

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Tratamento Numérico para Equações
Diferenciais Estocásticas através do Método
da Linearização Local**

por

Sérgio Souza Bento

Brasília
2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom supremo da vida. À mulher da minha vida, Joana, minha mãe e grande intercessora. À todos os meus familiares que dividiram comigo os momentos de alegria e de angústia (quantos desabafos por telefone!?) e que souberam entender a minha ausência não só ao longo desses dois anos, mais desde a época de graduação.

Ao professor Jorge Carlos Lucero, pela orientação. Ao Euro Gama pela “co-orientação” e por estar sempre presente nas dificuldades. Aos professores da UFES que me recomendaram para essa empreitada e também pelos conselhos e incentivos: Aldo Vignatti, Alex Sander, Eder Machado, Gilvan, Jamil, Joccitiel e Rocha.

Aos professores da banca examinadora: Cátia Regina Gonçalves, Jaques Silveira Lopes e Daniele Baratela; pelas correções e sugestões, que fizeram com acuidade, enriquecendo este trabalho.

Aos colegas de graduação (desculpa aí! Fui o primeiro mestre da turma.), que ainda temos um contato maravilhoso: Wagner, Gerliane, Riedson, Josiane, Fábio Rodrigues, Vanessa, Paulo, Gyslane, Edinelço e Fabrício. Aos colegas do curso de

verão: Almir Cabral, Fabrycio, Helawandro, Gondin, Eduardo e Jean; pelo companheirismo e amizade apesar do pouco tempo de convivência durante a seleção para o mestrado. Aos colegas do departamento de matemática da UnB: Ricardo Ruviaro (mais que amigo. Te cuida guri!), Anyelle, Elenilson, Juninho, Sandrinha, Janete, Manuela, Pablo, Célio, Walter, Débora, Juliana, Eunice, Zhou, Luverci, Gilberto, Porfirio, Gisliane, Leonardo Amorim, Jander, Evander, Nilton, Anderson, Magno, Tertuliano, Heisler e Monique. Ao meu amigo de apartamento, Enio Carvalho, pelas primeiras idéias sobre Matlab e pelos assuntos variados de nossas conversas de fim de noite.

Ao meu amigo Manoel Isaque, com quem troquei as primeiras palavras sobre estudar matemática num nível superior, pelo incentivo e presença amiga em todos os momentos.

À Rosângela Gambarine, pela disponibilidade e sugestões quanto a parte gramatical e ortográfica do texto.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível manter-me em Brasília durante a elaboração deste trabalho.

À todos que, com um pensamento positivo, uma palavra amiga, alimentaram meus sonhos e contribuíram para esta grande conquista da minha vida. Obrigado!!!

*“As rosas quando querem conhecer as
borboletas precisam suportar suas larvas.”*
(Saint-Exupéry)

À minha família.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o método numérico da Linearização Local (LL) para resolução numérica de Equações Diferenciais Estocásticas (EDE's). Inicialmente, apresentamos definições e resultados preliminares que fornecem o devido suporte teórico para o desenvolvimento deste trabalho, incluindo: processo de Wiener, teorema de existência e unicidade de solução de EDE's e a expansão de Ito-Taylor estocástica. Em seguida, apresentamos duas versões recentes do método LL, com as respectivas implementações computacionais, seguidas de exemplos numéricos. Mencionamos, ainda, algumas vantagens do método LL em relação aos métodos numéricos tradicionais. O estudo está baseado nos trabalhos de Biscay, Jimenez, Riera, e Valdes (An. Inst. Stat. Math. 48: 631-644, 1996) e Jimenez, Shoji, e Ozaki (J. of Stat. Phys., 94:587-602, 1999).

Abstract

In this work, we study the Local Linearization method for the numerical solution of Stochastic Differential Equations (SDE's). Initially, we present definitions and preliminaries results that provide the theoretical support for the development of this work, such as: Wiener process, existence and uniqueness theorem of solution for SDE's and the stochastic Ito-Taylor expansion. We present the two recent versions of the LL method, with their respective computational implementations, followed by numerical examples. We also mention, some advantages of the LL method over traditional numerical methods. The study is based on the works by Biscay, Jimenez, Riera, and Valdes (An. Inst. Stat. Math. 48: 631-644, 1996) and Jimenez, Shoji, and Ozaki (J. of Stat. Phys., 94:587-602, 1999).

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	7
1.1 Processo Estocástico	7
1.1.1 Processo de Wiener	9
1.2 Equação Diferencial Estocástica	11
1.3 Expansão de Ito-Taylor Estocástica	17
1.3.1 Multi-índices	17
1.3.2 Integrais Múltiplas de Ito	18
1.3.3 Funções Coeficientes de Ito	18
1.3.4 Conjuntos Hierárquico e de Resto	19
1.3.5 Expansão de Ito-Taylor Estocástica	20
2 Método da Linearização Local	21
2.1 Método B-LL da Linearização Local	21
2.2 Método N-LL da Linearização Local	26
2.3 Métodos LL para Sistemas Lineares	30
3 Testes Numéricos	32
3.1 Convergência	32
3.2 Exemplos Numéricos	34
Conclusões	40
Apêndices	41
Apêndice A	41
Apêndice B	42

Apêndice C	44
Apêndice D	46
Bibliografia	48

Lista de Figuras

1	Diagrama em blocos de uma população neuronal envolvida em um modelo de massa.	3
1.1	Discretização da trajetória do movimento Browniano.	11
1.2	Interpretação da EDE como um sistema dinâmico.	14
2.1	O método LL é exato para EDO linear.	31
3.1	Teste de convergência para o método de Euler-Maruyama	34
3.2	Aproximação pelo método LL.	35
3.3	Aproximação pelo método de Euler-Maruyama.	36
3.4	Comparação de uma aproximação (LL) com a solução para $h = 2^{-4}$	37
3.5	Comparação de uma aproximação (LL) com a solução para $h = 2^{-6}$	38
3.6	Comparação de uma aproximação (LL) com a solução para $h = 2^{-8}$	39

Introdução

As Equações Diferenciais Estocáticas (EDE's) vem, crescentemente, sendo utilizadas em modelos complexos em várias áreas de aplicação, como biologia, química, neurociência, economia, finanças, dentre outros. Devido ao fato de soluções analíticas serem raramente possíveis em situações realistas, métodos numéricos são, frequentemente, usados para calcular as soluções. Uma grande variedade de tais métodos tem sido desenvolvida por diversos pesquisadores. Citamos, como exemplo, os métodos de Euler-Maruyama, Milshtein, Kloeden e Platen, Saito e Mitsui (veja referências [2] e [16]). A base teórica comum desses métodos é a expansão de Ito-Taylor estocástica em termos de integrais múltiplas de Wiener. Em geral, possuem boas propriedades de convergência, as quais tem sido observadas por meio de simulações (veja referências [2], [9] e [16]). Porém, duas limitações são apontadas: (1) em geral, as aproximações calculadas, não dão solução exata para equações diferenciais ordinárias lineares (isto é, EDE's lineares com coeficiente de difusão igual a zero) e (2) as soluções numéricas nem sempre preservam a característica qualitativa da solução exata. Em particular, há muitos exemplos de EDE's com trajetórias limitadas em que a solução numérica torna-se explosiva quando o valor inicial está em uma certa região do espaço de fase. Um método alternativo que tenta superar essas limitações, chamado método da Linearização Local (LL), foi introduzido por Ozaki em 1985 (veja referências [14] e [15]).

Uma das motivações em desenvolver esse trabalho decorre da aplicação do método LL na análise não linear do Eletroencefalograma (EEG) em um modelo de massa neural. O EEG é uma técnica de exame cerebral usada desde 1929, depois da descoberta do psiquiatra alemão Hans Berger de que o cérebro gera uma atividade elétrica capaz de ser registrada [4]. Na prática, o EEG é realizado através da colocação de eletrodos na pele da cabeça do paciente, que são conectados a um

amplificador de corrente elétrica.

O modelo de massa neural (Figura 1) é um exemplo do modelo introduzido por Valdes, Jimenez, Riera, Biscay, e Ozaki [18].

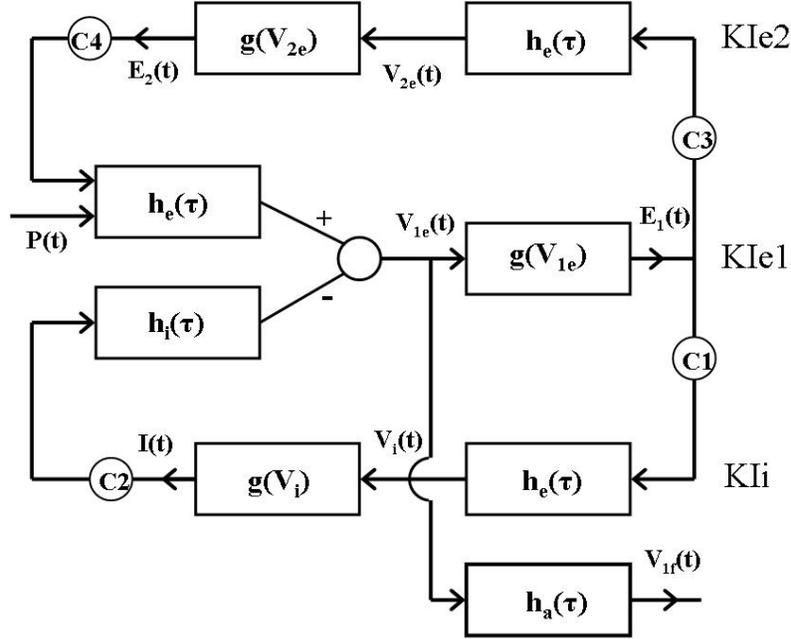


Figura 1: Diagrama em blocos de uma população neuronal envolvida em um modelo de massa.

No modelo, V_{1e} , V_{2e} e V_i são potenciais de membrana e c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são coeficientes de eficiência sináptica. A função impulso h_r é dada por $h_r(\tau) = A_r[e^{-a_r\tau} - e^{-b_r\tau}]$, com $r = \{e, i\}$. A função g é definida pela expressão

$$g(V) = \begin{cases} g_0\lambda e^{y(V-V_0)}, & V \leq V_0, \\ g_0\lambda[2 - e^{-y(V-V_0)}], & V > V_0, \end{cases}$$

onde E_1 , E_2 e I são dadas pelas relações

$$E_1(t) = g[V_{1e}(t)],$$

$$E_2(t) = g[V_{2e}(t)],$$

$$I(t) = g[V_i(t)].$$

As constantes $g_0\lambda$, γ , V_0 , A_r , a_r , b_r e τ são dadas na Tabela 1.

KLe e KLi são conglomerados de neurônios excitatórios e inibitórios, respectivamente, interconectados (ver detalhes em [18]). A entrada externa, é representada

pela densidade de pulso $P(t)$, que é modelado por um processo estocástico Gaussiano (processo de Wiener).

Símbolos	Definição	Unidade	Valor
$g_0\lambda$	Valor máximo da função g	s^{-1}	25
γ	Parâmetro escalar da função g	MV^{-1}	0.34
V_0	Potencial inicial da função g	MV	6
A_e	Máximo de h_e	MV	1.6
a_e	Constante de tempo de h_e	s^{-1}	55
b_e	Constante de tempo de h_e	s^{-1}	605
A_i	Máximo de h_i	MV	32
a_i	Constante de tempo de h_i	s^{-1}	27.5
b_i	Constante de tempo de h_i	s^{-1}	5
τ	Constante de tempo do filtro passa-alto h_a	s	0.32
δ	Fator de amortecimento do filtro h_a	s	0.707
ω_n	Frequência angular de corte do filtro h_a	Hz	$2\pi 30$

Tabela 1: Constantes envolvidas na definição do modelo neural.

O modelo é descrito pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{1e}^1(t) &= \alpha_e V_{1e}^1(t) + \beta_e V_{1e}(t) + \epsilon_e c_{4g}[V_{2e}(t)] + c_2 \alpha I_f^1(t) + c_2 \beta I_f(t) + \\
&\quad c_2 \epsilon_i g[V_i(t)] + \epsilon_e \Pi + w(t), \\
\dot{V}_{2e}^1(t) &= \alpha_e V_{2e}^1(t) + \beta_e V_{2e}(t) + \epsilon_e c_{3g}[V_{1e}(t)], \\
\dot{V}_i^1(t) &= \alpha_e V_i^1(t) + \beta_e V_i(t) + \epsilon_e c_{1g}[V_{1e}(t)], \\
\dot{I}_f^1(t) &= \alpha_i I_f^1(t) + \beta_i I_f(t) + \epsilon_i g[V_i(t)], \\
\dot{V}_{1e}(t) &= V_{1e}^1(t), \\
\dot{V}_{2e}(t) &= V_{2e}^1(t), \\
\dot{V}_i(t) &= V_i^1(t), \\
\dot{I}_f(t) &= I_f^1(t), \\
\dot{V}_{1f}^2(t) &= k_2 V_{1f}^2(t) + k_1 V_{1f}^1(t) + k_0 V_{1f}(t) + a w_n^2 V_{1e}^1(t), \\
\dot{V}_{1f}(t) &= V_{1f}^1(t), \\
\dot{V}_{1f}^1(t) &= V_{1f}^2(t),
\end{aligned}$$

onde w é um ruído branco com média zero e variância $\epsilon_e^2 \delta_P^2$ e

$$\begin{aligned}
\alpha_r &= -(a_r + b_r), \\
\beta_r &= -a_r b_r, \\
\epsilon_r &= (b_r - a_r) A_r, \\
\alpha &= \alpha_e - \alpha_i, \\
\beta &= \beta_e - \beta_i, \\
k_0 &= \frac{-\omega_n^2}{\tau}, k_1 = \frac{-2\delta\omega_n}{\tau} - \omega_n^2 \text{ e } k_2 = -2\omega_n - \frac{1}{\tau}.
\end{aligned}$$

O sistema de equações diferenciais que descreve o modelo, pode ser expresso sucintamente como a equação diferencial estocástica:

$$\dot{X} = f(X, \theta) + W,$$

onde

$$X = \left(V_{1e}^1, V_{2e}^1, V_i^1, I_f^1, V_{1e}, V_{2e}, V_i, I_f, V_{1f}^2, V_{1f}, V_{1f}^1 \right)^T$$

e

$$W = (w, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

é um vetor aleatório com média zero e uma matriz de covariância 11×11 da forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \epsilon_e^2 \delta_P^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$\theta = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \Pi \quad \sigma_P^2 \quad a]$ é o conjunto de parâmetros pré-definidos.

Esta dissertação objetiva estudar o método da Linearização Local para resolução numérica de Equações Diferenciais Estocásticas. O estudo baseia-se nos trabalhos de Biscay, Jimenez, Riera, e Valdes [2] e Jimenez, Shoji, e Ozaki [9].

No primeiro capítulo, são introduzidos alguns conceitos da teoria de probabilidade e de processos estocásticos, resultados como o processo de Wiener e o teorema de existência e unicidade de solução de EDE's. O capítulo é finalizado com alguns teoremas, incluindo o teorema da expansão de Ito-Taylor estocástica.

No segundo capítulo são apresentadas duas versões recentes do método LL, com suas respectivas implementações computacionais, mostrando as diferenças que há nas expressões de computação iterativa que definem os métodos.

O terceiro capítulo traz alguns exemplos numéricos, onde é feita uma estimativa numérica para a ordem de convergência do método de Euler-Maruyama, também são dados vários gráficos ilustrando a aproximação pelo método LL e um exemplo mostrando, que em alguns casos, este método preserva a característica qualitativa da solução exata. Nos apêndices está disposto o código fonte, em Matlab, da maioria dos programas que foram implementados neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos e definições relacionados à teoria de probabilidade, que são necessários para um bom entendimento deste trabalho. Com papel relevante, temos alguns resultados sobre existência e unicidade de solução de equações diferenciais estocásticas, processo de Wiener e a expansão de Ito-Taylor estocástica. Este capítulo baseia-se nas referências [1, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13].

1.1 Processo Estocástico

Definição 1.1 *Dado um conjunto Ω , uma σ -álgebra \mathbb{A} em Ω é uma família \mathbb{A} de subconjuntos de Ω com as seguintes propriedades:*

- (i) $\emptyset \in \mathbb{A}$;
- (ii) $F \in \mathbb{A} \Rightarrow F^C \in \mathbb{A}$;
- (iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A} \Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{A}$.

O par (Ω, \mathbb{A}) é chamado de espaço mensurável. Uma medida de probabilidade P em um espaço mensurável (Ω, \mathbb{A}) é uma função $P : \mathbb{A} \rightarrow [0, 1]$ tal que

- (a) $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$;
- (b) se $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$ e $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ são dois a dois disjuntos então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

O terno (Ω, \mathbb{A}, P) é chamado espaço de probabilidade.

Se (Ω, \mathbb{A}, P) é um espaço de probabilidade, então a função $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ é chamada \mathbb{A} -mensurável se

$$Y^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\} \in \mathbb{A}$$

para todo conjunto aberto $U \in \mathbb{R}^d$.

Definição 1.2 *Uma variável aleatória (d -dimensional) X é uma função \mathbb{A} -mensurável $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$.*

Definição 1.3 *Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias $X = \{X(t, \omega) \text{ (ou } X_t(\omega)) : t \in [t_0, T]\}$ definidas em um espaço de probabilidade (Ω, \mathbb{A}, P) e assumindo valores em \mathbb{R}^d .*

Note que, para cada $t \in [t_0, T]$ fixado, temos uma variável aleatória

$$\omega \rightarrow X(t, \omega); \omega \in \Omega.$$

Por outro lado, fixando $\omega \in \Omega$ podemos considerar a função

$$t \rightarrow X(t, \omega); t \in [t_0, T]$$

que é chamada trajetória de X .

Intuitivamente, pensamos em t como “tempo” e cada ω como uma “partícula”. Assim, podemos considerar o processo como uma função de duas variáveis.

Definição 1.4 *Um processo estocástico $X(t, \omega)$, $t \in T$, é chamado um processo de segunda ordem se, $E[X(t)^2] < \infty$ para cada $t \in T$.*

Definição 1.5 *Um processo estocástico $X(t, \cdot)$ é contínuo em média quadrática se $E[X_t^2] < \infty$ para todo t e*

$$\lim_{s \rightarrow t} E[(X_s - X_t)^2] = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Neste trabalho, estaremos considerando continuidade em média quadrática para os processos estocásticos que aparecem no texto.

Definição 1.6 Uma filtração (em (Ω, \mathbb{A})) é uma família $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ de σ -álgebras $\mathcal{F}_t \subset \mathbb{A}$ tal que

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t,$$

isto é, $\{\mathcal{F}_t\}$ é crescente.

Definição 1.7 Seja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ uma filtração. Um processo $X(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ é chamado \mathcal{F}_t -adaptado se, para cada $t \geq 0$, a função

$$\omega \rightarrow X(t, \omega)$$

é \mathcal{F}_t -mensurável.

Definição 1.8 Seja $\{\mathcal{N}_t\}$ uma família crescente de σ -álgebras (de subconjuntos de Ω). Uma função $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ é chamada tempo de parada com respeito à $\{\mathcal{N}_t\}$ se

$$\{\omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{N}_t, \quad \forall t \geq 0.$$

1.1.1 Processo de Wiener

Entre 1827-1829, o botânico Robert Brown observou, usando um microscópio, o movimento irregular e imprevisível de grãos de pólen imersos em água [11]. De um modo geral, esse fenômeno refere-se à trajetória de uma pequena partícula totalmente imersa em um líquido ou gás. Brown não foi o primeiro a observar este fenômeno, mas este movimento só recebeu um nome depois de seus relatos.

Através de seus trabalhos iniciados em 1918, Norbert Wiener apresentou uma definição concisa do processo estocástico, como uma descrição matemática do movimento browniano. O movimento irregular de uma partícula em suspensão resulta do fato de que ela está continuamente sendo bombardeada pelas moléculas que compõem o meio, as quais estão em constante agitação térmica.

Definição 1.9 Um movimento Browniano padrão, ou processo de Wiener padrão é um processo estocástico $\{W(t)$ (ou W_t), $t \in [t_0, T]\}$ definido no espaço de probabilidade (Ω, \mathbb{A}, P) com conjunto de índices $[t_0, T]$ e espaço de estados \mathbb{R}^m , satisfazendo as seguintes condições:

1. $W(t_0) = 0$ (com probabilidade 1);

2. Para $0 \leq t_0 \leq s \leq t \leq T$ cada incremento $W(t) - W(s)$ está normalmente distribuído com média zero e matriz de covariância $(t-s)I$ (onde I é a matriz identidade de ordem m);
3. Para $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ os incrementos $W(t_i) - W(t_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$, são independentes.

Temos que

$$W(t) - W(s) \sim N(0, (t-s)I)$$

donde segue de [8]

$$W^j(t) - W^j(s) \sim N(0, \sum_{k=1}^m a_{kj}^2), \text{ com } 1 \leq j \leq m,$$

onde W^j é a j -ésima componente do processo de Wiener. Os elementos a_{ij} pertencem a uma matriz A , tal que $(t-s)I = AA^T$. Logo

$$A = \sqrt{(t-s)}I$$

daí

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{(t-s)}, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Portanto,

$$W^j(t) - W^j(s) \sim N(0, t-s), \text{ com } 1 \leq j \leq m.$$

Para propósitos computacionais (no caso escalar ou em cada componente) é útil considerar uma discretização do movimento Browniano, onde $W(t)$ é especificado para valores de t discretos. Fixamos $h = (T - t_0)/N$ para algum inteiro positivo N e $t_j = t_0 + jh$. A condição 2 da definição (1.9) é equivalente a $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}N(0, 1)$ com $t_0 \leq s \leq t \leq T$, onde $N(0, 1)$ é a distribuição normal com média zero e variância 1. Pelas condições 2 e 3 da mesma definição, temos que

$$W(t_j) = W(t_{j-1}) + dW(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

onde cada $dW(t_j)$ é uma variável aleatória com distribuição $\sqrt{h}N(0, 1)$. No Matlab, um elemento de distribuição $N(0, 1)$ é obtido com o comando “randn”.

Exibimos a seguir (Figura 1.1) o gráfico gerado em Matlab do movimento Browniano discretizado sobre o intervalo $[0, 1]$ tomando $N = 500$.

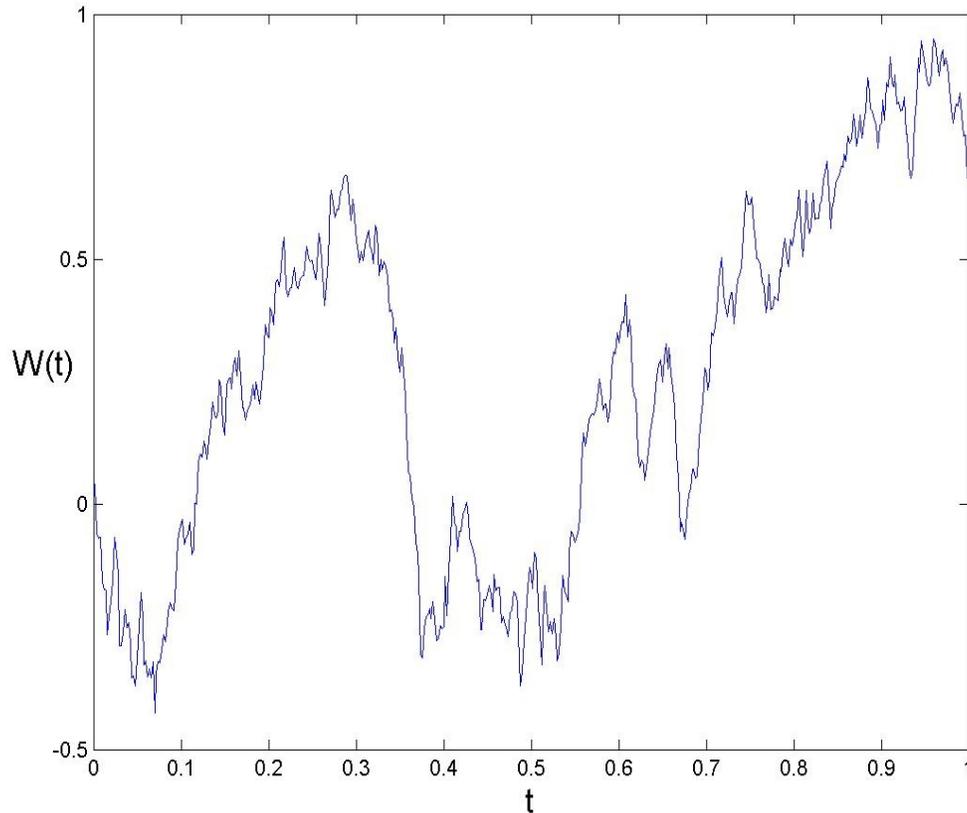


Figura 1.1: Discretização da trajetória do movimento Browniano.

1.2 Equação Diferencial Estocástica

Antes de falar em Equações Diferenciais Estocásticas, daremos uma definição de integração com respeito ao processo de Wiener, denominada integral de Ito. Para isso, consideremos um processo contínuo em média quadrática $X(t, \omega)$, $t \in [a, b]$ e uma sequência $\{\mathcal{P}_n\}$, $n \geq 1$, partições sucessivamente menores de $[a, b]$ tal que $|\mathcal{P}_n| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Definamos

$$J_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} X(t_k^n, \omega)[W(t_{k+1}^n, \omega) - W(t_k^n, \omega)]. \quad (1.1)$$

Suponhamos que $X(t)$ seja independente dos incrementos $W(v) - W(u)$ para todo $a \leq t \leq u < v \leq b$. Então

$$E[X(t_k^n)[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)]^2] = E[X(t_k^n)]^2 E[W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)]^2 < \infty.$$

Conseqüentemente, cada termo da soma (1.1) é uma variável aleatória de segunda ordem. Assim, J_n , $n \geq 1$, forma uma seqüência de variáveis aleatórias de segunda ordem.

Definição 1.10 *Se a seqüência J_n converge em média quadrática para uma variável aleatória J quando $n \rightarrow \infty$, então o limite é chamado de **integral de Ito** de $X(t)$ com respeito ao processo de Wiener $W(t)$ e é denotado por*

$$J(\omega) = \int_a^b f(t, \omega) dW(t, \omega). \quad (1.2)$$

Teorema 1.11 (Fórmula de Ito) *Seja $u = u(t, x)$ denotando uma função contínua definida em $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ com valores em \mathbb{R}^k . Se X_t é um processo d -dimensional definido em $[t_0, T]$ pela diferencial estocástica*

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t,$$

então o processo k -dimensional

$$Y_t = u(t, X_t)$$

definido em $[t_0, T]$ com valor inicial $Y_{t_0} = u(t_0, X_{t_0})$ também possui uma diferencial estocástica com respeito ao mesmo processo de Wiener W_t , e temos

$$dY_t = \left(u_t(t, X_t) + u_x(t, X_t)f(t, X_t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d u_{x_i x_j}(t, X_t) [g(t, X_t)g^T(t, X_t)]_{ij} \right) dt + u_x(t, X_t)g(t, X_t)dW_t,$$

que pode ser escrita como

$$dY_t = u_t dt + u_x dX_t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d u_{x_i x_j} [gg^T]_{ij} dt.$$

Demonstração: ver [1], pág. 96. ■

Uma equação diferencial estocástica é basicamente uma equação diferencial determinística com uma perturbação aleatória.

Definição 1.12 *Uma equação da forma*

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \\ X(t_0) &= X_0, \quad t_0 \leq t \leq T < \infty, \end{aligned} \quad (1.3)$$

é chamada equação diferencial estocástica de Ito. A variável aleatória X_0 é chamada valor inicial no instante t_0 . A equação (1.3) juntamente com a condição inicial, é somente uma forma simbólica de escrever a equação integral estocástica

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(s, X(s))ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s))dW(s), \quad t_0 \leq t \leq T < \infty \quad (1.4)$$

onde $X(t)$ é um processo estocástico em \mathbb{R}^d e $W(t)$ é um processo de Wiener m -dimensional, ambos definidos em $[t_0, T]$. As funções f e g são definidas em $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$, assumindo valores em \mathbb{R}^d e $\mathbb{R}^{d \times m}$ respectivamente.

Apresentamos a seguir uma definição de solução forte da equação (1.3). Para isso consideremos a filtração $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$ gerada pela variável aleatória X_0 e por $\{W_s, s \leq t\}$, especificamente,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_0; W_s, s \leq t).$$

Definição 1.13 *Uma solução forte da EDE (1.3) com condição inicial $X(t_0) = X_0$ é um processo estocástico $X = \{X_t, t \in [t_0, T]\}$ que satisfaz*

1. X é um processo adaptado à filtração $\{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\}$;
2. $P(X(t_0) = X_0) = 1$;
3. $P(\int_{t_0}^t \{|f(s, X_s)| + |g(s, X_s)|^2\}ds < \infty) = 1$;
4. X satisfaz a equação (1.4) para $t_0 \leq t \leq T$ quase certamente.

Em outras palavras, uma solução forte de uma EDE é uma função da trajetória do movimento Browniano. Se o movimento Browniano for substituído por outro, a solução forte é dada pela mesma relação funcional, porém com o novo movimento Browniano no lugar do anterior.

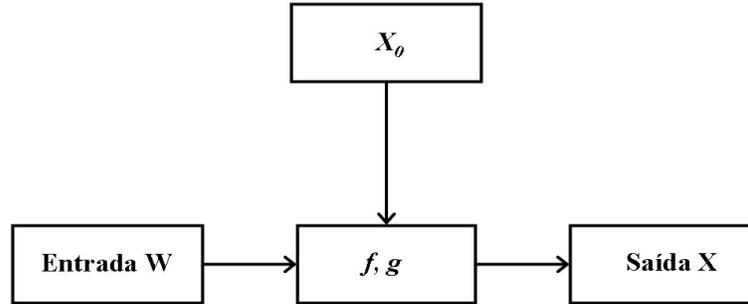


Figura 1.2: Interpretação da EDE como um sistema dinâmico.

Teorema 1.14 (*Existência e unicidade*) *Suponha que a condição inicial e os coeficientes da equação (1.3) satisfaçam:*

1. *Condição de Lipschitz: existe uma constante $k > 0$ tal que $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ e $\forall t \in [t_0, T]$*

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq k|x - y|;$$

2. *Restrição no crescimento: existe uma constante $c > 0$ tal que $\forall t \in [t_0, T]$ e $\forall x \in \mathbb{R}^d$,*

$$|f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \leq c(1 + |x|);$$

3. *X_0 é independente de $W(t) - W(t_0)$ para $t \geq t_0$.*

Então, a equação (1.3) tem uma única solução forte $X(t)$ em $[t_0, T]$ assumindo valores em \mathbb{R}^d , contínua com prob. 1, que satisfaz a condição inicial $X(t_0) = X_0$; isto é, se $X(t)$ e $Y(t)$ são soluções contínuas de (1.3) com o mesmo valor inicial X_0 , então

$$P[\sup_{t_0 \leq t \leq T} |X(t) - Y(t)| > 0] = 0.$$

Demonstração: ver [1], pág. 106. ■

Definição 1.15 *Uma equação diferencial estocástica*

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

para um processo $X(t)$ d -dimensional no intervalo $[t_0, T]$ é dita **linear** se as funções f e g são funções lineares de $x \in \mathbb{R}^d$, ou em outras palavras, se

$$f(t, x) = A(t)x + a(t),$$

onde $A(t)$ é uma matriz $d \times d$ e $a(t) \in \mathbb{R}^d$, e se

$$g(t, x) = (B_1(t)x + b_1(t), \dots, B_m(t)x + b_m(t)),$$

onde $B_k(t)$ é uma matriz $d \times d$ e $b_k(t) \in \mathbb{R}^d$. Assim, uma equação diferencial estocástica linear tem a forma

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))dt + \sum_{i=1}^m (B_i(t)X(t) + b_i(t))dW^i(t),$$

onde $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)^T$. É dita **homogênea** se $a(t) = b_1(t) = \dots = b_m(t) \equiv 0$. É dita **linear no sentido estrito** se $B_1(t) = \dots = B_m(t) \equiv 0$.

Vamos investigar equações da forma

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))dt + g(t)dW(t). \quad (1.5)$$

Assumindo que as funções $A(t)$, $a(t)$ e $g(t)$ satisfazem as condições do teorema (1.14), então existe para cada valor inicial $X(t_0) = X_0$ uma única solução.

Relembremos alguns conceitos familiares de sistemas lineares determinísticos (no caso em que $g(t) \equiv 0$).

A solução $\phi(t)$ da equação matricial (veja referência [3])

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t), \quad \phi(t_0) = I,$$

é chamada **matriz fundamental** do sistema

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + a(t).$$

A solução com valor inicial $X(t_0) = X_0$ pode ser representada com auxílio de $\phi(t)$, da seguinte forma

$$X(t) = \phi(t) \left(X_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)a(s)ds \right). \quad (1.6)$$

Se $A(t) \equiv A$ é independente de t , então

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \exp(A(t - t_0)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(t - t_0)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Dessa forma

$$X(t) = \exp(A(t - t_0))X_0 + \int_{t_0}^t \exp(A(t - s))a(s)ds.$$

Com este conhecimento, podemos determinar a solução da equação não homogênea (1.5).

Para demonstrar o próximo teorema faremos uso da fórmula de Ito, dada pelo teorema (1.11).

Teorema 1.16 *A equação diferencial estocástica linear (no sentido estrito)*

$$dX(t) = (A(t)X(t) + a(t))dt + g(t)dW(t)$$

tem como solução em $[t_0, T]$

$$X(t) = \phi(t) \left\{ X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(u)a(u)du + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(u)g(u)dW(u) \right\} \quad (1.7)$$

onde $\phi(t)$ é a matriz fundamental da equação determinística $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$.

Demonstração: seja

$$Y(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(u)a(u)du + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(u)g(u)dW(u),$$

$Y(t)$ tem diferencial estocástica

$$dY(t) = \phi^{-1}(t)(a(t)dt + g(t)dW(t)).$$

Então, pela fórmula de Ito (1.11), o processo

$$X(t) = \phi(t)Y(t)$$

tem diferencial estocástica

$$\begin{aligned}dX(t) &= \dot{\phi}(t)Y(t)dt + \phi(t)dY(t) \\ &= A(t)\phi(t)Y(t)dt + \phi(t)[\phi^{-1}(t)(a(t)dt + g(t)dW(t))] \\ &= A(t)\phi(t)Y(t)dt + a(t)dt + g(t)dW(t) \\ &= (A(t)X(t) + a(t))dt + g(t)dW(t)\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

1.3 Expansão de Ito-Taylor Estocástica

1.3.1 Multi-índices

Chamaremos um vetor

$$\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l),$$

onde

$$j_i \in \{0, 1, \dots, m\}$$

para $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ e $m = 1, 2, 3, \dots$, um multi-índice de comprimento

$$l := l(\alpha) \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Aqui m denotará o número de componentes do processo de Wiener em consideração. Denotamos por v o multi-índice de comprimento zero, com

$$l(v) := 0.$$

Exemplos:

$$l((1, 0)) = 2 \text{ e } l((1, 0, 1)) = 3.$$

Continuando, escreveremos $n(\alpha)$ para o número de componentes de um multi-índice α que são iguais a zero. Por exemplo,

$$n((1, 0, 1)) = 1, \quad n((0, 1, 0)) = 2 \text{ e } n((0, 0)) = 2.$$

Denotamos o conjunto de todos os multi-índices por \mathcal{M} , assim

$$\mathcal{M} = \{(j_1, j_2, \dots, j_l) : j_i \in \{0, 1, \dots, m\}, i \in \{1, \dots, l\}, \text{ para } l = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{v\}.$$

Dado $\alpha \in \mathcal{M}$ com $l(\alpha) \geq 1$, escrevemos $-\alpha$ e $\alpha-$ para o multi-índice em \mathcal{M} obtido excluindo de α a primeira e a última componente, respectivamente. Assim

$$-(1, 0) = (0), \quad (1, 0)- = (1)$$

$$-(0, 1, 1) = (1, 1), \quad (0, 1, 1)- = (0, 1).$$

1.3.2 Integrais Múltiplas de Ito

Usaremos a seguinte notação para a integral múltipla de Ito. Sejam s e t dois tempos de parada (relativo à σ -álgebra $\mathcal{N}_t = \sigma(X_t; 0 \leq t \leq s)$) com

$$0 \leq t(\omega) \leq s(\omega) \leq T,$$

com prob. 1. Então, para um multi-índice $\alpha = (j_1, j_2, \dots, j_l) \in \mathcal{M}$ e um processo X definiremos a integral múltipla de Ito $I_\alpha[X(\cdot)]_{t,s}$ recursivamente por

$$I_\alpha[X(\cdot)]_{t,s} = \begin{cases} X(s) & : l = 0, \\ \int_t^s I_{\alpha-}[X(\cdot)]_{t,u} du & : l \geq 1 \text{ e } j_l = 0, \\ \int_t^s I_{\alpha-}[X(\cdot)]_{t,u} dW_u^{j_l} & : l \geq 1 \text{ e } j_l \geq 1. \end{cases}$$

Como ilustração, consideremos os seguintes exemplos:

$$\begin{aligned} I_v[X(\cdot)]_{0,t} &= X(t), \\ I_{(0)}[X(\cdot)]_{t_i,t_{i+1}} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} X(u) du, \\ I_{(1)}[X(\cdot)]_{t,s} &= \int_t^s X(u) dW_u^1, \\ I_{(0,1)}[X(\cdot)]_{0,t} &= \int_0^t \int_0^{u_2} X(u_1) du_1 dW_{u_2}^1, \\ I_{(0,2,1)}[X(\cdot)]_{0,s} &= \int_0^s \int_0^{u_3} \int_0^{u_2} X(u_1) du_1 dW_{u_2}^2 dW_{u_3}^1, \end{aligned}$$

para um processo X apropriado.

1.3.3 Funções Coeficientes de Ito

Introduziremos, agora, as funções que serão utilizadas mais tarde para definir os coeficientes da expansão de Ito-Taylor estocástica.

Escreveremos o operador difusão para a equação de Ito

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t g^j(s, X_s) dW_s^j$$

como

$$L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d f^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m g^{k,j} g^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}$$

e para $j \in \{1, \dots, m\}$ introduzimos o operador

$$L^j = \sum_{k=1}^d g^{k,j} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Para cada $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$ e uma função $f \in C^h(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ com $h = l(\alpha) + n(\alpha)$ definimos recursivamente a função coeficiente de Ito

$$f_\alpha = \begin{cases} f & : l = 0, \\ L^{j_1} f_{-\alpha} & : l \geq 1. \end{cases}$$

1.3.4 Conjuntos Hierárquico e de Resto

As integrais múltiplas estocásticas que aparecem na expansão de Ito-Taylor estocástica com integrando constante não podem ser escolhidas de modo completamente arbitrário. Antes, um conjunto de multi-índices correspondentes deve formar um conjunto hierárquico.

Chamamos um conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ de conjunto hierárquico se:

- i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$;
- ii) os multi-índices em \mathcal{A} são uniformemente limitados em comprimento:

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} l(\alpha) < \infty;$$

- iii) $-\alpha \in \mathcal{A}$ para cada $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{v\}$, onde v é o multi-índice de comprimento zero.

Por exemplo, os conjuntos

$$\{v\}, \{v, (0), (1)\} \text{ e } \{v, (0), (1), (1, 1)\}$$

são conjuntos hierárquicos.

Quando escrevemos uma expansão de Ito-Taylor estocástica para um dado conjunto hierárquico, os termos envolvidos no resto são somente aquelas integrais múltiplas estocásticas com multi-índices que pertencem ao conjunto de resto correspondente. Para algum conjunto hierárquico dado \mathcal{A} , definimos o conjunto de resto $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} por

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{A} : -\alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Por exemplo, quando $m = 1$, temos para os conjuntos hierárquicos dados, os seguintes conjuntos de resto

$$\mathcal{B}(\{v\}) = \{(0), (1)\}, \quad \mathcal{B}(\{v, (0), (1)\}) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\},$$

$$\mathcal{B}(\{v, (0), (1), (1, 1)\}) = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}.$$

1.3.5 Expansão de Ito-Taylor Estocástica

Introduziremos, agora, a expansão de Ito-Taylor estocástica para um processo de Ito d -dimensional

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t b^j(s, X_s) dW_s^j$$

onde $t \in [t_0, T]$, usando a notação introduzida anteriormente.

Teorema 1.17 *Sejam s e t dois tempos de parada (relativo à σ -álgebra $\mathcal{N}_t = \sigma(X_t; 0 \leq t \leq s)$) com*

$$t_0 \leq t(\omega) \leq s(\omega) \leq T,$$

com probabilidade 1; seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ um conjunto hierárquico; e seja $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Então, a expansão de Ito-Taylor estocástica

$$f(s, X(s)) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha[f_\alpha(t, X(t))]_{t,s} + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} I_\alpha[f_\alpha(\cdot, X(\cdot))]_{t,s} \quad (1.8)$$

é verdadeira, contanto que todas as derivadas de f , a e b e todas as integrais múltiplas de Ito aparecendo em (1.8) existam.

Demonstração: ver [12], pág. 186. ■

Capítulo 2

Método da Linearização Local

Neste capítulo serão descritas as construções de duas versões recentes do método numérico da Linearização Local. A primeira delas chamada B-LL foi proposta por Biscay, Jimenez, Riera e Valdes [2]. A segunda, chamada N-LL, dada por Jimenez, Shoji e Ozaki [9], visando melhorar as aproximações dadas pela versão B-LL.

2.1 Método B-LL da Linearização Local

Consideremos uma equação diferencial estocástica multidimensional não autônoma, e que, representa o caso com ruído aditivo, ou seja, o termo de difusão não depende de x :

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t)dW(t), \quad X(t_0) = X_0 \quad (2.1)$$

Assumimos as condições padrão de existência e unicidade de solução e que as funções $f(t, x)$ e $g(t)$ são continuamente diferenciáveis em relação às variáveis x e t .

Consideremos as formulações do método da Linearização Local (LL) feitas por Biscay, Jimenez, Riera e Valdes [2], as quais são dadas a partir dos seguintes passos:

1. Linearização local do coeficiente de deslocamento em cada intervalo de tempo $[t, t + h]$ por meio da expansão de Taylor determinística;
2. Cálculo analítico da solução da EDE linear;
3. Aproximação da integral de Ito que aparece na solução obtida no passo (2), por meio da regra do trapézio.

1º passo:

Consideremos a expansão de Taylor determinística da função f ,

$$f(s, x(s)) = f(t, x(t)) + \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x}(x(s) - x(t)) + \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t}(s - t) + \dots,$$

onde t é um número fixo em $[t_0, T)$, $s \in [t, t + h]$ e h é o tamanho do passo.

Assim,

$$f(s, x(s)) \approx f(t, x(t)) + \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x}(x(s) - x(t)) + \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t}(s - t).$$

Definimos

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial X} \\ a(s, t) &= f(t, X(t)) - \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial X}X(t) + \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t}(s - t) \end{aligned}$$

para obter a seguinte aproximação linear para a equação (2.1):

$$dX(s) = (A(t)X(s) + a(s, t))dt + g(s)dW(s), \quad s \in [t, t + h]. \quad (2.2)$$

2º passo:

A solução explícita da equação (2.2) num ponto $s = t + h$ é dada por (veja referência [1])

$$\begin{aligned} X(t + h) &= \phi(t + h) \left\{ X(t) + \int_t^{t+h} \phi^{-1}(u) a(u, t) du \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{t+h} \phi^{-1}(u) g(u) dW(u) \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\phi(u) = \exp(A(t)(u - t))$ é a matriz fundamental da equação determinística $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$.

Assim,

$$\begin{aligned} X(t + h) &= \phi(t + h)X(t) + \phi(t + h) \int_t^{t+h} \phi^{-1}(u) a(u, t) du \\ &\quad + \phi(t + h) \int_t^{t+h} \phi^{-1}(u) g(u) dW(u). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(u) &= [\exp(A(t)(u - t))]^{-1} \\ &= \exp(A(t)(t - u)) \\ &= \exp(A(t)(-u + 2t - t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\phi^{-1}(u) = \phi(-u + 2t).$$

Daí

$$\begin{aligned} X(t+h) &= \phi(t+h)X(t) + \phi(t+h) \int_t^{t+h} \phi(-u+2t)a(u,t)du \\ &\quad + \phi(t+h) \int_t^{t+h} \phi(-u+2t)g(u)dW(u) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} X(t+h) &= \phi(t+h)X(t) + \int_t^{t+h} \phi(h-u+2t)a(u,t)du \\ &\quad + \int_t^{t+h} \phi(h-u+2t)g(u)dW(u). \end{aligned}$$

Com a igualdade

$$u = h - v + 2t \Rightarrow \begin{cases} u = t \Rightarrow v = h + t \\ u = t + h \Rightarrow v = t \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} \phi(h-u+2t)a(u,t)du &= - \int_{t+h}^t \phi(v)a(h-v+2t,t)dv \\ &= \int_t^{t+h} \phi(v)a(h-v+2t,t)dv. \end{aligned}$$

Além disso, para

$$u = v - t \Rightarrow \begin{cases} v = t \Rightarrow u = 0 \\ v = t + h \Rightarrow u = h \end{cases}$$

temos

$$\int_t^{t+h} \phi(h-u+2t)a(u,t)du = \int_0^h \phi(u+t)a(h-u+t,t)du.$$

Como

$$a(s,t) = f(t, x(t)) - A(t)x(t) + \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial t}(s-t),$$

segue que

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} \phi(h-u+2t)a(u,t)du &= \int_0^h \phi(u+t) \left[f(t, X(t)) - A(t)X(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t}(h-u) \right] du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^h \exp(A(t)u) du f(t, X(t)) \\
&\quad - \int_0^h \exp(A(t)u) du A(t) X(t) \\
&\quad + \left(h \int_0^h \exp(A(t)u) du \right. \\
&\quad \left. - \int_0^h \exp(A(t)u) u du \right) \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} \\
&= r_0(A(t), h) f(t, X(t)) - r_0(A(t), h) A(t) X(t) \\
&\quad + \left(h r_0(A(t), h) - r_1(A(t), h) \right) \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t},
\end{aligned}$$

com

$$r_n(M, a) = \int_0^a \exp(Mu) u^n du. \quad (2.4)$$

Observação 2.1 Para calcular a integral (2.4) usamos o método de Shur [5, pag.542]

$$\begin{aligned}
r_n(M, a) &= a^{n+1} n! \left\{ (-Ma)^{-n-1} (I - \exp(Ma)) \right. \\
&\quad \left. - \exp(Ma) \sum_{k=0}^{n-1} (-Ma)^{-k-1} / (n-k)! \right\},
\end{aligned}$$

onde \mathbf{M} é uma matriz quadrada não singular e \mathbf{a} um número real positivo.

Daí

$$\begin{aligned}
-r_0(A(t), h) A(t) X(t) &= -h \left\{ (-A(t)h)^{-1} (I - \exp(A(t)h)) \right\} A(t) X(t) \\
&= X(t) - (-A(t)h)^{-1} \exp(A(t)h) (-A(t)h) X(t) \\
&= X(t) - \exp(A(t)h) X(t).
\end{aligned}$$

Assim, a equação (2.3) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
X(t+h) &= X(t) + r_0(A(t), h) f(t, X(t)) \\
&\quad + \left(h r_0(A(t), h) - r_1(A(t), h) \right) \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} + \xi(t, X(t); h) \quad (2.5)
\end{aligned}$$

onde

$$\xi(t, X(t); h) = \int_t^{t+h} \phi(h-u+2t) g(u) dW(u).$$

3º passo:

Para aproximar a integral de Ito envolvida na definição de ξ , utilizamos a seguinte propriedade [17, pag.66]:

$$\int_a^b \Psi(u) dW(u) = \Psi(b)W(b) - \Psi(a)W(a) - \int_a^b \Psi'(u)W(u)du, \quad (2.6)$$

para alguma função Ψ determinística suave com derivada Ψ' . Assim,

$$\begin{aligned} \xi(t, X(t); h) &= g(t+h)W(t+h) - \phi(t+h)g(t)W(t) + \\ &\quad \int_t^{t+h} \phi(2t-u+h)(A(t)g(u) - g'(u))W(u)du, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $\Psi(u) = \phi(2t-u+h)g(u)$.

A integral que aparece na equação (2.7) é aproximada pela regra do trapézio,

$$\int_t^{t+h} G(W(u), u)du \approx \left(G(W(t+h), t+h) + G(W(t), t) \right) \frac{h}{2}. \quad (2.8)$$

Pela aplicação da regra do trapézio na integral da expressão (2.7), obtemos a seguinte aproximação

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t, X(t); h) &= g(t+h)W(t+h) - \phi(t+h)g(t)W(t) \\ &\quad + \left((A(t)g(t+h) - g'(t+h))W(t+h) \right. \\ &\quad \left. + \phi(t+h)(A(t)g(t) - g'(t)W(t)) \right) \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Obtemos, então,

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t, X(t); h) &= \left\{ g(t+h) + \frac{(A(t)g(t+h) - g'(t+h))h}{2} \right\} W(t+h) \\ &\quad + \phi(t+h) \left\{ \frac{(A(t)g(t) - g'(t))h}{2} - g(t) \right\} W(t). \end{aligned}$$

Assim, o método numérico da Linearização Local é definido pela computação iterativa da expressão

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + \Phi(t_n, X(t_n); h) + \tilde{\xi}(t_n, X(t_n); h), \quad (2.9)$$

com discretização de tempo $t_n = t_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, começando com $X_{t_0} = X_0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \Phi(t_n, X(t_n); h) &= r_0(A(t_n), h)f(t_n, X_{t_n}) + \\ &\quad \left(hr_0(A(t_n), h) - r_1(A(t_n), h) \right) \frac{\partial f(t_n, X_{t_n})}{\partial t} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t_n, X(t_n); h) &= \left\{ \frac{(A(t_n)g(t_{n+1}) - g'(t_{n+1}))h}{2} + g(t_{n+1}) \right\} W(t_{n+1}) \\ &\quad + \phi(t_{n+1}) \left\{ \frac{(A(t_n)g(t_n) - g'(t_n))h}{2} - g(t_n) \right\} W(t_n). \end{aligned}$$

2.2 Método N-LL da Linearização Local

Introduziremos, agora, as novas formulações do método da Linearização Local [9], que melhora a aproximação dada pelo método B-LL. São dadas a partir dos seguintes passos:

1. Linearização local do coeficiente de deslocamento em cada intervalo de tempo $[t, t + h]$ por meio do truncamento da expansão de Ito-Taylor estocástica;
2. Cálculo analítico da solução da EDE linear;
3. Aproximação da integral de Ito envolvida na solução obtida no passo (2), por meio da regra do trapézio repetida.

Considere uma EDE multidimensional não-autônoma com ruído aditivo. As condições padrão de existência e unicidade de solução forte são assumidas. Considere ainda, que f seja duas vezes continuamente diferenciável em relação à variável x , e que, f e g sejam continuamente diferenciáveis em relação à variável t .

1º passo:

Seja $t \in [t_0, T]$ fixado e $\mathcal{A} = \{v, (0), (1), \dots, (m)\}$ um conjunto hierárquico, onde v denota o multi-índice de comprimento zero, logo $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{(0, 1), \dots, (0, m), (1, 1), \dots, (m, m)\}$. Pelo teorema da expansão de Ito-Taylor estocástica (1.17) temos

$$f^i(s, X(s)) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha [f_\alpha^i(t, X(t))]_{t,s} + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} I_\alpha [f_\alpha^i(\cdot, X(\cdot))]_{t,s},$$

onde $f = (f^1, \dots, f^d)$.

Para a i -ésima componente, da função f , denotamos o resto da expansão por $R_{f^i} = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} I_\alpha [f_\alpha^i(\cdot, X(\cdot))]_{t,s}$. Obtemos, portanto,

$$\begin{aligned} f^i(s, X(s)) &= I_v [f_v^i(t, X(t))]_{t,s} + I_{(0)} [f_{(0)}^i(t, X(t))]_{t,s} + \dots + \\ &\quad + I_{(m)} [f_{(m)}^i(t, X(t))]_{t,s} + R_{f^i}. \end{aligned}$$

Logo,

$$f^i(s, X(s)) = f^i(t, X(t)) + \int_t^s f_{(0)}^i(t, X(t)) du + \int_t^s f_{(1)}^i(t, X(t)) dW_u^1 + \dots + \int_t^s f_{(m)}^i(t, X(t)) dW_u^m + R_{f^i}$$

e

$$f^i(s, X(s)) = f^i(t, X(t)) + L^0 f^i(t, X(t)) \int_t^s du + L^1 f^i(t, X(t)) \int_t^s dW_u^1 + \dots + L^m f^i(t, X(t)) \int_t^s dW_u^m + R_{f^i}.$$

Assim,

$$f(s, X(s)) = f(t, X(t)) + L^0 f(t, X(t)) \int_t^s du + \sum_{j=1}^m L^j f(t, X(t)) \int_t^s dW_u^j + R_f$$

e

$$\begin{aligned} f(s, X(s)) &= f(t, X(t)) + \left\{ \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} + Jf(t, X(t))f(t, X(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d [g(t)g^T(t)]^{k,l} \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial X^k \partial X^l} \right\} (s-t) + \\ &\quad + Jf(t, X(t))g(t) \int_t^s dW(u) + R_f, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $Jf(t, X(t))$ é a matriz jacobiana da função f e $g^T(t)$ denota a transposta da matriz $g(t)$.

Da mesma forma temos

$$X^i(s) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha[X_\alpha^i(t)]_{t,s} + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} I_\alpha[X_\alpha^i(\cdot)]_{t,s},$$

onde $X = (X^1, \dots, X^d)$.

Para a i -ésima componente, do processo X , denotamos o resto da expansão por $R_{X^i} = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{A})} I_\alpha[X_\alpha^i(\cdot)]_{t,s}$. Obtemos, então,

$$\begin{aligned} X^i(s) &= I_v[X_v^i(t)]_{t,s} + I_{(0)}[X_{(0)}^i(t)]_{t,s} + \dots + \\ &\quad + I_{(m)}[X_{(m)}^i(t)]_{t,s} + R_{X^i} \end{aligned}$$

$$X^i(s) = X^i(t) + \int_t^s X_{(0)}^i(t) du + \int_t^s X_{(1)}^i(t) dW_u^1 + \dots + \int_t^s X_{(m)}^i(t) dW_u^m + R_{X^i}$$

$$X^i(s) = X^i(t) + L^0 X^i(t) \int_t^s du + L^1 X^i(t) \int_t^s dW_u^1 + \dots + L^m X^i(t) \int_t^s dW_u^m + R_{X^i}.$$

Assim

$$X(s) = X(t) + L^0 X(t) \int_t^s du + \sum_{j=1}^m L^j X(t) \int_t^s dW_u^j + R_X.$$

Note que

$$L^0 X^i = \frac{\partial X^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^d \frac{\partial X^i}{\partial X^k} f^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m g^{k,l} g^{l,j} \frac{\partial^2 X^i}{\partial X^k \partial X^l}$$

e

$$L^j X^i = \sum_{k=1}^d \frac{\partial X^i}{\partial X^k} g^{k,j}.$$

Logo,

$$L^0 X(t) = f(t, X(t)) \text{ e } \sum_{j=1}^m L^j X(t) = g(t).$$

Daí, segue que

$$X(s) = X(t) + f(t, X(t))(s-t) + g(t) \int_t^s dW_u + R_X. \quad (2.11)$$

Com as expansões (2.10) e (2.11) e removendo os restos, obtemos

$$\begin{aligned} f(s, X(s)) &\approx f(t, X(t)) + \\ &+ \left\{ \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d [g(t)g^T(t)]^{k,l} \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial X^k \partial X^l} \right\} (s-t) + \\ &+ Jf(t, X(t))(X(s) - X(t)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

A linearização da função f (dada pelo lado direito da expressão (2.12)) na expressão (2.1) conduz a EDE linear

$$dX(s) = (A(t)X(s) + a(s, t))ds + g(s)dW(s), \quad (2.13)$$

onde

$$\begin{aligned} A(t) &= Jf(t, X(t)) \\ a(s, t) &= f(t, X(t)) + \left\{ \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d [g(t)g^T(t)]^{k,l} \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial X^k \partial X^l} \right\} (s-t) \\ &\quad - Jf(t, X(t))X(t). \end{aligned}$$

2º passo:

Seja h um número positivo. Dado que a equação (2.13) é uma aproximação da equação (2.1), para $s \in [t, t+h]$, a solução exata em um ponto $s = t+h$ é dada por (veja referência [1])

$$X(t+h) = \phi(t+h) \left\{ X(t) + \int_t^{t+h} \phi^{-1}(u)a(u,t)du + \int_t^{t+h} \phi^{-1}(u)g(u)dW(u) \right\}. \quad (2.14)$$

De forma análoga ao B-LL, obtemos

$$X(t+h) = X(t) + \Phi(t, X(t); h) + \xi(t, X(t); h) \quad (2.15)$$

onde

$$\xi(t, X(t); h) = \int_t^{t+h} \phi(h-u+2t)g(u)dW(u)$$

e

$$\begin{aligned} \Phi(t, X(t); h) &= r_0(A(t), h)f(t, X(t)) + \\ &\quad (hr_0(A(t), h) - r_1(A(t), h)) \times \\ &\quad \left(\frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d [g(t)g^T(t)]^{k,l} \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial X^k \partial X^l} \right). \end{aligned}$$

3º passo:

Dado que a integral envolvida na definição de ξ é uma integral de Ito, utilizamos a equação (2.6) e aplicamos a regra do trapézio repetida, para aproximar ξ por

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t, X(t); h) &= g(t+h)W(t+h) - \phi(t+h)g(t)W(t) \\ &\quad - \frac{h}{2r} \sum_{k=0}^{r-1} \left\{ \phi(2t+h-\sigma_{k+1})[g'(\sigma_{k+1}) - A(t)g(\sigma_{k+1})]W(\sigma_{k+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \phi(2t+h-\sigma_k)[g'(\sigma_k) - A(t)g(\sigma_k)]W(\sigma_k) \right\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $\sigma_k = t + k(\frac{h}{r})$, e r é um número inteiro tal que $r \approx \frac{1}{h}$.

Finalmente, o método da linearização local que aproxima a solução de (2.1) é definido pela computação iterativa da expressão

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + \Phi(t_n, X(t_n); h) + \tilde{\xi}(t_n, X(t_n); h) \quad (2.17)$$

com discretização de tempo $t_n = t_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, começando de $X_{t_0} = X_0$.

As equações (2.9) e (2.17) permitem-nos verificar duas diferenças do método N-LL em relação ao método B-LL: (1) um termo adicional que envolve a derivada segunda do coeficiente de deslocamento e (2) regras distintas de integração trapezoidal.

2.3 Métodos LL para Sistemas Lineares

É importante observar que soluções numéricas a partir de ambos os métodos (B-LL e N-LL) coincidem com a solução exata no caso de EDE linear com coeficiente de difusão nulo ($g \equiv 0$), ou seja, o método é exato para um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares.

Nesse caso, as expressões de iteração computacional dos métodos LL reduzem-se a

$$\begin{aligned} X(t+h) &= X(t) + r_0(A(t), h)f(t, X(t)) + \\ &\quad + \left(hr_0(A(t), h) - r_1(A(t), h) \right) \times \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t}, \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$X(t) = \phi(t) \left\{ X_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)a(s)ds \right\}.$$

De fato, coincide com a solução geral do sistema linear (1.6).

Como ilustração, consideremos o exemplo a seguir

Exemplo 2.2 *Seja*

$$\dot{X}(t) = 1 - t + 4X(t), \quad X(0) = 1;$$

uma EDO linear, cuja solução exata é dada por

$$X(t) = \frac{1}{4}t - \frac{3}{16} + \frac{19}{16} \exp(4t).$$

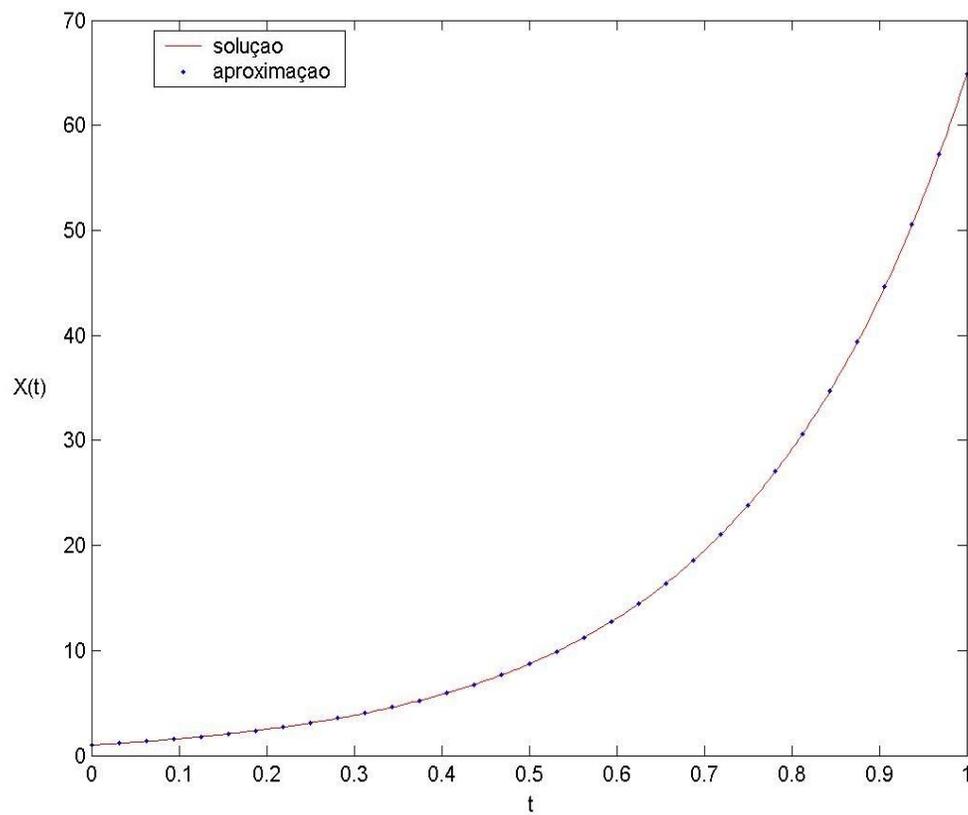


Figura 2.1: O método LL é exato para EDO linear.

Na figura (2.1), certificamos graficamente a exatidão do método LL no caso de uma EDO linear.

Capítulo 3

Testes Numéricos

Neste capítulo, definimos ordem global de convergência forte, que é um dos meios usados para verificar a precisão de um método numérico para EDE. Fazemos uma estimativa da ordem de convergência para o método clássico de Euler-Maruyama [7]. É ilustrado também, graficamente, uma das vantagens do método LL, em muitos casos esse método preserva a característica qualitativa da solução exata.

3.1 Convergência

A performance do método LL para soluções numéricas de EDE não-linear tem sido ilustrada em vários artigos, desde sua primeira versão em 1985 realizada por T. Ozaki. Um estudo comparativo entre o método B-LL e outros métodos clássicos foi ilustrado na referência [2], onde estão demonstradas algumas vantagens do B-LL sobre os outros. Mostra ainda, por meio de simulações, que o método B-LL converge fortemente com ordem global $\beta = 2$. Em outro estudo comparativo [9], mostra-se, por meio de simulação, que o método N-LL converge fortemente com ordem global $\beta = 3$.

Definição 3.1 *Um método numérico X_{t_n} converge fortemente com ordem global $\beta \in (0, \infty]$ para a solução X se existe uma constante K finita e uma constante h_0 positiva tal que*

$$E(|X(T) - X_{t_N}|^2 \mid X(t_0) = X_{t_0} = X_0) \leq Kh^\beta$$

para $t_N = t_0 + Nh = T$ com tamanho máximo do passo $h \in (0, h_0)$.

Uma outra definição de ordem global β' de convergência forte é dada por

$$E(|X(T) - X_{t_N}| \mid X(t_0) = X_{t_0} = X_0) \leq Kh^{\beta'}$$

com $\beta = 2\beta'$ [12].

A ordem forte de convergência (3.1) mede a velocidade em que “a média do erro quadrático” decresce quando $h \rightarrow 0$.

O erro global é decomposto como nas referências [2] e [16]:

$$E(|X(T) - X_{t_N}|^2) \leq E(|X(T) - \tilde{X}(T)|^2) + E(|\tilde{X}(T) - X_{t_N}|^2),$$

onde \tilde{X} é uma discretização da solução exata. A quantidade $e = E(|\tilde{X}(T) - X_{t_N}|^2)$, chamada parte determinística do erro, é usada para caracterizar o erro global.

Podemos estimar numericamente a ordem de convergência, desde que, para alguma constante K positiva, tenhamos

$$e(h) \approx Kh^\beta.$$

Obtendo, então,

$$\log_2 e(h) \approx \log_2 K + \beta \log_2 h.$$

Dessa forma, a ordem de convergência é estimada pela inclinação da reta ajustada ao conjunto de pontos $\{\log_2(h_i), \log_2(e(h_i))\}_{i=1, \dots, p}$, onde $e(h)$ é dado por

$$e(h) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\tilde{X}^k(T) - X_{t_N}^k)^2,$$

esclarecemos que o subscrito k significa a k -ésima trajetória de cada solução.

Como ilustração, faremos o teste de convergência do método de Euler-Maruyama, que é definido pela computação iterativa da expressão (veja referência [7])

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + f(t_n, X(t_n))h + g(t_n, X(t_n))dW(t_n)$$

com discretização de tempo $t_n = t_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, começando de $X_{t_0} = X_0$.

Exemplo 3.2 *Seja*

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW(t), \quad X(0) = 1$$

uma EDE escalar e sua solução exata dada por

$$X(t) = X(0) \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right)$$

onde $\lambda = 2$ e $\mu = 1$.

Para $h = 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}, 2^{-8}, 2^{-9}$; $T = 1$ e $M = 1000$.

O método de Euler-Maruyama tem ordem de convergência $\beta \approx 1$, a qual podemos confirmar pela reta tracejada de inclinação 1 como referência (Figura 3.1).

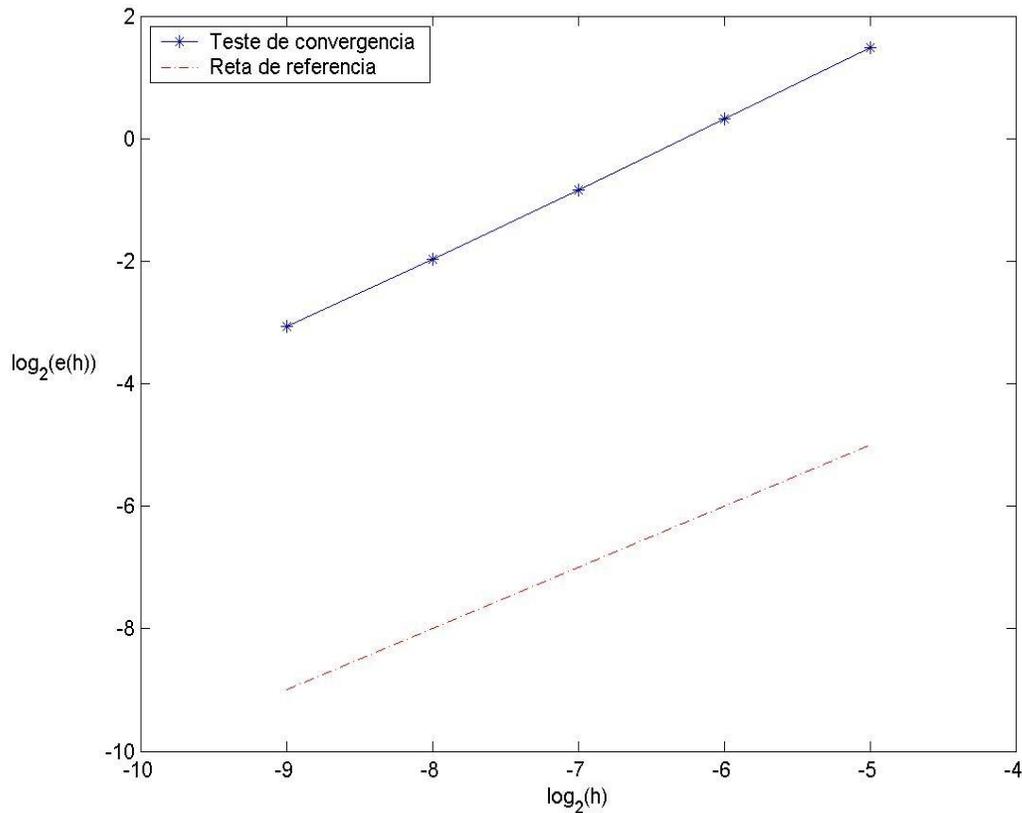


Figura 3.1: Teste de convergência para o método de Euler-Maruyama

3.2 Exemplos Numéricos

Uma outra vantagem do método LL é que, em alguns exemplos, preserva a propriedade qualitativa da solução exata, enquanto que outros métodos explícitos

não fazem isso. Veremos isso a seguir.

Exemplo 3.3 Considere a equação escalar não-autônoma

$$dX(t) = (-t^2 X(t))dt + \frac{3 \exp(-(t^3 - t_0^3)/3)}{2(t+1)} dW(t),$$

$$t_0 = 0, \quad T = 9, \quad X(t_0) = 1,$$

cuja solução exata é dada por

$$X(t) = \exp(-(t^3 - t_0^3)/3) \left(X(t_0) + \frac{3}{2} \int_{t_0}^t \frac{1}{u+1} dW(u) \right).$$

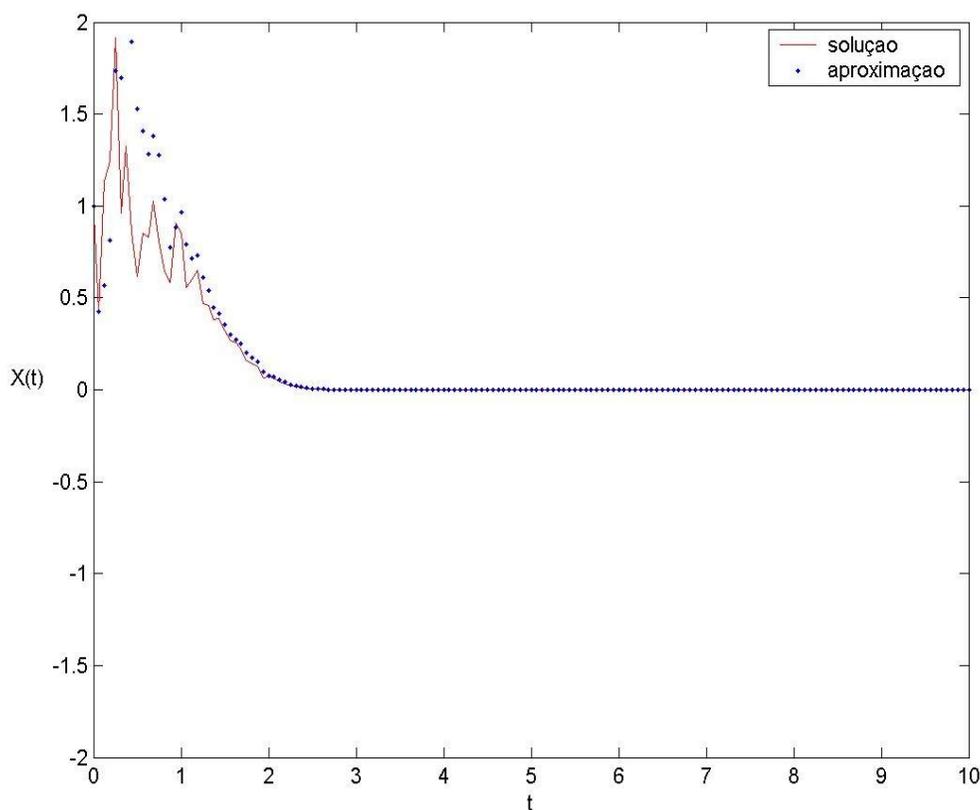


Figura 3.2: Aproximação pelo método LL.

Temos que a trajetória da solução aproximada pelo método LL (Figura 3.2) converge para zero, que é a única singularidade assintoticamente estável dessa equação.

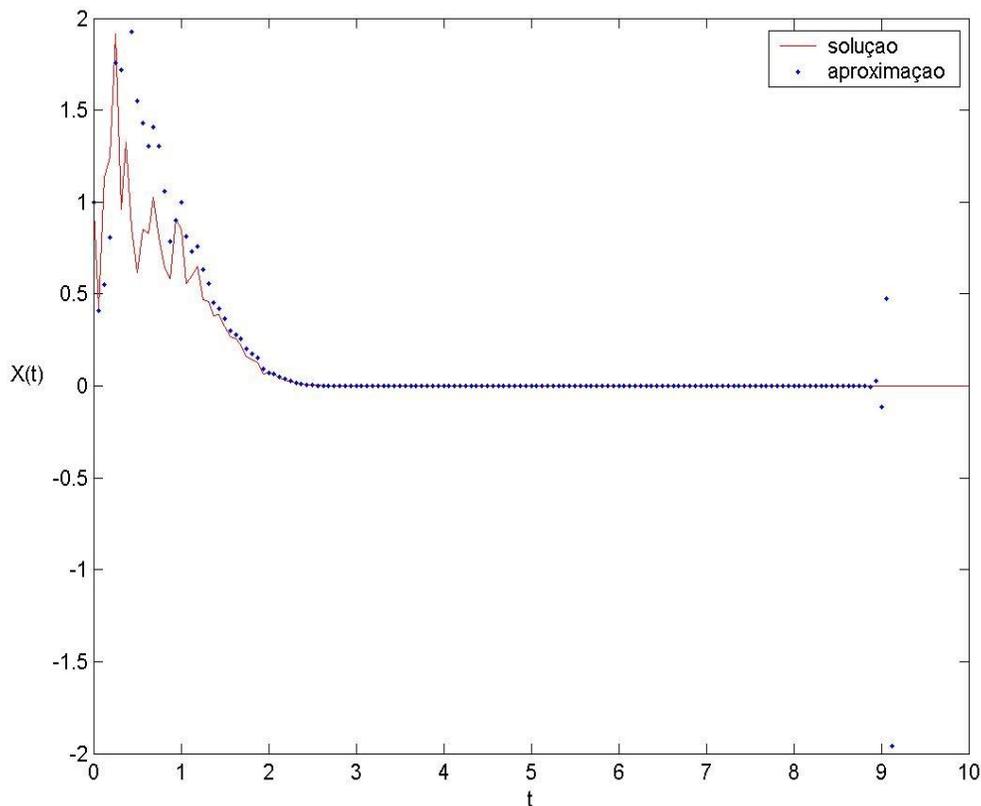


Figura 3.3: Aproximação pelo método de Euler-Maruyama.

Em contraste, a aproximação pelo método de Euler-Maruyama dá uma trajetória explosiva (Figura 3.3) para $t > 9$.

O método de Taylor Explícito, desenvolvido por Kloeden e Platen [12], que é um dos melhores métodos existentes, do ponto de vista de ordem de convergência forte ($\beta = 3$), de acordo com estudo comparativo de Saito e Mitsui [16], também dá uma trajetória explosiva [2].

Nas figuras 3.4-3.6 comparamos, para vários valores de h , a solução exata da EDE do exemplo (3.4) com as aproximações pelo método LL. Podemos verificar, graficamente, como o método aproxima do processo solução ao diminuir o tamanho do passo h .

Exemplo 3.4 *Seja*

$$dX(t) = (\exp(-X(t)) + 1)dt + \frac{5}{2}dW(t)$$

$$t_0 = 0, \quad T = 1, \quad X(0) = \frac{1}{2}$$

uma EDE escalar e sua solução exata

$$X(t) = \frac{1}{2} + t + \frac{5}{2}W(t) + \ln \left(1 + \int_0^t \exp \left(-\frac{1}{2} - u - \frac{5}{2}W(u) \right) du \right).$$

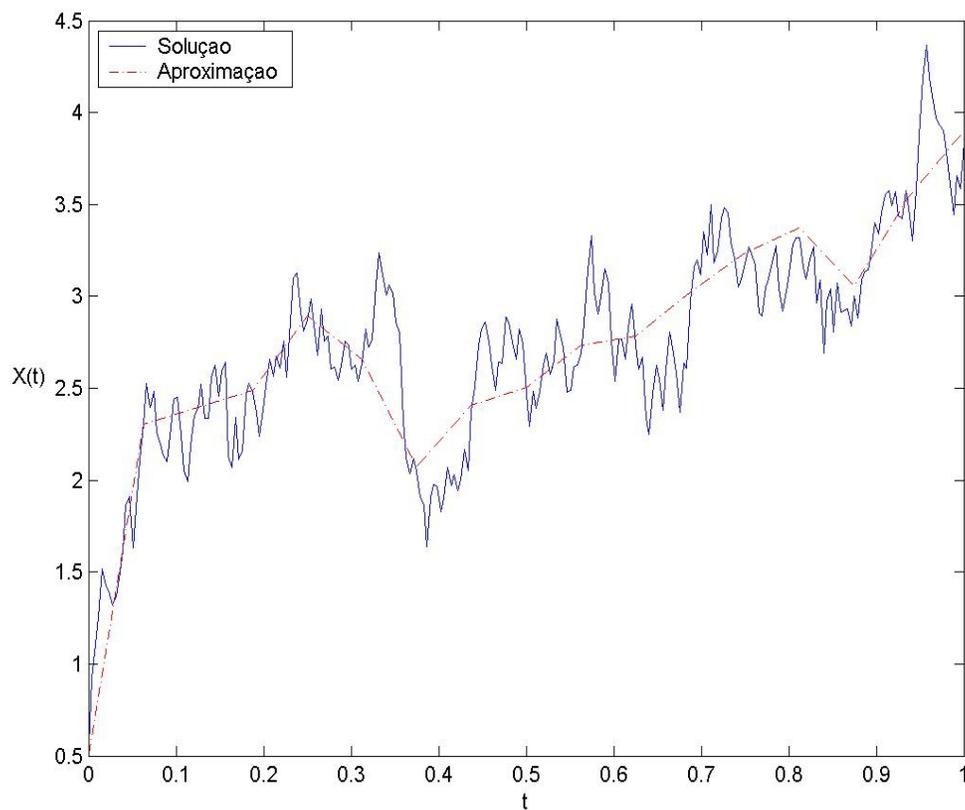


Figura 3.4: Comparação de uma aproximação (LL) com a solução para $h = 2^{-4}$.

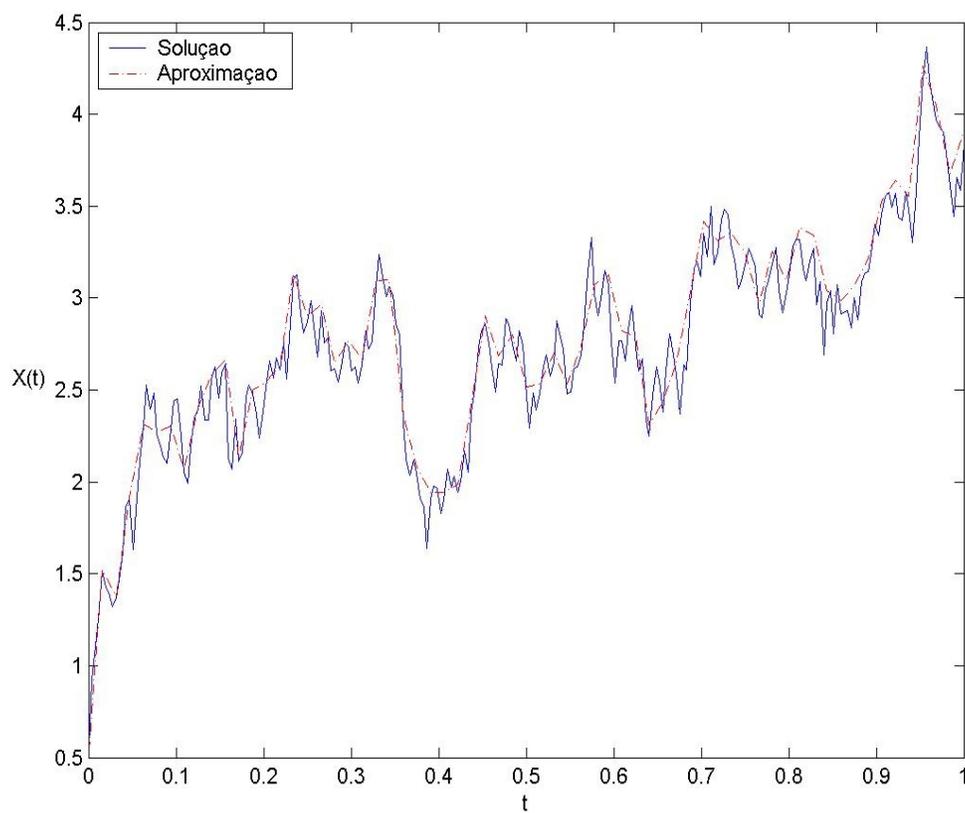


Figura 3.5: Comparação de uma aproximação (LL) com a solução para $h = 2^{-6}$.

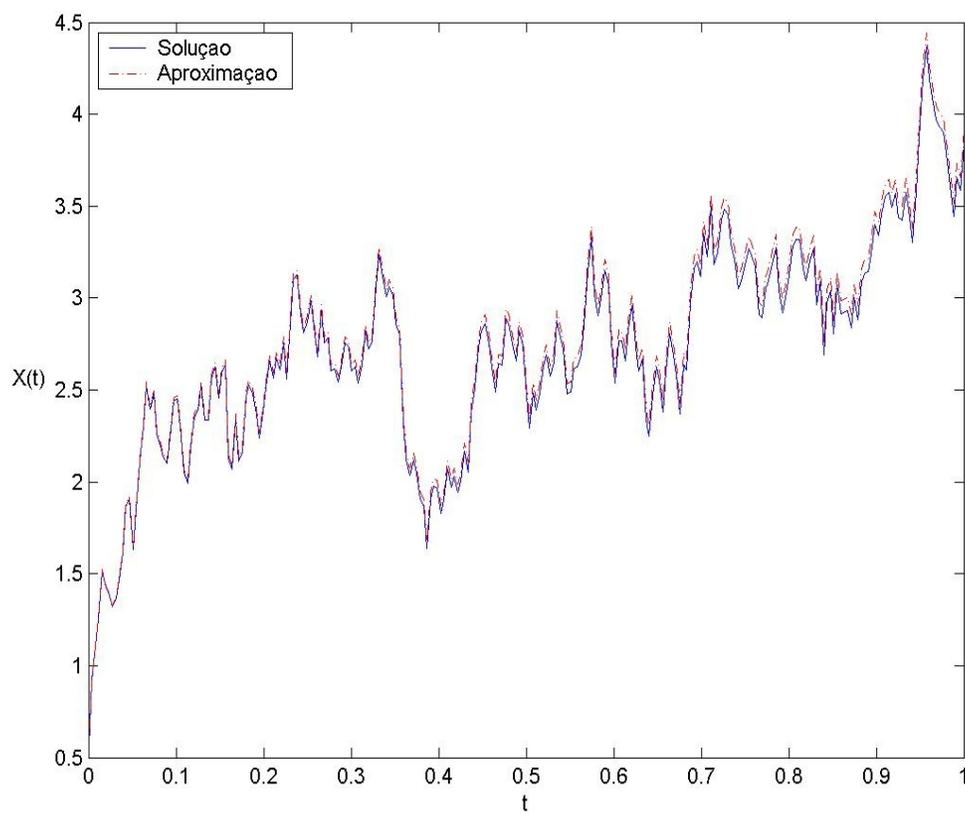


Figura 3.6: Comparação de uma aproximação (LL) com a solução para $h = 2^{-8}$.

Conclusões

Neste trabalho, foi realizada uma abordagem do método numérico da Linearização Local em suas versões mais recentes, denominadas B-LL e N-LL, para Equações Diferenciais Estocásticas. O método é baseado no truncamento da expansão de Taylor determinística para o B-LL e no truncamento da expansão de Ito-Taylor estocástica para o N-LL. É um método explícito de um-passo que dá solução exata para EDE's lineares com coeficiente de difusão nulo.

Resultados de simulação [2] e [9] demonstram que o método tem um desempenho satisfatório em uma grande variedade de EDE's. Há exemplos de EDE's assintoticamente estáveis para os quais o método LL dá soluções que convergem aos pontos de equilíbrio enquanto outros métodos explícitos clássicos dão trajetórias explosivas. De acordo com [2], os métodos implícitos e o método LL mostram estabilidade numérica em vários exemplos estudados. Porém a aproximação LL tem vantagem de requerer um tempo de processamento computacional consideravelmente mais baixo.

É importante ressaltar que, em 2002, Jimenez [10] obteve uma expressão equivalente para a parte determinística do método N-LL, em que reduz o tempo de processamento computacional do mesmo.

O método LL e suas variações podem ser aplicados à resolução das equações do modelo de massa neural discutido na introdução [18], o que deixamos como assunto para futuros trabalhos de pesquisa.

Apêndices

Estão relacionados abaixo o código fonte da maioria dos programas implementados em Matlab para gerar os gráficos que aparecem no texto. Alguns programas (apêndice A e B) foram adaptados de [7] e outros (apêndice C e D) foram elaborados neste trabalho.

Apêndice A

Código fonte para gerar trajetória discretizada do movimento Browniano (Figura 1.1).

```
-----  
% Trajetória discretizada do movimento Browniano  
randn('state',100)  
T=1;  
N=500;  
h=T/N;  
dW=zeros(1,N);  
W=zeros(1,N);  
dW=sqrt(h)*randn(1,N); %variáveis aleatórias iid  $N(0,h)$   
W=cumsum(dW);          %soma cumulativa dos incrementos dW  
%  
plot([0:h:T],[0,W], 'b-')  
title('Discretização da trajetória do movimento Browniano')  
xlabel('t','FontSize',16)  
ylabel('W(t)','FontSize',16, 'Rotation',0)  
-----
```

Apêndice B

Código fonte do teste de convergência forte para o método de Euler-Maruyama (Figura 3.1).

```

-----
% Teste de convergência forte de Euler-Maruyama
%
% dX = lambda*X dt + mu*X dW,    X(0) = Xzero,
% where lambda = 2, mu = 1 and Xzer0 = 1.
%
% E-M usando 5 incrementos distintos: 16dt, 8dt, 4dt, 2dt, dt.
% Examinando a convergência forte em T=1: E |X(T)-X_N|^2.
%
lambda = 2; mu = 1; Xzero = 1;    % parâmetros do problema
T = 1; N = 2^9; dt = T/N;        %
M = 1000;                        % número de trajetórias
Xerr = zeros(M,5);
for s = 1:M,
    dW = sqrt(dt)*randn(1,N);
    W = cumsum(dW);
    Xtrue = Xzero*exp((lambda-0.5*mu^2)+mu*W(N));
    for p = 1:5
        R = 2^(p-1); Dt = R*dt; L = N/R;
        Xtemp = Xzero;
        for j = 1:L
            Winc = sum(dW(R*(j-1)+1:R*j));
            Xtemp = Xtemp + Dt*lambda*Xtemp + mu*Xtemp*Winc;
        end
        Xerr(s,p) = (Xtemp - Xtrue)^2;
    end
end
%
Dtvals = dt*(2.^([0:4]));

```

```
plot(log2(Dtvals),log2(mean(Xerr)),'b*-'), hold on
plot(log2(Dtvals),log2(Dtvals.^(1)),'r--'), hold off
legend('Teste de convergência','Reta de referência',2)
xlabel('log_2(h)','FontSize',16)
ylabel('log_2(e(h))','FontSize',16, 'Rotation',0)
axis([-10 -4 -10 2])
```

Apêndice C

Código fonte para gerar a aproximação do método B-LL e a solução da EDE do exemplo (3.3) (Figura 3.2).

```

-----
%metodo BLL
%EDE  $dX = -t^2 X dt + (1.5 \exp(-t^3/3)/(t+1)) dW$ ,  $X(0) = Xzero$ ,
%onde  $Xzero = 1$ ,  $dt = 2^{-4}$  e  $T = 9$ .
clc
clear all
randn('state',900)
Xzero=1;
T=10;
N=160;
dt=T/N;
tzero=0;
t=(dt:dt:T);
dW=sqrt(dt)*randn(1,N);      %incrementos do MB
W=cumsum(dW);                %discretização da trajetória do MB
%
Xtrue(1)=exp(-t(1)^3/3)+1.5*exp(-t(1)^3/3)*W(1)/(t(1)+1)+0.75*dt*
exp(-t(1)^3/3)*W(1)/(t(1)+1)^2;
%
for j=1:N-1
Xtrue(j+1)=exp(-(t(j+1)^3)/3)+1.5*exp(-(t(j+1)^3)/3)*
W(j+1)/(t(j+1)+1)-1.5*exp(-(t(j+1)^3)/3)*W(j)/(t(j)+1)+0.75*dt
*exp(-(t(j+1)^3)/3)*(W(j+1)/(t(j+1)+1)^2+W(j)/(t(j)+1)^2);
end
%
plot([0:dt:T],[Xzero,Xtrue],'r-'), hold on
axis([0 10 -2 2]);
X=zeros(1,N);
X(1)=Xzero+(-1.5*exp(-dt^3/3)*(-dt^3-dt^2-1)*dt*0.5/(dt+1)^2+1.5

```

```

*exp(-dt^3/3)/(dt+1))*W(1);
for j=1:N-1
    A=(exp(-(t(j)^2)*dt)-1)*X(j);
%
    B=(dt/t(j)^2-(1-exp(-(t(j)^2)*dt))/t(j)^4)*(-2*t(j)*X(j));
%
    C=(-t(j)^2*1.5*exp(-(t(j+1)^3)/3)/(t(j+1)+1)-1.5*exp(-(t(j+1)^3)/3)
    *(-1-(t(j+1)^2)*(t(j+1)+1))/(t(j+1)+1)^2)*dt*0.5+1.5
    *exp(-(t(j+1)^3)/3)/(t(j+1)+1))*W(j+1);
%
    D=exp(-t(j)^2*dt)*((-t(j)^2)*1.5*exp(-(t(j)^3)/3)/(t(j)+1)-1.5
    *exp(-(t(j)^3)/3)*(-1-(t(j)^2)*(t(j)+1))/(t(j)+1)^2)*dt*0.5-1.5
    *exp(-(t(j)^3)/3)/(t(j)+1))*W(j);
%
    X(j+1)=X(j)+A+B+C+D;
end
%
plot([0:dt:T],[Xzero,X],'b.'), hold off
xlabel('t')
ylabel('X(t)', 'Rotation', 0, 'HorizontalAlignment', 'right')

```

Apêndice D

Código fonte para gerar os gráficos das figuras 3.4-3.6.

```

-----
%EDE dX=(exp(-X)+1)dt+5/2*dW, X(0)=Xzero,
%onde Xzero=1/2 e T=1.
clc
clear all
randn('state',0)
Xzero=1/2;
T=1;
N=2^8;
h=T/N;
t=(h:h:T);
%
W=sqrt(h).*cumsum(randn(1,N));
%
Xtrue(1)=1/2+t(1)+5/2.*W(1)+log(1+(exp(-1/2-t(1)-5/2.*W(1))+
exp(-1/2)).*(h/2));
for j=1:N-1
    Xtrue(j+1)=1/2+t(j+1)+5/2.*W(j+1)+log(1+(exp(-1/2-t(j+1)-5/2.
    *W(j+1))+exp(-1/2-t(j)-5/2.*W(j))).*(h/2));
end
%
for p=1:5
    R=2^(5-p);
    Dt=R*h; %2^(-4),2^(-5),2^(-6),2^(-7),2^(-8)
    L=T/Dt;
    Y=zeros(1,L);
    Y(1)=1/2+exp(1/2)*(1-exp(-Dt*exp(-1/2)))*(exp(-1/2)+1)+
    (-exp(-1/2)*5/2*Dt/2+5/2).*W(R);
    for i=1:L-1
        Y(i+1)=Y(i)+exp(Y(i)).*(1-exp(-Dt.*exp(-Y(i))))*

```

```
(exp(-Y(i))+1)+(-exp(-Y(i))*5/2*Dt/2+5/2).*W(R*(i+1))+
exp(-Dt*exp(-Y(i)))*(-exp(-Y(i))*5/2*Dt/2-5/2).*W(R*i);
end
plot([0:h:T],[Xzero,Xtrue],'b-'), hold on
plot([0:Dt:T],[Xzero,Y],'r-.'), hold off
xlabel('t')
ylabel('X(t)', 'Rotation', 0, 'HorizontalAlignment', 'right')
legend('Soluçao', 'Aproximaçao', 2)
pause
end
```

Referências Bibliográficas

- [1] Arnold, L. “*Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*”, Wiley-Interscience Publications, New York (1974).
- [2] Biscay, R., Jimenez, J. C., Riera, J. J. e Valdes, P. A. “*Local Linearization Method for the Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*”, *Annals Inst. Statist. Math.* 48: 631-644 (1996).
- [3] Boyce, W. E. e DiPrima, R. C. “*Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*”, Sexta Edição, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro (1999).
- [4] Bruce, E. N. “*Biomedical Signal Processing and Signal Modeling*”, John Wiley & Sons, New York (2001).
- [5] Golub, G. H. e Van Loan, C. F. “*Matrix Computations*”, Second Edition, The Johns Hopkins University Press, Maryland (1989).
- [6] Guerra, João. “*Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas*”, CEMAPRE, Lisboa (2005).
- [7] Higham, D. J. “*An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*”, *SIAM Review*, Vol. 43, No 3: 525-546 (2001).
- [8] James, Barry R. “*Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*”, Segunda Edição, IMPA, Rio de Janeiro (2002).
- [9] Jimenez, J. C., Shoji, I. e Ozaki, T. “*Simulation of Stochastic Differential Equations Through the Local Linearization Method. A Comparative Study*”, *Journal of Statistical Physics*, 94:587-602 (1999).

- [10] Jimenez, J. C. “*A Simple Algebraic Expression to Evaluate the Local Linearization Schemes of Stochastic Differential Equations*”, Applied Mathematics Letters, 15: 775-780 (2002).
- [11] Kannan, D. “*An Introduction to Stochastic Processes*”, North Holland, New York (1979).
- [12] Kloeden, P. E. e Platen, E. “*Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*”, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [13] Oksendal, B. “*Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*”, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [14] Ozaki, T. “*Nonlinear time series models and dynamical systems*”, in Handbook of statistics, Vol. 5, E. J. Hannan, P. R. Krishnaiah and M. M. Rao, eds. (North Holland, 1985).
- [15] Ozaki, T. “*Statistical identification of storage models with application to stochastic hydrology*”, Water Resource Bull. 21: 663-675(1985).
- [16] Saito, Y. e Mitsui, T. “*Simulation of Stochastic Differential Equations*”, Annals Inst. Statist. Math. 45: 419-432 (1993)
- [17] Schuss, Z. “*Theory and Applications of Stochastic Differential Equations*”, John Wiley & Sons, New York (1980).
- [18] Valdes, P. A., Jimenez, J. C., Riera J., Biscay, R., Ozaki, T. “*Nolinear EEG analysis based on a neural mass model*”, Biological Cybernetics, 81:415-424 (1999).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)