

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Imersões Taut em Superfícies não Compactas

Por

Anyelle Nogueira de Souza

Brasília
2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Imersões Taut em Superfícies não Compactas

Por

Anyelle Nogueira de Souza*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 27 de Fevereiro de 2007

Comissão Examinadora:

Prof^a. Keti Tenenblat - MAT/UnB (Orientador)

Prof..... - MAT/UnB (Membro)

Prof. - MAT/UFRN (Membro)

*Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Resumo

O objetivo deste trabalho é provar com base no artigo de Thomas E. Cecil, que se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão taut de uma superfície não compacta e conexa, então $f(M)$ é um hiperplano ou uma cíclide de Dupin completa.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	4
1.1 Pontos focais	5
1.2 Noções de grupos de homologia	11
1.3 Imersões taut	16
2 Alguns resultados importantes	19
2.1 Cíclides de Dupin	19
2.2 Teorema local	28
2.3 Teorema global	34
3 Demonstração do Teorema Principal	39
Bibliografia	42

Introdução

O objetivo deste trabalho é provar com base no artigo [5] de Thomas E. Cecil, que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão taut de uma superfície não compacta e conexa, então $f(M)$ é um hiperplano ou uma cíclide de Dupin completa.

As imersões taut de superfícies compactas em \mathbb{R}^n já são todas conhecidas pelo trabalho de Kuiper [9] e Banchoff [1]. Em particular, Banchoff mostrou que se $n = 3$, $f(M)$ é uma esfera euclideana ou uma cíclide de Dupin.

Combinando este resultado com o obtido para superfícies não compactas concluímos que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão taut de uma superfície conexa, então $f(M)$ é totalmente umbílica ou uma cíclide de Dupin completa.

Observamos que o resultado de Banchoff foi generalizado em [12] por Nomizu e Rodrigues que mostraram que uma imersão taut de uma m -esfera em \mathbb{R}^n deve ser, de fato, uma esfera euclideana $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^n$. Diversas outras generalizações foram obtidas por Carter e West [2].

Por outro lado, Carter e West [2] provaram que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão taut de uma superfície não compacta, então $f(M) \subset \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^n$. Se $f(M)$ não está totalmente contida em \mathbb{R}^3 , então $f(M) = P(V)$, onde V é a superfície de Veronese [9] em S^4 e P é a projeção estereográfica de S^4 em \mathbb{R}^4 com respeito a um ponto de V .

Assim o estudo das possíveis imersões taut $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde M é não compacta, foi reduzido ao estudo de todas as imersões taut de M em \mathbb{R}^3 . Tais imersões são o tema deste trabalho.

O conceito de imersões taut envolve as funções distância dos pontos de $f(M)$ a um ponto p de \mathbb{R}^n .

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão suave de uma superfície M diferenciável em \mathbb{R}^n .

Para $p \in \mathbb{R}^n$, $x \in M$, a função $L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $L_p(x) = d(f(x), p)^2$, onde d é a distância euclidiana em \mathbb{R}^n . A imersão f é dita própria se a imagem inversa sob f de qualquer subconjunto compacto de \mathbb{R}^n é compacto. Segundo Carter e West [2] imersão é dita taut, se f é própria e toda função de Morse L_p , $p \in \mathbb{R}^n$, tem um número mínimo de pontos críticos requerido pelas desigualdades de Morse [10].

A definição precisa de imersão taut será dada no Capítulo 1, onde vamos incluir também a noção de ponto focal. Tais pontos serão caracterizados em termos dos pontos críticos das funções L_p .

As cíclides de Dupin serão definidas no Capítulo 2 como superfícies que são o envelope de duas famílias a 1-parâmetro de esferas (incluindo os planos como esferas degeneradas). Tais superfícies serão localmente e globalmente caracterizadas em termos das curvaturas principais, de suas linhas de curvatura e também por suas superfícies focais. O resultado principal será provado no capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos definir os conceitos de pontos focais, grupos de homologia e obter alguns resultados sobre os mesmos, para entendermos o que venha a ser uma imersão taut.

Primeiro vamos definir o que é ponto crítico, ponto crítico não degenerado e uma aplicação de Morse.

Definição 1.1 . Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e considere $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Um ponto $q \in M$ é dito *ponto crítico* de f se a aplicação induzida $df_q : T_qM \rightarrow T_{f(q)}\mathbb{R}$ é zero.

Escolhendo um sistema de coordenadas locais (u_1, u_2, \dots, u_m) numa vizinhança U de q , isto significa que $\frac{\partial f}{\partial u_1}(q) = \frac{\partial f}{\partial u_2}(q) = \dots = \frac{\partial f}{\partial u_m}(q) = 0$. O número real $f(q)$ é chamado *valor crítico de f* .

Seja $M^a = \{x \in M; f(x) \leq a\}$. Se a não é valor crítico de f então, pelo Teorema da função implícita, M^a é uma variedade com fronteira. A fronteira $f^{-1}(a)$ é uma subvariedade de M .

Definição 1.2 . Um ponto $q \in M$ é dito *ponto crítico não degenerado* se a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q)\right)$ é não singular.

O fato de q ser não degenerado, não depende do sistema de coordenadas.

Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, nós definimos o funcional bilinear simétrico $Hess f$ em T_qM , chamado Hessiana de f em q . No sistema de coordenadas locais

$Hessf(q)$ é representada pela matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(q)\right)$ com respeito a base $\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_q\right\}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Definição 1.3 .O *índice de um funcional bilinear* H num espaço V é definido como sendo a dimensão máxima de um subespaço de V onde H é negativa definida. A *nulidade de H* é a dimensão do subespaço de V formado pelos elementos $v \in V$ tal que $H(v, w) = 0$, para qualquer $w \in V$. Tal subespaço é chamado *espaço nulo de H* .

Assim o ponto crítico é não degenerado se, e somente se, $Hessf(q)$ em T_qM tem nulidade igual a zero. Nos referimos ao índice de $Hessf(q)$ em T_qM apenas como o índice de f em q .

Definição 1.4 . Seja $f : U \subset M_1^n \longrightarrow M_2^m$, $n \geq m$, uma aplicação diferenciável de um aberto U do M_1^n . Um ponto $q \in U$ é um *ponto crítico de f* se a diferencial $df_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{f(p)}M_2$ não é sobrejetora.

A Definição 1.1 é um caso particular da definição acima, se $m = 1$, df_p ser não sobrejetora equivale a dizer que df_p é nula.

Definição 1.5 . Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é dita *aplicação de Morse* se seus pontos críticos são todos não degenerados.

1.1 Pontos focais

Seja M uma variedade de dimensão $m < n$, diferenciável, imersa em \mathbb{R}^n . Seja $NM \subset M \times \mathbb{R}^n$ o *fibrado normal* definido por

$$NM = \{(q, v); q \in M, v \in \mathbb{R}^n, v \perp T_qM\}. \quad (1.1)$$

NM é uma variedade de dimensão n diferenciável contida em $M \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Seja $E : NM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação dada por

$$E(q, v) = q + v. \quad (1.2)$$

Definição 1.6 . Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é dito *ponto focal de M em q* com multiplicidade μ quando $p = q + v$, onde $(q, v) \in NM$ e o Jacobiano de E tem nulidade $\mu > 0$ em (q, v) . O ponto p é chamado *ponto focal de M* se p é ponto focal de M em q para algum $q \in M$.

Vamos usar o seguinte teorema de Sard, cuja demonstração pode ser vista em [[6], p. 10].

Teorema 1.7 (Teorema de Sard). *Se M_1 e M_2 são variedades diferenciáveis tendo uma base enumerável, de mesma dimensão, e $f : M_1 \rightarrow M_2$ é C^1 , então a imagem do conjunto de pontos críticos tem medida nula em M_2 .*

Corolário 1.8 . *Se M é uma variedade diferenciável de dimensão m imersa em \mathbb{R}^n , $m < n$, então para quase todo $p \in \mathbb{R}^n$, o ponto p não é ponto focal de M .*

Demonstração. Seja NM o fibrado normal definido por (1.1). O ponto p é ponto focal de M se, e somente se, p está na imagem inversa do conjunto de pontos críticos de $E : NM \rightarrow \mathbb{R}^n$. De fato, p é ponto focal com multiplicidade μ se, e somente se, $p = q + v$, $(q, v) \in NM$ e o Jacobiano de E em (q, v) é singular, o que é equivalente a dizer que (q, v) é ponto crítico de E .

Logo, pelo Teorema de Sard, temos que o conjunto de pontos focais tem medida nula. ■

Para entendermos melhor o conceito de ponto focal, é conveniente introduzir a segunda forma fundamental de uma variedade contida no espaço Euclidiano. Para isto vamos utilizar um sistema de coordenadas locais.

Sejam u_1, u_2, \dots, u_m as coordenadas para uma região de uma variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão m . Então a aplicação inclusão de M em \mathbb{R}^n determina n funções diferenciáveis

$$f_1(u_1, \dots, u_m), \dots, f_n(u_1, \dots, u_m)$$

Para simplificar denotaremos estas funções por $f(u_1, \dots, u_m)$ onde $f = (f_1, \dots, f_n)$. A primeira forma fundamental associada a este sistema de coordenadas é definido

pela matriz simétrica de funções tomando valores reais,

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno euclidiano em \mathbb{R}^n .

A segunda forma fundamental é definida da seguinte forma, o vetor $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}$ em um ponto de M pode ser expresso como uma soma de vetores tangentes a M e um vetor normal a M . Definimos (l_{ij}) como sendo a componente normal de $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}$. Dado algum vetor unitário v normal a M em $q \in M$ a matriz

$$\left\langle v, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle = \langle v, l_{ij} \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

pode ser chamada de segunda forma fundamental de M em q na direção v .

Para simplificar, vamos supor que as coordenadas foram escolhidas de modo que g_{ij} , avaliada em M em q é a matriz identidade. Então os autovalores da matriz $\langle v, l_{ij} \rangle$ são chamados de *curvaturas principais* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de M em q na *direção normal* v . O inverso λ_i^{-1} de uma curvatura principal é chamado de *raio de curvatura principal*. No caso em que a matriz $\langle v, l_{ij} \rangle$ é singular, existe λ_i nulo. Neste caso seu correspondente raio não estará definido.

Agora considere a reta normal l consistindo de todo $q + tv$, onde v é um vetor unitário fixo ortogonal a M em q .

Lema 1.9 . *Os pontos focais de M em q ao longo da reta normal l são precisamente os pontos $q + \frac{1}{\lambda_i}v$, onde $1 \leq i \leq m$, $\lambda_i \neq 0$. Assim existem no máximo m pontos focais de M em q ao longo da reta normal l , cada ponto contado com sua multiplicidade.*

Demonstração. Escolha $n - m$ campos de vetores ortonormais

$$w_1(u_1, \dots, u_m), \dots, w_{n-m}(u_1, \dots, u_m),$$

definidos em uma vizinhança de q na variedade M tal que w_1, \dots, w_{n-m} sejam ortogonais a M . Seja $(u_1, \dots, u_m, t_1, \dots, t_{n-m})$ coordenadas correspondentes ao ponto

$$\left(f(u_1, \dots, u_m), \sum_{\alpha=1}^{n-m} t_\alpha w_\alpha(u_1, \dots, u_m) \right) \in NM.$$

Então a função $E : NM \rightarrow \mathbb{R}^n$ faz a seguinte correspondência

$$E(u_1, \dots, u_m, t_1, \dots, t_{n-m}) = f(u_1, \dots, u_m) + \sum_{\alpha=1}^{n-m} t_\alpha w_\alpha(u_1, \dots, u_m),$$

cujas derivadas parciais são

$$\frac{\partial E}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{\alpha=1}^{n-m} t_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t_\beta} = w_\beta, \quad m+1 \leq \beta \leq n.$$

Considerando o produto interno destes n vetores com os vetores linearmente independentes $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_m}, w_{m+1}, \dots, w_n$, obtemos uma matriz $n \times n$ cujo posto é igual ao posto do Jacobiano de E em cada ponto correspondente. Esta matriz tem a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle + \sum_{\alpha} t_\alpha \left\langle \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle & \sum_{\alpha} t_\alpha \left\langle \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i}, w_\beta \right\rangle \\ 0 & Id \end{bmatrix}$$

Assim o posto é igual ao posto do bloco superior à esquerda. Usando a identidade

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \left\langle w_\alpha, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial w_\alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle + \left\langle w_\alpha, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle,$$

temos que o tal bloco é justamente a matriz

$$g_{ij} - \sum_{\alpha} t_\alpha \langle w_\alpha, l_{ij} \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq m$$

Assim, $q + tv$ é ponto focal de M em q com multiplicidade μ se, e somente se, a matriz

$$g_{ij} - t \langle v, l_{ij} \rangle \tag{1.3}$$

é singular, com nulidade μ . De fato, $q + tv$ é ponto focal de M em q se, e somente se, x está na imagem do conjunto de pontos críticos de E , isto é, $p = q + tv$ onde (q, tv) é ponto crítico de E , ou seja, o jacobiano de E é singular, isto é, a nulidade $\mu > 0$.

Agora suponha que g_{ij} é a matriz identidade em q . Então (1.3) é singular se, e somente se, $\frac{1}{t}$ é auto valor da matriz $\langle v, l_{ij} \rangle$. Além disso a multiplicidade μ é igual a multiplicidade de $\frac{1}{t}$ como autovalor. ■

Agora, fixado $p \in \mathbb{R}^n$ e $M^m \subset \mathbb{R}^n$, vamos estudar a função

$$L_p : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde

$$\begin{aligned} L_p(f(u_1, \dots, u_m)) &= \|f(u_1, \dots, u_m) - p\|^2 \\ &= \langle f - p, f - p \rangle. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial L_p}{\partial u_i} = 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, f - p \right\rangle$, temos que L_p tem um ponto crítico em q se, e somente se, $q - p$ é normal a M em q .

A segunda derivada parcial de L_p é dada por

$$\frac{\partial^2 L_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i \partial u_j}, f - p \right\rangle$$

Considerando $p = f + tv$, temos

$$\frac{\partial^2 L_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2 (g_{ij} - t \langle v, l_{ij} \rangle)$$

Lema 1.10 *O ponto $q \in M$ é ponto crítico degenerado de L_p se, e somente se, p é ponto focal de M em q . A nulidade de q como ponto crítico é igual a multiplicidade de p como ponto focal.*

Demonstração. q é ponto crítico degenerado de L_p com nulidade μ se, e somente se, $q - p$ é perpendicular a M e $\frac{\partial^2 L_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2 (g_{ij} - t \langle v, l_{ij} \rangle)$ é singular o que é equivalente a $q + tv$ ser ponto focal de L_p com multiplicidade μ , concluindo a demonstração. ■

Teorema 1.11 *Para quase todo $p \in \mathbb{R}^n$, a função $L_p : M \longrightarrow \mathbb{R}$ não tem pontos críticos degenerados, isto é, L_p é uma função de Morse.*

Demonstração. Pelo Lema 1.10, q é ponto crítico degenerado se, e somente se, p é ponto focal, mas pelo Corolário 1.8, para quase todo p , p não é ponto focal, concluindo assim a demonstração. ■

Lema 1.12 (Teorema do Índice para L_p). *O índice de L_p em um ponto crítico não degenerado $q \in M$ é igual ao número de pontos focais de M em q que estão no segmento de reta que liga q a p , cada ponto focal contado com sua multiplicidade.*

Demonstração. Seja $p = q + tv$, onde v é normal a M em q , um ponto focal de M . O índice da matriz

$$\frac{\partial^2 L_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2(g_{ij} - t \langle v, l_{ij} \rangle)$$

é igual ao número de autovalores negativos. Supondo que g_{ij} é a matriz identidade em q , os autovalores negativos são $1 - t\lambda_i$, tal que, $|\lambda_i| \geq \frac{1}{t}$.

Pelo Lema 1.9, isto é equivalente a dizer que, o índice é igual ao número de pontos focais de M em q , $q + \frac{1}{\lambda_i}v$, que estão no segmento de reta que liga q a p , cada ponto focal contado com sua multiplicidade. ■

Uma consequência importante dos fatos demonstrados acima é a seguinte proposição provada por Carter e West em [2].

Proposição 1.13 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão e $U \subset M$ um subconjunto aberto. Para $p \in \mathbb{R}^n$, suponha que L_p tenha um ponto crítico não degenerado $q \in U$ de índice μ . Então existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^n tal que se $\tilde{p} \in V$ então $L_{\tilde{p}}$ tem um ponto crítico não degenerado em U de índice μ .*

Demonstração. Pelo Lema 1.10 sabemos que q é ponto crítico não degenerado de L_p se, e somente se, p não é ponto focal de M em q .

Consideremos $v = p - f(q)$, temos que $(q, v) \in NM$ não é ponto crítico da função E definida por (1.2). Como o conjunto de pontos críticos de E é fechado, existe uma vizinhança A de (q, v) em NM que não contém pontos críticos. Logo, a diferencial de E em A é não singular, portanto, pelo teorema da função inversa, $E|_A$ é um difeomorfismo.

Seja $V = E(A)$, então se $\tilde{p} \in V$, $\tilde{p} = E(y, \tilde{p} - f(y))$ para um único $y \in U$. Assim, y é o único ponto crítico de $L_{\tilde{p}}$ em U .

Se nós ligarmos $(y, \tilde{p} - f(y))$ a (q, v) por um arco em A , nós podemos ver que como este passa por nenhum ponto crítico, o índice deve ser constante. ■

1.2 Noções de grupos de homologia

Agora vamos definir o que é um grupo de homologia. Para melhor entendimento, vamos dar primeiro uma definição abstrata para depois definirmos o que venha a ser um grupo de homologia em uma variedade. Para maiores detalhes sobre este assunto, veja [10].

Definição 1.14 . Seja G um grupo e X um subgrupo de G . G é dito um *grupo livre* com base X se, para todo grupo \bar{G} e toda aplicação $g : G \rightarrow \bar{G}$, existe um único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \bar{G}$, tal que $\varphi(x) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Seja K uma coleção de elementos σ^q distintos, chamados q -células, $q \in \mathbb{Z}$, onde $q > 0$, é chamado *dimensão das células*. As células de dimensão q são como geradores sobre um corpo arbitrário F de um espaço vetorial denotado por $C_q(K, F)$. Esses geradores são supostos livres em que cada subconjunto finito de células σ^q de mesma dimensão é suposto livre. Para nós o corpo F será fixo, a menos que haja a necessidade de uma escolha do corpo F . Nós denotamos $C_q(K, F)$ por $C_q(K)$. Elementos em $C_q(K)$ são chamados q -cadeias de K . Para $q < 0$, $C_q(K)$ é o elemento nulo.

Para cada inteiro $q \geq 0$ é dado um homomorfismo linear

$$\partial : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K) \tag{1.4}$$

denotado mais explicitamente por ∂_q . Requer-se que

$$\partial_{q-1}(\partial_q(x)) = 0. \tag{1.5}$$

A relação (1.5) se escreve na forma $\partial(\partial(x)) = 0$ e a coleção de condições (1.5) é denotada como a condição $\partial\partial = 0$.

Se σ é uma 0-célula, $\partial\sigma$ é o elemento nulo em $C_{-1}(K)$.

O núcleo de $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ é chamado o *grupo de q -ciclos* e é denotado por $Z_q(K)$. A imagem de $\partial_{q+1} : C_{q+1}(K) \rightarrow C_q(K)$ é chamado o *grupo de q -fronteiras* e é denotado por $B_q(K)$. Pela condição (1.5) cada fronteira de uma $(q+1)$ -cadeia é automaticamente um q -ciclo, isto é, $B_q(K) \subset Z_q(K)$.

Definição 1.15 O grupo quociente $H_q(K) = \frac{Z_q(K)}{B_q(K)}$ é um espaço vetorial sobre K e é chamado de q -grupo de homologia de K . Para $q < 0$, $H_q(K)$ é trivial.

Definição 1.16 Se o grupo de homologia $H_q(K)$ tem dimensão finita, esta dimensão é chamada de q -número de Betti $b_q(K)$ de K . Se a dimensão de $H_q(K)$ não é finita, diz-se que $b_q(K) = \infty$.

A definição acima é uma definição abstrata. Vamos, a seguir, construir o grupo de homologia sobre um espaço de Hausdorff.

Definição 1.17 Sejam

$$x^0, x^1, \dots, x^q, q \geq 0 \quad (1.6)$$

$q + 1$ pontos em \mathbb{R}^n com $q \leq n$. Se estes pontos não estão em um $(q - 1)$ -plano, o conjunto dos $x \in \mathbb{R}^n$ com representação vetorial

$$x = \mu_0 x^0 + \mu_1 x^1 + \dots + \mu_q x^q, \quad (1.7)$$

onde os parâmetros μ_0, \dots, μ_q são sujeitos às condições

$$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_q = 1, \quad 0 \leq \mu_i \leq 1, \quad (1.8)$$

é chamado de *simplexo geométrico* a^q com vértices (1.6).

O simplexo a^q independe da ordem em que seus "vértices" (1.6) são dados, e deve ser distinguido de um simplexo ordenado que será definido adiante.

Qualquer subconjunto de $r + 1$ vértices distintos de a^q , $0 \leq r \leq q$, determina um r -simplexo geométrico, chamado de r -face de a^q . Se v é um inteiro qualquer com $0 \leq v \leq q$ e se

$$x^0, \dots, \hat{x}^v, \dots, x^q \quad (1.9)$$

denota o subconjunto de vértices (1.6) com x^v excluído, o simplexo geométrico com vértices (1.9) é chamado de $(q - 1)$ -face de a^q oposta ao vértice x^v .

Definição 1.18 Seja a^q , $q \geq 0$, um simplexo geométrico, com vértices p_i . Se os vértices foram ordenados da forma $p_0 < p_1 < \dots < p_q$, então a^q é chamado um q -simplexo ordenado e denotado por $s = p_0 p_1 \dots p_q$.

Nós denominamos a^q como portador de s e escrevemos $|s| = a^q$. Quando $q = 0$ temos $s = |s| = p_0$. Quando $q > 0$, o simplexo ordenado

$$s(i) = p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_q, \quad 0 \leq i \leq q \quad (1.10)$$

obtido retirando o vértice p_i de s é chamado de i -face de s . O símbolo $s(i)$ é usado apenas para representar a i -face de s .

Definição 1.19 Seja s um simplexo ordenado com vértices

$$p_0 < p_1 < \dots < p_q, \quad 0 \leq q \leq n \quad (1.11)$$

em \mathbb{R}^n com sua ordem dada em s . Dizemos que o ponto $x \in |s| = a^q$ da forma (1.7) com parâmetros μ condicionados a (1.8) tem *coordenadas baricêntricas* μ relativas a s .

Definição 1.20 Seja χ um espaço de Hausdorff. Um q -simplexo singular, com $q \geq 0$, em χ é uma aplicação contínua $\tau : s \rightarrow \chi$ de um q -simplexo ordenado s em χ . Dois q -simplexos singulares, $q \geq 0$,

$$\tau' : s' \rightarrow \chi \quad \tau'' : s'' \rightarrow \chi \quad (1.12)$$

são ditos *equivalentes*, e escrevemos $\tau' \equiv \tau''$, se

$$\tau'(x') = \tau''(x'') \quad (1.13)$$

sempre que x' e x'' são pontos de s' e s'' respectivamente, com as mesmas coordenadas baricêntricas relativas à s' e s'' .

A relação $\tau' \equiv \tau''$ é reflexiva, simétrica e transitiva na classe de q -simplexos singulares. Consequentemente, a classe de simplexos singulares em χ é dividida em classes de equivalências disjuntas.

Definição 1.21 Dado um q -simplexo singular τ , a classe de equivalência que contém τ será denotada por $\dot{\tau}$ e denominada *q -célula singular*.

Dado um q -simplexo singular $\tau : s \longrightarrow \chi$ nós denominaremos o subconjunto $\tau(|s|)$ de χ , por portador $|\tau|$ de τ . Note que q -simplexos equivalentes de uma q -célula $\dot{\tau}$ tem mesmos portadores, nós denotaremos este conjunto comum por $|\dot{\tau}|$ ou $|\tau|$.

O *complexo das q -células singulares com portadores em χ* será denotado por $S(\chi)$.

Para $q \geq 0$, o espaço vetorial sobre F gerado pelas q -células singulares de $S(\chi)$ será denotado por $C_q(S(\chi))$. Para um inteiro negativo q , $C_q(S(\chi))$ será o elemento nulo.

Definição 1.22 Dado um q -simplexo singular $\tau : s \longrightarrow \chi$, $q > 0$, nós introduzimos o $(q - 1)$ -simplexo

$$\tau_i = \tau|_{s(i)}, \quad i = 0, \dots, q \quad (1.14)$$

A *fronteira algébrica* q -célula singular $\dot{\tau}$ é a $(q - 1)$ -cadeia

$$\partial\dot{\tau} = (-1)^i \dot{\tau}_i, \quad \text{em } C_{q-1}(S(\chi)) \quad (1.15)$$

Quando $q = 0$, $\partial\dot{\tau}$ deve ser a cadeia nula em $C_{-1}(S(\chi))$.

Assim se $\tau' \equiv \tau''$ então para cada $0 \leq i \leq q$ temos

$$\tau'_i(x') = \tau''_i(x'') \quad (1.16)$$

onde x' e x'' são pontos de $s'(i)$ e $s''(i)$ com as mesmas coordenadas baricêntricas relativas a s' e s'' e consequentemente relativas a $s'(i)$ e $s''(i)$ tal que $\partial\dot{\tau}$, definido por (1.15), é independente da escolha de τ nesta classe de equivalência.

A definição do operador

$$\partial : C_q(S(\chi)) \longrightarrow C_{q-1}(S(\chi)), \quad q \geq 0 \quad (1.17)$$

é dada pela extensão linear de ∂ definido na q -célula singular $\dot{\tau}$ de $S(\chi)$.

Nós devemos verificar o teorema clássico:

Teorema 1.23 *O operador fronteira que atua nas cadeias de $S(\chi)$ é tal que $\partial\partial = 0$.*

Demonstração. O teorema é trivial quando $q = 0$ ou $q = 1$.

Suponha $q > 1$ e, por hipótese de indução, $\partial\partial = 0$ nas $(q-1)$ -cadeias. Se a q -célula $\dot{\tau}$ é denotada por τ , de (1.15) temos

$$\partial\dot{\tau} = (-1)^i \{\tau|p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_q\}, \quad q > 1$$

Desta forma

$$\partial\dot{\tau}_i = \sum_{k < i} (-1)^k \{\tau_i|p_0 \dots \hat{p}_k \dots \hat{p}_i \dots p_q\} + \sum_{k > i} (-1)^{k-1} \{\tau_i|p_0 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_k \dots p_q\}. \quad (1.18)$$

Por virtude de (1.15) e pela definição de ∂

$$\partial(\partial\dot{\tau}) = (-1)^i \partial\dot{\tau}_i, \quad \dim \dot{\tau} > 1. \quad (1.19)$$

Se substituirmos um $\partial\dot{\tau}_i$ do lado direito de (1.19) pela cadeia dada por (1.18), usando a hipótese de indução, o teorema segue. ■

Seja ϕ uma função de Morse em uma variedade M tal que o conjunto

$$M_r(\phi) = \{x \in M / \phi(x) \leq r\}$$

seja compacto para todo $r \in \mathbb{R}$. Então o grupo de homologia $H_q(S(M_r(\phi)))$ sobre o corpo F é o espaço vetorial $Z_q(S(M_r(\phi))) / B_q(S(M_r(\phi)))$ sobre o corpo F .

O q -número de Betti $b_q(\phi, r, F)$ de $S(M_r(\phi))$ é a dimensão de $H_q(S(M_r(\phi)), F)$.

Denotaremos $H_q(S(M_r(\phi)), F)$ por $H_q(M_r(\phi))$ e nos referiremos a $b_q(\phi, r, F)$ como o q -número de Betti de $M_r(\phi)$.

Vamos enunciar um teorema, conhecido como Desigualdade de Morse, e seu corolário, mas omitiremos a demonstração que pode ser encontrada em [[10], p.270].

Teorema 1.24 (*Desigualdades de Morse*) *Sejam M uma variedade de dimensão n e ϕ uma função de Morse em $C^\infty(M)$. Suponha que para um valor regular r de ϕ o subconjunto*

$$M_r(\phi) = \{x \in M / \phi(x) \leq r\}$$

seja compacto. Então

i) O q -número de Betti b_q do complexo singular $S(M_r(\phi))$ é finito e $b_q = 0$ para $q > n$.

ii) $\sum_{q=0}^n (-1)^q b_q = \sum_{q=0}^n (-1)^q m_q$, onde m_q é o número de pontos críticos de $\phi|_{M_r(\phi)}$ de índice q .

iii) $m_q \geq b_q$, $q = 0, 1, \dots, n$.

Corolário 1.25 *O q -número de Betti b_q , $q \geq n$, de uma variedade não compacta M de dimensão n é zero.*

1.3 Imersões taut

Nesta seção vamos definir as imersões taut e enunciar alguns resultados que serão utilizados nos próximos capítulos. Usaremos a seguinte notação:

Seja ϕ é uma função de Morse em uma variedade M de dimensão n tal que o conjunto $M_r(\phi)$ seja compacto para todo $r \in \mathbb{R}$. Para cada $r \in \mathbb{R}$, seja $m_q(\phi, r)$ - o número de pontos críticos de índice q em $M_r(\phi)$.

E para um corpo arbitrário F seja

$b_q(\phi, r, F) = \dim_F(H_q(M_r(\phi); F))$ - o q -número de Betti de $M_r(\phi)$

$\beta_q(\phi, r) = \sup_F \{b_q(\phi, r, F)\}$.

Assim, as desigualdades de Morse são

$$m_q(\phi, r) \geq \beta_q(\phi, r)$$

onde $r \in \mathbb{R}$ e $q = 0, \dots, n$.

Definição 1.26 Seja f uma imersão suave de M em \mathbb{R}^n , f é dita uma *imersão própria* se a imagem inversa sob f de qualquer subconjunto compacto de \mathbb{R}^n é compacto.

Vamos dar a seguinte definição segundo Carter e West, que é válida para variedades compactas e não compactas.

Definição 1.27 Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão de uma variedade diferenciável, f é dita *taut* se, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, a função $L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L_p(x) = \|f(x) - p\|^2$ é degenerada ou satisfaz as seguintes condições:

- i) L_p é não-degenerada;
- ii) $M_r(L_p)$ é compacto para todo $r \in \mathbb{R}$, onde $M_r(L_p) = \{x \in M; L_p(x) \leq r\}$;
- iii) Existe um corpo F tal que para todo $r \in \mathbb{R}$ e inteiro q , o número de pontos críticos de L_p com índice q que está em $M_r(L_p)$, é igual a $\dim_F(H_q(M_r(L_p); F))$, isto é, $m_q(L_p, r) = b_q(L_p, r, F)$.

Se f é própria, então $M_r(L_p)$ é compacto para todo $p \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$. De fato,

$$M_r(L_p) = f^{-1}(D_p(r)),$$

onde $D_p(r) = \{y \in \mathbb{R}^n / \|y - p\|^2 \leq r\}$.

Observação 1.28 A definição (1.27) implica que se a imersão for *taut*, ela deve ser *própria*.

De fato, pela Proposição 1.11, para quase todo $p \in \mathbb{R}^n$, L_p é não degenerada. Seja $T \subset \mathbb{R}^n$ compacto, então, existem $p \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}$ tal que $T \subset D_p(r)$. Logo $f^{-1}(T) \subset f^{-1}(D_p(r))$. Como $f^{-1}(D_p(r))$ é compacto, pois estamos supondo que f é própria, e $f^{-1}(T)$ é fechado, pois f é contínua, então $f^{-1}(T)$.

Se $\dim M \geq 2$, Kuiper [[9], p. 152], provou que, pode não existir um corpo F tal que

$$\beta_q(L_p, r) = b_q(L_p, r, F) \tag{1.20}$$

para toda função L_p , todo $r \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Z}$.

Já no caso em que $\dim M = 2$, a equação (1.20) é sempre satisfeita para o corpo $F = \mathbb{Z}_2$. Neste caso, podemos reformular a definição de imersão taut para superfícies, da seguinte forma

Definição 1.29 Seja M uma superfície de dimensão 2. Uma imersão $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dita *taut*, se f é própria e

$$m_q(L_p, r) = \beta_q(L_p, r), \quad q = 0, 1, 2$$

para toda função de Morse L_p e todo $r \in \mathbb{R}$.

Seja ϕ uma função de Morse em M tal que $M_r(\phi)$ é compacta para todo $r \in \mathbb{R}$. Kuiper [[9], p. 153] mostrou que

$$m_q(\phi, r) = b_q(\phi, r, \mathbb{Z}_2), \quad q = 0, 1, 2$$

para todo $r \in \mathbb{R}$ se, e somente se, a aplicação

$$H_q(M_r(\phi), \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_q(M, \mathbb{Z}_2), \quad q = 0, 1, 2$$

induzida pela inclusão $M_r(\phi) \subset M$, é injetiva para todo $r \in \mathbb{R}$.

Aplicando este resultado para imersões taut temos a seguinte proposição

Proposição 1.30 *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão própria. Então f é taut se, e somente se, para toda função de Morse L_p e todo $r \in \mathbb{R}$, a aplicação*

$$H_q(M_r(L_p), \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_q(M, \mathbb{Z}_2), \quad q = 0, 1, 2$$

induzida pela inclusão $M_r(L_p) \subset M$ é injetora.

Vamos finalizar esta seção com o seguinte resultado obtido por Carter e West [[2], p. 708].

Proposição 1.31 *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão taut, e seja $p \in \mathbb{R}^n$ tal que L_p tenha um ponto crítico em $x \in M$. Suponha que não existe pontos focais de M em x no segmento de reta aberto ligando $f(x)$ a p . Então $L_p(x) \leq L_p(y)$ para todo $y \in M$.*

Capítulo 2

Alguns resultados importantes

Neste capítulo, vamos definir os conceitos de cíclides de Dupin. Além disso, vamos obter alguns resultados importantes para a demonstração do teorema principal.

2.1 Cíclides de Dupin

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão diferenciável de uma superfície M diferenciável e N o vetor unitário normal a $f(M)$ em $f(x)$. Conforme vimos na Seção 1.1, um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ é chamado ponto focal de multiplicidade μ se $p = f(x) + \frac{1}{\lambda}N$, onde λ é uma curvatura principal de M em x com multiplicidade μ . A coleção de todos os pontos focais de M em x para todo $x \in M$ é chamada *superfície focal* de M . Em geral, a superfície focal consiste de duas superfícies (ou folhas) correspondentes às duas curvaturas principais de M , λ^1 e λ^2 .

Nós dizemos que a *folha da superfície focal* correspondente à curvatura principal λ^i é *degenerada* em $x \in M$ se $\lambda^i(x) = 0$ ou $\lambda^i(x) \neq 0$ e a folha correspondente a λ^i não é uma superfície regular no ponto $p = f(x) + \frac{1}{\lambda^i}N$.

Proposição 2.1 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão diferenciável de uma superfície M diferenciável. As seguintes condições são equivalentes sobre qualquer subconjunto U aberto e conexo de M que não contém pontos umbílicos:*

- a) *As curvaturas principais são constantes ao longo de suas correspondentes linhas de curvatura;*
- b) *Todas as linhas de curvatura são parte de um círculo ou de uma reta;*
- c) *Ambas as folhas da superfície focal são degeneradas em cada ponto de U .*

Demonstração. Vamos provar estas equivalências da seguinte forma:

$$(b) \iff (a) \iff (c)$$

Dado um subconjunto aberto e conexo U de M sem pontos umbílicos e um ponto arbitrário q de U , existe uma parametrização $X : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ de uma vizinhança \tilde{U} de q tal que as curvas coordenadas são linhas de curvatura.

Parametrizações das superfícies focais em termos de X , são dadas por:

$$Y(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{\lambda^1(u, v)} N(u, v)$$

e

$$Z(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{\lambda^2(u, v)} N(u, v),$$

onde λ^1 e λ^2 são as curvaturas principais e $N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$ é o vetor normal a M no ponto $X(u, v)$.

Mostraremos agora $(a) \implies (b)$, de fato:

Como $X(u, v)$ é uma parametrização por linhas de curvatura temos que

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Considerando o produto interno destas relações com X_u e X_v obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2g_{11}} g_{11,u}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2g_{22}} g_{11,v}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2g_{11}} g_{11,v}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2g_{22}} g_{22,u}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2g_{11}} g_{22,u}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2g_{22}} g_{22,v}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sejam $\alpha(u) = X(u, v_0)$ e $\beta(v) = X(u_0, v)$ linhas de curvatura, então

$$N_u = -\lambda^1 X_u$$

$$N_v = -\lambda^2 X_v$$

Seja $\tilde{\alpha}(s(u))$ uma reparametrização de $\alpha(u)$ pelo comprimento de arco definido por $s = \int_{u_0}^u \sqrt{g_{11}} du$

Assim, a curvatura $k(s)$ de $\tilde{\alpha}(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} k^2 &= |\tilde{\alpha}_{ss}|^2 \\ &= [(\tilde{\alpha}_{ss})^2]^T + [(\tilde{\alpha}_{ss})^2]^N \\ &= k_g^2 + k_n^2, \end{aligned}$$

onde k_g e k_n são a curvatura geodésica e a curvatura normal, respectivamente. Ao longo de α temos

$$k^2 = k_g^2 + (\lambda^1)^2. \quad (2.3)$$

Mostraremos que k é constante, e depois que α está em um plano ou uma esfera. Como por hipótese λ^1 é constante ao longo de α , isto é, $\lambda^1(u, v_0) = \lambda^1(v_0)$ por (2.3) basta mostrarmos que k_g é constante. Derivando α temos

$$\alpha_u = \tilde{\alpha}_s s_u.$$

Isto implica que

$$\tilde{\alpha}_s(s(u)) = \frac{X_u}{\sqrt{g_{11}}}(u, v_0).$$

Derivando α_u

$$\alpha_{uu} = \tilde{\alpha}_{ss}(s_u)^2 + \tilde{\alpha}_s s_{uu}$$

e utilizando as expressões de X_{uu} , Γ_{11}^1 e Γ_{12}^1 dadas em (2.1) e (2.2) respectivamente, temos

$$\tilde{\alpha}_{ss} = -\frac{\Gamma_{12}^1}{g_{22}} X_v + \lambda^1 N.$$

Então

$$k^2 = \frac{(\Gamma_{12}^1)^2}{(g_{22})^2} g_{22} + (\lambda^1)^2.$$

Portanto de (2.3) temos

$$k_g^2 = \frac{(\Gamma_{12}^1)^2}{g_{22}}. \quad (2.4)$$

Derivando (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} 2k_g k_{g,u} &= \frac{2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12,u}^1}{g_{22}} - \frac{2(\Gamma_{12}^1)^2 \Gamma_{12}^2}{g_{22}^2} \\ &= \frac{2\Gamma_{12}^1}{g_{22}} (\Gamma_{12,u}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2). \end{aligned}$$

Mostraremos agora que $\Gamma_{12,u}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 = 0$.

Como as equações de Codazzi para parametrizações por linha de curvatura são

$$\lambda_{,v}^1 = (\lambda^2 - \lambda^1) \Gamma_{12}^1, \quad (2.5)$$

$$\lambda_{,u}^2 = (\lambda^1 - \lambda^2) \Gamma_{12}^2,$$

temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{,vu}^1 \\ &= (\lambda_{,u}^2 - \lambda_{,u}^1) \Gamma_{12}^1 + (\lambda^2 - \lambda^1) \Gamma_{12,u}^1 \\ &= (\lambda^1 - \lambda^2) \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + (\lambda^2 - \lambda^1) \Gamma_{12,u}^1 \\ &= (\lambda^2 - \lambda^1) (\Gamma_{12,u}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2). \end{aligned}$$

Como $\tilde{U} \subset U$ não contém pontos umbílicos temos

$$\Gamma_{12,u}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 = 0.$$

Logo k_g é constante. Portanto segue de (2.3), que k é constante.

Agora vamos mostrar que, de fato, α é parte de um círculo ou uma reta.

Se $\lambda^1 = 0$ em α , $N_u = 0$ assim $N(u, v_0) = cte$. Portanto α é plana. Desta forma α está em um círculo ou uma reta, já que k é constante.

Se $\lambda^1 = cte \neq 0$ ao longo de α , segue de (2.3) que $k \neq 0$ e λ^1 depende apenas de v . Assim

$$Y(u, v_0) = X(u, v_0) + \frac{1}{\lambda^1(v_0)} N(u, v_0).$$

Portanto $Y_u(u, v_0) = X_u(u, v_0) - X_u(u, v_0) = 0$. Logo $Y(u, v_0)$ não depende de u e se degenera em um ponto p . Obtendo com isso $|X(u, v_0) - p| = \left| \frac{1}{\lambda^1(v_0)} \right|$. Assim, α pertence a esfera de centro p e raio $\frac{1}{\sqrt{|\lambda^1(v_0)|}}$. Sabemos também que o vetor normal n e o vetor binormal b de $\tilde{\alpha}(s) = X(u(s), v_0)$ são dados por

$$n = \frac{\tilde{\alpha}_{ss}}{k}$$

$$b = \frac{\tilde{\alpha} - p}{\frac{1}{\sqrt{|\lambda^1(v_0)|}}}$$

Então, a torção de $\tilde{\alpha}$ é dada por

$$\tau = \langle b_s, n \rangle = 0$$

Logo α é plana e como está em uma esfera, é parte de um círculo.

Analogamente, $\beta = X(u_0, v)$ pertence a um círculo ou uma reta.

Assim, mostramos que em uma vizinhança de cada ponto de U , as linhas de curvatura estão sobre um círculo ou uma reta. Vamos usar o argumento a seguir para mostrarmos que, de fato, a equivalência $(a) \implies (b)$ vale em todo o aberto U .

Considere γ uma linha de curvatura em U e λ a curvatura principal correspondente. Por hipótese, λ é constante ao longo de γ .

Sejam $q_i \in \gamma$, $i = 1, 2$ e \tilde{U}_i vizinhanças de q_i , tal que, existem parametrizações por linha de curvatura de tais vizinhanças e $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset$. Seja $\gamma_i = \gamma|_{\tilde{U}_i}$, $i = 1, 2$. Desta forma, γ_i é parte de um círculo ou uma reta. Mas, $\gamma_1 = \gamma_2$ em $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$. Logo, $\gamma_1 \cup \gamma_2$ é parte de um círculo ou uma reta, descartando assim, a possibilidade de, por exemplo, γ_1 ser parte de um círculo e γ_2 parte de uma reta ou de outro círculo.

Usando este argumento ao longo de γ e usando o fato que U é conexo, temos que γ é parte de um círculo ou de uma reta.

$$(b) \implies (a)$$

Suponhamos que todas as linhas de curvatura são parte de um círculo ou uma reta. Seja α uma linha de curvatura em S passando por $p \in S$. Sabemos que a curvatura principal λ correspondente a α é

$$\lambda = k \cos \theta,$$

onde k é a curvatura de α e θ é o ângulo entre a normal à superfície em p e a normal à curva em p .

Se α é parte de uma reta então $k = 0$ e $\lambda = 0$ ao longo de α . Se α é parte de um círculo de raio r então

$$\lambda = \frac{1}{r^2} \cos \theta.$$

Como α é linha de curvatura de M e do plano que a contém, temos que θ é constante e portanto λ é constante ao longo de α .

$$(c) \implies (a)$$

Seja $\alpha(u) = X(u, v_0)$ uma linha de curvatura de M e λ^1 a curvatura principal correspondente. Se $\lambda^1(u, v_0) \neq 0$, então a aplicação

$$Y(u, v_0) = X(u, v_0) + \frac{1}{\lambda^1(u, v_0)} N(u, v_0)$$

é regular em (u, v_0) se, e somente se, $\lambda_{,u}^1(u, v_0) = 0$. Assim $Y(u, v_0)$ é degenerada em $X(u, v_0)$ se $\lambda^1(u, v_0) = 0$ ou $\lambda_{,u}^1(u, v_0) = 0$.

Por hipótese Y é degenerada em todo ponto. Logo, se $\lambda^1(u_0, v_0) \neq 0$ então existe um intervalo $J = (u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon)$ tal que $\lambda^1(u, v_0) \neq 0$ para qualquer $u \in J$ e como Y é degenerada em J temos também que $\lambda_{,u}^1(u, v_0) = 0$. Logo λ^1 é constante numa vizinhança de α em (u_0, v_0) .

Como Y é degenerada em todos os pontos de α , λ^1 é constante em cada vizinhança de α e como λ^1 é contínua e U é conexo, esta constante é a mesma ao longo de α e é diferente de zero. Assim, não temos a possibilidade de $\lambda^1(u, v_0) = 0$ para um ponto (u, v_0) isolado em α . E se $\lambda^1 = 0$ num aberto, pelo mesmo argumento, $\lambda^1 = 0$ ao longo de α .

Fazendo o mesmo para a outra folha focal, temos que se as folhas da superfície focal são degeneradas em todo ponto de U então as curvaturas principais são constantes ao longo de suas correspondentes linhas de curvatura.

$$(a) \implies (c)$$

Suponha que as curvaturas principais são constantes ao longo das linhas de curvatura correspondentes. Mostraremos que a folha focal Y correspondente à curvatura principal λ^1 é degenerada em U . Para a folha focal correspondente à λ^2 o argumento é análogo.

Se $\lambda^1 = 0$ em $\alpha(u) = X(u, v_0)$, por definição, a folha focal Y será degenerada em todas os pontos de α . No caso em que $\lambda^1 = c \neq 0$, c constante, ao longo de α , assim $\lambda^1_{,u} = 0$ e Y é degenerada em α .

Como por cada ponto de U passam duas linhas de curvatura e nelas as curvaturas principais correspondentes são constantes, ambas as folhas focais são degeneradas em todo ponto de U . ■

Definição 2.2 . Uma superfície conexa é uma *cíclide de Dupin* quando ela é simultaneamente o envelope de duas famílias a 1-parâmetro de esferas cujos centros estão ao longo de um par de cônicas focais.

Aqui incluímos o caso degenerado de esferas com raio infinito (planos). Por exemplo, o caso do cilindro e do cone onde não existe uma das cônicas e a famílias de esferas correspondentes é inteiramente composta de planos. As outras cíclides são o toro e a inversão destas superfícies na esfera euclideana.

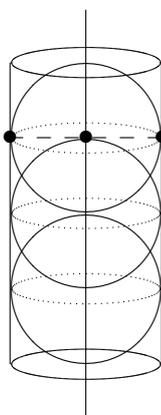


figura 1

No cilindro, ilustrado na figura 1, a cônica existente é uma reta, justamente o eixo de rotação da superfície. Em cada ponto, o cilindro é tangente a uma esfera de centro no eixo de rotação. Neste caso as esferas da família possuem o mesmo raio. A outra família é composta de planos, cada um tangente ao longo de a uma geratriz do cilindro.

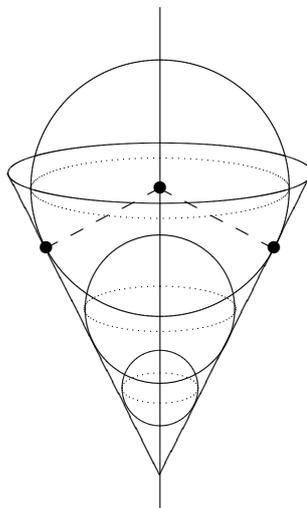


figura 2

O cone é o envelope de duas famílias a 1-parâmetro de esferas (incluindo planos) de forma inteiramente análoga ao do cilindro. Neste caso, a família de esferas correspondente a cônica focal não terá os raios constantes, como se pode ver na figura 2. A outra família é composta dos planos tangentes ao cone.

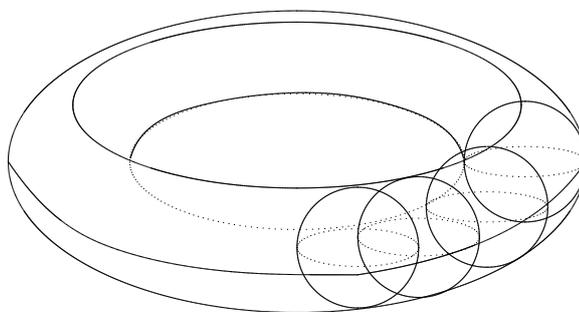


figura 3

Já no toro, temos duas cônicas focais: o círculo cujo traço é o centro dos meridianos e a reta, eixo de rotação do toro. A família de esferas correspondente à primeira cônica é composta por esferas de mesmo raio e tangenciam o toro internamente, como mostrado na figura 3.

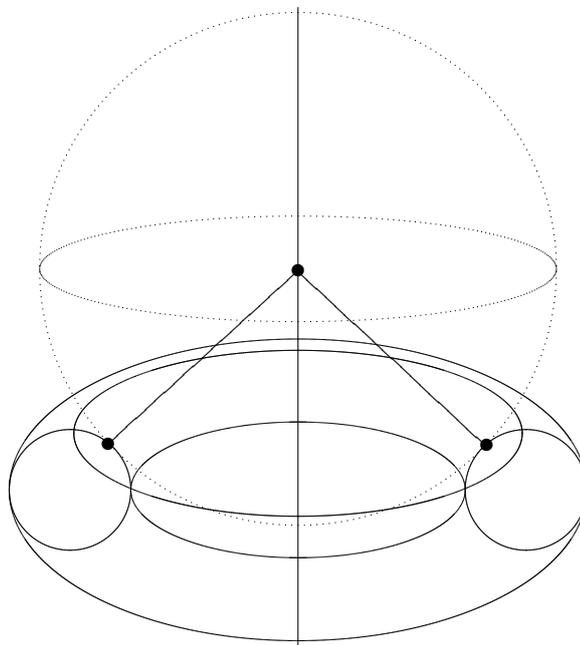


figura 4

A outra família, correspondente à reta, possui esferas de raios não constantes. Dado o ponto, encontramos o centro e o raio da esfera, como mostram as figuras 4 e 5. Esta família possui dois planos que são tangentes ao toro ao longo das curvas de pontos onde a curvatura Gaussiana é zero.

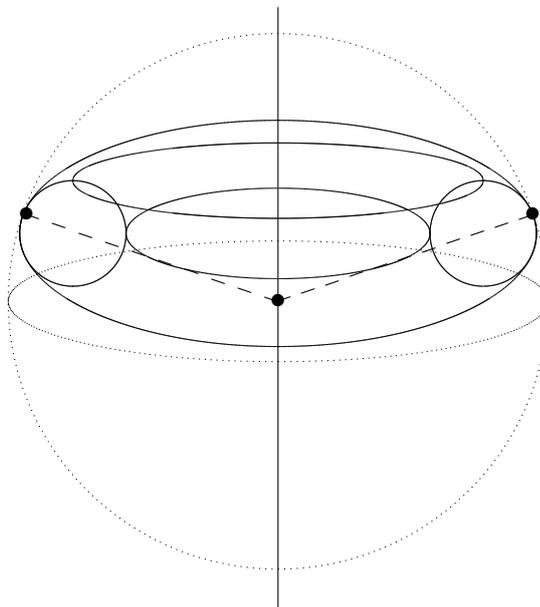


figura 5

Observação 2.3 As cíclides compactas são o toro e a inversão do toro na esfera cujo centro não está no toro.

As cíclides não compactas e completas são o cilindro e a inversão do toro na esfera cujo centro está no toro.

O cone e as inversões do cilindro e do cone não são completas. Elas não contêm um ou dois dos seus pontos limites, respectivamente. A curvatura principal $\lambda^1(x)$, se aproxima do infinito quando x se aproxima de tais pontos limites, isto é, as linhas de curvatura correspondentes a λ^1 são círculos cujos raios estão decrescendo a zero. Nenhuma das cíclides contém pontos umbílicos.

2.2 Teorema local

Nesta seção demonstraremos um resultado local sobre cíclides de Dupin. Mas antes, vamos enunciar uma proposição que usaremos posteriormente, sua demonstração pode ser vista em [13].

Proposição 2.4 . *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície diferenciável, parametrizada por linhas de curvatura tal que as curvaturas principais são constantes ao longo das correspondentes linhas de curvatura. Então vale a seguinte igualdade:*

$$\Gamma_{12,uu}^2 = \Gamma_{12}^2 f_{12} - (\Gamma_{12}^2)^2 h_{12} - (\Gamma_{12}^2)^3 + 3\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12,u}^2,$$

onde

$$f_{12} = -3(\Gamma_{12}^2)^2 + 6\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - 2(\Gamma_{11}^1)^2 - 3\Gamma_{12,u}^2 + \Gamma_{11,u}^1 - \lambda^1 g_{11} - (\Gamma_{12}^1)^2 \frac{g_{11}}{g_{22}}$$

$$h_{12} = 3(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)$$

Teorema 2.5 (Teorema local) *Seja M uma superfície diferenciável imersa em \mathbb{R}^3 . As condições equivalentes (a), (b) e (c) são satisfeitas em um subconjunto aberto e conexo U de M que não contém pontos umbílicos se, e somente se, U é parte de uma cíclide de Dupin.*

Demonstração. Seja U um subconjunto aberto e conexo que não contém pontos umbílicos. Para cada ponto de U , existe uma vizinhança \tilde{U} e uma parametrização em \tilde{U} tal que as curvas coordenadas são linhas de curvatura. Assim, teremos duas famílias de linhas de curvatura $X(u, v_0)$ e $X(u_0, v)$ em \tilde{U} .

Suponha que valham as equivalências (a), (b) e (c), então as linhas de curvatura são parte de um círculo ou de uma reta. Se mostrarmos que cada vizinhança \tilde{U} , em U , é parte de uma cíclide, teremos também que U será parte de uma cíclide.

Suponha que $\alpha(u) = X(u, v_0)$ seja um círculo e seja λ^1 sua curvatura principal correspondente.

Seja $\lambda^1 = k \cos \theta = c \neq 0$, onde k é a curvatura de α , θ é o ângulo entre o vetor normal à curva α e o campo normal a superfície e c é uma constante. As retas normais à superfície ao longo de α formam um ângulo diferente de $\frac{\pi}{2}$ com o plano que contém o círculo, formando um cone circular reto cujo vértice é $Y(u, v_0) = X(u, v_0) + \frac{1}{\lambda^1(v_0)} N(u, v_0)$ (que não depende de u). Além disso o cone corta a superfície em ângulos retos e conseqüentemente, a esfera de raio $\frac{1}{\lambda^1(v_0)}$ de centro $Y(u, v_0)$ é tangente à superfície ao longo de α .

Se $\lambda^1 = 0$ sobre α , e α não é uma reta então como $\lambda^1 = k \cos \theta$, temos que o ângulo entre o vetor normal à curva α e o campo normal à superfície é igual a

$\frac{\pi}{2}$, assim as normais à superfície ao longo de α formam um cilindro. Neste caso, considere o plano que contém α , ele será tangente à superfície ao longo de α .

Agora, suponha que α é parte de uma reta. Então, $\lambda^1 = 0$ com $k = 0$ ao longo de α . Assim, temos que $\lambda^2 \neq 0$, nesses pontos, pois U não contém pontos umbílicos. Logo, por hipótese, as outras linhas de curvatura que passam por cada ponto de α são partes de círculos. Desta forma, existe um único plano tangente à superfície ao longo de α .

Fazendo o mesmo para a outra família de linhas de curvatura, teremos que U é parte do envelope de duas famílias de esferas com centros nas duas folhas da superfície focal que se degeneraram em curvas.

Falta mostrar que estas curvas são cônicas quando $\lambda^i \neq 0$. Sabemos que

$$Y(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{\lambda^1(v)}N(u, v)$$

$$Z(u, v) = X(u, v) + \frac{1}{\lambda^2(u)}N(u, v)$$

Então,

$$Z(u, v) = Y(u, v) + \left(\frac{1}{\lambda^2(u)} - \frac{1}{\lambda^1(v)} \right) N(u, v)$$

Vamos mostrar que $Z(u, v_0)$ é uma cônica.

Como Y não depende de u , temos

$$Z(u, v_0) = Y(v_0) + \left(\frac{1}{\lambda^2(u)} - \frac{1}{\lambda^1(v_0)} \right) N(u, v_0)$$

Logo, $Z(u) = Z(u, v_0)$ está sobre um cone cujo vértice é $Y(v_0)$. Assim, para mostrarmos que $Z(u)$ é uma cônica, falta mostrarmos que $Z(u)$ é plana.

Sabemos que

$$\tau(u) = -\frac{\langle Z_u \wedge Z_{uu}, Z_{uuu} \rangle}{|Z_u \wedge Z_{uu}|^2}$$

Então vamos mostrar que $\tau \equiv 0$, o que é equivalente a mostrar que Z_u , Z_{uu} e Z_{uuu} são linearmente dependentes. Assim vamos mostrar que Z_{uuu} é escrita como combinação linear de Z_u e Z_{uu} . Usaremos os seguintes fatos:

Como $X(u, v)$ é uma parametrização por linha de curvatura, considerando as equações (2.1) e as relações (2.2), temos

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u - \frac{g_{11}}{g_{22}} \Gamma_{12}^1 X_v + eN,$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v.$$

Além disso, sabemos que

$$N_u = -\lambda^1 X_u,$$

e das euações de Codazzi,

$$\lambda^2_{,u} = (\lambda^1 - \lambda^2) \Gamma_{12}^2$$

Assim,

$$Z_u = \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)_{,u} N + \left(1 - \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \right) X_u$$

$$= \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} (\lambda^2 X_u + \Gamma_{12}^2 N)$$

$$Z_{uu} = \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \right)_{,u} (\lambda^2 X_u + \Gamma_{12}^2 N)$$

$$+ \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} (\lambda^2 X_{uu} + \lambda^2_{,u} X_u + \Gamma_{12,u}^2 N + \Gamma_{12}^2 N_u)$$

$$= \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \left[(-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1) X_u - \frac{g_{11}}{g_{22}} \lambda^2 \Gamma_{12}^1 X_v \right]$$

$$+ \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \left[\left(\frac{\lambda^2 - 2\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + \lambda^1 \lambda^2 g_{11} + \Gamma_{12,u}^2 \right) N \right]$$

$$Z_{uuu} = \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \right)_{,u} \left[(-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1)_{,u} X_u - \left(\frac{g_{11}}{g_{22}} \lambda^2 \Gamma_{12}^1 \right)_{,u} X_v \right]$$

$$+ \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \left[(-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1) X_{uu} - \frac{g_{11}}{g_{22}} \lambda^2 \Gamma_{12}^1 X_{uv} \right]$$

$$+ \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \right)_{,u} \left[\left(\frac{\lambda^2 - 2\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + \lambda^1 \lambda^2 g_{11} + \Gamma_{12,u}^2 \right) N \right]$$

$$+ \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \left[\left(\frac{\lambda^2 - 2\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + \lambda^1 \lambda^2 g_{11} + \Gamma_{12,u}^2 \right)_{,u} N \right]$$

$$+ \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \left[\left(\frac{\lambda^2 - 2\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + \lambda^1 \lambda^2 g_{11} + \Gamma_{12,u}^2 \right) N_u \right]$$

Vamos escrever Z_{uuu} como combinação linear de X_u , X_v e N . Para facilitar, escreveremos o coeficientes separados.

$$Z_{uuu} = AX_u + BX_v + CN$$

Coefficientes de X_v :

$$\begin{aligned} B &= -\left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2}\right)_{,u} \left(\frac{g_{11}}{g_{22}} \lambda^2 \Gamma_{12}^1\right)_{,u} - \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} (-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1) \frac{g_{11}}{g_{22}} \Gamma_{12}^1 \\ &\quad - \frac{g_{11}}{g_{22}} \lambda^2 \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 \\ &= -\frac{g_{11}}{g_{22}} \lambda^2 \Gamma_{12}^1 3 \left(\Gamma_{11}^1 - \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{12}^2 \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$B = -f \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \right) \frac{g_{11}}{g_{22}} \lambda^2 \Gamma_{12}^1,$$

onde

$$f = 3 \left(\Gamma_{11}^1 - \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{12}^2 \right)$$

Coefficientes de X_u :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2}\right)_{,u} (-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1)_{,u} \\ &\quad + \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \left[(-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1) \Gamma_{11}^1 - \frac{g_{11}}{g_{22}} \lambda^2 \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 \right] \\ &\quad - \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \left(\frac{\lambda^2 - 2\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + \lambda^1 \lambda^2 g_{11} + \Gamma_{12,u}^2 \right) \lambda^1 \\ &= 3(-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1) \left(\Gamma_{11}^1 - \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{12}^2 \right) + \lambda^2 (-3 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2) \\ &\quad + \lambda^2 (6 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - 2(\Gamma_{11}^1)^2 - 3 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{12,u}^2 - \frac{g_{11}}{g_{22}} (\Gamma_{12}^1)^2 + \Gamma_{11,u}^1) \\ &\quad - \lambda^2 (\lambda^1)^2 g_{11} \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2}\right) (f(-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1) + g \lambda^2)$$

onde

$$\begin{aligned} g &= -3 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + 6 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - 2(\Gamma_{11}^1)^2 - 3 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{12,u}^2 - \frac{g_{11}}{g_{22}} (\Gamma_{12}^1)^2 \\ &\quad + \Gamma_{11,u}^1 - (\lambda^1)^2 g_{11} \end{aligned}$$

Coefficientes de N :

$$\begin{aligned} C &= \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} (-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1) \lambda^1 g_{11} \\ &+ \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \right)_u \left(\frac{\lambda^2 - 2\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + \lambda^1 \lambda^2 g_{11} + \Gamma_{12,u}^2 \right) \\ &+ \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \left(\frac{\lambda^2 - 2\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + \lambda^1 \lambda^2 g_{11} + \Gamma_{12,u}^2 \right)_u \end{aligned}$$

Derivando em relação a u e usando a Proposição 2.4, temos que

$$C = \frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \left[f \left((\Gamma_{12}^2)^2 - 2 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + \lambda^1 \lambda^2 g_{11} + \Gamma_{12,u}^2 \right) + g \Gamma_{12}^2 \right]$$

Logo,

$$\begin{aligned} Z_{uuu} &= \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \right) \left[(f(-2\lambda^1 \Gamma_{12}^2 + \lambda^2 \Gamma_{11}^1) + g \lambda^2) X_u - f \frac{g_{11}}{g_{22}} \lambda^2 \Gamma_{12}^1 X_v \right] \\ &+ \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \right) f \left((\Gamma_{12}^2)^2 - 2 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + \lambda^1 \lambda^2 g_{11} + \Gamma_{12,u}^2 \right) N \\ &+ \left(\frac{\lambda^2 - \lambda^1}{(\lambda^2)^2} \right) g \Gamma_{12}^2 N \end{aligned}$$

Assim,

$$Z_{uuu} = g X_u + f X_{uu},$$

onde

$$f = 3 \left(\Gamma_{11}^1 - \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{12}^2 \right),$$

$$\begin{aligned} g &= -3 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} (\Gamma_{12}^2)^2 + 6 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - 2 (\Gamma_{11}^1)^2 - 3 \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \Gamma_{12,u}^2 - \frac{g_{11}}{g_{22}} (\Gamma_{12}^1)^2 \\ &+ \Gamma_{11,u}^1 - (\lambda^1)^2 g_{11} \end{aligned}$$

Portanto, $\tau \equiv 0$. Desta forma concluímos que $Z(u)$ é uma cônica. Analogamente mostra-se que $Y(v)$ também é uma cônica.

Reciprocamente suponha que U é parte de uma cíclide de Dupin, então U é parte de uma superfície que é simultaneamente o envelope de duas famílias a 1-parâmetro de esferas cujos centros estão ao longo de um par de cônicas focais.

Cada esfera é tangente à superfície ao longo de um círculo C . Assim, as normais à superfície ao longo deste círculo formam um cone circular reto cujo vértice é o

centro da esfera. Como C é linha de curvatura do cone e o ângulo formado entre o cone e a superfície é constante, pois o cone corta M em ângulos retos, então C é linha de curvatura da superfície. Como cada ponto de M pertence a uma esfera de cada família e em cada ponto existem exatamente duas curvaturas principais, temos que as linhas de curvatura de U são círculos.

No caso do cilindro e do cone, sabemos que suas linhas de curvatura são círculos e retas.

Portanto, em qualquer destes casos, as condições equivalentes (a), (b) e (c) são satisfeitas. ■

Uma outra prova para este teorema, pode ser vista em [7].

2.3 Teorema global

Este capítulo traz alguns teoremas fundamentais para a demonstração do teorema principal.

Carter e West em [[2], p. 703] mostraram que uma imersão taut é sempre um mergulho. De agora em diante vamos nos referir a f como um mergulho taut.

Nós também notamos que a hipótese de f ser própria implica que $f(M)$ com a métrica Riemanniana induzida é completa. De fato, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é própria então $M_r(L_p)$ é compacto para qualquer $r \in \mathbb{R}$. Além disso, $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n(L_p)$, $M_n \subset M_{n+1}$ e se $q_n \notin M_n$ então $d(p, f(q_n)) \rightarrow \infty$, assim, pelo teorema de Hopf-Rinow, temos que $f(M)$ é completa.

Começamos com o seguinte teorema, que é uma versão global do Teorema 2.5 do capítulo 1.

Teorema 2.6 *Seja M uma variedade Riemanianna conexa e completa de dimensão 2 isometricamente imersa em \mathbb{R}^3 , e assuma que M não é totalmente umbílica. Se as equivalências (a), (b) e (c) são satisfeitas em todo subconjunto aberto e conexo de M que não contém pontos umbílicos, então M é mergulhada como uma cíclide de Dupin completa.*

Demonstração. Seja x um ponto não umbílico de M . Nós começamos mostrando

que toda linha de curvatura de M passando por x pode ser estendida indefinidamente.

Seja $\gamma(s)$ uma linha de curvatura passando por x parametrizada pelo comprimento de arco com $\gamma(0) = x$. Como M é completa, a linha de curvatura γ pode ser estendida a menos que exista um valor s_0 tal que $\lim_{s \rightarrow s_0} \gamma(s) = y$ é um ponto umbílico de M .

Suponha que $\lim_{s \rightarrow s_0} \gamma(s) = y$ é umbílico e $\gamma(s)$ não é umbílico para $0 \leq s < s_0$. Como o conjunto de pontos não umbílicos de M é aberto, existe um conjunto $U \subset M$, aberto e conexo de pontos não umbílicos tal que $\gamma(s) \in U$ para $0 \leq s < s_0$. Seja λ^1 e λ^2 as curvaturas principais de M na vizinhança U .

Pela versão local do teorema, U deve ser parte de uma cíclide de Dupin \widetilde{M} . E como y é ponto limite de U , y é ponto limite de \widetilde{M} . Assim \widetilde{M} não pode ser completa, pois estamos supondo y umbílico.

Então suponha \widetilde{M} uma cíclide não completa e y um ponto limite de \widetilde{M} que não está em \widetilde{M} . Sejam k_1 e k_2 as curvaturas principais de \widetilde{M} . Mas então, pela Observação 2.3,

$$\lim_{s \rightarrow s_0} k_1(s) = \infty$$

porém

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \lambda^1(\gamma(s)) = \lambda^1(y)$$

O que é uma contradição pois os limites devem ser iguais.

Portanto γ pode ser estendida indefinidamente.

Seja S o subconjunto conexo composto pela união de todas as linhas de curvatura que passam por um ponto não umbílico. Desta forma, S não contém pontos umbílicos. Assim S está contido em um subconjunto aberto e conexo U de M , que não contém pontos umbílicos.

Pelo Teorema local (2.5), U é parte de uma cíclide de Dupin, sem perda de generalidade, suponha U uma cíclide \widetilde{M} , pois U é aberto. Assim temos $S \subset \widetilde{M} \subset M$. Como qualquer ponto de \widetilde{M} é não umbílico, as linhas de curvatura que passam por ele pertencem a S . Logo $S = \widetilde{M}$. E como as únicas cíclides em que as linhas de curvatura são estendidas indefinidamente são as cíclides de Dupin completas, temos que \widetilde{M} é completa, e assim é também não estendível. Mas $\widetilde{M} \subset M$, logo $\widetilde{M} = M$. ■

Teorema 2.7 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho taut de uma superfície M não compacta e conexa. Considere L_p uma função de Morse. Então L_p não pode ter um ponto crítico de índice 2 em M .*

Demonstração. Suponha por contradição que L_p possui um ponto crítico não degenerado de índice 2 em $x_0 \in M$. Escolha $r \in \mathbb{R}$, tal que $r > L_p(x_0)$. Como f é taut e L_p tem pelo menos um ponto crítico de índice 2 em $M_r(L_p)$, temos que

$$\beta_2(L_p, r) = m_2(L_p, r) \geq 1$$

Logo o posto de $H_2(M_r(L_p), \mathbb{Z}_2)$ é pelo menos 1.

Porém, pelo Corolário 1.25, temos que o número de Betti $b_2(M_r(L_p))$ é zero para qualquer superfície não compacta e qualquer corpo F , o que é uma contradição.

Portanto L_p não pode ter um ponto crítico de índice 2 em M . ■

Proposição 2.8 *Seja M uma superfície não compacta e conexa e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ taut. Suponha que p seja um ponto focal de M em x . Então L_p tem um mínimo absoluto em x .*

Demonstração. Primeiro observamos que não existe nenhum ponto focal de M em x no segmento de reta aberto ligando $f(x)$ a p . De fato, suponha por contradição que exista um tal ponto focal e seja q um ponto qualquer, não focal, na linha normal de $f(M)$ em $f(x)$, então x é ponto crítico não degenerado de L_q e pelo Lema 1.12, o índice de L_p em x é igual ao número de pontos focais de M em x , isto é, tem índice 2 em x . Logo, pela Proposição 1.13, existe $s \in \mathbb{R}^n$ tal que L_s é uma função de Morse que tem um ponto crítico de índice 2. O que é um absurdo, pela Proposição 2.7.

Assim, não existe nenhum ponto focal de M em x no segmento de reta aberto que $f(x)$ a p . Portanto, a Proposição 1.31 implica que L_p tem um mínimo absoluto em x . ■

O próximo teorema será usado no final da demonstração do teorema principal. Ele trata da posição de uma curva plana $r(s)$ e do círculo osculador na vizinhança de um ponto.

Usando a orientação do plano vamos considerar o vetor normal à curva n orientado de tal maneira que o par $t = r'$, n forme uma base orientada de mesma maneira que o plano.

O vetor posição do centro de curvatura é

$$R = r + \frac{1}{k}n,$$

e o raio de curvatura é $\rho = \frac{1}{|k|}$, onde k é a curvatura da curva $r(s)$.

Teorema 2.9 *Seja $r(s)$ uma curva plana de classe C^3 tal que a curvatura $k(s_0) \neq 0$ e sua derivada $k'(s_0) \neq 0$ em um ponto s_0 . Então para s crescente a curva passa do exterior do círculo de curvatura para o interior do mesmo se $kk' > 0$ e passa do interior para o exterior se $kk' < 0$.*

Demonstração. Considere o círculo osculador no ponto s_0 . Seja d a distância do centro deste círculo a um ponto variável da curva com vetor posição $r(s)$:

$$d = \left| r - r_0 - \frac{1}{k_0}n_0 \right|$$

onde $r_0 = r(s_0)$, $n_0 = n(s_0)$. Nós temos

$$\begin{aligned} d^2 - \rho_0^2 &= \left| r - r_0 - \frac{1}{k_0}n_0 \right|^2 - \frac{1}{k_0^2} \\ &= \left\langle r - r_0 - \frac{1}{k_0}n_0, r - r_0 - \frac{1}{k_0}n_0 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{k_0}n_0, \frac{1}{k_0}n_0 \right\rangle \\ &= \left\langle r - r_0 - \frac{2}{k_0}n_0, r - r_0 \right\rangle \end{aligned}$$

Considerando

$$h(s) := d^2 - \rho_0^2 = \left\langle r - r_0 - \frac{2}{k_0}n_0, r - r_0 \right\rangle,$$

temos,

$$h'(s) = \langle r', r - r_0 \rangle + \left\langle r - r_0 - \frac{2}{k_0}n_0, r' \right\rangle,$$

$$h''(s) = 2 \left\langle r'', r - r_0 - \frac{2}{k_0}n_0 \right\rangle + 2, \tag{2.6}$$

$$h'''(s) = 2 \left\langle r''', r - r_0 - \frac{2}{k_0} n_0 \right\rangle + 2 \langle r'', r' \rangle.$$

Mas

$$r'_0 = t_0$$

$$r''_0 = k_0 n_0$$

$$r'''_0 = k'_0 n_0 + k_0 n'_0 = k'_0 n_0 - k_0^2 t_0$$

Assim, substituindo r'_0, r''_0, r'''_0 em (2.6) e considerando $s = s_0$ temos

$$h(s_0) = 0$$

$$h'(s_0) = 0$$

$$h''(s_0) = 0$$

$$h'''(s_0) = -4 \frac{k'_0}{k_0}.$$

Logo, pela fórmula de Taylor temos

$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{(s - s_0)^3}{3!} h'''(s_0) + o((s - s_0)^3) \\ &= -\frac{2k'_0}{3k_0} (s - s_0)^3 + o((s - s_0)^3). \end{aligned}$$

Consequentemente, se a derivada k' é diferente de zero em s_0 então a diferença $d^2 - \rho_0^2$ muda de sinal quando s varia de $s < s_0$ para $s > s_0$. Se $kk' < 0$ esta mudança é de negativo para positivo, que significa que o ponto passa do interior para o exterior. Se $kk' > 0$ então o valor de $d^2 - \rho_0^2$ muda de positivo para negativo, o que corresponde ao ponto passar do exterior para o interior do círculo de curvatura.

■

Capítulo 3

Demonstração do Teorema Principal

Teorema 3.1 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão taut de uma superfície não compacta e conexa. Então $f(M)$ é um hiperplano ou uma cíclide de Dupin completa.*

A demonstração deste teorema segue imediatamente do Teorema 2.6 e do seguinte resultado:

Proposição 3.2 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão taut de uma superfície M não compacta e conexa. Seja U um subconjunto aberto e conexo de M que não contém pontos umbílicos. Então as curvaturas principais são constantes ao longo de suas correspondentes linhas de curvatura.*

Demonstração Seja β uma linha de curvatura em U e λ a curvatura principal correspondente.

Se $\lambda \equiv 0$ ao longo de β , então λ é constante ao longo de β como desejado.

Suponha $\lambda(x_0) \neq 0$ para algum ponto x_0 em β . Então o conjunto

$$B = \{x \in \beta; \lambda(x) = \lambda(x_0)\},$$

é fechado na topologia relativa de β , pois λ é contínua.

Vamos mostrar que B é também relativamente aberto e daí, $B = \beta$, o que implica que λ é constante ao longo de β . Para isto devemos mostrar que para qualquer $y \in B$, existe $V \subset U$ tal que para qualquer $x \in V \cap \beta$ então $x \in B$.

Sejam y um ponto arbitrário em B , $V \subset U$ uma vizinhança de y tal que $\lambda \neq 0$ em V e X o campo de vetores principais unitários em V que corresponde a λ . Vamos

mostrar que $X(\lambda) = 0$ em V e assim λ é constante ao longo de suas linhas de curvatura em V e conseqüentemente $\lambda(x) = \lambda(x_0)$, para qualquer $x \in \beta \cap V$.

Para mostrar que $X(\lambda)(x) = 0$ para qualquer $x \in V$, devemos tomar $x \in V$ e γ uma curva tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = X(x)$, e teremos

$$\begin{aligned} X(\lambda)(x) &= \gamma'(0)\lambda \\ &= \frac{d}{dt}(\lambda \circ \gamma)|_{t=0} \\ &= d\lambda(\gamma(0))\gamma'(0) \\ &= \lambda'(0) \end{aligned}$$

pois $\lambda(s) = \lambda(\gamma(s))$. Portanto devemos mostrar que $\lambda'(0) = 0$ para qualquer $x \in V$ e uma curva γ tal que $\gamma(0) = X(x)$.

Para simplificar nós identificamos V com sua imagem sobre o mergulho f . Sejam $x \in V$ e γ a secção normal de M em x obtida intersectando V com o plano formado por $X(x)$ e $N(x)$, o vetor normal unitário de M em x . Parametrize γ pelo parâmetro comprimento de arco s de modo que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = X(x)$.

Seja $k(s)$ a função curvatura de γ e seja $\lambda(s) = \lambda(\gamma(s))$. Considere a curvatura normal em $\gamma(s)$ na direção $\gamma'(s)$ dada por

$$k_n(s) = k(s)\cos(\varphi(s)) \tag{3.1}$$

onde φ é o ângulo entre a normal principal de γ em $\gamma(s)$ e $N(\gamma(s))$. Como γ é a secção normal de M em x , temos que $\cos(\varphi(0)) = \pm 1$. Logo, $\lambda(0) = \pm k(0)$, derivando (3.1) temos

$$k'_n(s) = k'(s)\cos(\varphi(s)) - k(s)\sen(\varphi(s))\varphi'(s)$$

o que implica que

$$k'_n(0) = \pm k'(0) \tag{3.2}$$

Por outro lado, usando a fórmula de Euler

$$k_n(s) = \lambda_1(s)\cos^2\theta(s) + \lambda_2(s)\sen^2(\theta(s))$$

onde θ é o ângulo entre $\gamma'(s)$ e a direção principal correspondente a $\lambda(s) = \lambda_1(s)$ e λ_2 é a outra curvatura principal de x . Logo,

$$\begin{aligned} k'_n(s) &= \lambda'_1(s)\cos^2(\theta(s)) - \lambda_1(s)2\cos(\theta(s))\sen(\theta(s))\theta'(s) \\ &+ \lambda'_2(s)\sen^2(\theta(s)) + \lambda_2(s)2\sen(\theta(s))\cos(\theta(s))\theta'(s). \end{aligned}$$

Como a direção principal correspondente a $\lambda(0)$ é $\gamma'(0)$ temos que $\theta(0) = 0$, temos que

$$k'_n(0) = \lambda'(0) \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3) temos que $\lambda'(0) = \pm k'(0)$. Assim, a prova estará completa se mostrarmos que $k'(0) = 0$.

O ponto $p = x + \frac{1}{\lambda}N(x)$ é um ponto focal de M em x . Seja C o círculo osculador de γ em x , o ponto p é o centro de C . Pelo Teorema 2.9 sabemos que γ cruza C em x a menos que $k'(0) = 0$. Assim, se $k'(0) \neq 0$, existe um valor s_0 tal que $L_p(\gamma(s_0)) < L_p(x)$. Isto contraria o fato que L_p deve ter um mínimo em x pela Proposição 2.8. Logo $k'(0) = 0$. ■

Se $f(M)$ não é totalmente umbílica, a Proposição 3.2 mostra que a condição (a) da Proposição 2.1 é satisfeita em cada subconjunto aberto e conexo de M que não contém pontos umbílicos. Pelo Teorema 2.6, concluímos que $f(M)$ é uma cíclide de Dupin completa. Se $f(M)$ é totalmente umbílica, como não é compacta então, é um hiperplano. Demonstrando assim, o Teorema 3.1.

As imersões taut de superfícies compactas em \mathbb{R}^n são todas conhecidas pelo trabalho de Kuiper [9] e Banchoff [1]. Em particular, Banchoff mostrou que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão taut e M é compacta, então $f(M)$ é uma esfera euclidiana ou uma cíclide de Dupin.

Combinando este resultado com o Teorema 3.1 concluímos que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão de uma superfície conexa, então $f(M)$ é totalmente umbílica ou uma cíclide de Dupin completa.

Referências Bibliográficas

- [1] Banchoff, T. F., *The spherical two-piece property and tight surfaces in spheres*, J. Differential Geometry, **4** 193-205 (1970).
- [2] Carter, S. e West, A., *Tight and taut immersions*, Proc. London Math. Soc., **25** 701-720 (1972).
- [3] Cecil, T., *A characterization of metric spheres in hyperbolic space by Morse theory*, Tôhoku Math. J., **26** 341-351 (1974).
- [4] Cecil, T., *Geometric applications of critical point theory to submanifolds of complex projective space*, Nagoya Math. J., **55** 5-31 (1974).
- [5] Cecil, T. E., *Taut immersions of noncompact surfaces into a euclidean 3-space*, J. Differential Geometry, **11** 451-459, (1976).
- [6] de Rham, *Variétés Différentiables*, Herman, Paris, (1955).
- [7] Eisenhart, E., *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Constable, London, (1909).
- [8] Goetz, A., *Introduction to differential geometry*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1970).
- [9] Kuiper, N. H., *On convex maps*, Nieuw Arch. Wisk, **10** 147-164 (1962).
- [10] Morse, M. e Cairns, S., *Critical point theory in global analysis and differential topology*, Academic Press, New York, (1969).
- [11] Milnor, J., *Morse theory*, Ann. of Math. Studies, No. **51**, Princeton University Press, Princeton, (1963).

- [12] Nomizu, K. e Rodriguez, L., *Umbilical submanifolds and Morse funtions*, Nagoya Math. J., **48** 197-201 (1972).
- [13] Rodrigues, L. M. D., *Classes de Hipersuperfícies de Dupin*, Tese de Doutorado, Brasília, (2005).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)