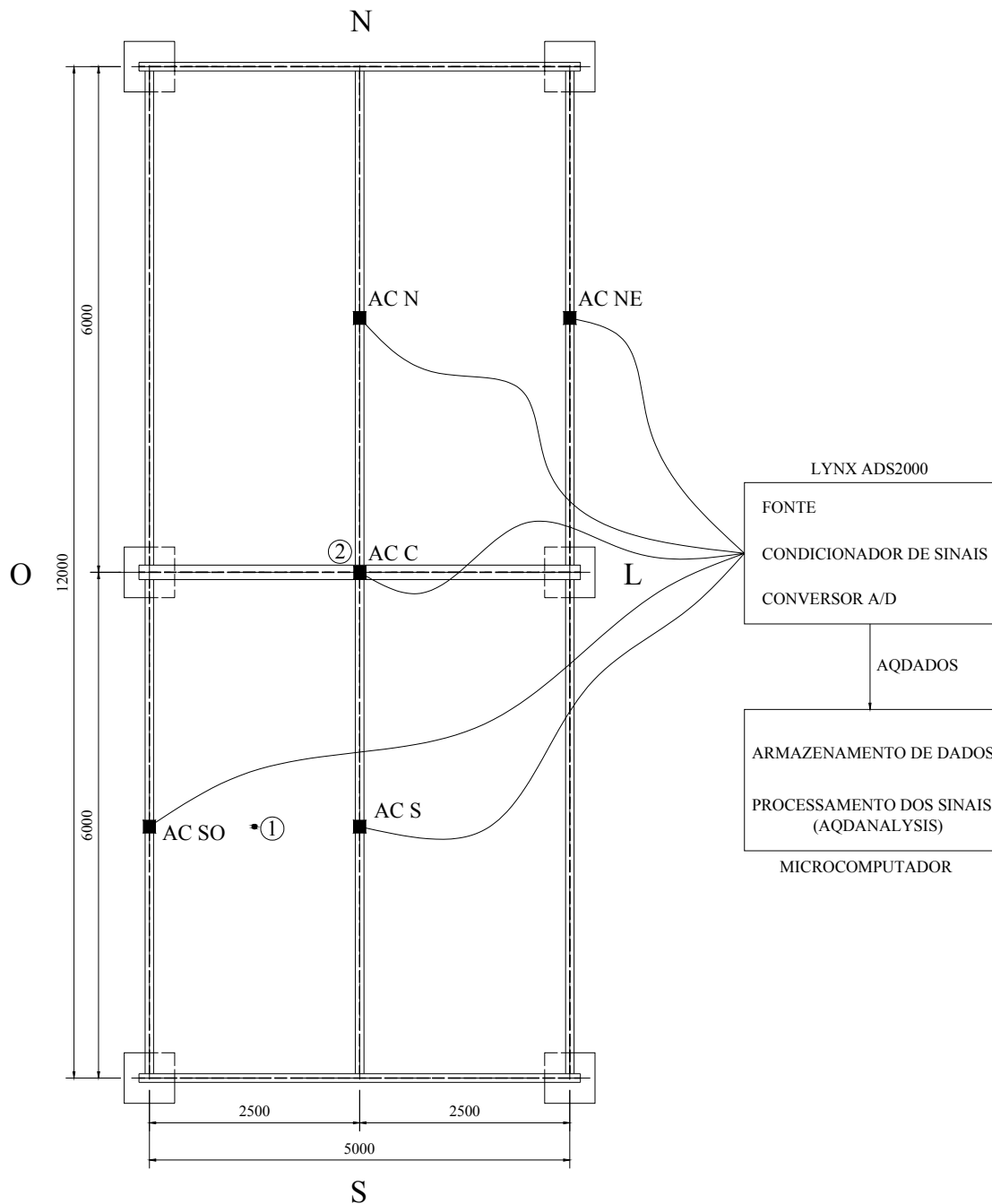
1. Acelerômetros resistivos da Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd., com capacidade 1g e resistência de 120  $\Omega$  (ASW-1A).

2. Analisador dinâmico de sinal 35660A da Hewlett Packard.

3. Sistema ADS2000 da Lynx de 24 canais que integra uma fonte de alimentação, um condicionador de sinais (ganhos, filtros, balanço) e um conversor analógico digital, além da comunicação em rede Ethernet/IP.

4. O processamento dos sinais (filtragem, auto-espectro, máximos e mínimos etc.) é feito com o programa *AqDanalysis*.

resposta, sendo, entretanto, uma ferramenta de uso mais geral. Podem ser, por exemplo, utilizados diversos tipos de sensores, como termopares, sensores com  $\frac{1}{4}$  de ponte,  $\frac{1}{2}$  ponte ou ponte completa, ponteciômetros, acelerômetros etc. Os testes do tipo *heel impact* para determinação das taxas de amortecimento dos modos fundamentais da estrutura assim como os testes com o impactômetro foram realizados com o equipamento da *Lynx*.



**Fig. V-19 Instrumentação e sistema de aquisição dos sinais (sistema da *Lynx*) nos testes dinâmicos.**



(a)



(b)

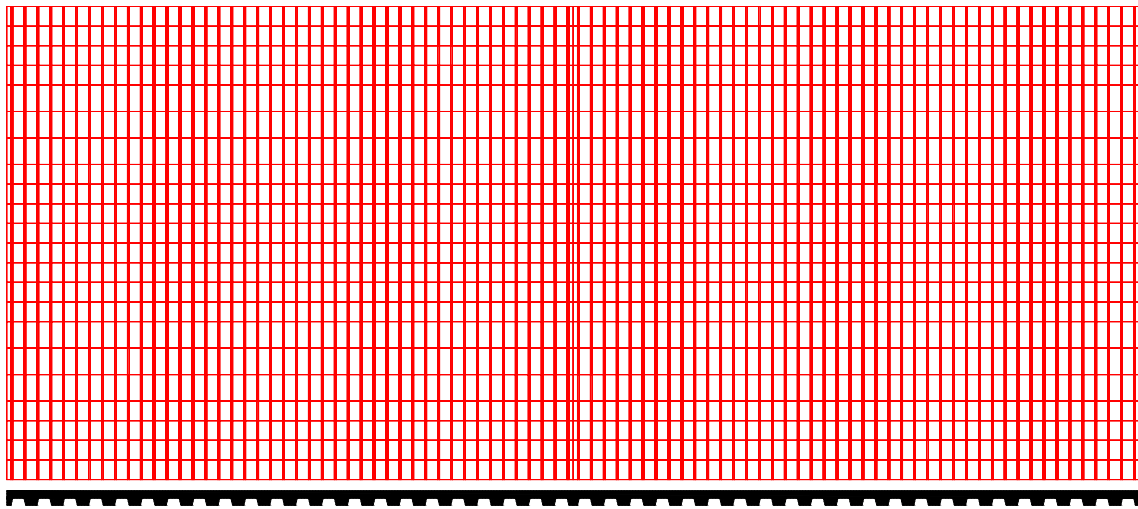
**Fig. V-20** Fotos da utilização do analisador de espectro (a) e do equipamento da *Lynx* (b).

#### V.4.3 Análise dos resultados

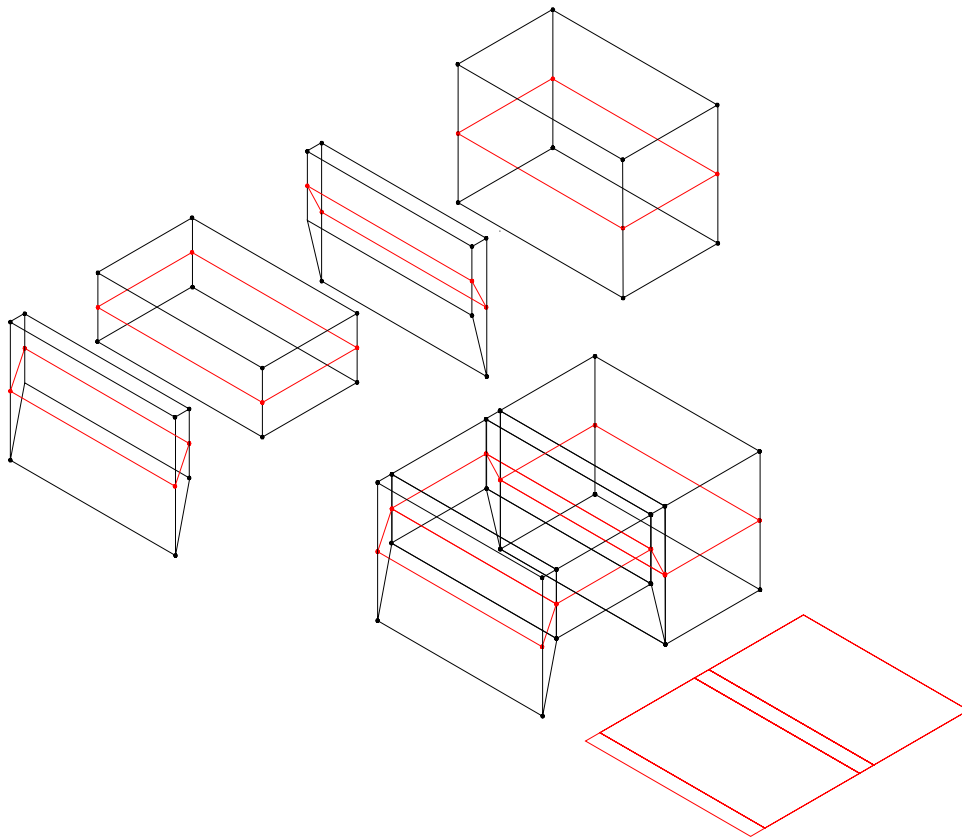
Ao lado dos resultados obtidos da campanha experimental de ensaios dinâmicos, neste item são também apresentados os resultados teóricos obtidos via modelo computacional elaborado com o programa *PAEST3D* (modelo 1), efetuando-se as devidas comparações. O modelo computacional (Fig. V-21) foi elaborado utilizando-se elementos de pórtico espacial com e sem conexões para representar as vigas e elementos de casca isoparamétricos de quatro nós (MITC4), segundo os modelos descritos no capítulo IV. Como a geometria do elemento de casca implementado é determinada por meio de oito nós (quatro na superfície superior e quatro na inferior), a ortotropia geométrica da laje pôde ser considerada, como atesta a Fig. V-21b – observe o leitor que o primeiro elemento apresentado na Fig. V-21b possui uma superfície média inclinada, sendo o vetor espessura em cada nó desta superfície não ortogonal à mesma. As excentricidades dos elementos de pórtico espacial em relação à superfície média da casca também foram consideradas segundo o item IV.2.1.3 do capítulo IV. Seguem os dados do modelo *I*:

- 4117 nós, 198 elementos de pórtico espacial e 3916 elementos de casca;
- Módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e massa específica do aço:  
 $E_a = 205000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ;
- Módulo de elasticidade tangente inicial, coeficiente de Poisson e massa específica do concreto:  $E_c = 26000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,2$  e  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ ;

- Para a rigidez das ligações foi aqui adotado o valor da rigidez inicial sem a contribuição do concreto em tração,  $k_{\theta,mi}$ , segundo a Tab. V-4.



(a)



(b)

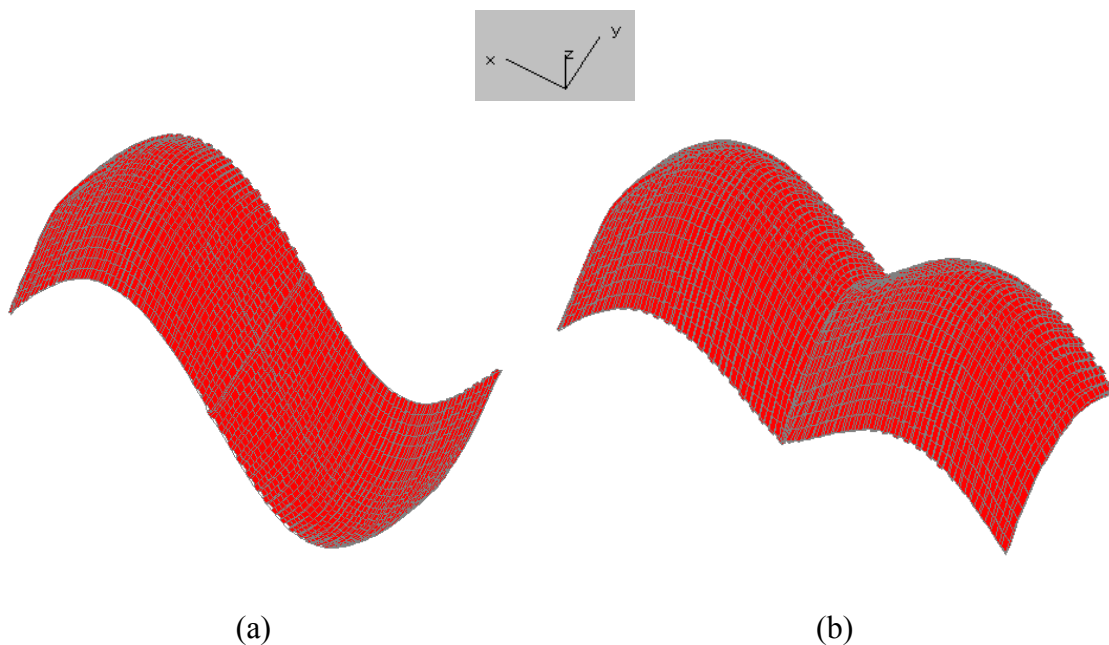
**Fig. V-21 Modelo I - malha de elementos de casca (sólido degenerado) utilizada para representar o protótipo da laje: (a) vista superior e seção transversal; (b) módulos (elementos) utilizados para compor a malha – em vermelho está representada a superfície média da casca.**

Conforme relatado anteriormente, as frequências naturais e modos de vibração da estrutura foram obtidos experimentalmente por meio de ensaios do tipo *heel impact*, utilizando o analisador de espectros e os acelerômetros AC N, AC S, AC NE e AC SO - Fig. V-19. Os valores obtidos teórica e experimentalmente são discriminados na Tab. V-5, onde se percebe uma boa correlação entre os resultados.

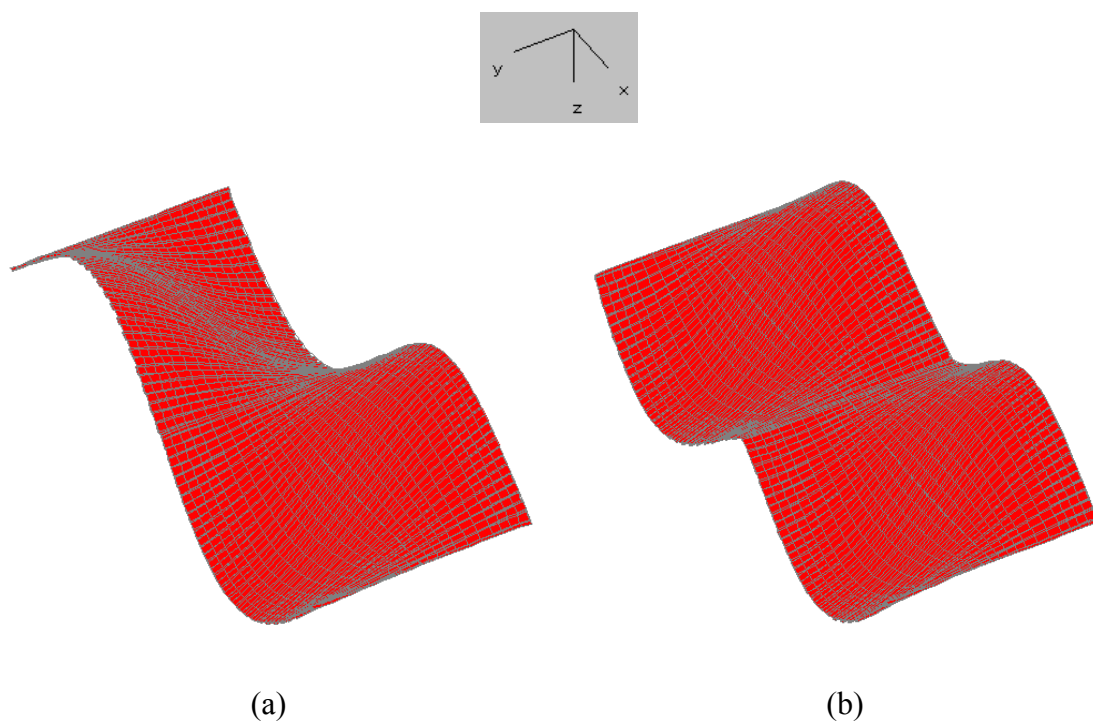
**Tab. V-5 Frequências dos quatro primeiros modos de vibração da estrutura.**

Modelo	Frequências							
	1º modo		2º modo		3º modo		4º modo	
	f(Hz)	$\Delta(\%)$	f(Hz)	$\Delta(\%)$	f(Hz)	$\Delta(\%)$	f(Hz)	$\Delta(\%)$
Experimental	9,75	<b>1,2</b>	11,25	<b>1,7</b>	14,63	<b>0,7</b>	18,75	<b>3,9</b>
Teórico	9,63		11,44		14,53		18,02	

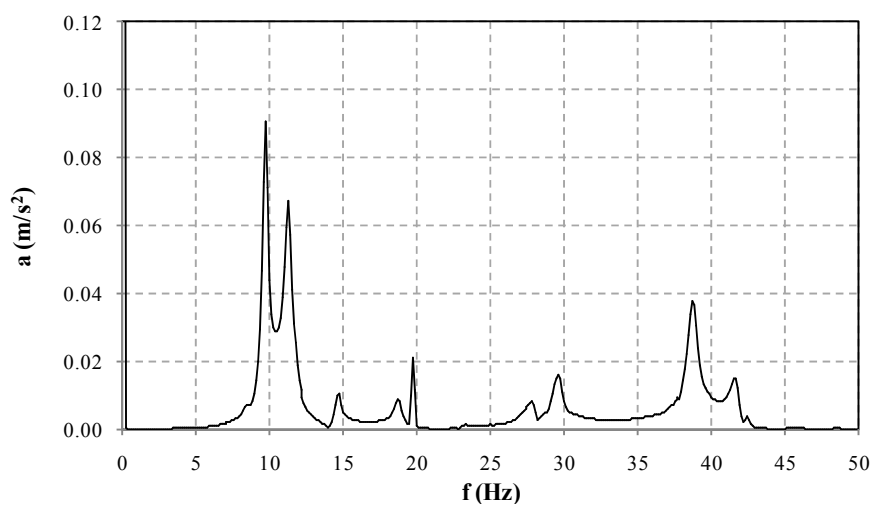
Nas figuras Fig. V-22 e Fig. V-23, são apresentadas as formas modais dos quatro primeiros modos de vibração obtidos via análise numérica com o programa *PAEST3D*. Nas figuras Fig. V-24 a Fig. V-29, são apresentados os auto-espectros das respostas dos acelerômetros obtidos experimentalmente, assim como são apresentadas as fases relativas destes acelerômetros, corroborando as formas modais determinadas teoricamente, e lembrando que para  $\phi = 0^\circ$  os acelerômetros estão em fase e para  $\phi = 180^\circ$  os acelerômetros estão fora de fase.



**Fig. V-22 (a) Primeiro modo de vibração da estrutura; (b) Segundo modo de vibração da estrutura.**

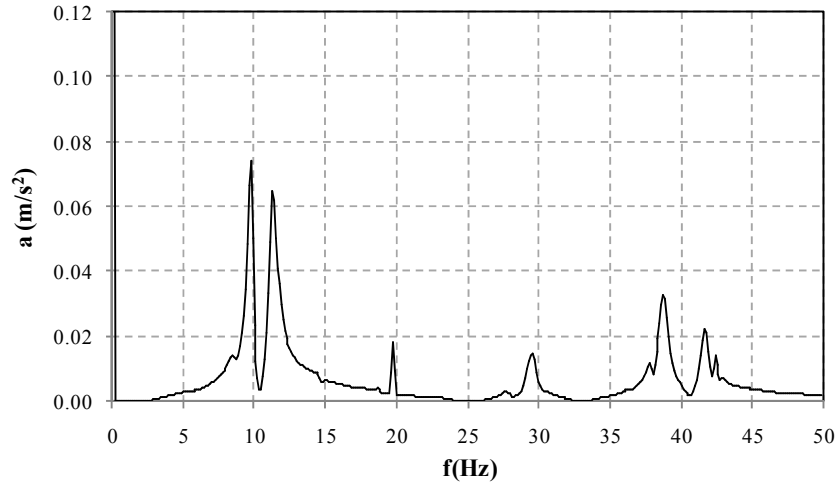


**Fig. V-23 (a) Terceiro modo de vibração da estrutura; (b) Quarto modo de vibração da estrutura.**

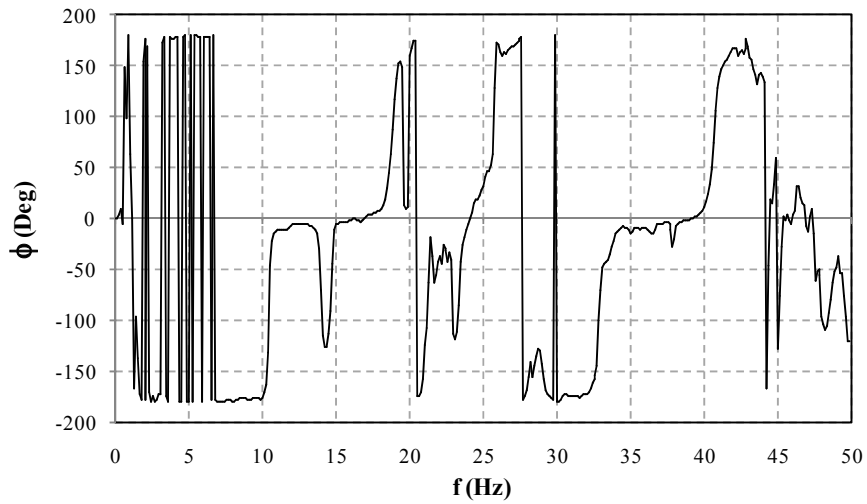


**Fig. V-24 Auto-espectro de resposta do acelerômetro AC N obtido nos ensaios do tipo *heel impact*.**

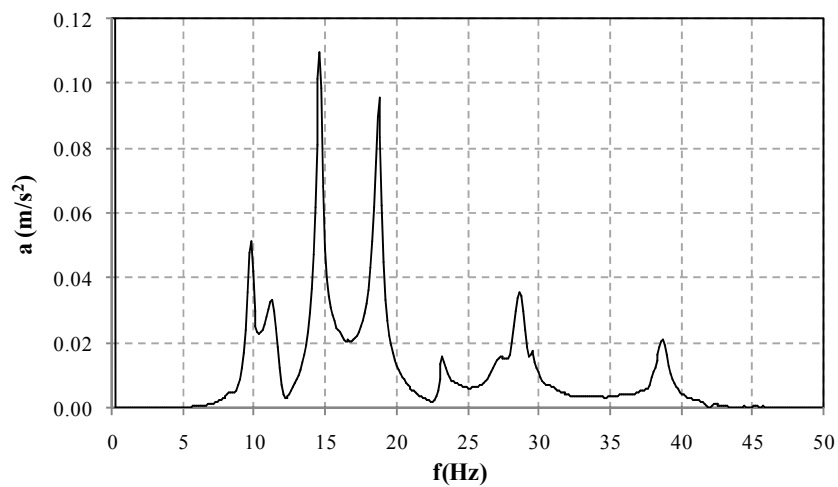




**Fig. V-25** Auto-espectro de resposta do acelerômetro AC S obtido nos ensaios do tipo *heel impact*.

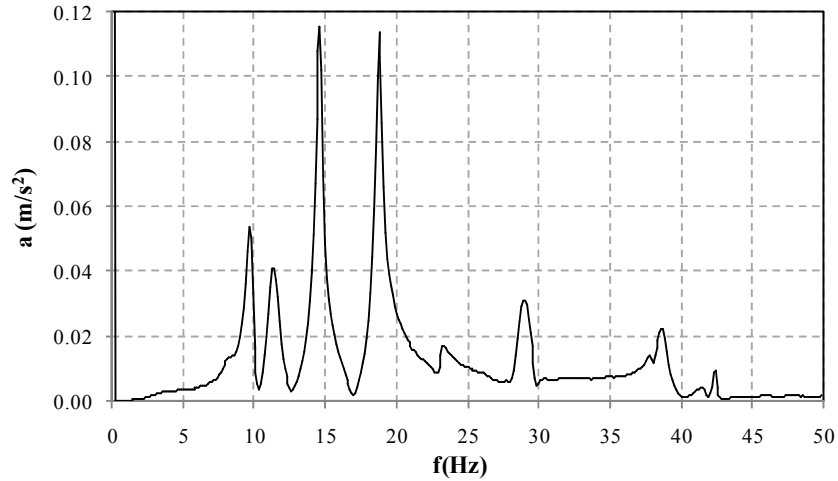


**Fig. V-26** Fase relativa entre os acelerômetros AC N e AC S.

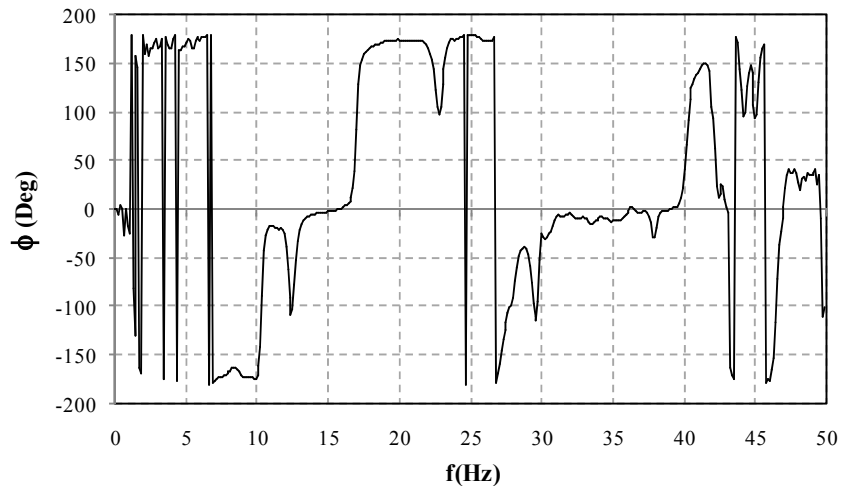


**Fig. V-27** Auto-espectro de resposta do acelerômetro AC NE obtido nos ensaios do tipo *heel impact*.





**Fig. V-28** Auto-espectro de resposta do acelerômetro AC SO obtido nos ensaios do tipo *heel impact*.

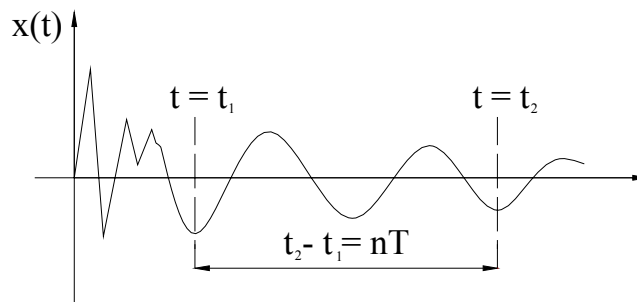


**Fig. V-29** Fase relativa entre os acelerômetros AC NE e AC SO.

As taxas de amortecimento dos quatro primeiros modos de vibração também foram obtidas por meio de ensaios do tipo *heel impact* (Fig. V-31) utilizando, entretanto, o equipamento da *Lynx* (era necessário um pós-processamento dos sinais) e os cinco acelerômetros AC N, AC S, AC NE, AC SO e AC C. As taxas de amortecimento  $\xi_i$  foram estimadas por meio do método do decremento logarítmico - Eq.(V.1) [32], Fig. V-30 - estando resumidas na Tab. V-6:

$$\xi = \frac{1}{2\pi n} \ln \left( \frac{x(t_1)}{x(t_2)} \right), \quad \frac{x(t_1)}{x(t_2)} \approx 2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Eq.(V-1)}$$

onde  $n$  é o número de ciclos requerido para que haja uma redução de 50% na amplitude  $x(t)$  do sinal;  $\omega$  é a frequência circular e  $T$  o período.



**Fig. V-30 Método do decremento logarítmico.**

Para que o método pudesse ser utilizado não apenas para o primeiro modo, fez-se necessário a utilização de filtros no domínio do tempo nos sinais de resposta dos acelerômetros a fim de que as contribuições de cada modo pudessem ser isoladas. Sendo assim, as taxas de amortecimento para o primeiro, terceiro e quarto modos foram obtidas a partir de um ensaio com impactos (Fig. V-31) no ponto 1 da Fig. V-19, sendo que: a) para o primeiro modo, foi utilizada a resposta do acelerômetro AC N com filtro passa baixa em 10Hz (Fig. V-32); b) para o terceiro modo, foi utilizada a resposta do acelerômetro AC NE com filtro passa banda em 12,6 e 16,6 Hz (Fig. V-33); c) para o quarto modo, foi utilizada a resposta do acelerômetro AC NE com filtro passa banda em 16,8 e 20,8 Hz (Fig. V-34).

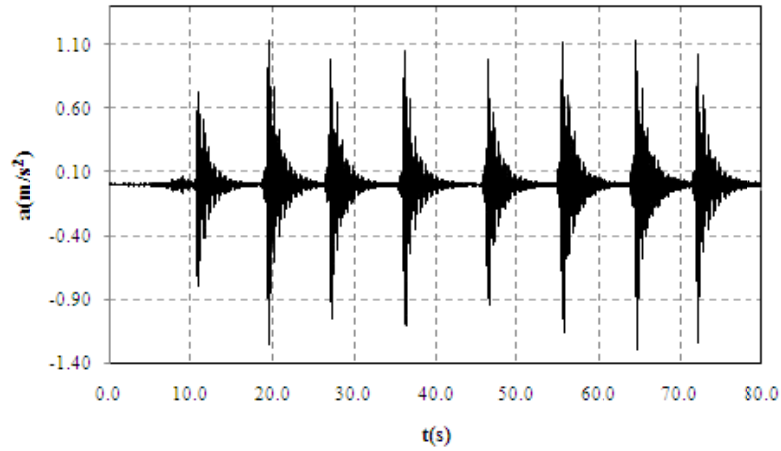
Finalmente, a taxa de amortecimento para o segundo modo foi obtida a partir de um ensaio com impactos (Fig. V-35) no ponto 2 da Fig. V-19, sendo utilizada a resposta do acelerômetro AC C com filtro passa baixa em 11,5 Hz (Fig. V-36). A mudança no ponto de aplicação dos impactos para estimativa da taxa de amortecimento do 2º modo deveu-se ao fato de que, para este ponto 2, a contribuição do primeiro modo é nula, haja vista se tratar do ponto de inflexão do mesmo.

**Tab. V-6 Taxas de amortecimento dos quatro primeiros modos de vibração.**

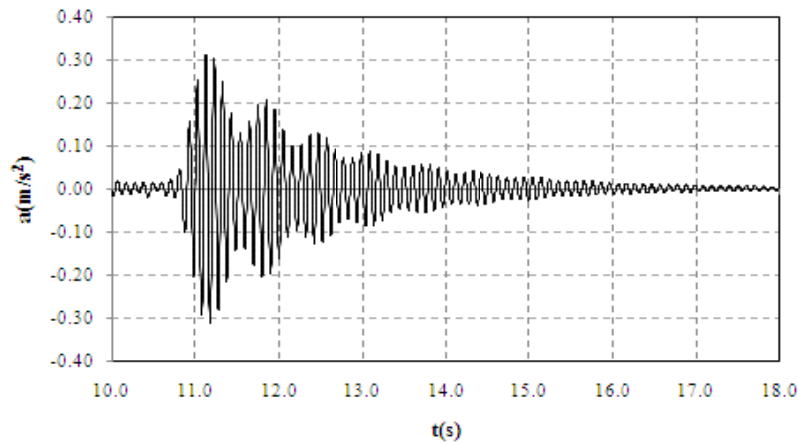
<i>Modos</i>	1º	2º	3º	4º
$\xi(\%)$	0,95	1,06	0,74	0,75

Vale frisar que, especialmente no caso do 2º modo, onde a aplicação da carga e a medição da resposta foram feitas no mesmo ponto, o indivíduo pode atuar como um sistema massa-mola-amortecedor, aumentando falsamente o amortecimento da

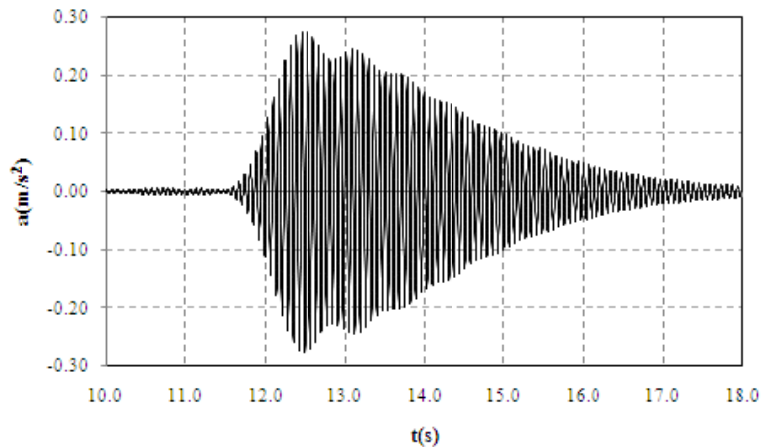
estrutura, uma vez que sua massa é representativa com relação à da estrutura em questão.



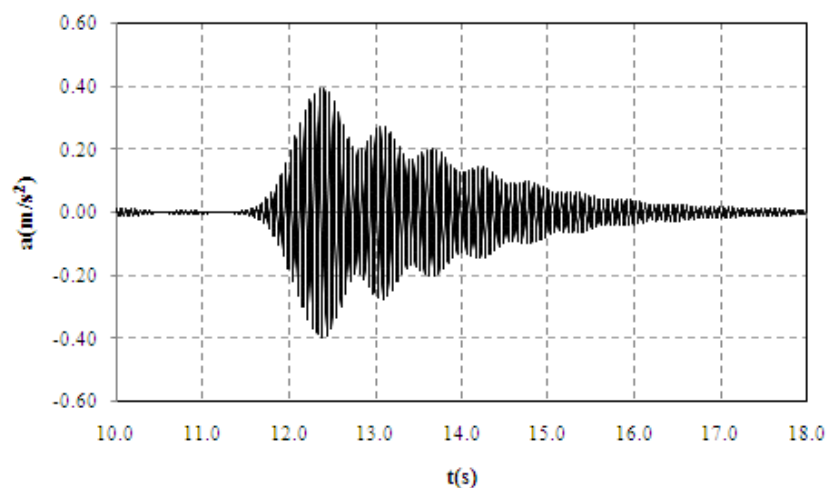
**Fig. V-31 Resposta da estrutura (acelerômetro AC N) nos testes para identificação das taxas de amortecimento do 1º, 3º e 4º modos.**



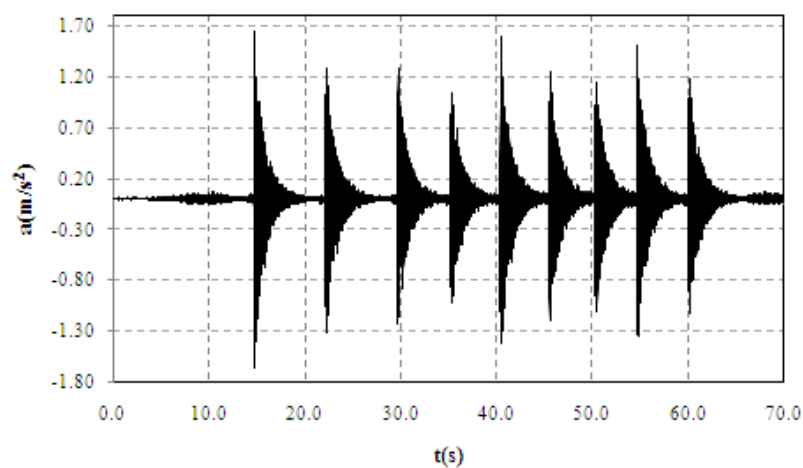
**Fig. V-32 Trecho da resposta filtrada da estrutura (acelerômetro AC N) utilizada para determinação da taxa de amortecimento do 1º modo.**



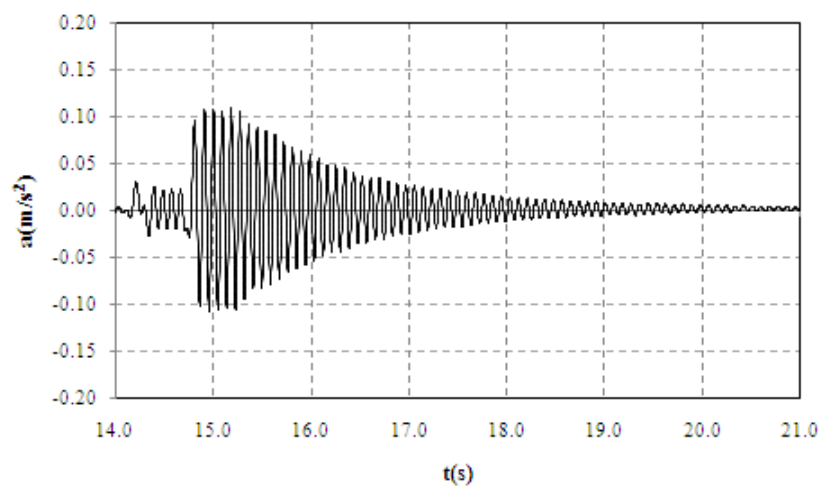
**Fig. V-33 Trecho da resposta filtrada da estrutura (acelerômetro AC NE) utilizada para determinação da taxa de amortecimento do 3º modo.**



**Fig. V-34 Trecho da resposta filtrada da estrutura (acelerômetro AC NE) utilizada para determinação da taxa de amortecimento do 4º modo.**

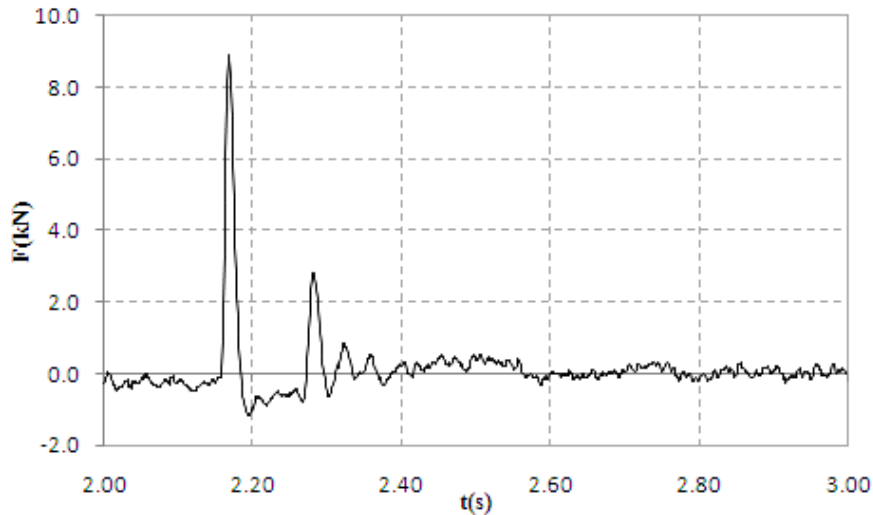


**Fig. V-35 Resposta da estrutura (acelerômetro AC C) nos testes para identificação da taxa de amortecimento do 2º modo.**



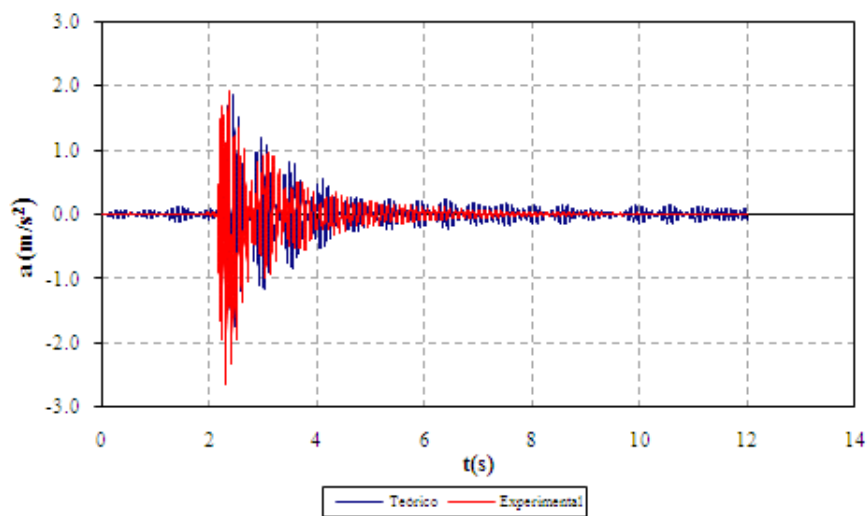
**Fig. V-36 Trecho da resposta filtrada da estrutura (acelerômetro AC C) utilizada para determinação da taxa de amortecimento do 2º modo.**

Uma vez realizada a identificação estrutural, pode-se então aferir o modelo numérico desenvolvido com o programa *PAEST3D*. Para isto, foram utilizados os resultados experimentais obtidos no ensaio com o “impactômetro” (Fig. V-18). Neste ensaio, um cilindro era solto de altura de cerca de 30 cm em uma camada de areia sobre o ponto 1 da laje (Fig. V-19) e então eram medidos a força aplicada e o intervalo de tempo de contato entre o cilindro e a estrutura, sendo também medidas as acelerações da mesma – AC N, AC S, AC NE e AC SO.

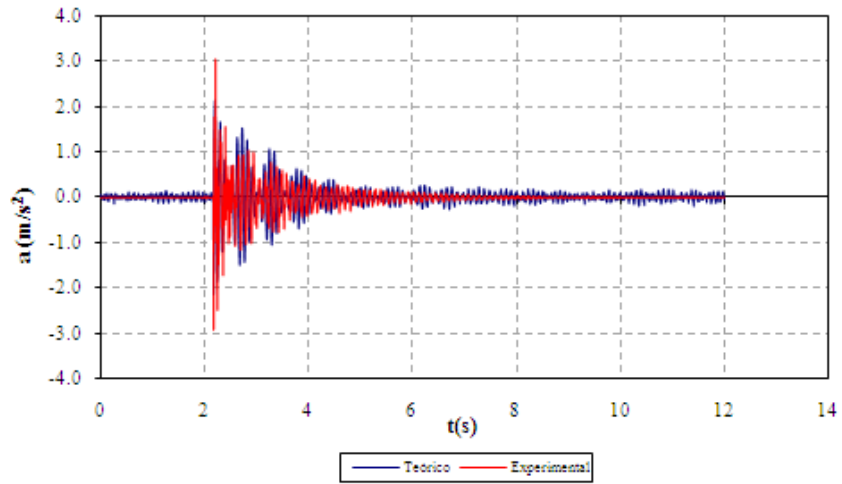


**Fig. V-37 História temporal da força aplicada na estrutura pelo cilindro do “impactômetro”.**

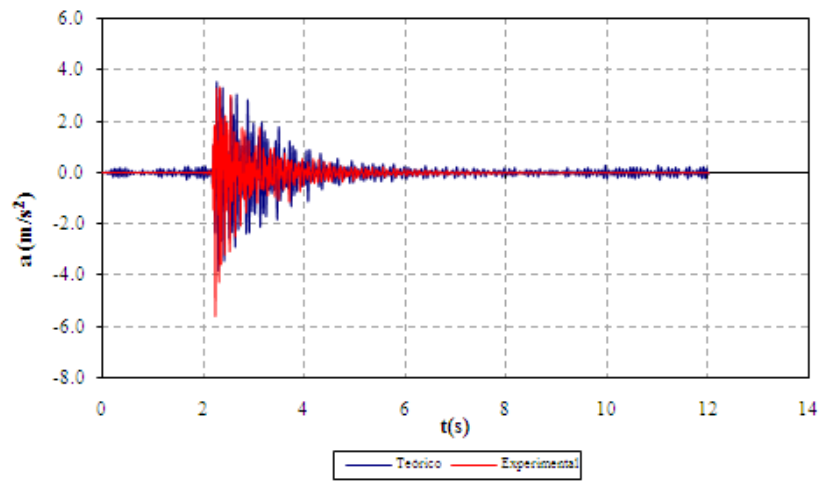
As respostas da estrutura em termos de aceleração são apresentadas nas figuras Fig. V-38 a Fig. V-41.



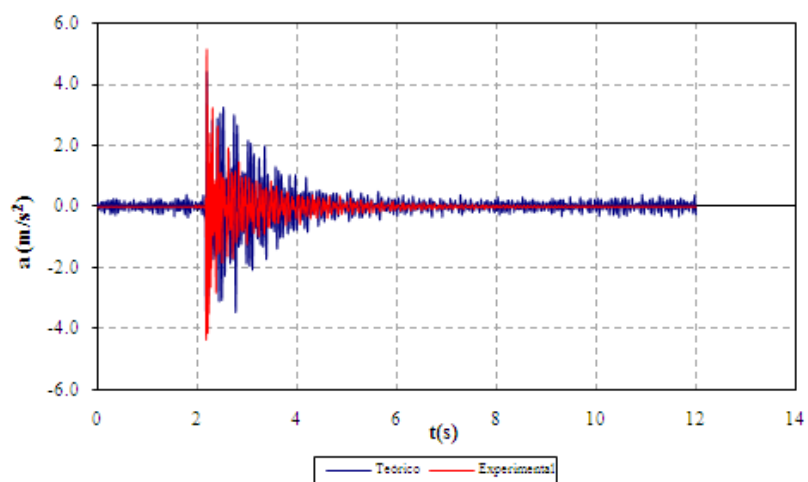
**Fig. V-38 Resposta da estrutura medida com o acelerômetro AC N no ensaio com o “impactômetro”.**



**Fig. V-39** Resposta da estrutura medida com o acelerômetro AC S no ensaio com o “impactômetro”.



**Fig. V-40** Resposta da estrutura medida com o acelerômetro AC NE no ensaio com o “impactômetro”.



**Fig. V-41** Resposta da estrutura medida com o acelerômetro AC SO no ensaio com o “impactômetro”.

Os resultados teóricos apresentados nas figuras Fig. V-38 a Fig. V-41 foram obtidos utilizando o método da superposição modal, retendo-se os quatro primeiros modos de vibração com as taxas de amortecimento apresentadas na Tab. V-6 e utilizando um intervalo de integração de  $\Delta t = 0,0005$  s. Verifica-se, pois, uma boa correlação entre os resultados teóricos e experimentais. Entretanto, a observação das respostas dos acelerômetros AC NE e AC SO indica um decaimento mais acentuado nas respostas experimentais, indicando taxas de amortecimento mais elevadas. Acredita-se aqui que isto se deva à presença do próprio “impactômetro”, cuja massa é significativa em relação à da estrutura, além de acrescentar amortecimento à mesma. Ainda assim, para estes acelerômetros a correlação entre os resultados teóricos e experimentais ainda continua bastante razoável.

Considera-se, enfim, que o modelo desenvolvido com o programa *PAEST3D* representa satisfatoriamente a estrutura do protótipo em análise.

## **V.5 ENSAIOS ESTÁTICOS**

O principal objetivo dos ensaios estáticos foi avaliar o mecanismo de colapso do sistema de piso misto proposto, a formação de rótulas plásticas nas vigas mistas e/ou ligações mistas, assim como a influência do processo de fissuração da laje de concreto no comportamento momento versus rotação da tipologia de ligação mista descrita e experimentada nos capítulos II e III. Em adição, os resultados experimentais são utilizados para aferir o programa *Grecon*, desenvolvido em [6] e aperfeiçoado no presente trabalho.

### **V.5.1 Descrição dos ensaios e sistema de carga**

O protótipo da laje construído no Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ foi projetado para representar um sistema de piso misto aço-concreto semicontínuo escorado na fase de cura do concreto, sendo, pois, a totalidade do carregamento (permanente e variável) aplicada ao sistema misto – neste tipo de sistema, escorado na fase de cura, os benefícios da adoção de ligações semi-rígidas mistas tornam-se mais evidentes. Conforme relatado anteriormente, o piso foi projetado para resistir a uma sobrecarga de cerca de  $26 \text{ kN/m}^2$ , sendo utilizado vigas mistas com interação total entre a viga metálica e a laje de concreto.

Durante a fase de construção, o piso foi escorado com 15 barrotes quadrados de madeira de 75 mm de lado (3''): as vigas secundárias internas e de bordo foram escoradas nos terços do vão (duas escoras) enquanto que a viga principal e as vigas principais de bordo foram escoradas no meio do vão (1 escora). Sendo assim, a primeira etapa dos ensaios estáticos consistiu na retirada do escoramento com a medição dos deslocamentos do protótipo - Fig. V-42.



**Fig. V-42 Escoramento das vigas do protótipo da laje.**

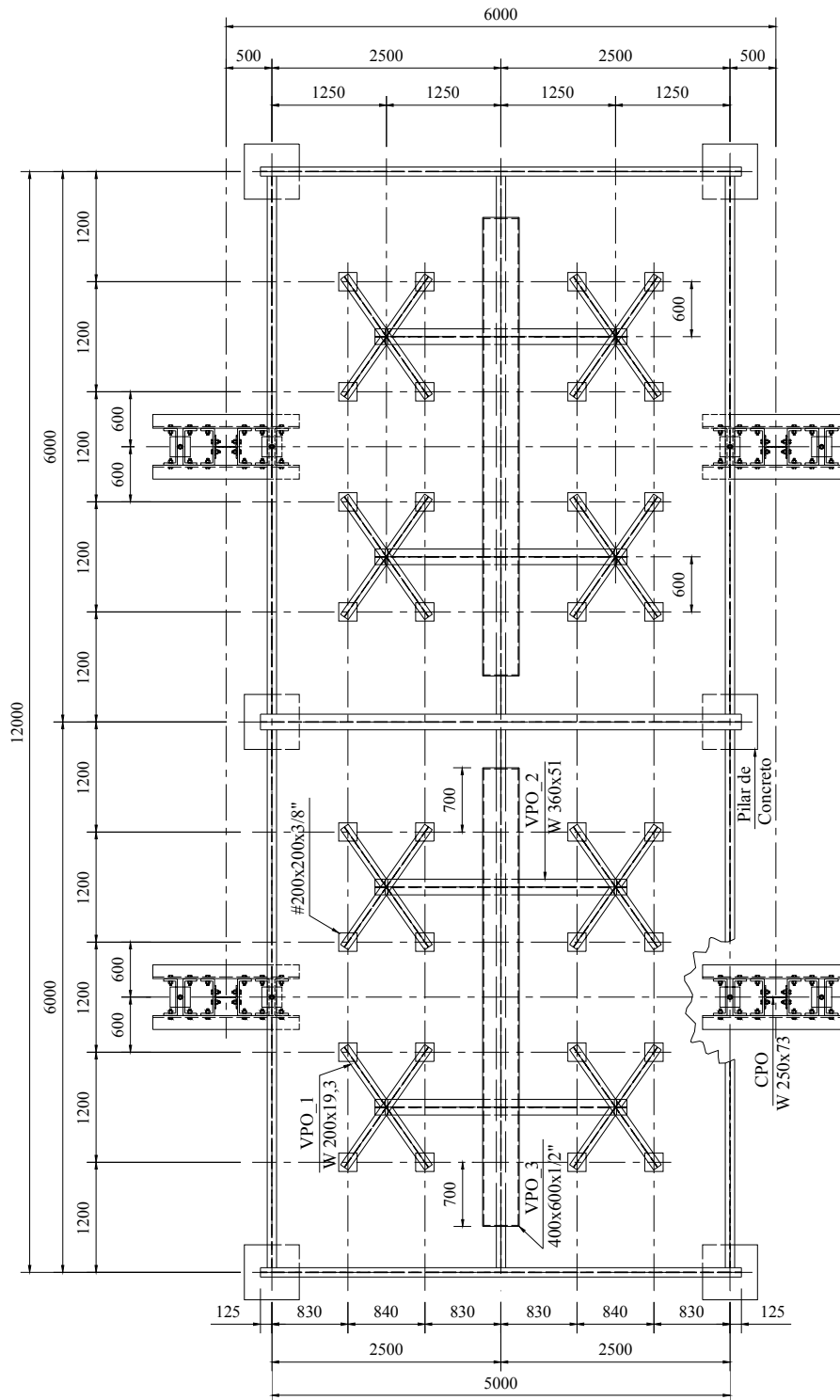
A segunda etapa dos ensaios consistiu na aplicação de um carregamento estático sobre o piso, caracterizando-se o estado limite de serviço (formação de fissuras e deslocamentos) e o estado limite último, com a identificação de possíveis mecanismos de colapso plástico. Com o intuito de que a distribuição do carregamento fosse a mais uniforme possível sobre a laje e assim reproduzir de maneira mais realística uma situação comum de uso da estrutura, foram utilizados 32 pontos de carga, por meio do posicionamento de 8 cruzetas (VPO\_1, Fig. V-43) – a comparação dos deslocamentos obtidos via análise estática linear do modelo 1 da Fig. V-21 sob duas situações de carregamento (uniforme e 32 cargas pontuais) comprova que a utilização de 32 pontos de carga é capaz de simular um carregamento uniformemente distribuído sobre toda a laje (Fig. V-44). Cada conjunto de duas cruzetas recebia o carregamento de uma viga de distribuição (VPO\_2, Fig. V-43), totalizando quatro vigas. Cada conjunto com duas vigas de distribuição recebia, por sua vez, o carregamento de uma viga mais rígida (VPO\_3, Fig. V-43), num total de duas vigas mais rígidas, uma para cada lado da laje, e sobre as quais eram aplicadas as cargas pontuais dos atuadores hidráulicos<sup>1,2</sup> - Fig. V-45 e Fig. V-46. Cada atuador hidráulico estava ligado a um pórtico rígido que era ancorado

1. Atuador hidráulico, capacidade: 1500 kN. MTS Systems Corporation, Minneapolis, Minnesota.

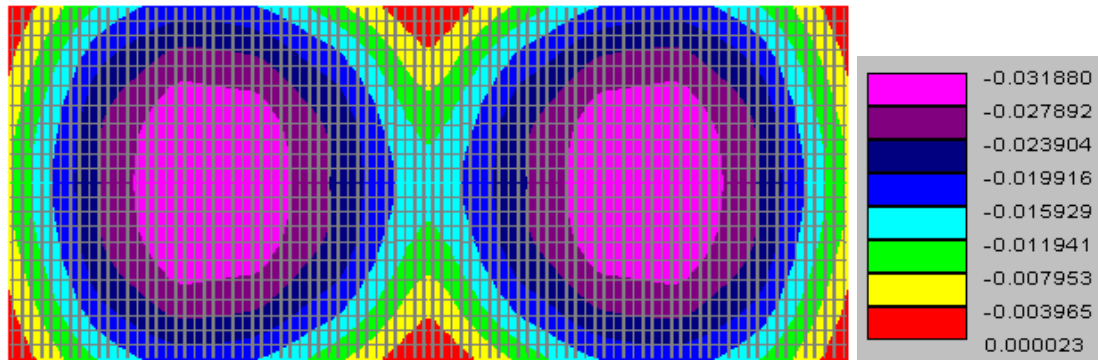
2. Foi utilizado o controle de deslocamento durante os ensaios estáticos.



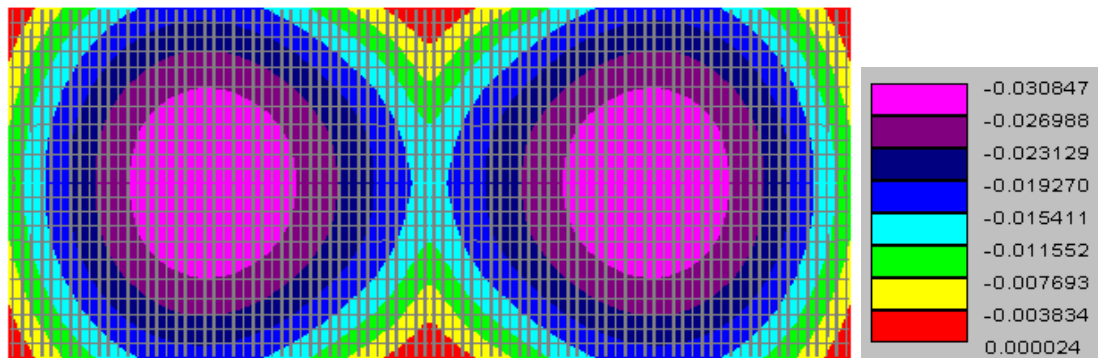
na laje de reação do laboratório. Por fim, um sistema de contraventamento com vergalhões de aço em “x” foi provido a fim de estabilizar os pórticos durante os ensaios. Nas figuras Fig. V-47, Fig. V-48 e Fig. V-49 ilustram-se os projetos de fabricação das vigas, das colunas e do sistema de contraventamento dos pórticos, respectivamente, enquanto na Fig. V-50 tem-se uma visão frontal do sistema de contraventamento.



**Fig. V-43 Sistema com 32 pontos de carga.**



(a)



(b)

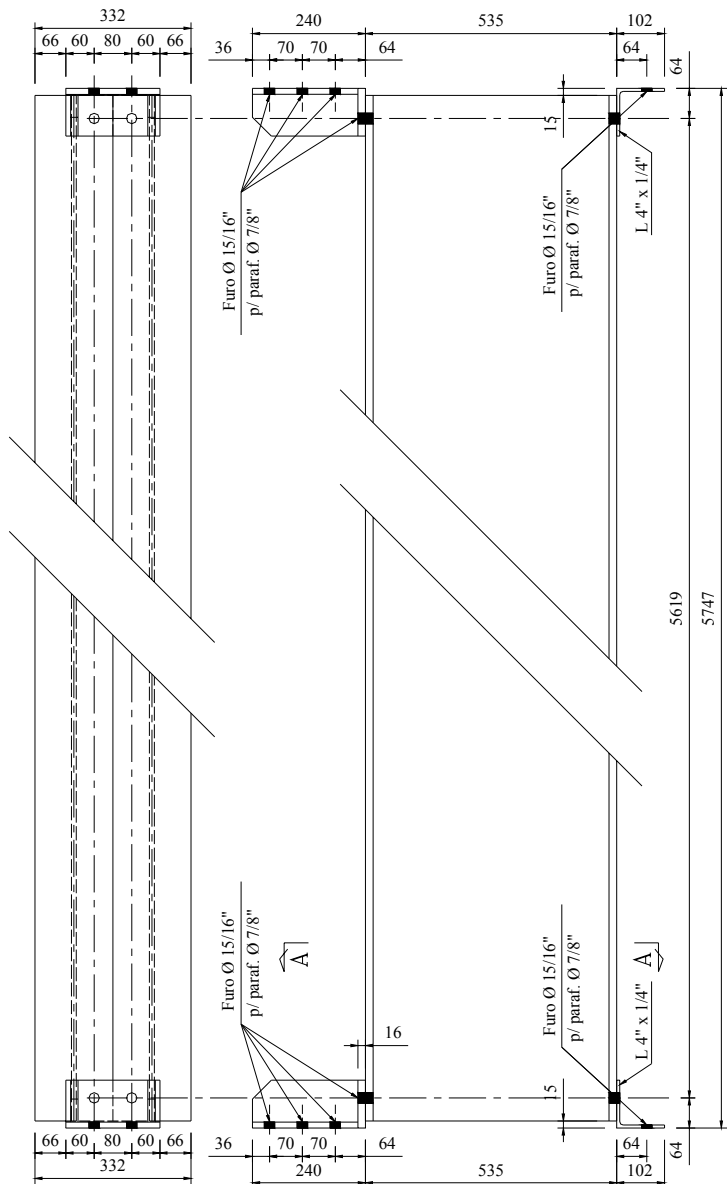
**Fig. V-44 Deslocamentos ( $m$ ) do piso obtidos via modelo 1 da Fig. V-21 para um sistema com: (a) 32 cargas pontuais ( $P=43,1\text{ kN}$ ) posicionadas segundo a Fig. V-43; (b) carregamento uniformemente distribuído ( $q=23\text{ kN/m}^2$ ).**



**Fig. V-45 Montagem do sistema de carga: cruzetas e vigas de distribuição.**



**Fig. V-46 Vista da viga do pórtico de ensaio, do atuador hidráulico, da viga rígida, das vigas de distribuição, das cruzetas e detalhe das patolas de carga.**



Corte A-A

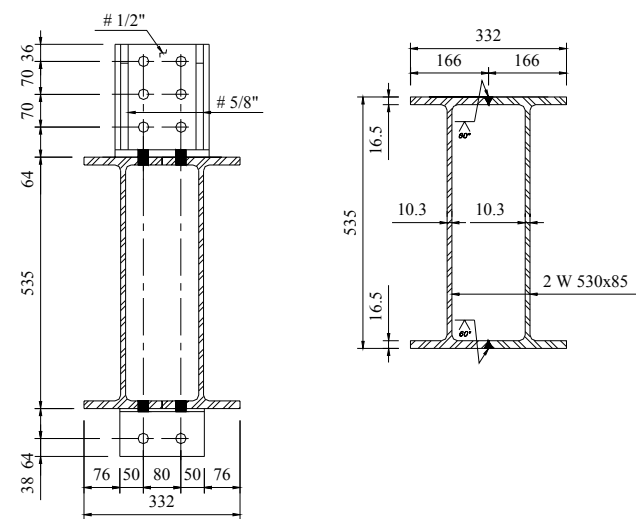


Fig. V-47 Viga dos pórticos de ensaio.

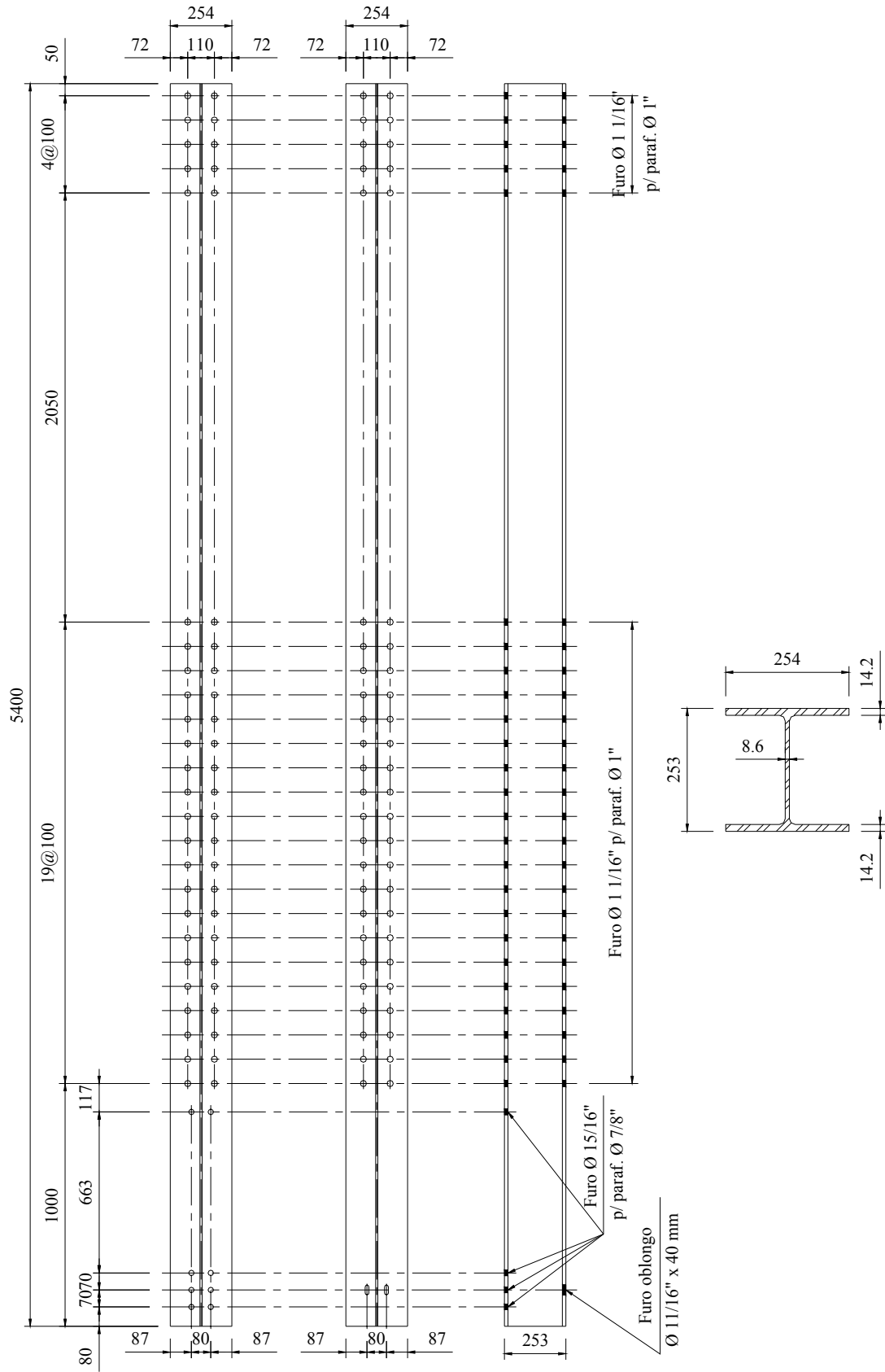


Fig. V-48 Coluna dos pórticos de ensaio.

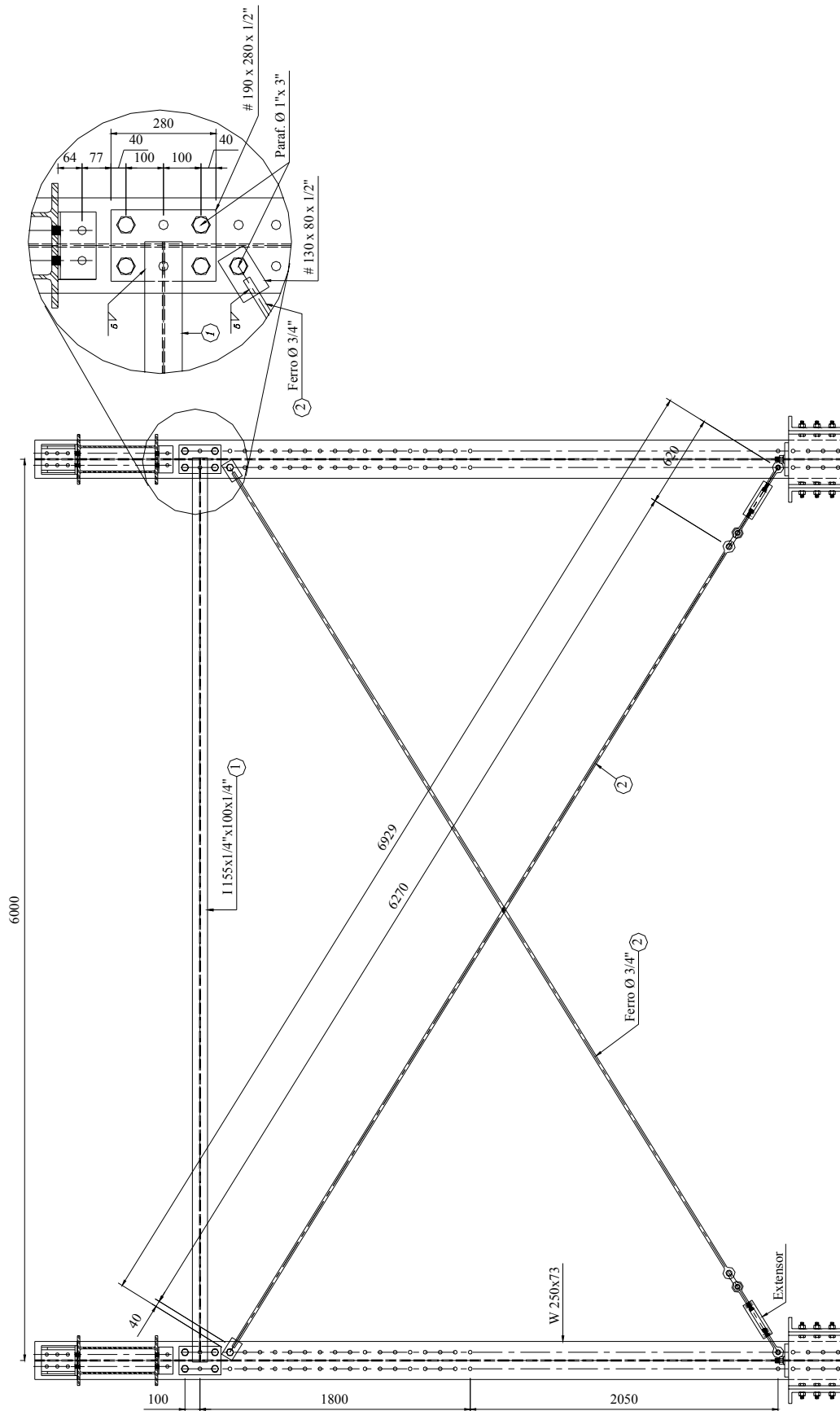


Fig. V-49 Contraventamento dos pórticos de ensaio.



**Fig. V-50 Vista frontal do contraventamento.**

### **V.5.2 Instrumentação e aquisição dos sinais**

Para o acompanhamento dos ensaios estáticos foram utilizados diversos tipos de sensores, compreendendo extensômetros elétricos de resistência e sensores de deslocamento.

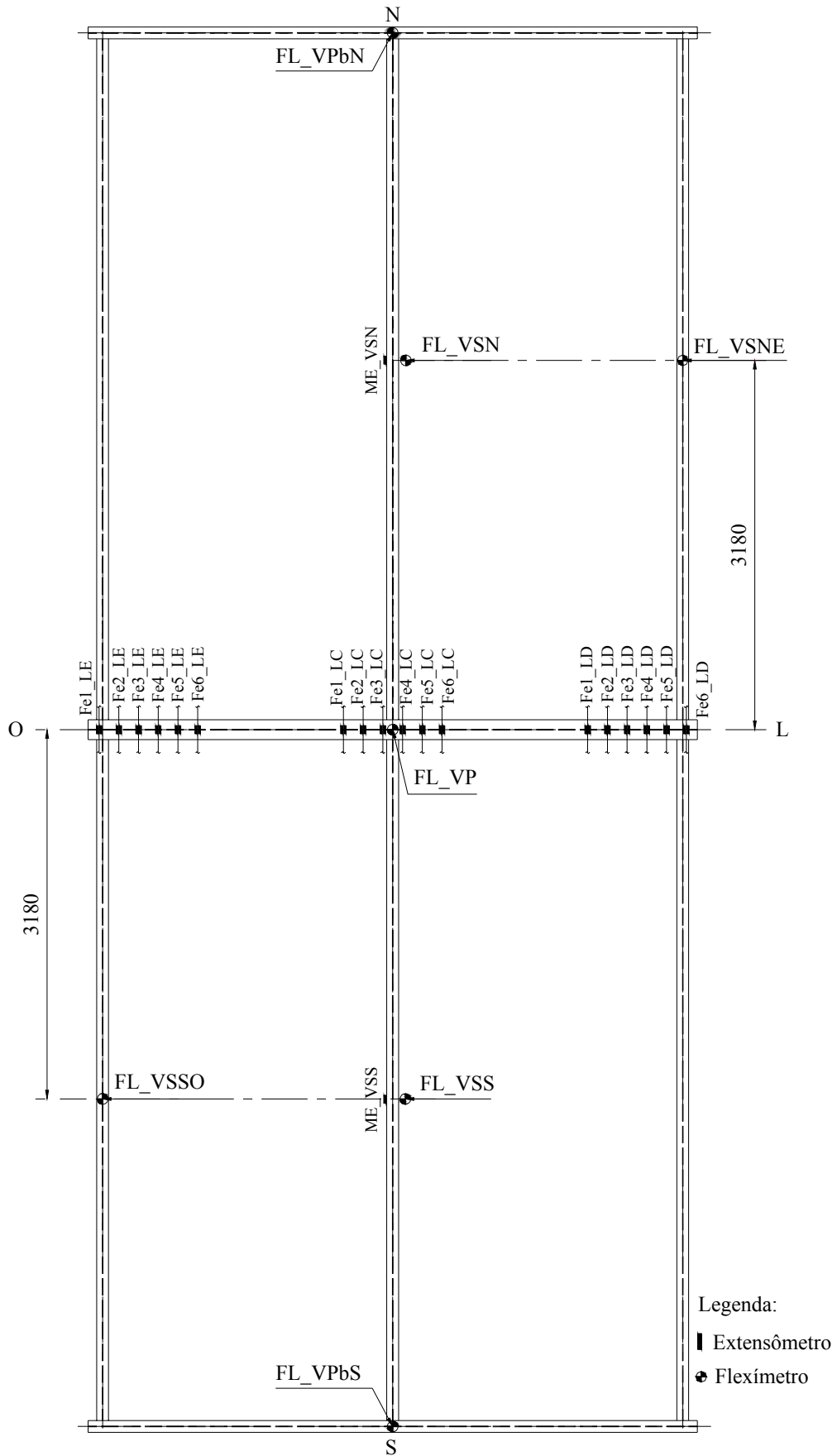
Na figura Fig. V-51 é apresentada uma planta parcial da instrumentação utilizada, podendo ser identificados 18 sensores do tipo Fei\_LE, Fei\_LC ou Fei\_LD ( $i=1,6$ ), que representam extensômetros elétricos de resistência<sup>1</sup> colados nas barras principais das ligações entre as vigas secundárias de borda e a viga principal (ligações LE e LD) e entre a viga secundária interna e a viga principal (ligação LC). Na figura Fig. V-52, tem-se uma vista destes sensores posicionados antes da concretagem da laje<sup>2</sup>.

Adicionalmente, extensômetros elétricos de resistência<sup>3</sup> também foram posicionados nas mesas inferiores das vigas secundárias internas a fim de acompanhar as deformações e, conseqüentemente, as tensões nesta região das vigas na zona de momento fletor positivo, sendo identificados por ME\_VSN e ME\_VSS.

1. Extensômetros elétricos de resistência da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd* (Resistência: 120  $\Omega$ ; comprimento: 5 mm).

2. Na verdade, em cada barra foram colados dois extensômetros. Todas as medidas relacionadas a estes sensores constituem, na verdade, a média dos valores obtidos.

3. Extensômetros elétricos de resistência da  $\equiv M \equiv M \equiv$  - *Micro Measurements, measurements group, inc.* (Resistência: 120  $\Omega$ ; comprimento: 3,2 mm).



**Fig. V-51** Planta de instrumentação parcial para os ensaios estáticos.





**Fig. V-52 Vista dos extensômetros colados nas armaduras das ligações mistas.**

Como na análise experimental dos protótipos cruciformes, na ligação entre a viga secundária interna e a viga principal (ligação LC), rosetas<sup>1</sup> foram utilizadas para avaliar o nível das tensões nas abas das cantoneiras adjacentes à alma da viga principal, sendo posicionadas o mais próximo possível das prováveis linhas de plastificação segundo a Fig. II-4.

Como relatado no item V.3, vale lembrar que foram inseridos extensômetros elétricos de resistência<sup>2</sup> no fuste dos parafusos das abas das cantoneiras de alma adjacentes à alma da viga principal, a fim de acompanhar a carga instalada nestes elementos (Fig. V-53).

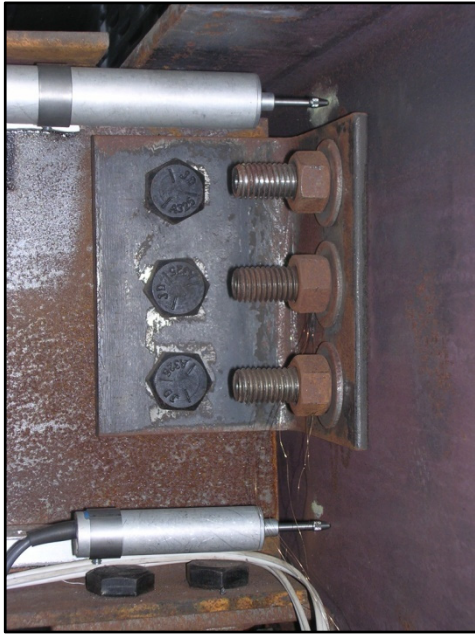
Por sua vez, as rotações locais das ligações foram obtidas com o auxílio de flexímetros que indicavam o deslocamento relativo entre as almas das vigas secundárias e a alma da viga principal (referência), estando posicionados o mais próximo possível das mesas superior e inferior das vigas secundárias – Fig. V-53. Dois tipos de sensores foram utilizados, a saber, sensores resistivos<sup>3</sup> de ponte completa e potenciômetros<sup>4</sup>.

1. Extensômetros elétricos de resistência da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd.*: KFG-5-120-D17-11N3OC2 (Resistência: 120  $\Omega$ ; comprimento: 5 mm; gage factor: 2,1  $\pm$  1%) - dois extensômetros a 90° e um na bissetriz, a 45°.

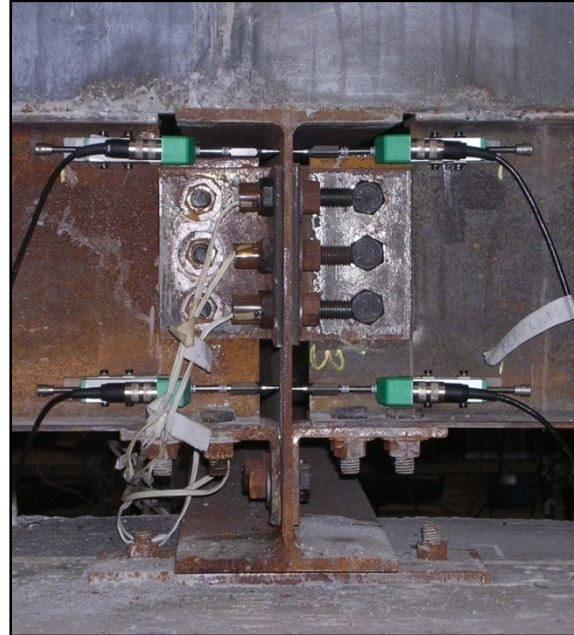
2. Extensômetros elétricos de resistência da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd.*: KFG-3-120-C20-11 (Resistência: 120  $\Omega$ ; comprimento: 3 mm; gage factor: 2,03  $\pm$  1%).

3. Transdutores lineares de deslocamento da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd.*: DT – 20A (20 mm de curso) e DT – 50A (50 mm de curso).

4. Potenciômetro da *Gefran* de 50 mm de curso.



(a)



(b)

**Fig. V-53 Sensores de deslocamento utilizados para medição das rotações locais das ligações: (a) resistivos (ponte completa); (b) potenciômetros.**

Para o acompanhamento dos deslocamentos da estrutura, foram utilizados sete flexímetros<sup>1</sup>, posicionados nos vãos das vigas secundárias internas (FL\_VSN, Fig. V-54, e FL\_VSS), das vigas secundárias de borda (FL\_VSSO e FL\_VSNE), da viga principal (FL\_VP) e das vigas principais de borda (FL\_VPbN e FL\_VPbS), conforme indica a Fig. V-51.

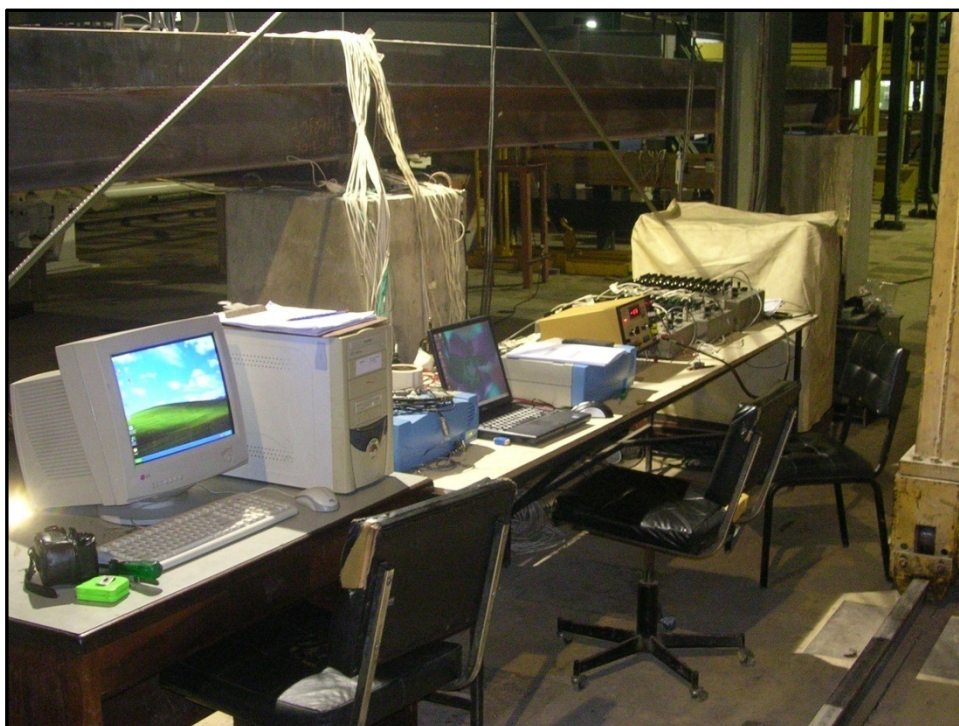


**Fig. V-54 Medição da flecha no vão viga secundária interna (FL\_VSN).**

1. Transdutores lineares de deslocamento da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd.*: DT – 50A (50 mm de curso), DT – 100A (100 mm de curso).

Para aquisição dos sinais dos transdutores de deslocamentos, foi utilizado o sistema *ADS2000* da *Lynx*, já descrito no item V.4.2 (Fig. V-55). As células de carga dos atuadores hidráulicos também eram conectadas a este sistema de aquisição de tal sorte que a carga aplicada e os deslocamentos da estrutura eram monitorados continuamente.

Enfim, para aquisição das deformações dos extensômetros foi utilizado um sistema composto por uma caixa comutadora<sup>1</sup> e um leitor de deformações<sup>2</sup> (Fig. V-55), de tal sorte que as leituras eram feitas de forma intermitente, isto é, não contínua.



**Fig. V-55 Sistema de aquisição de dados nos ensaios estáticos.**

### **V.5.3 Análise dos resultados**

Neste item são apresentados os resultados experimentais obtidos no ensaio estático do protótipo do piso misto. Os resultados experimentais são comparados com os resultados teóricos obtidos por meio de dois modelos computacionais elaborados com o programa *PAEST3D* (modelo 1, Fig. V-21) e o programa *Grecon* (modelo 2, Fig. V-56).

1. Caixa comutadora com 48 canais da *Kyowa – Eletronic Instruments CO, Ltd.*, onde existem resistências para completar as pontes de *Wheatstone* a serem formadas com os extensômetros colados na estrutura.
2. Leitor de deformações também composto por uma fonte alimentadora do circuito com os extensômetros.

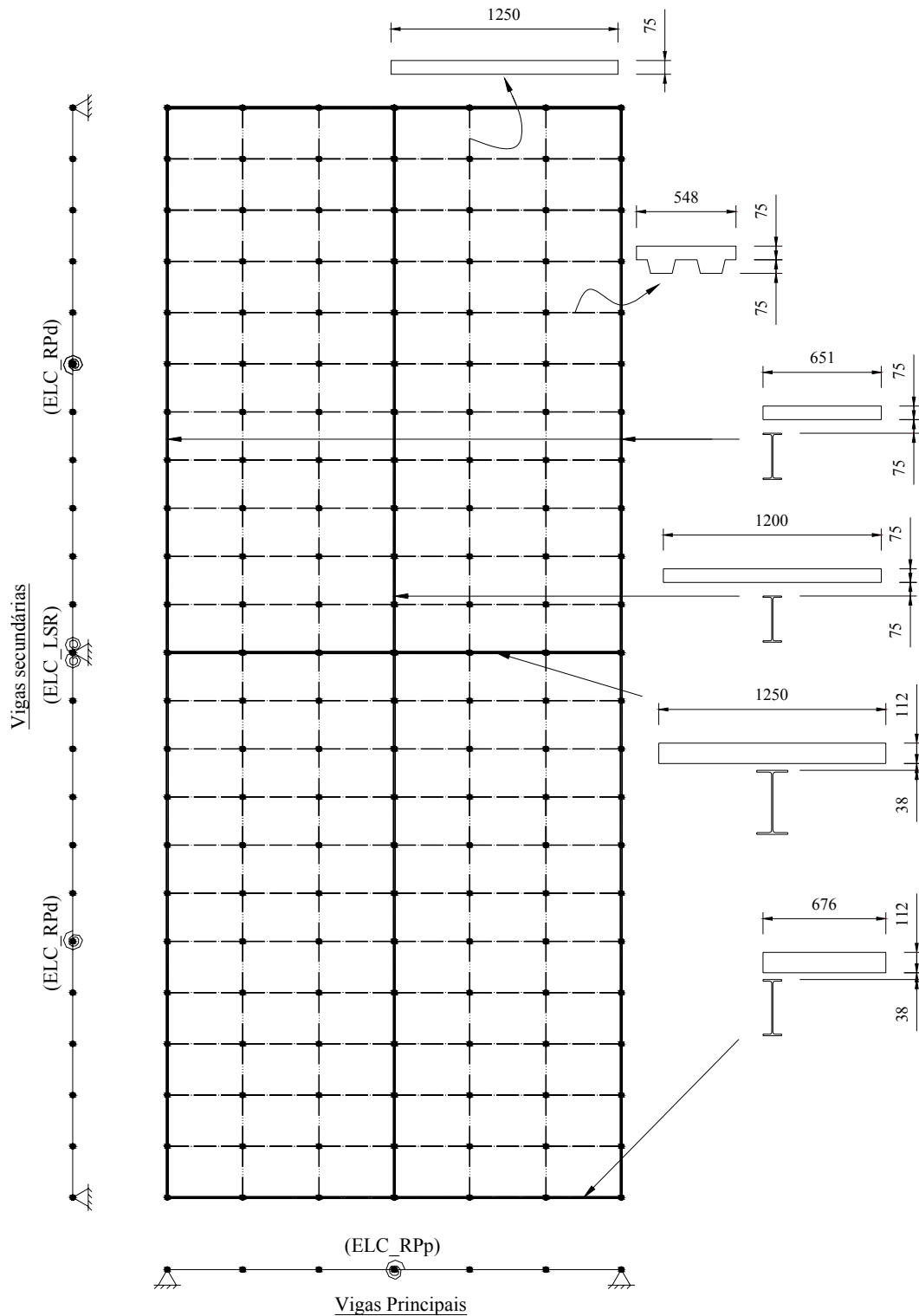
Conforme visto no capítulo IV, com o programa *PAEST3D* não é possível a realização de análises estáticas não-lineares. Sendo assim, a fim de se levar em consideração o processo de fissuração na laje de concreto, considerou-se que cerca de 15% do vão das vigas secundárias, na região de momento negativo, estaria/seria fissurado, considerando-se nesta região um valor correspondente a 1/3 do módulo de elasticidade secante do concreto, isto é,  $E_c^* = 7400 \text{ MPa}$ . Além disso, foi utilizado o modelo simplificado da Fig. II-2b para representar as ligações mistas, sendo utilizado o valor da rigidez inicial sem a contribuição do concreto em tração ( $k_{\theta,mi}$ ) dividido por um fator  $\eta_r = 2,0$  (como a análise é linear, é utilizado um único valor para todas as etapas de carregamento). Com estas diferenças entre modelo aqui utilizado e aquele descrito no item V.4.3, foi então efetuada uma análise estática linear do protótipo do piso misto.

O modelo computacional 2 (Fig. V-56), elaborado com o programa *Grecon*, é constituído por elementos de grelha com e sem conexões nas bordas, sendo também a laje de concreto representada por meio destes elementos. As propriedades dos elementos representativos das vigas mistas aço-concreto foram determinadas da Resistência dos Materiais considerando-se seções homogeneizadas conforme descrito no item IV.1.1 – as larguras colaborantes da laje referentes a cada viga foram obtidas segundo os manuais de projeto Eurocode 4 [14] e AISC [42]. Neste novo modelo, são então considerados elementos de conexão não lineares segundo a Eq.(II-1), a fissuração na laje de concreto segundo a Eq.(IV-5) e a formação de rótulas plásticas nas vigas mistas segundo o item IV.1.2, sendo possível, pois, uma análise não-linear física do piso. A análise incremental não-linear física foi efetuada conforme descrito no item IV.1, tendo sido utilizadas 500 etapas de carregamento. Seguem os dados do modelo 2:

- 193 nós, 154 elementos de grelha sem conexão e 70 elementos de grelha com conexão;
- Módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e massa específica do aço:  $E_a = 205000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ;
- Módulo de elasticidade secante, coeficiente de Poisson e massa específica do concreto:  $E_c = 22100 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,2$  e  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ ;
- Dois tipos de elementos de conexão representativos das ligações sem-rígidas mistas LE ou LD e LC, regidos pela Eq.(II-1) e com as características discriminadas na Tab. V-4 (ELC\_LSR, Fig. V-56);



- Dois tipos de elementos de conexão utilizados para representar a formação de rótulas plásticas nos vãos das vigas secundárias segundo a Eq.(IV-8a) (ELC\_RPd) e das vigas principais segundo a Eq.(IV-8b) (ELC\_RPp, Fig. V-56).

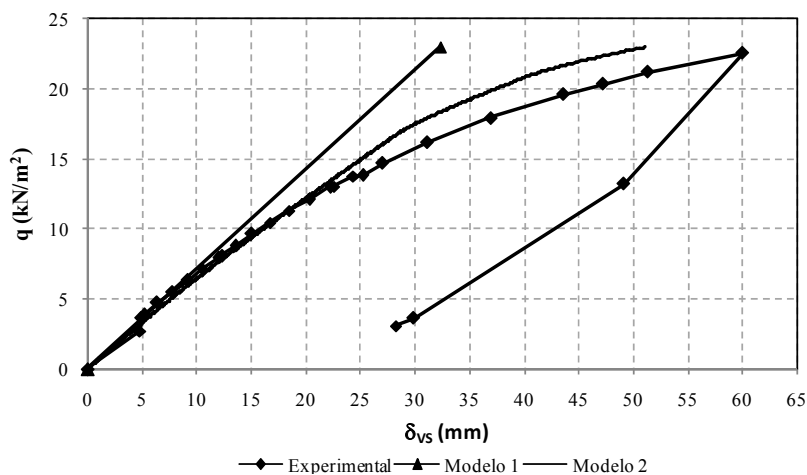


**Fig. V-56 Modelo 2: discretização utilizada e visão geral dos elementos de grelha.**

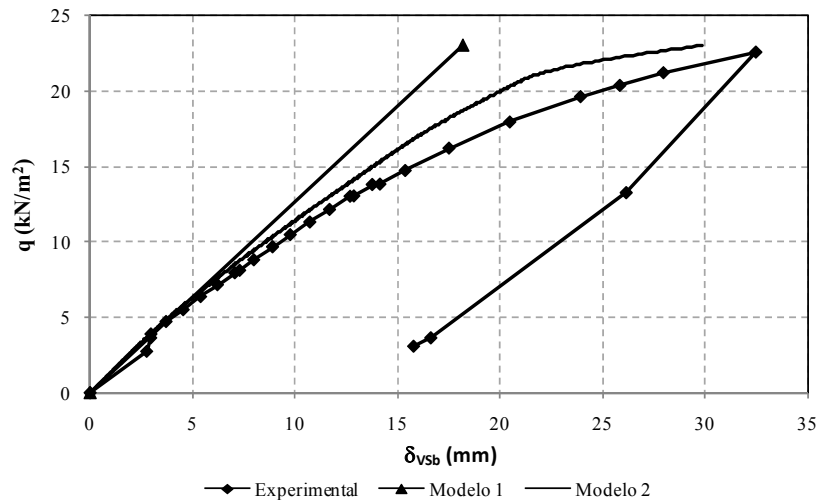
Vale salientar que para a determinação das propriedades do elemento de grelha representativo da viga principal VP foi também considerado um valor correspondente a  $1/3$  do módulo de elasticidade secante do concreto ( $E_c^* = 7400 \text{ MPa}$ ) de modo a se considerar o aparecimento de fissuras da mesa de concreto comprimida ao longo da análise, fissuras estas paralelas ao eixo da viga principal e oriundas de momentos fletores negativos nas vigas secundárias – esta imposição não se faz necessária nas vigas secundárias uma vez que nestas a evolução do processo de fissuração na região de momento negativo é feita de forma automática pelo programa, o que não ocorre na viga principal, que só está submetida a momentos fletores positivos, apesar de o trecho colaborante da laje fissurar ao longo do carregamento.

Apresentam-se, nas figuras Fig. V-57 a Fig. V-60, os deslocamentos teóricos e experimentais obtidos do protótipo de piso misto sob carregamento estático. Nas figuras Fig. V-57, Fig. V-58 e Fig. V-60, os deslocamentos indicados correspondem à média dos valores obtidos com os sensores FL\_VSN e FL\_VSS, FL\_VSNE e FL\_VSSO e FL\_VPbN e FL\_VPbS, respectivamente. O eixo das ordenadas é sempre dado em função da carga distribuída aplicada sobre a laje, correspondente ao peso próprio da estrutura mais o somatório das cargas pontuais aplicadas dividido pela área total da laje.

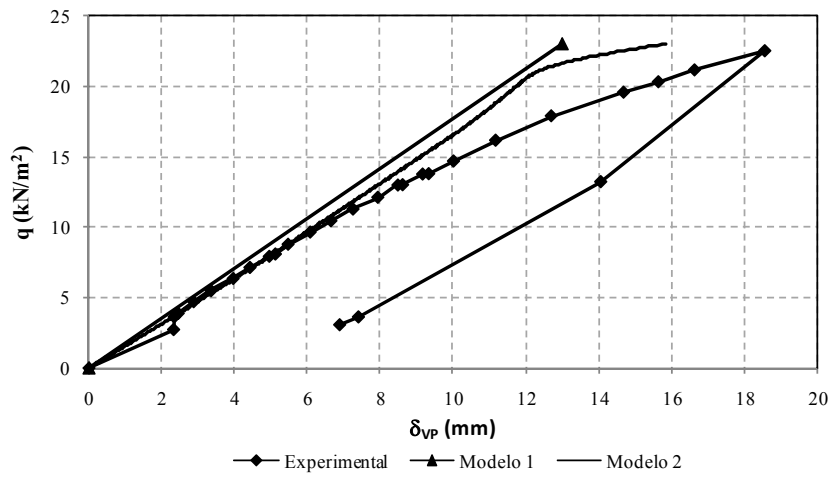
Com relação ao modelo 1, haja vista a análise linear efetuada, só se verifica uma boa correlação teórico-experimental no início do carregamento, sendo a rigidez inicial do modelo numérico bastante próxima àquela obtida experimentalmente, com exceção da viga principal de borda VP\_b.



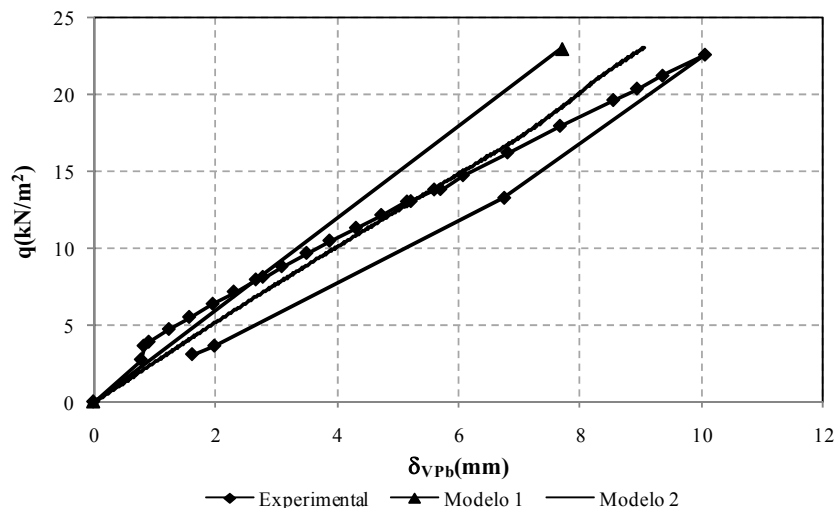
**Fig. V-57 Deslocamentos das vigas secundárias internas medidos nos pontos de posicionamento dos sensores FL\_VSN e FL\_VSS - Fig. V-51.**



**Fig. V-58** Deslocamentos das vigas secundárias de borda medidos nos pontos de posicionamento dos sensores FL\_VSNE e FL\_VSSO - Fig. V-51.



**Fig. V-59** Deslocamentos da viga principal VP medidos no ponto de posicionamento do sensor FL\_VP- Fig. V-51.

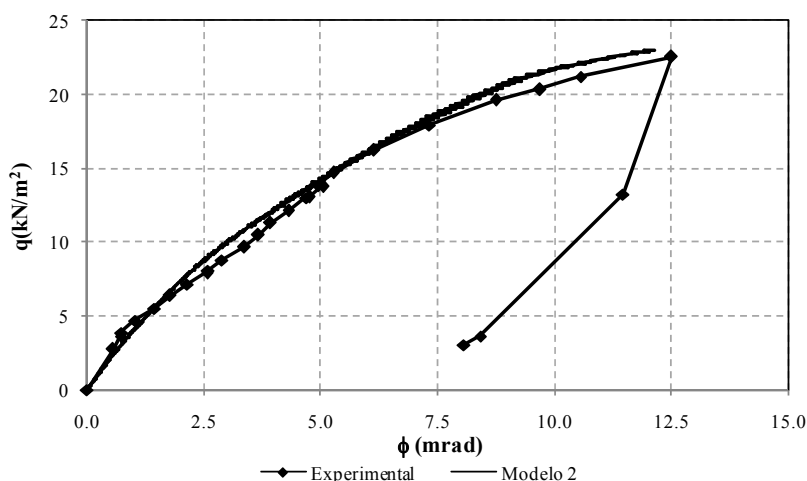


**Fig. V-60** Deslocamentos das vigas principais de borda medidos nos pontos de posicionamento dos sensores FL\_VPbN e FL\_VPbS - Fig. V-51.

No que se refere ao modelo 2, onde se efetuou uma análise não-linear física do protótipo, observa-se uma boa correlação teórico-experimental ao longo de todo o carregamento. O modelo teórico 2 foi, portanto, capaz de capturar as não-linearidades referentes à formação de rótulas plásticas nas vigas e nas ligações, assim como a evolução do processo de fissuração na laje.

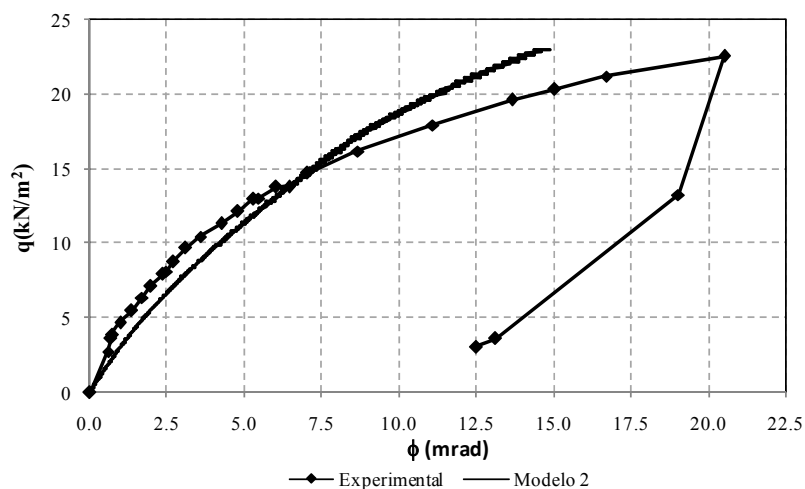
Observa-se, nas figuras Fig. V-59 e Fig. V-60, que para valores de carga distribuída em torno de  $17 \text{ kN/m}^2$  e para o modelo 2, ocorre um pseudo “aumento” de rigidez nas vigas principais. Acredita-se que isto se deva ao fato de que neste momento começa a haver uma transferência, por meio dos elementos que simulam a laje, de um quinhão maior de carga para as vigas secundárias de borda, haja vista que as vigas secundárias internas se encontram em estágio já iniciado de plastificação no vão. Na verdade, isto também é fruto do modelo de plasticidade adotado no programa *Grecon*, com a consideração da plasticidade concentrada em um elemento de conexão que simula uma rótula no meio do vão (Fig. V-56), ao invés da plasticidade ser distribuída, com uma perda de rigidez mais uniforme ao longo da viga e como realmente ocorre na prática. Entretanto, vale salientar que ainda assim a correlação entre os resultados é bastante razoável.

As curvas carga versus rotação teóricas (modelo 2) e experimentais são discriminadas nas figuras Fig. V-61 e Fig. V-62. As rotações locais experimentais foram obtidas pela composição dos deslocamentos dos sensores instalados na estrutura segundo a Fig. V-53, substancialmente da mesma maneira que nos testes com os protótipos cruciformes, segundo a Eq.(III-1). Na figura Fig. V-61, as rotações correspondem ao valor médio obtido para as ligações LE e LD.



**Fig. V-61** Curva  $q \times \theta$  das ligações LE ou LD.





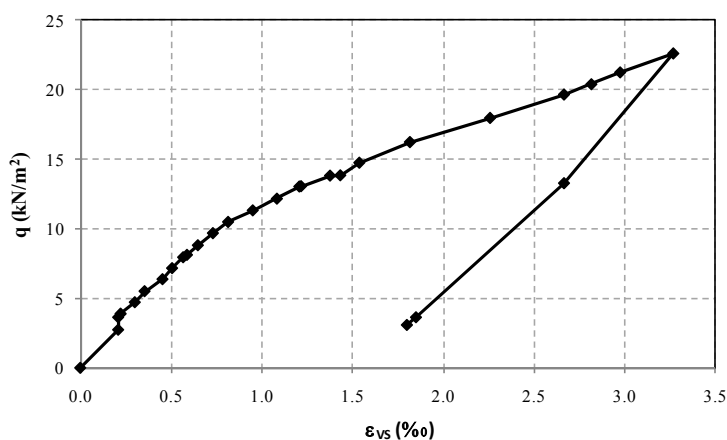
**Fig. V-62 Curva  $q$  x  $\theta_l$  da ligação LC.**

Observa-se nas figuras Fig. V-61 e Fig. V-62, que o modelo teórico apresentado no capítulo II e experimentado e discutido no capítulo III, é capaz de representar satisfatoriamente o comportamento desta tipologia de ligação mista com cantoneiras de alma e assento num piso misto semicontínuo em escala real.

Com o intuito de verificar o comportamento das ligações mistas sob ação de momentos desbalanceados (que pode ocorrer em situações de uso de estruturas de pisos), foi aplicado um carregamento desbalanceado na laje em torno de 10%, aplicando-se alternadamente uma carga  $q \approx 14.5 \text{ kN/m}^2$  no lado norte e  $q \approx 13,0 \text{ kN/m}^2$  no lado sul e vice-versa, numa faixa, portanto, em torno do carregamento de serviço da laje (cerca de 55% da carga última). Observando-se as figuras Fig. V-61 e Fig. V-62, não se percebe qualquer anomalia no comportamento das ligações sob este nível de desbalanceamento, mostrando-se o modelo teórico desta tipologia de ligação ainda capaz de representar o seu comportamento nesta situação.

Na figura Fig. V-63, por sua vez, é representada a evolução das deformações médias medidas pelos sensores ME\_VSN e ME\_VSS nas mesas inferiores das vigas secundárias internas, conforme indicado na Fig. V-51. Observando-se a Fig. V-63, verifica-se que a carga relativa ao começo do escoamento da mesa inferior da seção mais solicitada no vão da viga secundária interna coincide com aquela relativa ao início da formação da rótula plástica no vão da viga secundária interna obtida com o programa *Grecon*, isto é,  $q \approx 16$  a  $17 \text{ kN/m}^2$ , conforme indicam a Fig. V-57 ou o pseudo “aumento” de rigidez nas figuras Fig. V-59 e Fig. V-60 ( $\varepsilon_{sy} = 1,7\%$ , considerando-se os

valores teóricos para o módulo de elasticidade  $E = 205000 \text{ MPa}$  e para a tensão de escoamento  $f_y = 345 \text{ MPa}$  referentes ao aço ASTM A572 Grau 50).



**Fig. V-63 Deformações médias nas mesas inferiores tracionadas das vigas secundárias internas.**

Conforme pode ser observado nas figuras Fig. V-57, Fig. V-58 e mais nitidamente na Fig. V-63, ocorre uma perda de rigidez na estrutura em torno de uma carga  $q \approx 10 \text{ kN/m}^2$ . Isto se deve, como nos testes com os protótipos cruciformes relatados no capítulo III, à configuração do processo de fissuração estabilizado, tendo sido observado no ensaio da laje mista a formação de uma segunda fissura paralela ao eixo da viga principal nesta etapa do carregamento (Fig. V-64). Observando-se especialmente a Fig. V-62, observa-se que as rotações nas ligações estão em torno de 3 a 4 *mrad*, o que, se observada a Fig. V-16 e a Tab. V-4, corresponde aos momentos de fissuração estabilizada das ligações e a regiões de perda considerável de rigidez das mesmas – observe o leitor que este comportamento já havia sido identificado nos testes com os protótipos cruciformes, essenciais à identificação e compreensão deste fenômeno (Fig. III-13 e Fig. III-15).

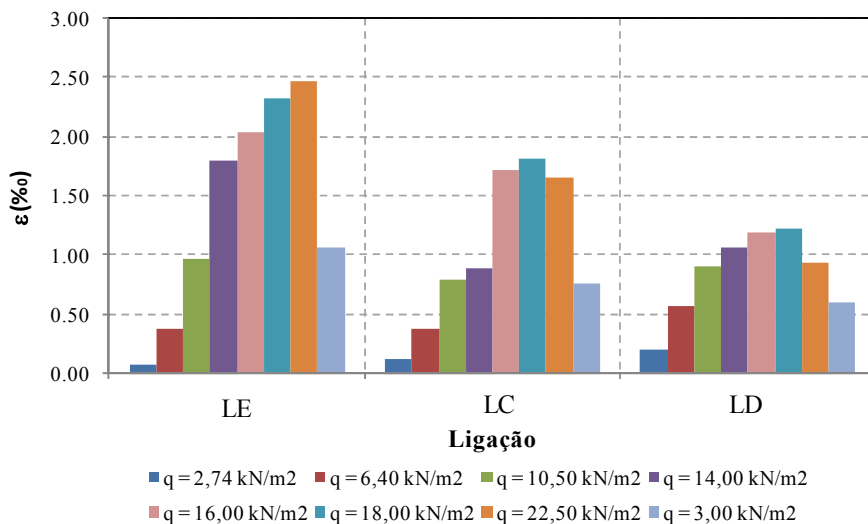
Comprova-se mais uma vez que as cantoneiras de alma, apesar de sua rigidez reduzida, são capazes de controlar a abertura da fissura principal, retardando a configuração do processo de fissuração estabilizado e garantindo ainda a participação da laje de concreto em tração na rigidez inicial da ligação mista; não ocorreram, pois, as rotações excessivas sob momentos ainda baixos verificadas nas ligações mistas sem cantoneiras de alma dos protótipos cruciformes, conforme ilustrado nas figuras Fig. III-14 e Fig. III-16. Por fim, o aumento das deformações observado na Fig. V-63 em torno de  $q \approx 10 \text{ kN/m}^2$  seria devido à transferência de momento fletor das ligações para o vão das vigas secundárias internas haja vista a perda da rigidez das ligações mistas.

Eixo da VP



**Fig. V-64 Processo de fissuração estabilizado na laje.**

Na figura Fig. V-65, ilustra-se a evolução das deformações específicas<sup>1</sup> médias das armaduras principais das ligações (média das deformações nas barras para cada uma das ligações), medidas pelos sensores indicados na Fig. V-51. Mais uma vez observa-se, especificamente nas barras da ligação LC, que em torno da carga  $q = 16 \text{ kN/m}^2$  ocorre um aumento expressivo na deformação média das barras, o que corresponderia ao aumento do momento fletor negativo na ligação LC devido ao começo da plastificação no vão da viga secundária interna.

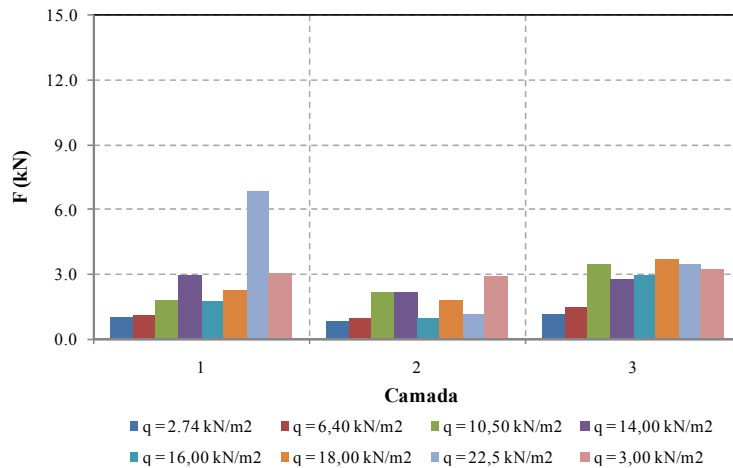


**Fig. V-65 Evolução das deformações médias nas armaduras das ligações da laje.**

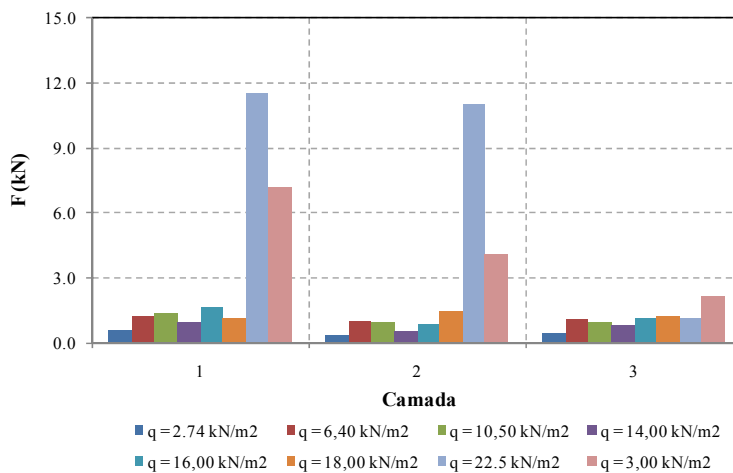
1. As deformações específicas medidas conferem apenas uma noção da deformação nas barras de aço, não sendo necessariamente a deformação média ou no interior da principal fissura, uma vez que a posição desta variou ao longo da largura da laje. Vale lembrar, pois, que o valor da deformação das barras no interior da fissura principal é, como ilustrado na Fig. II-8, superior às deformações em outros pontos da armadura.

Vale salientar que, em geral, não se verificou o escoamento das armaduras no ponto de instalação dos extensômetros, apesar de a deformação medida de algumas barras ter superado o valor  $\varepsilon_{sy} = 2,63\%$  correspondente à deformação de início de escoamento (Tab. V-1).

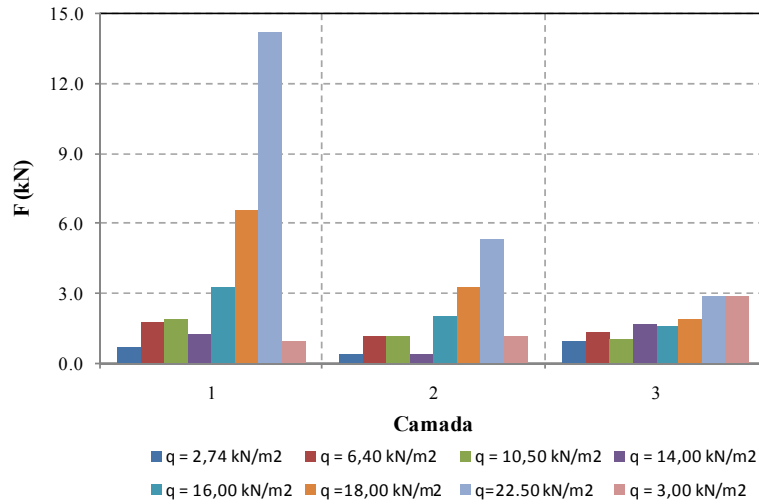
Nas figuras Fig. V-66 a Fig. V-68, ilustra-se a evolução da carga instalada nas camadas de parafusos (dois parafusos por camada) que conectam as abas das cantoneiras de alma adjacentes à alma da viga principal, para as ligações LE, LC e LD. Observa-se nestes gráficos que apenas nas etapas finais de carregamento, quando ocorre a perda de rigidez flexional das vigas secundárias devido à plastificação nos vãos e a conseqüente transferência de momentos para os apoios (ligações semi-rígidas mistas), se verifica um aumento expressivo das cargas instaladas nos parafusos em tração das ligações.



**Fig. V-66** Carga instalada nas camadas de parafusos em tração das abas das cantoneiras de alma adjacentes à alma da viga principal na ligação LE.

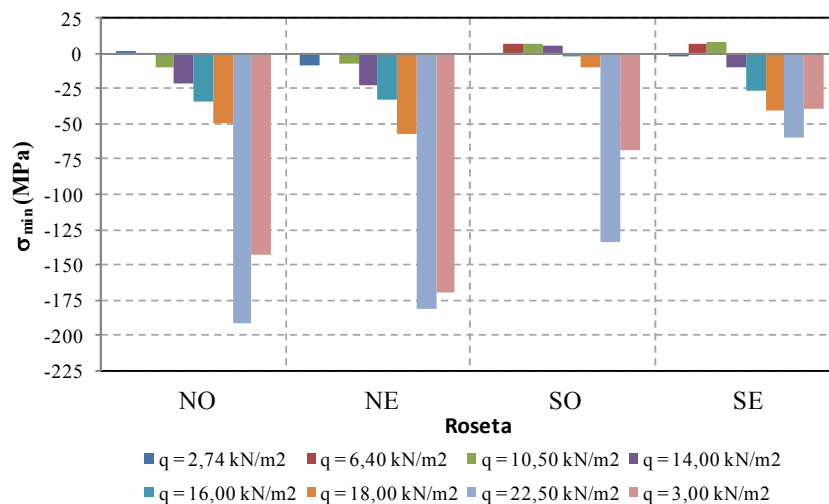


**Fig. V-67** Carga instalada nas camadas de parafusos em tração das abas das cantoneiras de alma adjacentes à alma da viga principal na ligação LC.

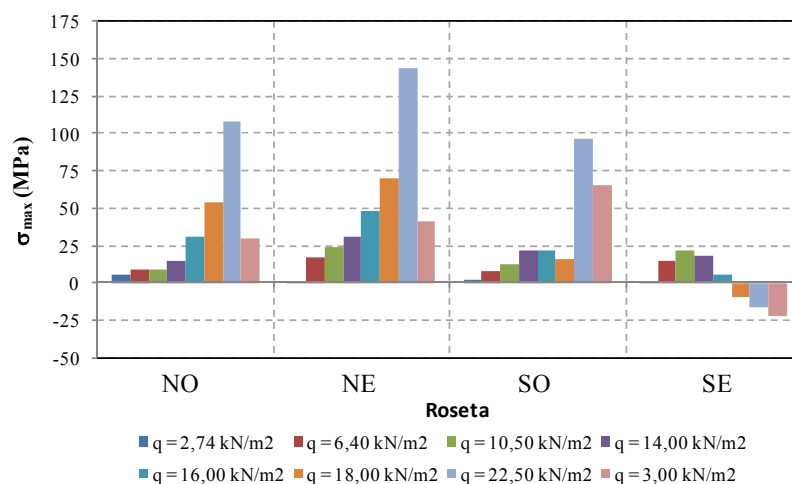


**Fig. V-68 Carga instalada nas camadas de parafusos em tração das abas das cantoneiras de alma adjacentes à alma da viga principal na ligação LD.**

Finalmente, nas figuras Fig. V-69 e Fig. V-70, ilustram-se as tensões principais medidas nas abas das cantoneiras de alma da ligação LC adjacentes à alma da viga principal, medidas com rosetas posicionadas no ponto médio das linhas de plastificação segundo a Fig. II-4. Mais uma vez, observa-se nestes gráficos nas etapas finais de carregamento que, com a perda de rigidez flexional das vigas secundárias devido à plastificação nos vãos, ocorre um aumento do momento negativo nos apoios, verificando-se, pois, um aumento expressivo das solicitações nas cantoneiras da ligação LC.



**Fig. V-69 Tensões principais mínimas das cantoneiras de alma da ligação LC.**



**Fig. V-70 Tensões principais máximas das cantoneiras de alma da ligação LC.**

Do exposto anteriormente, pode-se inferir que para a carga final aplicada ao piso  $q = 23 \text{ kN/m}^2$ , o mecanismo de colapso plástico das vigas mistas semicontínuas, apesar de ainda não completamente instaurado, era iminente, com a formação de rótulas plásticas nos vãos das vigas secundárias internas e de borda; as rótulas plásticas nas ligações mistas, por sua vez, estavam em estágio de formação avançado - as figuras Fig. V-65 a Fig. V-70 indicam ainda certa reserva de resistência, apesar de se ter verificado o escoamento de várias armaduras nos pontos de instalação dos extensômetros, os quais, deve-se lembrar, fornecem deformações inferiores às máximas localizadas no interior das fissuras principais (Fig. II-8). Vale ressaltar que este valor de sobrecarga é muito próximo daquele estimado no item V.1 para a capacidade de carga do piso ( $q = 26 \text{ kN/m}^2$ ), salientando-se ainda que nesta etapa do carregamento não era mais possível a manutenção das cargas nos atuadores hidráulicos, confirmando-se assim a iminência do mecanismo de colapso plástico.

No mais, é importante se notar ainda que, haja vista a reduzida rigidez desta tipologia de ligação mista, adicionada ao processo de fissuração na laje de concreto, as rótulas plásticas se formaram primeiramente nos vãos das vigas mistas para então se formar nas ligações, processo este inverso ao que ocorre em sistemas contínuos ou semicontínuos com ligações de elevada rigidez relativa à viga conectada. Entretanto, vale lembrar que a utilização das ligações mistas viga-viga foi bastante benéfica, tanto do ponto de vista dos estados limites de serviço, controlando a abertura de fissuras, como dos estados limite últimos, com o aumento da capacidade de carga do piso em 20%, quando comparado com a hipotética solução tradicional conforme discutido no item V.1.

## Capítulo VI: Estudo de caso

---

Neste capítulo, é realizado um estudo de caso para avaliar os benefícios do projeto avançado de um sistema de piso misto aço-concreto semicontínuo com ligações semi-rígidas. São efetuadas análises estáticas não-lineares, dinâmicas e a verificação de vibrações excessivas com possibilidade de redução e controle de vibrações, empregando, enfim, todas as ferramentas desenvolvidas no trabalho e os resultados dos testes experimentais.

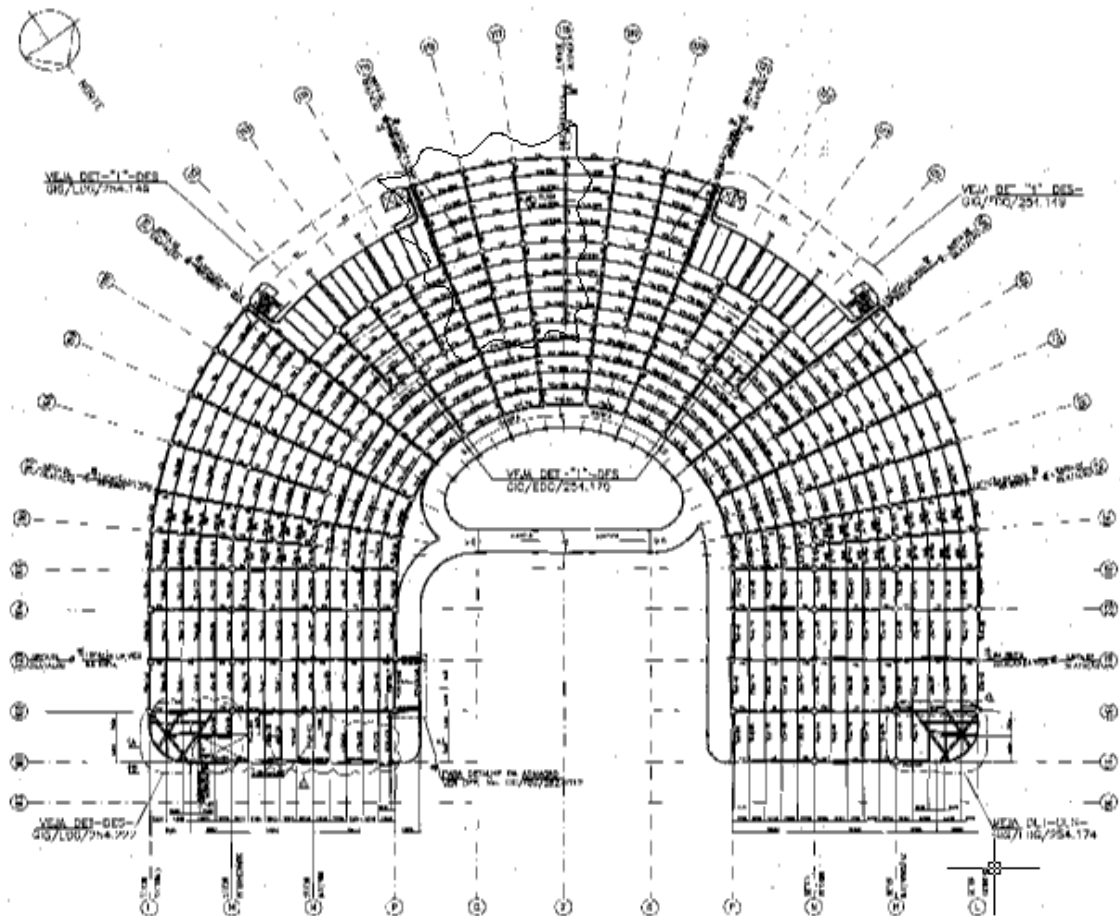
A estrutura em questão corresponde ao edifício garagem (EDG) do Terminal II do aeroporto internacional da cidade do Rio de Janeiro, aeroporto Maestro Antônio Carlos Jobim. A estrutura existente, composta por vigas mistas e lajes com forma de aço incorporada do tipo *steel deck* (portanto não escorada na fase de construção) é de autoria do Engenheiro José Luiz Costa Souza (*Enpro Engenharia e Projetos*), tendo sido concebida segundo a metodologia tradicional, com vigas secundárias e principais consideradas bi-rotuladas, destacando-se, entretanto, por seu pioneirismo, haja vista ser o primeiro edifício garagem de um aeroporto no Brasil projetado e construído com o sistema de piso misto. Outras soluções em concreto armado e protendido com a utilização de lajes *Pi* pré-fabricadas e lajes cogumelo foram propostas, tendo sido, entretanto, empregada a solução em estrutura mista a qual, vale salientar, proporcionou a utilização de grandes vãos entre pilares, fator este essencial à manutenção do espaço

útil necessário ao uso da edificação e que conferiu grande leveza estética ao empreendimento.

A intenção desta etapa é a aplicação da metodologia de projeto avançado de pisos mistos semicontínuos defendida nesta dissertação em uma estrutura real, comparando a nova concepção com aquela utilizada no projeto original e apresentando, então, os benefícios estruturais e econômicos alcançados ao mesmo tempo em que a segurança estrutural e conforto dos usuários são garantidos a despeito da esbelteza proporcionada.

## VI.1 DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA

A estrutura apresenta em planta a forma de uma ferradura (Fig. VI-1). Inicialmente, estavam previstos sete pavimentos ( $95000\text{ m}^2$  de área construída com capacidade para 2580 vagas), mas somente três foram construídos ( $42091\text{ m}^2$ ).

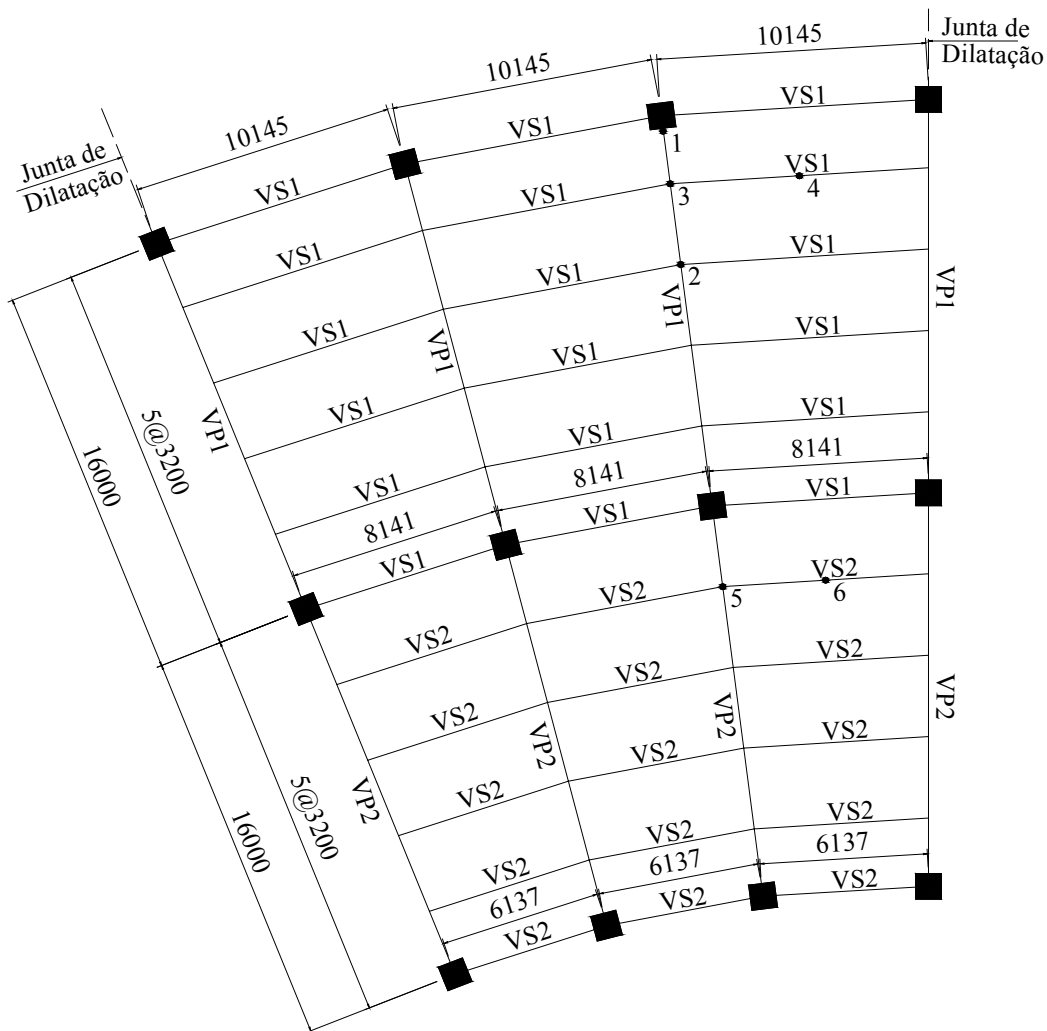


**Fig. VI-1** Planta baixa de um pavimento do edifício garagem (EDG) do aeroporto internacional do Rio de Janeiro.



O sistema é composto por vigas principais (VP1 e VP2) com 15 m de comprimento, apoiadas em pilares de concreto de seção quadrada com largura igual a 1 m, configurando, pois, uma estrutura híbrida. A laje mista, isto é, com forma de aço incorporada (sistema *steel deck* com espessura de chapa de 0,95 mm), apresenta espessura total de 170 mm e vão de 3,2 m, sendo as nervuras ( $h=75$  mm) perpendiculares às vigas secundárias (VS1 e VS2) de comprimento variável.

A estrutura é composta por vários módulos separados por juntas de dilatação, sendo o módulo identificado na Fig. VI-1 detalhado na Fig. VI-2, módulo este em torno do qual transcorrerão todas as análises efetuadas no presente trabalho por se acreditar ser este trecho representativo da estrutura como um todo.



**Fig. VI-2 Trecho da estrutura do EDG a ser analisado.**

## VI.2 ANÁLISE ESTÁTICA DA NOVA CONCEPÇÃO PROPOSTA

O novo projeto proposto de um sistema de piso misto semicontínuo foi concebido segundo o mesmo layout estrutural adotado no projeto original, isto é, foi utilizada a mesma distribuição, quantidade e o mesmo espaçamento de vigas conforme ilustrado na Fig. VI-2. A diferença consiste na adoção de vigas mistas semicontínuas com ligações parcialmente resistentes nas suas bordas, utilizando a tipologia com cantoneiras de assento e alma para conectar as vigas secundárias às principais e ligações com chapas de extremidade para conectar as vigas principais aos pilares. A seguir, descrevem-se apenas os procedimentos para o dimensionamento do novo sistema semicontínuo de piso proposto, ressaltando-se que também foi feita a verificação das vigas do projeto original a fim de evitar discrepâncias quanto aos critérios de dimensionamento porventura utilizados.

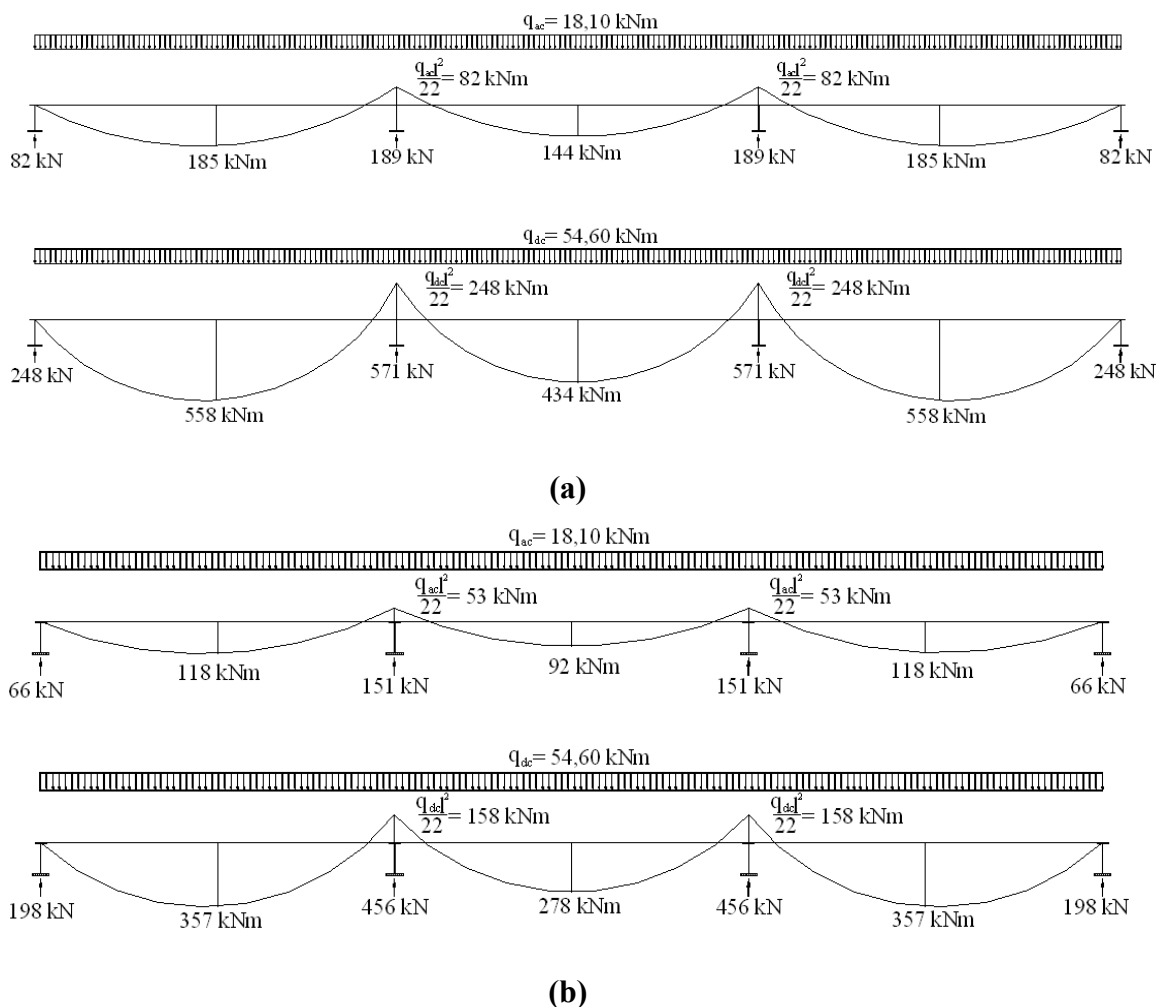
A estrutura será projetada considerando-se apenas cargas de gravidade uma vez que se acredita que, dada a reduzida altura da edificação e grande dimensão em planta (reduzida esbelteza), a ação de vento não seja preponderante. Entretanto, poder-se-ia enrijecer o núcleo da estrutura criando pórticos compostos pelos pilares e vigas mais próximos do centro e que não fazem parte do trecho detalhado na Fig. VI-2. As cargas, materiais e os critérios utilizados foram:

- Cargas antes da cura do concreto: permanente -  $3,39 \text{ kN/m}^2$ ; variável -  $1,00 \text{ kN/m}^2$ ;
- Cargas após a cura do concreto: permanente -  $1,50 \text{ kN/m}^2$ ; variável -  $7,00 \text{ kN/m}^2$ ;
- Graus de continuidade:  $ql^2/22$  para vigas secundárias e  $1,6Pl/10$  e  $2Pl/10$  para as vigas principais VP1 e VP2, respectivamente;
- As extremidades das vigas secundárias adjacentes às vigas principais dos eixos das juntas de dilatação foram consideradas rotuladas;
- Nos apoios externos das vigas principais somente foi considerada a ligação metálica (VPEXT), haja vista que não é viável introduzir grandes valores de momento nestes pontos, pois isto encareceria o projeto das colunas externas. Além disso, há pouco espaço disponível para ancoragem das armaduras;
- Aço utilizado: USI SAC 300 ( $f_y=300 \text{ MPa}$  e  $f_u = 450 \text{ MPa}$ ) para vigas secundárias e ligações e USI SAC 350 ( $f_y=345 \text{ MPa}$  e  $f_u = 500 \text{ MPa}$ ) para vigas

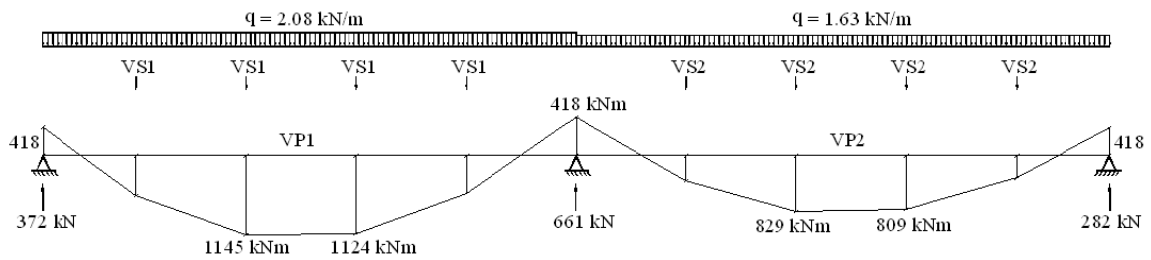
principais. Todos os parafusos são de alta resistência, ASTM A 325, sem controle de torque – ligações por apoio;

- Concreto: para laje,  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ ; para os pilares,  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ ; Aço das armaduras: CA 50A.

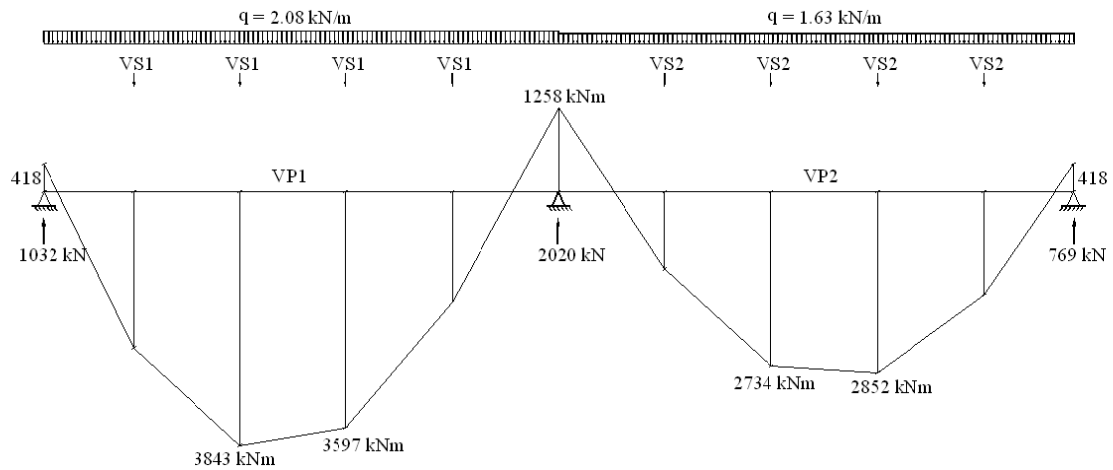
A distribuição de esforços de projeto (coeficientes de ponderação para as cargas permanentes:  $1,2$ ; para as cargas variáveis:  $1,6$  [42]) obtida inicialmente está descrita nas figuras Fig. VI-3 e Fig. VI-4 – para as vigas secundárias, com vãos variáveis, a distribuição apresentada corresponde à das vigas de maiores vãos, enquanto que para as vigas principais, a distribuição corresponde à das vigas onde estão assinalados os pontos  $1, 2, 3$  e  $5$  (Fig. VI-2).



**Fig. VI-3 Distribuição dos esforços obtida no anteprojecto da nova concepção de piso semicontínuo para as fases anterior e posterior à cura do concreto nas vigas secundárias VS1 (a) e VS2 (b).**



(a)



(b)

**Fig. VI-4 Distribuição dos esforços obtida no anteprojeto da nova concepção para as fases anterior (a) e posterior (b) à cura do concreto nas vigas principais.**

De posse da distribuição preliminar dos esforços nos elementos, foram selecionadas as vigas capazes de resistir a estas solicitações (Tab. VI-1), tendo sido os elementos dimensionados segundo as normas AISC LRFD [42] e Eurocode 3 [7] e 4 [14]. Na tabela Tab. VI-2, são apresentadas as resistências ao momento fletor das vigas utilizadas no sistema semicontínuo, tendo sido verificadas as condições de ocorrência de flambagem lateral com torção e distorção ou plastificação total da seção, conforme o caso.

**Tab. VI-1 Dimensões das vigas utilizadas.**

Viga	Concepção	
	Tradicional (projeto original)	Avançada/Semicontínua
VS1	I 530x6,35x130x6,35x140x12,7*	I 530x6,35x130x6,35x145x7,94
VS2	I 420x4,76x130x6,35x130x12,7*	I 400x4,76x130x6,35x145x7,94
VP1	I 730x9,53x350x25,40x370x37,50	I 730x9,53x260x15,80x385x31,75
VP2	I 730x9,53x260x25,40x280x37,50	I 730x9,53x260x15,80x305x25,40

\*Dimensões diferentes do projeto original

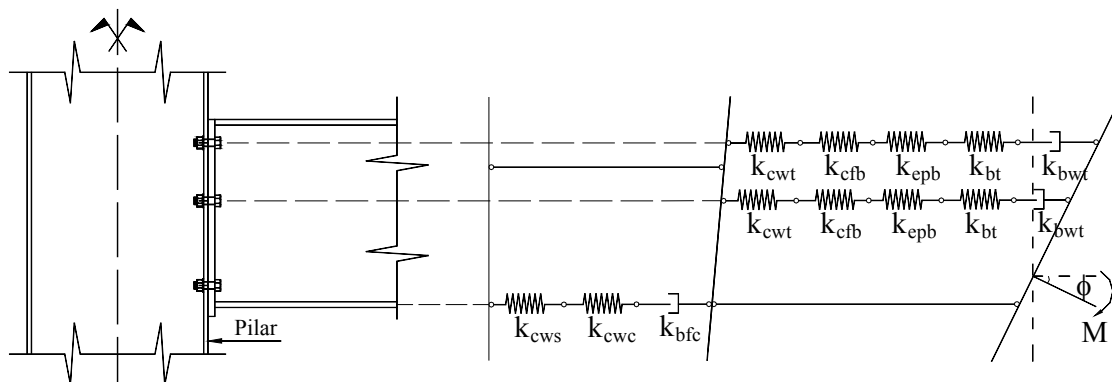
**Tab. VI-2 Resistência ao momento fletor das vigas utilizadas no sistema semicontínuo.**

Viga	Fase anterior à cura do concreto		Fase posterior à cura do concreto	
	$M_{Rd}^-$ (kNm)	$M_{Rd}^+$ (kNm)	$M_{Rd}^-$ (kNm)	$M_{Rd}^+$ (kNm)
VS1	191	252	267	578
VS2	138	151	187	359
VP1	1628	1541	2485	3974
VP2	1549	1460	1976	2981

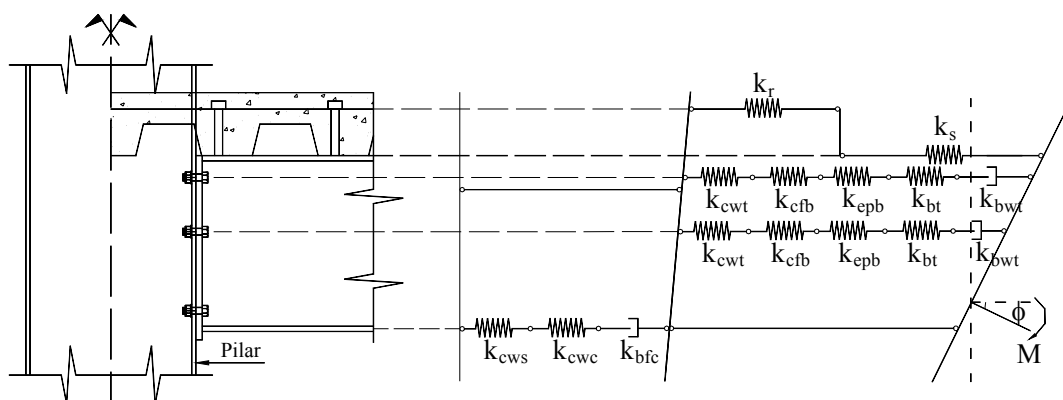
Também de posse dos esforços preliminares, foram determinados os parâmetros das ligações de forma a resistir às solicitações de projeto. As ligações entre as vigas secundárias e principais foram projetadas segundo a tipologia apresentada e testada nos capítulos II, III e V, considerando todos os aspectos e conclusões indicados neste trabalho. Por sua vez, as ligações com chapa de extremidade adotadas na união entre as vigas principais e os pilares conferem maior rigidez ao conjunto, além de permitir uma maior uniformidade no diagrama de momentos fletores das vigas principais e menores flechas nos vãos destes elementos, vão estes de razoável magnitude.

Em suma, o projeto das ligações entre vigas principais e pilares deu-se em torno do modelo mecânico ([1], [8], [12]) ilustrado na Fig. VI-5 e elaborado com base no Método dos Componentes para representar o comportamento de ligações viga-coluna com chapa de extremidade. Observe que no modelo ilustrado o conceito de nó tem um caráter mais abrangente, englobando não somente os componentes da ligação propriamente ditos (chapa de extremidade em flexão –  $k_{epb}$ ; parafusos em tração –  $k_{bt}$ ; armaduras em tração –  $k_r$ ; conectores em cisalhamento –  $k_s$ ) como também os componentes deformáveis dos elementos conectados (alma da coluna e da viga em tração –  $k_{cwt}$  e  $k_{bwt}$ ; mesa da coluna em flexão –  $k_{cfb}$ ; alma da coluna em cisalhamento –  $k_{cws}$ ; alma da coluna e alma e mesa inferior da viga em compressão –  $k_{cwc}$  e  $k_{bfc}$ ). Vale salientar que, como no presente caso os pilares são de concreto, os termos  $k_{cwt}$ ,  $k_{cfb}$ ,  $k_{cws}$  e  $k_{cwc}$  são inexistentes ou podem ser considerados como tendendo ao infinito.

Os parâmetros físicos das ligações utilizadas na configuração proposta do sistema de piso semicontínuo são discriminados nas tabelas Tab. VI-3 e Tab. VI-4, enquanto que nas figuras Fig. VI-6 e Fig. VI-7 os detalhes destas ligações são ilustrados. Na figura Fig. VI-8, pode-se visualizar a configuração das ligações utilizadas no projeto original de concepção mais tradicional, tal qual executado.



(a)



(b)

**Fig. VI-5 Modelos mecânicos para avaliação dos parâmetros físicos de uma ligação viga-coluna metálica com placa de extremidade nas fases: (a) anterior à cura do concreto; (b) posterior à cura do concreto.**

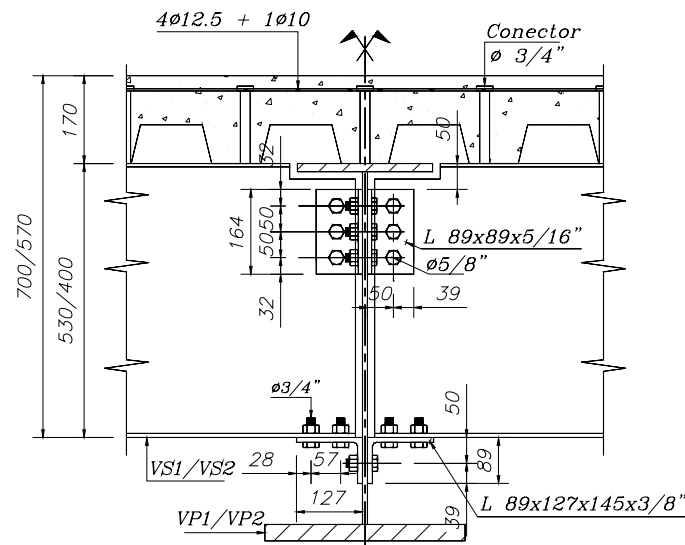
No caso das ligações com chapa de extremidade, procurou-se garantir que os componentes metálicos possuísem suficiente capacidade de rotação para a execução de análises plásticas. Segundo ECCS [1], isto é garantido desde que a resistência da ligação seja governada pela flexão da chapa de extremidade (o que ocorre no presente caso), cuja espessura também deve satisfazer a seguinte relação:  $t \leq 0,36d_b\sqrt{f_{ub}/f_y} = 15,2$  mm. Este valor é bastante próximo da espessura da chapa aqui utilizada (#5/8”).

**Tab. VI-3 Parâmetros físicos das ligações para a fase anterior à cura do concreto.**

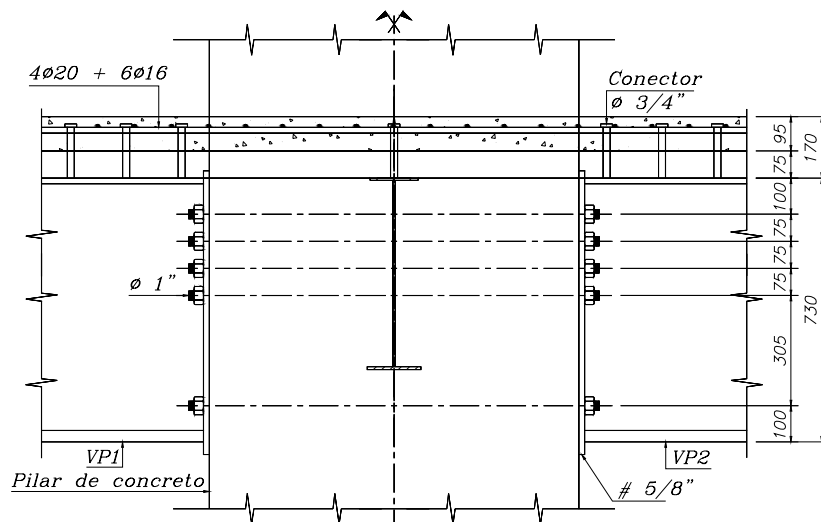
Ligação	$k_{\theta,me}$ (kNm/rad)	$M_{u,me}$ (kNm)	$n$ (-)
VS1/VP1	21739	91	0,81
VS2/VP2	10153	61	1,02
VPEXT	166075	415	2,70
VPINT	166075	415	2,70

**Tab. VI-4 Parâmetros físicos das ligações para a fase posterior à cura do concreto.**

Ligação	$L_{ef}$ (mm)	$A_s$ (mm <sup>2</sup> )	$k_{\theta,mi}$ (kNm/rad)	$M_{u,mi}$ (kNm)	$k'_{\theta,mi}$ (kNm/rad)	$k_{\theta,p}$ (kNm/rad)	$M_{Fiss}$ (kNm)	$n$ (-)	$\theta_u$ (mrad)
VS1/VP1	1300	570	34836	255	97914	4977	100	2,0	22
VS2/VP2	1300	570	21120	192	62785	3017	80	2,0	29
VPEXT	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VPINT	3000	2433	342760	1295	-	-	-	2,7	34

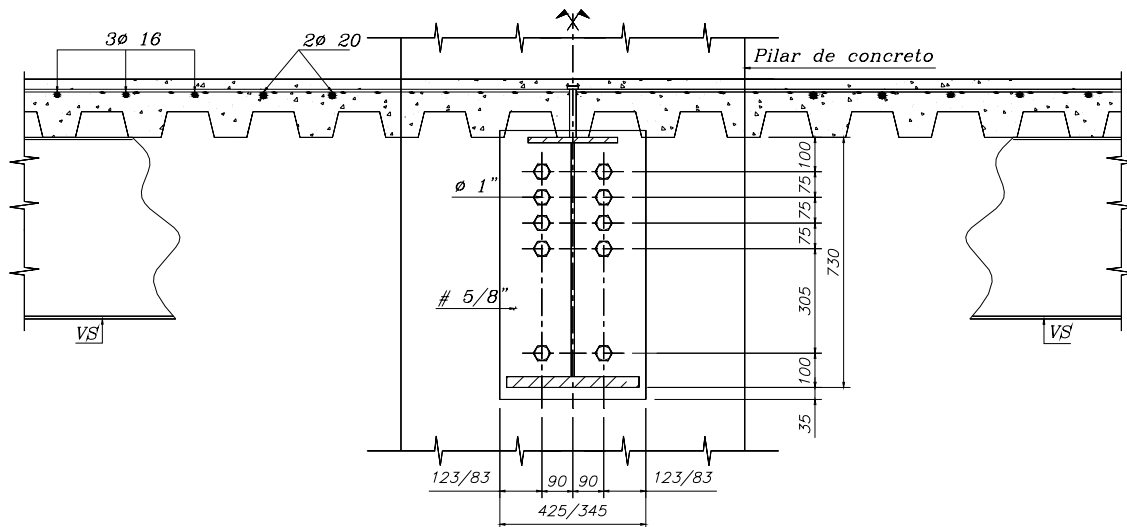


**Fig. VI-6 VS1/VP1 e VS2/VP2: Detalhe da ligação entre vigas secundárias e vigas principais na nova concepção proposta de piso semicontínuo.**



(a)

**Fig. VI-7 VPINT: Vista lateral (a) e frontal (b) da ligação das vigas principais com os pilares na nova concepção proposta de piso semicontínuo – armaduras inexistentes para VPEXT.**



(b)

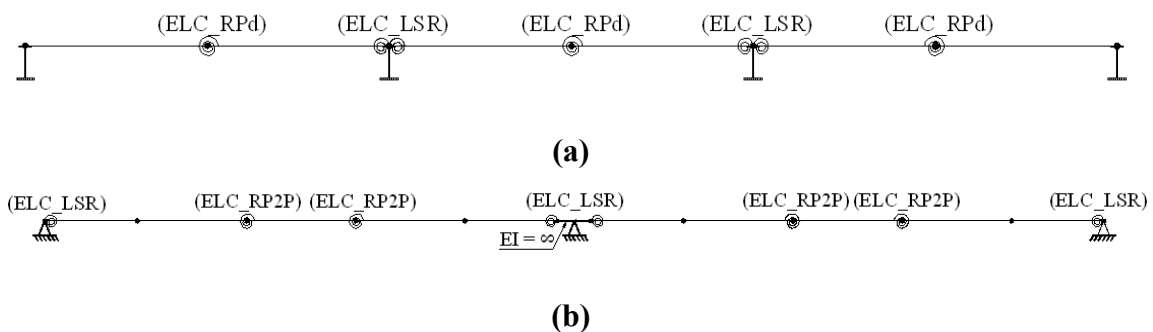
**Fig. VI-7 (continuação) VPINT: Vista lateral (a) e frontal (b) da ligação das vigas principais com os pilares na nova concepção proposta de piso semicontínuo – armaduras inexistentes para VPEXT.**



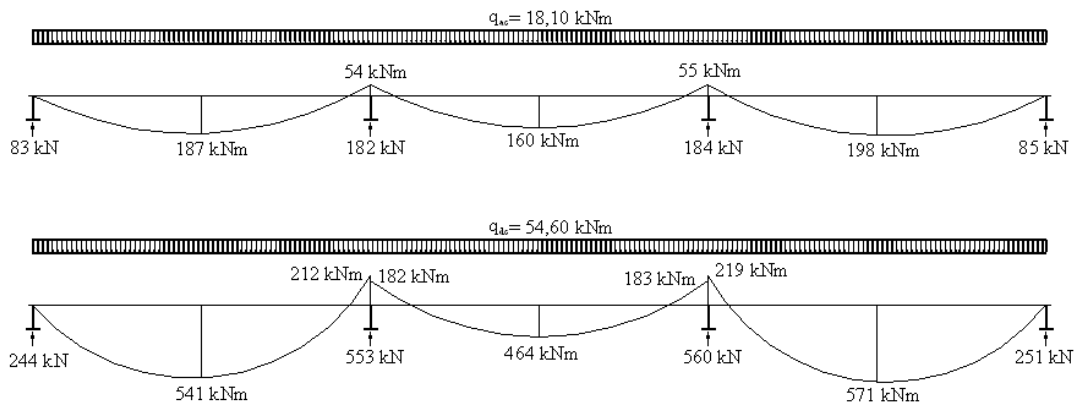
**Fig. VI-8 Detalhe das ligações entre vigas secundárias e vigas principais e entre vigas principais e pilares tal qual executado segundo o projeto original do piso (concepção mais tradicional com vigas bi-rotuladas).**



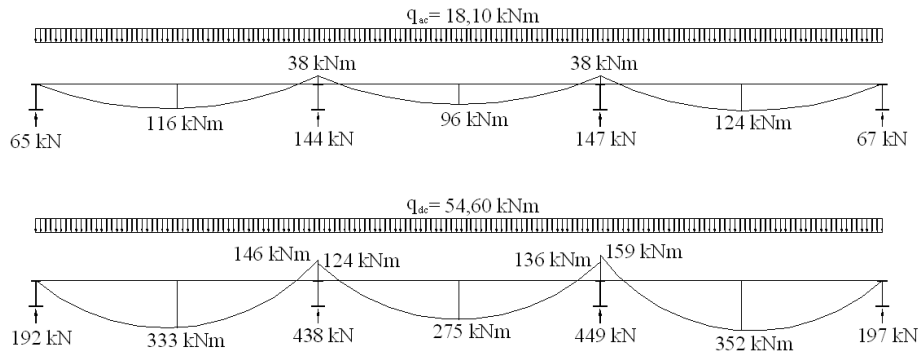
A análise estática não-linear física da concepção proposta de piso misto semicontínuo foi realizada como o programa *Grecon*, tendo sido utilizado os modelos de elemento de grelha ilustrados na Fig. VI-9. Dois tipos de elementos de conexão foram utilizados para representar a formação de rótulas plásticas nas vigas: 1) nos vãos das vigas secundárias segundo a Eq.(IV-8a) (ELC\_RPd); 2) no vão das vigas principais segundo a Eq.(IV-8b, c e d) (ELC\_RP2P). Todos os elementos de conexão utilizados para representar ligações semi-rígidas com chapa de extremidade (ELC\_LSR na Fig. VI-9(b)) são regidos pelas equações Eq.(IV-9b e c), assim como as ligações entre as vigas secundárias e as principais na fase anterior à cura do concreto (ELC\_LSR na Fig. VI-9(a)). Os elementos de conexão utilizados para representar as ligações entre as vigas secundárias e as principais na fase posterior à cura do concreto (ELC\_LSR na Fig. VI-9(a)) são regidos pela Eq.(IV-9a) uma vez que a contribuição do concreto em tração e a consideração de uma rigidez pós-fissuração são fundamentais no comportamento desta tipologia de ligação, como atestado nos capítulos III e V. Nas figuras Fig. VI-10 a Fig. VI-12, ilustram-se os resultados obtidos por meio da análise numérica.



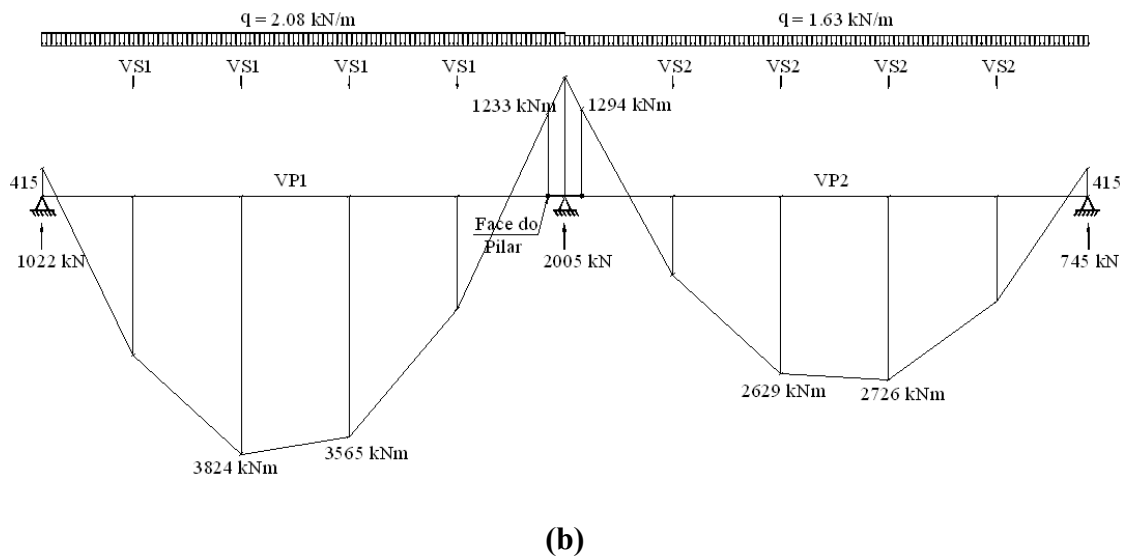
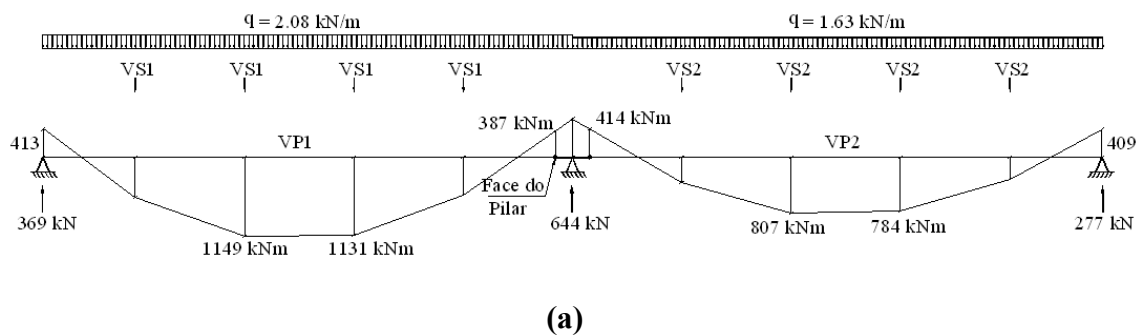
**Fig. VI-9 Modelos de elemento de grelha utilizados para análise estática não-linear física do piso misto semicontínuo: (a) vigas secundárias; (b) vigas principais.**



**Fig. VI-10 Distribuição dos esforços da nova concepção obtida com o programa *Grecon* para as fases anterior e posterior à cura do concreto nas vigas VS1.**

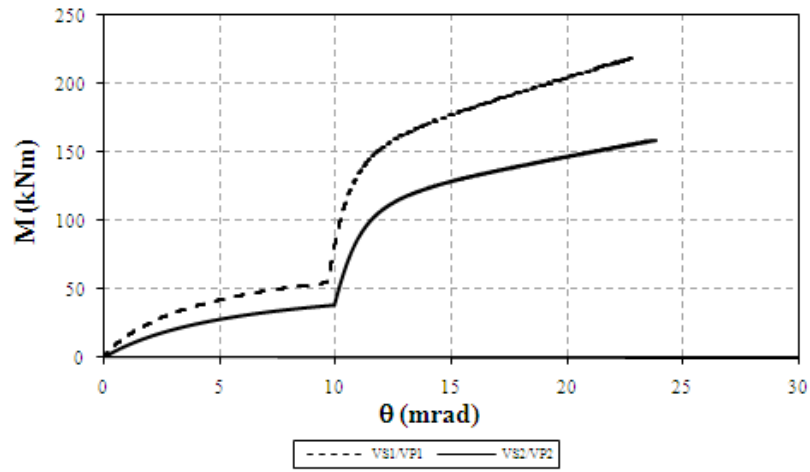


**Fig. VI-11 Distribuição dos esforços da nova concepção obtida com o programa Grecon para as fases anterior e posterior à cura do concreto nas vigas VS2.**

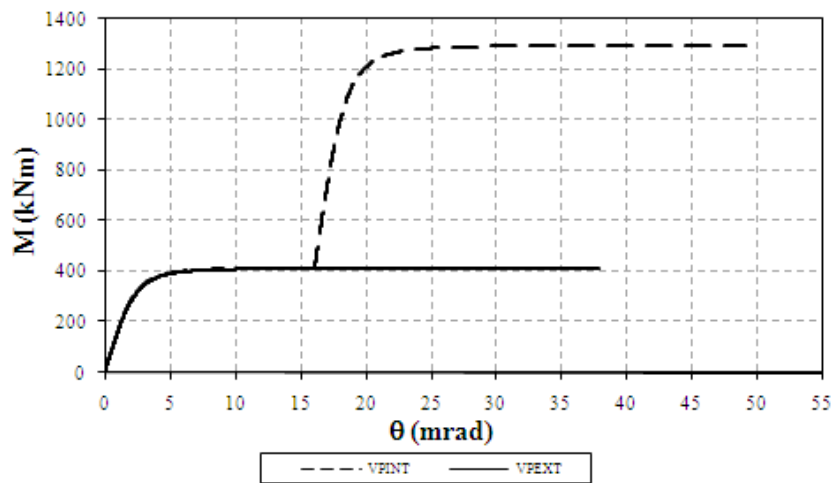


**Fig. VI-12 Esforços da nova concepção obtida com o programa Grecon para as fases anterior (a) e posterior (b) à cura do concreto nas vigas principais.**

Nas figuras Fig. VI-13 e Fig. VI-14, ilustram-se o comportamento das ligações e os deslocamentos nos pontos de momento máximo da viga principal VP1 (ponto 2, sendo  $V$  o esforço cortante no ponto  $I$ ) e das vigas secundárias (pontos 4 e 6 para VS1 e VS2, respectivamente, sendo  $V$  o esforço cortante nos pontos 3 e 5) – vide Fig. VI-2. Note que a capacidade de rotação requerida na fase posterior à cura do concreto é sempre inferior à capacidade de rotação das ligações – vide Tab. VI-4.

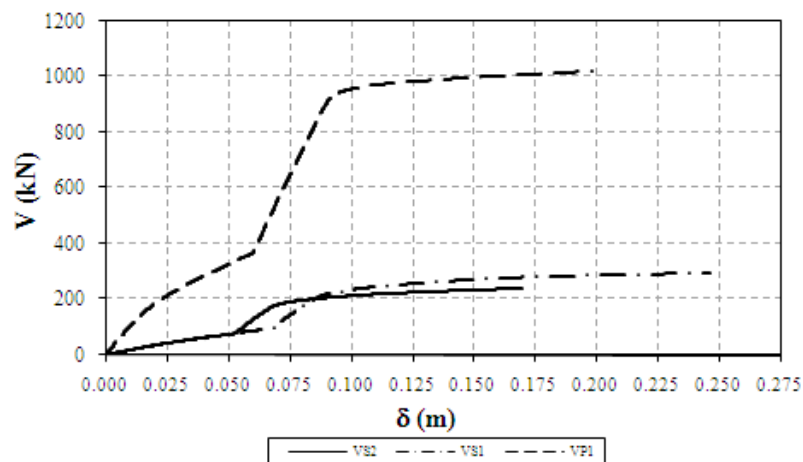


(a)



(b)

**Fig. VI-13 Comportamento  $M \times \theta$  das ligações entre vigas secundárias e principais (a) e vigas principais e pilares (b) sob cargas últimas.**



**Fig. VI-14 Curvas carga x deslocamento de pontos da estrutura sob cargas últimas.**

Observando-se a Tab. VI-2 e as figuras Fig. VI-10 a Fig. VI-12, pode-se perceber que a solução proposta com o sistema semicontínuo atende aos critérios dos estados limites últimos. Na tabela Tab. VI-5, apresentam-se os deslocamentos obtidos para as cargas de serviço (combinação rara de ações), tendo sido a fluência considerada pela divisão do módulo de elasticidade do concreto por 2 ( $\delta_1$  e  $\delta_2$  são os deslocamentos devidos ao carregamento total e à carga variável, respectivamente).

**Tab. VI-5 Verificação dos deslocamentos sob cargas de serviço.**

Viga	$\delta$ limite		$\delta$ análise		Contra flecha (mm)
	$\delta_1(\text{mm}) - l/250$	$\delta_2(\text{mm}) - l/300$	$\delta_1(\text{mm})$	$\delta_2(\text{mm})$	
VS1	40	33	37,0	9,7	10
VS2	32	27	31,3	7,3	10
VP1	60	50	68,5	27,7	20
VP2	60	50	53,8	24,6	15

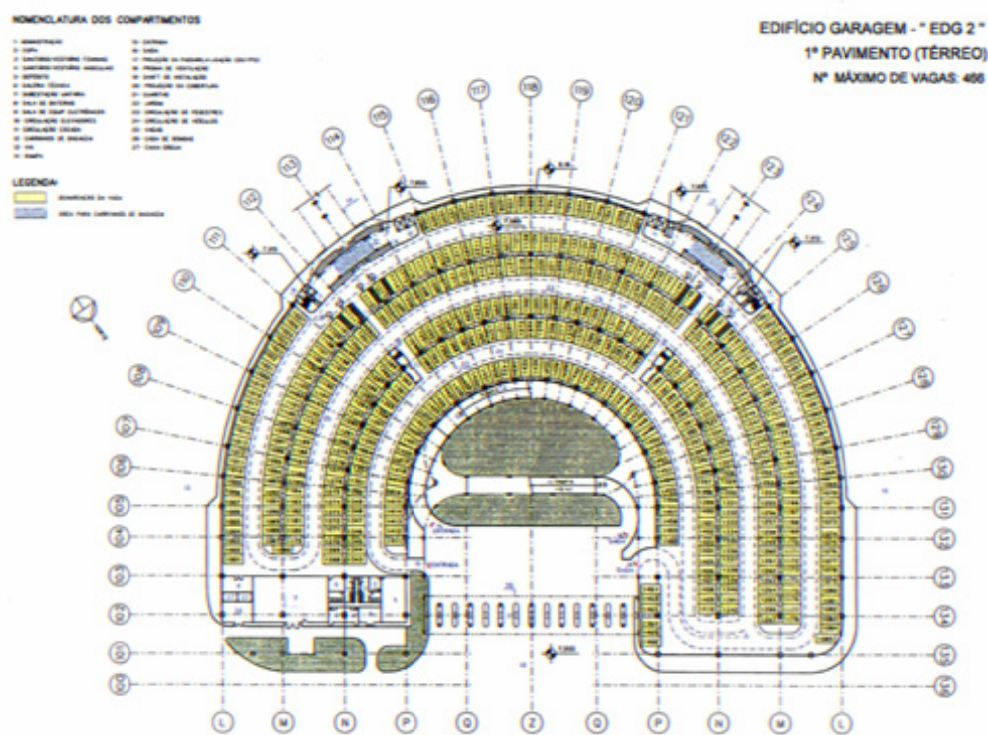
Portanto, atendendo satisfatoriamente aos estados limites últimos e de serviço sob cargas estáticas, obteve-se, com o exemplo analisado, redução de peso em torno de 12% para vigas secundárias e de 22% para vigas principais, valores estes bastante expressivos. Entretanto, em um piso como este, com grandes vãos, deve ser feita em adição uma análise dinâmica. O engenheiro deve, pois, estar atento à possível ocorrência de vibrações, especialmente nos casos em que ações dinâmicas induzidas pelo caminhar de pessoas são freqüentes. Isto será tratado nas análises apresentadas no próximo item.

### VI.3 ANÁLISE DINÂMICA DAS CONCEPÇÕES DE PROJETO

A análise dinâmica da fase mista (após a cura do concreto) da nova concepção de piso semicontínuo assim como da concepção original foi realizada com o programa PAEST3D, de acordo com os procedimentos descritos no item IV.2.3. Os modelos numéricos elaborados são compostos por 2217 nós, 2100 elementos de casca (MITC4, item IV.2.2.7) e 686 elementos de pórtico espacial com e sem conexões elásticas nas bordas. Foram elaborados três modelos, a saber:

- Modelo 1, representativo da concepção segundo o projeto original do piso, com vigas bi-rotuladas (Tab. VI-1);

- Modelo 2, representativo da nova concepção de piso misto semicontínuo (Tab. VI-1), com a inclusão de conexões elásticas nas bordas das vigas do modelo, sendo utilizados os valores de  $k_{\theta,mi}$  para caracterizar a rigidez rotacional das ligações (Tab. VI-4);
- Modelo 3, idêntico ao modelo 2, com exceção da adição de massas concentradas nos nós da estrutura para representação dos veículos estacionados no pavimento – foi adotado um veículo padrão com uma distância entre eixos de aproximadamente  $2,5\text{ m}$  e com  $1000\text{ kg}$  de massa ocupando uma área de  $6,44\text{ m}^2$ , totalizando  $155\text{ kg/m}^2$ , o que foi aplicado sob a forma de massas concentradas na área ocupada pelos veículos (Fig. VI-15).



**Fig. VI-15 Disposição das vagas dos veículos no primeiro pavimento do edifício garagem (EDG).**

Os valores utilizados para o módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e massa específica do aço foram, respectivamente,  $E_a = 205000\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$ . Por sua vez, os valores utilizados para o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do concreto foram, respectivamente,  $E_c = 26000\text{ MPa}$  e  $\nu = 0,2$ . Uma vez que para estes modelos não foram utilizados elementos sólidos degenerados (MITC4) com diferentes espessuras por nó para representar a ortotropia geométrica da laje com fôrma

de aço incorporada (tal qual no modelo do protótipo discutido no capítulo V), preferindo-se por simplicidade representar a laje por meio de elementos de casca (MITC4) com espessura constante  $t^l$  igual a 12,3 cm, o valor utilizado da massa específica do concreto corrigida foi de  $\rho = 2693 \text{ kg/m}^3$  (acredita-se que a retangularidade dos painéis de laje seja suficiente para garantir o comportamento mais unidirecional da laje de concreto em detrimento da consideração mais precisa dos efeitos da diferença de rigidez nas direções ortogonais).

As frequências naturais dos sete primeiros modos de vibração para os três modelos são apresentadas na Tab. VI-6 (massa modal do modelo 3 entre parênteses), enquanto que na Fig. VI-16 são ilustradas as formas modais para o modelo 3.

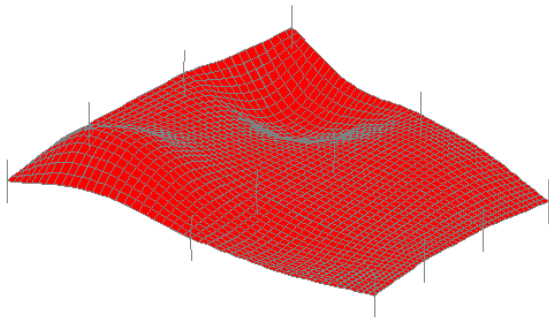
**Tab. VI-6 Frequências naturais de vibração da estrutura de piso do EDG segundo os três modelos elaborados.**

Modelo	Frequências (Hz)						
	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo	5º modo	6º modo	7º modo
Modelo 1	6,58	6,61	7,32	7,44	7,49	8,68	9,76
Modelo 2	6,63	6,72	7,07	7,25	7,36	8,08	8,80
<b>Modelo 3</b>	<b>6,33</b>	<b>6,37</b>	<b>6,73</b>	<b>6,95</b>	<b>7,07</b>	<b>7,60</b>	<b>8,05</b>
	(37146 kg)	(31967 kg)	(27357 kg)	(30632 kg)	(55190 kg)	(20409 kg)	(36691 kg)

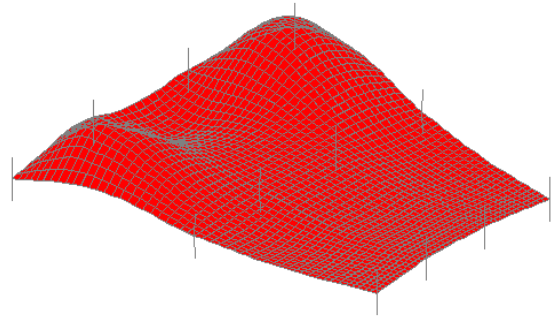
A comparação entre os valores das frequências obtidos para os modelos 1 e 2 revela uma agradável surpresa em que, apesar da redução de inércia das vigas metálicas proporcionada pela nova concepção de piso misto semicontínuo, houve um acréscimo nas frequências dos dois primeiros modos de vibração, o que pode ser justificado pela redução da massa do pavimento e, principalmente, pela adoção de ligações semi-rígidas nos extremos das vigas ao invés das ligações flexíveis do projeto original. Portanto, a adoção de ligações semi-rígidas parcialmente resistentes além de proporcionar uma melhor uniformização dos diagramas de momentos fletores das vigas do piso, refletindo

1. A espessura de laje  $t$  utilizada nos modelos computacionais corresponde a uma espessura média entre as alturas equivalentes da laje com forma de aço incorporada (170 mm de altura total e 75 mm de altura da nervura) nas duas direções principais ortogonais. A espessura equivalente na direção das nervuras foi adotada como sendo igual a  $h_{eq} = \left(\frac{12I}{a_1}\right)^{1/3} = 150,4 \text{ mm}$  ( $J_i^2$  apud [44]), onde  $I$  é a inércia de uma seção de laje com  $a_1=274 \text{ mm}$  de largura (módulo do *steel-deck* utilizado), enquanto que para a direção ortogonal às nervuras só foi considerada a espessura de 95 mm, desprezando-se, pois, o concreto no interior das nervuras da forma metálica, e chegando-se então a um valor único médio de 123 mm.

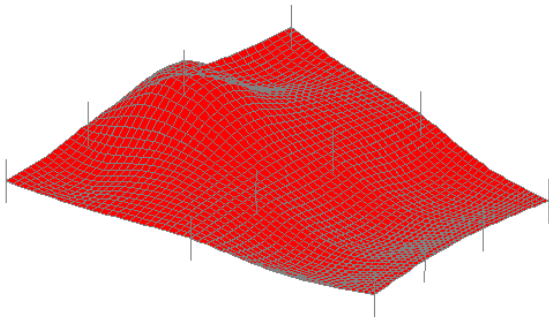
2. JI, X., CHEN, S. et al., 1985, "Deflection of waffle slabs under gravity and in plane loads". In: SABNIS, G. Deflections of concrete structures. Detroit, ACI, p. 283-295 (ACI SP-66).



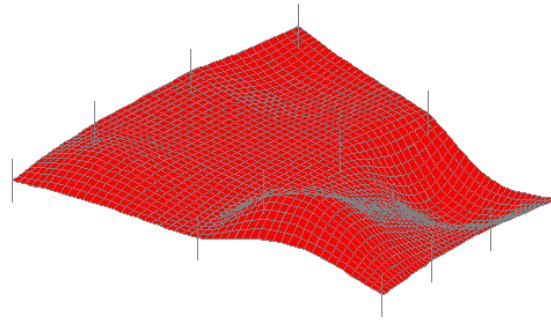
1° modo



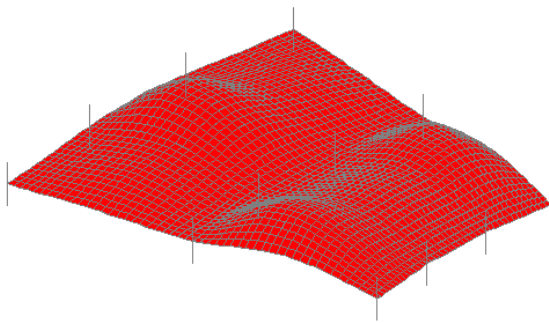
2° modo



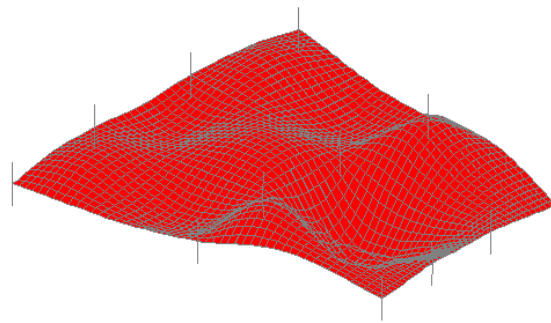
3° modo



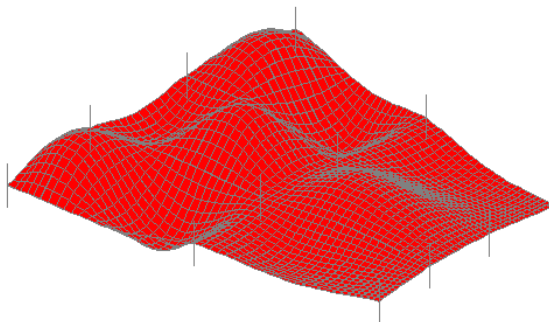
4° modo



5° modo



6° modo



7° modo

**Fig. VI-16 Formas modais de vibração do piso misto semicontínuo (modelo 3).**

em economia, proporcionou um melhor comportamento dinâmico, com o incremento das frequências naturais fundamentais da estrutura quando comparado com a solução original (modelo 1) tal qual executada. Finalmente, como esperado, o posicionamento de massas concentradas representativas dos veículos estacionados sobre o pavimento (modelo 3) conduziu a um decréscimo nas frequências naturais da estrutura.

A fim de avaliar a ocorrência de vibrações excessivas na estrutura sob a nova concepção de piso misto semicontínuo, o modelo 3 foi submetido à análise de vibrações forçadas com carregamentos dinâmicos relativos à passagem de veículos sobre a estrutura e ao caminhar humano, comparando-se as amplitudes de resposta de aceleração com valores limites preconizados por normas internacionais.

Varella [37] indica que podem ser considerados quatro harmônicos para representação do caminhar humano, inclusive revelando um procedimento para consideração do impacto do calcanhar de um indivíduo. Entretanto, a força correspondente ao caminhar humano,  $F_p(t)$ , foi representada neste trabalho por meio de uma série de Fourier constituída por três harmônicos [45], sendo uma função da frequência do caminhar  $f_p$  (1,6 a 2,4 Hz), do peso do indivíduo ( $G$ ), do ângulo de fase  $\phi_i$  relativo ao primeiro harmônico e do coeficiente de Fourier  $\alpha_i$  do  $i$ -ésimo harmônico:

$$F_p(t) = G + \sum_{i=1}^n G \alpha_i \text{sen}(2\pi i f_p t - \phi_i), \quad \text{Eq.(VI-1)}$$

$$\alpha_1 = 0,4; \quad \alpha_2 = 0,1; \quad \alpha_3 = 0,1;$$

$$\phi_2 = \phi_3 = \frac{\pi}{2}$$

O caminhar humano pode ser representado no programa PAEST3D por meio de uma carga móvel regida pela função dada na Eq.(VI-1), devendo ser fornecidos a trajetória da carga (nós da estrutura por onde o indivíduo passa) e a velocidade do caminhar, a qual é função da frequência do caminhar  $f_p$ , e do comprimento do passo do indivíduo.

Por sua vez, a carga relativa à passagem de um veículo sobre a estrutura é representada no programa PAEST3D por meio de duas cargas pontuais móveis correspondentes às resultantes do peso do veículo em cada eixo de rodas, devendo ser

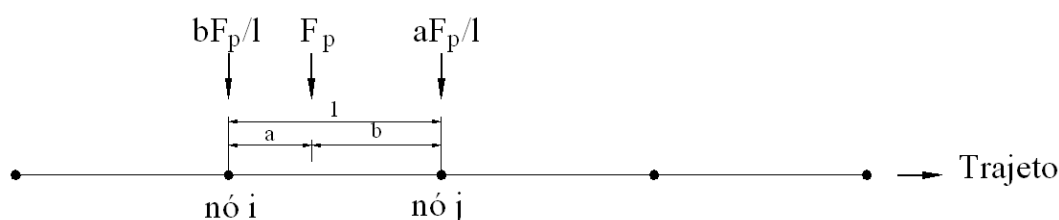


fornecidos, pois, a carga por eixo e a velocidade média, assim como o trajeto do veículo (nós da estrutura por onde o veículo passa).

Conhecidos a trajetória sobre a malha da laje discretizada e a velocidade média do indivíduo/veículo, dado um determinado instante de tempo  $t$  da análise, a posição da(s) carga(s) pode ser determinada, ressaltando-se que esta pode não corresponder a um nó estrutural da trajetória pré-definida. Um comportamento de viga rígida é então considerado e a carga é distribuída entre os nós adjacentes segundo a Fig. VI-17.

Cinco combinações de carregamentos foram utilizadas (Fig. VI-18), a saber:

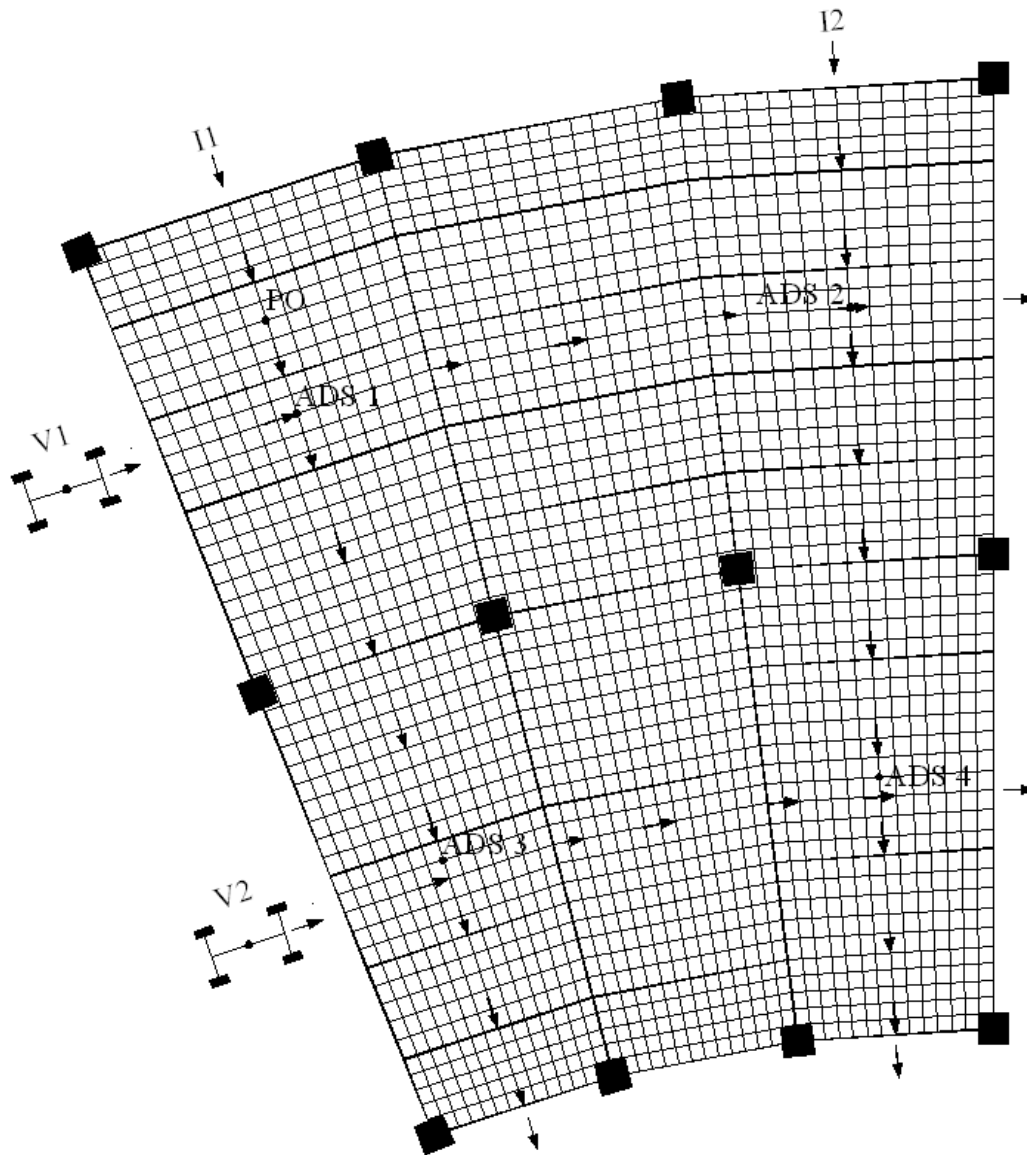
- Caso 1: veículo 1 (V1) com uma carga por eixo de 5000 N e velocidade média de 25 km/h, com um retardo de tempo de 1 s para entrada do veículo na estrutura;
- Caso 2: Caso 1 + veículo 2 (V2) com carga por eixo de 5000 N, velocidade média de 25 km/h e um retardo de tempo de 1 s para entrada do veículo na estrutura;
- Caso 3: indivíduo 1 (I1), com  $f_p = 2,1$  Hz, comprimento do passo igual a 0,8 m, velocidade média de 1,68 m/s, e peso ( $G$ ) igual a 800 N;
- Caso 4: Caso 2 + Caso 3;
- Caso 5: Caso 4 + indivíduo 2 (I2), com  $f_p = 2,0$  Hz, comprimento do passo igual a 0,8 m, velocidade média de 1,60 m/s, peso ( $G$ ) igual a 800 N e um retardo de tempo de 2 s para a entrada do indivíduo 2 (I2) na estrutura;
- Caso 6: Caso 5 + aplicação de atenuadores dinâmicos sincronizados na laje da estrutura.



**Fig. VI-17 Consideração das cargas móveis sobre a estrutura.**

Como se pode notar, as combinações de carregamentos utilizadas foram criadas de maneira a cobrir algumas possíveis situações de carga durante a vida útil da edificação, procurando-se variar a frequência do caminhar dos indivíduos e

considerando diferentes retardos de tempo para a aplicação dos carregamentos na estrutura, tornando a análise o mais aleatória possível.



**Fig. VI-18 Trajetórias dos carregamentos utilizados; ponto de observação (PO); localização dos atenuadores dinâmicos sincronizados (ADS).**

Foi adotada uma taxa de amortecimento de  $1\%$  para o primeiro e segundo modos de vibração, enquanto que as taxas de amortecimento dos demais modos foram consideradas proporcionais à massa e rigidez, sendo estimadas por meio da Eq.(IV-123) e Fig. IV-27 – como os valores obtidos também foram muito próximos de  $1\%$ , foi adotada uma taxa constante com este valor para os sete modos utilizados na análise pelo método da superposição modal. Por fim, foi utilizado um intervalo de tempo para integração numérica de  $\Delta t = 0,001 s$ .

Os atenuadores de vibração do tipo massa-mola-amortecedor foram projetados de forma a estarem sintonizados na primeira frequência natural da estrutura, com uma massa total de cerca de 1% da massa modal (Tab. VI-6) do primeiro modo de vibração, totalizando 371,5 kg. Utilizando então as equações Eq.(IV-130) a Eq.(IV-132), a frequência e taxa de amortecimento ótimas para os atenuadores foram estimadas, obtendo-se, respectivamente,  $f_{ot} = 0,99 f_{est}$  e  $\xi_{ot} = 6,03\%$ . Foram dispostos quatro atenuadores nos ventres do primeiro modo de vibração da estrutura (figuras Fig. VI-16 e Fig. VI-18) de forma a tornar o sistema de atenuação mais efetivo, sendo cada aparelho caracterizado pelas seguintes propriedades:

- Massa:  $m_i = 93,00 \text{ kg}$ ;
- Frequência circular:  $\omega_i = 0,99 \times 2\pi \times f_{1^o \text{ modo}} = 39,40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ;
- Rigidez:  $k_i = \omega_i^2 \times m_i = 144370 \text{ N/m}$ ;
- Coeficiente de amortecimento:  $c_i = 2 \times \xi_i \times \omega_i \times m_i = 442,0 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ .

Por meio destas propriedades, as equações Eq.(IV-126) e Eq.(IV-127) podem ser integradas numericamente ao longo do tempo no programa PAEST3D, sendo então os resultados computados para o caso 6. Dada a característica multi-freqüências da análise e dada a proximidade entre as primeiras freqüências da estrutura, é também de se esperar a influência do atenuador em outros modos, especialmente o segundo.

Nas figuras Fig. VI-19 a Fig. VI-23 são apresentados os resultados obtidos em termos de histórias temporais e auto-espectros de resposta de acelerações observadas no ponto PO (Fig. VI-18). Além disso, são apresentados no domínio da freqüência e em escala logarítmica os valores médios quadráticos (*rms*) das acelerações obtidas para cada uma das faixas de freqüência preconizadas na ISO 2631-2 [46] (freqüências de centro  $\omega_c$ : 1; 1,25; 1,6; 2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3; 8; 10; 12,5; 16; 20; 25; 31,5; 40; 50; 63 e 80 Hz), sendo também apresentadas em conjunto as curvas base para vibrações contínuas e intermitentes com os fatores multiplicadores ( $k = 1$  para áreas críticas como hospitais;  $k = 2$  a  $4$  para áreas residenciais e escritórios;  $k = 8$  para *workshops*) que retratam as magnitudes de vibração limites a partir das quais comentários adversos ocorrerão em vários tipos de edificações e em dada hora do dia, representando, pois, os limites de percepção humana.

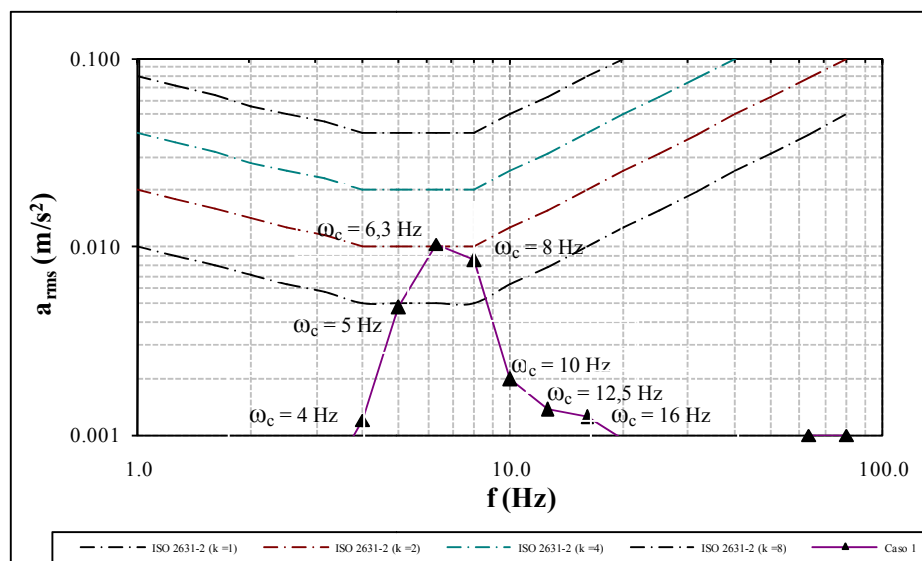
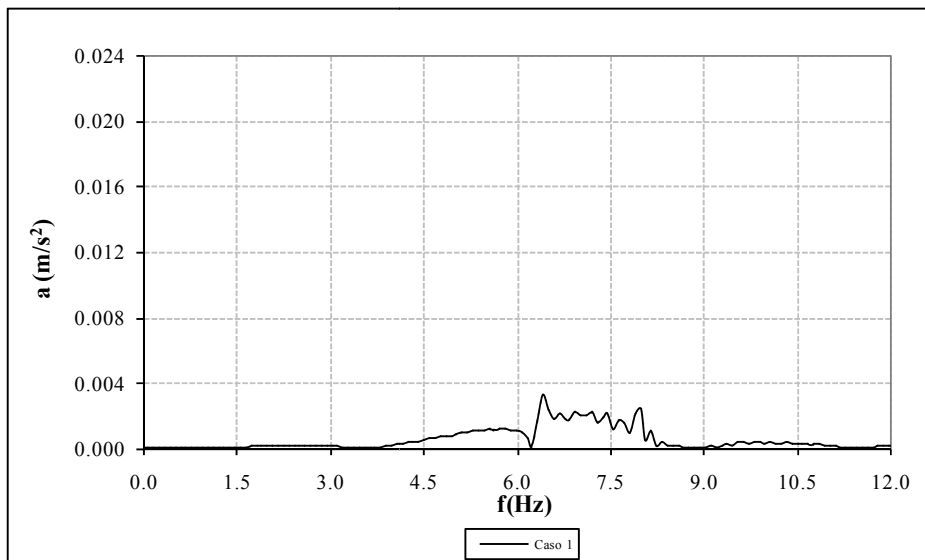
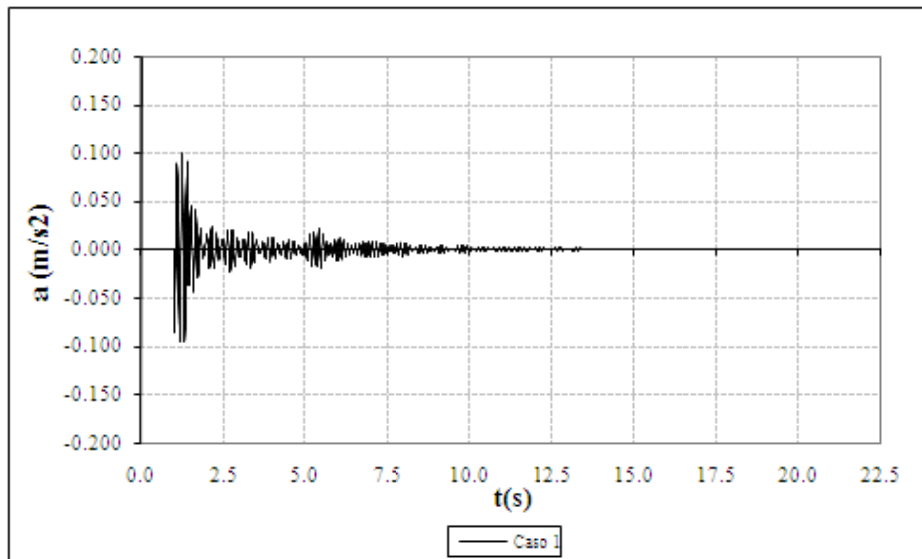


Fig. VI-19 Respostas nos domínios do tempo e da frequência para o caso 1.

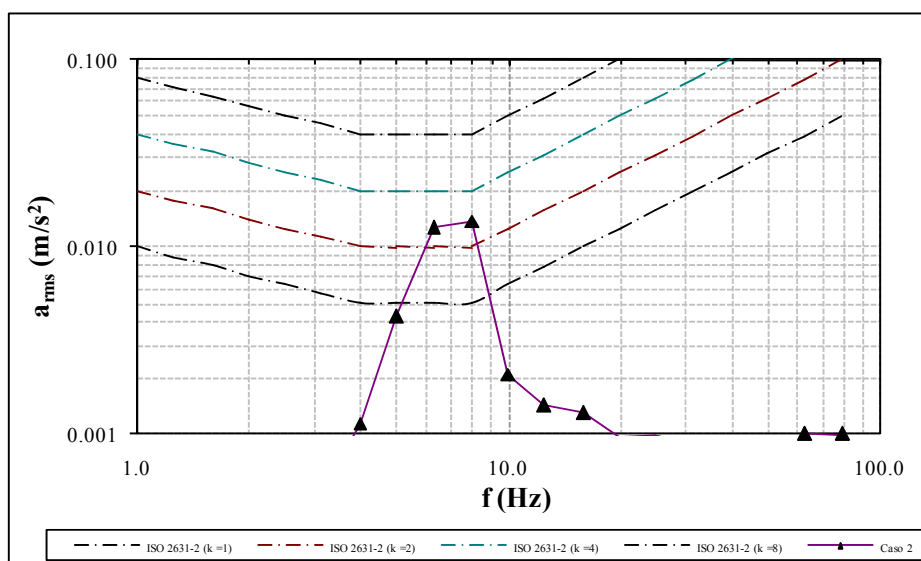
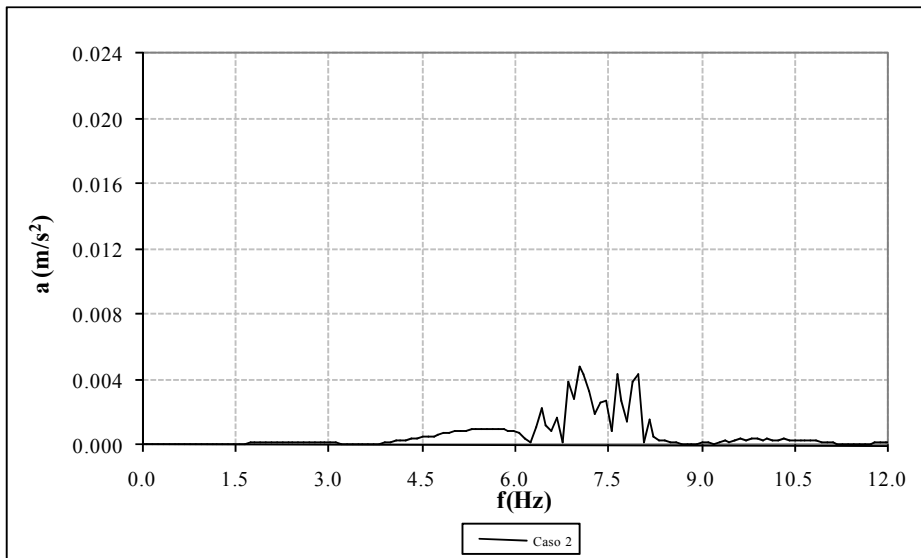
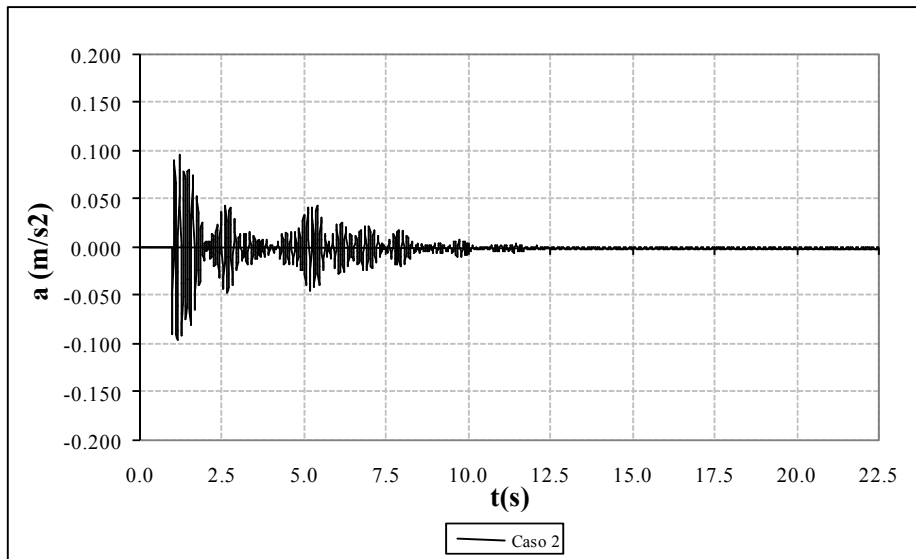


Fig. VI-20 Respostas nos domínios do tempo e da frequência para o caso 2.

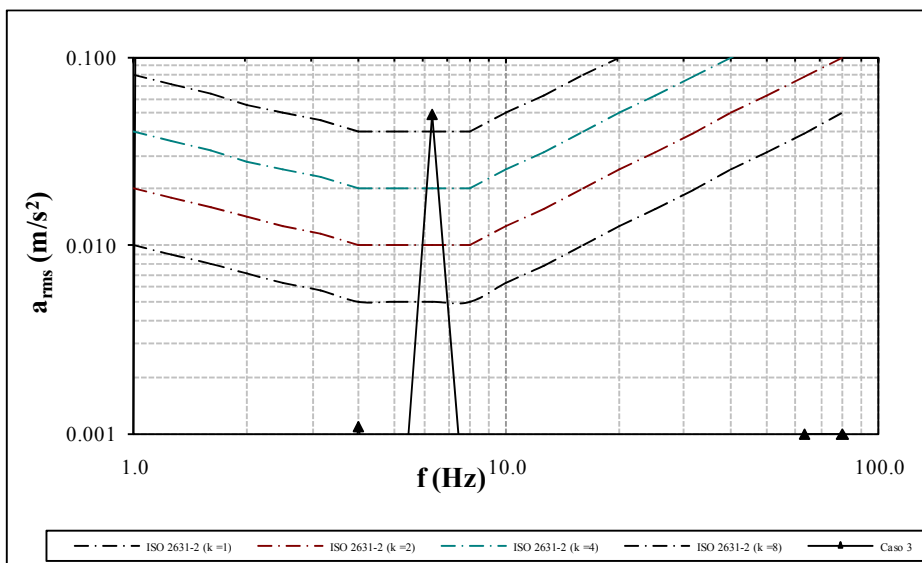
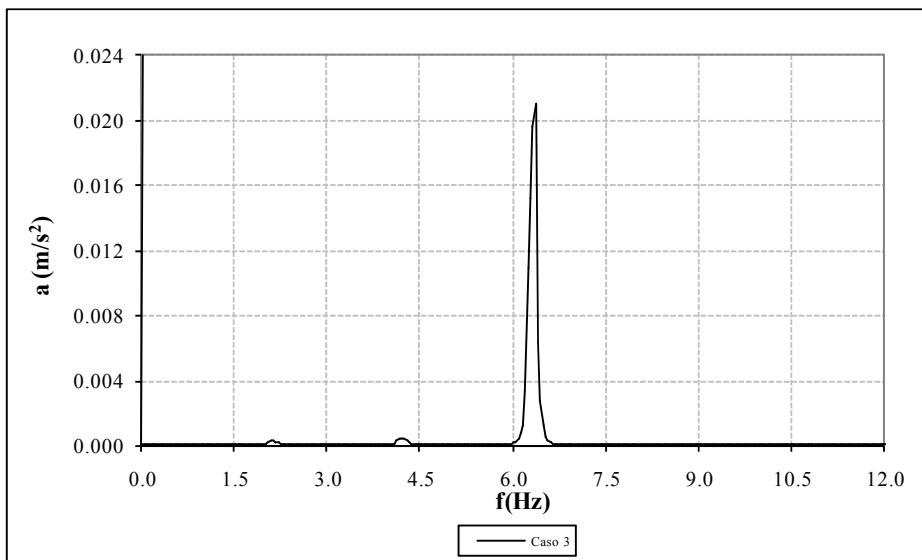
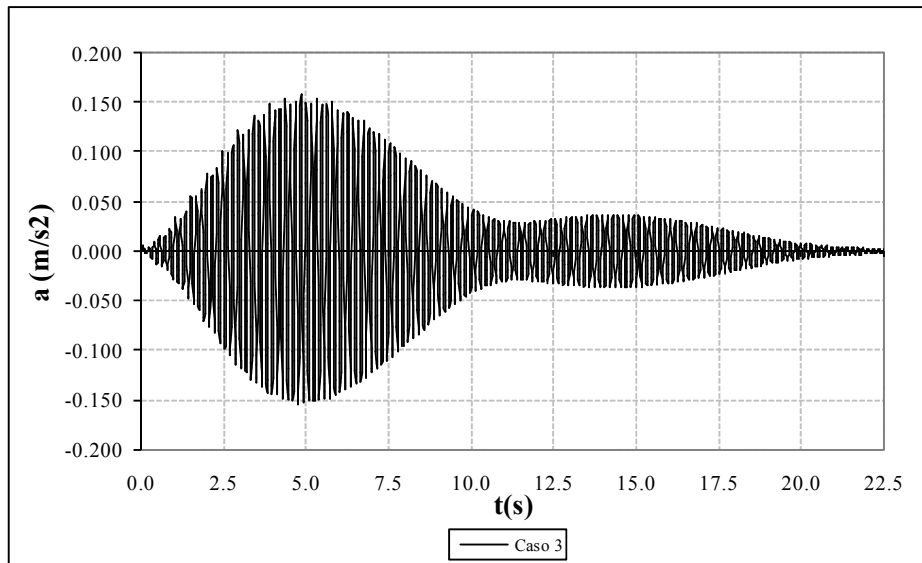


Fig. VI-21 Respostas nos domínios do tempo e da frequência para o caso 3.

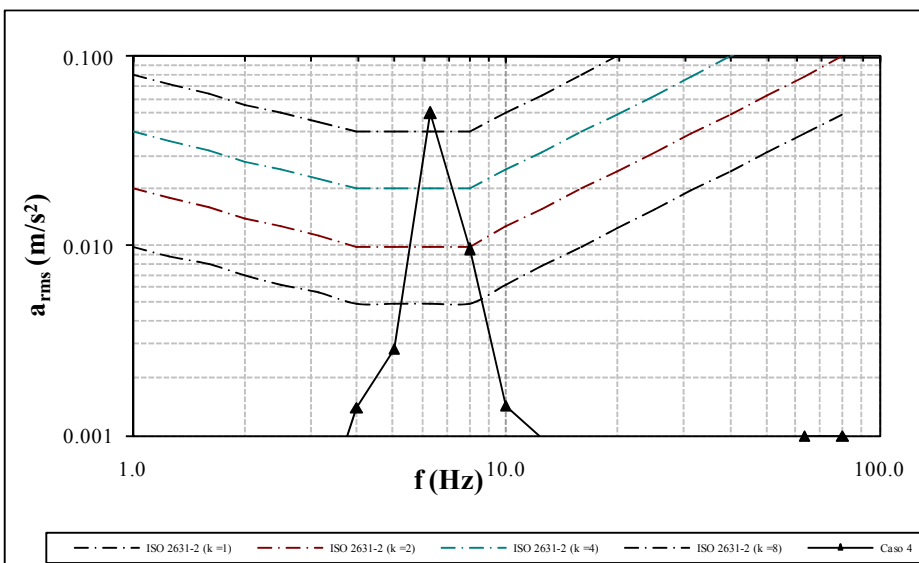
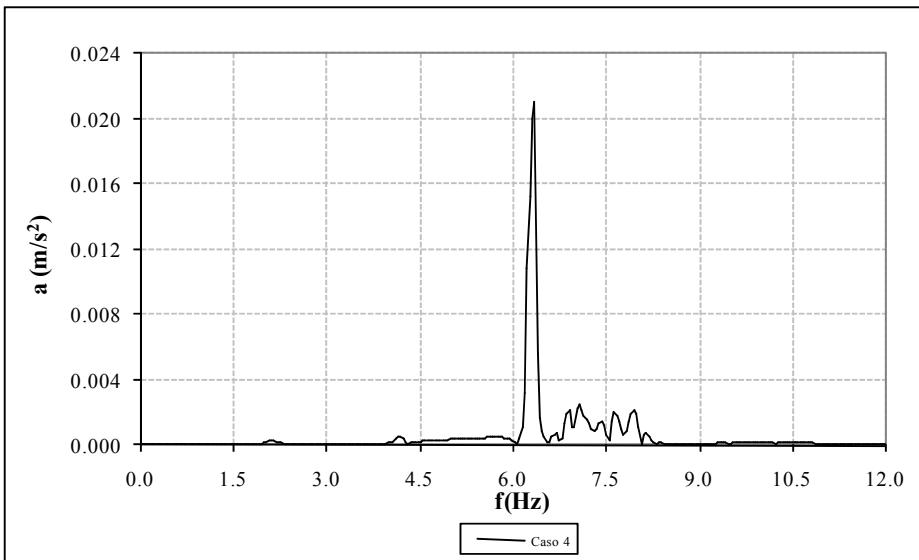
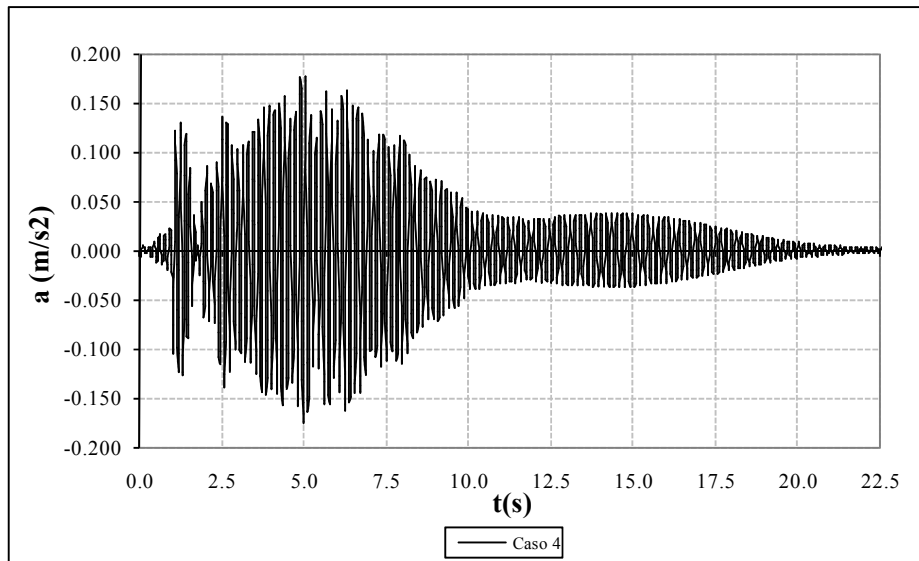


Fig. VI-22 Respostas nos domínios do tempo e da frequência para o caso 4.

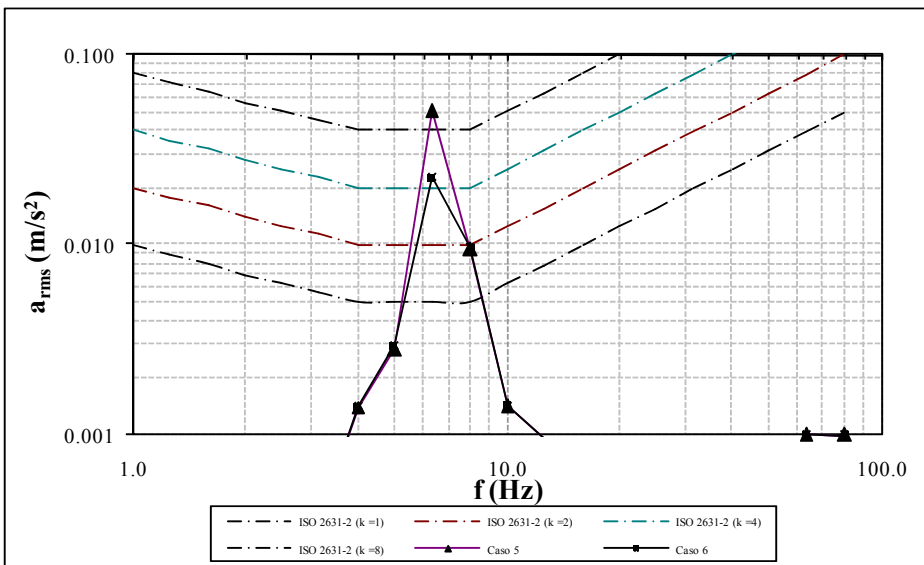
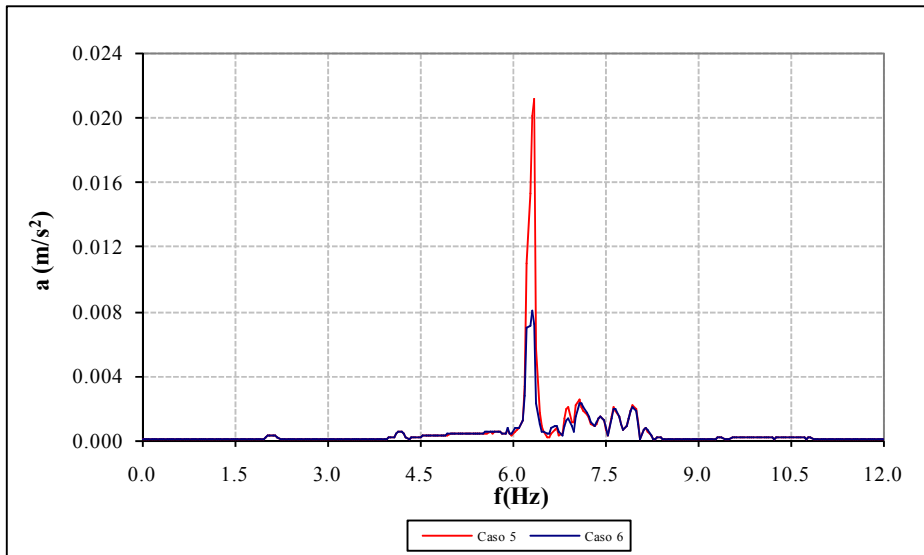
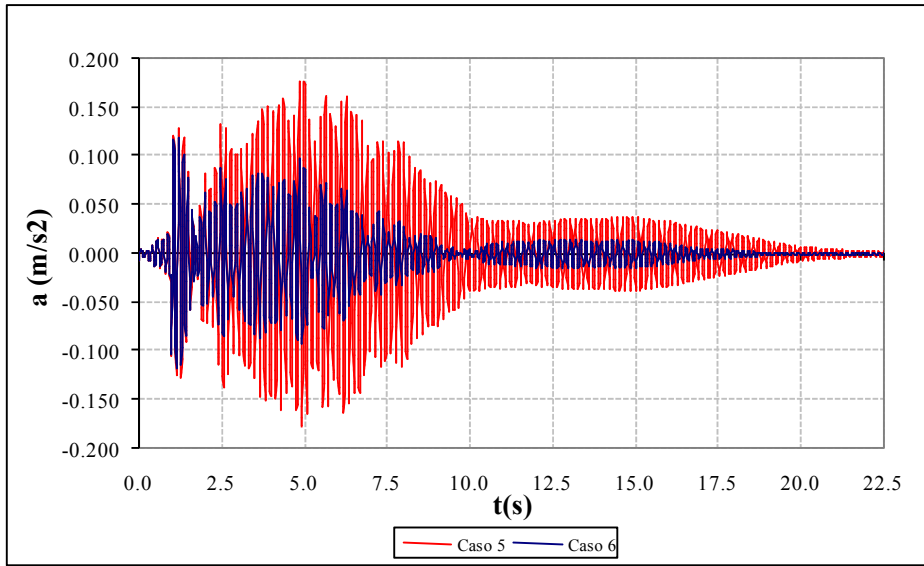


Fig. VI-23 Respostas nos domínios do tempo e da frequência para os casos 5 e 6.



Da observação das figuras Fig. VI-19 a Fig. VI-23, pode-se concluir que a passagem dos veículos V1 e V2 sobre a estrutura corresponde à aplicação de uma carga impulsiva retangular móvel, com uma energia suficiente para excitar praticamente todos os sete modos utilizados na aproximação numérica da resposta – vide mais especificamente os auto-espectros de resposta dos casos 1 e 2 (Fig. VI-19 e Fig. VI-20). Pode-se ainda notar que a passagem do veículo V2 tem o papel de excitar ainda mais os modos mais altos utilizados na análise, uma vez que a sua trajetória coincide com pontos de maiores amplitudes dos autovetores referentes a tais modos. Como característica deste tipo de carregamento, após a passagem do(s) veículo(s), a estrutura permanece em vibração livre, quando então as forças de amortecimento passam a interferir de forma significativa na resposta. Finalmente, pode-se perceber que, para os casos 1 e 2, os valores de aceleração *rms*<sup>1</sup> situam-se abaixo da curva base da ISO 2631-2 [46] com fator multiplicador 4, correspondente a escritórios.

Conforme observado na Fig. VI-21 (caso 3), pode-se perceber que a passagem do indivíduo I1 sobre a estrutura conduz a uma resposta periódica, tal qual o carregamento utilizado (caminhar humano, composto por três harmônicos), sendo a ação das forças de amortecimento significativa durante todas as fases da solicitação. Propositalmente, a frequência utilizada do caminhar humano foi tomada com  $f_p = 2,1$  Hz, sendo a frequência do terceiro harmônico da força, pois, praticamente coincidente com as frequências do primeiro e segundo modos da estrutura, de maneira a excitá-la de forma mais substancial. Como resultado, tem-se o auto-espectro da Fig. VI-21, com praticamente toda a energia concentrada nestes dois primeiros modos de vibração, com os valores *rms* de aceleração observada no ponto PO (Fig. VI-18), chegando a ultrapassar a curva base da ISO 2631-2 [46] com fator multiplicador 8, referente a *workshops*.

---

1. Os valores médios quadráticos (*rms*) foram obtidos por meio dos valores de aceleração no domínio da frequência, lembrando que estes valores *rms* correspondem ao desvio padrão  $\sigma$ , que pode ser dado por:  $\sigma = \sqrt{\int_{\omega_i}^{\omega_f} S(\omega) d\omega}$ , onde  $S(\omega)$  corresponde à densidade espectral, obtida do auto-espectro de resposta  $X(\omega)$  e seu conjugado  $X^*(\omega)$ ,  $S(\omega) = X(\omega)X^*(\omega)$ . Uma vez utilizada a transformada discreta de Fourier (DFT) para obtenção dos sinais em frequência, onde são utilizados  $N$  intervalos de  $\Delta t$  segundos, a aceleração *rms* total pode ser dada por:  $a_{rms,T} = \sqrt{2 \sum_{i=1}^{N/2} S(\omega_i)}$ , enquanto que o valor médio quadrático para uma dada frequência de centro  $\omega_c$  preconizada na ISO 2631-2 [46] pode ser dada por:  $a_{rms,\omega_c} = \sqrt{2 \sum_{i=k}^l S(\omega_i)}$ , onde  $\omega_k$  e  $\omega_l$  são os valores limites de frequência que definem a faixa com frequência de centro  $\omega_c$  preconizada na ISO 2631-2 [46]. Por exemplo, para  $\omega_c = 6,3$  Hz,  $\omega_k = 5,65$  Hz e  $\omega_l = 7,15$  Hz.

O efeito da combinação dos casos 2 e 3 (veículos V1 e V2 e indivíduo I1), caso 4 (Fig. VI-22), corresponde ao espalhamento da energia no espectro de resposta, com praticamente todos os modos utilizados sendo excitados, mas com uma concentração da energia ainda no primeiro e segundo modos de vibração devido ao efeito quase de ressonância entre as frequências do caminhar e do primeiro e segundo modos de vibração. A adição de mais um indivíduo I2 ao caso 4 (veículos V1 e V2 e indivíduos I1 e I2), caso 5 (Fig. VI-23), não conduz a alterações significativas aos resultados obtidos para o caso 4, porém confere um caráter ainda mais aleatório à análise dado a nova frequência do caminhar do indivíduo I2 e ao retardo de tempo para sua entrada na estrutura.

Por fim, a aplicação de quatro atenuadores dinâmicos sincronizados e sintonizados na frequência do modo fundamental da estrutura (caso 6) conferiu uma redução expressiva nas amplitudes de vibração do caso 5, o que pode ser constatado nos valores de aceleração obtidos nos domínios do tempo e da frequência, estando os valores efetivos *rms*, inclusive, quase que dentro do limite da curva base da ISO 2631-2 [46] com fator multiplicador 4, referente a escritórios, quando, para o caso 5, chegavam a ultrapassar a curva base da ISO 2631-2 [46] com fator multiplicador 8, referente a *workshops* (deve-se lembrar que o gráfico é apresentado em escala logarítmica). A redução obtida, para a frequência de centro de  $6,3 \text{ Hz}$  preconizada na ISO 2631-2 [46], foi de 55%. Pode-se perceber ainda que as componentes da resposta em outras frequências que não as do primeiro e segundo modos de vibração permanecem praticamente inalteradas, revelando a característica de sintonia em determinada frequência deste tipo de sistema de atenuação.

Vale salientar que, em um pavimento de garagem, a tolerância quanto a amplitudes de vibração é maior, dado o reduzido período de tempo que o indivíduo passa nesta parte da edificação. Além disso, estruturas do tipo garagem não são prontamente enquadradas em nenhuma das categorias previstas na ISO 2631-2 [46], não sendo explicitamente indicado qual fator multiplicador deve ser usado. Entretanto, vale lembrar que as curvas utilizadas no presente trabalho e recomendadas pela ISO 2631-2 [46], correspondem a valores limites a partir dos quais comentários adversos passarão a ocorrer, ao invés das curvas preconizadas na ISO 2631-1, onde os critérios estabelecidos são referentes à perda do conforto humano, à perda de eficiência no trabalho e saúde e segurança, o que tem um caráter ainda mais subjetivo. Por fim, as acelerações *rms*

obtidas para o caso 5 avaliado, chegam a ultrapassar os mais permissivos valores limite de aceleração, correspondentes à curva base da ISSO 2631-2 com fator igual a 8, o que torna bastante satisfatória a solução de piso misto semicontínuo adotada com atenuadores dinâmicos sincronizados (caso 6).

## Capítulo VII: Conclusões

---

Ao final desta pesquisa, pode-se considerar que muitos dos objetivos inicialmente propostos foram alcançados, destacando-se, primeiramente, o desejo de se promover discussões acerca da utilização de ligações semi-rígidas mistas viga-viga num ambiente, seja acadêmico ou profissional, caracterizado pelo desenvolvimento de ensaios experimentais e projetos em torno de ligações viga-coluna, quando não são concebidos projetos tradicionais com vigas rotuladas. Sistemas de pisos mistos aço-concreto semicontínuos podem e devem ser concebidos em adição aos pórticos com ligações parcialmente resistentes, melhorando em muito o comportamento estrutural, além dos claros benefícios econômicos.

Referindo-se aos modelos das ligações, a comparação entre os resultados experimentais obtidos com os modelos cruciformes e as estimativas teóricas revela que o modelo desenvolvido em [6], [9] e apresentado no Capítulo II é capaz de caracterizar satisfatoriamente o comportamento de ligações mistas com cantoneiras de assento e armaduras na laje de concreto, com ou sem a presença de uma dupla de cantoneiras de alma.

Dentre os parâmetros avaliados, os valores teóricos e experimentais referentes à rigidez inicial e capacidade resistente apresentaram as menores dispersões, ao passo que

os valores teóricos para as rotações últimas mostraram-se um pouco mais distantes dos experimentais, sem perder, no entanto, razoável correlação; este talvez seja o parâmetro mais difícil de ser estimado, haja vista basear-se em deformações últimas dos componentes da ligação, cujos valores podem e devem ser mais discutidos – deformações últimas da cantoneira de assento, dos conectores de cisalhamento e das armaduras envolvidas pelo concreto. Além disso, a ocorrência de certos fenômenos inicialmente não previstos ou supostos de menor importância impôs a necessidade de se ajustar, em alguns momentos, o modelo desenvolvido em [6] e [9] para se promover uma melhor correlação entre os valores teóricos e experimentais.

A observação das curvas momento versus rotação das ligações ensaiadas indica que o comportamento desta tipologia é profundamente influenciado pelo processo de fissuração da laje de concreto, haja vista a baixa rigidez da ligação puramente metálica e taxas de armadura baixas a moderadas – 0,5% e 0,8% para as ligações dos grupos 2 e 1, respectivamente. Isto parece justificar o fato de que em ensaios de ligações mistas com chapas de extremidade [12] ou chapas de cisalhamento soldadas e cantoneiras de assento [17], bem mais rígidas que as cantoneiras de alma parafusadas e cantoneiras de assento da ligação aqui avaliada, a influência do processo de fissuração na laje de concreto não ter apresentado relevância e, desta forma, não ter sido relatada.

Sendo assim, o modelo descrito no *Ceb-fip* [15] para representar o processo de fissuração de um tirante de concreto armado foi exaustivamente utilizado, sendo muitas vezes ajustado uma vez que, no caso de ligações/elementos fletidos, fatores relativos à curvatura e não uniformidade de tensões de flexão, aliados à já presente não uniformidade de tensões transferidas por aderência, promovem a perda de correlação entre o comportamento de um tirante e uma laje de concreto armado em flexotração, tal qual o caso em estudo.

O ponto chave em questão parece ser como se dará o processo de fissuração e, em adição, quando este processo se estabilizará; este fenômeno é caracterizado no comportamento da ligação por grandes perdas de rigidez.

Impõe-se, pois, que se reconsiderem suposições iniciais de que a contribuição da dupla de cantoneiras de alma no estágio composto da ligação seria pequena. Ao contrário, comparando-se o comportamento das ligações tipo (a) e (b) ensaiadas nos protótipos cruciformes percebe-se que, após o aparecimento da primeira e principal fissura, as cantoneiras de alma, ao que tudo indica, controlam a sua abertura, inibindo o

surgimento imediato de outras e, por conseguinte, retardando a configuração de um estado de fissuração estabilizado. Vale reafirmar que as cantoneiras de alma, ou melhor, a ligação puramente metálica, pode (o que em geral ocorre), inclusive, permitir a contribuição da laje de concreto na rigidez inicial da ligação, desde que tenha rigidez suficiente para tal. Vale salientar que a contribuição do concreto para a rigidez inicial de ligações mistas tem sido sugerida em [17], onde Rex e Easterling atribuem a perda de correlação entre a rigidez inicial teórica e experimental a não consideração da contribuição da laje de concreto nos modelos teóricos desenvolvidos.

Infelizmente, haja vista a pequena quantidade de amostras – apesar de terem sido testados quatro modelos cruciformes, para cada tipologia de ligação (a) e (b) são apenas dois os espécimes testados, um em cada grupo – não há como definir qual o valor de rigidez relativa limite a partir do qual o engenheiro poderá considerar ou não a participação da laje de concreto na rigidez inicial da ligação; as ligações aqui avaliadas, no entanto, constituem um bom indicativo. Nos ensaios realizados com o protótipo da laje mista em escala real, cujos resultados foram apresentados no capítulo V, a consideração da participação do concreto tracionado na rigidez inicial da ligação foi fundamental para obtenção de uma ótima correlação entre os comportamentos teórico e experimental sob cargas baixas a medianas. Acredita-se aqui, pois, que a presença do trecho comprimido no vão da laje de concreto e da viga mista, como acontece nas estruturas reais, conduza a uma curvatura mais suave nas regiões de momento negativo, atenuando o comportamento de flexotração observado nos protótipos cruciformes testados, diminuindo a velocidade na abertura das fissuras e permitindo uma contribuição mais efetiva do concreto tracionado. Acredita-se, pois, que o concreto tracionado pode ser sempre considerado na determinação da rigidez inicial das ligações desde que seja utilizada a Eq.(II-1) com o uso do momento de fissuração estabilizada  $M_{Fiss}$ , quando então ocorre uma considerável perda de rigidez na ligação, passando esta a ser basicamente dependente das armaduras em tração, dos conectores de cisalhamento e da cantoneira de assento.

Portanto, baseando-se nos resultados dos testes realizados, a menos que o engenheiro preveja a ocorrência prematura de fissuras e certo grau de rotação na ligação, a presença das cantoneiras de alma é recomendada, uma vez que melhora sensivelmente o desempenho estrutural do conjunto. A não consideração/previsão da configuração de um estado de fissuração estabilizado sob cargas ainda baixas quando do

uso de ligações sem cantoneiras de alma pode levar a uma subestimação dos deslocamentos da estrutura sob cargas de serviço, além de conduzir a uma distribuição de esforços equivocada, com a subestimação dos momentos fletores nos vãos das vigas.

Vale salientar, entretanto, que seria de grande valia a realização de novos ensaios de modelos cruciformes com uma quantidade maior de amostras, aumentando, por exemplo, a distância entre o ponto de aplicação da carga dos atuadores hidráulicos e o eixo da viga principal, o que diminuiria a amplitude da carga aplicada e, para as ligações sem cantoneiras de alma, conseqüentemente diminuiria a força cortante na laje de concreto, a qual assume para esta tipologia um papel fundamental ao aliviar a força cortante absorvida pelas cantoneiras de assento. Além disso, poderia ser aplicado um controle de torque nos parafusos das cantoneiras de assento (ligação por atrito) de maneira a limitar a influência das folgas construtivas nestes elementos - isto poderia diminuir as rotações das ligações sob cargas baixas a medianas, especialmente no caso da ausência das cantoneiras de alma, onde se percebe um patamar e processo de fissuração estabilizado sob cargas baixas. Ademais, nestes novos testes poderia também ser incorporada uma avaliação estatística de determinados parâmetros como, por exemplo, os fatores de forma das ligações mistas – entretanto, os resultados obtidos com os protótipos cruciformes e com a laje mista em escala real (capítulo V) parecem indicar que um fator de forma em torno de 2,0 para a tipologia de ligação com cantoneiras testada seria bastante razoável.

Vale também salientar que nenhuma verificação quanto ao estado limite de serviço foi realizada nos testes com protótipos cruciformes, não se controlando, pois, a abertura das fissuras. Sendo assim, as ligações do grupo 2, com baixa taxa de armadura, apresentaram fissuras maiores que as do grupo 1, com o aço praticamente escoando no interior da principal fissura quando da estabilização do processo de fissuração – manuais de projeto [14] indicam a área de reforço mínima para assegurar que o aço permaneça elástico quando a principal fissura ocorre na laje, controlando assim, de certa forma, a sua abertura.

Ademais, não foi observado efeito significativo de *shear-lag* nas lajes de concreto dos protótipos cruciformes ensaiados, havendo, pois, certa uniformidade espacial na deformação das barras de aço – somente nas últimas etapas as armaduras centrais apresentaram maiores deformações; em todos os ensaios, entretanto, todas as armaduras atingiram o escoamento. Isto sugere que a relação entre a largura da laje e do

elemento de apoio (mesa da viga principal) adotada no ensaio, 5,5, é adequada. Acredita-se que a largura efetiva nas regiões de momento negativo de vigas mistas associado a um limite superior igual a sete vezes a largura do elemento de apoio, como indicado na literatura, seja razoável para definir o trecho necessário à acomodação das armaduras – tal critério também foi utilizado para definir o trecho de acomodação das armaduras nas ligações do protótipo da laje em escala real ensaiado, resultando também em uma razoável uniformidade de deformações nas armaduras.

Referindo-se mais especificamente ao capítulo IV, os programas desenvolvidos (Grecon e PAEST3D) demonstraram ser muito eficientes na execução de análises avançadas de sistemas de pisos mistos aço-concreto semicontínuos. Com o programa Grecon, a avaliação de mecanismos de colapso plástico nestes tipos de estrutura é possível por meio da representação do piso como uma grelha não-linear, onde a fissuração na mesa da viga mista em regiões de momento negativo e o comportamento das ligações semi-rígidas metálicas e mistas podem ser representados, assim como a formação de rótulas plásticas nos vãos das vigas mistas por meio de um modelo de plasticidade concentrada, sem falar da consideração das fases anterior e posterior à cura do concreto. O uso do programa PAEST3D, por sua vez, capacita o engenheiro a realizar análises estáticas lineares e dinâmicas da estrutura, com possibilidade de redução e controle de vibrações por meio de um sistema de controle passivo do tipo massa-mola-amortecedor. Além disso, com esta ferramenta o engenheiro pode acrescentar os pilares e sistemas de contraventamento da estrutura para absorção dos esforços horizontais e assim verificar o comportamento global da estrutura no caso do vigeamento de piso, avaliado como uma grelha não-linear no programa Grecon, ser projetado apenas para resistir às cargas de gravidade.

Portanto, outra sugestão para trabalhos futuros é a inclusão dos modelos não-lineares das ligações semi-rígidas metálicas e mistas, previstos no programa Grecon, também no programa PAEST3D, para que assim seja possível a análise de casos em que as ligações semi-rígidas também façam parte do sistema de contraventamento da estrutura – isto não foi feito nesta etapa da pesquisa porque o foco era a análise de pisos mistos semicontínuos sob ação de cargas de gravidade, apesar do modelo proposto e testado para o comportamento das ligações mistas com cantoneiras também ser válido em estruturas sob ação de forças horizontais, havendo a ressalva nas situações em que



ocorre o descarregamento da ligação, onde o retorno se dá segundo o valor de rigidez inicial.

Os testes realizados com a laje mista em escala real, cujos resultados foram apresentados no capítulo V, foram fundamentais no sentido de dirimir algumas dúvidas que ainda pairavam sobre o comportamento da tipologia de ligação mista testada nos modelos cruciformes. Pôde-se comprovar mais uma vez que o comportamento desta tipologia é profundamente influenciado pelo processo de fissuração na laje de concreto, ocorrendo uma perda de rigidez considerável após a configuração do processo de fissuração estabilizado na laje e havendo, pois, participação efetiva do concreto tracionado na rigidez inicial da ligação desde que haja a presença das cantoneiras de alma. Conforme observado, o modelo apresentado no capítulo II e testado no capítulo III foi capaz de representar satisfatoriamente o comportamento desta tipologia de ligação, a qual, como esperado, agregou ductilidade ao sistema além de aumentar a sua capacidade de carga quando comparado a uma solução hipotética tradicional com vigas rotuladas, conforme discutido no capítulo V.

Conforme constatado, ambos os programas Grecon e PAEST3D foram capazes de caracterizar o comportamento do protótipo da laje sob cargas baixas, sendo obtida uma correlação muito boa entre a rigidez inicial teórica e experimental do piso. Entretanto e conforme esperado, apenas o programa Grecon foi capaz de representar satisfatoriamente os estágios mais avançados do carregamento, capturando as não-linearidades referentes ao modelo das ligações utilizadas, representadas por meio da Eq.(II-1), assim como a formação de rótulas plásticas nos vãos das vigas mistas, representadas por meio de elementos de conexão não-lineares com coeficientes de rigidez segundo as equações Eq.(IV-8a) a Eq.(IV-8d), de acordo com o tipo de carregamento em questão; apesar do uso de um modelo de plasticidade concentrada e da não representação da laje por meio de elementos de casca, foi possível a obtenção de uma correlação satisfatória entre os pontos (níveis de carregamento) de formação de rótulas plásticas nos vãos das vigas secundárias, sendo a laje responsável pela transmissão das parcelas de carga não mais resistidas pelas vigas secundárias internas para as vigas de borda, quando do processo de plastificação. Vale lembrar outro fato importante, onde o programa Grecon conseguiu identificar que a formação de rótulas plásticas se deu primeiramente nos vãos das vigas secundárias, isto é, nas vigas mistas, para depois se formar nas ligações viga-viga parcialmente resistentes, fato este que se

acredita ser característico de pisos mistos com a tipologia de ligação com cantoneiras testada, dada a sua rigidez – na literatura técnica, em geral é revelado o inverso, com rótulas plásticas se formando primeiramente nas ligações, tal qual ocorre em sistemas contínuos.

Vale também salientar que o uso do elemento de casca MITC4 implementado no programa PAEST3D mostrou-se essencial para identificação estrutural e calibração do modelo numérico do protótipo da laje a partir das frequências de vibração obtidas experimentalmente nos ensaios dinâmicos, uma vez que foi possível a representação de uma forma mais realística da ortotropia geométrica da laje mista com forma de aço incorporada, muito comum neste tipo de estrutura.

Faz-se notório que, mesmo com a aferição da rigidez inicial da ligação puramente metálica nas ligações tipo (a) (com cantoneiras de alma) dos protótipos cruciformes, os testes realizados com os protótipos cruciformes (capítulo III) e com o protótipo da laje mista em escala real (capítulo V) correspondem a casos de sistemas escorados na fase de cura do concreto, com a totalidade das cargas, permanente mais variável, sendo aplicada no estágio composto – é de se esperar, pois, nestes casos, maior fissuração na laje de concreto. Provavelmente, no caso de sistemas não escorados na fase de cura do concreto, a fissuração na laje não será tão acentuada, uma vez que a quase totalidade das cargas permanentes, que muitas vezes representam o maior percentual do carregamento total, já foi aplicada ao sistema puramente metálico.

Finalmente, o estudo de caso apresentado no capítulo VI representa um exemplo completo de análise do pavimento de uma estrutura de grande porte, de onde pode ser extraída uma metodologia para a execução daquilo que se acredita aqui ser o projeto avançado de um sistema de piso misto aço-concreto semicontínuo, compreendendo as etapas anterior e posterior à cura do concreto e não se limitando às ligações mistas viga-viga. Para tanto, o programa Grecon foi utilizado para representar a estrutura do pavimento do edifício garagem do aeroporto internacional do Rio de Janeiro como uma grelha não-linear mista, constituída não apenas por ligações viga-viga com cantoneiras de assento e alma como também ligações viga-coluna constituídas por chapas de extremidade. As análises efetuadas conduziram a uma concepção estrutural com uma economia em peso de aço expressiva de até 22% para as vigas principais e 12% para vigas secundárias quando comparado com uma concepção tradicional constituída por vigas bi-rotuladas, tal qual o projeto original executado. Além da verificação da

segurança estrutural e aceitabilidade sensorial segundo deslocamentos excessivos, o conforto humano quanto a vibrações excessivas também foi verificado com o programa PAEST3D, comparando os valores de aceleração *rms* obtidos para diversos tipos de carregamentos dinâmicos com valores limites de percepção preconizados por normas internacionais (ISO 2631-2).

A análise dinâmica da fase mista da estrutura do piso do edifício garagem do aeroporto internacional do Rio de Janeiro revelou um fato promissor: mesmo com a redução de inércia das vigas mistas proporcionada por seções mais esbeltas da concepção semicontínua proposta, a redução de massa obtida e, principalmente, o acréscimo de rigidez proporcionado pelo posicionamento das ligações semi-rígidas mistas viga-viga e viga-pilar elevaram as frequências naturais dos dois primeiros modos de vibração da nova concepção estrutural em comparação com a solução mais tradicional com vigas rotuladas mais rígidas utilizada no projeto executado. Mesmo assim, em adição foi concebido, por intermédio do programa PAEST3D e das equações Eq.(IV-126c) e Eq.(IV-127c), um sistema de controle passivo de vibrações constituído por quatro atenuadores dinâmicos sincronizados e sintonizados (ADSs) na frequência do modo fundamental da estrutura, o que foi responsável por uma redução de até 55 % nas amplitudes de aceleração *rms* para uma dada faixa de frequências. Salienta-se que esta redução foi obtida com o uso de apenas 1 % da massa modal do primeiro modo de vibração e uma relação de 0,99 entre as frequências dos atenuadores e do primeiro modo da estrutura.

Portanto, defende-se aqui o conceito de “estrutura inteligente” de elevado desempenho, capaz de redistribuir e balancear esforços entre os vãos das vigas e as ligações parcialmente resistentes, com o estado limite último sendo caracterizado pela formação de um mecanismo de colapso plástico, além da habilidade de atenuar vibrações excessivas que porventura ocorram ao longo da sua vida útil por meio de atenuadores dinâmicos sincronizados (ADSs), garantindo, pois, economia, segurança e conforto aos usuários.

Por fim, acredita-se que os presentes resultados constituem um banco de dados acerca do comportamento de pisos mistos semicontínuos e ligações mistas segundo as tipologias avaliadas, permitindo, pois, à comunidade científica e de engenheiros estruturais um uso mais confortável destes elementos de ligação e o aprimoramento da tecnologia do projeto de estruturas mistas para sistemas de pisos.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] ECCS (1999): European Convention for Constructional Steelwork, Technical Committee 11 – Composite Structures. *Design of Composite Joints for Buildings*, n. 109, 1st edition, Brussels: European Committee for Standardization.
- [2] GOVERDHAN, A.V., 1983, *A Collection of Experimental Moment-Rotation Curves and Evaluation of Prediction Equations for Semi-rigid Connections*. Tese de Mestrado, Vanderbilt University, Nashville, TN.
- [3] NETHERCOT, D.A., 1985, “Steel Beam-to-Column Connections: A Review of Test Data and its Applicability to the Evaluation of Joint Behaviour in the Performance of Steel Frames”, *CIRIA Report*, RP 338.
- [4] NETHERCOT, D.A., 1985, “Utilization of Experimentally Obtained Connection Data in Assessing the Performance of Steel Frames”. In: *Connection Flexibility and Steel Frames*, (W.F. Chen, Ed.), Proc. of a Session sponsored by the ASCE Structural Division, Detroit.
- [5] KISH, N., CHEN, W.F., 1986, “Data Base of Steel Beam-to-Column Connections”, *Structural Engineering*, Report No. CE-STR-86-26, School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, IN.
- [6] OLIVEIRA, T.J.L., 2003, *Análise de Pisos mistos com ligações semi-rígidas*. Dissertação de Mestrado, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- [7] CEN (1993): *ENV1993 – Eurocode 3: Design of Steel Structures*, Comité Européen de Normalisation, CEN/TC250/SC3.
- [8] FAELLA, C., PILUSO, V., RIZZANO, G., 2000, *Structural Steel Semi-rigid Connections*. 1<sup>a</sup> ed., Washington, D.C, CRC Press LLC.
- [9] OLIVEIRA, T.J.L., BATISTA, E.M., 2004, “Análise de Sistemas de Pisos Mistos Aço-concreto Semicontínuos”. In: *XXXI Jornadas Sul-americanas de Engenharia Estrutural*, Mendoza, Argentina.

- [10] WU, F. -H., CHEN, W. -F., 1990, “A Design Model for Semi-rigid connections”, *Eng. Struct.*, vol. 12, pp. 88-96.
- [11] CHEN, W.F., LUI, E.M., 1991, *Stability Design of Steel Frames*. Florida, CRC.
- [12] AHMED, B., NETHERCOT, D.A., 1997, “Prediction of Initial Stiffness and Available Rotation Capacity of Major Axis Composite Flush Endplate Connections”, *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 41, n° 1, pp. 31-60.
- [13] QUEIROZ, GILSON, PIMENTA, R.J., MATA, L.A., 2001, *Elementos Das Estruturas Mistas Aço-Concreto*. 1ª ed., Belo Horizonte, O Lutador.
- [14] Eurocode 4, ENV 1994-1-1:1992, *Design of Composite Steel and Concrete Structures – Part – 1: General Rules and Rules for Buildings*. Bruxelas: European Committee for standardization.
- [15] CEB-FIP MODEL CODE 1990, 1990, CEB, Lausanne.
- [16] ALMEIDA, M.C.F., 1984, *An Analysis of cracking behavior of reinforced concrete*. Dissertação de mestrado, Polytechnic of Central London.
- [17] REX, C.O., EASTERLING, W. S., 2002, “Partially restrained composite beam-to-girder connections”, *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 58, pp. 1033-1060.
- [18] HARRIS, H.G., SABNIS, G.M., 1999, *Structural Modeling and Experimental Techniques*. 2ª ed., Boca Raton, Florida, CRC Press LLC.
- [19] BURNET, M.J., OEHLERS, D.J., 2001, “Rib Shear Connectors in Composite Profiled Slabs”, *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 57, pp. 1267-1287.
- [20] QUEIROZ, G., MATA, L.A.C., FRANCO, J.R.Q., 2005, “Analysis of composite connections in unbraced frames subjected to wind and gravity loading”, *Journal of Construction Steel Research*, vol. 61, n° 8, pp. 1075-1093.
- [21] TIMOSHENKO, S.P., 1969, *Resistência dos Materiais - Vol. I*. 1ª ed., Rio de Janeiro, Brasil, Ao Livro Técnico S. A.
- [22] LI, T.Q., CHOO, B.S., NETHERCOT, D.A., 1995, “Determination of Rotation Capacity Requirements for Steel and Composite Beams”, *Journal of Constructional Steel Research*, v. 32, n° 3, pp. 303-332.

- [23] LI, T.Q., NETHERCOT, D.A., LAWSON, R.M., 2000, “Required Rotation of Composite Connections”, *Journal of Constructional Steel Research*, v. 56, n° 2 (November), pp. 151-173.
- [24] ASCE: American Society of Civil Engineers, 1941, *Plastic Design in Steel – A Guide and Commentary*, n° 41, 2ª ed., New York, ASCE.
- [25] GERE, J.M., WEAVER JR, W., 1981, *Análise de Estruturas Reticuladas*. Rio de Janeiro, Guanabara Dois.
- [26] VALERIANO, E., 1994, *Análise Estrutural de Pontes em Vigas Múltiplas de Concreto Protendido*. Dissertação de Mestrado, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- [27] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., 1989, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3ª ed., New York, John Wiley & Sons.
- [28] VILLAÇA, S.F., GARCIA, L.F.T., 2000, *Introdução à Teoria da Elasticidade*. 4ª ed., Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ.
- [29] BATHE, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*. 2ª ed., Prentice Hall.
- [30] VALENTE, R. A. F., 1999, *Modelização do Comportamento Elasto-Plástico e Dinâmico de Estruturas tipo Casca*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal.
- [31] ZIENKIEWICZ, O. C., 1986, *The Finite Element Method*. 3ª ed., Maidenhead, England, McGraw-Hill Book Company.
- [32] CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., *Dynamics of Structures*. 2ª ed., New York, McGraw-Hill.
- [33] PRZEMIENIECKI, J.S., 1985, *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York, Dover Publications Inc.
- [34] BATTISTA, R. C., 1993, *Notas de aula da disciplina Redução e Controle de Vibrações*. COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Civil.
- [35] BATTISTA, R.C., ROITMAN, N., MAGLUTA, C., 1993, “Structural Dynamic Analysis of Maracanã Stadium”, *Benchmark Magazine*, NAFENS – Finite

Element Methods and Standards, 3<sup>rd</sup> quarter, pp. 35-37, Glasgow, Scotland, M&M Press.

- [36] OLIVEIRA, T.J.L., CORREA, W.L., SILVA, A.A., SANTOS, E.F., ALVARIÑO, L.A.R., BATTISTA, R.C., 2006, “Controle Ativo de Vibrações em Torres Tubulares Cilíndricas”. In: *XXXII Jornadas Sul-americanas de Engenharia Estrutural*, Campinas, Brasil.
- [37] VARELLA, W. D., 2004, *Modelo Teórico-Experimental para Análise de Vibrações Induzidas por Pessoas Caminhando sobre Lajes de Edifícios*. Tese de Doutorado, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- [38] MAGLUTA, C., 1993, *Sistemas Dinâmicos Passivos para Absorção de Vibrações Estruturais*. Tese de Doutorado, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- [39] DEN HARTOG, J. P., 1940, *Mechanical Vibration*. 2<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill.
- [40] RIBEIRO, F.L.B., 2004, *Notas de aula da disciplina Elementos Finitos I*. COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Civil.
- [41] LEON, R.T., AMMERMAN, D.J., 1990, “Semi-Rigid Composite Connections for Gravity Loads”, *AISC Engineering Journal*, 1st quarter, pp. 1-11.
- [42] AISC (1986): *Load and Resistance Factor Design for Structural Steel Buildings*, American Institute of Steel Construction, Chicago.
- [43] NBR 8800 (1986): Associação Brasileira de Normas Técnicas, *Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios*, Rio de Janeiro, Brasil.
- [44] ALBUQUERQUE, A.T., 1999, *Análise de Alternativas Estruturais para Edifícios em Concreto Armado*. Tese de Mestrado, USP/Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, São Paulo, Brasil.
- [45] BACHMAM, H. ET AL., 1997, *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*. 2<sup>a</sup> ed., Berlin, Germany.
- [46] ISO 2631-2: International Organization for Standardization, 1989, *Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration – Part 2: Continuous and Shock-induced Vibration in Buildings (1 to 80 Hz)*, 1<sup>a</sup> ed., Switzerland.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)