Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Representação de Weierstrass para Superfícies Planas no Espaço Hiperbólico

por

Allan de Oliveira Moura

Brasília, Junho de 2005.

Agradecimentos

Agradeço os meus pais, Juscelino e Madalena, pela motivação em todos os aspectos e estarem comigo em mais uma conquista.

As minhas irmãs, Francerly e Talita, pelo carinho e compreensão durante toda a minha vida. Inclusive em vários momentos de grande aflição minha.

Aos meus avós, em particular a "Vó Neuza", que apesar de não estar mais entre nós, sempre estará na minha memória.

Aos meus tios mais queridos.

À meu orientador, Prof° Pedro Roitman pela orientação e principalmente pela paciência durante a realização desse trabalho.

Aos meus amigos Erivelton, Jacson, Jeydson e Pablo.

Aos amigos de Brasília, Marcelo, André, Tiago e Sinagava.

A todos os meus amigos da UnB que acreditaram, confiaram e ainda confiam na minha capacidade acadêmica. Em especial: Abílio, Ney, Willian, André, Aline, Sandra, Raquel, Jhone, Cris, Letícia, Zapata, Daniel, Hélio, Débora, Rafael, Albérico, Daniel Guimarães, Bianka, Fernando, Fausto e Neiton.

Aos meus professores do Departamento de Matemática de Viçosa. Em especial: Marines, Olimpio, Paulo Tadeu e Lana.

Ao professor Walterson, pelas correções e sugestões para a finalização deste trabalho.

Agradeço aos demais professores, funcionários e colegas do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, que de alguma forma contribuíram para a realização desse trabalho. Especialmente, Prof° José Alfredo, Prof° Xia, Tânia Sertão e Gari.

Finalmente, agradeço ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as superfícies planas (isto é, curvatura intrínseca nula) no espaço hiperbólico de dimensão três ($\mathbb{H}^3$). Baseado no trabalho de Gálvez, Martínez e Milán [7] exibimos uma representação conforme para estas superfícies, usando a estrutura conforme determinada pela segunda forma fundamental. Uma nova demonstração do famoso teorema Volkov-Valdimirova [18] e Sasaki [14] de caracterização de superfícies completas em $\mathbb{H}^3$, é obtida a partir desse teorema. Usamos a representação conforme para construir alguns exemplos.

Abstract

In this work, we study flat surfaces (that is, zero intrinsic curvature) in the hyperbolic 3-space ($\mathbb{H}^3$). Based in the work of Gálvez, Martínez and Milán [7] we show a conformal representation for these surfaces, using the conformal structure determined by the second fundamental form. Using the above result, we give a new proof of the famous theorem due to Volkov-Valdimirova [18] and Sasaki [14] of characterization of complete flat surfaces in $\mathbb{H}^3$. We use the conformal representation to construct some examples of flat surfaces.

Sumário

Introdução

A representação em termos de dados holomorfos de superfícies mínimas no espaço euclidiano, $\mathbb{R}^3$, a famosa representação de Weierstrass [12], é uma importante ferramenta no estudo de superfícies mínimas. Esta relação entre funções holomorfas e superfícies mínimas constitui um dos mais antigos temas da geometria diferencial clássica, sendo ainda um tópico de pesquisa atual.

No entanto, a relação entre funções holomorfas em certas classes de superfícies não se limita ao caso das superfícies mínimas. Por exemplo, Bryant, em 1987 [3], mostrou uma representação em dados holomorfos, análogo a representação de Weierstrass, para superfícies de curvatura media um, CMC-1, em $\mathbb{H}^3$. Em 1993, Umehara e Yamada, [17], estudaram superfícies completas CMC-1 em $\mathbb{H}^3$, usando a representação obtida por Bryant.

Em nosso trabalho, exibimos uma representação conforme em termos de dados holomorfos para uma outra classe de superfícies no espaço hiperbólico, a saber, superfícies planas (isto é, curvatura intrínseca nula).

Tal representação foi obtida por Gálvez, Martínez e Milán [7], considerando a estrutura conforme induzida em uma superfície plana pela segunda forma fundamental. Em termos desta estrutura conforme, a chamada aplicação de Gauss Hiperbólica (aplicação análoga a aplicação normal de Gauss para superfícies em $\mathbb{R}^3$) se torna uma aplicação holomorfa, e tal fato (análogo ao caso das superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$) permite a representação conforme.

O trabalho pioneiro de Gálvez, Martínez e Milán têm despertado um interesse em relação ao estudo de superfícies planas. Como exemplos, podemos citar os trabalhos de Kokubu, Rossman, Saji, Umehara e Yamada [10] e [9], que obtiveram estudos sobre singularidades em superfícies planas.

No capítulo um, introduzimos alguns conceitos sobre levantamento de funções, apresentamos o espaço hiperbólico e comentamos sobre continuação de isometrias.

No capítulo dois, falamos sobre a existência de coordenadas isotérmicas globais e exibimos a segunda forma fundamental em uma coordenada conforme.

No capítulo três, demonstramos o teorema de representação conforme para superfícies planas, obtemos que a aplicação de Gauss Hiperbólica é holomorfa, exemplificamos o teorema e obtemos uma nova demonstração para o teorema, devido a Volkov-Vladimirova [18] e Sasaki [14], de caracterização de superfícies planas completas em $\mathbb{H}^3$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo fazemos algumas considerações introdutórias que serão utilizadas neste trabalho. O levantanto de uma função será definido na seção 1.1, o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ será introduzido na seção 1.2, falamos sobre continuação de isometrias na seção 1.3.

1.1 Levantamento de funções

Definição 1.1. *Sejam $\tilde{M}$ e M duas variedades, a aplicação $\pi : \tilde{M} \to M$ é chamada aplicação de recobrimento se π é um homeomorfismo local e cada $x \in M$ admite uma vizinhança conexa V tal que toda componete conexa de $\pi^{-1}(V)$ é aplicada por π homeomorficamente sobre V.*

Teorema 1.1. *Sejam $\pi : \tilde{M} \to M$ uma aplicação de recobrimento, S uma variedade simplesmente conexa e $f : S \to M$ uma aplicação contínua, então existe uma aplicação contínua $\tilde{f} : S \to \tilde{M}$ com*

$$\pi \circ \tilde{f} = f.$$

Damos uma prova do teorema 1.1 baseda em [8]. Primeiro, vamos provar dois lemas.

Definição 1.2. *Uma $\tilde{f}$ como no teorema acima é chamada levantamento de f.*

Lema 1.1. *Sejam $\pi : \tilde{M} \to M$ uma aplicação de recobrimento, $\tilde{p}_0 \in \pi^{-1}(p_0)$ e $c : [0,1] \to M$ uma curva com $c(0) = p_0$. Então c pode ser levantado para uma curva $\tilde{c} : [0,1] \to \tilde{M}$ com $\tilde{c}(0) = \tilde{p}_0$ de modo que*

$$\pi \circ \tilde{c} = c$$

mais ainda, $\tilde{c}$ é unicamente determinada pela escolha do seu ponto inicial $\tilde{p}_0$.

Demonstração. Seja $T = \{t \in [0,1]$ tal que $c|_{[0,t]}$ pode ser levantado para uma única curva $\tilde{c}|_{[0,t]}$ com $\tilde{c}(0) = \tilde{p}_0\}$.

Temos que $0 \in T$, assim T é não vazio.

Se $t \in T$, escolha uma vizinhança V de $c(t)$ de tal modo que π aplica cada componente $\pi^{-1}(V)$ homeomorficamente sobre V. Denotaremos por $\tilde{V}$ a componente de $\pi^{-1}(V)$ contendo $\tilde{c}(t)$. Podemos escolher $\tau > 0$ tão pequeno tal que $c([t, t+\tau]) \subset V$. Então é claro que $\tilde{c}$ pode ser estendido como um levantamento de c para $[t, t+\tau]$, posto que $\pi : \tilde{V} \to V$ é um homeomorfismo. Isto prova que T é aberto em $[0,1]$

Suponha agora que $\{t_n\} \subset T$, e $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Escolhemos uma vizinhaça V de $c(t_0)$ como antes, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ com $c([t_{n_0}, t_0]) \subset V$. Seja $\tilde{V}$ a componente de $\pi^{-1}(V)$ contendo $\tilde{c}(t_{n_0})$. Podemos estender $\tilde{c}$ para $[t_{n_0}, t_0]$, visto que $\pi : \tilde{V} \to V$ é um homeomorfismo. Assim $t_0 \in T$, de modo que T é também fechado, então $T = [0,1]$. ∎

Lema 1.2. *Sejam $\pi : \tilde{M} \to M$ uma aplicação de recobrimento e $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to M$ uma homotopia entre os arcos $\gamma_0 = \Gamma(.,0)$ e $\gamma_1 = \Gamma(.,1)$ com os pontos iniciais e finais fixos, $p_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ e $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Seja $\tilde{p}_0 \in \pi^{-1}(p_0)$ então Γ pode ser levantada para uma homotopia $\tilde{\Gamma} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{M}$ com pontos iniciais $\tilde{p}_0$(isto é, $\tilde{\Gamma}(0,s) = \tilde{p}_0$ para todo $s \in [0,1]$) e*

$$\pi \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma.$$

Em particular, o levantamento dos caminhos $\tilde{\gamma}_0$ e $\tilde{\gamma}_1$ com ponto inicial $\tilde{p}_0$ tem o mesmo ponto final $\tilde{p}_1 \in \pi^{-1}(p_1)$ e são homotópicos.

Demonstração. Cada caminho $\Gamma(.,s)$ pode ser levantado para um caminho $\tilde{\gamma}_s$ com ponto inicial $\tilde{p}_0$ pelo Lema 1.1. Considere

$$\tilde{\Gamma}(t,s) = \tilde{\gamma}_s(t).$$

Devemos mostrar que $\tilde{\Gamma}$ é contínua. Seja $\Sigma = \{(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ tal que $\tilde{\Gamma}$ é continua em $(t,s)\}$. Primeiro pegamos uma vizinhança $\tilde{U}$ de $\tilde{p}_0$ tal que $\pi : \tilde{U} \to U$ é um homeomorfismo sobre a vizinhaça U de p_0. Seja $\varphi : U \to \tilde{U}$ a sua inversa.

Visto que $\Gamma(\{0\} \times [0,1]) = p_0$ e Γ é contínua, existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$\Gamma([0,\epsilon] \times [0,1]) \subset \tilde{U}$$

pela unicidade afirmada no Lema 1.1, temos

$$\tilde{\gamma}_s|_{[0,\epsilon]} = \varphi \circ \gamma_s|_{[0,\epsilon]}$$

para todo $s \in [0,1]$. Assim

$$\tilde{\Gamma} = \varphi \circ \Gamma \quad \text{em} \quad [0,\epsilon] \times [0,1]\,.$$

Em particular, $(0,0) \in \Sigma$.

Seja $(t_0, s_0) \in \Sigma$ escolhemos $\tilde{U}$ uma vizinhança de $\tilde{\gamma}(t_0, s_0)$ para o qual $\pi : \tilde{U} \to U$ é um homemomorfismo sobre uma vizinhaça U de $\Gamma(t_0, s_0)$. Denotaremos sua inversa novamente por $\varphi : U \to \tilde{U}$.

Como $\tilde{\Gamma}$ é contínua em (t_0, s_0), temos

$$\tilde{\Gamma}(t,s) \in \tilde{U} \quad \text{para} \quad |t - t_0| < \epsilon, |s - s_0| < \epsilon$$

se $\epsilon > 0$ é bastante pequeno. Pela unicidade do levantamento, obtemos

$$\tilde{\gamma}_s(t) = \varphi \circ \gamma_s(t) \quad \text{para} \quad |t - t_0|\,, |s - s_0| < \epsilon$$

De modo que

$$\tilde{\Gamma} = \varphi \circ \Gamma \quad \text{em} \quad \{|t - t_0| < \epsilon\} \times \{|s - s_0| < \epsilon\}\,,$$

em particular $\tilde{\Gamma}$ é contínua em uma vizinhança de (t_0, s_0). Então Σ é aberto.

A prova que Σ é fechado é semelhante. Seguindo que $\Sigma = [0,1] \times [0,1]$, isto é $\tilde{\Gamma}$ é contínua.

Como $\Gamma(\{1\} \times [0,1]) = p_1$ e $\pi \circ \tilde{\Gamma} = \Gamma$, devemos ter $\tilde{\Gamma}(\{1\} \times [0,1]) \subset \pi^{-1}(p_1)$, mas π^{-1} é discreto visto que π é uma aplicação de recobrimento e $\tilde{\Gamma}(\{1\} \times [0,1])$ é conexa. Assim $\tilde{\Gamma}(\{1\} \times [0,1])$ deve reduzir a um simples ponto. Então todas as curvas $\tilde{\gamma}_s$ tem o mesmo ponto final.

■

Demonstração do teorema 1.1. Pegamos um $y_0 \in S$ tal que $p_0 = f(y_0)$ e escolhemos um $\tilde{p}_0 \in \pi^{-1}(p_0)$.

Para qualquer $y \in S$, podemos encontrar uma caminho $\gamma : [0,1] \to S$ com $\gamma(0) = y_0$ e $\gamma(1) = y$. Pelo Lema 1.1, o caminho $c = f \circ \gamma$ pode ser levantado para uma caminho $\tilde{c}$ começando em $\tilde{p}_0$.

Considere $\tilde{f}(y) = \tilde{c}(1)$. Como S é simplesmente conexa, quaisquer dois caminhos γ_1 e γ_2 em S com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = y_0$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = y$ são homotópicos. Assim, $f(\gamma_1)$ e $f(\gamma_2)$ são também homotópicos, visto que f é contínua. Então, a partir do Lema 1.2, o ponto $\tilde{f}(y)$ obtido acima é independente da escolha do caminho γ ligando y_0 a y_1. A continuidade de $\tilde{f}$ pode ser provada exatamente como na prova do Lema 1.2.

■

1.2 O espaço hiperbólico

Nesta seção vamos dar algumas características do espaço hiperbólico. Dizemos como são as isometrias deste espaço e introduzimos dois modelos, o modelo do hiperbolóide e o modelo do semi-espaço. E ainda exibimos uma fórmula para conectar os dois modelos a fim de podermos obter posteriormente uma visualizão das superfícies neste espaço.

Seja $\mathbb{L}^4$ o espaço de Minkowski de dimensão quatro dotado com coordenadas lineares (x_0, x_1, x_2, x_3) e o produto escalar $\langle\ .\ ,\ .\rangle$ dado pela forma quadrática $-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$. O espaço hiperbólico 3-dimensional, $\mathbb{H}^3$, é a variedade Riemanniana completa simplesmente conexa de dimensão 3 com curvatura seccional -1, que modelamos com o hiperbolóide

$$\mathbb{H}^3 = \left\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \ / \ -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_0 > 0\right\},$$

com a métrica induzida de $\mathbb{L}^4$.

Denote por $\mathbb{N}^3$ o cone nulo positivo, isto é

$$\mathbb{N}^3 = \left\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \ / \ -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, x_0 > 0\right\}.$$

A relação de equivalência em $\mathbb{N}^3$ que identifica os pontos $v \in \mathbb{N}^3$ que estão na mesma semi-reta $[v]$, permite identificar a fronteira ideal $\mathbb{S}^2_\infty$ de $\mathbb{H}^3$ com o quociente de $\mathbb{N}^3$ pela relação de equivalência.

Com a identificação acima, podemos definir uma estrutura conforme em $\mathbb{S}^2_\infty$ da seguinte maneira.

Sejam α e γ duas curvas em $\mathbb{S}^2_\infty$ tais que $\alpha, \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^2_\infty$ com $\alpha(0) = \gamma(0) = p$. Considere $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\gamma}$ os levantamentos em $\mathbb{N}^3$, das curvas α e γ, respectivamente, passando por $\tilde{q} \in \mathbb{N}^3$, isto é $[\tilde{\alpha}(t)] = \alpha(t)$ e $[\tilde{\gamma}(t)] = \gamma(t)$. Defina o ângulo, θ, formado pelas curvas α e γ no ponto p por:

$$cos(\theta) = \frac{\langle\tilde{\alpha}'(0), \tilde{\gamma}'(0)\rangle}{|\tilde{\alpha}'(0)|\,|\tilde{\gamma}'(0)|}.$$

Para mostrar que este ângulo está bem definido, considere outros levantamentos $\hat{\alpha}$ e $\hat{\gamma}$ de α e γ, respectivamente, que passam por $\hat{q} \in \mathbb{N}^3$. Então,

$$\hat{\alpha}(t) = \tilde{\lambda}_1(t)\tilde{\alpha}(t),$$

$$\hat{\gamma}(t) = \tilde{\lambda}_2(t)\tilde{\gamma}(t).$$

Derivando as equações acima em relação a t, obtemos

$$\begin{array}{rcl} \hat{\alpha}'(t) & = & \tilde{\lambda}_1'\tilde{\alpha}(t) + \tilde{\lambda}_1(t)\tilde{\alpha}'(t), \\ \hat{\gamma}'(t) & = & \tilde{\lambda}_2'\tilde{\gamma}(t) + \tilde{\lambda}_2(t)\tilde{\gamma}'(t). \end{array} \qquad (1.1)$$

Como, $\tilde{\alpha}(t), \tilde{\gamma}(t) \in \mathbb{N}^3 \ \forall \ t \in (-\epsilon, \epsilon)$, temos

$$\langle \tilde{\alpha}(t), \tilde{\alpha}(t) \rangle = \langle \tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}(t) \rangle = 0, \ \forall \ t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

derivando esta equação em relação a t, obtemos

$$\langle \tilde{\alpha}(t), \tilde{\alpha}'(t) \rangle = \langle \tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}'(t) \rangle = 0, \ \forall \ t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

em particular em $t = 0$,

$$\langle \tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}(0) \rangle = \langle \tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(0) \rangle = \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle = 0$$

e

$$\langle \tilde{\alpha}(0), \tilde{\alpha}'(0) \rangle = \langle \tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle = 0.$$

Assim, usando as equações (1.1), temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\alpha}'(0), \hat{\gamma}'(0) \rangle &= \left\langle \tilde{\lambda}_1'\tilde{\alpha}(0) + \tilde{\lambda}_1(0)\tilde{\alpha}'(0), \tilde{\lambda}_2'\tilde{\gamma}(0) + \tilde{\lambda}_2(0)\tilde{\gamma}'(0) \right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{\lambda}_1'(0)\tilde{q} + \tilde{\lambda}_1(0)\tilde{\alpha}'(0), \tilde{\lambda}_2'\tilde{q} + \tilde{\lambda}_2(0)\tilde{\gamma}'(0) \right\rangle \\ &= \tilde{\lambda}_1'(0)\tilde{\lambda}_2'(0) \langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle + \tilde{\lambda}_1(0)\tilde{\lambda}_2'(0) \langle \tilde{\alpha}'(0), \tilde{q} \rangle + \tilde{\lambda}_1'(0)\tilde{\lambda}_2(0) \langle \tilde{q}, \tilde{\gamma}'(0) \rangle \\ &\quad + \tilde{\lambda}_1(0)\tilde{\lambda}_2(0) \langle \tilde{\alpha}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle \\ &= \tilde{\lambda}_1(0)\tilde{\lambda}_2(0) \langle \tilde{\alpha}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle, \end{aligned}$$

de forma análoga,

$$\langle \hat{\alpha}'(0), \hat{\alpha}'(0) \rangle = \left\langle \tilde{\lambda}_1'(0)\tilde{q} + \tilde{\lambda}_1(0)\tilde{\alpha}'(0), \tilde{\lambda}_1'\tilde{q} + \tilde{\lambda}_1(0)\tilde{\alpha}'(0) \right\rangle = \tilde{\lambda}_1(0)^2 \langle \tilde{\alpha}'(0), \tilde{\alpha}'(0) \rangle,$$

e ainda,

$$\langle \hat{\gamma}'(0), \hat{\gamma}'(0) \rangle = \left\langle \tilde{\lambda}_2'(0)\tilde{q} + \tilde{\lambda}_2(0)\tilde{\gamma}'(0), \tilde{\lambda}_2'\tilde{q} + \tilde{\lambda}_2(0)\tilde{\gamma}'(0) \right\rangle = \tilde{\lambda}_2(0)^2 \langle \tilde{\gamma}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle.$$

Com isso, e usando a o que definimos, o ângulo θ fica determinado por,

$$\frac{\langle \hat{\alpha}'(0), \hat{\gamma}'(0) \rangle}{|\hat{\alpha}'(0)|\,|\hat{\gamma}'(0)|} = \frac{\tilde{\lambda}_1(0)\tilde{\lambda}_2(0) \langle \tilde{\alpha}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle}{\tilde{\lambda}_1(0)\tilde{\lambda}_2(0)\,|\tilde{\alpha}'(0)|\,|\tilde{\gamma}'(0)|} = cos(\theta)$$

não dependendo dos levantamentos que pegamos.

Consideraremos o espaço $\mathbb{L}^4$ identificado como o espaço das matrizes hermitianas 2×2, $Herm(2)$, pela identificação $(x_o, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4$ com a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

Sob esta identificação, claramente temos

$$\langle m, m\rangle = -\det(m),\ \forall\ m \in Herm(2).$$

A diferencial de uma matriz é definida como a matriz cujas entradas são a diferencial de cada entrada da matriz, isto é se

$$m = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{pmatrix}$$

sua diferencial é

$$dm = \begin{pmatrix} d\alpha & d\beta \\ d\delta & d\lambda \end{pmatrix}.$$

O grupo de Lie complexo, $SL(2,\mathbb{C})$, das matrizes complexas 2×2 com determinante 1, age naturalmente em $\mathbb{L}^4$ pela representação

$$g.m = gmg^*,$$

onde $g \in SL(2,\mathbb{C})$, $g^* = \bar{g}^t$ e $m \in Herm(2)$, onde g^t indica a transposta de g.

Observamos que, $SL(2,\mathbb{C})$ preserva o produto escalar e como $SL(2,\mathbb{C})$ é conexo, deve também preservar orientação. O núcleo desta ação é $\{\pm I_2\}$, de fato, queremos encontrar as matrizes $g \in SL(2,\mathbb{C})$ tal que vale a relação,

$$g.m = m\ \forall m \in Herm(2).$$

Então suponha

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

e considere particularmente esta relação para a matriz

$$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

assim,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A|^2 & A\bar{C} \\ \bar{A}C & |C|^2 \end{pmatrix}$$

portanto, $|A|^2 = 1$ e $C = 0$.

Considerando agora na relação a matriz

$$m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

assim,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |B|^2 & \bar{D}B \\ \bar{B}D & |D|^2 \end{pmatrix}$$

portanto,

$$|D|^2 = 1 \quad \text{e} \quad B = 0.$$

Se ainda considerarmos na relação a matriz

$$m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

assim,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}B + \bar{B}A & \bar{C}B + A\bar{D} \\ \bar{A}D + C\bar{B} & \bar{C}D + C\bar{D} \end{pmatrix}$$

portanto, usando que $C = 0$ e $B = 0$ obtido com as matrizes m_1 e m_2, obtemos

$$A\bar{D} = 1.$$

Juntando os resultados obtidos com as matrizes m_1, m_2 e m_3 e obervando que $g \in SL(2, \mathbb{C})$ e assim $AD = \det(g) = 1$, temos

$$1 = ADA\bar{D} = A^2$$

$$\bar{D} = \bar{A}A\bar{D} = \bar{A}$$

logo, $A = \pm 1$ e $D = A$. Portanto, o núcleo desta ação é $\{\pm I_2\}$.

Assim, $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$ pode ser considerado a componente da identidade do grupo especial de Lorentz $SO(1,3)$. Esta ação, passando o quociente por $\{\pm I_2\}$, pode ser restrita ao $\mathbb{H}^3$ e representa o grupo de isometrias do $\mathbb{H}^3$.

Para cada $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$ obtemos a equação

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = x_0^2 - x_3^2 = (x_0 - x_3)(x_0 + x_3)$$

e como $\mathbb{H}^3$ é simplesmente conexo, $(x_0 - x_3)$ e $(x_0 + x_3)$ tem o mesmo sinal para todo $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$. Observando que, para $x_3 = 0$ temos $x_0 + x_3$ e $x_0 - x_3$ positivos concluímos que a matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

é definida positiva, pois é uma matriz hermitiana com os determinantes menores positivos. Assim, podemos reconhecer $\mathbb{H}^3$ como o espaço das matrizes 2×2 hermitianas unimodulares positiva definidas.

Como os autovalores da matriz representada da forma (1.2) pertencentes a $\mathbb{N}^3$ são não negativos, 0 e $2x_0$, a matriz é definida semi-positiva e este espaço pode ser visto como o espaço das matrizes 2×2 hermitianas definida semi-positiva com determinante 0. Tais matrizes podem sempre ser escritas da forma $a\bar{a}^t$, onde $a^t = (a_1, a_2)$ é um vetor não nulo em $\mathbb{C}^2$ unicamente definido a menos de multiplicação por um número complexo unimodular.

A aplicação $a\bar{a}^t \to [a_1, a_2] \in \mathbb{C}P^1$ representa a aplicação $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{S}^2_\infty$ e identifica $\mathbb{S}^2_\infty$ com $\mathbb{C}P^1$. Deste modo, a ação natural de $SL(2,\mathbb{C})$ em $\mathbb{S}^2_\infty$ torna-se simplesmente a ação de $SL(2,\mathbb{C})$ em $\mathbb{C}P^1$ por uma transformação de Möbius.

O modelo do semi-espaço superior para $\mathbb{H}^3$ é $\mathbb{R}^3_+ = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, y_3 > 0\}$ dotado da métrica

$$d\tau^2 = \frac{1}{y_3^2}(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2).$$

Vamos deduzir uma fórmula conectando o modelo do hiperbolóide e o modelo do semi-espaço.

Primeiro passamos do modelo do hiperbolóide para uma bola usando a projeção linear no plano $\{x_0 = 0\}$ a partir do ponto $(-1, 0, 0, 0)$:

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (0, \frac{x_1}{x_0+1}, \frac{x_2}{x_0+1}, \frac{x_3}{x_0+1}) = (0, X_1, X_2, X_3) = (X_1, X_2, X_3).$$

Para passar desta bola para o semi-espaço superior usamos a inversão da bola de raio $\sqrt{2}$, contida no plano $\{x_0 = 0\}$, e centrada em $(0,0,0,-1) = (0,0,-1)$:

$$p \to \frac{2\,[p-(0,0,-1)]}{\|p-(0,0,-1)\|^2} + (0,0,-1)$$

o qual aplica a bola sobre o semi-espaço.

Usando a equação $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|p-(0,0,-1)\|^2 &= \|(X_1,X_2,X_3)-(0,0,-1)\|^2 = X_1^2 + X_2^2 + (X_3+1)^2 \\
&= \frac{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + x_0 + 1)^2}{(x_0+1)^2} = \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{(x_0+1)^2} + \frac{2x_3}{x_0+1} + 1 \\
&= \frac{x_0^2 - 1}{(x_0+1)^2} + \frac{2x_3}{x_0+1} + 1 = \frac{2(x_0+x_3)}{x_0+1},
\end{aligned}$$

e finalmente conseguimos a formula esperada

$$(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{x_0 + x_3}(x_1, x_2, 1).$$

Observe que esta fórmula inverte a orientação, pois a inversão inverte a orientação.

1.3 Continuação de isometrias

Sejam N e $\tilde{N}$ duas variedades de mesma curvatura seccional constante K_0. Sejam $\{X_1, ..X_n\}$ uma base ortonormal de T_pN e $\left\{\tilde{X}_1, ..\tilde{X}_n\right\}$ uma base ortonormal de $T_{\tilde{p}}\tilde{N}$. Considere $c : [0,1] \to N$ uma curva com $c(0) = p$. Pelo teorema de Cartan, ver [5] p. 157, existe uma isometria f de uma vizinhança U_0 de p para , com $df_p(X_i) = \tilde{X}_i$.

Definição 1.3. *Sejam $U_0 \subset N$ uma vizinhança de p, $\tilde{U}_0 \subset N$ uma vizinhança de $\tilde{p}$ tal que $f : U_0 \to \tilde{U}_0$ seja uma isometria e $c : [0,1] \to N$ uma curva. Uma continuação de f ao longo de c é uma família $\{f_t\}$ de isometrias $f_t : U_t \to \tilde{N}$, onde U_t é uma vizinhança de $c(t)$, com $f_0 = f$ satisfazendo a seguinte condição: para cada t existe $\delta > 0$ de tal modo que*

$$\left|t - t^{'}\right| < \delta \Rightarrow f_t = f_t^{'} \text{ em } U_t \cap U_t^{'}.$$

ObservaçÞ2 1.1. *Se N é conexa, então existe no máximo um isometria $\phi : N \to \tilde{N}$ com $d_p(\phi)(X_i) = \tilde{X}_i$ para um $p \in N$. De fato, suponha que existem $\phi_1, \phi_2 : N \to \tilde{N}$ com*

$d_p(\phi_j)(X_i) = \tilde{X}_i$. Seja $A = \{q \in N$ tal que $\phi_1(q) = \phi_2(q)$ e $d_q\phi_1(v) = d_q\phi_2(v)\}$, como $p \in A$, A é não vazio. Se uma seqüência de pontos está em A o seu limite também está. Assim, A é fechado. Sejam $q \in A$ e $v \in T_qN$ com $|v| = 1$, então existe $\epsilon = \epsilon(v)$ e uma geodésica $c : (-\epsilon, \epsilon) \to N$ tal que $c(0) = q$ e $c'(0) = v$, e ainda $\phi_1(q) = \phi_2(q)$ e $d_q\phi_1(v) = d_q\phi_2(v)$. Obtendo que as imagens da geodésica c pelas isometrias são ainda a mesma geodésica em $\tilde{N}$ e como o conjunto dos vetores v é compacto temos que ϵ não tende a zero, existindo um ϵ_m mínimo. Assim a bola de centro q e raio ϵ_m e uma vizinhaça de q que ainda está no conjunto A. Portanto A é aberto. Como N é conexo temos que $A = N$ e as isometrias são iguais.

Proposição 1.1. *Sejam $U_0 \subset \tilde{N}$ uma vizinhança de p_0 e $\tilde{U}_0 \subset N$ uma vizinhança de q_0 tal que $f : U_0 \to \tilde{U}_0$ seja uma isometria. Se $\tilde{N}$ é completa então existe uma continuação para a isometria f ao longo de uma curva $c : [0,1] \to N$ com $c(0) = p_0$.*

Demonstração. Para cada $t \in [0,1]$, $c(t)$ admite uma vizinhaça máximal $B_{\epsilon_t}(c(t))$, isto é com ϵ_t máximo, e uma aplicação $f_t : B_{\epsilon_t}(c(t)) \to \tilde{N}$ tal que f_t é uma isometria sobre sua imagem, com $f_t(c(t)) = q_t$ e $df_t(X_i) = \tilde{X}_i$, onde $\{X_i\}$ é uma base para o $T_{c(t)}N$ dos vetores tangentes em $c(t)$ e $\{\tilde{X}_i\}$ é uma base para o $T_{q_t}\tilde{N}$ dos vetores tangentes a q_t. Afirmamos que ϵ_t não pode ser arbitrariamente pequeno, pois caso contrário teríamos uma seqüência $\{t_n\} \subset [0,1]$ com $\epsilon_{t_n} \to 0$. Como $[0,1]$ é compacto teríamos $\tilde{t}$ admitindo um $\epsilon_{\tilde{t}}$ e como $\tilde{N}$ é completa $M = \{q, d(q, q_0) \leq l(c)\}$, onde $l(c)$ indica o comprimento da curva c, é compacta devido ao teorema de Hopf-Rinow, ver [5], e assim $\{q_t\}$ admitiria um ponto de acumulação q. Considere a isometria $f_{\tilde{t}} : B_{\epsilon_{\tilde{t}}}(c(\tilde{t})) \to \tilde{B}(q)$, onde $\tilde{B}(q)$ é uma vizinhança de q contida em $\tilde{N}$, satisfazendo $df_{\tilde{t}c(\tilde{t})}(X_i) = \tilde{X}_i$ com $\{X_i\}$ é uma base para o $T_{c(\tilde{t})}N$ dos vetores tangentes em $c(\tilde{t})$ e $\{\tilde{X}_i\}$ é uma base para o $T_q\tilde{N}$ dos vetores tangentes a q.

Para n suficientemente grande temos $d(c(\tilde{t}), c(t_n)) < \dfrac{\epsilon_{\tilde{t}}}{2}$, daí podemos extrair que

$$B_{\frac{\epsilon_{\tilde{t}}}{2}}(c(t_n)) \subset B_{\epsilon_{\tilde{t}}}(c(\tilde{t})).$$

Assim, a aplicação $f_{\tilde{t}}|_{B_{\frac{\epsilon_{\tilde{t}}}{2}}(c(t_n))}$ é uma isometria sobre sua imagem. Observando que ϵ_{t_n} é máximal com respeito às isometrias temos $\epsilon_{t_n} > \dfrac{\epsilon_{\tilde{t}}}{2}$ contradizendo que $\epsilon_{t_n} \to 0$. Logo, existe um raio ϵ mínimo que serve para todo $t_n \in [0,1]$.

Para $t = 0$ a aplicação $f : B_\epsilon(c(0)) \to \tilde{N}$ que é uma isometria sobre sua imagem com $f(c(0)) = f(p_0) = q_0$ e $df_{p_0}(X_i) = \tilde{X}_i$.

Para $t_1 \in (0,\epsilon)$, pelo teorema de Cartan, ver [5] pag. 157, existe uma aplicação $f_{t_1} : B_\epsilon(c(t_1)) \to \tilde{N}$ que é uma isometria sobre sua imagem com $f_{t_1}(c(t_1)) = f_{t_1}(p_1) = q_1$ e $df_{p_1}(X_i) = df_{t_1 p_1}(X_i)$, assim pela observação 1.1 e como $B = B_\epsilon(c(0)) \cap B_\epsilon(c(t_1))$ é conexa, $f = f_{t_1}$ em B obtendo um outro elemento da família de isometrias da continuação de f.

Repetindo o mesmo argumento para $t_{n+1} \in (t_n, t_n + \epsilon)$ vamos construir uma continuação para a isometria f, pois $[0,1]$ é limitado e ϵ é um número positivo fixo.

■

A unicidade de uma continuação será baseda em uma adaptação do teorema da Monodromia, ver [1].

Proposição 1.2. *Sejam $U \subset N$ uma vizinhança de p e $\tilde{U} \subset \tilde{N}$ uma vizinhança de q tal que $f : U \to \tilde{U}$ seja uma isometria. Se N é simplesmente conexa então a continuação de f é única.*

Demonstração. Vamos mostrar que para dois caminhos $c, \gamma : [0,1] \to M$ com $c(0) = \gamma(0) = p$ e $c(1) = \gamma(1) = q$ as respectivas continuações $\{f_t\}$ e $\{g_t\}$ de f ao longo de c e γ devem satisfazer $f_1(q) = g_1(q)$, isto é, a continuação independe do caminho.

Para começar notamos que a continuação ao longo de um caminho da forma $c^- c$ sempre volta para a mesma isometria inicial, onde c^- indica o caminho reverso. Similarmente a continuação ao longo de um caminho da forma $\sigma_2(c^- c)\sigma_1$ tem o mesmo efeito que a continuação ao longo de $\sigma_2\sigma_1$. Por esta razão, dizer que as continuações ao longo de c e γ tem o mesmo resultado final é equivalente a dizer que a continuação ao longo de $c\gamma^-$ volta para a isometria inicial.

Como N é simplesmente conexa os caminhos c e γ são homotópicos. Seja h a homotopia definida em um retângulo $R = [0,1] \times [0,1]$ com perímetro indicado por Γ. Queremos provar que a continuação ao longo do perímetro Γ volta para a isometria inicial.

A prova é baseada no metodo da bissecção. Começamos bissectando R horizontalmente, denote por π_1 o perímetro da parte inferior R_1, descrito a partir do canto inferior a esquera de R e na direção a qual coincide com a direção de Γ ao longo do lado comum. Com a parte superior, R_2, associamos a curva π_2 que começa na origem de R vai verticalmente até o canto inferior esquerdo de R_2, descreve o perímetro de R_2 no qual coincide com Γ ao longo do lado comum e retorna verticalmente para a origem de R.

Reconhecemos que a curva $\pi_2\pi_1$ difere de Γ somente por um arco intermediário da forma $\sigma^-\sigma$. Por esta razão o efeito da continuação ao longo de $\pi_2\pi_1$ é o mesmo se

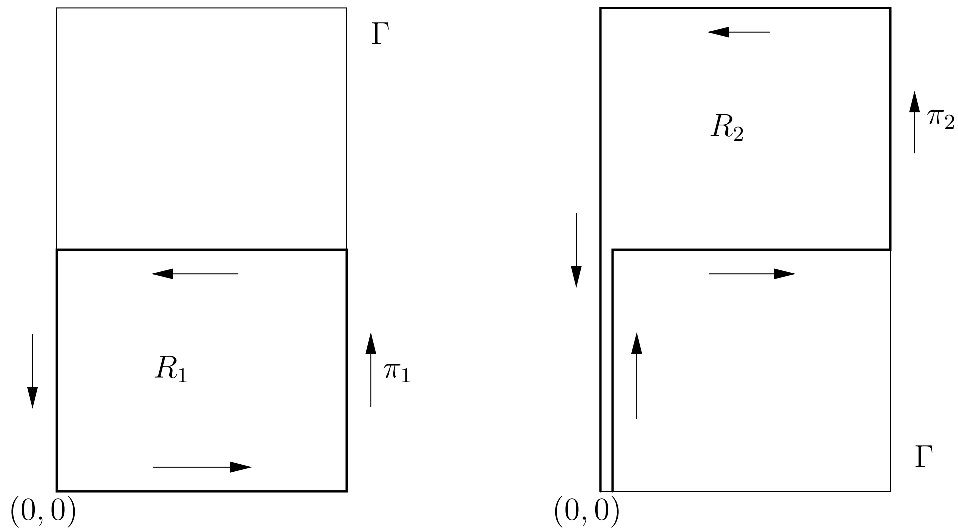

Figura 1.1: Continuação

continuarmos ao longo de Γ. Conseqüentemente, se π_1 e π_2 ambos voltam para a isometira inicial, o mesmo acontece com Γ.

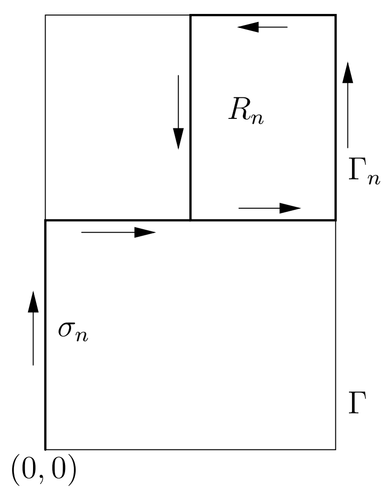

Figura 1.2: σ_n

Agora fazemos a suposição oposta, que Γ não volta para a isometria inicial. Então ou π_1 ou π_2 tem a mesma propriedade. O correspondente retângulo é bissectado verticalmente, e o mesmo raciocínio é aplicado. Onde o processo é aplicado, sempre alternando a bissecção entre horizontal e vertical, obtendo uma seqüência de retângulos $R \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset ... \supset R^{(n)} \supset ...$ e suas correspondentes curvas fechadas $\pi^{(n)}$ tal que a continuação ao longo de $\pi^{(n)}$ não volta para a isometria inicial. Cada $\pi^{(n)}$ é da forma $\sigma_n^{-}\Gamma_n\sigma_n$ onde σ_n é um arco bem determinado começando da origem de R conduzido ao canto inferior esquerdo de

$R^{(n)}$ e Γ_n denota o perímetro de $R^{(n)}$, σ_n é um subarco de σ_{n+1}.

Fazendo $n \to \infty$ o retângulo $R^{(n)}$ converge para um ponto P_∞, e o poligono σ_n forma, no limite um arco σ_∞ terminando em P_∞. Existe uma continuação da isometria inicial ao longo de σ_∞, ela determina uma isometria final dada por $f_\infty : U_\infty \to \tilde{N}$ sobre a imagem ξ_∞ de P_∞ através da aplicação h. Para n suficientemente grande a imagem de Γ_n estará contida em U_∞, e a isometria obtida no ponto final de σ_n será usada para construir uma continuação ao longo de $\pi^{(n)}$ o qual deixa a isometria inicial, f_∞, fixa. Isto contradiz a propriedade pelo qual $\pi^{(n)}$ foi escolhida e provamos que a continuação ao longo de Γ tem sua isometria inicial fixa.

■

Capítulo 2

Superfícies Planas no $\mathbb{H}^3$

Neste capítulo mostramos alguns lemas que formam uma base de conhecimentos para demonstrar o teorema de representação conforme para superfícies planas no espaço hiperbólico. Em cada seção temos um único lema, na seção 2.1 falamos sobre a existência de uma parametrização em coordenadas isotérmicas, na seção 2.2 calculamos as equações de Weingarten e a segunda forma fundamental usando a coordenada isotérmica obtida na seção 2.1, na seção 2.3 fazemos uma mudança de coordenadas a fim de obter uma parametrização conforme com relação à estrutura conforme definida pela segunda forma fundamental. Finalmente na seção 2.4 obtemos uma caracterização da imersão plana e de seu vetor normal em termos de matrizes hermitianas.

2.1 Coordenadas isotérmicas

Denotaremos por M uma superfície simplesmente conexa e $\Psi : M \to \mathbb{H}^3$ uma imersão com métrica induzida plana $ds^2 = \langle d\Psi, d\Psi \rangle$ ($\langle \, .,. \, \rangle$ denota a métrica em $\mathbb{L}^4$).

Este lema consiste em introduzir uma coordenada isotérmica para M.

Lema 2.1. *Dada M simplesmente conexa com métrica ds^2 e curvatura zero existe uma imersão em coordenadas isotérmicas $x + iy : M \to \mathbb{C}$ tal que*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $\{v, w\}$ uma base ortogonal para o T_pM. Observando que M e $\mathbb{R}^2$ tem a mesma curvatura, curvatura nula, usando o teorema de Cartan, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \to \mathbb{C}$ é uma isometria local com $df_p(v) = e_1$ e

$df_p(w) = e_2$. Seja q um outro ponto qualquer de M, que é simplesmente conexa, portanto existe um caminho $c : [0,1] \to M$ ligando o ponto $p = c(0)$ ao ponto $q = c(1)$. Devido as proposições 1.1 e 1.2 existe uma única continuação de f tal que $df_q(v) = e_1$ e $df_q(w) = e_2$. Como o ponto q é arbitrário temos que f pode ser estendida para toda a superfície M. Assim $f = x + iy : M \to \mathbb{C}$ é uma imersão em coordenadas isotérmicas.

∎

2.2 Equações de Weingarten e segunda forma fundamental

No lema seguinte exibimos as equações de Weingarten e a segunda forma fundamental, nas coordenada x e y dadas pelo Lema 2.1, para a imersão.

ObservaçÞ2 2.1. *Seja p um ponto de M. O vetor posição $\Psi(p)$ é ortogonal ao plano tangente de $\mathbb{H}^3$ no ponto $\Psi(p)$. De fato, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva em $\mathbb{H}^3$ tal que $\alpha(0) = \Psi(p)$ e $\alpha'(0) = v$ com $v \in T_{\Psi(p)}\mathbb{H}^3$. Como $\alpha(t) \in \mathbb{H}^3$, $\forall\ t \in (-\epsilon, \epsilon)$, temos $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = -1, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Derivando esta equação, obtemos $\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$, em particular para $t = 0$, temos $\langle \alpha'(0), \alpha(0) \rangle = 0$ e pelos dados iniciais da curva, obtemos $\langle v, \Psi(p) \rangle = 0$.*

Daqui em diante faremos um abuso de notação e vamos escrever Ψ para designar $\Psi(p)$ onde, $p \in M$.

Lema 2.2. *Seja η um campo de vetores unitário e normal à imersão então,*

$$\begin{aligned} \Psi_{xx} &= E\eta + \Psi, \\ \Psi_{xy} &= F\eta, \\ \Psi_{yy} &= G\eta + \Psi, \\ \eta_x &= -E\Psi_x - F\Psi_y, \\ \eta_y &= -F\Psi_x - G\Psi_y, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde E, F e G são funções suaves definidas em M e $(.)_x$, $(.)_y$ denotam as derivadas parciais com respeito a x e y, respectivamente. Além disso, existe uma função ϕ definida em M tal que $E = \phi_{xx}, F = \phi_{xy}, G = \phi_{yy}$ e a segunda forma fundamental da imersão é dada por

$$d\sigma^2 = \phi_{xx}dx^2 + 2\phi_{xy}dxdy + \phi_{yy}dy^2 \tag{2.2}$$

com

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 1. \tag{2.3}$$

Demonstração. Primeiro, como $\Psi \in \mathbb{H}^3$ obtemos $\langle \Psi, \Psi \rangle = -1$, derivando esta equação em relação a x e y obtemos, respectivamente,

$$\langle \Psi_x, \Psi \rangle = 0,$$

$$\langle \Psi_y, \Psi \rangle = 0.$$

Dado $p \in M$ sejam v e $w \in T_pM$, como a aplicação Ψ é uma imersão, temos

$$\langle v, w \rangle_{ds^2} = \langle d\Psi(v), d\Psi(w) \rangle_{\mathbb{H}^3}.$$

Sejam $\{e_1, e_2\}$ a base canônica do plano complexo. Devido ao Lema 2.1, obtemos

$$0 = \langle e_1, e_2 \rangle_{ds^2} = \langle \Psi_x, \Psi_y \rangle_{\mathbb{H}^3}.$$

Seja p um ponto de M então Ψ_x e Ψ_y formam uma base para o $T_{\Psi(p)}\Psi(M) \cong T_pM$, e ainda como η é ortogonal a Ψ_x e Ψ_y formamos uma base para o $T_{\Psi(p)}\mathbb{H}^3 \cong T_p\mathbb{H}^3$ com os vetores Ψ_x, Ψ_y e η. Observe que estamos considerando os vetores Ψ_x, Ψ_y e η como vetores do $\mathbb{L}^4$.

Como Ψ_x, Ψ_y e η formam uma base para o $T_p\mathbb{H}^3$ e ainda pela observação (2.1) temos que: Ψ_x, Ψ_y, η e Ψ formam uma base para o $\mathbb{L}^4$ em p.

Vamos escrever os vetores $\Psi_{xx}, \Psi_{yy}, \Psi_{xy}, \eta_x$ e η_y nesta base. No cálculo dos coeficientes de $\Psi_{xx}, \Psi_{yy}, \Psi_{xy}, \eta_x$ e η_y usaremos de forma natural que Ψ_x, Ψ_y, Ψ e η é uma base ortogonal tal que os vetores Ψ_x, Ψ_y e η são unitários e $\langle \Psi, \Psi \rangle = -1$.

Supondo

$$\Psi_{xx} = a\Psi_x + b\Psi_y + c\Psi + E\eta,$$

e tomando o produto interno com Ψ_x, temos

$$\langle \Psi_{xx}, \Psi_x \rangle = a \langle \Psi_x, \Psi_x \rangle + b \langle \Psi_y, \Psi_x \rangle + c \langle \Psi, \Psi_x \rangle + E \langle \eta, \Psi_x \rangle,$$

donde,

$$\frac{1}{2} \langle \Psi_x, \Psi_x \rangle_x = a,$$

daí,

$$\frac{1}{2}(1)_x = a,$$

assim, $a = 0$.

Tomando o produto interno de Ψ_{xx} com Ψ_y, temos

$$\langle \Psi_{xx}, \Psi_y \rangle = b \langle \Psi_y, \Psi_y \rangle ,$$

donde,

$$- \langle \Psi_x, \Psi_{yx} \rangle = b,$$

daí,

$$- \langle \Psi_x, \Psi_{xy} \rangle = b,$$

logo,

$$-\frac{1}{2} \langle \Psi_x, \Psi_x \rangle_y = b$$

assim, $b = 0$.

Tomando o produto interno de Ψ_{xx} com Ψ, temos

$$\langle \Psi_{xx}, \Psi \rangle = c \langle \Psi, \Psi \rangle ,$$

donde,

$$- \langle \Psi_x, \Psi_x \rangle = -c,$$

daí,

$$-1 = -c,$$

assim, $c = 1$.

Tomando o produto interno de Ψ_{xx} com η, temos

$$\langle \Psi_{xx}, \eta \rangle = E \langle \eta, \eta \rangle = E.$$

Portanto, $\Psi_{xx} = E\eta + \Psi$, onde E é uma função suave.

As equações para Ψ_{xy} e Ψ_{yy} são obtidas de forma análoga.

Escrevendo agora η_x na base $\{\Psi_x, \Psi_y, \Psi, \eta\}$

$$\eta_x = a\Psi_x + b\Psi_y + c\Psi + d\eta.$$

e tomando o produto interno com Ψ_x, temos

$$\langle \eta_x, \Psi_x \rangle = a \langle \Psi_x, \Psi_x \rangle = a.$$

Observe que $\langle \Psi_x, \eta \rangle = 0$. Derivando esta igualdade em relação a x, temos

$$\langle \Psi_{xx}, \eta \rangle + \langle \Psi_x, \eta_x \rangle = 0,$$

utilizando o fato, $E = \langle \Psi_{xx}, \eta \rangle$, obtemos

$$E = -\langle \Psi_x, \eta_x \rangle = -a,$$

daí, $a = -E$.

Tomando o produto interno de η_x com Ψ_y, temos

$$\langle \eta_x, \Psi_y \rangle = b \langle \Psi_y, \Psi_y \rangle = b.$$

Observe que $\langle \Psi_y, \eta \rangle = 0$. Derivando esta igualdade em relação a x, obtemos

$$\langle \Psi_{yx}, \eta \rangle + \langle \Psi_y, \eta_x \rangle = 0,$$

utilizando o fato, $F = \langle \Psi_{yx}, \eta \rangle$, temos

$$F + b = 0,$$

daí, $b = -F$.

Tomando o produto interno de η_x com Ψ, obtemos

$$\langle \eta_x, \Psi \rangle = c \langle \Psi, \Psi \rangle = -c$$

Pela observação (2.1), temos que $\langle \eta, \Psi \rangle = 0$. Derivando esta equação com relação a x, temos

$$\langle \eta_x, \Psi \rangle + \langle \eta, \Psi_x \rangle = 0,$$

como $\langle \eta, \Psi_x \rangle = 0$, obtemos

$$\langle \eta_x, \Psi \rangle = 0,$$

assim, $c = 0$.

Como $\langle \eta, \eta \rangle = 1$, temos

$$0 = \langle \eta_x, \eta \rangle = d \langle \eta, \eta \rangle = d$$

Portanto $\eta_x = -E\Psi_x - F\Psi_y$.

A equação para η_y é obtida de forma análoga.

Com isto mostramos que as equações (2.1) são válidas.

Usando a diferenciabilidade de Ψ, temos

$$(\Psi_{xx})_y - (\Psi_{xy})_x = 0,$$

$$(\Psi_{yy})_x - (\Psi_{xy})_y = 0.$$

Utilizando as equações (2.1), obtemos

$$(E\eta + \Psi)_y - (F\eta)_x = 0,$$

$$(G\eta + \Psi)_x - (F\eta)_y = 0.$$

Derivando, temos

$$E_y\eta + E\eta_y + \Psi_y - F_x\eta - F\eta_x = 0, \tag{2.4}$$
$$G_x\eta + G\eta_x + \Psi_x - F_y\eta - F\eta_y = 0. \tag{2.5}$$

Logo da equação (2.4), obtemos

$$\langle (E_y - F_x)\eta + E\eta_y + \Psi_y - F\eta_x, \eta\rangle = 0,$$

daí,

$$E_y - F_x = 0,$$

assim,

$$E_y = F_x. \tag{2.6}$$

E da equação (2.5), temos

$$\langle (G_x - F_y)\eta + G\eta_x + \Psi_x - F\eta_y, \eta\rangle = 0,$$

daí,

$$G_x - F_y = 0,$$

logo,

$$G_x = F_y. \tag{2.7}$$

Usando a equação (2.5) e substituindo os valores de η_x e η_y, conforme as equações (2.1), obtemos

$$G(-E\Psi_x - F\Psi_y) - F(-F\Psi_x - G\Psi_y) + \Psi_x = 0,$$

ou seja,

$$\Psi_x(-EG + F^2 + 1) + \Psi_y(-GF + FG) = 0,$$

daí,

$$EG - F^2 = 1.$$

Mostraremos agora que existe uma função ϕ em M tal que $E = \phi_{xx}, F = \phi_{xy}$ e $G = \phi_{yy}$.

Defina a 1-forma diferencial

$$w = Edx + Fdy,$$

assim,

$$\begin{aligned} dw &= (E_x dx + E_y dy) \wedge dx + E \wedge ddx + (F_x dx + F_y dy) \wedge dy + F \wedge ddy \\ &= (E_x dx + E_y dy) \wedge dx + (F_x dx + F_y dy) \wedge dy \\ &= E_y dy \wedge dx + F_x dx \wedge dy \\ &= (E_y - F_x) dy \wedge dx \end{aligned}$$

Pela equação (2.6), temos

$$dw = 0.$$

Logo, pelo Lema de Poincaré, existe uma função $\alpha : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = E \quad e \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = F. \tag{2.8}$$

Da mesma forma pela equação (2.7), existe uma função $\beta : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = F \quad e \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = G. \tag{2.9}$$

E mais ainda, das equações (2.8) e (2.9), obtemos

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = F = \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Devido ao Lema de Poincaré, existe uma função $\phi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \beta$.

Portanto,

$$\phi_{xx} = \alpha_x = E,$$

$$\phi_{xy} = \alpha_y = F,$$

$$\phi_{yy} = \beta_y = G.$$

A segunda forma fundamental da imersão é $d\sigma^2 = -\langle d\eta, d\Psi \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= -\langle d\Psi, d\eta\rangle \\ &= -\langle \Psi_x dx + \Psi_y dy, \eta_x dx + \eta_y dy\rangle \\ &= -(dx^2\langle \Psi_x, \eta_x\rangle + dxdy\langle \Psi_x, \eta_y\rangle + dydx\langle \Psi_y, \eta_x\rangle + dy^2\langle \Psi_y, \eta_y\rangle), \end{aligned}$$

pelas equações (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= -(dx^2(-E) + dxdy(-F) + dydx(-F) + dy^2(-G)) \\ &= Edx^2 + Gdy^2 + 2Fdxdy. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a segunda forma fundamental da imersão é dada por:

$$d\sigma^2 = \phi_{xx}dx^2 + \phi_{yy}dy^2 + 2\phi_{xy}dxdy,$$

e como $EG - F^2 = 1$ concluímos que,

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 = 1.$$

■

2.3 Coordenadas Conformes

Consideraremos M como uma superfície de Riemann com curvatura intrínseca nula no $\mathbb{H}^3$ e com uma estrutura conforme determinada pela segunda forma fundamental $d\sigma^2$.

Pela equação (2.3) podemos escolher η tal que $\phi_{xx} > 0$.

A idéia do próximo lema é introduzir um sistema de coordenadas conforme para M (com a estrutura conforme definida por $d\sigma^2$).

Lema 2.3. *Considerando a nova coordenada para a imersão:*

$$z = u + iv = (x + \phi_x) + i(y + \phi_y)$$

então $z : M \to \mathbb{C}$ é uma imersão conforme tal que

$$d\sigma^2 = \frac{1}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}|dz|^2$$

e

$$[\Psi - \eta] : M \to \mathbb{S}^2_\infty$$

é uma aplicação conforme.

Obtendo ainda,

$$\Psi = \frac{1}{2}(\Psi - \eta) + 2(\Psi - \eta)_{z\bar{z}},$$

onde,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}).$$

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que z é um difeomorfismo. Devido a equação (2.3), temos que a matriz hessiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\partial y} \end{pmatrix}$$

é definida positiva. Então, pela demonstração do teorema de Bernstein, ver [12] pag. 34-35, temos

$$|z(a_1, a_2) - z(b_1, b_2)| > |(a_1, a_2) - (b_1, b_2)|$$

onde $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{C}$. Obtendo que z é injetora.

Como o determinante Jacobiano da mudança de variáveis de (u, v) para (x, y) é

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1+\phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{yx} & 1+\phi_{yy} \end{vmatrix} = (1+\phi_{xx})(1+\phi_{yy}) - \phi_{xy}^2 \\ &= 1 + \phi_{yy} + \phi_{xx} + \phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2 \end{aligned}$$

por (2.3), temos

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}.$$

Devido a escolha do vetor normal, obtemos $2 + \phi_{xx} + \phi_{yy} > 0$, assim z é localmente um difeomorfismo, donde um difeomorfismo global.

Agora, a matriz mudança de coordenads de (x,y) para (u,v) é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial y} & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}} \begin{pmatrix} 1+\phi_{yy} & -\phi_{yx} \\ -\phi_{xy} & 1+\phi_{xx} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1+\phi_{yy}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-\phi_{xy}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\phi_{xy}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1+\phi_{xx}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}}.$$

Conseqüentemente;

$$\begin{aligned} \Psi_u &= \frac{1+\phi_{yy}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}}\Psi_x + \frac{-\phi_{xy}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}}\Psi_y, \\ \Psi_v &= \frac{-\phi_{xy}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}}\Psi_x + \frac{1+\phi_{xx}}{2+\phi_{xx}+\phi_{yy}}\Psi_y. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Agora, vamos fazer alguns cálculos para concluirmos que

$$(\Psi-\eta)_u = \Psi_x, \qquad (\Psi-\eta)_v = \Psi_y. \tag{2.11}$$

Para isto, basta mostrarmos que

$$\Psi_u - \Psi_x = \eta_u \;\text{ e }\; \Psi_v - \Psi_y = \eta_v.$$

Como

$$\eta_u = \eta_x \frac{\partial x}{\partial u} + \eta_y \frac{\partial y}{\partial u},$$

e usando as equações (2.1), (2.3) e (2.10), fazendo $E = \phi_{xx}, F = \phi_{xy}$ e $G = \phi_{yy}$, obtemos

$$\eta_u = (-E\Psi_x - F\Psi_y)\left(\frac{1+G}{2+E+G}\right) + (-F\Psi_x - G\Psi_y)\left(\frac{-F}{2+E+G}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{-E(1+G)+F^2}{2+E+G}\right)\Psi_x + \left(\frac{-F(1+G)+FG}{2+E+G}\right)\Psi_y \\
&= \left(\frac{-E-EG+F^2}{2+E+G}\right)\Psi_x + \left(\frac{-F-FG+FG}{2+E+G}\right)\Psi_y \\
&= \frac{-(1+E)}{2+E+G}\Psi_x - \frac{F}{2+E+G}\Psi_y.
\end{aligned}
$$

Por outro lado utilizando a equação (2.10)

$$
\begin{aligned}
\Psi_u - \Psi_x &= \left(\frac{1+G}{2+E+G}\right)\Psi_x + \frac{-F}{2+E+G}\Psi_y - \Psi_x \\
&= \left(\frac{1+G-2-E-G}{2+E+G}\right)\Psi_x - \frac{F}{2+E+G}\Psi_y \\
&= \left(\frac{-1-E}{2+E+G}\right)\Psi_x - \frac{F}{2+E+G}\Psi_y \\
&= \frac{-(1+E)}{2+E+G}\Psi_x - \frac{F}{2+E+G}\Psi_y.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\Psi-\eta)_u = \Psi_x$.

Analogamente, podemos provar que $(\Psi-\eta)_v = \Psi_y$.

Deste modo, usando as equações (2.3), (2.10) e (2.11), obtemos

$$
\begin{aligned}
-\tilde{E} &= \langle \Psi_u, \eta_u\rangle = \langle \Psi_u, \Psi_u - \Psi_x\rangle = \langle \Psi_u, \Psi_u\rangle - \langle \Psi_u, \Psi_x\rangle \\
&= \frac{(1+G)^2}{(2+E+G)^2} + \frac{F^2}{(2+E+G)^2} - \frac{1+G}{(2+E+G)} \\
&= \frac{(1+G)^2+F^2-(1+G)(2+E+G)}{(2+E+G)^2} \\
&= \frac{(1+2G+G^2+F^2-2-E-G-2G-GE-G^2)}{(2+E+G)^2} \\
&= \frac{(1+F^2-2-E-G-GE)}{(2+E+G)^2} = \frac{(1-(EG-F^2)-(2+E+G))}{(2+E+G)^2} \\
&= \frac{-(2+E+G)}{(2+E+G)^2} = \frac{-1}{(2+E+G)}
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
-\tilde{F} &= \langle \Psi_u, \eta_v \rangle = \langle \Psi_u, \Psi_v - \Psi_y \rangle = \langle \Psi_u, \Psi_v \rangle - \langle \Psi_u, \Psi_y \rangle \\
&= \frac{(1+G)(-F)}{(2+E+G)^2} + \frac{(-F)(1+E)}{(2+E+G)^2} - \frac{-F}{(2+E+G)} \\
&= \frac{-F - FG - F - FE + F(2+E+G)}{(2+E+G)^2} \\
&= \frac{-2F - FG - FE + 2F + FE + FG}{(2+E+G)^2} = 0,
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}
-\tilde{G} &= \langle \Psi_v, \eta_v \rangle = \langle \Psi_v, \Psi_v - \Psi_y \rangle = \langle \Psi_v, \Psi_v \rangle - \langle \Psi_v, \Psi_y \rangle \\
&= \frac{F^2}{(2+E+G)^2} + \frac{(1+E)^2}{(2+E+G)^2} - \frac{1+E}{(2+E+G)} \\
&= \frac{F^2 + (1+E)^2 - (1+E)(2+E+G)}{(2+E+G)^2} \\
&= \frac{F^2 + 1 + 2E + E^2 - 2 - E - G - 2E - E^2 - EG}{(2+E+G)^2} \\
&= \frac{-(EG - F^2) + 1 - (2+E+G)}{(2+E+G)^2} = \frac{-(2+E+G)}{(2+E+G)^2} \\
&= \frac{-1}{(2+E+G)}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\eta_u = \frac{-1}{(2+E+G)} \Psi_u,$$
$$\eta_v = \frac{-1}{(2+E+G)} \Psi_v.$$

Portanto,

$$d\sigma^2 = \frac{1}{(2+E+G)}(du^2 + dv^2) = \frac{1}{(2+E+G)} \left| dz \right|.$$

Das equações (2.1), (2.3) e (2.10), obtemos

$$
\begin{aligned}
(\Psi-\eta)_{uu} &= \Psi_{xx}\frac{\partial x}{\partial u}+\Psi_{xy}\frac{\partial y}{\partial u}\\
&= (E\eta+\Psi)\left(\frac{1+G}{2+E+G}\right)+F\eta\left(\frac{-F}{2+E+G}\right)\\
&= \left(\frac{(1+G)E-F^2}{2+E+G}\right)\eta+\left(\frac{1+G}{2+E+G}\right)\Psi\\
&= \frac{E+GE-F^2}{2+E+G}\eta+\frac{1+G}{2+E+G}\Psi\\
&= \frac{E+1}{2+E+G}\eta+\frac{1+G}{2+E+G}\Psi
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\Psi-\eta)_{vv} &= \Psi_{yx}\frac{\partial x}{\partial v}+\Psi_{yy}\frac{\partial y}{\partial v}\\
&= F\eta\left(\frac{-F}{2+E+G}\right)+(G\eta+\Psi)\left(\frac{1+E}{2+E+G}\right)\\
&= \left(\frac{1+E}{2+E+G}\right)\Psi+\left(\frac{-F^2+G(1+E)}{2+E+G}\right)\eta\\
&= \frac{1+E}{2+E+G}\Psi+\frac{1+G}{2+E+G}\eta.
\end{aligned}
$$

Usando a observação acima, temos

$$4(\Psi-\eta)_{z\bar{z}}=\Psi+\eta.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
4(\Psi-\eta)_{z\bar{z}} &= 4(\tfrac{1}{4}(\ (\Psi-\eta)_{uu}+(\Psi-\eta)_{vv}\ ))=(\Psi-\eta)_{uu}+(\Psi-\eta)_{vv}\\
&= \frac{1+G}{2+E+G}\Psi+\frac{1+E}{2+E+G}\eta+\frac{1+E}{2+E+G}\Psi+\frac{1+G}{2+E+G}\eta\\
&= \frac{(2+E+G)\Psi+(2+E+G)\eta}{2+E+G}=\Psi+\eta.
\end{aligned}
$$

Assim, finalmente, temos

$$
\begin{aligned}
\Psi &= 4(\Psi-\eta)_{z\bar z}-\eta\\
&= 2(\Psi-\eta)_{z\bar z}+2(\Psi-\eta)_{z\bar z}-\eta\\
&= 2(\Psi-\eta)_{z\bar z}+\tfrac{1}{2}(\Psi+\eta)-\eta\\
&= 2(\Psi-\eta)_{z\bar z}+\tfrac{1}{2}(\Psi-\eta).
\end{aligned}
$$

Afirmamos que $\Psi-\eta : M \to \mathbb{N}^3$ é conforme, isto é, dados $p\in M$ e $v\in T_pM$ então,

$$\langle\ d(\Psi-\eta)_p(v)\ ,\ d(\Psi-\eta)_p(v)\ \rangle_{\mathbb{L}^4} = \lambda^2\,\langle v,v\rangle_{d\sigma^2}\,.$$

Para provar a afirmação basta mostrarmos a afirmação para os vetores de uma base do T_pM.

Seja $\{e_1,e_2\}$ a base canônica do plano complexo. Seja $p\in M$ e considere (U,φ) uma carta local para o ponto p.

Logo, $\{d\varphi(e_1),d\varphi(e_2)\}$ é uma base do T_pM. Vamos denotar $d\varphi(e_1)=\frac{\partial}{\partial u}$ e $d\varphi(e_2)=\frac{\partial}{\partial v}$.

Daí,

$$\left\langle\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u})\ ,\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u})\ \right\rangle_{\mathbb{L}^4} = \langle\ (\Psi-\eta)_u\ ,\ (\Psi-\eta)_u\ \rangle_{\mathbb{L}^4}\,,$$

usando as equações (2.11) e o Lema 2.1, temos

$$\left\langle\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u})\ ,\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u})\ \right\rangle_{\mathbb{L}^4} = \langle\ \Psi_x\ ,\ \Psi_x\ \rangle_{\mathbb{L}^4} = \left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle_{ds^2} = 1.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.3 e considerando $\lambda^2 = 2+E+G$ então,

$$\lambda^2\left\langle\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle_{d\sigma^2} = (2+E+G)\frac{1}{2+E+G}\left\langle\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle_{|dz|^2} = 1.$$

Portanto,

$$\left\langle\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u})\ ,\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u})\ \right\rangle_{\mathbb{L}^4} = \lambda^2\left\langle\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}\right\rangle_{d\sigma^2}.$$

Analogamente, usando as equações (2.11) e os Lemas 2.1 e 2.3, obtemos

$$\left\langle\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial u})\ ,\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial v})\ \right\rangle_{\mathbb{L}^4} = \lambda^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_{d\sigma^2}$$

e

$$\left\langle\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial v})\ ,\ d(\Psi-\eta)_p(\frac{\partial}{\partial v})\ \right\rangle_{\mathbb{L}^4} = \lambda^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_{d\sigma^2}.$$

Assim, a aplicação $(\Psi-\eta) : M \to \mathbb{N}^3$ é uma aplicação conforme. Usando a projeção de $\mathbb{N}^3$ sobre a $\mathbb{S}^2_\infty$ como na seção 1.2, obtemos que a aplicação $[\Psi-\eta] : M \to \mathbb{S}^2_\infty$, que é a composição destas duas aplicaçoes conformes, é conforme.

■

2.4 Representação em matrizes

Nesta seção vamos representar Ψ e η em forma de matrizes hermitianas.

Lema 2.4. *Sejam $A, B : M \to \mathbb{C}$ funções holomorfas definidas em toda superfície M tal que $[\Psi-\eta]$ é representado como $[(A,B)] \in \mathbb{C}P^1 \equiv \mathbb{S}^2_\infty$ então,*

$$\Psi = \begin{pmatrix} C\bar{C} + 4\overline{C_z}C_z & C\bar{D} + 4C_z\overline{D_z} \\ \bar{C}D + 4\overline{C_z}D_z & D\bar{D} + 4D_z\overline{D_z} \end{pmatrix}$$

e

$$\eta = \begin{pmatrix} -C\bar{C} + 4\overline{C_z}C_z & -C\bar{D} + 4C_z\overline{D_z} \\ -\bar{C}D + 4\overline{C_z}D_z & -D\bar{D} + 4D_z\overline{D_z} \end{pmatrix}$$

onde, $C = \frac{A}{\sqrt{2}R}$ e $D = \frac{B}{\sqrt{2}R}$ com $R^2 = AB_z - BA_z$ e $R : M \to \mathbb{C}$ holomorfa.

Demonstração. Usando a representação de $[\Psi-\eta] \in \mathbb{S}^2_\infty$ como $[(A,B)] \in \mathbb{C}P^1 \equiv \mathbb{S}^2_\infty$ obtemos que:

Para alguma função $\lambda \in C^\infty(M)$ positiva,

$$\Psi - \eta = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A\bar{A} & A\bar{B} \\ \bar{A}B & B\bar{B} \end{pmatrix}.$$

Primeiro, vamos provar que:

$$\frac{1}{2} = \langle (\Psi-\eta)_z, (\Psi-\eta)_{\bar{z}} \rangle_{ds^2} = \frac{1}{2}\lambda^2 \left| AB_z - BA_z \right|^2. \tag{2.12}$$

Utilizando as equações (2.11), observamos que:

$$(\Psi-\eta)_z = \frac{1}{2}((\Psi-\eta)_u - i(\Psi-\eta)_v) = \frac{1}{2}(\Psi_x - i\Psi_y),$$

$$(\Psi-\eta)_{\bar z} = \frac{1}{2}((\Psi-\eta)_u + i(\Psi-\eta)_v) = \frac{1}{2}(\Psi_x + i\Psi_y),$$

assim,

$$\langle(\Psi-\eta)_z, (\Psi-\eta)_{\bar z}\rangle_{ds^2} = \tfrac{1}{4}\langle \Psi_x - i\Psi_y, \Psi_x + i\Psi_y\rangle = \tfrac{1}{4}(\langle\Psi_x,\Psi_x\rangle - i^2\langle\Psi_y,\Psi_y\rangle) = \tfrac{1}{2}.$$

Por outro lado, se $m, n \in Herm(2)$ usando o produto interno $\langle m, m\rangle = -det(m)$, observamos que:

$$\langle m-n, m-n\rangle = \langle m,m\rangle + \langle n,n\rangle - 2\langle m,n\rangle,$$

isto é,

$$\langle m,n\rangle = \frac{1}{2}(\langle m,m\rangle + \langle n,n\rangle - \langle m-n, m-n\rangle) = \frac{1}{2}(-det(m) - det(n) + det(m-n)),$$

daí, usando o Lema 2.1

$$-det((\Psi-\eta)_z) = \langle(\Psi-\eta)_z, (\Psi-\eta)_z\rangle_{ds^2} = \frac{1}{4}\langle\Psi_x - i\Psi_y, \Psi_x - i\Psi_y\rangle = \frac{1}{4}(1+i^2) = 0$$

e

$$-det((\Psi-\eta)_{\bar z}) = \langle(\Psi-\eta)_{\bar z}, (\Psi-\eta)_{\bar z}\rangle_{ds^2} = \frac{1}{4}\langle\Psi_x + i\Psi_y, \Psi_x + i\Psi_y\rangle = \frac{1}{4}(1+i^2) = 0.$$

Portanto,

$$\langle(\Psi-\eta)_z, (\Psi-\eta)_{\bar z}\rangle = \frac{1}{2}det((\Psi-\eta)_z - (\Psi-\eta)_{\bar z}).$$

Usando a representação em matrizes de $(\Psi-\eta)_z$ e $(\Psi-\eta)_{\bar z}$ e observando que $\bar A_z = \bar B_z = 0$, pois A e B são holomorfas, obtemos

$$(\Psi-\eta)_z = \begin{pmatrix} \lambda A\bar A & \lambda A\bar B \\ \lambda \bar A B & \lambda B\bar B \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} \lambda_z A\bar A + \lambda A_z\bar A & \lambda_z A\bar B + \lambda A_z \bar B \\ \lambda_z\bar A B + \lambda\bar A B_z & \lambda_z B\bar B + \lambda B_z\bar B \end{pmatrix}$$

e

$$(\Psi-\eta)_{\bar z} = \begin{pmatrix} \lambda A\bar A & \lambda A\bar B \\ \lambda \bar A B & \lambda B\bar B \end{pmatrix}_{\bar z} = \begin{pmatrix} \lambda_{\bar z} A\bar A + \lambda A\bar A_{\bar z} & \lambda_{\bar z} A\bar B + \lambda A\bar B_{\bar z} \\ \lambda_{\bar z}\bar A B + \lambda\bar A_{\bar z} B & \lambda_{\bar z} B\bar B + \lambda B\bar B_{\bar z} \end{pmatrix}.$$

daí, usando $\overline{A_z} = \bar A_{\bar z}$ e $\overline{B_z} = \bar B_{\bar z}$, temos

$$(\Psi-\eta)_z - (\Psi-\eta)_{\bar z} = \begin{pmatrix} A\bar A(\lambda_z - \lambda_{\bar z}) + \lambda(A_z\bar A - A\overline{A_z}) & A\bar B(\lambda_z - \lambda_{\bar z}) + \lambda(A_z\bar B - A\overline{B_z}) \\ \bar A B(\lambda_z - \lambda_{\bar z}) + \lambda(\bar A B_z - \overline{A_z}B) & B\bar B(\lambda_z - \lambda_{\bar z}) + \lambda(B_z\bar B - B\overline{B_z}) \end{pmatrix}.$$

Logo,

$det((\Psi-\eta)_z-(\Psi-\eta)_{\bar z})$

$=\left[A\bar A(\lambda_z-\lambda_{\bar z})+\lambda(A_z\bar A-A\overline{A_z})\right]\,\left[B\bar B(\lambda_z-\lambda_{\bar z})+\lambda(B_z\bar B-B\overline{B_z})\right]$

$-\left[A\bar B(\lambda_z-\lambda_{\bar z})+\lambda(A_z\bar B-A\overline{B_z})\right]\,\left[\bar A B(\lambda_z-\lambda_{\bar z})+\lambda(\bar A B_z-\overline{A_z}B)\right].$

Multiplicando o lado direito da equação, ficamos com

$(\lambda_z-\lambda_{\bar z})^2A\bar AB\bar B+\lambda(\lambda_z-\lambda_{\bar z})A\bar A(B_z\bar B-B\overline{B_z})+\lambda(\lambda_z-\lambda_{\bar z})B\bar B(A_z\bar A-A\overline{A_z})$

$+\lambda^2(A_z\bar A-A\overline{A_z})(B_z\bar B-B\overline{B_z})-A\bar B\bar AB(\lambda_z-\lambda_{\bar z})^2-\lambda(\lambda_z-\lambda_{\bar z})A\bar B(\bar AB_z-\overline{A_z}B)$

$-\lambda(\lambda_z-\lambda_{\bar z})\bar AB(A_z\bar B-A\overline{B_z})-\lambda^2(A_z\bar B-A\overline{B_z})(\bar AB_z-\overline{A_z}B).$

Agrupando os fatores com λ^2 e $\lambda(\lambda_z-\lambda_{\bar z})$, temos

$\lambda(\lambda_z-\lambda_{\bar z})[A\bar AB_z\bar B-A\bar AB\overline{B_z}+B\bar BA_z\bar A-B\bar BA\overline{A_z}-A\bar B\bar AB_z+A\bar B\overline{A_z}B-\bar ABA_z\bar B$

$-\bar ABA\overline{B_z}]+\lambda^2[A_z\bar AB_z\bar B-A_z\bar A\overline{B_z}B-A\overline{A_z}B_z\bar B+A\overline{A_z}B\overline{B_z}-A_z\bar B\bar AB_z$

$+A_z\bar B\overline{A_z}B+\overline{A}A\overline{B_z}B_z-A\overline{B_zA_z}B].$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$\lambda^2[B_zA(-\overline{A_zB}+\overline{AB_z})+BA_z(-\overline{AB_z}+\overline{BA_z})].$

Logo,

$det((\Psi-\eta)_z-(\Psi-\eta)_{\bar z})=\lambda^2(B_zA-BA_z)(\overline{AB_z}-\overline{BA_z}).$

Portanto,

$$\langle(\Psi-\eta)_z,(\Psi-\eta)_{\bar z}\rangle=\frac{1}{2}\lambda^2\left|AB_z-BA_z\right|^2,$$

assim concluímos que:

$$1=\lambda^2\left|AB_z-BA_z\right|^2.$$

Como $\lambda^2>0$, AB_z-BA_z não se anula.

Como $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}-\{0\}$ é uma aplicação de recobrimento e $f=AB_z-BA_z$ é uma aplicação contínua, então podemos levantar f para uma função $f':M\to\mathbb{C}$ tal que $\exp f'=\exp\circ f'=f$, ou seja, $f'=log(f)$.

Defina $R=\exp\left(\frac{1}{2}f'\right)$, então $R^2=\exp f'=f$, e ainda R é holomorfa, pois é a composição de funções holomorfas.

Assim, podemos escrever

$$C=\frac{A}{\sqrt{2}R}\quad\text{e}\quad D=\frac{B}{\sqrt{2}R}$$

ou seja, $A=C\sqrt{2}R$ e $B=D\sqrt{2}R$.

Logo,

$$A\bar{A} = 2C\bar{C}R\bar{R} = 2C\bar{C}\left|R\right|^2,$$
$$A\bar{B} = 2C\bar{D}R\bar{R} = 2C\bar{D}\left|R\right|^2,$$
$$B\bar{B} = 2D\bar{D}R\bar{R} = 2D\bar{D}\left|R\right|^2,$$
$$\bar{A}B = 2\bar{C}DR\bar{R} = 2\bar{C}D\left|R\right|^2.$$

Daí,

$$(\Psi - \eta) = \lambda \begin{pmatrix} 2\left|R\right|^2 C\bar{C} & 2\left|R\right|^2 C\bar{D} \\ 2\left|R\right|^2 \bar{C}D & 2\left|R\right|^2 D\bar{D} \end{pmatrix} = 2\lambda\left|R\right|^2 \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{D} \end{pmatrix}.$$

Devido a equação (2.12), temos

$$1 = \lambda^2\left|AB_z - BA_z\right|^2 = \lambda^2\left|R^2\right|$$

concluindo que:

$$(\Psi - \eta) = 2\begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{D} \end{pmatrix}.$$

Assim, usando o Lema 2.3, obtemos que a imersão Ψ é dada por:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \tfrac{1}{2}(\Psi-\eta) + 2(\Psi-\eta)_{z\bar{z}} = \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{C} \end{pmatrix} + 2(\Psi-\eta)_{z\bar{z}} \\
&= \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{C} \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{C} \end{pmatrix}_{z\bar{z}} \\
&= \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{C} \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} C_z\bar{C} & C_z\bar{D} \\ \bar{C}D_z & D_z\bar{C} \end{pmatrix}_{\bar{z}} \\
&= \begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{C} \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} C_z\overline{C_z} & C_z\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D_z & D_z\overline{C_z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C\bar{C} + 4C_z\overline{C_z} & C\bar{D} + 4C_z\overline{D_z} \\ \bar{C}D + 4\overline{C_z}D_z & D\bar{C} + 4D_z\overline{C_z} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

e o vetor η é dado por:

$$\begin{aligned}
\eta &= 4(\Psi-\eta)_{z\bar{z}} - \Psi \\
&= 8\begin{pmatrix} C_z\overline{C_z} & C_z\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D_z & D_z\overline{C_z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C\bar{C} + 4C_z\overline{C_z} & C\bar{D} + 4C_z\overline{D_z} \\ \bar{C}D + 4\overline{C_z}D_z & D\bar{C} + 4D_z\overline{C_z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -C\bar{C} + 4C_z\overline{C_z} & -C\bar{D} + 4C_z\overline{D_z} \\ -\bar{C}D + 4\overline{C_z}D_z & -D\bar{C} + 4D_z\overline{C_z} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Representação Conforme

Neste capítulo faremos, na seção 3.1, uma demonstração para o teorema de representação conforme de superfícies planas no espaço hiperbólico de dimenção três, que é basicamente representar uma superfície plana em $\mathbb{H}^3$ por um par (f, ω), onde f é uma função holomorfa e ω é uma 1-forma holomorfa, com base nos lemas do capítulo anterior. Definimos a aplicação de Gauss hiperbólica. Na seção 3.2, discutimos alguns exemplos e utilizando o teorema de representação conforme, obtemos uma nova demonstração do teorema Volkov-Vladimirova e Sasaki.

3.1 Demonstração

Teorema 3.1. *Representação Conforme*

i) *Sejam M uma superfície simplesmente conexa e $\Psi : M \to \mathbb{H}^3$ uma imersão plana. Se em M considerarmos a estrutura conforme determinada pela segunda forma fundamental de Ψ, então existe uma imersão holomorfa $g : M \to SL(2, \mathbb{C})$ e um par (f, ω) constituído de uma função holomorfa f e uma 1-forma holomorfa ω em M tal que:*

a) $|f| < 1$ *e* $\omega \neq 0$ *em toda parte,*

b) $g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega,$

c) $\Psi = gg^*,$

d) *A métrica induzida e a segunda forma fundamental de Ψ são dadas por:*

$$ds^2 = f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2)\, |\omega|^2$$

$$d\sigma^2 = (1 - |f|^2)\,|\omega|^2\,,$$

mais ainda, g é única a menos de uma multiplicação pela direita de uma constante $g_0 \in SU(2)$.

ii) *Inversamente, sejam M uma superfície de Riemann e $g : M \to SL(2,\mathbb{C})$ a imersão holomorfa tal que $g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega, \omega = \frac{1}{2}dz$ e $|f| < 1$. Então $\Psi = gg^* : M \to \mathbb{H}^3$ é uma imersão plana que tem métrica induzida e segunda forma fundamental dadas, respectivamente por:*

$$ds^2 = f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2)\,|\omega|^2$$

$$d\sigma^2 = (1 - |f|^2)\,|\omega|^2\,.$$

Demonstração. Considere a função $f : M \to \mathbb{C}$ definida por

$$f = \frac{\phi_{yy} - \phi_{xx} - 2i\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} = \frac{G - E + 2iF}{2 + E + G}.$$

Mostraremos que

$$(\Psi + \eta)_z = f(\Psi - \eta)_{\bar{z}}. \tag{3.1}$$

De fato, $f(\Psi - \eta)_{\bar{z}} = f(\frac{1}{2}((\Psi - \eta)_u + i(\Psi - \eta)_v))$ e pelas equações (2.11), temos

$$f(\Psi - \eta)_{\bar{z}} = f(\frac{1}{2}(\Psi_x + i\Psi_y)) = \frac{1}{2}\frac{1}{2 + E + G}(G - E + 2iF)(\Psi_x + i\Psi_y),$$

tomando $\Lambda = 2 + E + G$, obtemos

$$\begin{aligned} f(\Psi - \eta)_{\bar{z}} &= \frac{1}{2\Lambda}(G - E)\Psi_x + \frac{1}{2\Lambda}(2iF\Psi_x) + \frac{1}{2\Lambda}(G - E)i\Psi_y + \frac{1}{2\Lambda}2iFi\Psi_y \\ &= \frac{1}{2\Lambda}(G - E)\Psi_x - \frac{1}{\Lambda}F\Psi_y + i(\frac{(G - E)\Psi_y)}{2\Lambda} + \frac{F\Psi_x}{\Lambda}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\Psi + \eta)_z &= (\Psi - \eta + 2\eta)_z = (\Psi - \eta)_z + 2\eta_z \\ &= \frac{1}{2}((\Psi - \eta)_u - i(\Psi - \eta)_v) + \frac{2}{2}(\eta_u - i\eta_v). \end{aligned}$$

Pelas equações (2.11), temos

$$(\Psi + \eta)_z = \frac{1}{2}\Psi_x - \frac{i}{2}\Psi_y + \eta_u - i\eta_v.$$

Como $\eta_u = \eta_x x_u + \eta_y y_u$ e usando o Lema 2.2 e as equações (2.10) e (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\eta_u &= (-E\Psi_x - F\Psi_y)\left(\frac{1+G}{\Lambda}\right) + (-F\Psi_x - G\Psi_y)\left(\frac{-F}{\Lambda}\right) \\
&= \left(\frac{-E(1+G)}{\Lambda} + \frac{F^2}{\Lambda}\right)\Psi_x + \left(\frac{-F(1+G)}{\Lambda} + \frac{FG}{\Lambda}\right)\Psi_y \\
&= \left(\frac{-EG+F^2-E}{\Lambda}\right)\Psi_x + \frac{-F}{\Lambda}\Psi_y \\
&= \left(\frac{-1-E}{\Lambda}\right)\Psi_x - \frac{F}{\Lambda}\Psi_y
\end{aligned}$$

e como $\eta_v = \eta_x x_v + \eta_y y_v$, pelo Lema 2.2 e a equação (2.3), temos

$$\begin{aligned}
\eta_v &= (-E\Psi_x - F\Psi_y)\left(\frac{-F}{\Lambda}\right) + (-F\Psi_x - GF_y)\left(\frac{1+E}{\Lambda}\right) \\
&= \left(\frac{EF}{\Lambda} - \frac{F(1+E)}{\Lambda}\right)\Psi_x + \left(\frac{F^2}{\Lambda} - \frac{G(1+E)}{\Lambda}\right)\Psi_y \\
&= -\frac{F}{\Lambda}\Psi_x + \frac{(-G-1)}{\Lambda}\Psi_y.
\end{aligned}$$

Assim, usando o valor de Λ

$$\begin{aligned}
(\Psi+\eta)_z &= \frac{\Psi_x}{2} - \frac{i\Psi_y}{2} + \frac{(-1-E)\Psi_x}{\Lambda} - \frac{F\Psi_y}{\Lambda} + \frac{iF\Psi_x}{\Lambda} + \frac{(1+G)i\Psi_y}{\Lambda} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1+E}{\Lambda}\right)\Psi_x - \frac{F}{\Lambda}\Psi_y + i\left(\frac{F}{\Lambda}\Psi_x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1+G}{\Lambda}\right)\Psi_y\right) \\
&= \frac{2+E+G-2(1+E)}{2\Lambda}\Psi_x - \frac{F}{\Lambda}\Psi_y + i\left(\frac{F}{\Lambda}\Psi_x + \left(\frac{-2-E-G+2(1+G)}{2\Lambda}\right)\Psi_y\right) \\
&= \frac{(G-E)}{2\Lambda}\Psi_x - \frac{F}{\Lambda}\Psi_y + i\left(\frac{F}{\Lambda}\Psi_x + \frac{(G-E)}{2\Lambda}\Psi_y\right).
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$(\Psi+\eta)_z = f(\Psi-\eta)_{\bar{z}}.$$

Agora, pelo Lema 2.4, temos

$$(\Psi+\eta)_z = \begin{pmatrix} 8C_z\overline{C_z} & 8C_z\overline{D_z} \\ 8\overline{C_z}D_z & 8D_z\overline{D_z} \end{pmatrix}_z = 8\begin{pmatrix} C_{zz}\overline{C_z} & C_{zz}\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D_{zz} & D_{zz}\overline{D_z} \end{pmatrix}$$

e
$$(\Psi-\eta)_{\bar z} = 2\begin{pmatrix} C\overline{C_z} & C\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D & D\overline{D_z}, \end{pmatrix}$$
logo, da equação (3.1)
$$4\begin{pmatrix} C_{zz}\overline{C_z} & C_{zz}\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D_{zz} & D_{zz}\overline{D_z} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} C\overline{C_z} & C\overline{D_z} \\ \overline{C_z}D & D\overline{D_z} \end{pmatrix}$$
ou seja,
$$4\begin{pmatrix} C_{zz} \\ D_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{C_z} & \overline{D_z} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{C_z} & \overline{D_z} \end{pmatrix}.$$

Se $C_z = D_z = 0$ então usando a equação (2.12), temos
$$\frac{1}{2} = \langle (\Psi-\eta)_z, (\Psi-\eta)_{\bar z}\rangle = \frac{1}{2}4\left|CD_z - DC_z\right|^2 = 0,$$
o que é um absurdo, logo C_z e D_z não se anulam simultaneamente. Concluindo que
$$4\begin{pmatrix} C_{zz} \\ D_{zz} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$
ou seja,
$$C_{zz} = \frac{1}{4}fC \quad e \quad D_{zz} = \frac{1}{4}fD, \tag{3.2}$$

então f é uma função holomorfa, pois C e D não se anulam simultaneamente e C_{zz}, C, D e D_{zz} são holomorfas.

E ainda, usando a equação (2.3), temos
$$\begin{aligned} |f|^2 &= \left|\frac{G-E}{\Lambda} + \frac{2iF}{\Lambda}\right|^2 = \frac{(G-E)^2}{\Lambda^2} + \frac{4F^2}{\Lambda^2} \\ &= \frac{G^2 - 2EG + E^2 + 4F^2}{\Lambda^2} = \frac{E^2 + G^2 - 2EG + 4(EG-1)}{\Lambda^2} \\ &= \frac{E^2 + G^2 + 2EG - 4}{G^2 + (2+E)^2 + 2G(2+E)} = \frac{E^2 + G^2 + 2EG - 4}{G^2 + E^2 + 4E + 4 + 4G + 2EG} \\ &= \frac{E^2 + G^2 + 2EG - 4}{(G^2 + E^2 + 2EG - 4) + 8 + 4E + 4G} < 1. \end{aligned}$$

Assim, $|f| < 1$.

Do Lema 2.4, a imersão Ψ pode ser recuperada como $\Psi = gg^*$, onde $g : M \to SL(2,\mathbb{C})$ é a imersão holomorfa dada por:
$$g = \begin{pmatrix} C & 2C_z \\ D & 2D_z \end{pmatrix}.$$

Observe que: $\det g = 2CD_z + 2DC_z = 2(CD_z + DC_z)$ e

$$C_z = \frac{A_z}{\sqrt{2}R} + A\left(\frac{1}{\sqrt{2}R}\right)_z,$$

$$D_z = \frac{B_z}{\sqrt{2}R} + B\left(\frac{1}{\sqrt{2}R}\right)_z.$$

Devido a equação (2.12), temos

$$CD_z - DC_z = \frac{A}{\sqrt{2}R}\left[\frac{B_z}{\sqrt{2}R} + B\left(\frac{1}{\sqrt{2}R}\right)_z\right] - \frac{B}{\sqrt{2}R}\left[\frac{A_z}{\sqrt{2}R} + A\left(\frac{1}{\sqrt{2}R}\right)_z\right] = \frac{1}{2}\frac{AB_z - BA_z}{R^2},$$

portanto, $\det g = 1$.

Como g é holomorfa, temos

$$dg = \frac{\partial g}{\partial z}dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}d_{\bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}dz$$

e como,

$$g^{-1} = \frac{1}{2(D_zC - DC_z)}\begin{pmatrix} 2D_z & -2C_z \\ -D & C \end{pmatrix}.$$

Assim, usando as equações (3.2) e $\det g = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
g^{-1}dg &= \begin{pmatrix} 2D_z & -2C_z \\ -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_z & 2C_{zz} \\ D_z & 2D_{zz} \end{pmatrix}dz \\
&= \begin{pmatrix} 2D_z & -2C_z \\ -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_z & \frac{1}{2}fC \\ D_z & \frac{1}{2}fD \end{pmatrix}dz \\
&= \begin{pmatrix} 2D_zC_z - 2C_zD_z & fCD_z - fC_zD \\ -DC_z + CD_z & -\frac{1}{2}fCD + \frac{1}{2}fDC \end{pmatrix}dz \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}dz \\
&= \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega,
\end{aligned}$$

onde $\omega = \frac{1}{2}dz$.

Como $\Psi = gg^*$, temos

$$\begin{aligned}
d\Psi &= dgg^* + gdg^* = (gg^{-1})dgg^* + gdg^*((g^*)^{-1}g^*) \\
&= g(g^{-1}dg)g^* + g(dg^*(g^*)^{-1})g^* \\
&= g(g^{-1}dg + dg^*(g^*)^{-1})g^* \\
&= g(g^{-1}dg + (dg)^*(g^{-1})^*)g^* \\
&= g(g^{-1}dg + (g^{-1}dg)^*)g^*.
\end{aligned}$$

Considerando $\mathbb{L}^4$ identificado com o espaço das matrizes 2×2 Hermitianas, temos

$$\begin{aligned}
\det(d\Psi) &= \det(g(g^{-1}dg + (g^{-1}dg)^*)g^*) = \det(g^{-1}dg + (g^{-1}dg)^*)) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega + \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \omega^*\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & f\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 0 & f\omega + \bar{\omega} \\ \omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \\
&= -(f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2)\,|\omega|^2),
\end{aligned}$$

portanto

$$ds^2 = f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2)\,|\omega|^2 .$$

Como $|f|^2 = \dfrac{E^2 + G^2 + 2EG - 4}{(2 + E + G)^2}$, temos

$$\begin{aligned}
1 - |f|^2 &= \frac{G^2 + E^2 + 2EG + 4 + 4E + 4G - (E^2 + G^2 + 2EG - 4)}{(2 + E + G)^2} \\
&= \frac{8 + 4E + 4G}{(2 + E + G)^2} \\
&= \frac{4}{2 + E + G}.
\end{aligned}$$

Do Lema 2.3, temos que

$$d\sigma^2 = \frac{1}{2 + E + G}\,|dz|^2 = \frac{4}{2 + E + G}\frac{|dz|^2}{4} = (1 - |f|^2)|\omega|^2.$$

Seja $\tilde{g} : M \to SL(2,\mathbb{C})$ uma outra imersão com $\Psi = \tilde{g}\tilde{g}^*$ então, $gg^* = \Psi = \tilde{g}\tilde{g}^*$.

Tome $g_0 = \tilde{g}^*(g^*)^{-1}$ então, $g_0 \in SU(2)$. De fato,

$$\begin{aligned}
g_0 g_0^* &= (\tilde{g}^*(g^*)^{-1})(\tilde{g}^*(g^*)^{-1})^* = (\tilde{g}^*(g^*)^{-1})(((g^*)^{-1})^*(\tilde{g}^*)^*) \\
&= (\tilde{g}^*(g^*)^{-1})(g^{-1}\tilde{g}) = (\tilde{g}^{-1}\tilde{g})(\tilde{g}^*(g^*)^{-1})(g^{-1}\tilde{g}) \\
&= \tilde{g}^{-1}(\tilde{g}\tilde{g}^*(g^*)^{-1})(g^{-1}\tilde{g}) = \tilde{g}^{-1}g(g^{-1}\tilde{g}) \\
&= \tilde{g}^{-1}(gg^{-1})\tilde{g} = \tilde{g}^{-1}\tilde{g} = Id.
\end{aligned}$$

Daí, $g = \tilde{g}g_0$.

Mais ainda, como g e $\tilde{g}$ são holomorfas, temos

$$(g_0)_z = (\tilde{g}^*(g^*)^{-1})_z = (\tilde{g}^*)_z(g^*)^{-1} + \tilde{g}^*((g^*)^{-1})_z = \tilde{g}^*((g^{-1})^*)_z = 0.$$

Assim, g é única a menos de multiplicação pela direita por uma constante $g_0 \in SU(2)$.

Inversamente, seja M uma superfície de Riemann e $g : M \to SL(2,\mathbb{C})$ a imersão holomorfa, tal que

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega$$

e

$$|f| < 1,$$

onde $\omega = \frac{1}{2}dz$.

Se $g = \begin{pmatrix} C & X \\ D & Y \end{pmatrix}$ então, $X = 2C_z$ e $Y = 2D_z$.

De fato,

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} Y & -X \\ -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dC & dX \\ dD & dY \end{pmatrix},$$

como C, D, X e Y são holomorfas, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega = \begin{pmatrix} Y & -X \\ -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_z & X_z \\ D_z & Y_z \end{pmatrix}dz.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
YC_z - XD_z &= 0 \\
-C_zD + D_zC &= \tfrac{1}{2} \\
YX_z - XY_z &= \tfrac{1}{2}f \\
-DX_z + CY_z &= 0
\end{aligned}$$

Multiplicando $-C_zD + D_zC = \frac{1}{2}$ por X, obtemos

$$-XDC_z + XCD_z = X\frac{1}{2}$$

e como $YC_z = XD_z$ logo,

$$\begin{aligned} -XDC_z + CYC_z &= X\tfrac{1}{2}, \\ C_z(-XD + CY) &= X\tfrac{1}{2}, \\ C_z \det(g) &= X\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como o $\det(g) = 1$, temos $X = 2C_z$.

Analogamente, multiplicando $-C_zD + D_zC = \frac{1}{2}$ por Y, usando a igualdade $YC_z = XD_z$ e o fato que $\det(g) = 1$, obtemos $Y = 2D_z$.

Assim,

$$g = \begin{pmatrix} C & 2C_z \\ D & 2D_z \end{pmatrix},$$

daí, a imersão é

$$\Psi = gg^* = \begin{pmatrix} C\bar{C} + 4C_zC_z & C\bar{D} + 4C_z\bar{D}_z \\ \bar{C}D + 4C_zD_z & D\bar{D} + 4D_z\bar{D}_z \end{pmatrix},$$

e um vetor normal para a imersão é

$$\eta = gvg^* = \begin{pmatrix} -C\bar{C} + 4C_zC_z & -C\bar{D} + 4C_z\bar{D}_z \\ -\bar{C}D + 4C_zD_z & -D\bar{D} + 4D_z\bar{D}_z \end{pmatrix}$$

onde, $v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Com isto, obtemos a primeira forma dada por

$$ds^2 = \langle d\Psi, d\Psi \rangle = -\det(d\Psi)$$

ou seja,

$$ds^2 = f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1 + |f|^2)\,|\omega|^2 .$$

E a segunda forma é dada por,

$$d\sigma^2 = -\langle d\eta, d\Psi \rangle = \frac{1}{2}\left[\det(d\eta) + \det(d\Psi) - \det(d\eta - d\Psi)\right].$$

Observando que:

$$
\begin{aligned}
d\eta &= dg(vg^*) + gv(dg^*) \\
&= (gg^{-1})dg(vg^*) + gv(dg^*)((g^*)^{-1}g^*) \\
&= g(g^{-1}dgv + (g^{-1}dg)^*)g^* \\
&= g\left[\begin{pmatrix} 0 & f\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}\right] g^*
\end{aligned}
$$

obtemos,

$$
\det(d\eta) = \det\begin{pmatrix} 0 & f\omega - \bar{\omega} \\ -\omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} = f\omega^2 - |f|^2|\omega|^2 - |\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2
$$

e

$$
\det(d\eta - d\Psi) = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & f\omega - \bar{\omega} \\ -\omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & f\omega + \bar{\omega} \\ \omega + \bar{f}\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}\right] = -4|\omega|^2 .
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
d\sigma^2 &= \tfrac{1}{2}\left[f\omega^2 - |f|^2|\omega|^2 - |\omega|^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (-f\omega^2 - \bar{f}\bar{\omega}^2 - (1+|f|^2)|\omega|^2) - (-4|\omega|^2)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}(2|\omega|^2 - 2|f|^2|\omega|^2) \\
&= (1-|f|^2)|\omega|^2 .
\end{aligned}
$$

A métrica ds^2 é plana, pois como $\omega = \frac{1}{2}(du + idv)$, temos

$$
ds^2 = \frac{f + \bar{f} + 1 + |f|^2}{4}\, du^2 + \frac{fi - \bar{f}i}{4}\, 2dudv + \frac{\left(-f - \bar{f} + (1+|f|^2\right)}{4}\, dv^2
$$

e

$$
d\sigma^2 = \frac{\left(1-|f|^2\right)}{4}\,(du^2 + dv^2)
$$

Obtendo a curvatura extrínseca, K_{ext}, iqual à

$$
\begin{aligned}
K_{ext} &= \frac{(f+\bar{f}+1+|f|^2)(-f-\bar{f}+1+|f|^2) - (fi - \bar{f}i)^2}{(1-|f|^2)(1-|f|^2)} \\
&= \frac{-(f+\bar{f})^2 + (1+|f|^2)^2 + (f-\bar{f})^2}{(1-|f|^2)^2} \\
&= \frac{-4|f|^2 + (1+|f|^2)^2}{(1-|f|^2)^2} \\
&= \frac{-4|f|^2 + 1 + 2|f|^2 + |f|^4}{(1-|f|^2)^2} = 1
\end{aligned}
$$

■

Definição 3.1. *O par (f,ω) no teorema 3.1 será chamado dados de Weierstrass associado a representação conforme da imersão plana.*

Proposição 3.1. *Se considerarmos os dados de Weierstrass (f,ω) e a imersão holomorfa g escrita arbitrariamente no parametro complexo ξ como $(f(\xi),h(\xi)d\xi)$, com $h(\xi)\neq 0$, e*

$$g=\begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix},$$

então C e D são funções soluções linearmente independentes da equação diferencial ordinária

$$X_{\xi\xi}-\frac{h_\xi}{h}X_\xi - fh^2X=0 \tag{3.3}$$

e

$$E=\frac{1}{h}C_\xi, \qquad F=\frac{1}{h}D_\xi.$$

Inversamente, se C e D são soluções linearmente independentes da equação (3.3) tal que

$$\frac{1}{h}(CD_\xi - DC_\xi)=1, \tag{3.4}$$

então

$$g=\begin{pmatrix} C & \frac{1}{h}C_\xi \\ D & \frac{1}{h}D_\xi \end{pmatrix}$$

determina a imersão plana com dados de Weierstrass $(f(\xi),h(\xi)d\xi)$.

Mais ainda, se A e B são outras soluções de (3.3) sob as mesmas condições anteriores então a imersão plana associada com A e B é, a menos de isometria, a imersão associada com C e D.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Do teorema 3.1, temos

$$g^{-1}dg=\begin{pmatrix} 0 & f(\xi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} h(\xi)d\xi$$

donde,

$$\begin{pmatrix} F & -E \\ -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dC & dE \\ dD & dF \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & f(\xi)h(\xi) \\ h(\xi) & 0 \end{pmatrix}d\xi.$$

Como C, D, E e F são holomorfas, temos

$$\begin{pmatrix} F & -E \\ -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_\xi & E_\xi \\ D_\xi & F_\xi \end{pmatrix}d\xi=\begin{pmatrix} 0 & f(\xi)h(\xi) \\ h(\xi) & 0 \end{pmatrix}d\xi.$$

Assim,

$$FC_\xi - ED_\xi = 0, \quad FE_\xi - EF_\xi = fh, \tag{3.5}$$

$$-C_\xi D + CD_\xi = h, \quad -DE_\xi + CF_\xi = 0. \tag{3.6}$$

Daí, multiplicando a primeira das equações (3.6) por E, temos

$$-EDC_\xi + ECD_\xi = Eh,$$

e, devido a primerira das equações (3.5), temos $FC_\xi = ED_\xi$ logo,

$$\begin{array}{rcl} -EDC_\xi + CFC_\xi & = & Eh, \\ C_\xi(-ED + CF) & = & Eh. \end{array}$$

Portanto,

$$E = \frac{1}{h} C_\xi.$$

Analogamente, usando a primeira das equações (3.6) multiplicada por F e depois a primeria das equações (3.5), obtemos

$$F = \frac{1}{h} D_\xi.$$

Usando as equações (3.5) e (3.6), observamos que

$$\begin{array}{rcl} fh^2 & = & fhh = h\left[FE_\xi - EF_\xi\right] \\ & = & h\left[\frac{1}{h}D_\xi\left(\frac{C_{\xi\xi}h - C_\xi h_\xi}{h^2}\right) - \frac{1}{h}C_\xi\left(\frac{D_{\xi\xi}h - h_\xi D_\xi}{h^2}\right)\right] \\ & = & \frac{1}{h^2}\left(D_\xi C_{\xi\xi}h - C_\xi h_\xi D_\xi - C_\xi D_{\xi\xi}h + h_\xi D_\xi C_\xi\right) \\ & = & \frac{D_\xi C_{\xi\xi} - C_\xi D_{\xi\xi}}{h} \end{array},$$

e

$$h_\xi = -D_\xi C_\xi - DC_{\xi\xi} + C_\xi D_\xi + CD_{\xi\xi} = CD_{\xi\xi} - DC_{\xi\xi}.$$

Assim, da primeira das equações (3.6) e das equações acima, temos

$$\begin{array}{rcl} fh^2C + \frac{h_\xi}{h}C_\xi & = & C\frac{D_\xi C_{\xi\xi} - C_\xi D_{\xi\xi}}{h} + C_\xi\frac{CD_{\xi\xi} - DC_{\xi\xi}}{h} \\ & = & \frac{1}{h}\left[C_{\xi\xi}(CD_\xi - C_\xi D) + D_{\xi\xi}(-CC_\xi + C_\xi C)\right] \\ & = & C_{\xi\xi}\left(\frac{CD_\xi - C_\xi D}{h}\right) = C_{\xi\xi} \end{array}$$

e concluímos que C é uma solução da equação (3.3).

Analogamente, podemos provar que D é uma solução da equação (3.3).

Como $1 = \det(g) = \det \begin{pmatrix} C & E \\ D & F \end{pmatrix} = CF - ED = \dfrac{1}{h}(CD\xi - DC_\xi)$, temos

$\det \begin{pmatrix} C & D \\ C_\xi & D_\xi \end{pmatrix} = CD_\xi - DC_\xi = h \neq 0$, ou seja, o determinante Wronskiano de C e D não se anula e assim C e D são soluções L.I. da equação (3.3).

($\Leftarrow$) Suponha C e D são soluções L.I. da equação (3.3) tal que a equação (3.4) é satisfeita.

Assim,

$$\det \begin{pmatrix} C & \frac{1}{h}C_\xi \\ D & \frac{1}{h}D_\xi \end{pmatrix} = \frac{1}{h}(CD_\xi - DC_\xi) = 1.$$

Logo, g definida por

$$g = \begin{pmatrix} C & \frac{1}{h}C_\xi \\ D & \frac{1}{h}D_\xi \end{pmatrix}$$

pertence a $SL(2,\mathbb{C})$.

Daí,

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h}D_\xi & -\frac{1}{h}C_\xi \\ -D & C \end{pmatrix}$$

e

$$dg = \begin{pmatrix} C_\xi & \dfrac{1}{h^2}(C_{\xi\xi}h - h_\xi C_\xi) \\ & \\ D_\xi & \dfrac{1}{h^2}(D_{\xi\xi}h - h_\xi D_\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Multiplicando g^{-1} por dg, obtemos

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{h^3}(D_\xi C_{\xi\xi}h - h_\xi C_\xi D_\xi - C_\xi D_{\xi\xi}h + h_\xi C_\xi D_\xi) \\ & \\ -DC_\xi + CD_\xi & \dfrac{-DC_{\xi\xi}h + Dh_\xi C_\xi + CD_{\xi\xi}h - Ch_\xi D_\xi}{h^2} \end{pmatrix} d\xi \qquad (3.7)$$

Usando novamente que C e D são soluções de (3.3), obtemos

$$D_\xi(C_{\xi\xi} - \frac{h_\xi}{h}C_\xi - fh^2C) - C_\xi(D_{\xi\xi} - \frac{h_\xi}{h}D_\xi - fh^2D) = 0,$$

devido a equação acima e a equação (3.4), temos

$$D_\xi C_{\xi\xi} - C_\xi D_{\xi\xi} = fh^2(CD_\xi - DC_\xi) = fh^3. \qquad (3.8)$$

Usando que C e D são soluções de (3.3), obtemos

$$D(C_{\xi\xi} - \frac{h_\xi}{h}C_\xi - fh^2C) - C(D_{\xi\xi} - \frac{h_\xi}{h}D_\xi - fh^2D) = 0,$$

devido a equação acima e a equação (3.4), temos

$$-DC_{\xi\xi} + CD_{\xi\xi} = \frac{h_\xi}{h}(DC_\xi - CD_\xi) = h_\xi. \tag{3.9}$$

Finalmente, a partir das equações (3.4), (3.7), (3.8) e (3.9), concluímos que

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} 0 & fh \\ fh & 0 \end{pmatrix} d\xi$$

e pelo Teorema da Representação conforme, teorema 3.1, g determina uma imersão plana com representação de Weiertrass $(f(\xi), h(\xi)d\xi)$.

Se A e B são outras soluções de (3.3) sob as mesmas condições, então A e B podem ser escritos como combinação linear das soluções C e D. Assim,

$$A = a_1C + b_1D$$

$$B = b_1C + b_2D$$

onde, a_i e b_i são constantes.

Seja $\tilde{g}$ a imersão associada a A e B, então

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{h}A_\xi \\ B & \frac{1}{h}B_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \frac{1}{h}C_\xi \\ D & \frac{1}{h}D_\xi \end{pmatrix} = m\,g,$$

onde, $m = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Como $\tilde{g}$ e $g \in SL(2,\mathbb{C})$, temos que $m \in SL(2,\mathbb{C})$. E a imersão associada a A e B satisfaz

$$\Psi_{\tilde{g}} = \tilde{g}\tilde{g}^* = mg(mg)^* = mgg^*m^* = m\Psi_g m^*,$$

onde Ψ_g é a imersão associada a C e D.

Portanto, $\Psi_{\tilde{g}}$ é isométrico a Ψ_g.

∎

Teorema 3.2. *Sejam N uma superfície orientada e conexa e $\varphi : N \to \mathbb{H}^3$ uma imersão tal que sua segunda forma fundamental é definida positiva para uma escolha do campo de vetores unitário e normal η. Se em N considerarmos a estrutura conforme induzida pela segunda forma fundamental, então a imersão $[\varphi - \eta] : N \to \mathbb{S}^2_\infty$ é conforme se e somente se ou a métrica induzida por φ em N é plana ou φ é totalmente umbílica.*

Demonstração. Seja $p \in N$. Como a segunda forma fundamental é auto-adjunta, existe uma base $\{E_1, E_2\}$ ortogonal e suave em uma vizinhança de p que diagonaliza a métrica σ associada a segunda forma fundamental em p, isto é,

$$\sigma(E_i, E_j) = h_{ij}\delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Observamos que, $[\varphi - \eta]$ é uma aplicação confome se e somente se

$$\sigma = -\langle d\eta, d\varphi\rangle = \lambda \langle d(\varphi - \eta), d(\varphi - \eta)\rangle = \lambda \left[\langle d\varphi, d\varphi\rangle - 2\langle d\varphi, d\eta\rangle + \langle d\eta, d\eta\rangle\right]$$

aplicando esta formula em (E_i, E_j), temos

$$\sigma(E_i, E_j) = \delta_{ij}h_{ij} = \lambda\left[\delta_{ij} + 2\delta_{ij}h_{ij} + h_{ij}^2\delta_{ij}\right],$$

ou seja,

$$h_{11} = \lambda(1 + h_{11})^2$$

e

$$h_{22} = \lambda(1 + h_{22})^2$$

donde,

$$\frac{(1 + h_{11})^2}{h_{11}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{(1 + h_{22})^2}{h_{22}}$$

assim,

$$h_{22}(1 + h_{11})^2 = h_{11}(1 + h_{22})^2$$

$$h_{22}(1 + 2h_{11} + h_{11}^2) = h_{11}(1 + 2h_{22} + h_{22}^2)$$

daí,

$$h_{22}(1 - h_{11}h_{22}) = h_{11}(1 - h_{11}h_{22})$$

obtendo,

$$(h_{22} - h_{11})(1 - h_{11}h_{22}) = 0.$$

Seja $K_{ext}(p) = h_{11}h_{22}(p)$ a curvatura extrínseca de $p \in N$. Então o conjunto $N' = \{p \in N \;/\; K_{ext}(p) \neq 1\}$ é um conjunto aberto. De fato, se $K_{ext}(p) \neq 1$ então por continuidade existe uma vizinhança V de p tal que $K_{ext}(q) \neq 1 \;\forall\; q \in V$. Observe que $\varphi|_{N'}$ é totalmente umbílica, de modo que K_{ext} é constante em cada componente conexa de N', ver [15], e assim N' é fechado. Então como N é conexa φ é totalmente umbílica se N' é não vazio ou uma imersão plana se N' é vazio.

■

Definição 3.2. *As imersões* $G^+ = [\Psi + \eta] : M \to \mathbb{S}^2_\infty$ *e* $G^- = [\Psi - \eta] : M \to \mathbb{S}^2_\infty$ *serão chamadas aplicações de Gauss hiperbólicas.*

Cada ponto de $\mathbb{H}^3$ determina uma única reta $[p]$ passando por p e a origem de $\mathbb{L}^4$ localizada dentro do cone de luz $\mathbb{N}^3$. Inversamente cada uma das retas passando pela origem e dentro do cone de luz determina um único ponto em $\mathbb{H}^3$.

Considere a geodésica γ saindo do ponto $\Psi(p)$ e na direção da normal $\eta(p)$. Temos que sua parametrização é

$$\gamma(s) = cosh(s)\Psi(p) - senh(s)\eta(p),$$

ver [6] p. 162.

Cada $\gamma(s)$ determina uma reta $[\gamma(s)]$. Claramente as retas $[\gamma(s)]$ e $[2e^{-s}\gamma(s)]$ são iguais. Fazendo $s \to \infty$ na reta $[\gamma(s)]$, temos

$$\lim_{s\to\infty} [\gamma(s)] = \lim_{s\to\infty} \left[2e^{-s}\gamma(s)\right] = \lim_{s\to\infty} \left[(1+e^{-2s})\Psi(p) - (1-e^{-2s})\eta(p)\right] = [(\Psi - \eta)(p)]\,.$$

Analogamente fazendo $s \to -\infty$ em $[\gamma(s)]$, obtemos

$$\lim_{s\to-\infty} [2e^{s}\gamma(s)] = [(\Psi + \eta)(p)]\,.$$

Portanto, em cada ponto p de M a geodésica passando pelo ponto $\Psi(p)$ e na direção da normal $\eta(p)$ intercepta a fronteira ideal $\mathbb{S}^2_\infty$ de $\mathbb{H}^3$ em $G^+(p)$ e $G^-(p)$.

Se $\Psi : M \to \mathbb{H}^3$ é uma imersão plana então, usando o Lema 2.4, temos

$$\Psi - \eta = 2\begin{pmatrix} C\bar{C} & C\bar{D} \\ \bar{C}D & D\bar{D} \end{pmatrix}$$

donde, $[\Psi - \eta] \in \mathbb{S}^2_\infty$ pode ser representado por $[(C, D)] \in C\mathbb{P}^1$.

Lema 3.1. *Se* $\Psi : M \to \mathbb{H}^3$ *é uma imersão plana e identificarmos* $\mathbb{S}^2_\infty$ *e* $\mathbb{C} \cup \infty$ *com a estrutura conforme canônica, então podemos escrever*

$$G^- = \frac{C}{D} \quad e \quad G^+ = \frac{dC}{dD},$$

onde $[(C, D)]$ *é a representação de* $[\Psi - \eta] \in \mathbb{S}^2_\infty$ *em* $C\mathbb{P}^1$.

Demonstração. Cada elemento do $\mathbb{R}^4$ será escrito da forma $w = a + ib + jx + ky$ ao invés de $w = (a, b, x, y)$ onde $1, i, j$ e k são as unidades dos quatérnios. Sejam S^3 a esfera unitária de $\mathbb{R}^4$ e S^2 a esfera unitária de $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, onde $\mathbb{R}^3$ é o conjunto dos quatérnios imaginários puros. Considere a fibração de Hopf, ver [11] p. 87, dada por:

$$\begin{aligned} h : S^3 &\to S^2 \\ u &\mapsto u^{-1} i u \end{aligned}$$

Agora considerando $(C,D) \in \mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$, onde $[(C,D)] \in C\mathbb{P}^1 \equiv \mathbb{S}^2_\infty$, temos

$$\frac{(C,D)}{(|C,D)|} = \left(\frac{C}{(|C,D)|}, \frac{D}{(|C,D)|}\right) = (E,F) = (a+ib, x+iy) = a+ib+jx+kj \quad (3.10)$$

pertence a S^3.

Aplicando a fibração de Hopf a (E,F) e como $(E,F)^{-1} = \dfrac{\overline{(E,F)}}{|(E,F)|^2}$, ver [11] p. 85, temos

$$\begin{aligned} h(E,F) &= \overline{(E,F)} i (E,F) \\ &= (a - ib - jx - yk) i (a + ib + jx + ky) = (ia + b + kx - jy)(a + ib + jx + ky) \\ &= i(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) + j(-2ay + 2bx) + k(2ax + 2by) \end{aligned}$$

Fazendo a projeção estereográfica de S^2 no plano kj,

$$\pi(iY_1 + jY_2 + kY_3) = \frac{(Y_3, Y_2)}{1 - Y_1}$$

Assim, $\pi(h(E,F)) = \dfrac{(2(ax+by), 2(bx-ay))}{1 - (a^2+b^2-x^2-y^2)}$ e como $a^2+b^2+x^2+y^2 = 1$, obtemos

$$\pi(h(E,F)) = \frac{(ax+by, bx-ay)}{x^2+y^2} \cong \frac{ax+by+i(bx-ay)}{x^2+y^2} = \frac{a+ib}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{E}{F}.$$

Portanto da equação (3.10), temos

$$\pi \circ h([(C,D)]) = \pi(h(E,F)) = \frac{E}{F} = \frac{C}{D}.$$

Analogamente, obtemos do Lema 2.4, que

$$[\Psi + \eta] \cong [(C_z, D_z)],$$

usando a fibracão de Hopf e depois a projeção estereográfica, temos

$$\pi \circ h([(C_z, D_z)]) = \frac{C_z}{D_z} = \frac{dC}{dD}$$

e então podemos escrever

$$G^- = \frac{C}{D} \quad \text{e} \quad G^+ = \frac{dC}{dD}.$$

■

3.2 Exemplos e Aplicação

Daremos agora dois exemplos para a o teorema de representação conforme apresentado neste trabalho e depois fazemos uma nova demonstração para o teorema sobre caracterização de superfícies completas em $\mathbb{H}^3$. Primeiro vamos fazer algumas observações.

Considerando o modelo do semi-espaço para $\mathbb{H}^3$, podemos escrever uma superfície de revolução no espaço hiperbólico como

$$\Psi(r,\theta) = (y_1(r)cos(\theta), y_1(r)sen(\theta), y_3(r)),$$

com $y_1(r) > 0$, escolhemos o parametro r como o comprimento de arco da curva geratriz $(y_1(r), 0, y_3(r))$ em $\mathbb{R}^3_+$.

Proposição 3.2. *Uma superfície de revolução $\Psi : M \to \mathbb{H}^3$ é uma imersão plana se e somente se $y_1(r) = y_3(r)(ar+b)$, onde a e b são não simultaneamente nulos e $(y_1(r), 0, y_3(r))$ é a curva geratriz da imersão parametrizada pelo comprimento de arco r.*

Demonstração. Observamos que basta mostrar que

$$\left(\frac{y_1(r)}{y_3(r)}\right)'' = 0 \Leftrightarrow K_{ext} = 1, \text{onde } ' \text{ significa a derivada em relação à } r.$$

Vamos agora calcular a curvatura extrínseca

$$K_{ext} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{H_{11}H_{22} - H_{12}^2},$$

onde H_{ij} e h_{ij} são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais hiperbólicas respectivamente da imersão Ψ nas coordenadas r e θ.

Observando que:

$$H_{ij} = \frac{G_{ij}}{Y_3^2},$$

$$h_{ij} = \frac{g_{ij}}{Y_3} + n_3 H_{ij}, \tag{3.11}$$

onde Y_3 é a terceira coordenada da imersão, G_{ij} e g_{ij} são as primeira e segunda formas fundamentais euclidianas, respectivamente da imersão nas coordenadas r e θ e n_3 é a terceira coordenada da normal euclidiana de Ψ.

Para não carregar a notação, vamos daqui em diante omitir a variável r. Agora vamos calcular os coeficientes G_{ij} e g_{ij}, para isto necessitamos das equações abaixo,

$$\begin{cases} \Psi_r = (y_1' cos(\theta), y_1' sen(\theta), y_3'), & \Psi_{rr} = (y_1'' cos(\theta), y_1'' sen(\theta), y_3''), \\ \Psi_\theta = (-y_1 sen(\theta), y_1 cos(\theta), 0), & \Psi_{\theta\theta} = (-y_1 cos(\theta), -y_1 sen(\theta), 0), \\ \Psi_{r\theta} = (-y_1' sen(\theta), y_1' cos(\theta), 0). \end{cases} \tag{3.12}$$

Assim, como a curva geratriz, $(y_1, 0, y_3)$, é parametrizada pelo comprimento de arco, temos

$$1 = \langle (y_1', 0, y_3'), (y_1', 0, y_3') \rangle = \frac{(y_1')^2 + (y_3')^2}{y_3^2}$$

logo,

$$y_3^2 = (y_1')^2 + (y_3')^2. \tag{3.13}$$

Derivando a equação (3.13), obtemos

$$y_3' y_3 = y_3'' y_3' + y_1'' y_1'. \tag{3.14}$$

Devido as equações (3.12) e (3.13), obtemos a normal euclidiana igual à

$$\begin{aligned} N &= \frac{\Psi_r \wedge \Psi_\theta}{\|\Psi_r \wedge \Psi_\theta\|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{(-y_3' y_1 cos(\theta), -y_3' y_1 sen(\theta), y_1' y_1)}{\sqrt{((y_3')^2 + (y_1')^2) y_1^2}} \\ &= \frac{(-y_3' cos(\theta), -y_3' sen(\theta), y_1')}{y_3} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Usando as equações (3.12), (3.13) e (3.15), obtemos a primeira e segunda formas fundamentais euclidianas dadas por

$$\begin{aligned} G_{11} = \langle \Psi_r, \Psi_r \rangle_{\mathbb{R}^3} &= (y_1')^2 + (y_3')^2 = y_3^2, \\ G_{22} = \langle \Psi_\theta, \Psi_\theta \rangle_{\mathbb{R}^3} &= y_1^2, \\ G_{12} = \langle \Psi_r, \Psi_\theta \rangle_{\mathbb{R}^3} &= -y_1 y_1' cos(\theta) sen(\theta) + y_1 y_1' cos(\theta) sen(\theta) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} g_{11} = \langle N, \Psi_{rr} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \dfrac{-y_3' y_1'' + y_3'' y_1'}{y_3}, \\ g_{22} = \langle N, \Psi_{\theta\theta} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \dfrac{y_3' y_1}{y_3}, \\ g_{12} = \langle N, \Psi_{r\theta} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \dfrac{y_3' y_1' cos(\theta) sen(\theta) - y_3' y_1' cos(\theta) sen(\theta)}{y_3} = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Portanto, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais hiperbólicas são

$$H_{11} = 1, \quad H_{22} = \frac{y_1^2}{y_3^2}, \quad H_{12} = 0, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{-y_3' y_1'' + y_3'' y_1'}{y_3^2} + \frac{y_1'}{y_3}, \\ h_{22} &= \frac{y_3' y_1}{y_3^2} + \frac{y_1'}{y_3}\frac{y_1^2}{y_3^2}, \\ h_{12} &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned} K_{ext} &= h_{11}\frac{h_{22}}{H_{22}} = \left(\frac{y_3'' y_1' - y_3' y_1''}{y_3^2} + \frac{y_1'}{y_3}\right)\left(\frac{y_3' y_1}{y_3^2} + \frac{y_1'}{y_3}\frac{y_1^2}{y_3^2}\right)\frac{y_3^2}{y_1^2} \\ &= \left(\frac{y_3'' y_1' - y_3' y_1''}{y_3^2} + \frac{y_1'}{y_3}\right)\left(\frac{y_3'}{y_1} + \frac{y_1'}{y_3}\right). \end{aligned}$$

Assim, a equação $K_{ext} = 1$ é equivalente a equação

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{y_3'' y_1' - y_3' y_1'' + y_1' y_3}{y_3^2}\right)\left(\frac{y_3' y_3 + y_1' y_1}{y_3 y_1}\right) \\ &= \frac{y_3'' y_3' y_3 y_1' + y_3''(y_1')^2 y_1 - (y_3')^2 y_3 y_1'' - y_3' y_1'' y_1' y_1 + y_3' y_3^2 y_1' + y_3 (y_1')^2 y_1}{y_3^3 y_1} \end{aligned}$$

ou melhor,

$$y_3^3 y_1 = y_3'' y_3' y_3 y_1' + y_3''(y_1')^2 y_1 - (y_3')^2 y_3 y_1'' - y_3' y_1'' y_1' y_1 + y_3' y_3^2 y_1' + y_3 (y_1')^2 y_1$$

utilizando a equação (3.13), temos

$$((y_3')^2 + (y_1')^2) y_3 y_1 = y_3'' y_3' y_3 y_1' + y_3''(y_1')^2 y_1 - (y_3')^2 y_3 y_1'' - y_3' y_1'' y_1' y_1 + y_3' y_3^2 y_1' + y_3 (y_1')^2 y_1$$

simplificando o fator $y_3 (y_1')^2 y_1$, obtemos

$$(y_3')^2 y_3 y_1 = y_3'' y_3' y_3 y_1' + y_3''(y_1')^2 y_1 - (y_3')^2 y_3 y_1'' - y_3' y_1'' y_1' y_1 + y_3' y_3^2 y_1'$$

usando a equação (3.14), temos

$$(y_3'' y_3' + y_1'' y_1') y_3' y_1 = y_3'' y_3' y_3 y_1' + y_3''(y_1')^2 y_1 - (y_3')^2 y_3 y_1'' - y_3' y_1'' y_1' y_1 + (y_3'' y_3' + y_1'' y_1') y_3 y_1'$$

simplificando novamente, obtemos

$$y_3''y_1(-(y_3')^2+(y_1')^2)+y_3y_1''(-(y_3')^2+(y_1')^2)+2y_3'y_1'(y_3''y_3-y_1''y_1)=0$$

multiplicando por -1, temos

$$y_3''y_1((y_3')^2-(y_1')^2)+y_3y_1''((y_3')^2-(y_1')^2)-2y_3'y_1'(y_3''y_3-y_1''y_1)=0. \tag{3.18}$$

Por outro lado,

$$0=\left(\frac{y_1}{y_3}\right)''=\left(\frac{y_1'y_3-y_3'y_1}{y_3^2}\right)'=\frac{(y_1''y_3+y_1'y_3'-y_3''y_1-y_3'y_1')y_3^2-2y_3y_3'(y_1'y_3-y_3'y_1)}{y_3^4}$$

donde, obtemos a equação

$$0=(y_1''y_3-y_3''y_1)y_3^2-2y_3y_3'(y_1'y_3-y_3'y_1)$$

utilizando a equação (3.13), temos

$$0=(y_1''y_3-y_3''y_1)((y_3')^2+(y_1')^2)-2y_3y_3'(y_1'y_3-y_3'y_1)$$

devido a equação (3.14), obtemos

$$0=(y_1''y_3-y_3''y_1)((y_3')^2+(y_1')^2)-2(y_3''y_3'+y_1''y_1')(y_1'y_3-y_3'y_1)$$

simplificando, concluímos que

$$0=y_3y_1''((y_3')^2-(y_1')^2)+y_3''y_1((y_3')^2-(y_1')^2)-2y_3'y_1'(y_3''y_3-y_1''y_1)$$

e comparando a equação acima com a equação (3.18), obtemos a demonstração da proposição. ■

Exemplo 3.1. Usando o teorema 3.1, vamos classificar as suprefícies planas de revolução. Observe que podemos classificar estas superfícies utilizando apenas a equação (3.13) e a proposição 3.2.

Distinguiremos as superfícies de revolução em dois casos, o primeiro é quando $a=0$ e o outro é quando $a\neq 0$, onde a é obtido a partir da proposição 3.2.

i) Se $a=0$ então $r+ib\theta$ é um parametro isotérmico para a métrica induzida em Ψ. De fato, fazendo $\xi=b\theta$, temos

$$\Psi=\Psi(r,\xi)=\left(y_1(r)cos\left(\frac{\xi}{b}\right),y_1(r)sen\left(\frac{\xi}{b}\right),y_3(r)\right),$$

derivando em relação a r e ξ, obtemos respectivamente

$$\Psi_r = \Psi(r,\xi) = \left(y_1'(r)cos\left(\frac{\xi}{b}\right), y_1'(r)sen\left(\frac{\xi}{b}\right), y_3'(r)\right)$$

e

$$\Psi_\xi = \Psi(r,\xi) = \left(-y_1(r)\frac{1}{b}sen\left(\frac{\xi}{b}\right), y_1(r)\frac{1}{b}cos\left(\frac{\xi}{b}\right), 0\right).$$

Utilizando a equação (3.13), temos

$$\langle \Psi_r, \Psi_r \rangle = \frac{(y_1')^2 + (y_3')^2}{y_3^2} = 1,$$

onde $'$ significa a derivada em relação a r, como neste caso $y_1 = y_3 b$, obtemos

$$\langle \Psi_\xi, \Psi_\xi \rangle = \frac{y_1^2}{b^2 y_3^2} = 1$$

e

$$\langle \Psi_r, \Psi_\xi \rangle = -y_1' cos\left(\frac{\xi}{b}\right) y_1 \frac{1}{b} sen\left(\frac{\xi}{b}\right) + y_1' sen\left(\frac{\xi}{b}\right) y_1 \frac{1}{b}\left(cos\frac{\xi}{b}\right) = 0.$$

Passando $\Psi(r,\xi)$ para a forma em matriz hermitiana, temos

$$\Psi = (Y_1, Y_2, Y_3) = \frac{(x_1, x_2, 1)}{x_0 + x_3}$$

donde,

$$Y_3 = \frac{1}{x_0 + x_3} \Rightarrow y_3 = \frac{1}{x_0 + x_3} \Rightarrow x_0 + x_3 = \frac{1}{y_3}$$

e

$$Y_1 + iY_2 = \frac{x_1 + ix_2}{x_0 + x_3} = y_1\left(cos\left(\frac{\xi}{b}\right) + isen\left(\frac{\xi}{b}\right)\right).$$

Assim, usando que $y_1 = y_3 b$,

$$x_1 + ix_2 = y_1(x_0 + x_3)(e^{i\xi/b}) = \frac{y_1}{y_3} e^{i\xi/b} = be^{i\xi/b}.$$

Como $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$, temos

$$(x_0 - x_3)(x_0 + x_3) = x_0^2 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1$$

portanto,

$$(x_0 - x_3) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{x_0 + x_3} = (b^2 + 1) y_3.$$

Daí,

$$\Psi = \Psi(r,\xi) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y_3} & be^{i\xi/b} \\ & \\ be^{-i\xi/b} & y_3(b^2+1) \end{pmatrix}.$$

Derivando Ψ em relação a r, temos

$$\Psi_r = \begin{pmatrix} -\dfrac{y_3'}{y_3^2} & 0 \\ & \\ 0 & y_3'(b^2+1) \end{pmatrix}$$

e agora derivando Ψ_r em relação a r, obtemos

$$\Psi_{rr} = \begin{pmatrix} \dfrac{-(y_3''y_3^2 - 2y_3y_3'y_3')}{y_3^4} & 0 \\ & \\ 0 & y_3''(b^2+1) \end{pmatrix}.$$

Utilizando a equação (3.13) e como neste caso $y_1 = y_3 b$, obtemos a equação

$$1 = \frac{(y_1')^2 + (y_3')^2}{y_3^2} = \frac{(y_3')^2(b^2+1)}{y_3^2} \tag{3.19}$$

derivando a equação (3.19), temos

$$0 = \frac{2y_3'y_3''(b^2+1)y_3^2 - 2y_3y_3'(y_3')^2(b^2+1)}{y_3^4} = \frac{2(b^2+1)}{y_3^4}y_3'(y_3''y_3^2 - y_3(y_3')^2),$$

como $\dfrac{2(b^2+1)}{y_3^4} \neq 0$ devemos ter

$$y_3''y_3^2 - y_3(y_3')^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y_3' = 0.$$

Se $y_3' = 0$ então $\Psi_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. O que é um absurdo, pois Ψ_r é um vetor da base do plano tangente a Ψ em $\Psi(r,\xi)$. Portanto

$$y_3'' = \frac{(y_3')^2}{y_3}.$$

e usando isto, obtemos

$$\det(\Psi_{rr} - \Psi) \;=\; \begin{vmatrix} \dfrac{-(y_3''y_3^2 - 2y_3(y_3')^2)}{y_3^4} - \dfrac{1}{y_3} & -be^{i\xi/b} \\ & \\ -be^{-i\xi/b} & (y_3'' - y_3)(b^2+1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{y_3(y_3')^2}{y_3^4} - \dfrac{1}{y_3} & -be^{i\xi/b} \\ \\ -be^{-i\xi/b} & \left(\dfrac{(y_3')^2}{y_3} - y_3\right)(b^2+1) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{(y_3')^2 - y_3^2}{y_3^3}\right)\left(\frac{(y_3')^2 - y_3^2}{y_3}\right)(b^2+1) - b^2$$

$$= \frac{(y_3')^4 - 2(y_3')^2 y_3^2 + y_3^4}{y_3^4}(b^2+1) - b^2.$$

Usando a equação (3.19), temos

$$\frac{(y_3')^2}{y_3^2} = \frac{1}{b^2+1}$$

logo,

$$\det(\Psi_{rr} - \Psi) = \left(\frac{1}{(b^2+1)^2} - 2\frac{1}{b^2+1} + 1\right)(b^2+1) - b^2 = \frac{1}{b^2+1} - 1 = -\frac{b^2}{b^2+1}.$$

Devido ao Lema 2.2 e as equações (2.1), observamos que

$$E^2 = \langle E\eta, E\eta\rangle_{\mathbb{H}^3} = \langle \Psi_{rr} - \Psi, \Psi_{rr} - \Psi\rangle_{\mathbb{H}^3},$$

portanto

$$E^2 = -\det(\Psi_{rr} - \Psi) = \frac{b^2}{b^2+1},$$

daí

$$E = \sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}.$$

Como $\Psi_{r\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e usando o Lema 2.2 e as equações (2.1), obtemos $\Psi_{r\xi} = F\eta$ e assim

$$F = 0.$$

Derivando Ψ em relação a ξ, temos

$$\Psi_\xi = \begin{pmatrix} 0 & ie^{\xi/b} \\ -ie^{-i\xi/b} & 0 \end{pmatrix}$$

e agora derivando Ψ_ξ em relação a ξ, obtemos

$$\Psi_{\xi\xi} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{e^{i\xi/b}}{b} \\ \\ -\dfrac{e^{-i\xi/b}}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o Lema 2.2 e as equações (2.1), temos

$$G^2 = \langle G\eta, G\eta\rangle_{\mathbb{H}^3} = \langle \Psi_{\xi\xi} - \Psi, \Psi_{\xi\xi} - \Psi\rangle_{\mathbb{H}^3} = -\det(\Psi_{\xi\xi} - \Psi).$$

Calculando agora $\det(\Psi_{\xi\xi} - \Psi)$

$$\begin{aligned}
\det(\Psi_{\xi\xi} - \Psi) &= \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{y_3} & -\dfrac{e^{i\xi/b}}{b} - be^{i\xi/b} \\ -\dfrac{e^{-i\xi/b}}{b} - be^{-i\xi/b} & -y_3(b^2+1) \end{vmatrix} = (b^2+1) - \left(-\frac{1}{b} - b\right)^2 \\
&= b^2 + 1 - \left(\frac{1+b^2}{b}\right)^2 = \frac{b^4 + b^2 - 1 - 2b^2 - b^4}{b^2} \\
&= -\frac{b^2+1}{b^2},
\end{aligned}$$

portanto

$$G^2 = \frac{b^2+1}{b^2},$$

daí

$$G = \sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}}.$$

Com esses coeficientes da segunda forma, podemos construir uma função real ϕ definida em M tal que $\phi_{rr} = E$, $\phi_{\xi\xi} = G$ e $\phi_{r\xi} = F$, como visto no Lema 2.2. Usando os valores dos coeficientes da segunda forma obtidos acima, obtemos

$$\phi_r = \left(\sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}\right) r + L(\xi),$$

onde L é uma função real dependendo somente da variável ξ. Como $0 = \phi_{r\xi} = \frac{dL(\xi)}{d\xi}$, temos $L(\xi)$ é uma constante, e assim

$$\phi_r = \left(\sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}\right) r + \text{constante}.$$

Analogamente, obtemos

$$\phi_\xi = \left(\sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}}\right) \xi + \text{constante}.$$

Escolhendo $\phi_r = \left(\sqrt{\dfrac{b^2}{b^2+1}}\right) r$ e $\phi_\xi = \left(\sqrt{\dfrac{b^2+1}{b^2}}\right) \xi$ e aplicando o Lema 2.3, temos

$$z = (1+\phi_r)r + i(1+\phi_\xi)\xi = \left(1+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+1}}\right) r + i\left(1+\sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}}\right) b\theta$$

é uma imersão em coordenadas conformes com a estrutura determinada pela segunda forma.

Fazendo a mudança coordenadas $z = k \ln \zeta$, onde $k^2 = 2\,|b|\,\sqrt{b^2+1} + 2b^2 + 1$, e usando função f definida por

$$f(z) = \frac{\phi_{\xi\xi} - \phi_{rr} + 2i\phi_{r\xi}}{2 + \phi_{\xi\xi} + \phi_{rr}}$$

como na demonstração do teorema 3.1, obtemos os seguintes dados de Weierstrass associado a imersão

$$f(\zeta) = \frac{1}{k^2} \quad , \quad \omega = \frac{1}{2}dz = \frac{k}{2\zeta}d\zeta,$$

onde $\zeta \in \mathbb{C}^*$.

Pela proposição 3.1, se C e D são soluções L.I. da equação (3.3), que neste caso é

$$X_{\zeta\zeta} - \frac{-k/2\zeta^2}{k/2\zeta}X_\zeta - \frac{1}{k^2}\frac{k^2}{4\zeta^2}X = 0,$$

com $CD_\zeta - DC_\zeta = \dfrac{k}{2\zeta}$, então

$$g = \begin{pmatrix} C & \dfrac{2\zeta}{k}C_\zeta \\ D & \dfrac{2\zeta}{k}D_\zeta \end{pmatrix}.$$

A equação $X_{\zeta\zeta} + \dfrac{1}{\zeta}X_\zeta - \dfrac{1}{4\zeta^2}X = 0$ é uma equação de Cauchy-Euler. Podemos escrevê-la na forma

$$\zeta^2 X_{\zeta\zeta} + \zeta X_\zeta - \frac{1}{4}X = 0, \tag{3.20}$$

cuja solução é dada por $X = \zeta^n$ com $n \in \mathbb{R}$. Substituindo $X = \zeta^n$ na equação anterior, obtemos

$$\zeta^2 n(n-1)\zeta^{n-2} + \zeta n \zeta^{n-1} - \frac{1}{4}\zeta^n = 0,$$

logo, a equação característica é

$$n^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

cujas soluções são $n = \pm\dfrac{1}{2}$, e assim uma base para o espaço solução da equação (3.20) é dada por $\left\{\zeta^{1/2}, \zeta^{-1/2}\right\}$.

Tome $C = i\sqrt{\dfrac{k}{2}}\zeta^{1/2}$ e $D = i\sqrt{\dfrac{k}{2}}\zeta^{-1/2}$ então C e D são soluções L.I. da equação (3.20) com

$$CD_\zeta - DC_\zeta = -\frac{k}{2}\zeta^{1/2}\zeta^{-1/2-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{k}{2}\right)\zeta^{-1/2}\zeta^{1/2-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{4}\zeta^{-1} + \frac{k}{4}\zeta^{-1} = \frac{k}{2\zeta},$$

portanto, pela proposição 3.1

$$g = i\sqrt{\frac{k}{2}}\begin{pmatrix} \zeta^{1/2} & \dfrac{1}{k}\zeta^{1/2} \\ \zeta^{-1/2} & -\dfrac{1}{k}\zeta^{-1/2} \end{pmatrix}$$

é uma imersão plana associada aos dados de Weierstrass $\left(\frac{1}{k^2}, \frac{k}{2\zeta}d\zeta\right)$ e a correspondente superfície plana de revolução é, a menos de isometria,

$$\begin{aligned}
\Psi &= gg^* = i\sqrt{\frac{k}{2}}\begin{pmatrix} \zeta^{1/2} & \dfrac{1}{k}\zeta^{1/2} \\ \zeta^{-1/2} & -\dfrac{1}{k}\zeta^{-1/2} \end{pmatrix}\left(-i\sqrt{\frac{k}{2}}\right)\begin{pmatrix} \overline{\zeta^{1/2}} & \overline{\zeta^{-1/2}} \\ \dfrac{1}{k}\overline{\zeta^{1/2}} & -\dfrac{1}{k}\overline{\zeta^{-1/2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{k}{2}\begin{pmatrix} |\zeta| + \dfrac{1}{k^2}|\zeta| & \zeta^{1/2}\overline{\zeta^{-1/2}} - \dfrac{1}{k^2}\zeta^{1/2}\overline{\zeta^{-1/2}} \\ \zeta^{-1/2}\overline{\zeta^{1/2}} - \dfrac{1}{k^2}\zeta^{-1/2}\overline{\zeta^{1/2}} & |\zeta|^{-1} + \dfrac{1}{k^2}|\zeta|^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{k}{2}\begin{pmatrix} |\zeta|\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right) & \zeta^{1/2}\overline{\zeta^{-1/2}}\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) \\ \zeta^{-1/2}\overline{\zeta^{1/2}}\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) & |\zeta|^{-1}\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

agora, passando Ψ para o modelo do semi-espaço superior, temos

$$\Psi = \left(\frac{\zeta^{1/2}\overline{\zeta^{-1/2}}\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)}{|\zeta|\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)}, \frac{2}{k|\zeta|\left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right)}\right),$$

onde a primeria coordenada é a coordenda no plano e a segunda é a altura, como

$$\zeta^{1/2}\overline{\zeta^{-1/2}} = \frac{\zeta^{1/2}}{\overline{\zeta^{1/2}}}\frac{\zeta^{1/2}}{\zeta^{1/2}} = \frac{\zeta}{|\zeta|}$$

podemos escrever Ψ na seguinte forma

$$\Psi = \left(\frac{\zeta}{2\,|\zeta|} \left(\frac{k^2-1}{k^2+1} \right), \frac{2}{|\zeta| \left(k + \dfrac{1}{k} \right)} \right).$$

Note que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\zeta}{|\zeta|^2} \left(\frac{k^2-1}{k^2+1} \right) \right|^2 &= \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^4} \left(\frac{k^2-1}{k^2+1} \right)^2 = \frac{1}{|\zeta|^2} \left(\frac{k^2-1}{k^2+1} \right)^2 \frac{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2}{4} \frac{4}{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2} \\ &= \left| \frac{2}{|\zeta| \left(k + \dfrac{1}{k} \right)} \right|^2 \left(\frac{k^2-1}{k^2+1} \right)^2 \frac{4}{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2}. \end{aligned}$$

Assim, se escrevermos $\Psi = (Y_1, Y_2, Y_3)$, obtemos

$$Y_1^2 + Y_2^2 = Y_3^2 \alpha$$

onde α é uma constante positiva. Portanto, Ψ é representado em $\mathbb{R}^3_+$ por um cone.

ii) Se $a \neq 0$ então encontramos $\frac{1}{a} e^{\log(ar+b)+ia\theta}$ como um parametro isotérmico local para a métrica induzida por Ψ. De fato, considere

$$x + iy = \frac{1}{a} e^{\log(ar+b)+ia\theta} = \frac{1}{a}(ar+b)\left[cos(a\theta) + i\, sen(a\theta)\right]$$

Vamos encontrar as derivadas primeiras de r e θ em relação à x e y. Para fazer isto vamos calular a matriz inversa da matriz mudança de variáveis de x e y para r e θ.

A matriz mudança de variáveis de x e y para r e θ é

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(a\theta) & -(ar+b)sen(a\theta) \\ sen(a\theta) & (ar+b)cos(a\theta) \end{pmatrix}$$

e assim, a matriz mudança de variáveis de r e θ para x e y é

$$\frac{1}{ar+b} \begin{pmatrix} (ar+b)cos(a\theta) & (ar+b)sen(a\theta) \\ -sen(a\theta) & cos(a\theta) \end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{cases} r_x = cos(a\theta), & r_y = sen(a\theta), \\ \theta_x = -\dfrac{sen(a\theta)}{(ar+b)}, & \theta_y = \dfrac{cos(a\theta)}{(ar+b)}. \end{cases} \tag{3.21}$$

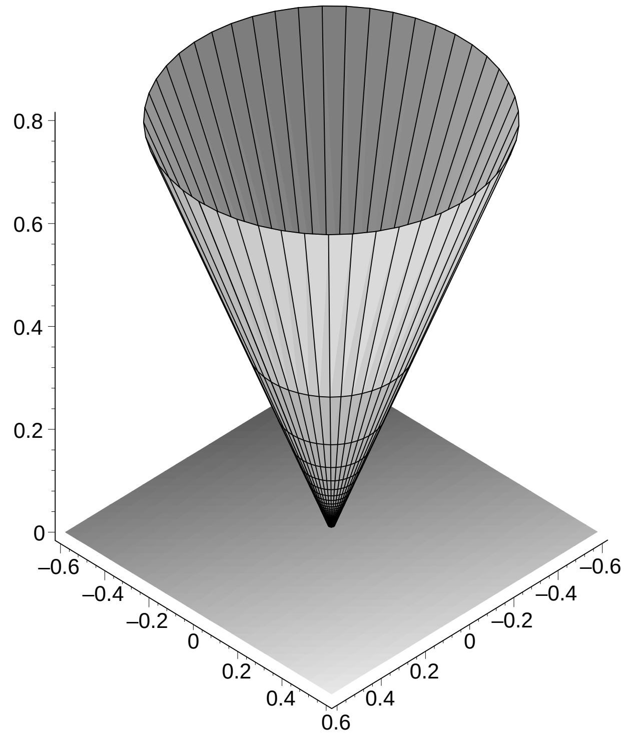

Figura 3.1: $a = 0$

Usando as equações (3.17) e (3.21) e a proposição 3.2, obtemos os coeficientes da primeira forma hiperbólica nas coordenada x e y dados por

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_x, \Psi_x \rangle_{\mathbb{H}^3} &= \langle \Psi_r r_x + \Psi_\theta \theta_x, \Psi_r r_x + \Psi_\theta \theta_x \rangle_{\mathbb{H}^3} \\
&= \langle \Psi_r, \Psi_r \rangle_{\mathbb{H}^3} (r_x)^2 + \langle \Psi_\theta, \Psi_\theta \rangle_{\mathbb{H}^3} (\theta_x)^2 \\
&= (r_x)^2 + (ar+b)^2 (\theta_x)^2 \\
&= cos^2(a\theta) + (ar+b)^2 \frac{sen^2(a\theta)}{(ar+b)^2} = 1, \\
\langle \Psi_y, \Psi_y \rangle_{\mathbb{H}^3} &= \langle \Psi_r r_y + \Psi_\theta \theta_y, \Psi_r r_y + \Psi_\theta \theta_y \rangle_{\mathbb{H}^3} \\
&= \langle \Psi_r, \Psi_r \rangle_{\mathbb{H}^3} (r_y)^2 + \langle \Psi_\theta, \Psi_\theta \rangle_{\mathbb{H}^3} (\theta_y)^2 \\
&= (r_y)^2 + (ar+b)^2 (\theta_y)^2 \\
&= sen^2(a\theta) + (ar+b)^2 \frac{cos^2(a\theta)}{(ar+b)^2} = 1,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_x, \Psi_y \rangle_{\mathbb{H}^3} &= \langle \Psi_r r_x + \Psi_\theta \theta_x, \Psi_r r_y + \Psi_\theta \theta_y \rangle_{\mathbb{H}^3} \\
&= \langle \Psi_r, \Psi_r \rangle_{\mathbb{H}^3} r_x r_y + \langle \Psi_\theta, \Psi_\theta \rangle_{\mathbb{H}^3} \theta_x \theta_y \\
&= r_x r_y + (ar+b)^2 \theta_x \theta_y \\
&= cos(a\theta)sen(a\theta) - (ar+b)^2 \frac{cos(a\theta)sen(a\theta)}{(ar+b)^2} = 0,
\end{aligned}$$

Agora vamos encontrar a segunda forma fundamental euclidiana para a imersão Ψ nas coordenadas x e y. No modelo do semi-espaço a segunda forma fundamental hiperbólica é dada pela equação (3.11).

Como $N = \dfrac{\Psi_x \wedge \Psi_y}{\|\Psi_x \wedge \Psi_y\|_{\mathbb{R}^3}} = \dfrac{\Psi_r \wedge \Psi_\theta}{\|\Psi_r \wedge \Psi_\theta\|_{\mathbb{R}^3}}$ e pelas equações (3.15), (3.16), (3.21) e a proposição 3.2, temos

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \Psi_{xx}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle (\Psi_r r_x + \Psi_\theta \theta_x)_x, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \langle (\Psi_{rr} r_x + \Psi_{r\theta} \theta_x) r_x + \Psi_r r_{xx} + (\Psi_{\theta\theta} \theta_x + \Psi_{r\theta} r_x) \theta_x + \Psi_\theta \theta_{xx}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \langle \Psi_{rr}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} (r_x)^2 + \langle \Psi_{\theta\theta}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} (\theta_x)^2 \\
&= \frac{y_3'' y_1' - y_3' y_1''}{y_3} cos^2(a\theta) + \frac{y_3' y_1}{y_3} \frac{sen^2(a\theta)}{y_1^2 / y_3^2} \\
&= \frac{y_3'' y_1' - y_3' y_1''}{y_3} cos^2(a\theta) + \frac{y_3' y_3}{y_1} sen^2(a\theta), \\
g_{12} &= \langle \Psi_{xy}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle (\Psi_r r_x + \Psi_\theta \theta_x)_y, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \langle (\Psi_{rr} r_y + \Psi_{r\theta} \theta_y) r_x + \Psi_r r_{xy} + (\Psi_{\theta\theta} \theta_y + \Psi_{r\theta} r_y) \theta_x + \Psi_\theta \theta_{xy}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \langle \Psi_{rr}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} r_y r_x + \langle \Psi_{\theta\theta}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \theta_y \theta_x \\
&= \frac{y_3'' y_1' - y_3' y_1''}{y_3} cos(a\theta)sen(a\theta) - \frac{y_3' y_1}{y_3} \frac{sen(a\theta)cos(a\theta)}{y_1^2 / y_3^2} \\
&= cos(a\theta)sen(a\theta) \left(\frac{y_3'' y_1' - y_3' y_1''}{y_3} - \frac{y_3' y_3}{y_1} \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_{22} &= \langle \Psi_{rr}, N\rangle_{\mathbb{R}^3}(r_y)^2 + \langle \Psi_{\theta\theta}, N\rangle_{\mathbb{R}^3}(\theta_y)^2 \\ &= \frac{y_3''y_1' - y_3'y_1''}{y_3} sen^2(a\theta) + \frac{y_3'y_1}{y_3}\frac{sen(a\theta)cos(a\theta)}{y_1^2/y_3^2} \\ &= \frac{y_3''y_1' - y_3'y_1''}{y_3} sen^2(a\theta) + \frac{y_3'y_1}{y_3}\frac{cos^2(a\theta)}{y_1^2/y_3^2} \\ &= \frac{y_3''y_1' - y_3'y_1''}{y_3} sen^2(a\theta) + \frac{y_3'y_3}{y_1}cos^2(a\theta), \end{aligned}$$

Assim devido aos coeficientes g_{ij}, H_{ij} e n_3, temos

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{y_3''y_1' - y_3'y_1''}{y_3^2} cos^2(a\theta) + \frac{y_3'}{y_1}(1 - cos^2(a\theta)) + \frac{y_1'}{y_3} \\ &= \left(\frac{y_3''y_1' - y_3'y_1''}{y_3^2} - \frac{y_3'}{y_1}\right) cos^2(a\theta) + \frac{y_3'}{y_1} + \frac{y_1'}{y_3}, \end{aligned}$$

$$h_{12} = \left(\frac{y_3''y_1' - y_3'y_1''}{y_3^2} - \frac{y_3'}{y_1}\right) sen(a\theta)cos(a\theta),$$

e

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{y_3''y_1' - y_3'y_1''}{y_3^2} sen^2(a\theta) + \frac{y_3'}{y_1}(1 - sen^2(a\theta)) + \frac{y_1'}{y_3} \\ &= \left(\frac{y_3''y_1' - y_3'y_1''}{y_3^2} - \frac{y_3'}{y_1}\right) sen^2(a\theta) + \frac{y_3'}{y_1} + \frac{y_1'}{y_3}, \end{aligned}$$

Pela proposição 3.2

$$0 \neq a = \left(\frac{y_1}{y_3}\right)' = \frac{y_1'y_3 - y_3'y_1}{y_3^2},$$

com isto, obtemos

$$a^2 = \frac{(y_3y_1')^2 - 2y_3'y_3y_1'y_1 + (y_3'y_1)^2}{y_3^4},$$

utilizando a equação (3.13), temos

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{y_3^2(y_3^2 - (y_3')^2) - 2y_3'y_3y_1'y_1 + (y_3^2 - (y_1')^2)(y_1)^2}{y_3^4} \\ &= \frac{y_3^2(y_3^2 + y_1^2) - [(y_3')^2y_3^2 + 2y_3'y_3y_1'y_1 + (y_1')^2y_1^2]}{y_3^4} \\ &= \frac{y_3^2 + y_1^2}{y_3^2} - \frac{(y_3'y_3 + y_1'y_1)^2}{y_3^4}, \end{aligned}$$

e assim,

$$1 - a^2 = -\frac{y_1^2}{y_3^2} + \frac{(y_3'y_3 + y_1'y_1)^2}{y_3^4} \tag{3.22}$$

ou melhor,

$$\frac{y_1^2}{y_3^2} + 1 - a^2 = \frac{(y_3'y_3 + y_1'y_1)^2}{y_3^4}$$

logo,

$$\left(\frac{y_1^2}{y_3^2} + 1 - a^2\right)^{1/2} = \frac{y_3'y_3 + y_1'y_1}{y_3^2}$$

multiplicando ambos os lados por $\dfrac{y_3^2}{y_3y_1}$, temos

$$\frac{y_3^2}{y_3y_1}\left(\frac{y_1^2}{y_3^2} + 1 - a^2\right)^{1/2} = \frac{y_3'y_3 + y_1'y_1}{y_3y_1}$$

o qual pode ser escrita como

$$\left[\frac{y_3^2}{y_1^2}\left(\frac{y_1^2}{y_3^2} + 1 - a^2\right)\right]^{1/2} = \frac{y_3'}{y_1} + \frac{y_1'}{y_3}$$

e assim, obtemos

$$\frac{y_3'}{y_1} + \frac{y_1'}{y_3} = \left(1 + \frac{1 - a^2}{y_1^2/y_3^2}\right)^{1/2}. \tag{3.23}$$

Vamos agora simplificar a expressão

$$\Gamma = \frac{y_3''y_1' - y_3'y_1''}{y_3^2} - \frac{y_3'}{y_1}.$$

Multiplicando e dividindo Γ por $y_3'y_3 + y_1'y_1$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{(y_3''y_1' - y_3'y_1'')y_1 - y_3'y_3^2}{y_3^2y_1}\left(\frac{y_3'y_3 + y_1'y_1}{y_3'y_3 + y_1'y_1}\right) \\ &= \frac{(y_3''y_1' - y_3'y_1'')(y_3'y_3 + y_1'y_1)y_1 - (y_3'y_3 + y_1'y_1)y_3'y_3^2}{\Sigma}, \end{aligned}$$

onde $\Sigma = y_3^2y_1(y_3'y_3 + y_1'y_1)$.

Assim,

$$\Gamma = \frac{1}{\Sigma}\left\{\left[y_3''y_3'y_3y_1' - (y_3')^2y_3y_1'' + y_3''(y_1')^2y_1 - y_3'y_1''y_1'y_1\right]y_1 - (y_3')^2y_3^3 - y_3'y_3^2y_1'y_1\right\}$$

utilizando a equação (3.14), temos

$$\Gamma = \frac{1}{\Sigma}\left\{\left[(y_3'y_3 - y_1''y_1')y_3y_1' - (y_3')^2y_3y_1'' + y_3''(y_1')^2y_1 - (y_3'y_3 - y_3''y_3')y_3'y_1\right]y_1 - (y_3')^2y_3^3 - y_3'y_3^2y_1'y_1\right\}$$

o qual reduzimos para,

$$\Gamma = \frac{1}{\Sigma}\left\{\left[-y_3y_1''(y_1')^2 - (y_3')^2y_3y_1'' + y_3''(y_1')^2y_1 - (y_3')^2y_3y_1 + y_3''(y_3')^2y_1\right]y_1 - (y_3')^2y_3^3\right\}$$

usando a equação (3.13), obtemos

$$\Gamma = \frac{1}{\Sigma}\left\{\left[-y_3y_1''(y_1')^2 - (y_3^2-(y_1')^2)y_3y_1'' + y_3''(y_1')^2y_1 - (y_3')^2y_3y_1 + (y_3^2-(y_1')^2)y_3''y_1\right]y_1 - (y_3')^2y_3^3\right\}$$

simplificando, temos

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{\Sigma}\left\{\left[-(y_3')^2y_3y_1 - y_3^3y_1'' + y_3''y_3^2y_1\right]y_1 - (y_3')^2y_3^3\right\}\\ &= \frac{1}{\Sigma}\left[-(y_3')^2y_3y_1^2 - y_3^2y_1(y_3y_1'' - y_3''y_1) - (y_3')^2y_3^3\right]\end{aligned}$$

pela proposição 3.2, temos

$$a = \left(\frac{y_1}{y_3}\right)' = \frac{y_1'y_3 - y_3'y_1}{y_3^2}$$

e derivando esta equação, obtemos

$$y_1''y_3 - y_3''y_1 = 2ay_3'y_3 = 2\left(\frac{y_1'y_3 - y_3'y_1}{y_3^2}\right)y_3'y_3 = 2(y_1'y_3 - y_3'y_1)\frac{y_3'}{y_3}$$

substituindo isto em Γ, temos

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{\Sigma}\left[-(y_3')^2y_3y_1^2 - 2y_3'y_3y_1(y_3y_1' - y_3'y_1) - (y_3')^2y_3^3\right]\\ &= \frac{1}{\Sigma}\left[(y_3')^2y_3y_1^2 - 2y_3'y_3^2y_1'y_1 - (y_3')^2y_3^3\right]\end{aligned}$$

devido a equação (3.13) e o valor de Σ, obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{\Sigma}\left[(y_3^2-(y_1')^2)y_3y_1^2 - 2y_3'y_3^2y_1'y_1 - (y_3')^2y_3^3\right]\\ &= \frac{1}{\Sigma}\left[y_3^3y_1^2 - (y_3')^2y_3^3 - 2y_3'y_3^2y_1'y_1 - (y_1')^2y_3y_1^2\right]\\ &= \frac{y_3^3y_1^2 - y_3(y_3'y_3 + y_1'y_1)^2}{y_3^2y_1(y_3'y_3 + y_1'y_1)}\\ &= \frac{y_3}{y_1}\left(\frac{y_3^2y_1^2 - (y_3'y_3 + y_1'y_1)^2}{y_3^2(y_3'y_3 + y_1'y_1)}\right)\\ &= \frac{y_3}{y_1}\left(\frac{y_1^2}{y_3'y_3 + y_1'y_1} - \frac{y_3'y_3 + y_1'y_1}{y_3^2}\right)\\ &= \frac{y_3}{y_1}\left(\frac{y_3^2}{y_3'y_3 + y_1'y_1}\right)\left(\frac{y_1^2}{y_3^2} - \frac{(y_3'y_3 + y_1'y_1)^2}{y_3^4}\right)\end{aligned}$$

devido as equações (3.22) e (3.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{y_3}{y_1}\left(\frac{y_3^2}{y_3'y_3+y_1'y_1}\right)(a^2-1) \\
&= -\frac{y_1^3}{y_3^3}\left(\frac{y_3^2}{y_3'y_3+y_1'y_1}\right)(1-a^2)\,\frac{y_3^4}{y_1^4} \\
&= -\frac{y_1^3}{y_3^3}\left(\frac{y_1^2}{y_3^2}+1-a^2\right)^{-1/2}(1-a^2)\,\frac{y_3^4}{y_1^4} \\
&= -\frac{y_1^2}{y_3^2}\left(1+\frac{1-a^2}{y_1^2/y_3^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{1-a^2}{y_1^4/y_3^4}\right).
\end{aligned}$$

Devido a proposição 3.2 e os valores de x e y como funções de r e θ, temos

$$\frac{y_1^2}{y_3^2}=(ar+b)^2=a^2(x^2+y^2),$$

usando esta equação em Γ e a equação (3.23), obtemos

$$\Gamma=\frac{(ar+b)^2}{2a^2}\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{-1/2}\left(\frac{(1-a^2)(-2)}{a^2(x^2+y^2)^2}\right)$$

e

$$\frac{y_3'}{y_1}+\frac{y_1'}{y_3}=\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2}.$$

Usando as equações acima, os coeficientes da segunda forma hiperbólica se reduzem a

$$h_{11}=cos^2(a\theta)\frac{(ar+b)^2}{2a^2}\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{-1/2}\left(\frac{(1-a^2)(-2)}{a^2(x^2+y^2)^2}\right)+\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2},$$

$$h_{12}=cos(a\theta)sen(a\theta)\frac{(ar+b)^2}{2a^2}\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{-1/2}\left(\frac{(1-a^2)(-2)}{a^2(x^2+y^2)^2}\right)$$

e

$$h_{22}=sen^2(a\theta)\frac{(ar+b)^2}{2a^2}\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{-1/2}\left(\frac{(1-a^2)(-2)}{a^2(x^2+y^2)^2}\right)+\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2}$$

substituindo o valor de x e y como funções de r e θ podemos escreve h_{11}, h_{12} e h_{22} na seguinte forma

$$h_{11}=\left(x\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2}\right)_x,$$

$$h_{12} = \left(x\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2}\right)_y = \left(y\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2}\right)_x$$

e

$$h_{22} = \left(y\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2}\right)_y .$$

Pelo Lema de Poincaré, existe uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que,

$$\phi_x = x\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2}$$

e

$$\phi_y = y\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2},$$

como visto na demonstração do Lema 2.2.

Pelo Lema 2.3,

$$z = \left(1+\left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2}\right)(x+iy)$$

é uma coordenada conforme para a segunda forma hiperbólica.

Considerando

$$B = \left(1+\frac{1-a^2}{a^2(x^2+y^2)}\right)^{1/2} \tag{3.24}$$

então, podemos escrever a coordendada z na forma

$$z = (1+B)\xi \tag{3.25}$$

onde, $\xi = x+iy$.

Usando a equação (3.24), escrevemos a segunda forma hiperbólica do seguinte modo,

$$\begin{aligned}
\phi_{xx} = h_{11} &= B - \frac{x^2}{B}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^2},\\
\phi_{yy} = h_{22} &= B - \frac{y^2}{B}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^2},\\
\phi_{xy} = h_{12} &= -\frac{xy}{B}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2i\phi_{xy} &= \frac{1}{B}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}(-y^2+x^2-2ixy),\\
2+\phi_{xx}+\phi_{yy} &= 2(1+B) - \frac{x^2+y^2}{B}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Usando que $\xi = x + iy$, reescrevemos as equações acima da forma

$$\begin{aligned}
\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2i\phi_{xy} &= \frac{1}{B}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)\frac{1}{|\xi|^2}\frac{\bar{\xi}^2}{|\xi|^2}, \\
2 + \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 2(1+B) - \frac{1}{B}\left(\frac{1-a^2}{a^2}\right)\frac{1}{|\xi|^2}.
\end{aligned}$$

Devido a equação (3.24) e que $\xi = x + iy$, obtemos

$$B^2 = 1 + \frac{1-a^2}{a^2|\xi|^2} \quad \Longrightarrow \quad B^2 - 1 = \frac{1-a^2}{a^2|\xi|^2}. \tag{3.26}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2i\phi_{xy} &= \frac{B^2-1}{B}\frac{\bar{\xi}^2}{|\xi|^2}, \\
2 + \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 2(1+B) - \frac{B^2-1}{B} = \frac{(B+1)^2}{B}.
\end{aligned}$$

Escolhendo a função f, como na demonstração do teorema 3.1, dada por

$$f(z) = \frac{\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2i\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}} = \frac{B^2-1}{(B+1)^2}\frac{\bar{\xi}^2}{|\xi|^2}$$

usando as equações (3.25) e (3.26), temos

$$f(z) = \left(\frac{B^2-1}{|z|^2}\right)\bar{\xi}^2\frac{\xi^2}{\xi^2} = \frac{B^2-1}{|z|^2\xi^2}|\xi|^4 = \left(\frac{1-a^2}{a^2|z|^2}\right)\frac{|\xi|^2}{\xi^2} = \frac{1-a^2}{a^2z^2}.$$

Fazendo a mudança de variável $z = \dfrac{\zeta^a}{a}$, os dados de Weierstrass associado a imersão Ψ são

$$f(\zeta) = \frac{1-a^2}{\zeta^{2a}}, \qquad \omega = \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}\zeta^{a-1}d\zeta,$$

com $\zeta \in \mathbb{C}^*$ tal que $|f(\zeta)| < 1$.

Considere a equação

$$X_{\zeta\zeta} - (a-1)\zeta^{-1}X_\zeta - \frac{1-a^2}{4}\zeta^{-2}X = 0.$$

Multiplicando esta equação por ζ^2, obtemos a equação de Cauchy-Euler

$$\zeta^2X_{\zeta\zeta} - (a-1)\zeta X_\zeta - \frac{1-a^2}{4}X = 0 \tag{3.27}$$

cuja base das soluções é $\left\{\zeta^{\frac{a+1}{2}}, \zeta^{\frac{a-1}{2}}\right\}$.

Tome $C = \frac{i}{\sqrt{2}}\zeta^{\frac{a+1}{2}}$ e $D = \frac{i}{\sqrt{2}}\zeta^{\frac{a-1}{2}}$ então C e D são soluções L.I. da equação (3.27). Como $(CD_\zeta - DC_\zeta)\dfrac{2}{\zeta^{a-1}} = 1$, então pela proposição 3.1, temos

$$g = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta^{\frac{a+1}{2}} & (a+1)\zeta^{\frac{1-a}{2}} \\ \zeta^{\frac{a-1}{2}} & (a-1)\zeta^{-\frac{a+1}{2}} \end{pmatrix}$$

é uma imersão plana associada aos dados de Weierstrass $\left(\frac{1-a^2}{\zeta^{2a}}, \frac{1}{2}\zeta^{a-1}d\zeta\right)$ e a correspondente superfície plana de revolução é, a menos de isometria,

$$\begin{aligned}\Psi &= gg^* = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta^{\frac{a+1}{2}} & (a+1)\zeta^{\frac{1-a}{2}} \\ \zeta^{\frac{a-1}{2}} & (a-1)\zeta^{-\frac{a+1}{2}} \end{pmatrix}\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} \overline{\zeta^{\frac{a+1}{2}}} & \overline{\zeta^{\frac{a-1}{2}}} \\ (a+1)\overline{\zeta^{\frac{1-a}{2}}} & (a-1)\overline{\zeta^{-\frac{a+1}{2}}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |\zeta|^{a+1} + (a+1)^2|\zeta|^{1-a} & \zeta^{\frac{a+1}{2}}\overline{\zeta^{\frac{a-1}{2}}} + (a^2-1)\zeta^{\frac{1-a}{2}}\overline{\zeta^{-\frac{a+1}{2}}} \\ \zeta^{\frac{a-1}{2}}\overline{\zeta^{\frac{a+1}{2}}} + (a^2-1)\zeta^{-\frac{a+1}{2}}\overline{\zeta^{\frac{1-a}{2}}} & |\zeta|^{a-1} + (a-1)^2|\zeta|^{-(1+a)} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Voltando para o modelo do semi-espaço, obtemos

$$\Psi = \left(\frac{\zeta^{\frac{a+1}{2}}\overline{\zeta^{\frac{a-1}{2}}} + (a^2-1)\zeta^{\frac{1-a}{2}}\overline{\zeta^{-\frac{a+1}{2}}}}{|\zeta|^{a+1} + (a+1)^2|\zeta|^{1-a}}, \frac{2}{|\zeta|^{a+1} + (a+1)^2|\zeta|^{1-a}}\right)$$

onde a primeira coordenada é a plana e a segunda é a altura.

Como

$$\zeta^{\frac{a+1}{2}}\overline{\zeta^{\frac{a-1}{2}}} = \frac{\zeta^{\frac{a+1}{2}}}{\overline{\zeta^{\frac{1-a}{2}}}}\frac{\zeta^{\frac{1-a}{2}}}{\zeta^{\frac{1-a}{2}}} = \frac{\zeta}{|\zeta|^{1-a}}$$

e

$$\zeta^{\frac{1-a}{2}}\overline{\zeta^{-\frac{a+1}{2}}} = \frac{\zeta^{\frac{1-a}{2}}}{\overline{\zeta^{\frac{a+1}{2}}}}\frac{\zeta^{\frac{a+1}{2}}}{\zeta^{\frac{a+1}{2}}} = \frac{\zeta}{|\zeta|^{a+1}}$$

portanto, escrevemos a imersão Ψ, dependendo do parametro **a**, da seguinte forma,

$$\Psi_a = \left(\frac{\zeta\left(|\zeta|^{a-1} + (a^2-1)|\zeta|^{-(a+1)}\right)}{|\zeta|^{a+1} + (a+1)^2|\zeta|^{1-a}}, \frac{2}{|\zeta|^{a+1} + (a+1)^2|\zeta|^{1-a}}\right).$$

Note que, as superfícies Ψ_a e Ψ_{-a} são isométricas, pois tem os mesmos dados de Weierstrass olhando na coordenada z. Para $a \pm 1$ as superfícies são horoesferas(veja figuras 3.2 e 3.3).

Nos outros casos, obtemos superfícies planas de revolução o qual podem ser representadas pelas seguintes figuras:

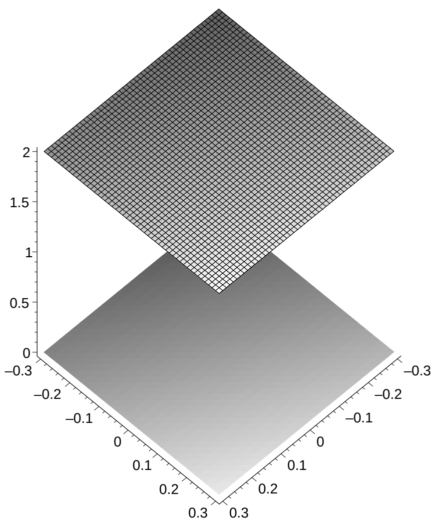

Figura 3.2: $a = -1$

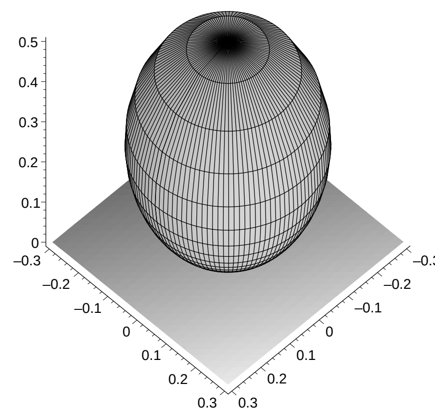

Figura 3.3: $a = 1$

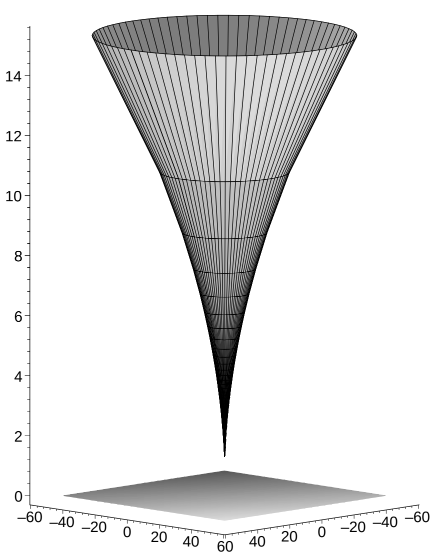

Figura 3.4: $-1 < a < 0$

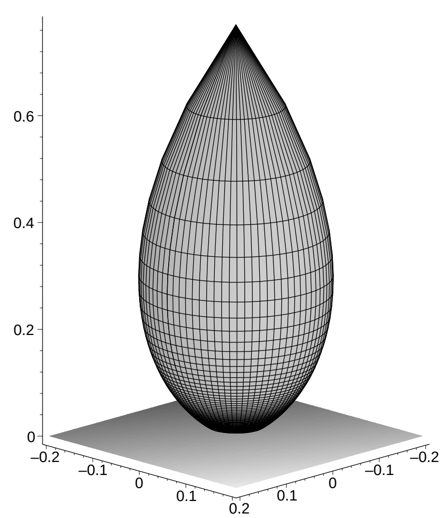

Figura 3.5: $0 < a < 1$

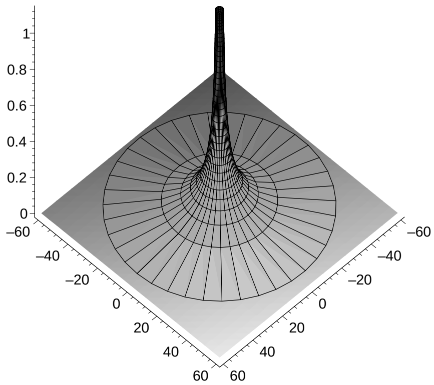

Figura 3.6: $a < -1$

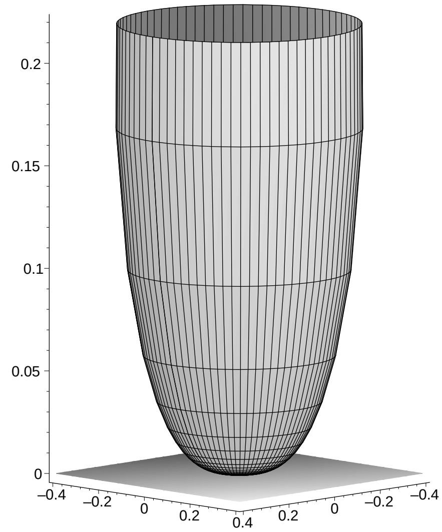

Figura 3.7: $a > 1$

Exemplo 3.2. Vamos determinar os dados de Weierstrass para superfície plana no espaço hiperbólico dada por

$$\Psi(r,t) = (r + 1 + cos(\theta), t, sen(\theta)),$$

com $cos(\theta) = \frac{1-4\exp(2r)}{1+4\exp(2r)}$ e $sen(\theta) = \frac{4\exp(r)}{1+4\exp(2r)}$. Esta superfície foi obtida em [13] e pode ser visualizada na figura (3.8).

As derivadas primeira de Ψ são

$$\begin{gathered} \Psi_r = (1 - sen(\theta)\theta_r, 0, cos(\theta)\theta_r) \\ e \\ \Psi_t = (0,1,0), \end{gathered} \tag{3.28}$$

e portanto a primeira forma hiperbólica nas coordenadas r e t são

$$\langle \Psi_r, \Psi_r \rangle_{\mathbb{H}^3} = \frac{1 - 2sen(\theta)\theta_r + sen^2(\theta)\theta_r^2 + cos^2(\theta)\theta_r^2}{sen^2(\theta)} = \frac{1 - 2sen(\theta)\theta_r + \theta_r^2}{sen^2(\theta)},$$

$$\langle \Psi_r, \Psi_\theta \rangle_{\mathbb{H}^3} = 0$$

e

$$\langle \Psi_\theta, \Psi_\theta \rangle_{\mathbb{H}^3} = \frac{1}{sen^2(\theta)}.$$

Agora como $[cos(\theta)]_r = -sen(\theta)\theta_r$, obtemos

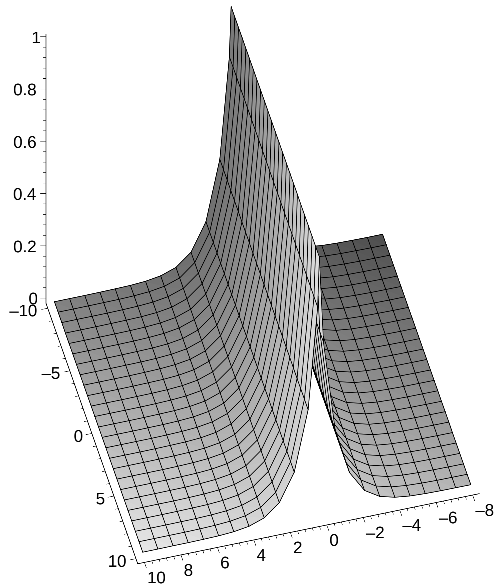

Figura 3.8: Exemplo 3.2

$$\begin{aligned}
\theta_r &= -\frac{(cos(\theta))_r}{sen(\theta)} \\
&= -\left(\frac{-8\exp(2r)(1+4\exp(2r)) - 8\exp(2r)(1-4\exp(2r))}{(1+4\exp(2r))^2}\right)\frac{1+4\exp(2r)}{4\exp(r)} \\
&= \frac{16\exp(2r)}{(1+4\exp(2r))^2}\frac{1+4\exp(2r)}{4\exp(r)} = \frac{4\exp(r)}{1+4\exp(2r)} = sen(\theta).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Usando a equação (3.29), temos

$$\langle \Psi_r, \Psi_r \rangle_{\mathbb{H}^3} = \frac{1 - 2sen^2(\theta) + sen^2(\theta)}{sen^2(\theta)} = \frac{1 - sen^2(\theta)}{sen^2(\theta)} = \frac{cos^2(\theta)}{sen^2(\theta)}.$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \tilde{r} &= \tilde{r}(r), \\ \tilde{t} &= t \end{cases}$$

temos, $\tilde{\Psi}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \Psi(r(\tilde{r}), t)$ e portanto

$$\tilde{\Psi}_{\tilde{r}} = \Psi_r \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}}, \qquad \tilde{\Psi}_{\tilde{t}} = \Psi_t.$$

Assim,

$$\left\langle \tilde{\Psi}_{\tilde{r}}, \tilde{\Psi}_{\tilde{r}} \right\rangle = \left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{r}}\right)^2 \langle \Psi_r, \Psi_r \rangle,$$

$$\left\langle \tilde{\Psi}_{\tilde{r}}, \tilde{\Psi}_{\tilde{t}} \right\rangle = 0$$

e

$$\left\langle \tilde{\Psi}_{\tilde{t}}, \tilde{\Psi}_{\tilde{t}} \right\rangle = \langle \Psi_t, \Psi_t \rangle .$$

A fim de obtermos uma coordenada isotérmica, fazemos $\left\langle \tilde{\Psi}_{\tilde{r}}, \tilde{\Psi}_{\tilde{r}} \right\rangle = \left\langle \tilde{\Psi}_{\tilde{t}}, \tilde{\Psi}_{\tilde{t}} \right\rangle$. Assim,

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{r}}\right)^2 = \frac{\langle \Psi_t, \Psi_t \rangle}{\langle \Psi_r, \Psi_r \rangle} = \frac{1}{sen^2(\theta)} \frac{sen^2(\theta)}{cos^2(\theta)} = \frac{1}{cos^2(\theta)}.$$

Logo,

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{r}}\right) = \frac{1}{cos(\theta)},$$

o que implica em

$$\left(\frac{\partial \tilde{r}}{\partial r}\right) = cos(\theta). \tag{3.30}$$

Escolhendo $\tilde{r}(r)$ tal que a equação (3.30) seja satisfeita, a métrica fica determinada por

$$ds^2 = \langle d\Psi, d\Psi \rangle = \lambda(\tilde{r})(d\tilde{r}^2 + d\tilde{t}^2), \tag{3.31}$$

onde $\lambda(\tilde{r}) = \dfrac{1}{sen^2(\theta)}$.

Como Ψ é uma imersão plana então a curvatura K, que é dada por

$$K = -\frac{1}{2\lambda(\tilde{r}))} \Delta \ln(\lambda(\tilde{r})),$$

ver [4] p. 237, é nula.

Portanto $\Delta \ln(\lambda(\tilde{r})) = 0$. Sabemos que $\ln(\lambda(\tilde{r}))$ so depende de $\tilde{r}$. Logo,

$$[\ln(\lambda(\tilde{r}))]_{\tilde{r}\tilde{r}} = 0$$

donde,

$$\ln(\lambda(\tilde{r})) = \alpha\tilde{r} + \beta, \tag{3.32}$$

onde α e β são constantes reais.

Por uma translação podemos considerar $\beta = 0$ e por uma dilatação podemos considerar $\alpha = -2$.

Logo, usando o valor de λ,

$$\tilde{r} = -\frac{1}{2} \ln(\lambda(\tilde{r})) = -\frac{1}{2} \ln(sen^{-2}(\theta)).$$

Assim, derivando a equação anterior e utilizando a equação (3.29), temos

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} = \frac{1}{sen(\theta)} cos(\theta)\theta_r = cos(\theta)$$

tendo uma compatibilidade com a equação (3.30).

Agora como $\Delta \ln(\lambda(\tilde{r})) = 0$ então $\ln(\lambda(\tilde{r}))$ é parte real de uma função holomorfa, digamos $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Assim $[\mathbb{R}e(h)]_{\tilde{r}} = [\mathbb{I}m(h)]_{\tilde{t}}$, usando a equação (3.32), obtemos

$$\mathbb{I}m(h) = -2\tilde{t} + \text{ constante.}$$

Novamente por uma translação, podemos considerar

$$\mathbb{I}m(h) = -2\tilde{t}$$

e portanto

$$h(\tilde{r}, \tilde{t}) = -2(\tilde{r} + i\tilde{t}).$$

Considere $\xi = \tilde{r} + i\tilde{t}$ e a função $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \exp(h(z)/2)dz = \int_{\xi_0}^{\xi} \exp(-z)dz = -\exp(-\xi) + \exp(-\xi_0).$$

Assim, usando a equação (3.32)

$$|\Phi'(\xi)|^2 = |\exp(-\xi)|^2 = (\exp(-\tilde{r}))^2 = \exp(-2\tilde{r}) = \lambda(\tilde{r}).$$

Devido a equação (3.31), obtemos

$$dx^2 + dy^2 = |d\Phi(\xi)|^2 = |\Phi'(\xi)|^2 |d\xi|^2 = \lambda(\tilde{r})(d\tilde{r}^2 + d\tilde{t}^2) = ds^2,$$

onde $x + iy = \Phi(\xi) = -\exp(-2\xi)$. Esta é uma coordenada isotérmica para a imersão plana Ψ.

Vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental hiperbólica nas coordenas x e y encontradas acima. Devido a formula (3.11), necessitamos da matriz mudança de base das coordenadas r e t para x e y, dos coeficientes da primeira e segunda formas euclidianas nas coordenadas x e y e da terceira coordenada do vetor normal.

A matriz mudança de base das coordenadas r e t para x e y é a matriz inversa da matriz mudaça de base das coordenadas x e y para r e t.

Como

$$x + iy = \Phi(\xi) = -\exp(-\frac{1}{2}\ln(\lambda(\tilde{r})) - it) = -\frac{1}{sen(\theta)}(cost - isent),$$

logo

$$x = -\frac{1}{sen(\theta)}cos(t) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{sen(\theta)}sen(t) \tag{3.33}$$

utilizando a equação (3.33), temos

$$\begin{pmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{sen^2(\theta)}cos(\theta)\theta_r cos(t) & \frac{1}{sen(\theta)}sen(t) \\ -\frac{1}{sen^2(\theta)}cos(\theta)\theta_r sen(t) & \frac{1}{sen(\theta)}cos(t) \end{pmatrix}$$

usando a equação (3.29), o determinate da matriz acima é

$$\det\begin{pmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{pmatrix} = \frac{cos(\theta)}{sen^2(\theta)}cos^2(t) + \frac{cos(\theta)}{sen^2(\theta)}sen^2(t) = \frac{cos(\theta)}{sen^2(\theta)}$$

e assim,

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix} = \frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)}\begin{pmatrix} \frac{cos(t)}{sen(\theta)} & -\frac{sen(t)}{sen(\theta)} \\ \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}sen(t) & \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}cos(t) & -\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}sen(t) \\ sen(\theta)sen(t) & sen(\theta)cos(t) \end{pmatrix}.$$

Devido as equações (3.28) e (3.29), obtemos

$$\begin{aligned}
\Psi_{rr} &= (-(cos(\theta)\theta_r^2 + \theta_{rr}sen(\theta)), 0, -sen(\theta)\theta_r^2 + cos(\theta)\theta_{rr}) \\
&= (-2cos(\theta)sen^2(\theta), 0, -sen^3(\theta) + cos^2(\theta)sen(\theta)), \\
\Psi_{rt} &= (0,0,0), \\
\Psi_{tt} &= (0,0,0) \\
e & \\
N &= \frac{\Psi_x \wedge \Psi_y}{\|\Psi_x \wedge \Psi_y\|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{\Psi_r \wedge \Psi_t}{\|\Psi_r \wedge \Psi_t\|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{(-cos(\theta)sen(\theta), 0, cos^2(\theta))}{cos(\theta)} = (-sen(\theta), 0, cos(\theta)).
\end{aligned}$$

Portanto, usando as equações acima, a segunda forma euclidiana nas coordenadas x e

y é dada por

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \Psi_{xx}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle (\Psi_r r_x + \Psi_t t_x)_x, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \langle (\Psi_{rr} r_x + \Psi_{rt} t_x) r_x + \Psi_r r_{xx} + (\Psi_{tt} t_x + \Psi_{tr} r_x) t_x + \Psi_t t_{xx}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \langle \Psi_{rr}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \, r_x^2 \\
&= \left[2cos(\theta) sen^3(\theta) - sen^3(\theta) cos(\theta) + cos^3(\theta) sen(\theta) \right] r_x^2 \\
&= sen(\theta) cos(\theta) \frac{sen^2(\theta)}{cos^2(\theta)} cos^2(t) \\
&= \frac{sen^3(\theta)}{cos(\theta)} cos^2(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{12} &= \langle \Psi_{xy}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \Psi_{rr}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \, r_x r_y \\
&= -sen(\theta) cos(\theta) \frac{sen^2(\theta)}{cos^2(\theta)} sen(t) cos(t) \\
&= -\frac{sen^3(\theta)}{cos(\theta)} sen(t) cos(t)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
g_{22} &= \langle \Psi_{rr}, N \rangle_{\mathbb{R}^3} \, r_y^2 \\
&= sen(\theta) cos(\theta) \frac{sen^2(\theta)}{cos^2(\theta)} sen^2(t) \\
&= \frac{sen^3(\theta)}{cos(\theta)} sen^2(t).
\end{aligned}
$$

Assim, utilizando a equação (3.11), a segunda forma hiperbólica nas coordenadas x e y é dada por

$$
\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{g_{11}}{sen(\theta)} + cos(\theta) = \frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)} cos^2(t) + cos(\theta), \\
h_{12} &= \frac{g_{12}}{sen(\theta)} = -\frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)} cos(t) sen(t), \\
h_{22} &= \frac{g_{22}}{sen(\theta)} + cos(\theta) = \frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)} sen^2(t) + cos(\theta).
\end{aligned}
$$

Observando a equação (3.33), podemos concluir que:

$$\begin{cases} sen^2(\theta) = \dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad cos(\theta) = \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2+y^2}}, \quad cos(t)sen(t) = -\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \\ cos^2(t) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, \quad sen^2(t)\dfrac{y^2}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Utilizando as equações (3.34), podemos escrever os coeficientes da segunda forma hiperbólica nas coordenadas x e y como

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{1}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}}\frac{x^2}{x^2+y^2} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}} = \left[\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)x\right]_x, \\ h_{12} &= -\frac{1}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}}\frac{(-xy)}{x^2+y^2} = \left[\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)x\right]_y = \left[\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)y\right]_x, \\ h_{22} &= \frac{1}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}}\frac{y^2}{x^2+y^2} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}} = \left[\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)y\right]_y. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Poincaré, sabemos que existe uma função $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi_{xx} = h_{11}, \quad \phi_{xy} = h_{12} \text{ e } \phi_{yy} = h_{22},$$

como visto na demonstração do Lema 2.2.

Logo,

$$\phi_x = \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)x, \qquad \phi_y = \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)y.$$

Devido ao Lema 2.3, temos

$$z = (1 + \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2+y^2}}\right))(x+iy)$$

é um parametro conforme para a segunda forma hiperbólica.

Usando o teorema 3.1, a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2i\phi_{xy}}{2 + \phi_{xx} + \phi_{yy}}$$

é uma função holomorfa.

Observando que

$$\begin{aligned}
\phi_{yy} - \phi_{xx} + 2i\phi_{xy} &= h_{22} - h_{11} + 2ih_{12} \\
&= \frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)}\left[sen^2(t) - cos^2(t) - 2isen(t)cos(t)\right] \\
&= -\frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)}\left[-sen^2(t) + cos^2(t) + 2isen(t)cos(t)\right] \\
&= -\frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)}\exp(2it)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
2 + \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 2 + h_{11} + h_{22} \\
&= 2 + 2cos(\theta) + \frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)}\left[sen^2(t) + cos^2(t)\right] \\
&= 2(1 + cos(\theta)) + \frac{sen^2(\theta)}{cos(\theta)} = \frac{2\left[cos(\theta) + cos^2(\theta)\right] + sen^2(\theta)}{cos(\theta)} \\
&= \frac{\left[1 + cos(\theta)\right]^2}{cos(\theta)},
\end{aligned}$$

obtemos

$$f(z) = -\frac{-sen^2(\theta)}{\left[1 + cos(\theta)\right]^2}\exp(2it).$$

Como

$$z = \left[1 + cos(\theta)\right]\zeta, \qquad \zeta = x + iy$$

e

$$sen^2(\theta) = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{|\zeta|^2}$$

logo,

$$|z|^2 = \left[1 + cos(\theta)\right]^2 |\zeta|^2$$

substituindo em f, temos

$$f(z) = -\frac{1}{|\zeta|^2}\frac{|\zeta|^2}{|z|^2}\left[\exp(it)\right]^2 = -\frac{1}{|z|^2}\left[\exp(it)\right]^2.$$

Observando a equação (3.33), obtemos

$$\exp(it) = cos(t) + isen(t) = -xsen(\theta) + iysen(\theta) = -sen(\theta)(x - iy) = -sen(\theta)\bar{\zeta},$$

usando as equações (3.34) e a definição de ζ, temos

$$[\exp(it)]^2 = sen^2(\theta)\bar{\zeta}^2 = \frac{1}{|\zeta|^2}\bar{\zeta}^2.$$

Substituindo a equação acima em f, obtemos

$$f(z) = -\frac{1}{|z|^2}\frac{\bar{\zeta}^2}{|\zeta|^2}.$$

Como

$$\frac{\bar{z}^2}{|z|^2} = \frac{[1+cos(\theta)]^2\,\bar{\zeta}^2}{[1+cos(\theta)]^2\,|\zeta|^2} = \frac{\bar{\zeta}^2}{|\zeta|^2}$$

a função f se reduz à

$$f(z) = -\frac{1}{|z|^2}\frac{\bar{z}^2}{|z|^2} = -\frac{1}{|z|^2}\frac{\bar{z}^2}{|z|^2}\frac{z^2}{z^2} = -\frac{1}{z^2}$$

e os dados de Weierstrass, para a imersão Ψ são $(-\frac{1}{z^2}, \frac{1}{2}dz)$, com o domínio dado por $|f(z)| < 1$.

Considere a equação

$$X_{zz} + \frac{1}{4z^2}X = 0. \tag{3.35}$$

Fazendo $X = z^n$, $n \in \mathbb{R}$, obtemos a equação característica

$$n(n-1) + \frac{1}{4} = 0,$$

cuja solução é $n = \frac{1}{2}$.

Assim, $X_1 = z^{1/2}$ é uma solução para a equação (3.35), usando variação de parametros, obtemos $X_2 = z^{1/2}\ln z$ uma solução L.I. com X_1.

Tome $C = \frac{1}{\sqrt{2}}z^{1/2}$ e $D = \frac{1}{\sqrt{2}}z^{1/2}\ln z$, então

$$CD_z - DC_z = \frac{1}{\sqrt{2}}z^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}z^{-1/2}\ln z + \frac{1}{z}z^{1/2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{1/2}\ln(z)\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}z^{-1/2} = \frac{1}{2}.$$

Pela proposição 3.1,

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z^{1/2} & z^{-1/2} \\ & \\ z^{1/2}\ln(z) & z^{-1/2}(\ln(z)+2) \end{pmatrix}$$

é uma imersão plana associada aos dados de Weierstrass $\left(-\frac{1}{z^2}, \frac{1}{2}dz\right)$ e a correspondente superfície plana é, a menos de isometria,

$$\begin{aligned}\Psi &= gg^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z^{1/2} & z^{-1/2} \\ z^{1/2}\ln(z) & z^{-1/2}(\ln(z)+2)\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \overline{z^{1/2}} & \overline{z^{1/2}\ln(z)} \\ \overline{z^{-1/2}} & \overline{z^{-1/2}(\ln(z)+2)}\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |z|+|z|^{-1} & |z|\,\overline{\ln(z)}+|z|^{-1}\left(\overline{\ln(z)}+2\right) \\ |z|\ln(z)+|z|^{-1}(\ln(z)+2) & |z|\,|\ln(z)|^2+|z|^{-1}|\ln(z)+2|^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Passando Ψ para o modelo do semi-espaço superior, temos

$$\Psi = \left(\frac{|z|\,\overline{\ln(z)}+|z|^{-1}\left(\overline{\ln(z)}+2\right)}{|z|+|z|^{-1}}, \frac{2}{|z|+|z|^{-1}}\right) = \left(\overline{\ln(z)}+\frac{2\,|z|^{-1}}{|z|+|z|^{-1}}, \frac{2}{|z|+|z|^{-1}}\right)$$

onde a primeira coordenada é a plana e a segunda é a altura.

Como $\ln(z) = \ln|z| + \arg(z)$ e usando coordenadas polares, $z = r\exp(i\theta)$, obtemos

$$\Psi = \left(\ln(r)+\frac{2}{r^2+1}, -\arg(z), \frac{2r}{r^2+1}\right).$$

A superfície acima tem singularidades, a reta $(1, -\arg(z), 1)$. Estas singularidades são obtidas quando $|f(z)| = 1$, ou seja, o círculo unitário. O $\arg(z)$ tem infinitamente muitos valores o qual diferem de $(-\pi, \pi)$ por um multiplo de 2π. Uma visualização para a superfície é dada na figura abaixo:

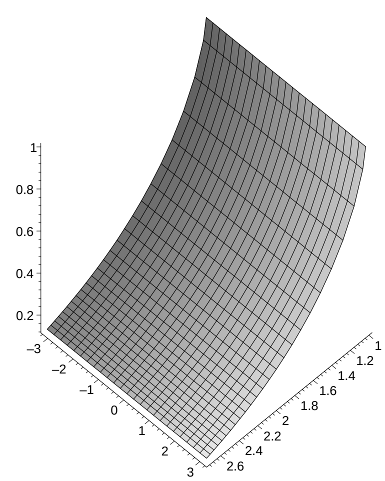

Figura 3.9: $\arg(z)$ variando de $-\pi$ a π

Usando a representação conforme, teorema 3.1, daremos una nova prova do teorema de classificação das superfícies planas completas no $\mathbb{H}^3$, a primeira foi obtida por Volkov-Vladimirova e Sasaki, ver [12].

Teorema 3.3. *Sejam M uma superfície simplesmente conexa e $\Psi : M \to \mathbb{H}^3$ uma imersão plana e completa então $\Psi(M)$ ou é uma horoesfera ou um conjunto de pontos à uma distância fixa de uma geodésica.*

Demonstração. Pelo teorema de uniformização de superfícies simplesmente conexas, ver [2], e usando a estutura determinada pela segunda forma fundamental, M é conforme ou ao disco unitário ou ao plano complexo.

Se (f,ω) são os dados de Weierstrass associado a imersão, então do teorema 3.1 parte i.d), temos

$$ds^2 = f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2 + (1+|f|^2)\,|\omega|^2 \leq |f|\,|\omega|^2 + \left|\bar{f}\right|\,|\bar{\omega}|^2 + \left|(1+|f|^2)\right|\,|\omega|^2$$

e ainda de i.a), obtemos

$$ds^2 \leq 4\,|\omega|^2 \tag{3.36}$$

e como $|\omega| \neq 0$, M não é conforme ao disco unitário, caso contrário existiria um caminho divergente γ em M tal que

$$\int_\gamma 2\,|\omega| < \infty,$$

ver Lema 8.5 p. 67 em [12], e devido a equação (3.36) teriamos

$$\int_\gamma ds < \infty.$$

Contradizendo que γ é um caminho divergente. Assim M deve ser conforme ao plano complexo.

Como f é limitada e M conforme ao plano complexo, usando o teorema de Liouville, f é constante. E ainda da equação (3.36) obtemos

$$\frac{ds^2}{|\omega|^2} = \frac{f\omega^2 + \bar{f}\bar{\omega}^2(1+|f|^2)\,|\omega|^2}{|\omega|^2} \leq 4$$

assim, podemos escrever a representação de Weierstrass da forma $(c, d\xi)$ onde c é uma constante e $\xi \in \mathbb{C}$. Usando o exemplo 3.1 itens **i)** e **ii)**, podemos concluir que se $c = 0$ então M é uma horoesfera e se $c \neq 0$ M é um conjunto de pontos à uma distância fixa de uma geodésica.

∎

Referências Bibliográficas

[1] Ahlfors, Lars Valerian. Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 3. ed. New York: Mcgraw-Hill, 1981.

[2] Bers, Lipman. Riemann surfaces: Lectures. New York: New York Univ Press, 1957.

[3] Bryant, Robert L. Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space. Astérisque 154-155 p. 321-347. Soc. Math. de France, 1987.

[4] Carmo, Manfredo Perdigão do. Differential geometry of curves and surfaces. New Jersey: Printice-Hall Inc., 1976.

[5] Carmo, Manfredo Perdigão do. Geometria riemanniana. 2. ed. Rio de Janeiro: Impa, 1988.

[6] Faber, Richard L. Foundations of euclidean and non-euclidean geometry. New York: M Dekker, 1983.

[7] Gálvez J.A., Martínez A., Milán F., Flat surfaces in the hyperbolic 3-space. Math. Ann. 316 p. 419-435. No. 3, 2000.

[8] Jost, Jürgen. Compact riemann surfaces. Berlin: Springer, 1996.

[9] Kokubu M., Rossman W., Saji K., Umehara M., Yamada K. Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space. preprint. 2004.

[10] Kokubu M., Umehara M., Yamada K., Flat fronts in hiperbolic 3-space. Pacf. Jorn. of Math. 216 p. 149-175 No. 1, 2004.

[11] Lima, Elon Lages. Grupo fundamental e espaços de recobrimento. 2.ed. Rio de Janeiro: Impa 1998.

[12] Osserman, Robert. Survey of minimal surfaces (a). New York: Dover Publ, 1986.

[13] Roitman, Pedro. Flat surfaces in hyperbolic 3-space as normal surfaces to a congruence of geodesics. preprint. 2003.

[14] Sasaki S., On complete flat surfaces in hyperbolic 3-space. Kodai-Math.-Sem.-Rep. 25 p. 449-457, 1973.

[15] Spivak, Michael. Comprehensive introduction to differential geometry. Vol. 4. Boston: Publish or Perish Inc., 1975.

[16] Srinivara Rao, K.N. The Rotation and Lorentz groups and ther representations for physicists. John Wiley & Sons, 1988.

[17] Umerara, M., Yamada, K. Complete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space. Ann. Math. 137 p. 611-638, 1993.

[18] Volkov J. A., Vladimirova S. M., Isometric immersions of the Euclidean plane in *Lobačevskiĭspace*. Mat. Zametki, 10 p. 327-332, 1971(in Russian) ou Math. Notes 10, p.655-661, 1971(in English).