Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Determinação de soluções explícitas para o problema termoelástico não-estático

Rangel Pinheiro da Silva

Abril de 2007

Dissertação de Mestrado orientada pelo professor Guy Grebot.

Dedico este trabalho a Deus, à minha família e à minha noiva Kelly.

Agradecimentos:

A Deus pois sem a ajuda dele nada disso seria possível.

Ao professor Guy Grebot que sempre esteve disposto e motivado para tirar dúvidas e fazer críticas construtivas a este trabalho. Devo agradecê-lo também pela sábia decisão de mostrar-me essa linda teoria de Lie que é tão bonita quanto o som de um $Dm7(9)$ em um Takamine com cordas novas.

À minha família que sempre esteve ao meu lado em toda minha vida.

Aos professores do departamento de Matemática pelos vários ensinamentos que vão muito além da sala de aula.

Aos colegas de pós-graduação pelos estudos em grupo.

Aos amigos que tive o privilégio de conhecer em minha vida: Sérgio, Daniel, Bárbara, Carlos,...e muitos outros. Amigos estes que são indiretamente responsáveis por este trabalho.

Ao CNPq e a CAPES pelo suporte financeiro ao longo do curso.

Resumo. Esta dissertação apresenta soluções explícitas para o problema termoelástico linear e isotrópico com base no método clássico de simetrias criado pelo matemático Sophus Lie. Para o cálculo destas soluções, apresentamos os geradores infinitesimais de simetrias que geram a álgebra associada ao sistema de equações diferenciais que representa o problema já citado. As soluções assim construídas são invariantes sob subálgebras de dimensão três.

Abstract. We present explicit solutions for the linear and isotropic thermoelastic problem on the basis of the classical method of symmetries created by the mathematician Sophus Lie. In order to compute these solutions, we present the infinitesimal generators of symmetries that generate the algebra associated to the system of differential equations under study. The constructed solutions are thus invariants under subalgebras of dimension three.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O objetivo desta dissertação é encontrar soluções explícitas para o problema termoelástico linear. Nós iremos trabalhar com o caso isotrópico que é representado pelo sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \Delta_1 \equiv (\lambda + 2\mu)(u_1)_{xx} + (\lambda + \mu)(u_2)_{xy} + (\lambda + \mu)(u_3)_{xz} \\ \quad + \mu(u_1)_{yy} + \mu(u_1)_{zz} - \rho(u_1)_{tt} = 0 \\ \\ \Delta_2 \equiv (\lambda + \mu)(u_3)_{yz} + (\lambda + \mu)(u_1)_{xy} + (\lambda + 2\mu)(u_2)_{yy} \\ \quad + \mu(u_2)_{xx} + \mu(u_2)_{zz} - \rho(u_2)_{tt} = 0 \\ \\ \Delta_3 \equiv (\lambda + \mu)(u_1)_{xz} + (\lambda + \mu)(u_2)_{yz} + (\lambda + 2\mu)(u_3)_{zz} \\ \quad + \mu(u_3)_{yy} + \mu(u_3)_{xx} - \rho(u_3)_{tt} = 0. \end{cases}$$

Apesar dos vários métodos existentes, a tarefa de encontrar as soluções explícitas de determinadas equações diferenciais continua sendo árdua. Geralmente, são usados programas computacionais que encontram soluções aproximadas para tais equações.

No meio do século dezenove, o matemático Sophus Lie desenvolveu uma teoria que associa o conceito algébrico de grupo e o conceito de variedade diferenciável para construir soluções explícitas de sistemas de equações diferenciais. Dentro dessa teoria, foi desenvolvido o conceito de grupos de simetrias de sistemas de equações diferenciais que são grupos de transformações que levam soluções em outras soluções de um mesmo sistema.

Resumidamente, o método de Lie consiste em diminuir a dimensão do espaço das variáveis independentes, determinando assim um sistema mais simples de se trabalhar. Para o caso de equações diferenciais ordinárias, o método permite que equações de ordem n sejam transformadas em equações de ordem 1 e ainda englobar todas as soluções do sistema original.

A grande vantagem desse método vem do fato dele ser algorítmico. Dessa forma, o uso de programas computacionais de manipulação algébrica torna-se possível, e até desejável pois a determinação dos geradores de simetrias é uma tarefa extensa e cansativa que exige muitos cálculos. Em determinados sistemas, tais cálculos podem se tornar impraticáveis sem o auxílio computacional.

Com isso em mente, desenvolvemos rotinas no programa computacional MAPLE (ver CD anexo) que permitem, por exemplo, calcular os grupos de simetrias interativamente. Dentre essas rotinas criadas, não foi usado nenhum pacote ou comando do MAPLE que envolvesse o método de Lie.

Nesta dissertação, usaremos este método para obter soluções explícitas do sistema dado acima.

O problema estático já foi abordado em [7] e, desse modo, esta dissertação completa e resolve totalmente o problema em questão.

No capítulo 2, será apresentada a teoria essencial para o cálculo de grupos de simetrias. Em seguida, no capítulo 3, além de fazer uma breve exposição teórica sobre o problema termoelástico linear, calculamos os geradores infinitesimais de simetrias do sistema acima. Tais geradores permitem o cálculo dos grupos de simetrias do sistema. Por fim, o capítulo 4 traz a teoria que permite transformar o sistema acima em um sistema de equações diferenciais ordinárias e, além disso, também traz suas soluções explícitas.

Capítulo 2

Grupos de simetrias de equações diferenciais

Seja Δ um sistema qualquer de equações diferenciais ou não. O grupo de simetrias de Δ é composto de aplicações com a propriedade de transformar soluções de Δ em outras soluções de Δ. É a partir de tais transformações que podemos determinar soluções explícitas de um sistema de equações diferenciais.

Neste capítulo, iremos apresentar resultados que permitem calcular o grupo de simetrias de um sistema Δ. É importante ressaltar que o mesmo exige, na maioria das vezes, o uso de programas computacionais para tornar o processo viável.

Iniciaremos o capítulo com uma rápida introdução sobre sistemas de equações algébricas. Feito isso, passaremos a trabalhar com sistemas de equações diferenciais. Isso porque a teoria empregada em sistemas de equações algébricas é, basicamente, a mesma para equações diferenciais.

2.1 Simetrias de equações algébricas

Vamos considerar um sistema de equações algébricas como um sistema do tipo

$$F_v(x) = 0, \qquad v = 1, ..., l,$$

onde F_v são funções reais suaves definidas em uma variedade M.

Definição 2.1.1 *Seja G um grupo local de transformações agindo em uma variedade M. Um subconjunto $\mathscr{S} \subset M$ é chamado G-invariante, e G é chamado de grupo de simetrias de $\mathscr{S}$ se $x \in \mathscr{S}$, tal que $g.x$ esteja definido, então $g.x \in \mathscr{S}$.*

Nesta dissertação, $\mathscr{S}$ será o conjunto de soluções ou a subvariedade determinada pelos zeros comuns da coleção de funções suaves $F = (F_1, .., F_l)$,

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_F = \{x : F_v(x) = 0, v = 1, ..., l\}.$$

Se $\mathscr{S}_1$ e $\mathscr{S}_2$ são conjuntos G-invariantes então $\mathscr{S}_1 \bigcap \mathscr{S}_2$ e $\mathscr{S}_1 \bigcup \mathscr{S}_2$ são conjuntos G-invariantes.

Definição 2.1.2 *Seja G um grupo local de transformações agindo em uma variedade M. Uma função $F : M \to N$, N sendo uma variedade, é chamada uma função G-invariante se, para cada $x \in M$ e cada $g \in G$ tal que $g.x$ esteja definido, tem-se*

$$F(g.x) = F(x).$$

Se $N = I\!R$ então F é chamada simplesmente de invariante de G.

Proposição 2.1.1 *Se G age em M e $F : M \to I\!R^l$ é uma função suave então F é função G-invariante se, e só se, $\{F(x) = c : c \in I\!R^l\} \subset M$ é um subconjunto G-invariante.*

Proposição 2.1.2 *Seja G um grupo conexo de transformações agindo em uma variedade M. Uma função real $\zeta : M \to I\!R$ é uma função G-invariante se, e só se,*

$$\mathbf{v}(\zeta) = 0,$$

para cada $x \in M$ e para cada gerador infinitesimal $\mathbf{v}$ de G.

Teorema 2.1.1 *Seja G um grupo de Lie conexo e local de transformações agindo em uma variedade M^m. Seja $F : M \to I\!R^l$, $l \leq m$, que define um sistema de equações algébricas*

$$F_v(x) = 0, \qquad v = 1, ..., l,$$

e assuma que o sistema seja de posto máximo (isto é, o posto da matriz jacobiana associada é l). Então G é um grupo de simetrias do sistema se, e só se,

$$\mathbf{v}[F_v(x)] = 0, \qquad v = 1, ..., l, \qquad \textit{uma vez que } F(x) = 0,$$

para todo gerador infinitesimal $\mathbf{v}$ de G.

Definição 2.1.3 *Seja G um grupo local de transformações agindo em uma variedade M. Um subconjunto $\mathscr{S} \subset M$ é localmente G-invariante se, para cada $x \in \mathscr{S}$, existe uma vizinhança $\tilde{G}_x \subset G_x$ da identidade em G tal que $g.x \in \mathscr{S}$ para todo $g \in \tilde{G}_x$. Uma função suave $F : U \to N$, onde U é algum subconjunto aberto de M, é chamada localmente G-invariante se, para cada $x \in U$, existe uma vizinhança $\tilde{G}_x \subset G_x$ da identidade em G tal que $F(g.x) = F(x)$ para todo $g \in \tilde{G}_x$. F é chamada globalmente G-invariante se $F(g.x) = F(x)$ para todo $g \in G$ e todo $x \in U$ tal que $g.u \in U$.*

Definição 2.1.4 *Sejam $\zeta^1, ..., \zeta^k : M \to I\!R$ funções suaves em uma variedade M.*

1. *$\zeta^1, ..., \zeta^k$ são chamadas funcionalmente dependentes se para cada $x \in M$ existe uma vizinhança $U \ni x$ e uma função real suave $F(\zeta^1, ..., \zeta^k)$, não identicamente nula em qualquer subconjunto aberto de $I\!R^k$, tal que*

$$F(\zeta^1(x), ..., \zeta^k(x)) = 0, \qquad \forall x \in U;$$

2. *$\zeta^1, ..., \zeta^k$ são funcionalmente independentes se $F(\zeta^1(x), ..., \zeta^k(x)) = 0$ para todo x em algum $U \subset M$ implica que $F \equiv 0$.*

Teorema 2.1.2 *Seja $\zeta = (\zeta^1, ..., \zeta^k) : M \to I\!R^k$ uma função suave. Então $\zeta^1, ..., \zeta^k$ são funcionalmente dependentes se, e só se, $d\zeta|_x$ tem posto estritamente menor do que k para todo $x \in M$.*

Teorema 2.1.3 *Suponha que G age semi-regularmente em uma variedade M^m com órbitas de dimensão s. Se $x_0 \in M$ então existem precisamente $m - s$ invariantes locais funcionalmente independentes $\zeta^1(x), ..., \zeta^{m-s}(x)$ definidos em uma vizinhança de x_0. Além disso, qualquer outro invariante local da ação do grupo definido próximo de x_0 é da forma*

$$\zeta(x) = F(\zeta^1(x), ..., \zeta^{m-s}(x))$$

para alguma função suave F. Se a ação de G é regular, então os invariantes podem ser globalmente invariantes em uma vizinhança de x_0.

Na terminologia clássica, os invariantes construídos no teorema 2.1.3 formam um *conjunto completo de invariantes funcionalmente independentes.*

Proposição 2.1.3 *Suponha que G age semi-regularmente em M e seja $\{\zeta^1(x), ..., \zeta^{m-s}(x)\}$ um conjunto completo de invariantes funcionalmente independentes definido em um subconjunto aberto $W \subset M$. Se uma subvariedade $\mathscr{S}_F = \{x : F(x) = 0\}$ é G-invariante, então para cada solução $x_0 \in \mathscr{S}_F$ existe uma vizinhança $\tilde{W} \subset W$ de x_0 e uma função G-invariante equivalente $\tilde{F}(x) = \tilde{F}(\zeta^1(x), ..., \zeta^{m-s}(x))$ que tem o mesmo conjunto solução de F em $\tilde{W}$:*

$$\mathscr{S}_F \bigcap \tilde{W} = \mathscr{S}_{\tilde{F}} \bigcap \tilde{W} = \{x \in \tilde{W} : \tilde{F}(\zeta^1(x), ..., \zeta^{m-s}(x)) = 0\}.$$

Esta proposição resume o método que será explicitado mais adiante e que será usado no capítulo 4.

O nosso objetivo será reescrever o sistema de equações dado como um sistema equivalente em termos dos invariantes e fazer com que este sistema equivalente seja um sistema de equações ordinárias. A solução deste novo sistema permitirá então a determinação de soluções invariantes do sistema original.

Seja G um grupo a 1 parâmetro de transformações agindo em M^m, com gerador infinitesimal

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

expresso em algum sistema de coordenadas locais. Um invariante local $\zeta(x)$ de G é uma solução da EDP

$$\mathbf{v}(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^i} = 0. \tag{2.1}$$

O teorema 2.1.3 diz que se $\mathbf{v}|_x \neq 0$ então existem $m - 1$ invariantes funcionalmente independentes e, assim, $m - 1$ soluções funcionalmente independentes de (2.1) em uma vizinhança de x_0.

Sabemos da teoria clássica de equações diferenciais que a solução geral de (2.1) pode ser encontrada por integração do sistema característico correspondente de EDO's (ver [3], páginas 47 e 48), i.e.,

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = ... = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}. \tag{2.2}$$

A solução geral de (2.2) pode ser escrita da forma

$$\zeta^1(x^1,...,x^m) = c_1, ..., \zeta^{m-1}(x^1,...,x^m) = c_{m-1},$$

onde $c_1,...,c_{m-1}$ são as constantes de integração e $\zeta^i(x), i = 1,...,m-1$, são funções independentes dos c_j's. É fácil ver que as funções ζ^i's são as soluções funcionalmente independentes de (2.1).

O cálculo de invariantes independentes para grupos de transformações a r parâmetros, com $r > 1$, é um pouco mais complicado. Se $\mathbf{v}_k = \sum_i \xi_k^i(x)\partial/\partial x^i$, $k = 1,...,r$, formam uma base para os geradores infinitesimais então os invariantes são encontrados resolvendo-se o sistema linear e homogêneo de equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$\mathbf{v}_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x^i} = 0, \qquad k = 1,...,r.$$

Em outras palavras, cada invariante ζ deve ser associado a todos os campos vetoriais $\mathbf{v}_k$, $k = 1,...,r$.

2.2 Grupos e equações diferenciais

Seja $\mathscr{S}$ um sistema de equações diferenciais envolvendo p variáveis independentes $x = (x^1,...,x^p)$, e q variáveis dependentes $u = (u^1,...,u^q)$. As soluções do sistema são da forma $u = f(x)$, ou, em componentes, $u^\alpha = f^\alpha(x^1,...,x^p), \alpha = 1,...,q$. Seja $X = I\!R^p$, com coordenadas $x = (x^1,...,x^p)$, o espaço das variáveis independentes e seja $U = I\!R^q$, com coordenadas $u = (u^1,...,u^q)$, o espaço das variáveis dependentes. Um grupo de simetrias do sistema $\mathscr{S}$ será um grupo local de transformações G agindo em algum subconjunto aberto $M \subset X \times U$ de forma que G *transforma soluções de* $\mathscr{S}$ *em outras soluções de* $\mathscr{S}$.

Para usar a teoria vista para equações algébricas, precisamos nos colocar neste contexto. Para tal, devemos fazer com que o sistema de equações diferenciais descreva uma subvariedade de uma determinada variedade. Além disso, devemos analisar como o grupo transforma as derivadas das funções envolvidas.

Primeiro, vamos identificar o gráfico da função f por

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset X \times U,$$

onde $\Omega \subset X$ é o domínio da função f. Note que Γ_f é uma subvariedade de $X \times U$ com dimensão p. Se $\Gamma_f \subset M_g \equiv \{y \in M : (g,y) \in \mathcal{U} \subset G \times M, e \times M \subset \mathcal{U}\}$, o domínio da transformação g, então a transformação de Γ_f por g é dada por

$$g.\Gamma_f = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g.(x,u) : (x,u) \in \Gamma_f\}.$$

O conjunto $g.\Gamma_f$ não é necessariamente gráfico de uma outra função $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Entretanto, desde que G esteja agindo suavemente e o elemento identidade de G deixa Γ_f inalterado, pela diminuição do domínio Ω de f, se necessário, nós asseguramos que para os elementos g próximos da identidade, a transformação $g.\Gamma_f = \Gamma_{\tilde{f}}$ é gráfico de uma função suave $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Nós escrevemos $\tilde{f} = g.f$ e chamamos a função $\tilde{f}$ de *transformação de* f *por* g.

Suponha agora que a transformação g é dada em coordenadas por

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g.(x, u) = (\Xi_g(x, u), \Phi_g(x, u)),$$

para funções suaves $\Xi_g(x, u), \Phi_g(x, u)$. Então o gráfico $\Gamma_{\tilde{f}} = g.\Gamma_f$ de $g.f$ é dado parametricamente por

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \Xi_g(x, f(x)) = \Xi_g \circ (\mathbb{1} \times f)(x), \quad x \in \Omega, \\ \tilde{u} &= \Phi_g(x, f(x)) = \Phi_g \circ (\mathbb{1} \times f)(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{1}$ é a função identidade de X. Para encontrar $\tilde{f} = g.f$ explicitamente, precisamos eliminar x desses dois sistemas de equações. Como para $g = e$ temos $\Xi_e \circ (\mathbb{1} \times f) = \mathbb{1}$ e sabemos que, para g suficientemente próximo da identidade, a matriz Jacobiana de $\Phi_g \circ (\mathbb{1} \times f)$ é não singular então, pelo teorema da função inversa, podemos resolver localmente para x:

$$x = [\Xi_g \circ (\mathbb{1} \times f)]^{-1}(\tilde{x}).$$

Substituindo no segundo sistema temos que

$$g.f = [\Phi_g \circ (\mathbb{1} \times f)] \circ [\Xi_g \circ (\mathbb{1} \times f)]^{-1}, \tag{2.3}$$

que se verifica uma vez que o segundo fator é invertível.

Definição 2.2.1 *Seja $\mathscr{S}$ um sistema de equações diferenciais. Um grupo de simetrias do sistema $\mathscr{S}$ é um grupo local de transformações G agindo em um subconjunto aberto M do espaço de variáveis independentes e dependentes do sistema com a propriedade que se $u = f(x)$ é solução de $\mathscr{S}$ e $g.f$ está definida para $g \in G$, então $u = g.f(x)$ é também solução do sistema.*

2.2.1 Prolongamento

Em seguida, analisaremos como G age sobre as derivadas de uma função e qual é a variedade associada a um sistema $\mathscr{S}$ de equações diferenciais.

Dada uma função real suave $f(x) = f(x^1, ..., x^p)$, existem

$$p_k \equiv \begin{pmatrix} p+k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

diferentes derivadas parciais de ordem k. Vamos usar a notação de multi-índice

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} ... \partial x^{j_k}}$$

para denotar essas derivadas. Nesta notação, $J = (j_1, ..., j_k)$ é uma k-upla não ordenada de números inteiros. A *ordem* de tal multi-índice, que será denotada por $\#J \equiv k$, indica a ordem máxima de tais derivadas. Mais geralmente, se $f : X \to U$ é uma função suave de $X \subset \mathbb{R}^p$ em $U \subset \mathbb{R}^q$, $u = f(x) = (f^1(x), ..., f^q(x))$, são necessários $q.p_k$ números $u^\alpha_J = \partial f^\alpha(x)$ para representar todas as diferentes derivadas de ordem k das componentes de f em um ponto x. Seja agora $U_k \equiv \mathbb{R}^{q \cdot p_k}$ com coordenadas $u_J^\alpha, \alpha = 1, ..., q$, e todos os multi-índices $J = (j_1, ..., j_k)$ de ordem k, designando a representação das derivadas. O conjunto $U^{(n)} = U \times U_1 \times ... \times U_n$ é o espaço produto cartesiano em que as coordenadas representam todas as derivadas da função $u = f(x)$ de todas as ordens de 0 a n. Note que $U^{(n)}$ é um espaço euclidiano de dimensão

$$q + qp_1 + ... + qp_n = q \begin{pmatrix} p+n \\ n \end{pmatrix} \equiv qp^{(n)}.$$

Um ponto típico em $U^{(n)}$ será denotado por $u^{(n)}$ e $u^{(n)}$ tem $q.p^{(n)}$ componentes diferentes u_J^α onde $\alpha = 1, ..., q$, e J percorre todos os multi-índices $J = (j_1, ..., j_k)$ com $1 \leq j_k \leq p$ e $0 \leq k \leq n$.

Dada uma função suave $u = f(x)$, $f : X \to U$, define-se o seu *n-ésimo prolongamento* $u^{(n)} = pr^{(n)} f(x)$ pelas equações

$$u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x).$$

$pr^{(n)} f(x)$ é uma função definida em X e com imagem no espaço $U^{(n)}$. Para cada $x \in X$, $pr^{(n)} f(x)$ é um vetor cujas $q.p^{(n)}$ entradas representam os valores de f e todas as suas derivadas até ordem n no ponto x.

Definição 2.2.2 *O espaço total $X \times U^{(n)}$, cujas coordenadas representam as variáveis independentes, as variáveis dependentes e as suas derivadas até ordem n, é chamado de espaço de jato de ordem n do espaço $X \times U$.*

Muitas vezes, não estamos interessados em equações diferenciais definidas em todo o espaço $X \times U$ mas apenas em um subconjunto $M \subset X \times U$. Neste caso, nós definimos o espaço de jato de ordem n

$$M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times ... \times U_n$$

de M. Se $u = f(x)$ é uma função cujo gráfico está em M, o n-ésimo prolongamento $pr^{(n)} f(x)$ é uma função cujo gráfico está no espaço de jato $M^{(n)}$ de ordem n.

Suponha agora que nós temos um sistema de equações diferenciais de ordem n, ou equivalentemente, uma subvariedade $\mathscr{S}_\Delta$ do espaço de jato $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$.

Teorema 2.2.1 *Seja M um subconjunto aberto de $X \times U$ e suponha que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ seja um sistema de ordem n de equações diferenciais definido em M, com a subvariedade correspondente $\mathscr{S}_\Delta \subset M^{(n)}$. Suponha que G seja um grupo local de transformações agindo em M cujo prolongamento deixa $\mathscr{S}_\Delta$ invariante, ou seja, se $(x, u^{(n)}) \in \mathscr{S}_\Delta$ então $pr^{(n)} g.(x, u^{(n)}) \in \mathscr{S}_\Delta$ para cada $g \in G$ de forma que $pr^{(n)} g.(x, u^{(n)})$ esteja definido. Então G é um grupo de simetrias do sistema de equações diferenciais no sentido da Definição 2.2.1.*

Definição 2.2.3 *Seja $M \subset X \times U$ um aberto e seja $\mathbf{v}$ um campo em M com grupo (local) a 1 parâmetro correspondente $exp(\varepsilon \mathbf{v})$. O n-ésimo prolongamento de $\mathbf{v}$, denotado por $pr^{(n)} \mathbf{v}$, é o campo no espaço de jato $M^{(n)}$ de ordem n definido por*

$$pr^{(n)} \mathbf{v}|_{(x, u^{(n)})} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0} pr^{(n)} [exp(\varepsilon \mathbf{v})](x, u^{(n)})$$

para qualquer $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Em outras palavras, desde que $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$ consiste de todas as variáveis independentes $(x^1, ..., x^p)$ e todas as derivadas u_J^α de variáveis dependentes até a ordem n, um campo em $M^{(n)}$ toma a forma geral

$$\mathbf{v}^* = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \phi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha},$$

onde $0 \leq \#J \leq n$ e os coeficientes ξ^i, ϕ_α^J podem depender de todas as variáveis $(x, u^{(n)})$. Neste caso, $\mathbf{v}^*$ é o prolongamento $pr^{(n)}\mathbf{v}$ do campo

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Definição 2.2.4 *Seja*

$$\Delta_v(x, u^{(n)}) = 0, \qquad v = 1, ..., l$$

um sistema de equações diferenciais. O sistema é de posto máximo se a matriz Jacobiana $l \times (p + qp^{(n)})$, dada por

$$\mathbf{J}_\Delta(x, u^{(n)}) = (\frac{\partial \Delta_v}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_v}{\partial u_J^\alpha}),$$

de Δ com respeito a todas as variáveis $(x, u^{(n)})$ é de posto l sempre que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$.

Teorema 2.2.2 *Seja*

$$\Delta_v(x, u^{(n)}) = 0, \qquad v = 1, ..., l,$$

um sistema de equações diferenciais de posto máximo definido sobre $M \subset X \times U$. Se G é um grupo local de transformações agindo em M, e

$$pr^{(n)}\mathbf{v}[\Delta_v(x, u^{(n)})] = 0, \qquad v = 1, ..., l,$$

sempre que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$, para cada gerador infinitesimal $\mathbf{v}$ de G, então G é um grupo de simetrias do sistema.

Definição 2.2.5 *Seja $P(x, u^{(n)})$ uma função suave de x, u e as derivadas de u até ordem n, definida em um subconjunto aberto $M^{(n)} \subset X \times U$. A derivada total de P em relação a x^i é a única função suave $D_i P(x, u^{(n+1)})$ definida em $M^{(n+1)}$ e dependendo das derivadas de u até ordem $n + 1$, com a seguinte propriedade: se $u = f(x)$ é uma função suave qualquer então*

$$D_i P(x, pr^{(n+1)} f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} \{P(x, pr^{(n)} f(x))\}. \tag{2.4}$$

Proposição 2.2.1 *Dada $P(x,u^{(n)})$, a i-ésima derivada total de P tem a forma geral*

$$D_iP = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J u^\alpha_{J,i}\frac{\partial P}{\partial u^\alpha_J}, \tag{2.5}$$

onde, para $J=(j_1,...,j_k)$,

$$u^\alpha_{J,i} = \frac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1}u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1}...\partial x^{j_k}}.$$

Em (2.5) a soma é efetuada sobre todos os J's de ordem $0 \leq \#J \leq n$, onde n é a derivada de maior ordem que aparece em P.

A maior ordem da derivada total é definida em analogia com a notação de maior ordem da derivada parcial. Explicitamente, se $J=(j_1,...,j_k)$ é o multi-índice de ordem k, com $1 \leq j_\beta \leq p$, para cada β, então

$$D_J = D_{j_1}D_{j_2}...D_{j_\beta}.$$

O próximo teorema apresenta uma forma algorítmica de encontrar o n-ésimo prolongamento de um campo. Desta forma, podemos fazer uso de programas computacionais de manipulação algébrica para viabilizar o processo.

Teorema 2.2.3 *(Fórmula Geral do Prolongamento) Seja*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\phi_\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

um campo definido em um subconjunto aberto $M \subset X \times U$. O prolongamento de ordem n de $\mathbf{v}$ é o campo

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J \phi^J_\alpha(x,u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} \tag{2.6}$$

definido no espaço de jato correspondente $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. O segundo somatório é efetuado sobre todos os multi-índices $J=(j_1,...,j_k)$ não ordenados, com $1 \leq j_k \leq p$, $1 \leq k \leq n$. As funções ϕ^J_α de $pr^{(n)}\mathbf{v}$ são dadas pela fórmula

$$\phi^J_\alpha = D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_i) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u^\alpha_{J,i}, \tag{2.7}$$

onde $u^\alpha_i = \partial u^\alpha/\partial x^i$, e $u^\alpha_{J,i} = \partial u^\alpha_J/\partial x^i$.

A demonstração do teorema 2.2.3 está feita em [1].

Teorema 2.2.4 *Suponha que $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são campos suaves em $M \subset X \times U$. Então seus prolongamentos têm as propriedades:*

$$pr^{(n)}(c\mathbf{v} + c'\mathbf{w}) = c.pr^{(n)}\mathbf{v} + c'.pr^{(n)}\mathbf{w},$$

para c, c' constantes, e

$$pr^{(n)}[\mathbf{v},\mathbf{w}] = [pr^{(n)}\mathbf{v}, pr^{(n)}\mathbf{w}]. \tag{2.8}$$

Corolário 2.2.1 *Seja Δ um sistema de equações diferenciais de posto máximo definido sobre $M \subset X \times U$. O conjunto de todas as simetrias infinitesimais do sistema forma uma álgebra de Lie de campos em M. Além disso, se esta álgebra de Lie tem dimensão finita, o grupo de simetrias do sistema é um grupo de Lie local de transformações agindo em M.*

No próximo capítulo, aplicaremos as definições e resultados apresentados para calcular os geradores infinitesimais de simetrias do sistema de equações não homogêneas da teoria linear da elasticidade em um meio isotrópico.

Capítulo 3

O problema termoelástico linear

Considere um ponto qualquer de um meio elasticamente homogêneo e isotrópico (meio cujas propriedades físicas são as mesmas em todas as direções em um mesmo ponto). Seja $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ o vetor deslocamento deste ponto com x, y, z sendo as coordenadas espaciais e t o tempo, σ o tensor das tensões, ε o tensor simétrico das deformações, $\mathbf{f}$ a resultante das forças mássicas por unidade de massa e ${}^4G$ o tensor de proporcionalidade entre σ e ε.

A teoria linear da elasticidade se apóia sobre três equações:

1. A equação diferencial vetorial do movimento elástico, denominada equação de Navier, dada por

$$\rho\mathbf{f} + div(\sigma) = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{3.1}$$

   onde a constante ρ é o quociente da massa específica pelo módulo de elasticidade de comparação.

2. A equação tensorial das pequenas deformações:

$$2\varepsilon = \nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}. \tag{3.2}$$

3. A Lei de Hooke generalizada, ou lei de Duhamell-Neuman, que pode ser escrita como

$$\sigma =^4 G : \varepsilon. \tag{3.3}$$

Essas equações, (3.1), (3.2) e (3.3), formam um sistema que é a base do problema termoelástico.

Da mesma forma que foi feito em [5], defina

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}\mathbf{f}t^2 + \mathbf{g}t + \mathbf{h}, \\ u &= \mathbf{u} - f, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ são constantes. Fazendo as substituições acima em (3.1), (3.2) e usando (3.3), obtemos

$$\begin{cases} div(\sigma) = \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \\ 2\varepsilon = \nabla u + \nabla^T u \\ \\ \sigma = ^4G : \varepsilon. \end{cases} \tag{3.4}$$

Escrevemos ^4G, para esse caso, da seguinte forma:

$$^4G = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

onde μ e λ são as constantes de Lamé (ver [8]).

Em notação tensorial, (3.3) assume a forma

$$\sigma_{ij} = ^4G_{ij\ kl}\varepsilon_{kl}.$$

Como ^4G é simétrico, ou seja, $^4G_{ij\ kl} = ^4G_{ji\ kl} = ^4G_{ji\ lk} = ^4G_{ij\ lk}$, podemos usar uma notação alternativa $^4G_{ij\ kl} = ^4G_{\omega\ \nu}$. Defina a relação $ij \to \omega$, $kl \to \nu$ dada por $11 \to 1, 22 \to 2, 33 \to 3, 12 \to 6, 13 \to 5, 23 \to\ 4$. Resolvendo o sistema (3.4) para u, obtemos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \Delta_1 \equiv (\lambda + 2\mu)(u_1)_{xx} + (\lambda + \mu)(u_2)_{xy} + (\lambda + \mu)(u_3)_{xz} \\ \quad + \mu(u_1)_{yy} + \mu(u_1)_{zz} - \rho(u_1)_{tt} = 0 \\ \\ \Delta_2 \equiv (\lambda + \mu)(u_3)_{yz} + (\lambda + \mu)(u_1)_{xy} + (\lambda + 2\mu)(u_2)_{yy} \\ \quad + \mu(u_2)_{xx} + \mu(u_2)_{zz} - \rho(u_2)_{tt} = 0 \\ \\ \Delta_3 \equiv (\lambda + \mu)(u_1)_{xz} + (\lambda + \mu)(u_2)_{yz} + (\lambda + 2\mu)(u_3)_{zz} \\ \quad + \mu(u_3)_{yy} + \mu(u_3)_{xx} - \rho(u_3)_{tt} = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$.

O objetivo desta dissertação é a obtenção de soluções de (3.6) explícitas e que sejam invariantes sob certas simetrias.

Como x, y, z, t são variáveis independentes então, de acordo com a notação da seção 2.2.1, p é igual a 4 e, sendo u_1, u_2, u_3 as variáveis dependentes, q é igual a 3. Como o sistema (3.6) é de segunda ordem, de acordo com a definição 2.2.2, vamos identificá-lo com a subvariedade $X \times U^{(2)}$.

Sejam $x = x_1, y = x_2, z = x_3, t = x_4$ e considere o campo vetorial em $X \times U$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{4} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{3} \phi_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha}.$$

Baseado na teoria do capítulo anterior, vamos encontrar os geradores infinitesimais de simetrias para (3.6) utilizando o teorema 2.2.3 (para calcular o segundo prolongamento) e o teorema 2.2.2 (que nos permitirá impor condições para encontrar tais geradores). Feito isso, obtemos um sistema com 1206 equações (ver CD anexo) que nos permite calcular ξ^i, $i = 1, ..., 4$, e ϕ_α, $\alpha = 1, ..., 3$. É importante ressaltar a necessidade do uso de programas de manipulação algébrica para encontrar os geradores infinitesimais. Para escrever tal sistema com 1206 equações e resolvê-lo para ξ^i, $i = 1, ..., 4$, e ϕ_α, $\alpha = 1, ..., 3$, nós usamos o sistema de computação algébrica MAPLE. Foram desenvolvidas rotinas para a obtenção das equações e a resolução das mesmas foi feita interativamente. Apresentamos abaixo as soluções obtidas para ξ^i, $i = 1, ..., 4$, e ϕ_α, $\alpha = 1, ..., 3$:

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= c_1x_1 + c_5x_3 - c_9x_2 + c_9,\\
\xi^2 &= c_4x_3 + c_1x_2 + c_9x_1 + c_8,\\
\xi^3 &= -c_4x_2 + c_1x_3 - c_5x_1 + c_6,\\
\xi^4 &= c_1x_4 + c_3,\\
\phi_1 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4) + c_{11}u_1 - c_9u_2 + c_5u_3,\\
\phi_2 &= g(x_1, x_2, x_3, x_4) + c_9u_1 + c_{11}u_2 + c_4u_3,\\
\phi_3 &= h(x_1, x_2, x_3, x_4) - c_5u_1 - c_4u_2 + c_{11}u_3,
\end{aligned}$$

onde f, g, h são funções quaisquer e os c_j são constantes. Daí, obtemos os seguintes campos vetoriais que geram a álgebra de Lie do grupo de simetrias de (3.6):

$$X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial}{\partial x_4}, \tag{3.7}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}, \tag{3.8}$$

$$X_3 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - u_2\frac{\partial}{\partial u_3} + u_3\frac{\partial}{\partial u_2}, \tag{3.9}$$

$$X_4 = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - u_1\frac{\partial}{\partial u_3} + u_3\frac{\partial}{\partial u_1}, \tag{3.10}$$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \tag{3.11}$$

$$X_6 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}, \tag{3.12}$$

$$X_7 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{3.13}$$

$$X_8 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \tag{3.14}$$

$$X_9 = u1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + u_3\frac{\partial}{\partial u_3}. \tag{3.15}$$

Abaixo temos a tabela dos comutadores para essa álgebra de forma que $[X_i, X_j]$ representa o colchete da i-ésima linha com a j-ésima coluna:

$[X_i, X_j]$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
X_1	0	$-X_2$	0	0	$-X_5$	0	$-X_7$	$-X_8$	0
X_2	X_2	0	0	0	0	0	0	0	0
X_3	0	0	0	X_6	$-X_7$	$-X_4$	X_5	0	0
X_4	0	0	$-X_6$	0	$-X_8$	X_3	0	X_5	0
X_5	X_5	0	X_7	X_8	0	0	0	0	0
X_6	0	0	X_4	$-X_3$	0	0	X_8	$-X_7$	0
X_7	X_7	0	$-X_5$	0	0	$-X_8$	0	0	0
X_8	X_8	0	0	$-X_5$	0	X_7	0	0	0
X_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A tabela dos comutadores nos permitirá encontrar, na seção 4.2, as subálgebras de dimensão três. Para cada subálgebra, determinaremos soluções invariantes (definição 4.1.1) explícitas.

Capítulo 4

Soluções invariantes

Neste capítulo, vamos encontrar soluções invariantes (definição 4.1.1) para o sistema (3.6). Na seção 4.1, aprensentamos um método algorítmico para transformar o sistema de EDP's (3.6) em um sistema de EDO's. Feito isso, a seção 4.2 traz a definição de representação adjunta e alguns resultados que permitem construir uma relação de equivalência entre subálgebras, simplificando assim o nosso trabalho. Finalmente, na seção 4.3, iremos usar a teoria das seções anteriores para construir soluções invariantes para o sistema (3.6).

4.1 Construção de soluções invariantes

Definição 4.1.1 *Considere Δ um sistema de EDP's definido em um subconjunto aberto $M \subset X \times U \subset I\!R^p \times I\!R^q$ do espaço de variáveis independentes e dependentes. Seja G um grupo local transformações agindo em M. Defina solução G-invariante de Δ como uma solução $u = f(x)$ cujo gráfico $\Gamma_f \equiv \{(x, f(x))\} \subset M$ é um subconjunto localmente G-invariante de M.*

Se G é um grupo de simetria do sistema Δ, então, sob alguma hipótese adicional de regularidade na ação de G, nós podemos encontrar todas as soluções G-invariantes de Δ resolvendo o sistema reduzido de equações diferenciais denotado por Δ/G, que terá menos variáveis independentes do que o sistema original Δ. Para ver como a redução do sistema é efetuada, assumiremos que G *age de maneira projetável* em M. Isso significa que todas as transformações em G terão a forma $(\tilde{x}, \tilde{u}) = g.(x, u) = (\Xi_g(x), \Phi_g(x, u))$, ou seja, as mudanças nas variáveis independentes x não dependem das variáveis dependentes u. Existe então uma ação de grupo projetada $\tilde{x} = g.x = \Xi_g(x)$ em um subconjunto aberto $\Omega \subset X$. Sob essas condições, o teorema 2.1.3 implica que existem localmente $p - s$ invariantes funcionalmente independentes $y^1 = \eta^1(x), ..., y^{p-s} = \eta^{p-s}(x)$ da ação de grupo projetada em $\Omega \subset X$. Como cada uma dessas funções é um invariante da ação completa do grupo em M, nós podemos encontrar q invariantes adicionais da ação de G em M. Nós podemos escrever a coleção completa de invariantes concisamente como

$$y = \eta(x), \qquad v = \zeta(x, u). \tag{4.1}$$

Na construção do sistema reduzido de equações diferenciais para as soluções G-invariantes de Δ, os y's serão as novas variáveis independentes e os v's serão as novas variáveis dependentes. Note que existem $p-s$ variáveis independentes no sistema reduzido, i.e., $y^1, ..., y^{p-s}$, onde s é a dimensão das órbitas de G.

Agora temos uma correspondência biunívoca entre as funções G-invariantes $u = f(x)$ em M e funções arbitrárias $v = h(y)$ envolvendo as novas variáveis. Para explicar tal correspondência, usaremos o teorema da função implícita para resolver o sistema $y = \eta(x)$ para $p-s$ variáveis independentes, digamos $\tilde{x} = (x^{i_1}, ..., x^{i_{p-s}})$, em termos das novas variáveis $y^1, ..., y^{p-s}$ e as s restantes variáveis independentes, $\hat{x} = (x^{j_1}, ..., x^{j_s})$. Assim temos a solução

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y)$$

para alguma função γ bem definida. As $p-s$ variáveis independentes antigas $\tilde{x}$ são chamadas de *variáveis principais*, e as s restantes destas variáveis, $\hat{x}$, são as *variáveis paramétricas*.

A expressão das variáveis x em termos das variáveis principais é restrita apenas pela condição de que a submatriz $(\partial\eta^j/\partial\tilde{x}^i)_{(p-s)\times(p-s)}$, da matriz Jacobiana completa $\partial\eta/\partial x$, seja invertível, permitindo a aplicação do teorema da função implícita.

Nós precisamos assumir a condição de *transversabilidade* da ação de G em M, ou seja, precisamos assumir que o posto da matriz $(\partial\eta^i/\partial u^\beta, \partial\zeta^\alpha/\partial u^\beta)^T$ seja igual a q, para que seja possível resolver o outro sistema de invariantes $v = \zeta(x, u)$ para todas as variáveis dependentes $u^1, ..., u^q$ em termos de $x^1, ..., x^p$, e $v^1, ..., v^q$, e assim em termos das novas variáveis y, v e as variáveis paramétricas $\hat{x}$:

$$u = \tilde{\delta}(x, v) = \tilde{\delta}(\hat{x}, \gamma(\hat{x}, y), v) \equiv \delta(\hat{x}, y, v) \tag{4.2}$$

na vizinhança de qualquer ponto $(x_0, u_0) \in M$.

Se $v = h(y)$ é qualquer função suave , então (4.2) junto com (4.1) produzem uma função G-invariante correspondente em M da forma

$$u = f(x) = \delta(\hat{x}, \eta(x), h(\eta(x))). \tag{4.3}$$

Reciprocamente, se $u = f(x)$ é uma função G-invariante qualquer em M, então não é difícil ver que existe necessariamente uma função $v = h(y)$ tal que f e uma função $\delta = \delta(\hat{x}, \eta(x), h(\eta(x)))$ coincidem localmente.

Felizmente, o procedimento para encontrar as soluções invariantes de um sistema de equações diferenciais parciais é algorítmico e segue os passos na ordem dada abaixo (ref. [1]):

1. Encontre todos os geradores infinitesimais $\mathbf{v}$ do grupo de simetrias do sistema usando o método de prolongamento já visto no teorema 2.2.2.

2. Decida o "grau de simetria" s das soluções invariantes. Aqui $1 \leq s \leq p$ irá corresponder à dimensão das órbitas de algum subgrupo do grupo completo de simetrias. O sistema reduzido de equações diferenciais dependerá de $p-s$ variáveis independentes. Assim para reduzir o sistema de equações diferenciais parciais a um sistema de equações diferenciais ordinárias, nós precisamos escolher $s = p-1$.

3. Encontre todos os subgrupos de dimensão s do grupo completo de simetrias, G, encontrado na parte (1.). Isto é equivalente a (ver [1], teorema 1.51) encontrar todas as subálgebras de dimensão s da álgebra de Lie completa de simetrias infinitesimais $\mathbf{v}$. Para cada subgrupo ou subálgebra existirá um conjunto correspondente de soluções invariantes refletindo as simetrias inerentes a G.

4. Fixando o grupo de simetrias G, nós construímos o conjunto completo de invariantes funcionalmente independentes que dividimos em duas classes:

$$\begin{aligned} y^1 &= \eta^1(x,u), ..., y^{p-s} = \eta^{p-s}(x,u), \\ v^1 &= \zeta^1(x,u), ..., v^q = \zeta^q(x,u), \end{aligned} \tag{4.4}$$

correspondendo às novas variáveis independentes e dependentes respectivamente. Se G age de maneira projetável, a escolha das variáveis independentes e dependentes é tal que os η^i's sejam independentes de u.

5. Provado que G age transversalmente (ver [1], proposição 3.37) podemos resolver (4.4) para $p-s$ dos x's, que denotamos por $\tilde{x}$, e todos os u's em termos de y, v e as s variáveis paramétricas $\hat{x}$:

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y, v), \qquad u = \delta(\hat{x}, y, v). \tag{4.5}$$

Portanto, considerando v como função de y nós podemos usar (4.4), (4.5) e a regra da cadeia para encontrar expressões para as derivadas de x de qualquer invariante u em termos de y, v e derivadas de v nas variáveis y e $\tilde{x}$:

$$u^{(n)} = \delta^{(n)}(\tilde{x}, y, v^{(n)}). \tag{4.6}$$

6. Substitua as expressões (4.5), (4.6) no sistema $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. O sistema de equações resultante sempre será equivalente a um sistema de equações diferenciais para $v = h(y)$ independente das variáveis paramétricas $\tilde{x}$:

$$\Delta/G(y, v^{(n)}) = 0. \tag{4.7}$$

Agora temos o sistema reduzido de equações diferenciais para as soluções G-invariantes.

7. Resolva o sistema (4.7). Para cada solução $v = h(y)$ de Δ/G existe uma solução G-invariante correspondente $u = f(x)$ do sistema original, que é dada implicitamente pela relação

$$\zeta(x,u) = h[\eta(x,u)].$$

Repetindo os passos de 4. a 7. para cada subgrupo de simetrias G determinado em 3., teremos o conjunto completo de soluções invariantes para o nosso sistema.

4.2 Classificação de soluções invariantes

Proposição 4.2.1 *Seja G um grupo de simetrias de um sistema de equações diferenciais Δ e seja $H \subset G$ um subgrupo a s parâmetros. Se $u = f(x)$ é uma solução $H-$invariante para Δ e $g \in G$ é um elemento qualquer do grupo, então a função transformada $u = \tilde{f}(x) = g.f(x)$ é uma solução $\tilde{H}$-invariante, onde $\tilde{H} = gHg^{-1}$ é o subgrupo conjugado a H sob g.*

Seja G um grupo de Lie. Para $g \in G$, a conjugação $K_g(h) \equiv ghg^{-1}$, $h \in G$, determina um difeomorfismo em G. Além disso, $K_g \circ K_{g'} = K_{gg'}$, $K_e = \mathbb{1}_G$, assim K_g determina uma ação global de G nele mesmo, com cada aplicação de conjugação K_g sendo um homomorfismo.

Definição 4.2.1 *A representação adjunta $dK_g : T_hG \to T_{K_g(h)}G$ é uma aplicação linear na álgebra de Lie de G que preserva a invariância à direita:*

$$Ad\ g(\mathbf{v}) \equiv dK_g(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{v} \in \mathfrak{g}.$$

Observe que a representação adjunta nos dá uma ação linear global de G em $\mathfrak{g}$:

$$Ad\ g.g' = Ad\ g \circ Ad\ g', \qquad Ad\ e = \mathbb{1}.$$

Proposição 4.2.2 *Sejam H e $\tilde{H}$ subgrupos de Lie conexos e com dimensão s de um grupo G com subálgebras de Lie $\mathfrak{h}$ e $\tilde{\mathfrak{h}}$, respectivamente, da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Então $\tilde{H} = gHg^{-1}$ e H são subgrupos conjugados se, e só se, $\tilde{\mathfrak{h}} = Ad\ g(\mathfrak{h})$ são subálgebras conjugadas.*

Suponha agora que $\mathbf{v}$ gera um subgrupo a 1 parâmetro correspondente à transformação $\{exp(\varepsilon\mathbf{v})\}$ e seja $ad\ \mathbf{v}$ o campo vetorial em $\mathfrak{g}$ que gera o grupo a um parâmetro correspondente à transformação adjunta:

$$ad\ \mathbf{v}|_{\mathbf{w}} \equiv \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} Ad\ exp(\varepsilon\mathbf{v})\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} \in \mathfrak{g}.$$

Proposição 4.2.3 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Para cada $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$, o vetor adjunto $ad\ \mathbf{v}$ em $\mathbf{w} \in \mathfrak{g}$ é*

$$ad\ \mathbf{v}|_{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

Podemos agora reescrever a representação adjunta a partir das séries de Lie (ver [1]):

$$\begin{aligned} Ad\ exp(\varepsilon\mathbf{v})(\mathbf{w}_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}(ad\ \mathbf{v})^n(\mathbf{w}_0) \\ &= \mathbf{w}_0 - \varepsilon[\mathbf{v}, \mathbf{w}_0] + \frac{\varepsilon^2}{2}[\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}_0]] - \ldots \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para o caso termoelástico, encontramos a partir de (3.6) os campos $X_1, ..., X_9$ (ver (3.7) a (3.15)) que geram a álgebra de Lie para o sistema correspondente. Para calcular a representação adjunta, vamos usar (4.8) e a tabela dos comutadores $[X_i, X_j]$,

$i, j = 1, ..., 9$. Abaixo, segue a tabela adjunta:

Ad	X_1	X_2	X_3
X_1	X_1	$exp(\varepsilon)X_2$	X_3
X_2	$X_1 - \varepsilon X_2$	X_2	X_3
X_3	X_1	X_2	X_3
X_4	X_1	X_2	$cos(\varepsilon)X_3 + sin(\varepsilon)X_6$
X_5	$X_1 - \varepsilon X_5$	X_2	$X_3 - \varepsilon X_7$
X_6	X_1	X_2	$cos(\varepsilon)X_3 - sin(\varepsilon)X_4$
X_7	$X_1 - \varepsilon X_7$	X_2	$X_3 + \varepsilon X_5$
X_8	$X_1 - \varepsilon X_8$	X_2	X_3
X_9	X_1	X_2	X_3

Ad	X_4	X_5	X_6
X_1	X_4	$exp(\varepsilon)X_5$	X_6
X_2	X_4	X_5	X_6
X_3	$cos(\varepsilon)X_4 - sin(\varepsilon)X_6$	$cos(\varepsilon)X_5 + sin(\varepsilon)X_7$	$sin(\varepsilon)X_4 + cos(\varepsilon)X_6$
X_4	X_4	$cos(\varepsilon)X_5 + sin(\varepsilon)X_8$	$-sin(\varepsilon)X_3 + cos(\varepsilon)X_6$
X_5	$X_4 - \varepsilon X_8$	X_5	X_6
X_6	$sin(\varepsilon)X_3 + cos(\varepsilon)X_4$	X_5	X_6
X_7	X_4	X_5	$X_6 + \varepsilon X_8$
X_8	$X_4 + \varepsilon X_5$	X_5	$X_6 - \varepsilon X_7$
X_9	X_4	X_5	X_6

Ad	X_7	X_8	X_9
X_1	$exp(\varepsilon)X_7$	$exp(\varepsilon)X_8$	X_9
X_2	X_7	X_8	X_9
X_3	$-sin(\varepsilon)X_5 + cos(\varepsilon)X_7$	X_8	X_9
X_4	X_7	$-sin(\varepsilon)X_5 + cos(\varepsilon)X_8$	X_9
X_5	X_7	X_8	X_9
X_6	$cos(\varepsilon)X_7 - sin(\varepsilon)X_8$	$sin(\varepsilon)X_7 + cos(\varepsilon)X_8$	X_9
X_7	X_7	X_8	X_9
X_8	X_7	X_8	X_9
X_9	X_7	X_8	X_9

Acima, temos que o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna é dado por $Ad\ exp(\varepsilon X_i)(X_j)$.

Essas tabelas foram obtidas através da aplicação de rotinas desenvolvidas para o sistema MAPLE (ver CD anexo).

Definição 4.2.2 *Seja G um grupo de Lie. Um sistema ótimo de subgrupos a s parâmetros é uma lista de subgrupos a s parâmetros não equivalentes por conjugação e que tem a propriedade de que qualquer outro subgrupo de G é conjugado a precisamente um subgrupo desta lista. Similarmente, a lista de subálgebras a s parâmetros forma um sistema ótimo se cada subálgebra a s parâmetros de $\mathfrak{g}$ é equivalente a um único membro da lista sob algum elemento da representação adjunta: $\tilde{\mathfrak{h}} = Ad\ g(\mathfrak{h})$, $g \in G$.*

Como foi visto na seção 4.1, o passo 2. do algoritmo para encontrar soluções invariantes para o sistema (3.6) é decidir o grau s de simetria das soluções invariantes. Já que o número p de variáveis independentes é 4, vamos tomar $s = 3$. Dessa forma, obteremos um sistema reduzido Δ/G de equações diferenciais com $p - s = 4 - 3 = 1$ variável independente, ou seja, Δ/G será um sistema de equações diferenciais ordinárias.

De acordo com o passo 3. do nosso algoritmo, devemos encontrar agora todas as subálgebras de dimensão 3. Além disso, devemos encontrar o sistema ótimo de subálgebras de dimensão 3 pois as demais subálgebras serão equivalentes a algum elemento da lista do sistema ótimo segundo a definição 4.2.2.

Neste trabalho, nos restringiremos à obtenção de subálgebras de dimensão 3 do nosso sistema checando se subconjuntos de três quaisquer dos $X_i, i = 1, ..., 9$ são fechados sob o colchete de Lie. A partir da tabela dos comutadores, encontramos as subálgebras de dimensão três:

$$\{X_5, X_7, X_8\}, \{X_5, X_7, X_9\}, \{X_5, X_8, X_9\}, \{X_6, X_7, X_8\}, \{X_7, X_8, X_9\}, \{X_1, X_2, X_3\},$$
$$\{X_1, X_2, X_4\}, \{X_1, X_2, X_5\}, \{X_1, X_2, X_6\}, \{X_1, X_2, X_7\}, \{X_1, X_2, X_8\}, \{X_1, X_2, X_9\},$$
$$\{X_1, X_3, X_8\}, \{X_1, X_3, X_9\}, \{X_1, X_4, X_7\}, \{X_1, X_4, X_9\}, \{X_1, X_5, X_6\}, \{X_1, X_5, X_7\},$$
$$\{X_1, X_5, X_8\}, \{X_1, X_5, X_9\}, \{X_1, X_6, X_9\}, \{X_1, X_7, X_8\}, \{X_1, X_7, X_9\}, \{X_1, X_8, X_9\},$$
$$\{X_2, X_3, X_8\}, \{X_2, X_3, X_9\}, \{X_2, X_4, X_7\}, \{X_2, X_4, X_9\}, \{X_2, X_5, X_6\}, \{X_2, X_5, X_7\},$$
$$\{X_2, X_5, X_8\}, \{X_2, X_5, X_9\}, \{X_2, X_6, X_9\}, \{X_2, X_7, X_8\}, \{X_2, X_7, X_9\}, \{X_2, X_8, X_9\},$$
$$\{X_3, X_4, X_6\}, \{X_3, X_5, X_7\}, \{X_3, X_8, X_9\}, \{X_4, X_5, X_8\}, \{X_4, X_7, X_9\}, \{X_5, X_6, X_9\}.$$

Usando a relação de equivalência dada na definição 4.2.2 e a tabela adjunta, obtemos a lista do sistema ótimo:

$$\{X_5, X_7, X_8\}, \{X_5, X_7, X_9\}, \{X_1, X_2, X_3\}, \{X_1, X_2, X_5\},$$
$$\{X_1, X_2, X_9\}, \{X_1, X_3, X_9\}, \{X_1, X_4, X_7\}, \{X_1, X_5, X_7\},$$
$$\{X_1, X_5, X_9\}, \{X_2, X_3, X_8\}, \{X_2, X_3, X_9\}, \{X_2, X_5, X_7\},$$
$$\{X_2, X_5, X_9\}, \{X_3, X_4, X_6\}, \{X_4, X_5, X_8\}, \{X_4, X_7, X_9\}.$$

Daqui em diante, iremos analisar cada subálgebra da lista do sistema ótimo com o objetivo de encontrar soluções invariantes para o sistema 3.6.

4.3 Soluções invariantes para o problema termoelástico

4.3.1 Soluções invariantes sob $\{X_5, X_7, X_8\}$:

Temos que

$$\begin{aligned} X_5 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_7 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_8 &= \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Para encontrar os invariantes para esta subálgebra façamos uso do teorema 2.1.3 e a pequena exposição teórica que o segue (para os demais casos a idéia é análoga). Temos o seguinte sistema:

$$X_i(\zeta) = 0, \qquad i = 5, 7, 8,$$

que possui o sistema característico

$$dx = dy = dz.$$

Os invariantes para esse sistema são $w_i = u_i, i = 1, 2, 3,$ e $t = \tau$. Pela teoria da seção 4.1, obtemos as novas variáveis

$$w_i = w_i(\tau), \qquad i = 1, 2, 3$$

e fazendo a substituição no sistema (3.6), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(w_i)_{\tau\tau} \\ \Rightarrow w_i &= a_i\tau + b_i \\ \Rightarrow u_i &= a_i t + b_i, \end{aligned}$$

onde $i = 1, 2, 3$. Assim, $u_i = a_i t + b_i, i = 1, 2, 3$, é solução invariante sob a subálgebra gerada por $X5, X7$ e $X8$ para o sistema (3.6).

4.3.2 Soluções invariantes sob $\{X_2, X_3, X_8\}$:

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_3 &= -y\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial y} - u_2\frac{\partial}{\partial u_3} + u_3\frac{\partial}{\partial u_2}, \\ X_8 &= \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Note que

$$X_2(\zeta) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0,$$

ou seja, se ζ é invariante para tal subálgebra então ζ independe de t. Entretanto, tal caso já foi tratado em [7] assim como todas as subálgebras do nosso sistema ótimo em que aparece o campo X_2. Dessa forma, além de $\{X_2, X_3, X_8\}$,não iremos trabalhar com as subálgebras $\{X_1, X_2, X_3\}, \{X_1, X_2, X_5\}, \{X_1, X_2, X_9\}, \{X_2, X_3, X_9\}$, $\{X_2, X_5, X_7\}$ e $\{X_2, X_5, X_9\}$.

4.3.3 Soluções invariantes sob $\{X_5, X_7, X_9\}$:

Temos que

$$\begin{aligned} X_5 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_7 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_9 &= u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + u_3\frac{\partial}{\partial u_3} \end{aligned}$$

e o conjunto completo de invariantes é dado por

$$\begin{aligned} x &= \eta_1, \\ \frac{u_1}{u_2} &= \eta_2, \\ \frac{u_3}{u_2} &= \eta_3, \\ t &= \eta_4. \end{aligned}$$

Porém, neste caso, a submatriz $(\partial\eta^j/\partial u_i)$, $j \in \{1,2,3,4\}$, $i = 1,2,3$, não tem posto 3, isto é, a nossa teoria não pode ser empregada. De fato, não tendo tal submatriz não podemos aplicar o teorema da função implícita para expressar os u_i em função dos invariantes. Daí, não podemos construir soluções invariantes para esta subálgebra.

Em $\{X_1, X_3, X_9\}, \{X_3, X_4, X_6\}, \{X_1, X_5, X_9\}, \{X_4, X_5, X_8\}$ e $\{X_4, X_7, X_9\}$ temos o mesmo problema e ficamos impossibilitados de construir soluções invariantes nestes casos.

4.3.4 Soluções invariantes sob $\{X_1, X_5, X_7\}$:

$$\begin{aligned} X_1 &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + t\frac{\partial}{\partial t}, \\ X_5 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_7 &= \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Os invariantes para esta subálgebra são:

$$\begin{aligned} w_i &= u_i, \quad i = 1,2,3, \\ r &= \frac{x}{t}. \end{aligned}$$

Substituindo em (3.6) as relações obtidas acima, temos que

$$[(\lambda + 2\mu - \rho r^2)]\frac{d^2 w_1(r)}{dr^2} = 2r\frac{dw_1(r)}{dr}, \tag{4.9}$$

$$[(\mu - \rho r^2)]\frac{d^2 w_2(r)}{dr^2} = 2r\frac{dw_2(r)}{dr}, \tag{4.10}$$

$$[(\mu - \rho r^2)]\frac{d^2 w_3(r)}{dr^2} = 2r\frac{dw_3(r)}{dr} \tag{4.11}$$

Note que as três equações são independentes e assim podem ser resolvidas separadamente.

$$(4.9) \Rightarrow w_1(r) = C_1 + C_2\int |\lambda + 2\mu - \rho r^2|^{(-1/\rho)} dr, \tag{4.12}$$

$$(4.10) \Rightarrow w_2(r) = C_3 + C_4\int |\mu - \rho r^2|^{(-1/\rho)} dr, \tag{4.13}$$

$$(4.11) \Rightarrow w_3(r) = C_5 + C_6\int |\mu - \rho r^2|^{(-1/\rho)} dr, \tag{4.14}$$

onde $C_1, ..., C_6$ são constantes reais.

Como os valores das integrais em $(4.12), (4.13), (4.14)$ variam conforme o valor associado a ρ, vamos considerar dois casos para ρ.

- **Considere** $\rho = 1$ **:**

Resolvendo (4.12), (4.13) e (4.14), temos

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1 + \theta_1 C_2 \, arctanh\left(\frac{r}{\sqrt{\lambda + 2\,\mu}}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda + 2\,\mu}}, & (4.15)\\ w_2 &= C_3 + \theta_2 C_4 \, arctanh\left(\frac{r}{\sqrt{\mu}}\right)\frac{1}{\sqrt{\mu}}, & (4.16)\\ w_3 &= C_5 + \theta_3 C_6 \, arctanh\left(\frac{r}{\sqrt{\mu}}\right)\frac{1}{\sqrt{\mu}}. & (4.17) \end{aligned}$$

Onde $\theta_i = \pm 1, i = 1, 2, 3$. Usando as relações

$$\begin{aligned} w_i &= u_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ r &= \frac{x}{t} \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} u_1 &= C_1 + \theta_1 C_2 \, arctanh\left(\frac{x}{t\sqrt{\lambda + 2\,\mu}}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda + 2\,\mu}}, & (4.18)\\ u_2 &= C_3 + \theta_2 C_4 \, arctanh\left(\frac{x}{t\sqrt{\mu}}\right)\frac{1}{\sqrt{\mu}}, & (4.19)\\ u_3 &= C_5 + \theta_3 C_6 \, arctanh\left(\frac{x}{t\sqrt{\mu}}\right)\frac{1}{\sqrt{\mu}}. & (4.20) \end{aligned}$$

Portanto $u_i, i = 1, 2, 3$ é solução invariante sob essa subálgebra com $\rho = 1$.

- **Considere** ρ **qualquer:**

Defina agora k tal que esta constante assume os valores $k = \lambda + 2\mu$ ou $k = \mu$ e considere a equação

$$[(k - \rho r^2)]\frac{d^2 w(r)}{dr^2} = 2r\frac{dw(r)}{dr}. \tag{4.21}$$

Uma vez encontrada a solução $w(r)$ da equação (4.21), fazemos as substituições $w = w_1$ e $k = \lambda + 2\mu$ para obter a solução $w_1(r)$ de (4.9). Daí, basta substituir $u_1 = w_1$ e $r = x/t$ na expressão de $w_1(r)$ para obter $u_1(x, t)$. Da mesma maneira, obtemos $u_2(x, t)$ e $u_3(x, t)$ porém é preciso substituir $k = \mu$ e não $k = \lambda + 2\mu$.

Note que (4.21) possui dois pontos singulares regulares que são $r_0 = \sqrt{k/\rho}$ e $r_1 = -\sqrt{k/\rho}$. Resolvendo (4.21) via método de Frobenius (ver [9]), suponha que

$$w(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n$$

é solução de (4.21) em uma vizinhança do ponto ordinário $r = 0$. Substituindo essa expressão de $w(r)$ em (4.21), obtemos, do coeficiente de r^0, $c_2 = 0$ e, do coeficiente de r^1, $c_3 = 2.1.c_1/(3.2.k)$. Ainda, temos a relação de recorrência dada por

$$c_{n+2} = c_n \frac{n(n-1)\rho + 2n}{(n+2)(n+1)k}.$$

Daí, nota-se que todos os coeficientes com índice par, com exceção de c_0, são zero. Desenvolvendo a relação de recorrência e simplificando-a, temos que

$$w(r) = c_0 + \frac{c_1}{\Gamma(1/\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho/k)^n \Gamma((\rho n + 1)/\rho) r^{2n+1}}{(2n+1)\Gamma(n+1)}. \tag{4.22}$$

Essa série converge absolutamente em $(-\sqrt{k/\rho}, \sqrt{k/\rho})$. Abaixo, seguem as expressões de $u_i, i = 1, 2, 3$, em torno de $\frac{x}{t} = 0$:

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_0 + \frac{a_1}{\Gamma(1/\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho/(\lambda + 2\mu))^n \Gamma((\rho n + 1)/\rho)(x/t)^{2n+1}}{(2n+1)\Gamma(n+1)},\\
u_2 &= b_0 + \frac{b_1}{\Gamma(1/\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho/\mu)^n \Gamma((\rho n + 1)/\rho)(x/t)^{2n+1}}{(2n+1)\Gamma(n+1)},\\
u_3 &= c_0 + \frac{c_1}{\Gamma(1/\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho/\mu)^n \Gamma((\rho n + 1)/\rho)(x/t)^{2n+1}}{(2n+1)\Gamma(n+1)}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos obter soluções de (4.21) em vizinhança do ponto singular r_0. A solução em uma vizinhança de r_1 é determinada de modo análogo à solução para uma vizinhança de r_0 e portanto omitiremos este caso.

Defina $\tilde{x} = r - r_0$ e substitua na equação (4.21) para obter

$$[k - \rho(\tilde{x} + r_0)^2] \frac{d^2 w}{d\tilde{x}^2} = 2(\tilde{x} + r_0) \frac{dw}{d\tilde{x}} \tag{4.23}$$

que tem ponto singular $\tilde{x} = 0$. Seja

$$w = \tilde{x}^p \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{x}^n$$

solução em uma vizinhança do ponto singular $\tilde{x} = 0$. Substituindo a expressão de w em (4.23) temos

$$\begin{aligned}
0 &= -\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\rho\, \tilde{x}^{n+p} (n+1+p)(n+p)(1+2r_0) + 2c_n \tilde{x}^{n+p} (n+p)\\
&- c_0 \rho\, \tilde{x}^{p-1} p(p-1)(1+2r_0).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Da equação indicial, obtemos $p_0 = 0$ e $p_1 = 1$ com $1 + 2r_0 \neq 0$. Observe que para a determinação da solução em torno de r_1, o caso $r_1 = -1/2$ deve ser levado em consideração.

Temos de (4.24) a seguinte relação de recorrência:

$$c_{n+1} = -2\,\frac{c_n}{\rho\,(n+1+p)\,(1+2\,r_0)}.$$

Substituindo $p = 1$ na relação acima desenvolvendo a mesma, obtemos a expressão de $c_{n+1}, n \geq 0$, em função de c_0:

$$c_{n+1} = \frac{(-2)^{n+1}\,c_0}{\rho^{n+1}\,(n+2)!\,\,(1+2\,r_0)^{n+1}}.$$

Dessa forma, temos que a primeira solução de (4.23) é dada por

$$\begin{aligned} w_{[1]} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n\,c_0\tilde{x}^{n+1}}{\rho^n\,(n+1)!\,\,(1+2\,r_0)^n} \\ &= -1/2\,c_0\,(\rho+2\,\rho\,r_0)\,e^{-2\,\frac{\tilde{x}}{\rho+2\,\rho\,r_0}}\left(1-e^{2\,\frac{\tilde{x}}{\rho+2\,\rho\,r_0}}\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Como a diferença entre p_0 e p_1 é um número inteiro, a segunda solução de (4.23) pode ser escrita da forma

$$w_{[0]} = a\ln(\tilde{x})\sum_{n=0}^{\infty} c_n\tilde{x}^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\tilde{x}^n,$$

onde $\tilde{x} > 0$, a é uma constante que pode ser zero e os c_n são os coeficientes da solução $w_{[1]}$. Os coeficientes b_n são obtidos a partir da substituição da expressão de $w_{[0]}$ em (4.23):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=3}^{\infty} 2\,\rho\,a\tilde{x}^n c_{n-3}\,(n-2) + \sum_{n=4}^{\infty} \tilde{x}^n\,(n-2)\,b_{n-2}\rho\,\,(n-3) - \sum_{n=3}^{\infty} \tilde{x}^n c_{n-3}a\rho \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} 4\,\tilde{x}^n c_{n-2}a\rho\,r_0\,(n-1) + \sum_{n=3}^{\infty} 2\,\tilde{x}^n\,(n-1)\,b_{n-1}\rho\,r_0\,(n-2) \\ &- \sum_{n=2}^{\infty} 2\,\tilde{x}^n c_{n-2}a\rho\,r_0 + \sum_{n=3}^{\infty} 2\,\tilde{x}^n c_{n-3}a + \sum_{n=3}^{\infty} 2\,\tilde{x}^n\,(n-2)\,b_{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 2\,\tilde{x}^n c_{n-2}ar_0 \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} 2\,\tilde{x}^n\,(n-1)\,b_{n-1}r_0. \end{aligned}$$

Temos

$$b_1 = -c_0a(\rho+1), \tag{4.26}$$

$$b_2 = 1/4\,\frac{c_0a\left(\rho^2+2\,r_0\left((\rho+1)^2+\rho\right)\right)}{r_0\rho\,\,(\rho+1)\,(1+2\,r_0)} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= [-2\,\rho\,ac_{n-3}\,(n-2) - (n-2)\,b_{n-2}\rho\,\,(n-3) + c_{n-3}a\rho \\ &- 4\,c_{n-2}a\rho\,r_0\,(n-1) + 2\,c_{n-2}a\rho\,r_0 - 2\,c_{n-3}a - 2\,\,(n-2)\,b_{n-2} - 2\,c_{n-2}ar_0] \\ &/\ [2\,\,(n-1)\,\rho\,r_0\,(n-2) + 2\,\,(n-1)\,r_0] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1/2\Bigg[\left(\frac{a\,(-2)^{n-3}\,(\rho\,(-2\,n+5)-2)}{\rho^{n-3}\Gamma\,(n-1)\,(1+2\,r_0)^{n-3}}+2\,\frac{(-2)^{n-2}\,ar_0\,(\rho\,(-2\,n+3)-1)}{\rho^{n-2}\Gamma\,(n+1)\,(1+2\,r_0)^{n-2}}\right)c_0\\
&+ (-(n-2)\,\rho\,(n-3)-2\,n+4)\,b_{n-2}\Bigg]\\
&. \left[\frac{1}{r_0\,(n-1)\,(\rho\,n-2\,\rho+1)}\right]
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

onde $n \geq 4$ na última expressão.

Portanto, temos que

$$w = A\; w_{[1]} + B\; w_{[0]},$$

onde A e B são constantes, é a solução geral de (4.23) na vizinhança do ponto singular $\tilde{x} = 0$. Feito isso, substitua $\tilde{x} = r - r_0$ na equação anterior para encontrar a solução geral de (4.21) na vizinhança do ponto singular $r = r_0$. Em seguida, repita os mesmos passos do caso da solução em vizinhança de um ponto ordinário para obter as expressões de $u_i, i = 1, 2, 3$ a partir de w. Abaixo, seguem as expressões de $u_i, i = 1, 2, 3$ em torno do ponto singular $r = r_0$:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -1/2\,\left(A_1 + B_1 \ln\left(\frac{x}{t} - \sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}\right)\right) c_0^{(1)} \left(\rho + 2\,\rho\,\sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}\right)\\
&.\; e^{-2\left(\frac{x}{t}-\sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}\right)\left(\rho+2\,\rho\,\sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}\right)^{-1}} \left(1 - e^{2\left(\frac{x}{t}-\sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}\right)\left(\rho+2\,\rho\,\sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}\right)^{-1}}\right)\\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} \left(\frac{x}{t} - \sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}}\right)^n,\\
u_2 &= -1/2\,\left(A_2 + B_2 \ln\left(\frac{x}{t} - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)\right) c_0^{(2)} \left(\rho + 2\,\rho\,\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)\\
&.\; e^{-2\left(\frac{x}{t}-\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)\left(\rho+2\,\rho\,\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)^{-1}} \left(1 - e^{2\left(\frac{x}{t}-\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)\left(\rho+2\,\rho\,\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)^{-1}}\right)\\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(2)} \left(\frac{x}{t} - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)^n,\\
u_3 &= -1/2\,\left(A_3 + B_3 \ln\left(\frac{x}{t} - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)\right) c_0^{(3)} \left(\rho + 2\,\rho\,\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)\\
&.\; e^{-2\left(\frac{x}{t}-\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)\left(\rho+2\,\rho\,\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)^{-1}} \left(1 - e^{2\left(\frac{x}{t}-\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)\left(\rho+2\,\rho\,\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)^{-1}}\right)\\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(3)} \left(\frac{x}{t} - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)^n,
\end{aligned}
$$

onde A_i e B_i, $i = 1, 2, 3$, são constantes. Os termos $c_0^{(i)}$ e $b_n^{(i)}, i = 1, 2, 3$ são dados pelas expressões de c_0 (ver (4.25)) e b_n (ver (4.26), (4.27) e (4.28)) obtidos nas soluções $w_{[0]}$ e $w_{[1]}$ porém com uma observação: no caso de u_1 é preciso mudar k por $\lambda + 2\mu$ enquanto que nos casos u_2 e u_3 deve-se trocar k por μ nas expressões.

4.3.5 Soluções invariantes sob $\{X_1, X_4, X_7\}$:

Temos que

$$\begin{aligned} X_1 &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + t\frac{\partial}{\partial t}, \\ X_4 &= z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} - u_1\frac{\partial}{\partial u_3} + u_3\frac{\partial}{\partial u_1}, \\ X_7 &= \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Nesta subálgebra, obtemos os invariantes

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{u_1^2 + u_3^2}, \\ \eta_2 &= u_2, \\ \eta_3 &= \frac{u_3 x - z u_1}{z u_3 + u_1 x}. \end{aligned}$$

Seja $f = f(x, y, z, t, u_1, u_2, u_3)$ o quarto e último invariante. Sabemos que $X_7(f) = 0$, ou seja, f independe de y. Logo podemos redefinir X_1 em uma forma equivalente:

$$\overline{X}_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z} + t\frac{\partial}{\partial t}.$$

Os invariantes para $\overline{X}_1$ são:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{x}{t}, \\ r_2 &= \frac{z}{t}, \\ w_i &= u_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Defina agora X_4 no espaço invariante para $\overline{X}_1$, isto é,

$$\begin{aligned} X_4 &= X_4(r_1)\frac{\partial}{\partial r_1} + X_4(r_2)\frac{\partial}{\partial r_2} + \sum_{i=1}^{3} X_4(w_i)\frac{\partial}{\partial w_i} \\ &= r_2\frac{\partial}{\partial r_1} - r_1\frac{\partial}{\partial r_2} + w_3\frac{\partial}{\partial w_1} - w_1\frac{\partial}{\partial w_3}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Observe que (4.29) possui o seguinte sistema característico:

$$\frac{dr_1}{r_2} = \frac{dr_2}{-r_1} = \frac{dw_1}{w_3} = \frac{dw_3}{-w_1}.$$

Resolvendo

$$\frac{dr_1}{r_2} = \frac{dr_2}{-r_1}$$

e fazendo as substituições $r_1 = x/t$ e $r_2 = z/t$ obtemos o invariante

$$r = \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{t}.$$

Portanto, o conjunto completo de invariantes é formado por

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \sqrt{u_1^2 + u_3^2}, && (4.30)\\
\eta_2 &= u_2, && (4.31)\\
\eta_3 &= \frac{u_3 x - z u_1}{z u_3 + u_1 x}, && (4.32)\\
r &= \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{t}. && (4.33)
\end{aligned}$$

Note que η_1, η_2, η_3 são as novas variáveis dependentes e r é a nova variável independente.

A partir de (4.30) e (4.32), podemos escrever u_1 e u_3 em função de η_1 e η_3:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\eta_1(\eta_3 z - x)}{\sqrt{(z^2 + x^2)(\eta_3^2 + 1)}}, && (4.34)\\
u_3 &= -\frac{\eta_1(\eta_3 x + z)}{\sqrt{(z^2 + x^2)(\eta_3^2 + 1)}}. && (4.35)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.34), (4.35) e usando a relação (4.33) no sistema (3.6) obtemos um novo sistema de equações que dependem de r, $\eta_i = \eta_i(r), i = 1, 2, 3$, e suas derivadas até ordem dois:

$$\begin{aligned}
0 &= [(-\rho r^4 \eta_1 \eta_3^3 + 2\mu\eta_1\eta_3 r^2 + \lambda\eta_1\eta_3 r^2 + \lambda\eta_1\eta_3^3 r^2 + 2\mu\eta_1\eta_3^3 r^2 - \rho r^4 \eta_1\eta_3)\eta_3''\\
&+ (-2\rho r^3 \eta_1\eta_3^3 + \lambda\eta_1\eta_3 r - 2\rho r^3 \eta_1\eta_3 + 2\mu\eta_1\eta_3^3 r + 2\mu\eta_1\eta_3 r + \lambda\eta_1\eta_3^3 r)\eta_3'\\
&+ \lambda\eta_1\eta_3^4 + (2\mu\eta_1 r^2 + \lambda\eta_1 r^2 - \rho r^4\eta_1 - 4\mu\eta_1\eta_3^2 r^2 + 2\rho r^4 \eta_1\eta_3^2 - 2\lambda\eta_1\eta_3^2 r^2)(\eta_3')^2\\
&+ 2\mu\eta_1\eta_3^4 + \lambda\eta_1 + 2\mu\eta_1 + 4\mu\eta_1\eta_3^2\\
&+ (-\lambda r^2\eta_3^4 - 2\lambda r^2\eta_3^2 - \lambda r^2 + \rho r^4\eta_3^4 + 2\rho r^4\eta_3^2 - 4\mu r^2\eta_3^2 - 2\mu r^2\eta_3^4 + \rho r^4\\
&- 2\mu r^2)\eta_1''\\
&+ 2\lambda\eta_1\eta_3^2 + ((4\mu r^2\eta_3^3 - 2\rho r^4\eta_3^3 + 2\lambda r^2\eta_3^3 + 4\mu r^2\eta_3 - 2\rho r^4\eta_3 + 2\lambda r^2\eta_3)\eta_3'\\
&- 4\mu r\eta_3^2 - 2\mu r\eta_3^4 + 2\rho r^3\eta_3^4 - \lambda r - 2\lambda r\eta_3^2 - 2\mu r + 2\rho r^3 - \lambda r\eta_3^4 + 4\rho r^3\eta_3^2)\eta_1']x\\
&+ [(-\rho r^4\eta_1 - \rho r^4\eta_1\eta_3^2 + \mu\eta_1\eta_3^2 r^2 + \mu\eta_1 r^2)\eta_3''\\
&- \mu\eta_1\eta_3 + (\mu r^2\eta_3 - \rho r^4\eta_3 - \rho r^4\eta_3^5 + \mu r^2\eta_3^5 - 2\rho r^4\eta_3^3 + 2\mu r^2\eta_3^3)\eta_1''\\
&- 2\mu\ \eta_1\eta_3^3 + ((-2\rho r^4 + 2\mu r^2 + 2\mu r^2\eta_3^2 - 2\rho r^4\eta_3^2)\eta_3'\\
&+ \mu r\eta_3^5 + \mu r\eta_3 - 2\rho r^3\eta_3 + 2\mu r\eta_3^3 - 4\rho r^3\eta_3^3 - 2\rho r^3\eta_3^5)\eta_1'\\
&+ (-3\mu\eta_1\eta_3 r^2 + 3\rho r^4\eta_1\eta_3)(\eta_3')^2 - \mu\eta_1\eta_3^5 + (-2\rho r^3\eta_1 - 2\rho r^3\eta_1\eta_3^2\\
&+ \mu\eta_1 r\eta_3^2 + \mu\eta_1 r)\eta_3']z, && (4.36)
\end{aligned}$$

$$0 = (\mu - \rho r^2)\eta_2'' + (\frac{\mu}{r} - 2\rho r)\eta_2', \qquad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
0 &= [\mu\eta_1\eta_3 + \mu\eta_1\eta_3^5 + (-\mu\eta_1\eta_3^2 r^2 + \rho r^4\eta_1 - \mu\eta_1 r^2 + \rho r^4\eta_1\eta_3^2)\eta_3''\\
&+ 2\mu\eta_1\eta_3^3 + (3\mu\eta_1\eta_3 r^2 - 3\rho r^4\eta_1\eta_3)(\eta_3')^2\\
&+ (\rho r^4\eta_3 - \mu r^2\eta_3^5 + \rho r^4\eta_3^5 + 2\rho r^4\eta_3^3 - \mu r^2\eta_3 - 2\mu r^2\eta_3^3)\eta_1''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad (-\mu\eta_1 r\eta_3^2 + 2\rho r^3\eta_1\eta_3^2 + 2\rho r^3\eta_1 - \mu\eta_1 r)\eta_3' \\
&+ \quad (2\rho r^3\eta_3^5 - 2\mu r\eta_3^3 + 4\rho r^3\eta_3^3 - \mu r\eta_3^5 + (-2\mu r^2 + 2\rho r^4 + 2\rho r^4\eta_3^2 - 2\mu r^2\eta_3^2)\eta_3' \\
&+ \quad 2\rho r^3\eta_3 - \mu r\eta_3)\eta_1']x \\
&+ \quad [(-\rho r^4\eta_1\eta_3^3 + 2\mu\eta_1\eta_3 r^2 + \lambda\eta_1\eta_3 r^2 + \lambda\eta_1\eta_3^3 r^2 + 2\mu\eta_1\eta_3^3 r^2 - \rho r^4\eta_1\eta_3)\eta_3'' \\
&+ \quad (-2\rho r^3\eta_1\eta_3^3 + \lambda\eta_1\eta_3 r - 2\rho r^3\eta_1\eta_3 + 2\mu\eta_1\eta_3^3 r + 2\mu\eta_1\eta_3 r + \lambda\eta_1{\eta_3}^3 r)\eta_3' \\
&+ \quad \lambda\eta_1\eta_3^4 + (2\mu\eta_1 r^2 + \lambda\eta_1 r^2 - \rho r^4\eta_1 - 4\mu\eta_1\eta_3^2 r^2 + 2\rho r^4\eta_1\eta_3^2 - 2\lambda\eta_1\eta_3^2 r^2)(\eta_3')^2 \\
&+ \quad 2\mu\eta_1\eta_3^4 + \lambda\eta_1 + 2\mu\eta_1 + 4\mu\eta_1\eta_3^2 \\
&+ \quad (-\lambda r^2\eta_3^4 - 2\lambda r^2\eta_3^2 - \lambda r^2 + \rho r^4\eta_3^4 + 2\rho r^4\eta_3^2 - 4\mu r^2\eta_3^2 - 2\mu r^2\eta_3^4 + \rho r^4 \\
&- \quad 2\mu r^2)\eta_1'' \\
&+ \quad 2\lambda\eta_1\eta_3^2 + ((4\mu r^2\eta_3^3 - 2\rho r^4\eta_3^3 + 2\lambda r^2\eta_3^3 + 4\mu r^2\eta_3 - 2\rho r^4\eta_3 + 2\lambda r^2\eta_3)\eta_3' \\
&- \quad 4\mu r\eta_3^2 - 2\mu r\eta_3^4 + 2\rho r^3\eta_3^4 - \lambda r - 2\lambda r\eta_3^2 - 2\mu r + 2\rho r^3 - \lambda r\eta_3^4 \\
&+ \quad 4\rho r^3\eta_3^2)\eta_1']z. \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Como a equação (4.37) depende somente de r, η_2 e suas derivadas podemos resolvê-la separadamente. As demais equações, (4.36) e (4.38), dependem de r, η_1, η_3 e suas derivadas. Além disso, (4.36) e (4.38) formam um sistema do tipo

$$\begin{cases} 0 = Ax + Bz \\ 0 = Az - Bx \end{cases}$$

que tem solução $A = 0$ e $B = 0$. Sejam A e B os coeficientes de x e z na equação (4.36) (respectivamente). É possível mostrar que A e B são equivalentes. De fato, considere as expressões de A e B já simplificadas:

$$\begin{aligned}
A &= (-2\mu r^2 + \rho r^4 - \lambda r^2)[2\eta_3^2\eta_1(\eta_3')^2 - \eta_1(\eta_3')^2 + (\eta_3^2+1)^2\eta_1'' - (\eta_3^2+1)\eta_1\eta_3\eta_3'' \\
&- 2\eta_3\eta_1'\eta_3'(\eta_3^2+1)] \\
&+ (-\lambda r - 2\mu r + 2\rho r^3)(\eta_1'(\eta_3^2+1)^2 - (\eta_3^2+1)\eta_1\eta_3\eta_3') \\
&+ (\lambda + 2\mu)\eta_1(\eta_3^2+1)^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= (\mu r^2 - \rho r^4)[(\eta_3^2+1)\eta_1\eta_3'' + \eta_3(\eta_3^2+1)^2\eta_1'' - 3\eta_1\eta_3(\eta_3')^2 + 2\eta_1'\eta_3'(\eta_3^2+1)] \\
&+ (\mu r - 2\rho r^3)(\eta_1'\eta_3(\eta_3^2+1)^2 + \eta_1\eta_3'(\eta_3^2+1)) \\
&- \mu\eta_3\eta_1(\eta_3^2+1)^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Defina $k = \lambda + 2\mu$ e $\eta = 1/(\eta_3^2+1)$. Daí, temos que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4\eta^4}[8r^3\eta^2\rho\eta_1' + 4r^4\rho\eta_1''\eta^2 + 4k\eta_1\eta^2 - 4r\eta^2 k\eta_1' - 4r^2 k\eta_1''\eta^2 \\
&- 2r\eta k\eta_1\eta' + 4r^4\rho\eta_1'\eta'\eta + 2r^4\rho\eta_1\eta''\eta + 4r^3\eta\rho\eta_1\eta' - 4r^2 k\eta_1'\eta'\eta - 2r^2 k\eta_1\eta''\eta \\
&- r^4\rho\eta_1(\eta')^2 + r^2 k\eta_1(\eta')^2] \\
&= 0 \\
\Rightarrow A &= 4\eta^2 r^2(r^2\rho - k)\eta_1'' \\
&+ [4k\eta^2 - 2r^2 k\eta''\eta - 2r\eta k\eta' + 2r^4\rho\eta''\eta + 4r^3\eta\rho\eta' - r^4\rho(\eta')^2 + r^2 k(\eta')^2]\eta_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \quad 4\eta r(\rho\eta' r^3 + 2\eta\rho r^2 - k\eta' r - k\eta)\eta_1' \\
& = \quad 0 \\
\Rightarrow A & = \quad 4r^2\eta^2(r^2\rho - k)\eta_1'' \\
& + \quad \eta_1(4k\eta^2 + ((4\rho r^3 - 2rk)\eta' + (2\rho r^4 - 2r^2k)\eta'')\eta + (-\rho r^4 + r^2k)(\eta')^2) \\
& + \quad 4\eta_1' r\eta((2r^2\rho - k)\eta + (\rho r^3 - rk)\eta') \\
& = \quad 0. \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

Fazendo o mesmo para $B = 0$ e depois calculando $4\eta^3(-1+\eta)B$ vem que

$$
\begin{aligned}
B & = 4r^2(-1+\eta)^2(-\mu + r^2\rho)\eta_1'' + (r^2\mu(\eta')^2 + 2r^2\mu\eta'' + 2r^4\rho\eta''\eta - 2r^2\mu\eta''\eta \\
& + 4\mu\eta^2 - 8\mu\eta + 4\mu - r^4\rho(\eta')^2 - 2r^4\rho\eta'' + 2r\mu\eta' - 4\rho\eta' r^3 + 4r^3\eta\rho\eta' \\
& - 2r\mu\eta'\eta)\eta_1 + 4(-1+\eta)r(-\mu\eta + 2\eta\rho r^2 + \rho\eta' r^3 - 2r^2\rho - r\mu\eta' + \mu)\eta_1' \\
& = 0.
\end{aligned}
$$

Substituindo $\eta = \eta_0 + 1$ na expressão de B e simplificando:

$$
\begin{aligned}
B & = 4r^2(\eta_0)^2(-\mu + r^2\rho)\eta_1'' \\
& + \eta_1(4\mu(\eta_0)^2 + ((-2\mu r^2 + 2\rho r^4)\eta_0'' + (-2\mu r + 4\rho r^3)\eta_0')\eta_0 + (\mu r^2 - \rho r^4)(\eta_0')^2) \\
& + 4r\eta_0((-\mu + 2r^2\rho)\eta_0 + (\rho r^3 - \mu r)\eta_0')\eta_1' \\
& = 0. \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

Substituindo-se o termo μ por k e η_0 por η em (4.40), observamos que (4.40) passa a ser (4.39).

Como (4.39) e (4.40) são equivalentes vamos resolver apenas uma das equações pois a solução da outra é obtida da mesma maneira. O que faremos é resolver $B = 0$ para $\eta_0\eta_1^2$ (e consequentemente $A = 0$ para $\eta\eta_1^2$). Daí, obtemos um novo sistema onde iremos calcular η_1 e η_3.

Reescrevendo $B = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 & = (\mu r^2 - \rho r^4)[-4\eta_0^2\eta_1'' + \eta_1(\eta_0')^2 - 2\eta_0\eta_1\eta_0'' - 4\eta_0\eta_0'\eta_1'] \\
& + (-2\mu r + 4\rho r^3)[\eta_1\eta_0\eta_0' + 2\eta_0^2\eta_1'] \\
& + 4\mu\eta_1\eta_0^2 \\
\Rightarrow -4\mu & = (\mu r^2 - \rho r^4)[-4\frac{\eta_1''}{\eta_1} + \frac{(\eta_0')^2}{\eta_0^2} - 2\frac{\eta_0''}{\eta_0} - 4\frac{\eta_0'\eta_1'}{\eta_0\eta_1}] \\
& + (-2\mu r + 4\rho r^3)[\frac{\eta_0'}{\eta_0} + 2\frac{\eta_1'}{\eta_1}] \\
\Rightarrow -4\mu & = (\mu r^2 - \rho r^4)[-2(\frac{\eta_0'}{\eta_0} + 2\frac{\eta_1'}{\eta_1})' - (\frac{\eta_0'}{\eta_0} + 2\frac{\eta_1'}{\eta_1})^2] \\
& - (2\mu r - 4\rho r^3)[\frac{\eta_0'}{\eta_0} + 2\frac{\eta_1'}{\eta_1}].
\end{aligned}
$$

Substituindo na última equação

$$
\begin{cases}
u = \dfrac{\eta_0'}{\eta_0} + 2\dfrac{\eta_1'}{\eta_1} \\
v = \mu r^2 - \rho r^4
\end{cases}
$$

temos que

$$\begin{aligned}
-4\mu &= -2u'v - u^2v - uv' \\
\Rightarrow -4\mu u + u^3 v &= -2uu'v - u^2v' \\
\Rightarrow u(u^2v - 4\mu) &= -(u^2v)'. \qquad (4.41)
\end{aligned}$$

Defina $w = u^2v - 4\mu$ e substitua em (4.41) para obter

$$u = -\frac{w'}{w}.$$

Seguindo,

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\eta_0'}{\eta_0} + 2\frac{\eta_1'}{\eta_1} \\
\Rightarrow -\frac{w'}{w} &= \frac{\eta_0'}{\eta_0} + 2\frac{\eta_1'}{\eta_1} \\
\Rightarrow \eta_0\eta_1^2 w &= exp(C),
\end{aligned}$$

onde C é uma constante. Assim,

$$\begin{aligned}
-4\mu + u^2v = w &= \frac{exp(C)}{\eta_0\eta_1^2} \\
\Rightarrow -4\mu + (\mu r^2 - \rho r^4)[\frac{\eta_0'}{\eta_0} + 2\frac{\eta_1'}{\eta_1}]^2 &= \frac{exp(C)}{\eta_0\eta_1^2} \\
\Rightarrow (\mu r^2 - \rho r^4)[\eta_0'\eta_1^2 + 2\eta_1'\eta_1\eta_0]^2 &= (\eta_0\eta_1^2)^2(\frac{exp(C)}{\eta_0\eta_1^2} + 4\mu) \\
\Rightarrow \frac{exp(C)\eta_0\eta_1^2 + 4\mu(\eta_0\eta_1^2)^2}{\mu r^2 - \rho r^4} &= [(\eta_0\eta_1^2)']^2 \qquad (4.42) \\
\Rightarrow \frac{\beta\ ({\eta_0}{\eta_1}^2)'}{\sqrt{e^C{\eta_0}{\eta_1}^2 + 4\,\mu\,{\eta_0}^2{\eta_1}^4}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu\,r^2 - \rho\,r^4}},
\end{aligned}$$

onde $\beta = \pm 1$ e em que estamos supondo $\mu r^2 - \rho r^4 > 0$ e $e^C{\eta_0}{\eta_1}^2 + 4\,\mu\,{\eta_0}^2{\eta_1}^4 > 0$.

No caso em que $\mu r^2 - \rho r^4 < 0$ e $e^C{\eta_0}{\eta_1}^2 + 4\,\mu\,{\eta_0}^2{\eta_1}^4 < 0$ temos que resolver

$$\frac{\beta\ ({\eta_0}{\eta_1}^2)'}{\sqrt{-e^C{\eta_0}{\eta_1}^2 - 4\,\mu\,{\eta_0}^2{\eta_1}^4}} = \frac{1}{\sqrt{-\mu\,r^2 + \rho\,r^4}}.$$

Supondo $r > 0$ e $\mu r^2 - \rho r^4 > 0$, temos:

$$1/(2)\,\beta\,\ln\left(1/4\,\frac{\left(1/2\,e^C + 4\,\mu\,{\eta_0}{\eta_1}^2\right)\sqrt{4}}{\sqrt{\mu}} + \sqrt{e^C{\eta_0}{\eta_1}^2 + 4\,\mu\,{\eta_0}^2{\eta_1}^4}\right)\sqrt{4}\frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

$$= \quad -r\sqrt{\mu - \rho\,r^2}\ln\left(2\,\frac{\mu + \sqrt{\mu}\sqrt{\mu - \rho\,r^2}}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{\mu\,r^2 - \rho\,r^4}}\frac{1}{\sqrt{\mu}},$$

$$\Rightarrow \quad e^{C_1}\left(1/4\,\frac{\left(1/2\,e^{C}+4\,\mu\,\eta_0{\eta_1}^2\right)\sqrt{4}}{\sqrt{\mu}}+\sqrt{e^{C}\eta_0{\eta_1}^2+4\,\mu\,{\eta_0}^2{\eta_1}^4}\right)^{\beta}$$
$$= 1/4\,\frac{r^2}{\left(\mu+\sqrt{\mu}\sqrt{\mu-\rho\,r^2}\right)^2}, \tag{4.43}$$

onde C_1 é uma constante.

Temos que considerar dois casos: $\beta = 1$ e $\beta = -1$. Tome $\beta = -1$ em (4.43):

$$e^{C_1}\left(1/4\,\frac{\left(1/2\,e^{C}+4\,\mu\,\eta_0{\eta_1}^2\right)\sqrt{4}}{\sqrt{\mu}}+\sqrt{e^{C}\eta_0{\eta_1}^2+4\,\mu\,{\eta_0}^2{\eta_1}^4}\right)^{-1}$$
$$= 1/4\,\frac{r^2}{\left(\mu+\sqrt{\mu}\sqrt{\mu-\rho\,r^2}\right)^2}$$
$$\Rightarrow \quad 1/4\,\frac{\left(1/2\,e^{C}+4\,\mu\,\eta_0{\eta_1}^2\right)\sqrt{4}}{\sqrt{\mu}}+\sqrt{e^{C}\eta_0{\eta_1}^2+4\,\mu\,{\eta_0}^2{\eta_1}^4}$$
$$= 4\,\frac{\left(\mu+\sqrt{\mu}\sqrt{\mu-\rho\,r^2}\right)^2 e^{C_1}}{r^2}. \tag{4.44}$$

Antes de continuar, defina a função auxiliar

$$K\,(r) = \frac{\sqrt{\mu-\rho\,r^2}}{r^2}. \tag{4.45}$$

Além disso, defina também

$$\begin{aligned} e^{C} &= C, \\ e^{C_1} &= C_1, \\ e^{C}e^{C_1} &= C\;C_1 = C_2. \end{aligned}$$

Isolando $\eta_0{\eta_1}^2$ em (4.44) vem que

$$\begin{aligned} \eta_0{\eta_1}^2 &= (8\,{C_1}^2\mu^2\rho^2+(64\,\frac{{C_1}^2\mu^{7/2}}{r^2}-2\,C_2\mu-32\,{C_1}^2\mu^{5/2}\rho)K(r) \\ &+ 64\,\frac{{C_1}^2\mu^3(K(r))^2}{r^4}-2\,\frac{C_2\mu^{3/2}}{r^2}+1/8\,\frac{C^2}{\mu}+C_2\sqrt{\mu}\rho) \\ &. \;(16\,\frac{C_1\mu^{5/2}}{r^2}-8\,C_1\mu^{3/2}\rho+16\,C_1\mu^2K(r))^{-1}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Como já havia sido comentado, não é preciso resolver (4.39) mas apenas usar as relações $\mu \leftrightarrow k$ e $\eta_0 \leftrightarrow \eta$ em (4.46) para obter:

$$\begin{aligned} \eta\,{\eta_1}^2 &= (8\,{\tilde{C}_1}^{\,2}k^2\rho^2+(64\,\frac{\tilde{C}_1^2k^{7/2}}{r^2}-2\,\tilde{C}_2k-32\,\tilde{C}_1^2k^{5/2}\rho)K(r) \\ &+ 64\,\frac{\tilde{C}_1^2k^3(K(r))^2}{r^4}-2\,\frac{\tilde{C}_2k^{3/2}}{r^2}+1/8\,\frac{\tilde{C}^2}{k}+\tilde{C}_2\sqrt{k}\rho) \\ &. \;(16\,\frac{\tilde{C}_1k^{5/2}}{r^2}-8\,\tilde{C}_1k^{3/2}\rho+16\,\tilde{C}_1k^2K(r))^{-1}, \end{aligned} \tag{4.47}$$

Agora, tome $\beta = 1$ em (4.43) e defina

$$L_\mu(r) = \mu + \sqrt{\mu}\sqrt{\mu - \rho\, r^2}. \tag{4.48}$$

De maneira análoga ao caso $\beta = -1$ temos

$$\eta_0{\eta_1}^2 = (1/16\,\frac{r^4}{(L_\mu(r))^2{C_1}^2} - 1/8\,\frac{r^2 C}{C_1\sqrt{\mu}} + 1/16\,\frac{C^2(L_\mu(r))^2}{\mu})C_1 r^{-2}\frac{1}{\sqrt{\mu}}. \tag{4.49}$$

Novamente, usando as relações $\mu \leftrightarrow k$ e $\eta_0 \leftrightarrow \eta$ em (4.49) obtemos:

$$\begin{aligned} \eta\,{\eta_1}^2 \;&=\; \left(1/16\,\frac{r^4}{\left(L_k(r)\right)^2\tilde{C}_1^2} - 1/8\,\frac{r^2\,\tilde{C}}{\tilde{C}_1\sqrt{\mu}} + 1/16\,\frac{\tilde{C}^2\left(L_k(r)\right)^2}{\mu}\right) \\ &\quad.\;\; \tilde{C}_1 r^{-2}\frac{1}{\sqrt{\mu}}, \end{aligned} \tag{4.50}$$

onde $\tilde{C}$ e $\tilde{C}_1$ são constantes, $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_1\,\tilde{C}$ e

$$L_k(r) = k + \sqrt{k}\sqrt{k - \rho\, r^2}. \tag{4.51}$$

Como, por definição, $\eta_0 = \eta - 1$ e $\eta = 1/(\eta_3^2 + 1)$ então

$$\frac{\eta_0\eta_1^2}{\eta\eta_1^2} = 1 - \frac{1}{\eta} = \eta_3^2 \tag{4.52}$$

e

$$\eta\eta_1^2 - \eta_0\eta_1^2 = \eta\eta_1^2 - (\eta - 1)\eta_1^2 = \eta_1^2. \tag{4.53}$$

Note que, como temos duas expressões para $\eta_0\eta_1^2$ (ver (4.46) e (4.49)) e outras duas para $\eta\eta_1^2$ (ver (4.47) e (4.50)), vamos obter quatro expressões para η_1^2 e outras quatro para η_3^2 que são calculadas a partir das duas últimas relações. Isso vem do fato das possíveis combinações das duas expressões de $\eta_0\eta_1^2$ com as outras duas de $\eta\eta_1^2$. Abaixo, seguem essas combinações juntamente com as expressões de η_1^2 e η_3^2 que elas proporcionam.

De (4.49) e (4.50) temos

$$\begin{aligned} {\eta_3}^2 \;&=\; (-1/16\,\frac{r^4}{(L_\mu(r))^2{C_1}^2} + 1/8\,\frac{r^2 C}{C_1\sqrt{\mu}} - 1/16\,\frac{C^2(L_\mu(r))^2}{\mu}) \\ &\quad.\;\; C_1(-1/16\,\frac{r^4}{(L_k(r))^2\tilde{C}_1^2} + 1/8\,\frac{r^2\,\tilde{C}}{\tilde{C}_1\sqrt{\mu}} - 1/16\,\frac{\tilde{C}^2(L_k(r))^2}{\mu})^{-1}\,\tilde{C}_1^{-1}, \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned} {\eta_1}^2 \;&=\; (-1/16\,\frac{r^4}{(L_\mu(r))^2{C_1}^2} + 1/8\,\frac{r^2 C}{C_1\sqrt{\mu}} - 1/16\,\frac{C^2(L_\mu(r))^2}{\mu})C_1 r^{-2}\frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ &\quad-\;\; (-1/16\,\frac{r^4}{(L_k(r))^2\tilde{C}_1^2} + 1/8\,\frac{r^2\,\tilde{C}}{\tilde{C}_1\sqrt{\mu}} - 1/16\,\frac{\tilde{C}^2(L_k(r))^2}{\mu})\,\tilde{C}_1 r^{-2}\frac{1}{\sqrt{\mu}}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

De (4.49) e (4.47) temos

$$\begin{aligned}
\eta_3^2 &= -(-1/16\,\frac{r^4}{(L_\mu(r))^2{C_1}^2}+1/8\,\frac{r^2C}{C_1\sqrt{\mu}}-1/16\,\frac{C^2(L_\mu(r))^2}{\mu})C_1 \\
&. \quad (16\,\frac{\tilde{C}_1k^{5/2}}{r^2}-8\,\tilde{C}_1k^{3/2}\rho+16\,\tilde{C}_1k^2K(r))r^{-2}\frac{1}{\sqrt{\mu}} \\
&. \quad [8\,\tilde{C}_1^2k^2\rho^2+(64\,\frac{\tilde{C}_1^2k^{7/2}}{r^2}-2\,\tilde{C}_2k-32\,\tilde{C}_1^2k^{5/2}\rho)K(r) \\
&+ \quad 64\,\frac{\tilde{C}_1^2k^3(K(r))^2}{r^4}-2\,\frac{\tilde{C}_2k^{3/2}}{r^2}+1/8\,\frac{\tilde{C}^2}{k}+\tilde{C}_2\sqrt{k}\rho]^{-1}, \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\eta_1}^2 &= (-1/16\,\frac{r^4}{(L_\mu(r))^2{C_1}^2}+1/8\,\frac{r^2C}{C_1\sqrt{\mu}}-1/16\,\frac{C^2(L_\mu(r))^2}{\mu})C_1r^{-2}\frac{1}{\sqrt{\mu}} \\
&+ \quad (8\,\tilde{C}_1^2k^2\rho^2+(64\,\frac{\tilde{C}_1^2k^{7/2}}{r^2}-2\,\tilde{C}_2k-32\,\tilde{C}_1^2k^{5/2}\rho)K(r) \\
&+ \quad 64\,\frac{\tilde{C}_1^2k^3(K(r))^2}{r^4}-2\,\frac{\tilde{C}_2k^{3/2}}{r^2}+1/8\,\frac{\tilde{C}^2}{k}+\tilde{C}_2\sqrt{k}\rho) \\
&. \quad (16\,\frac{\tilde{C}_1k^{5/2}}{r^2}-8\,\tilde{C}_1k^{3/2}\rho+16\,\tilde{C}_1k^2K(r))^{-1}. \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

De (4.46) e (4.50) temos

$$\begin{aligned}
{\eta_3}^2 &= -(8\,{C_1}^2\mu^2\rho^2+(64\,\frac{{C_1}^2\mu^{7/2}}{r^2}-2\,C_2\mu-32\,{C_1}^2\mu^{5/2}\rho)K(r) \\
&+ \quad 64\,\frac{{C_1}^2\mu^3(K(r))^2}{r^4}-2\,\frac{C_2\mu^{3/2}}{r^2}+1/8\,\frac{C^2}{\mu}+C_2\sqrt{\mu}\rho)r^2\sqrt{\mu} \\
&. \quad (16\,\frac{C_1\mu^{5/2}}{r^2}-8\,C_1\mu^{3/2}\rho+16\,C_1\mu^2K(r))^{-1} \\
&. \quad (-1/16\,\frac{r^4}{(L_k(r))^2\tilde{C}_1^2}+1/8\,\frac{r^2\tilde{C}}{\tilde{C}_1\sqrt{\mu}}-1/16\,\frac{\tilde{C}^2(L_k(r))^2}{\mu})^{-1}\tilde{C}_1^{-1}, \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\eta_1}^2 &= -(8\,{C_1}^2\mu^2\rho^2+(64\,\frac{{C_1}^2\mu^{7/2}}{r^2}-2\,C_2\mu-32\,{C_1}^2\mu^{5/2}\rho)K(r) \\
&+ \quad 64\,\frac{{C_1}^2\mu^3(K(r))^2}{r^4}-2\,\frac{C_2\mu^{3/2}}{r^2}+1/8\,\frac{C^2}{\mu}+C_2\sqrt{\mu}\rho)(16\,\frac{C_1\mu^{5/2}}{r^2} \\
&- \quad 8\,C_1\mu^{3/2}\rho+16\,C_1\mu^2K(r))^{-1} \\
&- \quad (-1/16\,\frac{r^4}{(L_k(r))^2\tilde{C}_1^2}+1/8\,\frac{r^2\tilde{C}}{\tilde{C}_1\sqrt{\mu}}-1/16\,\frac{\tilde{C}^2(L_k(r))^2}{\mu})\tilde{C}_1r^{-2}\frac{1}{\sqrt{\mu}}. \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

De (4.46) e (4.47) temos

$$\begin{aligned}
{\eta_3}^2 &= (8\,{C_1}^2\mu^2\rho^2+(64\,\frac{{C_1}^2\mu^{7/2}}{r^2}-2\,C_2\mu-32\,{C_1}^2\mu^{5/2}\rho)K(r) \\
&+ \quad 64\,\frac{{C_1}^2\mu^3(K(r))^2}{r^4}-2\,\frac{C_2\mu^{3/2}}{r^2}+1/8\,\frac{C^2}{\mu}+C_2\sqrt{\mu}\rho) \\
&. \quad (16\,\frac{\tilde{C}_1k^{5/2}}{r^2}-8\,\tilde{C}_1k^{3/2}\rho+16\,\tilde{C}_1k^2K(r))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
 & . \quad (16\,\frac{C_1\mu^{5/2}}{r^2} - 8\,C_1\mu^{3/2}\rho + 16\,C_1\mu^2 K(r))^{-1} \\
 & . \quad [8\,\tilde{C}_1^2 k^2\rho^2 + (64\,\frac{\tilde{C}_1^2 k^{7/2}}{r^2} - 2\,\tilde{C}_2 k - 32\,\tilde{C}_1^2 k^{5/2}\rho)K(r) \\
 & + \quad 64\,\frac{\tilde{C}_1^2 k^3 (K(r))^2}{r^4} - 2\,\frac{\tilde{C}_2 k^{3/2}}{r^2} + 1/8\,\frac{\tilde{C}^2}{k} + \tilde{C}_2\sqrt{k}\rho]^{-1},
\end{aligned} \tag{4.60}
$$

$$
\begin{aligned}
{\eta_1}^2 \quad = & \quad -(8\,{C_1}^2\mu^2\rho^2 + (64\,\frac{{C_1}^2\mu^{7/2}}{r^2} - 2\,C_2\mu - 32\,{C_1}^2\mu^{5/2}\rho)K(r) \\
 + & \quad 64\,\frac{{C_1}^2\mu^3 (K(r))^2}{r^4} - 2\,\frac{C_2\mu^{3/2}}{r^2} + 1/8\,\frac{C^2}{\mu} + C_2\sqrt{\mu}\rho) \\
 . & \quad (16\,\frac{C_1\mu^{5/2}}{r^2} - 8\,C_1\mu^{3/2}\rho + 16\,C_1\mu^2 K(r))^{-1} \\
 + & \quad [8\,\tilde{C}_1^2 k^2\rho^2 + (64\,\frac{\tilde{C}_1^2 k^{7/2}}{r^2} - 2\,\tilde{C}_2 k - 32\,\tilde{C}_1^2 k^{5/2}\rho)K(r) \\
 + & \quad 64\,\frac{\tilde{C}_1^2 k^3 (K(r))^2}{r^4} - 2\,\frac{\tilde{C}_2 k^{3/2}}{r^2} + 1/8\,\frac{\tilde{C}^2}{k} + \tilde{C}_2\sqrt{k}\rho] \\
 . & \quad (16\,\frac{\tilde{C}_1 k^{5/2}}{r^2} - 8\,\tilde{C}_1 k^{3/2}\rho + 16\,\tilde{C}_1 k^2 K(r))^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

Agora, redefina as expressões (4.34) e (4.35):

$$
u_3 = -\frac{\theta_1\sqrt{{\eta_1}^2}\left(\theta_3\sqrt{{\eta_3}^2}x + z\right)}{\sqrt{(x^2+z^2)\left({\eta_3}^2+1\right)}}, \tag{4.62}
$$

$$
u_1 = \frac{\theta_1\sqrt{{\eta_1}^2}\left(\theta_3\sqrt{{\eta_3}^2}z - x\right)}{\sqrt{(x^2+z^2)\left({\eta_3}^2+1\right)}}, \tag{4.63}
$$

onde $\theta_i = \pm 1, i = 1, 3$. Com (4.54)-(4.63) e (4.33), temos agora todas as ferramentas necessárias para o cálculo das expressões possíveis para u_1 e u_3. De fato, para calcular u_1 deve-se usar a equação (4.63) com qualquer par η_1^2 e η_3^2 apresentados em (4.54) e (4.55), ...,(4.60) e (4.61). Para cada combinação de η_3^2 e η_1^2, temos uma nova expressão para u_1. Daí, basta usar a relação (4.33) para obter u_1 em função de x, z e t. Para obter u_3 deve-se usar a expressão (4.62) e seguir os mesmos passos usados na obtenção de u_1.

Para obter u_2 basta resolver (4.37) já que $u_2 = \eta_2$. De (4.37) vem que

$$
\begin{aligned}
\frac{\eta_2''}{\eta_2'} &= \frac{-\mu/r + 2\rho r}{\mu - \rho r^2} \\
\Rightarrow ln(\theta_4\eta_2') &= -ln(\theta_2 r) - \frac{1}{2}ln(\theta_5(-\mu + \rho r^2)) + C3,
\end{aligned}
$$

onde $\theta_i = \pm 1, i = 2, 4, 5$ e C_3 é uma constante. Daí,

$$
\begin{aligned}
\theta_4\eta_2 &= \tilde{C}_3\int \frac{1}{\theta_2 r\sqrt{\theta_5(-\mu+\rho r^2)}}dr \\
\Rightarrow &= \tilde{C}_3 ln(\frac{|-2\theta_5\mu + 2\sqrt{-\theta_5\mu}\sqrt{\theta_5(-\mu+\rho r^2)}|}{|r|})(\theta_2\sqrt{-\theta_5\mu})^{-1} + C_4.
\end{aligned}
$$

De [8] sabemos que μ é positivo, logo

$$\theta_4\eta_2 = \tilde{C_3}ln(\frac{|2\mu + 2\sqrt{\mu}\sqrt{\mu - \rho r^2}|}{|r|})(\theta_2\sqrt{\mu})^{-1} + C_4 \tag{4.64}$$

pois estamos interessados em soluções reais. De acordo com (4.31), (4.33) e (4.64) temos que

$$\theta_4 u_2 = \tilde{C_3}ln(\frac{2\mu + 2\sqrt{\mu}\sqrt{\mu - \rho(x^2 + z^2)/t^2)}}{\sqrt{x^2 + z^2}/t})(\theta_2\sqrt{\mu})^{-1} + C_4 \tag{4.65}$$

Portanto, o conjunto composto de quaisquer u_1, u_2 e u_3 construidos acima, é solução invariante sob a subálgebra gerada por $X1, X4$ e $X7$ para o sistema (3.6).

Capítulo 5

Conclusão

A partir do método clássico de simetrias, foi possível encontrar soluções explícitas para o problema termoelástico linear e isotrópico considerando subálgebras de dimensão três. Essas soluções, além de serem invariantes sob transformações do grupo de simetrias, elas não podem ser levadas uma na outra através de transformações deste grupo. Neste sentido, obtivemos todas as soluções invariantes para o problema.

A importância de obter-se soluções explícitas para esse problema decorre de sua utilização para calibrar programas numéricos que determinam soluções aproximadas para este sistema de equações diferenciais. De fato, uma vez que a solução explícita é conhecida, a solução aproximada deve ser coerente com tal solução.

Devido a restrições do método clássico, não foi possível obter soluções explícitas do sistema (3.6) em todas as subálgebras de dimensão três. Porém, obtivemos os resultados já encontrados em [7] onde havia sido considerado o caso estático e subálgebras de dimensão dois. Dessa forma, podemos dizer que, apesar das restrições impostas na determinação de subálgebras de dimensão três, este trabalho resolve completamente o problema da determinação de soluções invariantes explícitas do problema termoelásico linear e isotrópico.

Os cálculos desenvolvidos nesta dissertação se apoiaram sobre rotinas escritas especificamente para tal e que rodaram no manipulador algébrico MAPLE. Podemos citar, por exemplo, as rotinas que permitiram calcular os geradores infinitesimais de simetrias associados ao sistema (3.6) e sua tabela adjunta que nos deu, como consequência, o sistema ótimo de subálgebras de dimensão três.

Bibliografia

[1] Olver, Peter J. *Applicacions of Lie groups to differential equations.*-2nd ed. (Graduate texts in mathematics; 107). Springer-Verlag.

[2] Carmo, M.P.do *Geometria Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - 2^a edição.

[3] Ince E. L. *Ordinary differential equations*. Logans, Green and Co., London, 1926.

[4] Herstein I. N. *Topics in algebra*. Blaisdell Publishing Company, 1964.

[5] Ruggeri, E. R. F. *A solution for the linear elastic anisotropic body problem.* Furnas Centrais Elétricas.

[6] Ruggeri, E. R. F. *A resolução completa do problema termoelástico linear e unicidade da sua solução*. Revista Escola de Minas - REM -, 42(3):36-48, em 1989.

[7] Oliveira, N. M. P. de *Determinação de soluções invariantes para o problema termo-elástico*. Universidade de Brasília. Dissertação de Mestrado. 2005.

[8] Akamatsu, M., Nakamura, G. and Steinberg, S. *Identification of Lamé coefficients from boundary observations*. Inverse Problems 7 (1991) 335-354. Printed in the UK.

[9] Kreyszig, E. *Matemática Superior 1*. -2nd ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.