Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Teorema de Bernstein

por

Ricardo Ruviaro

Brasília
2007

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Teorema de Bernstein

por

Ricardo Ruviaro*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 16 de Março de 2007

Comissão Examinadora:

Prof^{a}. Dr^{a}. Wang Qiaoling - MAT/UnB (Orientadora)

Prof. Dr. Xia Changyu- MAT/UnB (Membro)

Prof. Dr. Romildo da Silva Pina - MAT/UFG (Membro)

*Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

O impossível reside nas mãos inertes daqueles que não lutam. "Se tens fé, cumpre saberes que tudo é possível àquele que a tem".

Aos meus pais

Leonildo Ruviaro e Vanir Busatto Ruviaro

E as minhas irmãs

Dulcemári e Vivian Ruviaro

Agradecimentos

A Deus pela vida e sabedoria à mim consedida ao longo da minha caminhada estudantil.

A Universidade de Brasília, através do Departamento de Matemática na pessoa do coordenador Dr. Nigel Pitt, agradeço a oportunidade de participar do projeto do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnolólico (CNPQ), desenvolvendo minhas abilidades e competências na área de ciências exatas.

Aos meus pais pelo dom da vida. O apoio e incentivo deles recebido nos momentos mais difíceis e pela paciência e compreensão na minha ausência do convivio familiar.

Aos professores, Liliane de Almeida Maia, Carlos Alberto Pereira dos Santos, Pedro Roitman, Elves Alves de Barros e Silva, Carlos Maber Carrion Riveros e em especial à minha orientadora Profª. Drª. Wang Qiaoling pelos momentos de apoio e encentivo à pesquisa científica para a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Aos professores da banca examinadora: Romildo da Silva Pina e Xia Changyu; pelas correções e sugestões, que fizeram com acuidade, enriquecemendo este trabalho.

Aos meus colegas, Débora, Fágner , Fernando, Gilberto, Janete, Juliana, Maxwell, Bianka, Levi, Rosangela, Tania, Veríssimo, Wescley, Anderson, Élida, Eunice, Evander, Ivonildes, Jhone, Porfirio, Daniel, Abílio, Célio, César, Elenilson, Élson, Enai, Fernanda, Flávia, Giovani, Gisliane, Heisler, Jander, Jéferson, João Pablo, Jorge, Karise, Kelem, Leonardo de Amorim, Leonardo Gomes, Lindemberg, Luis, Luverci, Magno, Manuela, Miguel, Monique, Rangel, Tertuliano, Theo, Vagner, Vinícius e em especial Marcelo Lopes Ferro, Adail Castro, Euro Gama, Jiazheng Zhou, Nilton Moura e Sergio de Souza Bento pelo espaço de estudo e discussão realizado periodicamente na Universidade de Brasília no Departamento de Matemática. Também pela amizade, apoio, companherismo nos momentos desafiadores da pesquisa.

A minha namorada Anyelle Nogueira de Souza pelo carinho, compreensão, amizade, ternura e apoio nos momentos exigentes dos estudos desta dissertação.

Agradeço aos outros segmentos da Universidade de Brasília como, biblioteca, secretaria do Deparatamento de Matemática na pessoa de Tânia, a xerox do mesmo Departamento na pessoa de Manuel, pela rapidez e organização dos serviços prestados ao longo dos meus estudos.

Resumo

O presente trabalho de investigação tem como tema o Teorema de Bernstein. Buscou-se como objetivo demonstrar de formas diferentes o Teorema de Bernstein, já que este teorema é um resultado muito extraordinário, pois levando em conta a multiplicidade de soluções que possui a equação de Lagrange, é realmente instigante que o mero fato da solução estar definida para todo (x, y) exclua todas as soluções menos a solução trivial. Far-se-á também a demonstração para o Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen.

Palavras-chaves: Teorema de Bernstein, Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen.

Abstract

In this dissertation. We give three different proofs of the Bernstein theorem and a proof of the theorem of do Carmo-Peng and Fischer Colbrie-Schoen.

Key Words: Theorem of Bernstein, Theorem of the Carmo-Peng and Fischer Colbrie-Schoen.

Sumário

Introdução

A questão das superfícies mínimas, esta relacionada com um problema proposto por Lagrange [La], em 1760, quando o mesmo considerou o problema de encontrar uma superfície de área mínima cuja fronteira é uma curva fechada sem auto-interseções. Apezar de ter levantado esta questão Lagrange não conseguiu demonstrar a existência de outra superfície mínima a não ser o plano. Para uma superfície ser mínima é necessário que a mesma tenha curvatura média identicamente nula, e obter superfíces com esta propriedade não é algo muito fácil. Note que para o caso de superfícies que são gráficos $z = f(x, y)$ de funções diferenciáveis, a condição $H = 0$ é equivalente à equação

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \tag{1}$$

onde $q = f_y$, $p = f_x$, $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$ e $t = f_{yy}$. Desta forma, achar uma superfície mínima na forma acima é achar uma função $f(x, y)$ que satisfaz (1).

Só depois de dezesseis anos de Lagrange ter descobrido a equação (1), Meusnier [M] mostrou que ela era equivalente ao fato que $K_1 + K_2 = 0$ (onde K_1 e K_2 são as curvaturas principais), e obteve duas soluções não triviais desta equação, descobrindo assim o catenóide e o helicóide como novas superfícies mínimas. E em 1835, Scherk [Sc] obteve outra superfície mínima, ficando a mesma conhecida como Superfície de Scherk.

Scherk provou também que o helicóide e o catenóide descobertos por Meusnier, são apenas dois elementos de uma família de superfícies mínimas, através da qual poder-se-á deformar continuamente o catenóide menos um meridiano em uma volta completa do helicóide. Esta deformação é isométrica, isto é, os comprimentos das curvas são preservadas ao longo da deformação. Além disto, a imagem esférica de um domínio também é preservada. Um pouco mais tarde por volta de 1864, foi descoberta outra superfície mínima, conhecida como a superfície de Enneper [E], que possuem propriedades interessantes pois as funções que a representam só envolvem somas e produtos.

Em 1916, S. Bernstein demonstrou o seguinte resultado. Se uma superfície mínima é um gráfico completo, então ela é um plano. Em outras palavras, se $f(x, y)$ é uma solução da equação de Lagrange dada em (1) definida em todo plano (x, y) então f é linear. Por volta de 1960, R. Osserman, mostrou que se dada uma superfície mínima completa, e sendo N a sua aplicação normal e supondo que exista um domínio aberto de $S^2(1)$ que não está contido em $N(S)$, então S é um plano. Implicando assim, no Teorema de Bernstein.

Em agosto de 1978, em uma Conferência, Manfredo do Carmo propôs a seguinte questão: "Será que toda superfície mínima completa e estável é um plano"?. No mesmo ano, em colaboração com Alexandre M. da Silveira, demonstraram um caso particular, e em 1979, o problema foi resolvido, em conjunto com C. K. Peng [CP] e independentemente por Fischer Colbrie-Schoen [FS].

Neste trabalho, far-se-á demonstrações para o teorema de Bernstein, já que este teorema é um resultado muito extraordinário, pois levando em conta a multiplicidade de soluções que possui a equação de Lagrange, é realmente instigante que o mero fato da solução estar definida para todo (x, y) exclua todas as soluções exceto a solução trivial. Demonstrar-se-á também o Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordar-se-á definições e resultados de geometria diferencial que serão utilizados ao longo da presente dissertação.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Denotar-se-á por $T_p(S)$ o plano tangente à S em $p \in S$, e representar-se-á o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ por $\langle .,. \rangle$ e a norma euclidiana por $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$.

Definição 1.1 . *A forma quadrática I_p em $T_p(S)$, onde $p \in S$, definida por*

$$I_p(\omega) = \langle \omega, \omega \rangle_p = \|\omega\|^2 \geq 0,$$

é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Apresentar-se-á agora a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ associada à parametrização $X(u,v)$ em p. Como um vetor tangente $\omega \in T_p(S)$ é o vetor tangente para alguma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, obter-se-á

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle_p u'v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculadas em $t = 0$, e

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle_p, \quad F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle_p, \quad G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle_p$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de T_p(S).

Considerar-se-á agora uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ de uma superfície regular em $p \in S$, ter-se-á que o vetor normal unitário em cada ponto de $X(U)$ é dado por

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(p), p \in X(U).$$

Desta forma, ter-se-á uma aplicação diferenciável $N : X(U) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que associa cada ponto $p \in X(U)$ a um vetor normal unitário $N(p)$.

Dizer-se-á que uma superfície é orientável se admite um campo diferencial de vetores normais unitários em toda superfície; a escolha de cada campo N é chamada uma orientação de S.

Definição 1.2 . *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N. A aplicação $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ leva valores na esfera unitária. E assim a aplicação $N : S \longrightarrow S^2$ é chamada a aplicação normal de Gauss de S. Ter-se-á que a aplicação normal de Gauss é diferenciável, e que a diferencial $dN_p : T_p(S) \longrightarrow T_{N(p)}(S^2)$ é uma aplicação linear, onde $T_p(S)$ e $T_{N(p)}(S^2)$ são os planos tangentes de S em p e S^2 em $N(p)$, respectivamente.*

Definição 1.3 . *A forma quadrática II_p, definida em $T_p(S)$ por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle$ é chamada a segunda forma fundamental de S em p.*

Expressar-se-á agora a segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$, assim seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S, logo

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN_p(v), v\rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v'\rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

Como $\langle N, X_u\rangle = \langle N, X_v\rangle = 0$, ter-se-á que

$$e = -\langle N_u, X_u\rangle = \langle N, X_{uu}\rangle\,, \quad f = -\langle N_v, X_v\rangle = \langle N, X_{vv}\rangle$$

$$g = -\langle N_v, X_u\rangle = \langle N, X_{uv}\rangle = \langle N, X_{vu}\rangle = \langle N_u, X_v\rangle\,,$$

onde e, g, f são os coeficientes da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p(S)$.

Definição 1.4 . *Seja C uma curva na superfície S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p, e $\cos\theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal para C e N é o vetor normal unitário de S em p. O número $k_n = k\cos\theta$ é chamado a curvatura normal de $C \subset S$ em p.*

Sejam V um espaço vetorial de dimensão dois e $T : V \longrightarrow V$ uma aplicação linear auto-adjunta, isto é, T é linear e satisfaz $\langle Tv, u \rangle = \langle v, Tu \rangle$. Então existem uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de V tal que $T(e_1) = \lambda_1 e_1, T(e_2) = \lambda_2 e_2$, isto é, e_1 e e_2 são autovetores, e λ_1 e λ_2 são autovalores de T. Desta forma para cada $p \in S \subset \mathbb{R}^3$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, de $T_p(S)$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Onde, k_1 e k_2 são o máximo e o mínimo respectivamente da segunda forma fundamental restrita ao círculo unitário de $T_p(S)$.

Definição 1.5 . *A curvatura normal máxima k_1 e a curvatura normal mínima k_2 são chamadas as curvaturas principais em p, as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovetores e_1, e_2, são chamadas direções principais em p.*

Seja $T : V \longrightarrow V$ uma aplicação linear e considere uma base v_1, v_2 de V, assim ter-se-á que

$$det(T) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad tr(T) = a_{11} + a_{22},$$

onde (a_{ij}) é a matriz de T na base $\{v_1, v_2\}$. Desta forma, o determinante de dN é o produto $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$ das curvaturas principais, e o traço de dN é a negativa $-(k_1 + k_2)$ da soma das curvaturas principais.

Definição 1.6 . *Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_p(S) \longrightarrow T_{N(p)}(S)$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é a curvatura gaussiana K de S em p. A negativa da metade do traço de dN_p é chamada a curvatura média H de S em p. Desta forma poder-se-á escrever*

$$K = k_1k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \;\; H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

Muitas vezes uma superfície é dada como o gráfico de uma função diferenciável $z = h(x, y)$, onde $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$. É, portanto, conveniente ter à mão as fórmulas (K e H) para os conceitos relevantes neste caso, obter-se-á tais fórmulas, parametrizando a superfície da seguinte forma

$$X(u,v) = (u, v, h(u,v)), \qquad (u,v) \in U,$$

onde $u = x$, $v = y$. Um cálculo simples mostra que

$$N(x,y) = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

é um campo normal unitário sobre a superfície, e os coeficientes da segunda forma fundamental nessa orientação são dados por

$$e = \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}\ ,\ \ f = \frac{h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}\ ,\ \ g = \frac{h_{yy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}\ .$$

A partir das expressões acima, obter-se-á a curvatura Gaussiana e a curvatura média:

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}\ ,\ \ H = \frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{2(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Definição 1.7 . *Uma superfície parametrizada regular é chamada de mínima se sua curvatura média for igual a zero, isto é,*

$$H(p) = 0,$$

para todo ponto p da superfície.

Para explicar a razão de usarmos a palavra mínima para tais superfícies, precisar-se-á introduzir a noção de variação. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Escolha um domínio limitado $D \subset U$ e uma função diferenciável $h : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $\overline{D}$ é a união do domínio D e sua fronteira ∂D. A variação normal de $X(\overline{D})$, determinada por h, é a aplicação dada por,

$$\varphi : \overline{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u,v,t) = X(u,v) + th(u,v)N(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D}, t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ fixado, a aplicação $X^t : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X^t(u,v) = \varphi(u,v,t)$$

é uma superfície parametrizada.

Assim, denotando por E^t, F^t, G^t os coeficientes da primeira forma fundamental de X^t, obter-se-á

$$E^t = E + th(\langle X_u, N_u\rangle + \langle X_u, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_u\rangle + t^2h_uh_u;$$

$$F^t = F + th(\langle X_u, N_v\rangle + \langle X_v, N_u\rangle) + t^2h^2\langle N_u, N_v\rangle + t^2h_uh_v;$$

$$G^t = G + th(\langle X_v, N_v\rangle + \langle X_v, N_v\rangle) + t^2h^2\langle N_v, N_v\rangle + t^2h_vh_uv.$$

Saber-se-á que

$$\langle X_u, N_u\rangle = -e, \langle X_v, N_v\rangle = -g$$

$$\langle X_u, N_v\rangle + \langle X_v, N_u\rangle = -2f$$

e que a curvatura média de X é dada por

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)},$$

obter-se-á

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R, \end{aligned}$$

onde,

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{R}{t}\right) = 0.$$

Segue-se que dado ϵ suficientemente pequeno, X^t é uma superfície parametrizada regular. Além disso, a área $A(t)$ de $X^t(\overline{D})$ é

$$A(t) = \int_{\overline{D}} \sqrt{E^tG^t - (F^t)^2}dudv.$$

Assim, se ϵ é pequeno, A é uma função diferenciável e sua derivada em $t = 0$ é

$$A'(0) = -\int_{\overline{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2}dudv.$$

Proposição 1.8 . *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e seja $D \subset U$ um domínio limitado em U. Então X é mínima se, e somente se, $A'(0) = 0$ para todo tal D e toda variação normal de $X(\overline{D})$.*

Uma superfície parametrizada regular $X = X(u, v)$, é dita isotérmica se

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \quad e \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

Os parâmetros u, v, satisfazendo as condições acima são chamados parâmetros isotérmicos.

Proposição 1.9 . *Seja $X = X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e suponha que X é isotérmica. Então*

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \boldsymbol{H},$$

onde $\lambda^2 = \langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$.

Demonstração. Como X é isotérmica, $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$. Derivando, ter-se-á

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{vu}, X_v \rangle = - \langle X_u, X_{vv} \rangle .$$

Logo,

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0$$

Analogamente,

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0.$$

Segue que $X_{uu} + X_{vv}$ é paralelo a N. Como X é isotérmica,

$$H = \frac{g + e}{2\lambda^2}.$$

Assim,

$$2\lambda^2 H = g + e = \langle N, X_{uu} + X_{vv} \rangle ;$$

donde,

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H}.$$

∎

O Laplaciano Δf de uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$, $(u, v) \in U$. Dizer-se-á que f é harmônica em U se $\Delta f = 0$. A partir da Prop. (1.9), obter-se-á.

Corolário 1.10 . *Seja $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ uma superfície parametrizada e suponha que X é isotérmica. Então X é mínima se, e somente se, as suas funções coordenadas x, y, z são harmônicas.*

Definição 1.11 . *Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa ou analítica, se f é definida e diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{C}$. A função $f(z)$ é dita analítica num ponto z_0 em Ω se $f(z)$ é analítica numa vizinhança de z_0.*

Definição 1.12 . *Um ponto em que $f(z)$ é analítica é chamado ponto regular de $f(z)$. Por outro lado, um ponto em que $f(z)$ não é analítica é chamado ponto singular ou singularidade da função $f(z)$.*

Definição 1.13 . *Uma função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ para a qual todos os pontos de $\mathbb{C}$ são pontos regulares é chamada uma função inteira.*

Teorema 1.14 ***(Liouville)***. *Se uma função inteira, analítica em toda parte, $f(z)$ é limitada em valor absoluto para todo $z \in \mathbb{C}$, então $f(z)$ deve ser uma constante.*

Definição 1.15 . *Uma topologia num conjunto X é uma coleção Γ de subconjuntos de X, chamados os abertos da topologia, com as seguintes propriedades:*
i) $\emptyset$ e X pertencem a Γ
ii) Se $A_1,\ldots,A_n \in \Gamma$ então $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \Gamma$
iii) Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ com $A_\lambda \in \Gamma$ para cada $\lambda \in L$, tem-se $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \Gamma$.
Um espaço topológico é um par (X, Γ) onde X é um conjunto e Γ é uma topologia em X.

Definição 1.16 . *Sejam X e Y espaços tológicos $f : X \longrightarrow Y$ contínua. Dizer-se-á que f é uma aplicação de recobrimento se*
i) f é sobrejetora
ii) Para $\forall\ p \in Y$ existe uma vizinhança U_p de p tal que $f^{-1}(U_p) = \bigcup_i U_i$ onde $U_i \cap U_j = \emptyset$, $\forall\ i,\ j$ e $f|_{U_i} : U \longrightarrow U_p$ é um homeomorfismo.

Definição 1.17 . *Uma cobertura universal de um espaço topológico conexo X é um espaço Y simplesmente conexo com a aplicação $f : Y \longrightarrow X$ que é uma aplicação de cobertura.*

Teorema 1.18 . *Uma superfície regular $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$, descrita por uma função $z = z(x, y)$ de classe C^2 em um domínio Ω simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$, com a aplicação de Gauss $N = (\xi, \eta, \zeta)$ é uma superfície mínima se, e só se, existe uma aplicação $X^* \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tal que*

$$-dX^* = N \wedge dX \tag{1.1}$$

Se escrever-se-á

$$X^* = (a, b, c), \quad N \wedge dX = (\alpha, \beta, \gamma),$$

a equação (1.1) é equivalente a

$$-da = \alpha, \quad -db = \beta, \quad -dc = \gamma, \tag{1.2}$$

onde a, b e c são funções de C^2, com

$$\alpha = -\frac{pq}{\omega}dx - \frac{1+p^2}{\omega}dy, \quad \beta = \frac{1+p^2}{\omega}dx + \frac{pq}{\omega}dy, \quad \gamma = \frac{q}{\omega}dx - \frac{p}{\omega}dy,$$

tal que $p = f_x$ e $q = f_y$.

Definição 1.19 . *Uma superfície regular S é denominada completa quando para qualquer ponto $p \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\varphi : [0, \epsilon) \longrightarrow S$ de S, começando em $p = \varphi(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow S$, definida sobre toda a reta $\mathbb{R}$.*

Definição 1.20 . *Dada uma superfície S, é possível escolher em cada ponto $p \in S$ dois vetores unitários normais ao plano tangente T_pS. Se for possível escolher um destes vetores de maneira contínua em toda a superfície S, diz-se que S é orientável.*

Definição 1.21 . *Uma superfície mínima estável Σ em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície tal que para todo subdomínio compacto suave $\overline{\Sigma}$ é estável no seguinte sentido: se $\overline{\Sigma}(t)$ é uma família de superfícies suave com $\partial\overline{\Sigma}(t) = \partial\overline{\Sigma}$ e $\overline{\Sigma}(0) = \Sigma$, então a segunda derivada da função área $A(t)$ da família $\overline{\Sigma}(t)$ é não negativa em t=0.*

Teorema 1.22 ***(Hadamard)***. *Seja S uma superfície simplesmente conexa, completa, com curvatura gaussiana $K \leq 0$. Então $exp_p : T_pS \longrightarrow S$, $p \in S$ é um difeomorfismo; isto é, S é difeomorfa a um plano.*

Definição 1.23 . *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$.*

Definição 1.24 . *Seja S uma superfície mínima completa e considere uma exaustão de S por uma família crescente de domínios limitados D_t, $t \in [0, \infty]$. Se $K \leq 0$ e se o limite*

$$\lim_{t \to 0} \left(- \int_{D_t} K dA \right)$$

for finito, ele é independente da exaustão considerada. Neste caso, diz-se que S tem curvatura total finita; caso contrário, isto é, se o limite considerado é $-\infty$ diz-se que S tem curvatura total infinita.

Teorema 1.25 ***(Osserman)***. *Seja Σ uma superfície mínima, orientável, conexa e completa em $\mathbb{R}^n$ com curvatura Gaussiana total $C(\Sigma) = -\int_\Sigma K dA$ finita. Então:*
i) $C(\Sigma)$ é um inteiro multiplo de -2π;
ii) $C(\Sigma)$ é um inteiro multiplo de -4π se n=3.

Definição 1.26 . *Se Σ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$, então $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de Jacobi se $\Delta f - 2Kf = 0$.*

Uma superfície mínima orientada aberta Σ é estável se, e somente se, tem uma função de Jacobi positiva. Desde que o espaço recobrimento universal de uma superfície orientável, estável e mínima é estável, para muitas questões teóricas a respeito de uma superfície Σ mínima e estável, poder-se-á assumir que Σ é simplesmente conexa.

Capítulo 2

Algumas demonstrações para o Teorema de Bernstein

Uma superfície mínima é caracterizada por possuir curvatura média identicamente nula.

Logo, se uma superfície é dada por

$$z = f(x, y), \tag{2.1}$$

onde a função $f(x, y)$ possui derivada segunda contínua. Assim uma superfície mínima é caracterizada pela seguinte equação diferencial parcial

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \tag{2.2}$$

com $q = f_y$, $p = f_x$, $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$ e $t = f_{yy}$. A equação (2.2), é chamada de equação da superfície mínima, que é uma equação diferencial elíptica não linear.

Teorema 2.1 ***(Bernstein).*** *Uma superfície mínima definida pela equação (2.1) para todos os valores de x e y é um plano. Ou seja a única solução da equação (2.2) válida em todo o plano (x, y) é uma função linear.*

Mostrar-se-á o Teorema de Bernstein usando o Teorema de Jörgens.

Teorema 2.2 ***(Jörgens).*** *Suponha que a função $z = f(x, y)$ é uma solução da equação*

$$rt - s^2 = 1 \tag{2.3}$$

para todo valor de x e y. Então $f(x,y)$ é uma função polinomial quadrática em x e y.

Demonstração. De fato, notar-se-á que $rt - s^2 = 1$ implica que $rt > 0$, onde r e t tem o mesmo sinal. Poder-se-á supor que $r, t > 0$ em toda parte, substituindo f por $-f$ se necessário.
Para os pares (x_0, y_0) e (x_1, y_1) fixos, consider-se-á a função

$$h(\zeta) = f(x_0 + \zeta(x_1 - x_0), y_0 + \zeta(y_1 - y_0))$$

A seguir

$$\begin{aligned} h'(\zeta) &= f_x(x_0 + \zeta(x_1 - x_0), y_0 + \zeta(y_1 - y_0))(x_1 - x_0) \\ &\quad + f_y(x_0 + \zeta(x_1 - x_0), y_0 + \zeta(y_1 - y_0))(y_1 - y_0) \\ &= (x_1 - x_0)p + (y_1 - y_0)q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(\zeta) &= f_{xx}(x_0 + \zeta(x_1 - x_0), y_0 + \zeta(y_1 - y_0))(x_1 - x_0)^2 \\ &\quad + 2f_{xy}(x_0 + \zeta(x_1 - x_0), y_0 + \zeta(y_1 - y_0))(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) \\ &\quad + f_{yy}(x_0 + \zeta(x_1 - x_0), y_0 + \zeta(y_1 - y_0))(y_1 - y_0)^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 r + 2(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)s + (y_1 - y_0)^2 t, \end{aligned}$$

onde p, q, r, s, t tomam valores em $(x_0 + \zeta(x_1 - x_0), y_0 + \zeta(y_1 - y_0))$.
Se $x_1 = x_0$, então $h''(\zeta) = (y_1 - y_0)^2 t \geq 0$.
Se $x_1 \neq x_0$, ter-se-á

$$h''(\zeta) = (x_1 - x_0)^2 \left((\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0})^2 t + 2\frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} s + r \right).$$

O polinômio entre colchetes é um polinômio quadrático em $\frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$ com discriminante $4s^2 - 4rt < 0$ por (2.3), assim será sempre positivo. Desta forma ter-se-á sempre $h''(\zeta) \geq 0$. O que implica

$$h'(1) \geq h'(0)$$

ou

$$(x_1 - x_0)(p_1 - p_0) + (y_1 - y_0)(q_1 - q_0) \geq 0, \tag{2.4}$$

onde $p_i = p(x_i, y_i)$ e $q_i = q(x_i, y_i)$, $i = 0, 1$.
Considerar-se-á a transformação de Lewy:

$$T(x, y) = (\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x + p(x, y), y + q(x, y)).$$

Onde definir-se-á $\xi_i = \xi(x_i, y_i)$, $\eta_i = \eta(x_i, y_i)$, $i = 0, 1$, então a equação (2.4) implicar-se-á que

$$(\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 \geq (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2. \tag{2.5}$$

De fato

$$\begin{aligned}(\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 &= (x_1 + p_1 - x_0 - p_0)^2 + (y_1 + q_1 - y_0 - q_0)^2 \\ &= (x_1 - x_0)^2 + 2(x_1 - x_0)(p_1 - p_0) + (p_1 - p_0)^2 \\ &\quad + (y_1 - y_0)^2 + 2(y_1 - y_0)(q_1 - q_0) + (q_1 - q_0)^2 \\ &\geq (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2,\end{aligned}$$

de (2.5) ter-se-á que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação distância-crescente, e, em particular, T é injetiva. Notar-se-á também que o jacobiano de T é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + r & s \\ s & 1 + t \end{bmatrix}$$

pois

$$\xi_x = 1 + p_x = 1 + r, \;\; \xi_y = p_y = s$$

e

$$\eta_x = q_x = s, \;\; \eta_y = 1 + q_y = 1 + t$$

onde de (2.3), ter-se-á que

$$\begin{vmatrix} 1 + r & s \\ s & 1 + t \end{vmatrix} = 2 + r + t \geq 2.$$

Saber-se-á que se dadas M^m e N^n variedades diferenciáveis, então uma aplicação diferenciável $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(N)$ é injetiva para todo $p \in M$.

Como T se enquadra nesta definição ter-se-á que T é uma imersão e a imagem de T é aberta. Mas a imagem de T também é fechada. De fato, mostrar-se-á isso: Se para $T(\chi_i, \varsigma_i) \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}^2$, de modo que $\{T(\chi_i, \varsigma_i)\}$ é uma sequência de Cauchy, então $\{(\chi_i, \varsigma_i)\}$ é também uma sequência de Cauchy, desde que T é distância-crescente; assim $(\chi_i, \varsigma_i) \longrightarrow \beta \in \mathbb{R}^2$, e $T(\beta) = \alpha$. Portanto T é realmente um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ nele próprio. Usar-se-á a notação convencional da aplicação inversa T^{-1} dada por:

$$(\xi, \eta) \longrightarrow \;(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

Onde ter-se-á que $T \circ T^{-1} = I$, com as respectivas matrizes jacobianas dadas por:

$$J(T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad e \quad J(T^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Assim

$$J(T^{-1}) = \frac{1}{2+r+t} \begin{bmatrix} \eta_y & -\xi_y \\ -\eta_x & \xi_x \end{bmatrix} = \frac{1}{2+r+t} \begin{bmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{bmatrix}$$

Agora definir-se-á $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\begin{aligned} F(\xi,\eta) &= (U(\xi,\eta), V(\xi,\eta)) \\ &= (x(\xi,\eta) - p(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)), -y(\xi,\eta) + q(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ &= \frac{1+t}{2+r+t} - \frac{r(1+t)}{2+r+t} - \frac{s(-s)}{2+r+t} \\ &= \frac{t-r}{2+r+t} \end{aligned}$$

e ter-se-á também que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \frac{\partial (q-y)}{\partial \eta} \\ &= q_x x_\eta + q_y y_\eta - y_\eta \\ &= \frac{t-r}{2+r+t} \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \eta}$$

Mostrar-se-á agora que:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

De fato

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{\partial (q-y)}{\partial \xi} \\ &= q_x x_\xi + q_y y_\xi - y_\xi \\ &= \frac{2s}{2+r+t} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \eta} &= \frac{\partial (x-p)}{\partial \eta} \\
&= x_\eta - p_x x_\eta - p_y y_\eta \\
&= -\frac{s}{2+r+t} - \frac{r(-s)}{2+r+t} - \frac{s(1+r)}{2+r+t} \\
&= -\frac{2s}{2+r+t}
\end{aligned}
$$

Logo

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

Como (U, V) satisfaz a condição de Cauchy-Riemann, assim a aplicação $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$F(\xi + i\eta) = U(\xi, \eta) + iV(\xi, \eta) = x - p + (-y + q)i$$

é analítica complexa, e para a derivada complexa F' ter-se-á:

$$F'(\xi + i\eta) = \frac{\partial U}{\partial \xi} + i\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{t-r}{2+r+t} + \frac{i(2s)}{2+r+t} = \frac{t-r+2is}{2+r+t} \tag{2.6}$$

A partir desta relação mostrar-se-á que:

$1 - |F'(\xi + i\eta)|^2 = \frac{4}{2+r+t} > 0$. De fato, note que:

$$
\begin{aligned}
|F'(\xi + i\eta)|^2 &= \frac{(t-r)^2 + 4s^2}{(2+r+t)^2} \\
&= \frac{-2+r+t}{2+r+t},
\end{aligned}
$$

onde na segunda igualdade usar-se-á (2.3), assim

$$
\begin{aligned}
1 - |F'(\xi + i\eta)|^2 &= 1 + \frac{2-r-t}{2+r+t} \\
&= \frac{4}{2+r+t} > 0.
\end{aligned}
$$

Logo F' é limitada, e consequentemente constante, pelo Teorema de Liouville. E usando (2.6) determinar-se-á r, s e t em termos de F'. De fato, saber-se-á que

$$F'(\xi + i\eta) = \frac{t-r}{2+r+t} + i\frac{2s}{2+r+t} \tag{2.7}$$

como $F' = cte$, então $|F'| = cte$ implicando assim que

$$2 + r + t = cte, \quad t - r = cte \;\; e \;\; s = cte. \tag{2.8}$$

Portanto de (2.8), ter-se-á que

$$s = cte, \quad t = cte \;\; e \;\; r = cte.$$

$\blacksquare$

2.1 Primeira Demonstração do Teorema de Bernstein

Seja,

$$W = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$$

Então da equação de superfície mínima ter-se-á as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-pq}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+p^2}{W}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-pq}{W}\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Mostrar-se-á, que a partir de W ter-se-á que as expressões dadas em (2.9) são zeros. De fato

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-pq}{W}\right)$
$= \frac{2qq_xW-(1+q^2)W_x+(-p_yq-pq_y)W+pqW_y}{W^2}$
$= \frac{2qq_x(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}-(1+q^2)\frac{1}{2}(1+p^2+q^2)^{\frac{-1}{2}}(2pp_x+2qq_x)-(p_yq+pq_y)(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}+pq\frac{1}{2}(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}(2pp_y+2qq_y)}{W^2}$
$= \frac{2qq_x(1+p^2+q^2)-(1+q^2)(pp_x+qq_x)-(p_yq+pq_y)(1+p^2+q^2)+pq(pp_y+qq_y)}{W^3}$
$= \frac{2qs(1+p^2+q^2)-(1+q^2)(pr+qs)-(sq+pt)(1+p^2+q^2)+pq(ps+qt)}{W^3}$
$= \frac{2qs+2qp^2s+2q^3s-pr-qs-pq^2r-q^3s-sq-sp^2q-sq^3-pt-p^3t-pq^2t+p^2qs+pq^2t}{W^3}$
$= \frac{2qp^2s-pr-pq^2r-pt-p^3t}{W^3}$
$= -\frac{p}{W^3}[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]$
$= 0.$

Onde na terceira igualdade multiplicar-se-á por $\frac{W}{W}$ e na última igualdade usar-se-á (2.2).

Por outro lado ter-se-á também que:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\tfrac{-pq}{W}\right) + \tfrac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1+p^2}{W}\right) \\
&= \tfrac{(-p_x q - p q_x)W + (pq)W_x + 2pp_y W - (1+p^2)W_y}{W^2} \\
&= \tfrac{(-p_x q - p q_x)(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + pq\frac{1}{2}(1+p^2+q^2)^{\frac{-1}{2}}(2pp_x + 2qq_x) + 2pp_y(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} - (1+p^2)\frac{1}{2}(1+p^2+q^2)^{\frac{-1}{2}}(2pp_y + qq_y)}{W^2} \\
&= \tfrac{(-p_x q - p q_x)(1+p^2+q^2) + pq(pp_x + qq_x) + 2pp_y(1+p^2+q^2) - (1+p^2)(pp_y + qq_y)}{W^3} \\
&= \tfrac{(-rq - ps)(1+p^2+q^2) + pq(pr+qs) + 2ps(1+p^2+q^2) - (1+p^2)(ps+qt)}{W^3} \\
&= \tfrac{-rq - rp^2q - rq^3 - ps - p^3s - pq^2s + p^2qr + pq^2s + 2ps + 2p^3s + 2pq^2s - ps - qt - p^3s - p^2qt}{W^3} \\
&= \tfrac{-rq - rq^3 + 2pq^2s - qt - p^2qt}{W^3} \\
&= -\tfrac{q}{W}[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Onde aqui também na terceira igualdade multiplicar-se-á por $\frac{W}{W}$ e na última igualdade usar-se-á (2.2).

A seguir mostrar-se-á que existe uma função $\varphi \in C^2$, tal que:

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{W}(1+p^2), \quad \varphi_{xy} = \frac{1}{W}pq, \quad \varphi_{yy} = \frac{1}{W}(1+q^2).$$

Para isso usar-se-á o seguinte lema

Lema 2.3 ***(Poincaré)***. *Seja M uma variedade diferenciável contrátil, e seja ω uma k-forma diferenciável em M com $d\omega = 0$. Então ω é exata, isto é, existe uma (k-1)-forma α em M tal que $d\alpha = \omega$.*

Seja
$\beta = \frac{1+p^2}{W}dx + \frac{pq}{W}dy$. Desta forma ter-se-á que

$$
\begin{aligned}
d\beta &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1+p^2}{W}dx + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1+q^2}{W}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{pq}{W}dx + \frac{\partial}{\partial y}\frac{pq}{W}dy\right)\wedge dy \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{pq}{W}dy\wedge dx + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1+p^2}{W}dy\wedge dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Assim existe f_1 tal que

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy = \frac{1+p^2}{W}dx + \frac{pq}{W}dy$$

Agora, considerar-se-á que
$\chi = \frac{pq}{W}dx + \frac{1+q^2}{W}dy$. Logo

$$\begin{aligned} d\chi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{pq}{W}dx + \frac{\partial}{\partial y}\frac{pq}{W}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1+q^2}{W}dx + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1+q^2}{W}dy\right)\wedge dy \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{pq}{W}dy\wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}\frac{(1+q^2)}{W}dx\wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Desta forma existe f_2 tal que

$$df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy = \frac{pq}{W}dx + \frac{1+q^2}{W}dy$$

Por fim, seja
$\psi = f_1dx + f_2dy$. Logo

$$\begin{aligned} d\psi &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy\right)\wedge dy \\ &= (pq)dy\wedge dx - (pq)dy\wedge dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim existe φ tal que

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = f_1dx + f_2dy$$

Portanto,

$$\varphi_x = f_1, \quad \varphi_y = f_2$$

Isto implica em

$$\varphi_{xx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1+p^2}{W}, \quad \varphi_{xy} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{pq}{W}, \quad \varphi_{yy} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1+q^2}{W}$$

Desta forma ter-se-á que

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = \frac{(1+p^2)(1+q^2)}{W^2} - \frac{p^2q^2}{W^2} = 1$$

Pelo Teorema de Jörgens, φ_{xx}, φ_{xy} e φ_{yy} são constantes. Portanto p e q são constantes, e desta forma $f(x,y)$ é uma função linear. Demonstrando assim o Teorema (2.1). ■

2.2 Segunda Demonstração do Teorema de Bernstein

Seja $\omega = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}} \geq 1$. A prova se baseia na seguinte identidade:

$$\Delta log\left(1 + \frac{1}{\omega}\right) = K, \tag{2.10}$$

onde Δ é o Laplaciano em relação à métrica Riemanniana induzida de M e K é a curvatura Gaussiana.

A identidade dada em (2.10) esta demonstrada no apêndice. Agora considere ds o elemento de arco em M. Introduzir-se-á a métrica conforme

$$d\sigma = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) ds \Longleftrightarrow d\sigma^2 = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^2 ds^2.$$

Se p, q são coordenadas isotérmica em M, tal que

$$ds^2 = \lambda^2(dp^2 + dq^2),$$

ter-se-á que

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}.$$

Agora usando que $E = G = \lambda^2$, $F = 0$, $q = u$ e $p = v$ ter-se-á

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial p}\lambda^2}{\lambda^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial q}\lambda^2}{\lambda^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial log\lambda^2}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial log\lambda^2}{\partial q}\right) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}log\lambda + \frac{\partial^2}{\partial q^2}log\lambda\right) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) log\lambda. \end{aligned}$$

Assim ter-se-á que

$$K = -\Delta log\lambda, \tag{2.11}$$

onde $\Delta = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)$ é o laplaciano da variedade riemanniana M.

Aplicar-se-á isto a métrica $d\sigma^2$, imediatamente a curvatura gaussiana de $d\sigma^2$ é zero, ou que a métrica é plana, pois

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \left\langle \left(1+\frac{1}{\omega}\right) ds, \left(1+\frac{1}{\omega}\right) ds \right\rangle \\ &= \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^2 \langle ds, ds\rangle = \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^2 ds^2 \\ &= \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^2 \lambda^2(dp^2+dq^2) \end{aligned}$$

e desta forma ter-se-á

$$\begin{aligned} &K_{d\sigma^2} \\ &= -\left(\lambda^2\left(1+\tfrac{1}{\omega}\right)^2\right)^{-1}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial p^2}+\tfrac{\partial^2}{\partial q^2}\right)\left(log\left(\lambda\left(1+\tfrac{1}{\omega}\right)\right)\right) \\ &= -\left(\lambda^2\left(1+\tfrac{1}{\omega}\right)^2\right)^{-1}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial p^2}+\tfrac{\partial^2}{\partial q^2}\right) log\lambda - \left(\lambda^2\left(1+\tfrac{1}{\omega}\right)^2\right)^{-1}\left(\tfrac{\partial^2}{\partial p^2}+\tfrac{\partial^2}{\partial q^2}\right) log\left(1+\tfrac{1}{\omega}\right) \\ &= -\left(1+\tfrac{1}{\omega}\right)^{-2} K + \left(1+\tfrac{1}{\omega}\right)^{-2} K \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notar-se-á

$$ds \leq d\sigma \leq 2ds \Longleftrightarrow ds^2 \leq d\sigma^2 \leq 4ds^2.$$

Segue que a métrica $d\sigma^2$ em M é completa, já que é dominada por ds^2 que é completa. Ter-se-á consequentemente em M uma métrica Riemanniana $d\sigma^2$ plana completa. Saber-se-á que M, com a métrica $d\sigma^2$, é isométrica ao plano (ξ, η) com sua métrica plana, isto é:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

Desde que $K \leq 0$, ter-se-á, por (2.10) e (2.11),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) log\left(1+\frac{1}{\omega}\right) \leq 0.$$

De fato,
de (2.11) ter-se-á que $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$ e usando (2.10), segue o resultado desejado.

A função $log(1+\frac{1}{\omega})$, tomada no plano (ξ, η), é super-harmônica. É também claramente não-negativa.

Lema 2.4 *Seja f uma função super-harmônica em todo plano (x, y) exceto possivelmente na origem e se f é uniformemente limitada superiormente, então f deve ser uma constante.*

Assim do Lema (2.4) e de (2.10) ter-se-á que $K = 0$, implicando desta forma que M é um plano. ■

2.3 Terceira Demonstração para o Teorema de Bernstein

Considerar-se-á a parametrização dada por $X(x^1, x^2) = (x^1, x^2, z(x^1, x^2))$ definida em um domínio convexo Ω de $\mathbb{R}^2$, onde a função $z(x^1, x^2)$ é de classe C^2 em Ω assim, automaticamente a função é analítica. Os coeficientes da primeira fórmula fundamental de X serão dados por: $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + z_{,\alpha}z_{,\beta}$. E seja $\omega^2 = g = det(g_{\alpha\beta})$ e definir-se-á $\overline{g}_{\alpha\beta}$ da seguinte maneira:

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = \frac{g_{\alpha\beta}}{\omega} \tag{2.12}$$

Ter-se-á que $det(\overline{g}_{\alpha\beta}) = 1$. De fato

$$det\ \overline{g}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\omega^2} det\ g_{\alpha\beta} = 1$$

Do fato que $\overline{g}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \overline{g}_{11} & \overline{g}_{12} \\ \overline{g}_{21} & \overline{g}_{22} \end{bmatrix}$ e que $det \overline{g}_{\alpha\beta} = 1$, ter-se-á:

$$(\overline{g}_{\alpha\beta})^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{g}_{22} & -\overline{g}_{12} \\ -\overline{g}_{21} & \overline{g}_{11} \end{bmatrix}$$

Como $z(x^1, x^2)$ é uma solução da equação de superfície mínima, então pelo Teorema 1.18 existem funções analíticas reais $\tau^\alpha(x^1, x^2)$, $\alpha = 1, 2$, em Ω tal que

$$d\tau^\alpha = \overline{g}_{\alpha\beta} dx^\beta \qquad\qquad \alpha = 1, 2$$

De fato, fazendo $\tau^1 = -b$ e $\tau^2 = a$, em (1.2) do Teorema 1.18, ter-se-á

$$d\tau^1 = -db = \beta = \frac{1+p^2}{\omega} dx^1 + \frac{pq}{\omega} dx^2 = \overline{g}_{11} dx^1 + \overline{g}_{12} dx^2,$$

$$d\tau^2 = da = -\alpha = \frac{pq}{\omega} dx^1 + \frac{1+p^2}{\omega} dx^2 = \overline{g}_{21} dx^1 + \overline{g}_{22} dx^2.$$

Usar-se-á esta função para definir a aplicação analítica real $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como segue $\sigma = \psi(x) := x + \tau(x)$ ou, em componentes

$$\sigma^1 = x^1 + \tau^1(x^1, x^2), \;\; \sigma^2 = x^2 + \tau^2(x^1, x^2).$$

Desde que $B = D\tau = (\tau^\alpha_{,\beta}) = (\overline{g}_{\alpha\beta})$, a matriz B é simétrica positiva definida e assim ter-se-á que, para arbitrários $x = (x^1, x^2)$ e $y = (y^1, y^2) \in \Omega$,

$$\langle x - y, \tau(x) - \tau(y) \rangle \geq 0.$$

De fato, seja

$$h(t) = \langle x - y, \tau(y + t(x - y)) - \tau(y) \rangle \,,$$

logo

$$h(0) = \langle x - y, \tau(y) - \tau(y) \rangle \,, \;\; h(1) = \langle x - y, \tau(x) - \tau(y) \rangle \,,$$

assim existe $t_o \in (0, 1)$ tal que

$$\langle x - y, \tau(x) - \tau(y) \rangle = h(1) = h'(t_0) = \left\langle x - y, D\tau_{(y+t_0(x-y))}(x - y) \right\rangle \geq 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(y)|^2 &= |x + \tau(x) - y - \tau(y)|^2 \\ &= |(x - y) + (\tau(x) - \tau(y))|^2 \\ &= \langle (x - y) + (\tau(x) - \tau(y)), (x - y) + (\tau(x) - \tau(y)) \rangle \\ &= |x - y|^2 + |\tau(x) - \tau(y)|^2 + 2 \langle x - y, \tau(x) - \tau(y) \rangle \geq |x - y|^2 \end{aligned}$$

Assim

$$|\psi(x) - \psi(y)| \geq |x - y| \,. \tag{2.13}$$

Portanto a aplicação ψ em Ω é injetora deste modo $\Omega^* := \psi(\Omega)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \rho : &= det \left(\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \overline{g}_{11} & \overline{g}_{12} \\ \overline{g}_{21} & 1 + \overline{g}_{22} \end{vmatrix} \\ &= 2 + \overline{g}_{22} + \overline{g}_{11} \\ &= 2 + \frac{E}{\omega} + \frac{G}{\omega} \geq 2 \end{aligned}$$

e assim $\psi : \Omega \longrightarrow \Omega^*$ é um difeomorfismo. Agora definir-se-á a segunda aplicação $h(\sigma) = (h^1(\sigma), h^2(\sigma))$ para $\sigma \in \Omega^*$ por:

$$h^1(\sigma) = x^1 - \tau^1(x), \; h^2(\sigma) = -x^2 + \tau^2(x),$$

onde $\sigma = \psi(x)$.

Notar-se-á que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1+\overline{g}_{11} & \overline{g}_{12} \\ \overline{g}_{21} & 1+\overline{g}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{2+\omega+\frac{1}{\omega}} \begin{bmatrix} 1+\overline{g}_{22} & -\overline{g}_{12} \\ -\overline{g}_{21} & 1+\overline{g}_{11} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e agora determinar-se-á a derivada $Dh(\sigma)$ de $h(\sigma)$. Notar-se-á que

$$\frac{\partial\ h^\alpha}{\partial x^\beta} = \sum_\gamma \frac{\partial\ h^\alpha}{\partial \sigma^\gamma}\frac{\partial\ \sigma^\gamma}{\partial x^\beta}$$

Assim

$$\left(\frac{\partial\ h^\alpha}{\partial \sigma^\beta}\right) = \left(\frac{\partial\ h^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\left(\frac{\partial\ \sigma^\alpha}{\partial x^\beta}\right)^{-1}$$

e sabendo que

$$\frac{\partial\ h^\alpha}{\partial x^\beta} = \begin{bmatrix} 1-\overline{g}_{11} & -\overline{g}_{12} \\ \overline{g}_{21} & -1+\overline{g}_{22} \end{bmatrix}$$

ter-se-á:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\ h^\alpha}{\partial \sigma^\beta}\right) &= \left(\frac{\partial\ h^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\circ\psi^{-1}\left(\frac{\partial\ \sigma^\alpha}{\partial x^\beta}\right)^{-1}\circ\psi^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1-\overline{g}_{11} & -\overline{g}_{12} \\ \overline{g}_{21} & -1+\overline{g}_{22} \end{bmatrix}\circ\psi^{-1}\frac{1}{2+\omega+\frac{1}{\omega}}\begin{bmatrix} 1+\overline{g}_{22} & -\overline{g}_{12} \\ -\overline{g}_{21} & 1+\overline{g}_{11} \end{bmatrix}\circ\psi^{-1} \\
&= \frac{1}{2+\omega+\frac{1}{\omega}}\begin{bmatrix} \overline{g}_{22}-\overline{g}_{11} & -2\overline{g}_{12} \\ 2\overline{g}_{21} & \overline{g}_{22}-\overline{g}_{11} \end{bmatrix}\circ\psi^{-1}
\end{aligned}$$

usando (2.12) ter-se-á que

$$\left(\frac{\partial\ h^\alpha}{\partial \sigma^\beta}\right) = \frac{1}{(\omega+1)^2}\begin{bmatrix} g_{22}-g_{11} & -2g_{12} \\ 2g_{21} & g_{22}-g_{11} \end{bmatrix}\circ\psi^{-1}$$

Isto mostra que

$$H(\sigma) := h^1(\sigma)+ih^2(\sigma)$$

é uma função holomórfica de $\sigma = \sigma^1 + i\sigma^2$ em Ω com a derivada complexa, dada por

$$H'(\sigma) = \frac{q^2-p^2+2ipq}{(\omega+1)^2} = \left(\frac{ip+q}{1+\omega}\right)^2,$$

onde a expressão $p = z_{,1}$, $q = z_{,2}$ e $\omega = \sqrt{1+p^2+q^2}$. Notar-se-á que

$$|H'(\sigma)| = \frac{p^2+q^2}{(1+\omega)^2} < \left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^2 < 1. \tag{2.14}$$

A imagem $\Omega^*{=}\psi(\Omega)$ de um conjunto convexo Ω é claramente um domínio simplesmente conexo. Se Ω é todo o plano $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, então poder-se-á inferir de (2.13) que também ter-se-á $\Omega^* = \mathbb{C}$. Agora, pelo Teorema de Liouville, a função inteira $H'(\sigma)$ deve ser constante. Assim, para $\mu := \frac{p}{(1+\omega)}$, $\vartheta := \frac{q}{(1+\omega)}$, obter-se-á que

$$\mu^2 - \vartheta^2 = c_1, \quad 2\mu\vartheta = c_2$$

para constantes apropriadas c_1 e c_2, onde

$$\mu^2 + \vartheta^2 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\ .$$

Isto mostra que as funções contínuas μ e ϑ devem ser constantes, e que existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$p^2 + q^2 = c(1+\omega)^2 = c(1 + \sqrt{1 + p^2 + q^2})^2$$

implicando assim que $p^2 + q^2 = const.$, e portanto

$$p = \alpha_1 \;\; e \;\; q = \alpha_2$$

para algums números α_1 e α_2, isso é

$$z(x^1, x^2) = \alpha_0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2.$$

Portanto uma superfície mínima $X(x^1, x^2)$ que é definida em todo $\mathbb{R}^2$ acaba sendo um plano. Tendo assim o Teorema de Bernstein. ■

Capítulo 3

O Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie -Schoen

Agora, demonstrar-se-á o teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie -Schoen, mas para isso, provar-se-á primeiro o seguinte teorema.

Teorema 3.1 ***(Colding-Minicozzi).*** *Se $D \subset \Sigma$ é um disco geodésico mínimo estável de raio r_0 em uma superfície mínima $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, então*

$$\pi r_0^2 \leq Area(D) \leq \frac{4}{3}\pi r_0^2.$$

A seguir dar-se-á a prova da fórmula acima por Colding e Minicozzi, onde estar-se-á usando [7]. Supor-se-á que Σ é simplesmente conexa por levantamento de sua cobertura universal se necessário, o fato que Σ tem curvatura não positiva implica que D tem coordenadas geodésicas globais suave e é mergulhada em Σ. Desde que D tem curvatura Gaussiana não positiva, então a área de D é pelo menos tão grande quando comparado com o disco euclidiano de raio r_0, implicando assim que $\pi r_0^2 \leq Area(D)$.

Considerar-se-á agora a função teste $f(r, \theta) = \eta(r) = 1 - \frac{r}{r_0}$ no disco $D = D(r_0)$ que é uma função de coordenada radial r e que é zero na ∂D. Pela segunda fórmula de variação de área e fórmula de Green, obter-se-á:

$$0 \;\leq\; \int_D -f\Delta f + 2Kf^2$$

$$\begin{aligned} &= \int_D |\nabla f|^2 + 2\int_D K f^2 \\ &= \int_0^{r_0} (\eta'(s))^2 l(s) + 2\int_0^{r_0} (\int_{r=s} K)\eta^2(s), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde K é a função curvatura Gaussiana em D de raio s e $l(s)$ é o comprimento da $\partial D(s)$.

A primeira igualdade ocorre pois:

Seja $F = f\nabla f$.

Ter-se-á que:

$$\int_D divF = \int_{\partial D} \langle F, \vartheta \rangle,$$

onde ϑ é o normal. Assim

$$\int_D (f\Delta f + |\nabla f|^2) = \int_{\partial D} \langle f\Delta f, \vartheta \rangle = 0,$$

pois $f = 0$ na ∂D. Logo

$$\int_D (f\Delta f) = -\int_D |\nabla f|^2$$

e na segunda igualdade dada em (3.1), ver-se-á que a mesma ocorre, já que:

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla f|^2 &= \int_0^{r_0} (\eta'(s))^2 \int_{\partial D(s)} dS ds \\ &= \int_0^{r_0} (\eta'(s))^2 l(s) ds \end{aligned}$$

e na outra parcela usar-se-á o fato que $\int_D K = \int_0^{r_0} \int_{r=s} K$ e a definição de $f(r,\theta) = \eta(r)$.

Seja $K(s) = \int_{D(s)} K_\Sigma$. Então, pela primeira variação de comprimento de arco e pela fórmula de Gauss-Bonnet, obter-se-á:

$$l'(s) = \int_{\partial D(s)} K_g = 2\pi\chi(D(s)) - \int_{D(s)} K_\Sigma = 2\pi - K(s) \tag{3.2}$$

isto implica que: $K(s) = 2\pi - l'(s)$

Como $K'(s) = \int_{r=s} K$, substituindo em (3.1) ter-se-á:

$$0 \leq \int_0^{r_0} (\eta'(s))^2 l(s) + 2\int_0^{r_o} K'(s)\eta^2(s) \tag{3.3}$$

integrando (3.3) por partes e depois substituir-se-á o valor de $K(s)$ dado em (3.2) ter-se-á:

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_0^{r_0} (\eta'(s))^2 l(s) + 2\int_0^{r_o} K'(s)\eta^2(s) &= \int_0^{r_0} (\eta'(s))^2 l(s) + 2\eta^2 K|_0^{r_0} - 2\int_0^{r_0} K(s)(\eta^2)' \\
&= \int_0^{r_0} (\eta'(s))^2 l(s) - 2\int_0^{r_0} K(s)(\eta^2)' \\
&= \int_0^{r_0} (\eta'(s))^2 l(s) - 2\int_0^{r_0} (2\pi - l'(s))(\eta^2(s))'.
\end{aligned}$$

onde na integração por partes tomar-se-á $u = \eta^2$ e $dv = K'$.
E observe que: $\eta^2 K|_0^{r_0} = 0$. De fato:

$$\eta^2 K|_0^{r_0} = f^2 K|_0^{r_0} = K(1 - \frac{s}{r_0})^2|_0^{r_0} = -K(0) = \int_{D(0)} K = 0,$$

pois $\mu(D(0)) = 0$ onde μ representa a medida. Logo:

$$0 \leq \int_0^{r_0} (\eta'(s))^2 l(s) - 2\int_0^{r_0} (2\pi - l'(s))(\eta^2(s))'. \tag{3.4}$$

Agora seja $\eta(s) = 1 - \frac{s}{r_0}$, assim

$$\eta'(s) = -\frac{1}{r_o} \quad e \quad (\eta^2(s))' = [(1 - \frac{s}{r_0})^2]' = -\frac{2}{r_0}(1 - \frac{s}{r_0})$$

Substituindo esta função em (3.4) e reorganizando ter-se-á

$$-\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0} l(s) + \frac{4}{r_0}\int_0^{r_0} l'(s)(1 - \frac{s}{r_0}) \leq \frac{8\pi}{r_0}\int_0^{r_0} (1 - \frac{s}{r_0}) = 4\pi \tag{3.5}$$

Integrando (3.5) por partes, fazendo $u = 1 - \frac{s}{r_0}$ assim $du = -\frac{1}{r_0}$ e por outro lado $dv = l'(s)$ logo $v = l(s)$, ter-se-á:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0} l(s) + \frac{4}{r_0}\int_0^{r_0} l'(s)(1 - \frac{s}{r_0}) &= -\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0} l(s) + \frac{4}{r_0}[l(s)(1 - \frac{s}{r_0})|_0^{r_0} + \frac{1}{r_0}\int_0^{r_0} l(s)] \\
&= -\frac{1}{r_0^2}\int_0^{r_0} l(s) + \frac{4}{r_0} l(0) + \frac{4}{r_0^2}\int_0^{r_0} l(s) \\
&= \frac{3}{r_0^2}\int_0^{r_0} l(s).
\end{aligned}$$

Isto ocorre pois $\frac{4}{r_0} l(0)$=0. De fato, ter-se-á que
$l(s) = \int_{\partial D(s)} dS$. Portanto, $l(0) = \int_{\partial D(0)} dS = 0$, já que $\mu(\partial D(0)) = 0$
Notar-se-á agora que:

$$\frac{3}{r_0^2}\int_0^{r_0}\int_{\partial D(s)} dsdr = \frac{3}{r_0^2}\int_{D(r_0)} dA - \frac{3}{r_0^2}\int_{D(0)} dA = \frac{3}{r_0^2} Area(D) \leq 4\pi.$$

Logo, $Area(D) \leq \frac{4}{3}\pi r_0^2$.

Portanto concluir-se-á que:

$$\pi r_0^2 \leq Area(D) \leq \frac{4}{3}\pi r_0^2.$$

$\blacksquare$

Aplicar-se-á agora a estimativa acima da área de discos mínimos estáveis para obter uma prova curta do Teorema de do Carmo e Peng [12], de Fischer-Colbrie e Schoen [16] e de Pogofelov [21].

3.1 Primeira Demonstração do Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen

Teorema 3.2 ***(do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen)****.* *O plano é a única superfície mínima imersa em $\mathbb{R}^3$ que é completa, estável e orientável.*

Demonstração. Se Σ é uma superfície mínima em $\mathbb{R}^3$ completa, orientável e estável, então o espaço recobrimento universal de Σ composto com a inclusão de Σ em $\mathbb{R}^3$ é também uma superfície mínima de $\mathbb{R}^3$ completa, imersa e estável. Desde que Σ é um plano se, e somente se, sua cobertura universal é um plano, poder-se-á assumir que Σ é simplesmente conexa. Desde que a curvatura Gaussiana de Σ é não positiva, pelo Teorema de Hadamard, escolhendo um ponto $p_0 \in \Sigma$, obter-se-á geodésicas globais em coordenadas polares (t, θ) em Σ centrada em p_0. Nestas coordenadas deixe $D(R)$ denotar o disco de raio R centrado em p_0.

Seja $A(R)$ a área de $D(R)$ e note que $A(R)$ é uma função suave de R. A primeira derivada de $A(R)$ é dada por:

$$A'(R) = l(\partial D(R)) = L(R).$$

E assim a primeira variação do comprimento de arco é:

$$A''(R) = L'(R) = \int_{\partial D(R)} K_g,$$

onde K_g é a curvatura geodésica de $\partial D(R)$. De fato

Considere um sistema de coordenadas polares geodésicas $X(\rho, \theta)$. Desta forma, o disco geodésico fica parametrizado por ($\rho = R = cte$). Assim, seja $\alpha(\theta) = X(R,\theta)$. Logo

$$A'(R) = l(\partial D(R)) = \int_{\partial D(R)} d\sigma = \int_0^l |\alpha'(\theta)|d\theta = \int_0^l \sqrt{G}d\theta,$$

onde $E = 1$, $F = 0$, $lim_{\rho\to 0}G = 0$ e $lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$. Assim ter-se-á que

$$A''(R) = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{G_\rho}{\sqrt{G}}d\theta = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{G_\rho}{G}\sqrt{G}d\theta = \int_0^l k_g\sqrt{G}d\theta = \int_{\partial D(R)} k_g d\sigma.$$

Agora, pela fórmula de Gauss-Bonnet, obter-se-á

$$A''(R) = \int_{\partial D(R)} K_g = 2\pi\chi(D(R)) - \int_{D(R)} KdA = 2\pi - \int_{D(R)} KdA$$

e assim $A''(R)$ é monótona crescente como uma função de R. Desde que $A''(R)$ é monótona crescente, $A(D(R)) \leq \frac{4}{3}\pi R^2$, $A(0) = 0$ e $A'(0) = 0$ (de fato, $A(0) = 0$ pois é a área de um disco de raio zero e $A'(0) = 0$ já que $A'(0) = l(\partial D(0)) = 0$), então $A''(R) \leq \frac{8}{3}\pi$.

De fato

Suponhar-se-á por contração que existe R_0 tal que

$$A''(R_0) > \frac{8}{3}\pi.$$

Porém note que para $R > R_0$, ter-se-á

$$A'(R) - A'(R_0) = \int_{R_0}^R A''(R)dR \geq A''(R_0)(R - R_0)$$

logo

$$A'(R) \geq A''(R_0)(R - R_0) + A'(R_0)$$

integrando novamente, ter-se-á

$$\begin{aligned} A(R) - A(R_0) &= \int_{R_0}^R A'(R)dR \\ &\geq \int_{R_0}^R (A'(R_0) + A''(R_0)(R - R_0)) \\ &= A'(R_0)(R - R_0) + \frac{A''(R_0)(R - R_0)^2}{2} \end{aligned}$$

assim

$$A(R) \geq A(R_0) + A'(R_0)(R - R_0) + \frac{A''(R_0)(R - R_0)^2}{2}$$

agora usando a hipótese, ter-se-á

$$\frac{4\pi R^2}{3} \geq A(R) \geq A(R_0) + A'(R_0)(R - R_0) + \frac{A''(R_0)R^2}{2} - A''(R_0)RR_0 + \frac{A''(R_0)R_0^2}{2}$$

logo, quando $R \to \infty$

$$\frac{8\pi}{3} \geq A''(R_0).$$

O que é um absurdo. Portanto, ter-se-á que

$$A''(R) \leq \frac{8\pi}{3}.$$

E desta forma

$$A''(R) = 2\pi - \int_{D(R)} KdA \leq \frac{8}{3}\pi.$$

Implicar-se-á assim que $-\int_{D(R)} KdA \leq \frac{2}{3}\pi$. Logo, Σ tem curvatura Gaussiana total finita e no máximo $\frac{2}{3}\pi$. Agora usar-se-á o Teorema de Osserman que diz se Σ é uma superfície mínima não planar, orientável e completa então a curvatura total é um múltiplo de um inteiro de -4π. Como a curvatura total absoluta de Σ é no máximo $\frac{2}{3}\pi$, sua curvatura total deve ser zero e desta forma ter-se-á que Σ é um plano. ■

Seja M uma variedade bi-dimencional orientável e conexa e considere agora uma imersão $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mínimal de M no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, isto é, uma imersão $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é mínima se $H = 0$ em todos os pontos. Um domínio $D \subset M$ com fecho compacto é estável se a segunda variação induzida da fórmula de área de D é não-negativa, e uma imersão X é estável se para todo $D \subset M$ for estável.

A demonstração que far-se-á a seguir é uma generalização do teorema de Bernstein. Com a adicional condição que a curvatura total é finita, o teorema foi provado por M. do Carmo e A. M. da Silveira em [11] e depois estendeu ao caso quando a curvatura total tem uma ordem pequena de crescimento por M. do Carmo e C. K. Peng em [12]. Porém, R. Schoen juntamente com D. Fischer- Colbrie obtiveram também uma prova do teorema em [17].

3.2 Segunda Demonstração do Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen

Mostrar-se-á primeiro que poder-se-á restringir a uma cobertura universal $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$ de M. Explicitamente, mostrar-se-á que se existe um domínio compacto relativamente instável $\widetilde{D} \subset \widetilde{M}$ para uma imersão $X_o\pi : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ então $\pi(\widetilde{D}) \subset M$ é instável. Onde denotar-se-á por Δ_M, ∇_M e K, respectivamente, o laplaciano, o gradiente e a curvatura Gaussianana na métrica induzida por M.

Se $\widetilde{D}$ é instável, então existe um domínio $\widetilde{D'} \subset \widetilde{D}$ e a função não negativa u em $\widetilde{D'}$ que é zero na $\partial\widetilde{D'}$ e satisfaz $\Delta_M u - 2Ku = 0$ em $\widetilde{D'}$. Definir-se-á u como sendo zero fora de $\widetilde{D'}$. Para cada $q \in M$, seja $\pi^{-1}(q) = \{q_1, q_2, ..., q_k, ...\}$ e definir-se-á uma função f em M dada por $f(q) = \sum_i u(q_i)$. Como o fecho de $\widetilde{D'}$ é compacto, ter-se-á que a soma é não zero para um número finito de índices. Logo $\pi(\widetilde{D'}) = D'$. Poder-se-á mostrar que f é contínua em M, $f \geq 0$, $f \equiv 0$ na $\partial D'$ e $\int_{\overline{D'}} |\nabla f|^2 dM \leq 2\int_{\overline{D'}}(-K)f^2 dM$ (onde a prova está contida em [3]). Segue que D contém uma fronteira conjugada, onde é instável como desejavamos mostrar.

Assumir-se-á agora que M é simplesmente conexa. Com uma natural estrutura complexa dada por X, M é então conformemente equivalente a todo plano complexo $\mathbb{C}$ ou ao disco unitário $B = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, e a métrica induzida ds^2 em M é dada por $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$, $\lambda \neq 0$.

Considerar-se-á primeiramente o caso onde B é um disco unitário. Assumir-se-á agora que todo relativo sub-domínio compacto $D \subset M$ é estável, assim ter-se-á

$$\int_M (u\Delta_M u - 2u^2K)dM \leq 0, \tag{3.6}$$

para toda função u suave por partes e que possui suporte compacto em M. Deixe agora Δ denotar o Laplaciano e dA o elemento de área de uma métrica flat (plana). Então

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\Delta log\lambda, \quad dM = \lambda^2 dA, \quad \Delta_M = \frac{1}{\lambda^2}\Delta,$$

e desta forma (3.6) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\int_B (u\Delta_M u - 2u^2K)dM &= \int_B (u\frac{1}{\lambda^2}\Delta u + 2u^2\frac{1}{\lambda^2}\Delta log\lambda)\lambda^2 dA \\ &= \int_B (u\Delta u + 2u^2\Delta log\lambda)dA\end{aligned}$$

$$= \int_B (u\Delta u + u^2 \Delta log\lambda^2) dA \leq 0,$$

logo

$$\int_B (u\Delta u + u^2 \Delta log\lambda^2) dA \leq 0. \qquad (3.7)$$

Tomando $\varphi = \lambda^{-1}$ e substituindo em (3.7) u por φu, obter-se-á

$$3\int_B |\nabla\varphi|^2 u^2 dA \leq \int_B \varphi^2 |\nabla u|^2 dA - 2\int_B \varphi u(\nabla u \nabla\varphi) dA. \qquad (3.8)$$

De fato:

Fazendo $\varphi = \lambda^{-1}$ e substituindo em (3.7) u por φu, ter-se-á

$$\int_B (\varphi u \Delta\varphi u + (\varphi u)^2 \Delta log\frac{1}{\varphi^2}) dA = \int_B \varphi u \Delta\varphi u dA + \int_B ((\varphi u)^2 \Delta log\frac{1}{\varphi^2}) dA \leq 0.$$

Notar-se-á agora que:

$$\int_B \varphi u \Delta\varphi u dA = -\int_B |\nabla\varphi u|^2 dA,$$

pois $\int_B (v\Delta u + \nabla u \nabla v) dx = \int_{\partial B} v \frac{\partial u}{\partial v} \partial\sigma = 0$, já que u é zero em ∂B,
por outro lado

$$\begin{aligned}
\int_B (\varphi u)^2 \Delta log\frac{1}{\varphi^2} dA &= -\int_B \nabla(\varphi u)^2 \nabla log\frac{1}{\varphi^2} dA \\
&= -\int_B 2(\varphi u)\nabla(\varphi u)(-2)\varphi^{-1}\nabla\varphi dA \\
&= -\int_B (-4)u\nabla(\varphi u)\nabla\varphi dA \\
&= \int_B 4u(u\nabla\varphi + \varphi\nabla u)\nabla\varphi dA \\
&= \int_B 4u^2\nabla\varphi\nabla\varphi dA + \int_B 4u\varphi\nabla u\nabla\varphi dA
\end{aligned}$$

desta forma

$$-\int_B |\nabla\varphi u|^2 dA + \int_B 4u^2 \nabla\varphi\nabla\varphi dA + \int_B 4u\varphi\nabla u\nabla\varphi dA \leq 0$$

e mais

$-\int_B |\nabla\varphi u|^2 dA + \int_B 4u^2\nabla\varphi\nabla\varphi dA + \int_B 4u\varphi\nabla u\nabla\varphi dA$
$= -\int_B |\varphi\nabla u + u\nabla\varphi|^2 dA + \int_B 4u^2\nabla\varphi\nabla\varphi dA + \int_B 4u\varphi\nabla u\nabla\varphi dA$

$= -\int_B \langle \varphi\nabla u + u\nabla\varphi, \varphi\nabla u + u\nabla\varphi\rangle + \int_B 4u^2\nabla\varphi\nabla\varphi dA + \int_B 4u\varphi\nabla u\nabla\varphi dA$
$= -\int_B \varphi^2|\nabla u|^2 - \int_B 2\varphi u\nabla u\nabla\varphi - \int_B u^2|\nabla\varphi|^2 + \int_B 4u^2\nabla\varphi\nabla\varphi dA + \int_B 4u\varphi\nabla u\nabla\varphi dA$
≤ 0

implicar-se-á assim, que

$$3\int_B |\nabla\varphi|^2 u^2 dA \leq \int_B \varphi^2|\nabla u|^2 dA - 2\int_B \varphi u(\nabla u\nabla\varphi) dA$$

logo, para algum $\epsilon > 0$,

$$|\varphi u\nabla u\nabla\varphi| \leq \epsilon|\nabla\varphi|^2 u^2 + \frac{1}{\epsilon}\varphi^2|\nabla u|^2,$$

(3.8) implica que existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\int_B |\nabla\varphi|^2 u^2 dA \leq \beta\int_B \varphi^2|\nabla u|^2 dA,$$

desde que $\nabla_M = (\frac{1}{\lambda})\nabla$, ter-se-á

$$\int_M |\nabla_M\varphi|^2 u^2 dM \leq \beta\int_M \varphi^2|\nabla_M u|^2 dM. \tag{3.9}$$

Agora escolher-se-á uma família de bolas geodésicas B_R de raio R tal que exaustam M, fixando θ, $0 < \theta < 1$, e seja $u : M \longrightarrow R$ uma função contínua que é um na $B_{\theta R}$, zero fora de B_R e linear em $B_R - B_{\theta R}$. Por (3.9) obter-se-á que

$$\int_{B_R} |\nabla_M\varphi|^2 dM \leq \frac{\beta}{(1-\theta)^2R^2}\int_M \varphi^2 dM = \frac{\beta}{(1-\theta)^2R^2}\int_B dA = \frac{\pi\beta}{(1-\theta)^2R^2}$$

a desigualdade ocorre pois

$\int_M |\nabla_M\varphi|^2 u^2 dM$
$= \int_{B_{\theta R}} |\nabla_M\varphi|^2 dM + \int_{B_R - B_{\theta R}} |\nabla_M\varphi|^2(1 + \frac{1}{(1-\theta)R}(x - \theta R))^2$
$= \int_{B_{\theta R}} |\nabla_M\varphi|^2 dM + \int_{B_R - B_{\theta R}} |\nabla_M\varphi|^2 dM + 2\int_{B_R - B_{\theta R}} |\nabla_M\varphi|^2(\frac{1}{(1-\theta)R}(x - \theta R))dM$
$+ \int_{B_R - B_{\theta R}} |\nabla_M\varphi|^2\frac{1}{(1-\theta)^2R^2}(x - \theta R)^2 dM$
$\geq \int_{B_{\theta R}} |\nabla_M\varphi|^2 dM + \int_{B_R - B_{\theta R}} |\nabla_M\varphi|^2 dM$
$= \int_{B_R} |\nabla_M\varphi|^2 dM$

e por outro lado, ter-se-á

$\beta \int_M \varphi^2 |\nabla_M u|^2 dM$
$= \beta \int_{B_{\theta R}} \varphi^2 |\nabla_M 1|^2 dM + \beta \int_{B_R - B_{\theta R}} \varphi^2 |\nabla_M (1 + \frac{1}{(1-\theta)R}(x - \theta R))|^2 dM$
$= \beta \int_{B_R - B_{\theta R}} \varphi^2 |\frac{\nabla_M}{(1-\theta)R}(x - \theta R)|^2 dM$
$= \beta \int_{B_R - B_{\theta R}} \varphi^2 \left\langle \frac{\nabla_M}{(1-\theta)R}(x - \theta R), \frac{\nabla_M}{(1-\theta)R}(x - \theta R) \right\rangle dM$
$= \beta \int_{B_R - B_{\theta R}} \varphi^2 \frac{|\nabla_M (x-\theta R)|^2}{(1-\theta)^2 R^2} dM$
$\leq \frac{\beta}{(1-\theta)^2 R^2} \int_M \varphi^2 dM,$

onde usou-se que: $dM = \lambda^2 dA$ e $\varphi = \lambda^{-1}$.

Fazendo $R \longrightarrow \infty$, concluir-se-á que $|\nabla \varphi| \equiv 0$, isto é, $\lambda = const$, e assim contradizendo o fato de $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$.

Agora considerar-se-á o caso onde M é conforme equivalente ao plano complexo $\mathbb{C}$. Considerar-se-á $\psi = \Delta log \lambda^2$, poder-se-á escrever (3.7) como

$$\int_{\mathbb{C}} (u\Delta u + u^2 \Delta log \lambda^2) dA = \int_{\mathbb{C}} (u\Delta u + u^2 \psi) dA = \int_{\mathbb{C}} (-|\nabla u|^2 + u^2 \psi) dA \leq 0$$

isto implica que

$$\int_{\mathbb{C}} \psi u^2 dA \leq \int_{\mathbb{C}} |\nabla u|^2 dA. \tag{3.10}$$

De outra forma, se K é não identicamente zero, saber-se-á que (cf.[12], observação 2). $\Delta_M log(-K) = 4K$. Isto implica que $\Delta log \psi + \psi = 0$, onde

$$\psi \Delta \psi + \psi^3 = |\nabla \psi|^2 \tag{3.11}$$

A prova é a mesma dada como em ([12]) dar-se-á uma idéia da mesma.
Assim, substituindo u por ψu em (3.10), obter-se-á

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} \psi^3 u^2 dA \leq \int_{\mathbb{C}} |\nabla \psi u|^2 dA &= \int_{\mathbb{C}} |\psi \nabla u + u \nabla \psi|^2 \\
&= \int_{\mathbb{C}} \langle \psi \nabla u + u \nabla \psi, \psi \nabla u + u \nabla \psi \rangle dA \\
&= \int_{\mathbb{C}} \psi^2 |\nabla u|^2 dA + \int_{\mathbb{C}} u^2 |\nabla \psi|^2 dA + 2 \int_{\mathbb{C}} \psi u \nabla u \nabla \psi dA
\end{aligned}$$

logo

$$\int_{\mathbb{C}} \psi^3 u^2 dA \leq \int_{\mathbb{C}} \psi^2 |\nabla u|^2 dA + \int_{\mathbb{C}} u^2 |\nabla \psi|^2 dA + 2 \int_{\mathbb{C}} \psi u \nabla u \nabla \psi dA \tag{3.12}$$

Por outro lado, se multiplicar-se-á (3.11) por u^2, e integrando sobre $\mathbb{C}$ e adimitindo o resuldado dado em (3.12), ter-se-á

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}}|\nabla\psi|^2u^2dA &= \int_{\mathbb{C}}\psi^3u^2dA+\int_{\mathbb{C}}\psi\Delta\psi u^2dA\\ &= \int_{\mathbb{C}}\psi^3u^2dA-\int_{\mathbb{C}}u^2|\nabla\psi|^2dA-2\int_{\mathbb{C}}\psi u\nabla u\nabla\psi dA\\ &\leq \int_{\mathbb{C}}\psi^2|\nabla u|^2dA\end{aligned}$$

desta forma

$$\int_{\mathbb{C}}|\nabla\psi|^2dA\leq\int_{\mathbb{C}}\psi^2|\nabla u|^2dA. \tag{3.13}$$

Usar-se-á a última soma dada em (3.12) e o fato que $2ab\leq\epsilon a^2+(\frac{1}{\epsilon})b^2$, para todo $\epsilon>0$, e introduzir-se-á (3.13) em (3.12), logo obter-se-á

$$\int_{\mathbb{C}}\psi^3u^2dA\leq\beta_1\int_{\mathbb{C}}\psi^2|\nabla u|^2dA,\quad \beta_1=const. \tag{3.14}$$

Agora usando em (3.14) a desigualdade de Young onde ter-se-á $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}$ com $a\geq 0$ e $b\geq 0$, a, $b\in\mathbb{R}$, assim

$$\psi^2|\nabla u|^2=u^2(\psi^2\frac{|\nabla u|^2}{u^2})=u^2(\alpha\psi^2\frac{|\nabla u|^2}{\alpha u^2})\leq u^2(\frac{\alpha^s}{s}\psi^{2s}+\frac{\alpha^{-t}}{t}(\frac{|\nabla u|}{u})^{2t}), \tag{3.15}$$

onde (3.15) é dada para todo $\alpha>0$ e todo $s>1$, $t<\infty$, com $\frac{1}{s}+\frac{1}{t}=1$.
Fazendo $s=\frac{3}{2}$, $t=3$ e α pequeno obter-se-á uma constante β_2 tal que

$$\int_{\mathbb{C}}\psi^3u^2dA\leq\beta_2\int_{\mathbb{C}}\frac{|\nabla u|^6}{u^4}dA, \tag{3.16}$$

onde trocar-se-á u por u^3 em (3.16), poder-se-á escrever a mesma da seguite forma

$$\int_{\mathbb{C}}\psi^3u^6dA\leq\beta_3\int_{\mathbb{C}}|\nabla u|^6dA,\quad \beta_3=const. \tag{3.17}$$

De fato, pois observe que:

$$|\nabla u|^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2$$

desta forma

$$|\nabla u^3|^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial u^3}{\partial x_i})^2=\sum_{i=1}^{n}(3u^2\frac{\partial u}{\partial x_i})^2$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \psi^3 u^6 dA \leq \beta_2 \int_{\mathbb{C}} \frac{|\nabla u^3|^6}{u^{12}} dA &= \beta_2 \int_{\mathbb{C}} \frac{(3u^2|\nabla u|)^6}{u^{12}} dA \\ &= \beta_2 3^6 \int_{\mathbb{C}} |\nabla u|^6 dA \\ &= \beta_3 \int_{\mathbb{C}} |\nabla u|^6 dA.\end{aligned}$$

A desigualdade (3.17) implica que poder-se-á escolher uma função usual u na bola $B_R \subset \mathbb{C}$ de raio R, tal que $\psi^3 \equiv 0$, assim $K \equiv 0$ e $X(M)$ é um plano. ■

3.3 Terceira Demonstração do Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen

Seja M uma variedade bi-dimencional diferenciável e conexa e seja $Q^3(a)$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e tri-dimensional com curvatura seccional constante a; quando $a = 0$, $Q^3(a)$ é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, e quando $a = -1$, $Q^3(a)$ é o espaço hiperbólico H^3. Seja $X : M \longrightarrow Q^3(a)$ uma imersão com curvatura média H constante. Segundo [2] saber-se-á que X é estável se

$$I(f) = \int_M \{|\nabla f|^2 - 2(2a + 2H^2 - K)f^2\} dA \geq 0, \tag{3.18}$$

para toda $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto que satisfaz

$$\int_M f dA = 0,$$

onde ∇f é o gradiente de f, dA é o elemento de área e K é a curvatura Gaussiana na métrica induzida. Quando $H \equiv 0$ assumir-se-á que M é orientável e para $H = const \neq 0$, M é orientável automaticamente.

Em [2] e [4] foi provado que se M for compacto, X é estável se, e só se, $X(M) \subset Q(a)^3$ é uma esfera geodésica. Considerar-se-á o caso onde M é completamente não-compacto.

Depender-se-á de um estudo sobre o operador $L = \Delta + 2(2a + 2H^2 - K)$ associado a forma quadrática (3.18), e alguns teoremas que serão necessários para dar-se-á a terceira demonstração do Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen; onde Δ é o laplaciano na métrica induzida. Dar-se-á algumas definições.

Seja (M, ds^2) uma variedade Riemanniana completa bi-dimensional com curvatura Gaussiana K, e seja $p : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em M. Considere o operador elíptico $L = \Delta + q - K$ associado a forma quadrática

$$\langle f, -Lf\rangle = -\int_M fLfdA = \int_M [|\nabla f|^2 - (q-K)f^2]dA,$$

onde $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave por partes com suporte compacto, Δ é o Laplaciano, ∇f é o gradiente de f e dA é a área na forma da métrica ds^2.

Chamar-se-á índice de L em M o supremo, sobre domínios compactos de M, do número de autovalores negativos de L com a condição de Dirichlet na fronteira.

A seguir enunciar-se-á alguns resultados, necessários para a demonstração do Teorema de do Carmo-Peng e Fisher Colbrie-Schoen.

Lema 3.3 . *Seja $X : M \longrightarrow Q^3(a)$ uma imersão com curvatura média constante H. Assume que M é completa e que X é estável. Então o índice do operador $L = \Delta + 2(2a + 2H^2 - K)$ em M é no máximo um.*

Demonstração. Suponhar-se-á por contradição, que existe um domínio D compacto de M com a fronteira ∂D suave por partes tal que a segundo autovalor $\lambda_2(D)$ do operador L em D é negativo, onde $\lambda_2(D)$ é caracterizado por

$$\lambda_2(D) = inf\{\int_M -fLfdA; \int_M f\phi_1 dA = 0, \int_M f^2dA = 1, f|_{\partial D} = 0\},$$

onde ϕ_1 é a primeira autofunção de L em D. Já que ϕ_1 não muda de sinal em D e $\lambda_2(D) < 0$, poder-se-á construir uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável por partes tal que satisfaz $\int_D -fLfdA < 0$, $\int_D fdA = 0$ e $f|_{\partial D} = 0$. Mas desta forma X é não estável, uma comtradição. ∎

Teorema 3.4 . *Seja (M, ds^2) e $L = \Delta + q - k$. Assuma que q é não negativo e que o índice de L em M é finito. Então M é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta menos um número finito de pontos, e $\int_M qdA$ é finita.*

Teorema 3.5 . *Seja* (M, ds^2) *e* $L = \Delta + q$. *Assuma que* M *é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta menos um número finito de pontos. Assuma que* $q \geq 0$, $q \not\equiv 0$ *e que a área de* M *é infinita. Então existe uma função diferenciável por partes* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *com suporte compacto satisfazendo* $\int_M -f\Delta f dA < 0$ *e* $\int_M f dA = 0$.

Teorema 3.6 . *Seja* $\overline{M}$ *uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não positiva. Seja* $X : M \longrightarrow \overline{M}$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa não compacta, com vetor curvatura média* H. *Se* $|H| \leq const$, *então o volume de* M *é infinito.*

Demonstração (do Teorema de do Carmo-Peng e Fischer Colbrie-Schoen). Primeiro obeservar-se-á que $4H^2 - K \geq 3H^2 \geq 0$. De fato, pois

$K = K_1K_2$ e $H = \frac{K_1+K_2}{2}$,

logo

$$\begin{aligned} H^2 - K &= \frac{K_1^2 - 2K_1K_2 + K_2^2}{4} \\ &= \frac{(K_1 - K_2)^2}{4} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Como X é estável, então o índice do operador $L = \Delta + 4H^2 - 2K$ em M é no máximo um. Segue que poder-se-á aplicar o Teorema 3.4, com $q = 4H^2 - K$. Concluir-se-á que M é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta menos um número finito de pontos e que $\int_M 3H^2 dA \leq \int_M (4H^2 - K) dA$ é finita. Mas M tem área infinita, pelo Teorema 3.6, segue desta forma que $H \equiv 0$ e que $\int_M -K dA$ é finita. Poder-se-á aplicar agora o Teorema 3.5, fazendo $q = -2K$, onde concluir-se-á que $K \equiv 0$. Portanto $X(M)$ é um plano. ■

Capítulo 4

Apêndice

Demonstrar-se-á a identidade (2.10):

$$\Delta log\left(1+\frac{1}{\omega}\right)=K.$$

Para isto considerar-se-á a seguite parametrização

$$X(u,v)=(u,v,f(u,v))$$

desta forma:

$$E=1+f_u^2,\ \ F=f_uf_v,\ \ G=1+f_v^2$$

com

$$\omega^2=1+f_u^2+f_v^2$$

ter-se-á assim que

$$K=\frac{f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2}{\omega^4}.$$

Sabe-se também que

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\omega^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & G \end{bmatrix}$$

e que

$$\begin{aligned}\Delta h &= \frac{1}{\omega}\sum_{j=1}^{2}\Big[(\omega g^{1j}h_j)_u+(\omega g^{2j}h_j)_v\Big]\\ &= \frac{1}{\omega}\Big[(\omega g^{11}h_u)_u+(\omega g^{12}h_v)_u+(\omega g^{21}h_u)_v+(\omega g^{22}h_v)_v\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\omega}\left[\omega_u\frac{G}{\omega^2}h_u+\omega(\frac{G}{\omega^2})_u h_u+\omega\frac{G}{\omega^2}h_{uu}-\omega_u\frac{F}{\omega^2}h_v-\omega(\frac{F}{\omega^2})_u h_v-\omega\frac{F}{\omega^2}h_{uv}\right]\\
&+ \frac{1}{\omega}\left[-\omega_v\frac{F}{\omega^2}h_u-\omega(\frac{F}{\omega^2})_v h_u-\omega\frac{F}{\omega^2}h_{uv}+\omega_v(\frac{E}{\omega^2})h_v+\omega(\frac{E}{\omega^2})_v h_v+\omega\frac{E}{\omega^2}h_{vv}\right]\\
&= \frac{1}{\omega^2}\left[(G_u-F_v-\frac{G\omega_u}{\omega}+\frac{F\omega_v}{\omega})h_u-(F_u-E_v-\frac{F\omega_u}{\omega}+\frac{E\omega_v}{\omega})h_v\right]\\
&+ \frac{1}{\omega^2}\Big[Gh_{uu}+Eh_{vv}-2Fh_{uv}\Big],
\end{aligned}
$$

logo fazendo

$$h=log\left(1+\frac{1}{\omega}\right)=log\left(\frac{1+\omega}{\omega}\right)$$

ter-se-á

$$h_u=-\frac{\omega_u}{\omega(1+\omega)},\ \ h_v=-\frac{\omega_v}{\omega(1+\omega)}$$

$$h_{uu}=-\frac{\omega_{uu}}{\omega(1+\omega)}+\frac{\omega_u^2}{\omega^2(1+\omega)}+\frac{\omega_u^2}{\omega(1+\omega)^2}$$

$$h_{vv}=-\frac{\omega_{vv}}{\omega(1+\omega)}+\frac{\omega_v^2}{\omega^2(1+\omega)}+\frac{\omega_v^2}{\omega(1+\omega)^2}$$

$$h_{uv}=-\frac{\omega_{uv}}{\omega(1+\omega)}+\frac{\omega_u\omega_v}{\omega^2(1+\omega)}+\frac{\omega_u\omega_v}{\omega(1+\omega)^2}$$

assim

$\Delta log\left(1+\frac{1}{\omega}\right)$
$=\frac{1}{\omega^2}\Big[-(G_u-F_v-\frac{G\omega_u}{\omega}+\frac{F\omega_v}{\omega})\frac{\omega_u}{\omega(1+\omega)}+(F_u-E_v-\frac{F\omega_u}{\omega}+\frac{E\omega_v}{\omega})\frac{\omega_v}{\omega(1+\omega)}+G(-\frac{\omega_{uu}}{\omega(1+\omega)}+\frac{\omega_u^2}{\omega^2(1+\omega)}+\frac{\omega_u^2}{\omega(1+\omega)^2})+E(-\frac{\omega_{vv}}{\omega(1+\omega)}+\frac{\omega_v^2}{\omega^2(1+\omega)}+\frac{\omega_v^2}{\omega(1+\omega)^2})-2F(-\frac{\omega_{uv}}{\omega(1+\omega)}+\frac{\omega_v\omega_u}{\omega^2(1+\omega)}+\frac{\omega_v\omega_u}{\omega(1+\omega)^2})\Big]$
$=\frac{1}{\omega^3(1+\omega)}\Big[-G_u\omega_u+F_v\omega_u+\frac{G\omega_u^2}{\omega}-\frac{F\omega_u\omega_v}{\omega}+F_u\omega_v-E_v\omega_v-\frac{F\omega_u\omega_v}{\omega}+\frac{E\omega_v^2}{\omega}-\omega_{uu}G+\frac{\omega_u^2G}{\omega}+\frac{\omega_u^2G}{1+\omega}-\omega_{vv}E+\frac{\omega_v^2E}{\omega}+\frac{\omega_v^2E}{1+\omega}+2\omega_{uv}F-2\frac{\omega_u\omega_vF}{\omega}-2\frac{\omega_u\omega_vF}{1+\omega}\Big]$
$=\frac{1}{\omega^3(1+\omega)}\Big[-G_u\omega_u+F_v\omega_u+2\frac{G\omega_u^2}{\omega}-4\frac{F\omega_u\omega_v}{\omega}+F_u\omega_v-E_v\omega_v+2\frac{\omega_v^2E}{\omega}-\omega_{uu}G-\omega_{vv}E+\frac{\omega_u^2G+\omega_v^2E-2\omega_u\omega_vF}{1+\omega}+2\omega_{uv}F\Big]$
$=\frac{1}{\omega^3(1+\omega)}\Big[(F_v-G_u)\omega_u+(\frac{2G}{\omega}+\frac{G}{1+\omega})\omega_u^2+(F_u-E_v)\omega_v+(\frac{2E}{\omega}+\frac{E}{1+\omega})\omega_v^2-(\omega_{uu}G+\omega_{vv}E-2\omega_{uv}F)-(\frac{4F}{\omega}+\frac{2F}{1+\omega})\omega_u\omega_v\Big]$
agora usando que

$$E=1+f_u^2,\ \ F=f_uf_v,\ \ G=1+f_v^2$$

ter-se-á

$$E_v=2f_uf_{uv},\ \ F_u=f_{uu}f_v+f_uf_{uv},\ \ F_v=f_{uv}f_v+f_uf_{vv},\ \ G_u=2f_vf_{uv},$$

logo
$\Delta log\left(1+\frac{1}{\omega}\right)$
$= \frac{1}{\omega^3(1+\omega)}\Big[(f_uf_{vv}-f_vf_{uv})\omega_u+(\frac{2+2\omega+\omega}{\omega(1+\omega)})G\omega_u^2+(f_vf_{uu}-f_uf_{uv})\omega_v+(\frac{2+2\omega+\omega}{\omega(1+\omega)})E\omega_v^2-$
$(\omega_{uu}G+\omega_{vv}E-2\omega_{uu}F)-(\frac{4+4\omega+2\omega}{\omega(1+\omega)})F\omega_u\omega_v\Big]$
$= \frac{1}{\omega^3(1+\omega)}\Big[(f_uf_{vv}-f_vf_{uv})\omega_u+(\frac{3\omega+2}{\omega(1+\omega)})(G\omega_u^2+E\omega_v^2-2F\omega_u\omega_v)+(f_vf_{uu}-f_uf_{uv})\omega_v-$
$(\omega_{uu}G+\omega_{vv}E-2\omega_{uv}F)\Big]$
agora como

$$\omega^2 = 1+f_u^2+f_v^2$$

ter-se-á

$$\omega_u = \frac{f_uf_{uu}+f_vf_{uv}}{\omega},\ \ \omega_v = \frac{f_uf_{uv}+f_vf_{vv}}{\omega}$$

para facilitar os cálculos, considerar-se-á:

$$A = (f_uf_{vv}-f_vf_{uv})\omega_u$$
$$B = \Big(\frac{3\omega+2}{\omega(1+\omega)}\Big)(G\omega_u^2+E\omega_v^2-2F\omega_u\omega_v)$$
$$C = (f_vf_{uu}-f_uf_{uv})\omega_v,\ \ D = (\omega_{uu}G+\omega_{vv}E-2\omega_{uv}F)$$

desta forma

$$\begin{aligned} A &= (f_uf_{vv}-f_vf_{uv})\omega_u \\ &= \frac{1}{\omega}(f_u^2f_{vv}f_{uu}+f_uf_vf_{uv}f_{vv}-f_uf_vf_{uv}f_{uu}-f_v^2f_{uv}^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \Big(\frac{3\omega+2}{\omega(1+\omega)}\Big)\Big((1+f_v^2)\frac{(f_uf_{uu}+f_vf_{uv})^2}{\omega^2}+(1+f_u^2)\frac{(f_uf_{uv}+f_vf_{vv})^2}{\omega^2} \\ &\quad -2f_uf_v\frac{(f_uf_{uu}+f_vf_{uv})(f_uf_{uv}+f_vf_{vv})}{\omega^2}\Big) \\ &= \Big(\frac{3\omega+2}{\omega^3(1+\omega)}\Big)\Big((1+f_v^2)(f_u^2f_{uu}^2+2f_uf_{uu}f_vf_{uv}+f_v^2f_{uv}^2) \\ &\quad +(1+f_u^2)(f_u^2f_{uv}^2+2f_uf_vf_{uv}f_{vv}+f_u^2f_{vv}^2) \\ &\quad -2f_u^3f_vf_{uu}f_{uv}-2f_u^2f_v^2f_{uu}f_{vv}-2f_u^2f_v^2f_{uv}^2-2f_uf_v^3f_{uv}f_{vv}\Big) \\ &= \Big(\frac{3\omega+2}{\omega^3(1+\omega)}\Big)\Big[f_u^2f_{uu}^2+2f_uf_{uu}f_vf_{uv}+f_v^2f_{uv}^2+f_u^2f_v^2f_{uu}^2+2f_uf_v^3f_{uu}f_{uv}+f_v^4f_{uv}^2 \\ &\quad +f_u^2f_{uv}^2+2f_uf_vf_{uv}f_{vv}+f_v^2f_{vv}^2+f_u^4f_{uv}^2+2f_u^3f_vf_{uv}f_{vv}+f_u^2f_v^2f_{vv}^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2f_u^3 f_v f_{uu} f_{uv} - 2f_u^2 f_v^2 f_{uu} f_{vv} - 2f_u^2 f_v^2 f_{uv}^2 - 2f_u f_u^3 f_{uv} f_{vv}\Big] \\
=\ & \Big(\frac{3\omega+2}{\omega^3(1+\omega)}\Big)\Big[((1+f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv})f_u^2 f_{uu} + (1+f_v^2)f_v^2 f_{uv}^2 + (1+f_u^2)f_u^2 f_{uv}^2 \\
&-2f_u^2 f_v^2 f_{uu} f_{vv} + ((1+f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv})f_v^2 f_{vv} + ((1+f_v^2)f_{uu} \\
&-2f_u f_v f_{uv} + (1+f_u^2)f_{vv})f_u f_v f_{uv} + ((1+f_v^2)f_{uu} + (1+f_u^2)f_{vv})f_u f_v f_{uv}\Big] \\
=\ & \Big(\frac{3\omega+2}{\omega^3(1+\omega)}\Big)\Big[-f_u^2(1+f_u^2)(f_{vv}f_{uu} - f_{uv}^2) + f_v^2(1+f_v^2)(f_{uv}^2 - f_{uu}f_{vv}) \\
&+2f_u^2 f_v^2(-f_{uu}f_{vv} + f_{uv}^2)\Big] \\
=\ & \Big(\frac{(3\omega+2)\omega}{1+\omega}\Big)\Big(K(-f_u^2 - f_u^4 - f_v^2 - f_v^4 - 2f_u f_v^2)\Big) \\
=\ & -\omega K\Big((\frac{3\omega+2}{1+\omega}\Big)\Big((f_u^2+f_v^2)(1+f_u^2+f_v^2)\Big) \\
=\ & -\omega K\Big((\frac{3\omega+2}{1+\omega}\Big)\Big((f_u^2+f_v^2)\omega^2\Big) \\
=\ & -K\omega^3(3\omega+2)(\omega-1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= (f_v f_{uu} - f_u f_{uv})\omega_v \\
&= (f_v f_{uu} - f_u f_{uv})\Big(\frac{f_u f_{uv} + f_v f_{vv}}{\omega}\Big) \\
&= \frac{1}{\omega}(f_u f_v f_{uu} f_{uv} + f_v^2 f_{uu} f_{vv} - f_u^2 f_{uv}^2 - f_u f_v f_{vv} f_{uv}).
\end{aligned}
$$

$$
D = (\omega_{uu}G + \omega_{vv}E - 2\omega_{uv}F).
$$

primeiramente observe que

$$
\begin{aligned}
\omega_{uu} &= \frac{f_{uu}^2 + f_u f_{uuu} + f_{uv}^2 + f_v f_{uuv}}{\omega} - \frac{(f_u f_{uu} + f_v f_{uv})^2}{\omega^3} \\
&= \frac{1}{\omega^3}\Big[f_{uu}(1+f_v^2)f_{uu} + f_{uu}(-2f_u f_v f_{uv}) + (1+f_u^2)f_{uv}^2 + \omega^2(f_u f_{uuu} + f_v f_{uuv})\Big] \\
&= \frac{1}{\omega^3}\Big[f_{uu}((1+f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv}) + (1+f_u^2)f_{uv}^2 + \omega^2(f_u f_{uuu} + f_v f_{uuv})\Big] \\
&= \frac{1}{\omega^3}\Big[-(1+f_u^2)f_{uu}f_{vv} + (1+f_u^2)f_{uv}^2 + \omega^2(f_u f_{uuu} + f_v f_{uuv})\Big] \\
&= -\omega K(1+f_u^2) + \frac{1}{\omega}(f_u f_{uuu} + f_v f_{uuv}),
\end{aligned}
$$

logo

$$
\omega_{uu}G = -\omega K(1+f_u^2)(1+f_v^2) + \frac{(1+f_v^2)}{\omega}(f_u f_{uuu} + f_v f_{uuv})
$$

ter-se-á também que

$$\begin{aligned}
\omega_{vv} &= \frac{f_{vv}^2+f_vf_{vvv}+f_{uv}^2+f_uf_{uvv}}{\omega}-\frac{(f_uf_{uv}+f_vf_{vv})^2}{\omega^3}\\
&= \frac{1}{\omega^3}\Big[f_{vv}(1+f_u^2)f_{vv}+f_{vv}(-2f_uf_vf_{uv})+(1+f_v^2)f_{uv}^2+\omega^2(f_vf_{vvv}+f_uf_{uvv})\Big]\\
&= \frac{1}{\omega^3}\Big[f_{vv}((1+f_u^2)f_{vv}-2f_uf_vf_{uv})+(1+f_v^2)f_{uv}^2+\omega^2(f_vf_{vvv}+f_uf_{uvv})\Big]\\
&= \frac{1}{\omega^3}\Big[-(1+f_v^2)f_{vv}f_{uu}+(1+f_v^2)f_{uv}^2+\omega^2(f_vf_{vvv}+f_uf_{uvv})\Big]\\
&= -\omega K(1+f_v^2)+\frac{1}{\omega}(f_vf_{vvv}+f_uf_{uvv}),
\end{aligned}$$

assim

$$\omega_{vv}E=-\omega K(1+f_v^2)(1+f_u^2)+\frac{(1+f_u^2)}{\omega}(f_vf_{vvv}+f_uf_{uvv})$$

por fim

$\omega_{uv}=\frac{f_{uv}f_{uu}+f_uf_{uuv}+f_{vv}f_{uv}+f_vf_{uvv}}{\omega}-\frac{(f_uf_{uu}+f_vf_{uv})(f_uf_{uv}+f_vf_{vv})}{\omega^3}$
$=\frac{1}{\omega^3}\Big[f_{uv}(1+f_v^2)f_{uu}+\omega^2f_uf_{uuv}+f_{uv}(1+f_u^2)f_{vv}+\omega^2f_vf_{uvv}-f_uf_v(f_{uu}f_{vv}+f_{uv}^2)\Big]$
$=\frac{1}{\omega^3}\Big[f_{uv}((1+f_v^2)f_{uu}+(1+f_u^2)f_{vv})+\omega^2(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvv})-f_uf_v(f_{uu}f_{vv}+f_{uv}^2)\Big]$
$=\frac{1}{\omega^3}\Big[f_{uv}2f_uf_vf_{uv}+\omega^2(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvv})-f_uf_vf_{uu}f_{vv}-f_uf_vf_{uv}^2\Big]$
$=\frac{1}{\omega^3}\Big[f_uf_vf_{uv}^2-f_uf_vf_{uu}f_{vv}+\omega^2(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvv})\Big]$
$=\frac{1}{\omega^3}\Big[-f_uf_v(f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2)+\omega^2(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvv})\Big]$
$=-\omega Kf_uf_v+\frac{1}{\omega}(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvv})$

logo

$$-2\omega_{uv}F=2K\omega f_u^2f_v^2-\frac{2f_uf_v}{\omega}(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvv})$$

assim, ter-se-á

$D=\omega_{uu}G+\omega_{vv}E-2\omega_{uv}F$
$=-K\omega(1+f_u^2)(1+f_v^2)+\frac{(1+f_v^2)}{\omega}(f_uf_{uuu}+f_vf_{uuv})-K\omega(1+f_v^2)(1+f_u^2)+\frac{(1+f_u^2)}{\omega}(f_vf_{vvv}+f_uf_{uvv})+2K\omega f_u^2f_v^2-\frac{2f_uf_v}{\omega}(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvv})$
$=-2K\omega(1+f_v^2+f_u^2)+\frac{1}{\omega}\Big[(1+f_v^2)(f_uf_{uuu}+f_vf_{uuv})+(1+f_u^2)(f_vf_{vvv}+f_uf_{uvv})-2f_uf_v(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvv})\Big]$
$=-2K\omega^3+\frac{1}{\omega}\Big[(1+f_v^2)(f_uf_{uuu}+f_vf_{uuv})+(1-f_u^2)(f_vf_{vvv}+f_uf_{uvv})-2f_uf_v(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvu})\Big]$

agora usando que

$$(1+f_u^2)f_{vv}+(1+f_v^2)f_{uu}-2f_uf_vf_{uv}=0$$

ter-se-á

$$2f_uf_{uu}f_{vv}+(1+f_u^2)f_{uvv}+2f_vf_{uv}f_{uu}+(1+f_v^2)f_{uuu}-2f_{uu}f_vf_{uv}-2f_uf_{uv}^2-2f_uf_vf_{uuv}=0 \tag{4.1}$$

$$2f_uf_{uv}f_{vv}+(1+f_u^2)f_{vvv}+2f_vf_{vv}f_{uu}+(1+f_v^2)f_{vuu}-2f_{vv}f_uf_{uv}-2f_vf_{uv}^2-2f_uf_vf_{uvv}=0 \tag{4.2}$$

agora multiplicar-se-á (4.1) por f_u e (4.2) por f_v, respectivamente. Desta forma, multiplicando ambas as expressões e após somando ter-se-á

$(1+f_u^2)(f_uf_{uvv}+f_vf_{vvv})+(1+f_v^2)(f_uf_{uuu}+f_vf_{vuu})-2f_uf_v(f_uf_{uuv}+f_vf_{uvv})$
$=-2f_u^2f_{uu}f_{vv}+2f_u^2f_{uv}^2-2f_v^2f_{uu}f_{vv}+2f_v^2f_{uv}^2$
$=-2f_u^2(f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2)-2f_v^2(f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2)$
$=-2f_u^2\omega^4K-2f_v^2\omega^4K$
$=-2\omega^4K(f_u^2+f_v^2)$
$=-2\omega^4K(\omega^2-1)$.
logo

$$\begin{aligned} D &= -2K\omega^3+\frac{1}{\omega}(-2\omega^4K(\omega^2-1)) \\ &= -2K\omega^3-2K\omega^3(\omega^2-1) \\ &= -2K\omega^3\omega^2. \end{aligned}$$

Portanto
$\Delta log(1+\frac{1}{\omega})=\frac{1}{\omega^3(1+\omega)}(A+B+C-D)$
$=\frac{1}{\omega^3(1+\omega)}\{\frac{1}{\omega}[f_u^2(f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2)+f_v^2(f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2)]-K\omega^3[(3\omega+2)(\omega-1)-2\omega^2]\}$
$=\frac{1}{\omega^3(1+\omega)}\{\frac{1}{\omega}[f_u^2K\omega^4+f_v^2K\omega^4]-K\omega^3(3\omega^2-3\omega+2\omega-2-2\omega^2)\}$
$=\frac{1}{\omega^3(1+\omega)}\{\frac{K\omega^4}{\omega}(f_u^2+f_v^2)-K\omega^3(\omega^2-\omega-2)\}$
$=\frac{1}{\omega^3(1+\omega)}\{K\omega^3(\omega^2-1)+K\omega^3(-\omega^2+\omega+2)\}$
$=K$.
Demonstrando assim que

$$\Delta log\left(1+\frac{1}{\omega}\right)=K.$$

Referências Bibliográficas

[1] ALMGREN, F. J. Jr., *Some interior regularity for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem*, Ann. of Math., **85**, 277-292 (1966).

[2] BARBOSA, J. L. and do CARMO, M. P., *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math Z., **185**, 339-353 (1984).

[3] BARBOSA, J. L. and do CARMO, M. P., *On the size of a stable minimal surface in* $\mathbb{R}^3$, Amer. J. Math, **98**, 515-528 (1976).

[4] BARBOSA, J. L. and do CARMO, M. P, ESCHENBURG, J., *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannianan manifolds*, Preprint.

[5] CHERN SHIING-SHEN, *Simple Proofs of Two Theorems on Minimal Surfaces.*

[6] CHERN SHIING-SHEN, *Curves and Surfaces in Euclidean Space*, pp. 53-56.

[7] COLDING T. H. and MINICOZZI W. P., *Estimates for parametric elliptic integrands*,Int. Math. Res. Not 291-297 (2002).

[8] COSTA, C. J., *Funções Elípticas e Superfícies mínimas* , IMPA, Brasil (1991).

[9] da SILVEIRA, ALEXANDRE, M., *Stability of Complete Noncompact Surfaces with Constant Mean Curvature*, Math. Ann., **277**, 629-638 (1987).

[10] DIERKES, U. and HILDEBRANDT, S. and KÜSTER, A. and WOHBRAB, O., *Minimal Surfaces I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1992).

[11] do CARMO, M. P. and da SILVEIRA, A. M., *Globally stable complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$,Proc. Amer. Math. Soc.(to appear).

[12] do CARMO, M. P. and PENG, C. K., *Estable complete minimal surfaces em $\mathbb{R}^3$ are planes*, American Mathematical Society, **1**, 903-906 (1979).

[13] do CARMO, M. P., *Superfícies Mínimas*, IMPA, Brasil (2003).

[14] do CARMO, M. P., *Differential Forms and Applications*, Springer-Verlag, New York, (1994).

[15] do CARMO, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, IMPA, Brasil (1976).

[16] FISCHER-COLBRIE, D., *On complete minimal surfaces with finite Morse index in 3-manifolds*, Invent. Math., **82**, 121-132 (1985)

[17] FISCHER-COLBRIE, D. and SCHOEN, R., *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Appl.Math., **33**, 199-211 (1980)

[18] MEEKS III. W. H., *Proofs of Some Classical Theorems in Minimal Surface Theory*, Indiana University Mathematics Journal, **54**, 1031-1044 (2005).

[19] NITSCHE, J. C. C., *On new results in the theory of minimal surfaces*, Bulletin of the American Mathematical Society, **71**, 195-270 (1965).

[20] OSSERMAN, R., *A survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand, (1969).

[21] POGORELOV, ALEKSEI. V., *On the stability of minimal surfaces*, Soviet Math., **24**, 274-276 (1981)

[22] PROTTER, M. H. and WEINBERGER, H., *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, (1966).