Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Método de "Shooting" Aplicado a Problemas de EDP's Singulares Envolvendo os Operadores Laplaciano e Monge-Ampère

por

Manuela Caetano Martins de Rezende

2007

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Método de "Shooting" Aplicado a Problemas de EDP's Singulares Envolvendo os Operadores Laplaciano e Monge-Ampère

por

Manuela Caetano Martins de Rezende*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 15 de março de 2007.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto P. dos Santos - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - MAT/UFPB - Membro

Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo - FUP/UnB - Membro

*A autora foi bolsista da CAPES durante a elaboração deste trabalho.

“Não são as perdas nem as caídas
o que podem fazer fracassar a nossa vida,
e sim a falta de coragem para levantarmos
e seguirmos adiante.”
(Samael Aun Weor)

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por permitir a escolha e o trilhar dos meus caminhos, acompanhando-me e amparando-me;

ao Professor Carlos Alberto Pereira dos Santos, pela competente e dedicada orientação, pela seriedade e pela paciência com que conduziu este trabalho e pela confiança que em mim depositou;

aos professores Everaldo Souto de Medeiros, Antônio Luiz de Melo e José Valdo Abreu Gonçalves, respectivamente, membros e suplente da banca examinadora, pelas oportunas correções e sugestões;

aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UnB que contribuíram, direta ou indiretamente, para o sucesso deste trabalho;

a todos os meus colegas de Departamento, pelo companheirismo e pelo harmonioso convívio, indispensáveis ao sucesso desta conquista;

à CAPES, pelo apoio financeiro;

aos meus pais, Antolomista e Marlene, pelo amor e pelo apoio incondicionais em todos os momentos da minha vida;

ao meu namorado, Flávio, pela compreensão nos momentos de ausência, pelo apoio irrestrito e pelo incentivo nas ocasiões mais difíceis;

ao meu irmão Ricardo e à minha cunhada Cíntia, pelas motivadoras conversas, pelos incentivos e por terem assumido a responsabilidade sobre valiosos interesses, proporcionando, assim, a tranqüilidade necessária à realização deste trabalho;

à minha irmã Stefania e ao meu cunhado Marcelo, pelo carinho, pelo incentivo e pelo auxílio durante a revisão do texto;

à minha irmã Mayra e ao meu cunhado Daniel, pela amizade e pelo estímulo;

aos meus sobrinhos Maria Clara, Helena e Tiago, pela luz que trouxeram à minha vida;

aos amigos que, de uma forma ou de outra, participaram de cada etapa deste processo, amenizando-o e ajudando a torná-lo possível.

Resumo

Neste trabalho ilustramos a aplicação do Método de “Shooting”em duas classes totalmente distintas de problemas de Equações Diferenciais parciais — ambas com valores de fronteira nulos e em domínios limitados —, uma envolvendo o operador Laplaciano e a outra o operador de Monge-Ampère.

Estudamos estes problemas na situação em que as perturbações não-lineares destes operadores apresentam algum tipo de singularidade e, combinando argumentos de ponto fixo e princípios de comparação, entre outros, ao Método de “Shooting”, mostramos existência e não-existência de soluções clássicas radialmente simétricas.

Palavras-chaves: Método de “Shooting”, Problemas Singulares, Soluções Clássicas e Radialmente Simétricas, Operadores Laplaciano e Monge-Ampère.

Abstract

This work illustrates the application of Shooting Methods as a way to solve two totally different classes of Partial Differential Equations problems. For one class, the Laplace operator is usual, while Monge-Ampère operator is used to the another. However, both classes have bounded domains and zero boundary values.

This study is developed in a specific situation: when the nonlinear disturbance of the operators presents some singularity. The combination of fixed point arguments with comparison principles to Shooting Methods shows the existence and nonexistence of radially symmetric classical solutions.

Key words: Shooting Method, Singular problems, Radially symmetric classical solutions, Laplace and Monge-Ampère operators.

SUMÁRIO

Introdução

Entre as várias técnicas disponíveis para solução de problemas de Equações Diferenciais com valores de fronteira (do ponto de vista analítico e também numérico), destaca-se o Método de "Shooting".

No Método de "Shooting", ao problema de valor de fronteira é associada uma seqüência de problemas de valor inicial, em que condições iniciais "experimentais" são assumidas. A Equação Diferencial associada é resolvida, impondo a condição inicial assumida e objetivando satisfazer a condição de fronteira especificada. Caso o objetivo seja atingido, o problema está resolvido. Caso contrário, a condição inicial "experimental" — parâmetro de "shooting" — deverá ser ajustada. O parâmetro de "shooting"pode ser a derivada inicial ou o valor inicial.

De acordo com Roberts e Shipman [35], em 1972, Métodos de "Shooting"são totalmente gerais e aplicáveis a ampla variedade de Equações Diferenciais, não sendo necessário, para sua aplicabilidade, que as equações sejam de algum tipo especial.

Neste trabalho ilustramos a aplicação do Método de "Shooting" em problemas específicos (confira os problemas (CH) e (GS), páginas 3 e 4) que fazem parte de duas classes de problemas de Equações Diferenciais parciais totalmente distintas, a saber:

$$(L): \quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

e

$$(M): \quad \begin{cases} \det(D^2u) = \psi(x,u), & B_R \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde $f : B_R \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $\psi : B_R \times (0,\infty) \to [0,+\infty)$ são funções apropriadas, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ é a bola de raio $R > 0$ centrada na origem do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, Δ é o operador Laplaciano e $\det(D^2u)$ é o operador de Monge-Ampère .

Além disto, estamos interessados em estudar os problemas (L) e (M) na situação em que as perturbações não-lineares dos operadores apresentam, por exemplo, o seguinte comportamento: $|f(x,s)| \longrightarrow +\infty$ e $\psi(x,s) \longrightarrow +\infty$, respectivamente, quando $s \to 0^+$ para cada $x \in B_R$.

De agora em diante, os problemas (L) e (M) cujas perturbações não-lineares apresentarem pelo menos um destes tipos de comportamento serão denominados problemas singulares.

O Método de "Shooting"aplicado a certos problemas — mais especificamente, às formas radiais de (L) e (M) — nos fornecerá soluções radialmente simétricas para estes problemas, isto é, soluções da forma $u(x) = u(|x|)$.

A existência de soluções positivas para o problema (L) tem sido extensivamente estudada quando f é não-singular. Para detalhes, veja Gidas et al. [14], Smoller e Wasserman [38], Ni [30] e as referências neles contidas. Em particular, Gidas et al. [14] mostraram que, se u é uma solução positiva em $C^2(\overline{B}_R)$ e $f(x,s) = f(s)$ é localmente lipschitziana, então u é radialmente simétrica.

Para casos em que a função f não é Lipschitz, há alguns resultados que ainda garantem radialidade de soluções. Em 1993, Kaper et al. [24] provaram que todas as soluções de (L) são radialmente simétricas para $f(x,s) = \sqrt{s} - 1$ ou $f(x,s) = -s^p + s^q$, $0 < p < q$.

Em 1995, Gui [19] e, em 1996, Cortázar et al. [10] estudaram (L) com fronteira livre e $f(x,s) = s - s^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, provando que a fronteira livre deve ser uma esfera e, a solução, radialmente simétrica. Resultado similar foi obtido em 1996 por Cortázar et al. [9] para $f(x,s) = -s^p + s^q$, $0 < p < 1 < q < (N+2)/(N-2)$, $N \geq 3$.

Entretanto, segundo Hernández et al. [22], em 2006, o celebrado resultado de Gidas et al. [14], em 1979, não foi ainda estendido para o caso de não-linearidades singulares.

Motivados pelos trabalhos anteriores, focaremos nossa atenção nos problemas (L) e (M) singulares, estudando-os do ponto de vista radial. Mais especificamente, estaremos interessados na questão de existência e não-existência de soluções radiais clássicas $u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B}_R)$. Neste caso, o valor da derivada inicial será naturalmente zero, o que implicará no fato de o parâmetro de "shooting" ser o valor inicial.

Consideremos o problema (L) com

$$f(s) = s - \frac{s^{1-\alpha}}{\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2,$$

ou seja, estaremos interessados no caso em que

$$f(x,s) = f(s) \to -\infty \text{ quando } s \to 0^+.$$

Isto é,

$$(CH): \quad \begin{cases} -\Delta u = u - \dfrac{u^{1-\alpha}}{\alpha}, & B_R \\ u > 0, & B_R \\ u = 0, & \partial B_R. \end{cases}$$

Este problema foi estudado por Chen [5], em 1997, como conseqüência do seu trabalho de pesquisa com o problema parabólico não-linear

$$(PP): \quad \begin{cases} v_t = v^\alpha(\triangle v + v) & (x \in \Omega,\ t > 0) \\ v(x,t) = 0, & (x \in \partial\Omega,\ t > 0) \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, & (x \in \Omega), \end{cases}$$

que modela uma variedade de situações físicas (veja Chen [4]). Mais exatamente, ele mostrou que uma função da forma $v(x,t) = (T-t)^{-1/\alpha}u(x)$ é uma solução de (PP), onde $T < \infty$ é o tempo de "blow-up" de v, se u for uma solução de (CH).

Além disso, uma motivação matemática é a técnica utilizada para resolvê-lo, que combina o Método de "Shooting" com as propriedades da "Aplicação Tempo", designada, neste trabalho, por $T(p)$ (veja definição na página 10).

No Capítulo 2, nosso principal objetivo será demonstrar o seguinte teorema, provado em 1997, por Chen [5]:

Teorema (CH). *Existem números reais $0 < R_1 < R_2,\ R_i = R_i(N,\alpha),\ i = 1,2,$ tais que o problema (CH) tem solução $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ se, e somente se, $R_1 < R \leq R_2$. Além disso, se u é uma solução de (CH) para $R = R_2$, então $u(R_2) = u'(R_2) = 0$.*

Este resultado foi melhorado, em algum sentido, por Hirano e Shioji, em 2001 [23], e também por Gonçalves e Santos, em 2003 [16] (para maiores detalhes veja o Capítulo 2).

Quanto ao problema (M), motivações para seu estudo encontram-se principalmente na Geometria, em que certas métricas podem ser definidas em termos da solução de uma equação de Monge-Ampère.

Neste sentido, podemos citar, como exemplo, a métrica Kähler-Einstein proposta por Calabi [3], definida em função da solução da equação de (M) com $\psi(x,s) = \exp s$ (para maiores detalhes, veja o Capítulo 3).

Como outra aplicação, Loewner e Nirenberg [29], em domínios convexos limitados, associaram a métrica Riemanniana $ds^2 = -(u)^{-1}\sum u_{x_i x_j} d_{x_i} d_{x_j}$, invariante sob transformações projetivas entre tais domínios, onde u é solução positiva do problema (M), com $\psi(x,s) = (-1/s)^{N+2}$.

Resultados de existência e/ou unicidade para o problema (M) têm sido demonstrados. Em 1977, Cheng e Yau [6] estudaram o caso $\psi(x,s) = (-1/s)^{N+2}$ e, em 1996, Lazer e McKenna [28] consideraram $\psi(x,s) = p(x)(-s)^{-\gamma}$ em Ω, onde Ω é um domínio suave, limitado e estritamente convexo em $\mathbb{R}^N$, $p > 0$, $p \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e $\gamma > 1$.

Estes resultados foram melhorados, em algum sentido, em 2005, por Gonçalves e Santos [17] que, combinando o Método de "Shooting" e argumentos de ponto fixo, consideraram o seguinte problema:

$$(GS): \qquad \begin{cases} \det(D^2u) = \psi(x,-u), & B \\ u < 0, & B \\ u = 0, & \partial B, \end{cases}$$

onde $\psi : B \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ é contínua e radialmente simétrica na primeira variável, $B = B_R,\ R = 1$ e $\psi(0,s) > 0$, para todo $s > 0$. Em [17], Gonçalves e Santos concentraram-se no caso em que ψ é singular em $u = 0$.

Aplicações adicionais da equação de Monge-Ampére também podem ser encontradas no Cálculo de Variações e Otimização, devido à sua conexão com problemas de transporte de massa (veja Gutiérrez [21]).

Além disso, de importância para o nosso trabalho é a aplicação do Método de "Shooting" neste problema, que envolve um operador totalmente não-linear (para maiores detalhes quanto à não-linearidade do operador de Monge-Ampère, veja Gilbarg e Trudinger [15]).

Quanto ao problema (GS), considere as seguintes hipóteses:

$$(GS_1) \qquad \psi(x,\cdot) \ \textit{é localmente Lipschitz em } (0,\infty),$$

$$\textit{uniformemente com respeito a } x \in B,$$

$$(GS_2) \qquad \frac{\psi(x,s)}{s^N} \ \textit{é não-crescente em } s > 0, \ \textit{para cada } x \in B,$$

$$(GS_3) \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{\psi(x,s)}{s^N} < 1, \ \textit{uniformemente em } x \in B,$$

$$(GS_4) \qquad \lim_{s\to 0} \frac{\psi(x,s)}{s^N} = \infty \ \textit{uniformemente em } x \in B,$$

$$(GS_5) \qquad \int_{B(0,|x|)} \psi(y,s)dy \geq \mu_s|x|^N, \ x \in B, \ s \in (0,\infty),$$

onde μ_s *é alguma constante positiva.*

O Capítulo 3 deste trabalho terá, como principal objetivo, demonstrar o seguinte teorema, devido a Gonçalves e Santos (2005) [17]:

Teorema (GS). *Suponha* $(GS_1) - (GS_5)$. *Então* (GS) *admite uma solução convexa e radialmente simétrica*

$$u \in C^2(B) \cap C(\overline{B}).$$

Além disso, u *é unicamente determinada desde que, para algum* $b > 0$,

$$\frac{\psi(x,s)}{(s+b)^N} \ \textit{é não-crescente em } s > 0.$$

O resultado acima se aplica a termos $\psi(x,s)$ da forma

$$\zeta(|x|)s^{-p} \quad \text{e} \quad \left[2 + \sin\left(\frac{1}{1-|x|}\right)\right](s^{-p} + s^q),$$

onde $\zeta : [0,1] \to (0,\infty)$ é contínua, $p > -N$ e $0 < q < N$.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos algumas definições e resultados clássicos da Análise necessários para o desenvolvimento de nosso trabalho, assim como alguns resultados relacionados às equações diferenciais que foram usados durante nossas demonstrações.

No Capítulo 2 estudamos o problema (CH), tratando a questão de existência de soluções positivas via Método de "Shooting", combinado com propriedades da aplicação $T : D(T) \subset (0,\infty) \to (0,\infty)$, a qual designaremos por "Aplicação Tempo".

No Capítulo 3 tratamos do problema (GS), que envolve o operador de Monge-Ampère, utilizando também o Método de "Shooting" combinado com argumentos de ponto fixo e princípios de comparação.

Finalizamos o trabalho com os Apêndices 1 e 2, relacionados respectivamente aos Capítulos 2 e 3, onde demonstramos alguns resultados utilizados durante as demonstrações principais.

CAPÍTULO 1

Conceitos e Resultados Básicos

1.1 Resultados Clássicos da Análise

Nesta seção enunciamos algumas definições e resultados necessários à melhor compreensão deste trabalho.

Teorema 1.1 (Kreyszig [26], Ponto Fixo de Banach). *Considere um espaço métrico $X = (X, d)$, onde $X \neq \emptyset$. Suponha que X é completo e seja $T : X \to X$ uma contração sobre X. Então, T tem precisamente um ponto fixo.*

Teorema 1.2 (Bartle [2], Teorema de Arzelá-Àscoli). *Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ e $\mathfrak{F}$ uma coleção de funções contínuas em K com valores em $\mathbb{R}^N$. Então as propriedades seguintes são equivalentes:*

(a) A família $\mathfrak{F}$ é limitada e uniformemente eqüicontínua em K.

(b) Toda seqüência de $\mathfrak{F}$ tem uma subseqüência uniformemente convergente em K.

Teorema 1.3 (Wheeden e Zygmund [42], Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $E \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto mensurável. Seja também $\{f_k\}$ uma seqüência de funções mensuráveis sobre E tais que $f_k \to f$ q.s. em E. Se existe $\phi \in L^1(E)$ tal que $|f_k| \leq \phi$ q. s. em E para todo k, então*

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

A seguir apresentamos algumas definições e resultado sobre a Integral de Riemann-Stieltjes, utilizada na demonstração do Lema 2.10.

Definição 1.4 (Wheeden e Zygmund [42]). Sejam f e ϕ duas funções definidas e finitas sobre um intervalo finito $[a,b]$. Se $\Gamma = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ é uma partição de $[a,b]$, arbitrariamente selecionamos pontos intermediários $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ satisfazendo $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, e escrevemos

$$R_\Gamma = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)[\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})].$$

R_Γ é chamada uma *soma Riemann-Stieltjes* para Γ, e certamente depende dos pontos ξ_i, das funções f e ϕ e do intervalo $[a,b]$.

Se

$$I = \lim_{|\Gamma|\to 0} R_\Gamma, \qquad |\Gamma| = \max_i (x_i - x_{i-1}),$$

existe e é finito, i.e., se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|I - R_\Gamma| < \epsilon$ para qualquer Γ satisfazendo $|\Gamma| < \delta$, então I é chamada a *integral Riemann-Stieltjes* de f com respeito a ϕ sobre $[a,b]$, e denotada por

$$I = \int_a^b f(x)d\phi(x) = \int_a^b f d\phi.$$

Obs.: Se $\phi(x) = x$, $\int_a^b f d\phi$ é justamente a integral de Riemann $\int_a^b f dx$.

A seguir apresentamos as definições e um resultado relacionando as derivadas de Fréchet e de Gâteaux.

Sejam X, Y espaços de Banach, $U \subset X$ aberto e $F : U \to Y$ uma aplicação.

Definição 1.5 (Ambrosetti e Prodi [1]). Seja $u \in U$. Dizemos que F é (Fréchet) diferenciável em u se existe $A \in L(X,Y)$ tal que, se tomarmos

$$R(h) = F(u+h) - F(u) - A(h),$$

teremos

$$R(h) = o(\|h\|), \quad \|h\| \to 0,$$

isto é,

$$\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ quando } \|h\| \to 0.$$

Tal A é unicamente determinada e será chamada a *(Fréchet) diferencial* de F em u e denotada por $A = dF(u) = F'(u)$.

Se F é diferenciável em todo $u \in U$, dizemos que F é diferenciável em U.

Definição 1.6 (Ambrosetti e Prodi [1]). Sejam $F : U \to Y$ e $u \in U$. Dizemos que F é *Gâteaux-diferenciável* em u se existe $A \in L(X,Y)$ tal que para todo $h \in X$ temos

$$\frac{F(u+\varepsilon h) - F(u)}{\varepsilon} \to Ah \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

A aplicação A é unicamente determinada, chamada a *G-diferencial* de F em u e denotada por $d_G F(u)$.

Claramente, se F é Fréchet-diferenciável em u, então F é Gâteaux-diferenciável, e as duas diferenciais coincidem. Quanto à recíproca, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 1.7 (Ambrosetti e Prodi [1]). *Suponha que $F : U \to Y$ seja Gâteaux-diferenciável em U e seja*

$$F'_G : U \to L(X,Y), \ F'_G(u) = d_G F(u),$$

contínua em $u^* \in U$. Então F é Fréchet-diferenciável em u^* e $dF(u^*) = d_G F(u^*)$.

No teorema a seguir, F_u é a derivada parcial (Fréchet) de $F = F(\lambda, u)$ com relação à variável u.

Teorema 1.8 (Ambrosetti e Prodi [1], Teorema da Função Implícita). *Seja $F \in C^k(\Lambda \times U, Z), k \geq 1$, onde Z é um espaço de Banach e Λ, U são subconjuntos abertos de espaços de Banach X e Y. Suponha que $F(\lambda^*, u^*) = 0$ e que $F_u(\lambda^*, u^*) \in Inv(Y, Z)$.*

Então existem vizinhanças Θ de λ^* em X e U^* de u^* em Y e uma aplicação $g \in C^k(\Theta, Y)$ tais que

(i) $F(\lambda, g(\lambda)) = 0, \ \forall \ \lambda \in \Theta$

(ii) $F(\lambda, u) = 0, \ (\lambda, u) \in \Theta \times U^* \Rightarrow u = g(\lambda)$

(iii) $g'(\lambda) = -[F_u(p)]^{-1} \circ F_\lambda(p)$, *onde* $p = (\lambda, g(\lambda))$ *e* $\lambda \in \Theta$.

Definição 1.9 (Kavian [25]). Seja X um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto K de X é *convexo* se

$$\forall \ x, y \in K, \ \forall \ \theta \in [0,1], \ \theta x + (1-\theta) y \in K.$$

Quando K é convexo e $J : K \to \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que J é convexa se

$$\forall \ x, y \in K, \ \forall \ \theta \in [0,1], \ J(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta J(x) + (1-\theta) J(y).$$

Teorema 1.10 (Kavian [25]). *Sejam K um subconjunto convexo e $J : K \to \mathbb{R}$ uma função Gâteaux-derivável. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

- *(i)* J *é convexa.*
- *(ii)* *Para todos* $x, y \in K$ *temos* $J(y) \geq J(x) + \langle J'(x), y - x \rangle$.
- *(iii)* J' *é monótona, isto é,* $\forall \ x, y \in K, \quad \langle J'(y) - J'(x), y - x \rangle \geq 0$.

Lema 1.11 (Peral [33]). *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $(\cdot, \cdot)$ o produto escalar em $\mathbb{R}^N$. Então*

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y) \geq \begin{cases} c_p |x-y|^p, & \text{se } p \geq 2, \\ c_p \dfrac{|x-y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

onde c_p é uma constante.

1.2 Preliminares

Nesta seção enunciamos e/ou demonstramos alguns resultados puramente técnicos ou de caráter geral utilizados durante as demonstrações dos resultados principais.

Começamos com o Lema 1.12 e os Teoremas 1.14 e 1.15, que serão usados na demonstração do Teorema (CH), encontrada no Capítulo 2.

Sejam $\lambda_1 = \lambda_1(R)$ o primeiro autovalor e ϕ_1 a primeira autofunção de

$$(PA): \qquad \begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi, & x \in B_R, \\ \phi(x) = 0, & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

Considere a forma radial de (PA)

$$(PA)_{rad}: \qquad \begin{cases} -(r^{N-1}\phi')' = \tilde{\lambda} r^{N-1}\phi, & 0 < r < R, \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases}$$

e o seguinte conjunto

$$X_R := \{u : (0, R] \to \mathbb{R} \text{ absolutamente contínua } : \ u(R) = 0, \ \int_0^R r^{N-1}|u'|^2 dr < \infty\}.$$

O lema a seguir, que é um caso particular de um resultado demonstrado em Santos [36], em 2003, determina o comportamento da função primeiro autovalor, com respeito a R.

Lema 1.12. *O número*

$$\tilde{\lambda_1} = \tilde{\lambda_1}(R) = \inf_{\substack{u \in X_R \\ u \neq 0}} \frac{\int_0^R r^{N-1}|u'(r)|^2 dr}{\int_0^R r^{N-1}|u(r)|^2 dr},$$

é o menor autovalor positivo de $(PA)_{rad}$. Além disso, o inf *é atingido em uma autofunção correspondente $\psi_1 \in C^1([0, R]) \cap C^2((0, R])$ com $\psi_1 > 0$ em $[0, R)$ e $\psi_1' < 0$ em $(0, R]$. Adicionalmente, $\tilde{\lambda_1}(R)$ é contínua, decrescente em relação a R, $\tilde{\lambda_1}(R) \overset{R\to 0}{\longrightarrow} \infty$ e $\tilde{\lambda_1}(R) \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Corolário 1.13. $\lambda_1(R) = \tilde{\lambda_1}(R)$ *e* $\phi_1(x) = \psi_1(|x|)$, $x \in \overline{B}_R$.

Demonstração. Por definição e, considerando que $\psi_1 \in H_0^1$, temos que

$$\lambda_1(R) = \inf_{u \in H_0^1(B_R)} \frac{\int_{B_R} |\nabla u|^2 dr}{\int_{B_R} u^2 dr} \leq \frac{\int_{B_R} |\nabla \psi_1|^2 dr}{\int_{B_R} {\psi_1}^2 dr} = \tilde{\lambda_1}(R),$$

onde a última igualdade segue do lema anterior.

Por outro lado e, considerando que $\phi_1 \in X_R$ e que ϕ_1 é solução radialmente simétrica de (PA), temos

$$\tilde{\lambda_1} = \tilde{\lambda_1}(R) = \inf_{\substack{u \in X_R \\ u \neq 0}} \frac{\int_0^R r^{N-1} |u'(r)|^2 dr}{\int_0^R r^{N-1} |u(r)|^2 dr} \leq \frac{\int_0^R r^{N-1} |\phi_1{}'(r)|^2 dr}{\int_0^R r^{N-1} {\phi_1}^2 dr} = \lambda_1(R).$$

Assim sendo, $\lambda_1(R) = \tilde{\lambda_1}(R)$. Desta igualdade concluímos que $\phi_1(x) = \psi_1(|x|)$. $\square$

O teorema a seguir, retirado de Smoller e Wasserman [38], 1984, constitui-se na base para a demonstração da Proposição 2.11.

Considere o problema

$$(PVI): \qquad \begin{cases} u'' + \dfrac{(N-1)}{r} u' + g(u) = 0, & r > 0, \\ u(0) = p > 0, \; u'(0) = 0, \end{cases}$$

onde g é C^2.

Considere também $u(\cdot, p)$ uma solução positiva de (PVI) e seja

$$A = \{p \in \mathbb{R}_+^* : u(r,p) = 0 \text{ para algum } r > 0\}.$$

Defina a aplicação $T : A \to \mathbb{R}_+^*$ por

$$T(p) = \min\{r > 0 : u(r,p) = 0\}.$$

A partir de agora denotaremos $A = D(T)$.

Teorema 1.14. *Suponha que $g(s) \geq m > 0$ para $s \geq M$, $m, M \in \mathbb{R}$. Então*

(i) Para qualquer $p > M$, existe um $r_p > 0$ tal que $u(r_p, p) = M$.

(ii) Seja $q = u'(r_p, p)$. Se $qr_p \to -\infty$ quando $p \to \infty$, então o problema

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{(N-1)}{r} u' + g(u) = 0, & 0 < r < R, \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases}$$

tem uma solução positiva, com $R = T(p)$, para algum $p > 0$.

O teorema seguinte apresenta uma síntese de resultados também extraídos de Smoller e Wasserman [38], 1984, essenciais para a demonstração dos principais resultados contidos no Capítulo 2.

Teorema 1.15. *Considere g satisfazendo as condições*

$$(g(s)/s)' > 0 \quad e \quad g''(s) \leq 0, \ \text{para todo } s > 0.$$

Suponha $D(T) \neq \emptyset$. Então

$$\begin{aligned} &(i) \quad D(T) \subset (0, \infty) \ \text{é conexo.} \\ &(ii) \quad T' \leq 0. \end{aligned}$$

As demonstrações dos dois últimos resultados podem ser vistas em Smoller e Wasserman [38], assim como o lema abaixo, a ser usado na demonstração da Proposição 2.11.

Lema 1.16. *Considere $N \geq 3$. Então*

$$\int_1^{(N-1)} \frac{1}{(N-2)^2} [\ln(y - \sqrt{y^2-1})]^2 > \frac{2(N-2)}{N}.$$

Os resultados apresentados no restante desta seção serão utilizados no Capítulo 3.

Lema 1.17. *Seja $v \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ com $v(x) = v(|x|)$, $v < 0$ e $v' \geq 0$. Então v satisfaz*

$$\begin{cases} \det(D^2 v) = \psi(x, -v), & B, \\ v = 0, & \partial B, \end{cases} \tag{1.1}$$

se, e somente se, v satisfaz

$$\begin{cases} (|v'|^{N-1} v')' = N r^{N-1} \psi(r, -v), & (0,1), \\ v(1) = v'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Além disso, (1.2) *ocorre se, e somente se, a função $u := -v$ satisfaz*

$$\begin{cases} -(|u'|^{N-1} u')' = N r^{N-1} \psi(r, u), & (0,1), \\ u(1) = u'(0) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $u > 0$ e $u' \leq 0$.

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}^N$, $x \neq 0$, suponha $v(x) = v(|x|)$, onde $r = |x|$. Segue que

$$v_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dx_i} = \frac{dv}{dr}\frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}} = \frac{dv}{dr}\frac{x_i}{r} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

e

$$\begin{aligned} v_{x_i x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= \frac{\partial v}{\partial x_j \partial x_i} = \left(\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dx_i}\right)_{x_j} = \left(\frac{dv}{dr}\right)_{x_j}\frac{dr}{dx_i} + \frac{dv}{dr}\left(\frac{dr}{dx_i}\right)_{x_j} \\ &= \frac{d^2 v}{dr^2}\frac{dr}{dx_j}\frac{dr}{dx_i} + \frac{dv}{dr}\left(\frac{x_i}{r}\right)_{x_j} \\ &= \frac{d^2 v}{dr^2}\frac{x_j}{r}\frac{x_i}{r} + \frac{dv}{dr}\left(\frac{\delta_{ij} r - x_i \frac{dr}{dx_j}}{r^2}\right) \\ &= v''(r)\frac{x_i x_j}{r^2} + v'(r)\left[\frac{\delta_{ij} r^2 - x_i x_j}{r^3}\right], \quad i, j = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Considere a rotação O_x que aplica $x = (x_1, \ldots, x_N)$ em $x = (r, 0, \ldots, 0)$, onde $r = |x|$. Denotando por O_x^T a transposta de O_x, temos

$$O_x D^2 v(x) O_x^T = \begin{bmatrix} v'' & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{v'}{r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{v'}{r} \end{bmatrix} = A.$$

Desde que a matriz de rotação O_x é ortogonal, i.e., $O_x O_x^T = I$, temos que $D^2 v(x)$ é semelhante a A. Então

$$\det(D^2 v) = \det A = v'' \left(\frac{v'}{r} \right)^{N-1} \stackrel{v' \geq 0}{=} v'' \left| \frac{v'}{r} \right|^{N-1}. \tag{1.4}$$

Por outro lado,

$$\frac{(|v'|^{N-1} v')'}{N r^{N-1}} \stackrel{v' \geq 0}{=} \frac{[(v')^N]'}{N r^{N-1}} = \frac{N (v')^{N-1} v''}{N r^{N-1}} = v'' \left| \frac{v'}{r} \right|^{N-1}. \tag{1.5}$$

Por (1.4) e (1.5),

$$\det(D^2 v) = \frac{1}{N r^{N-1}} (|v'|^{N-1} v')'.$$

Suponha que v satisfaça (1.1).

Como $B = B_1(0)$ e $v = 0$ em ∂B, temos que $v(x) = 0$ quando $| \ x \ |= 1$, i.e., $v(1) = 0$. De $v(x) = v(|x|) = v(|-x|) = v(-x)$, temos

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(-x). \tag{1.6}$$

Sabemos que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = v'(r) \frac{x_i}{r}.$$

Fazendo $-x = y$, temos

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(-x) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) = v'(r) \frac{y_i}{r} = v'(r) \frac{-x_i}{r} = -v'(r) \frac{x_i}{r}.$$

Retomando (1.6), temos

$$v'(r) \frac{x_i}{r} = -v'(r) \frac{x_i}{r} \Rightarrow v'(r) \frac{x_i^2}{r} = -v'(r) \frac{x_i^2}{r},$$

o que nos dá

$$\sum_{i=1}^{N} v'(r)\frac{x_i^2}{r} = \sum_{i=1}^{N} -v'(r)\frac{x_i^2}{r}.$$

E, então,

$$v'(r)\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{r} = -v'(r)\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{r}.$$

Visto que $x \neq 0$,

$$v'(r) = -v'(r), \ r = |x| > 0. \tag{1.7}$$

Desde que $v \in C^2(B)$, v' é contínua em $x = 0$. Tomando o limite em (1.7), temos

$$\lim_{r\to 0} v'(r) = -\lim_{r\to 0} v'(r) \Rightarrow 2\lim_{r\to 0} v'(r) = 0.$$

Logo, por continuidade, $v'(0) = \lim\limits_{r\to 0} v'(r) = 0$.

Vamos agora supor que v satisfaça (1.2).

Como $v(x) = v(|x|) = v(1) = 0$, temos que $v(x) = 0$ quando $|x| = 1$, i.e., quando $x \in \partial B$.

Desta forma mostramos que (1.1) e (1.2) são equivalentes.

Fazendo $-v = u$, obtemos a equivalência entre (1.2) e (1.3). $\square$

Um resultado técnico a ser utilizado na demonstração do Teorema (GS) é

Lema 1.18. *Seja $T > 0$. Se $u, v \in C^1([0,T)) \cap C([0,T])$ são positivas e ambas satisfazem*

$$-(|\ w'\ |^{N-1}\ w')' = Nr^{N-1}\psi(r,w) \ \ em\ (0,T)$$

e

$$\frac{\psi(x,s)}{(s+b)^N} \ \ \text{é não-crescente em } s > 0,$$

para cada $x \in B$ e para algum $b \geq 0$, então

$$\left[\frac{u'(r)}{u(r)+b} - \frac{v'(r)}{v(r)+b}\right](u(r)-v(r)) \geq 0, \ \ r \in (0,T).$$

Confira a demonstração deste resultado no Apêndice 2.

Lema 1.19. *Seja $\beta > -1$. Então existe uma constante $C_\beta > 0$ tal que*

$$\left||x|^\beta x - |y|^\beta y\right| \ \leq C_\beta(|x|^\beta + |y|^\beta)|x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

onde $x, y \neq 0$, se $-1 < \beta < 0$.

Confira a demonstração deste resultado em Santos [36], 2003, 71-72.

CAPÍTULO 2

Método de “Shooting”aplicado a um problema de Dirichlet singular elíptico

2.1 Considerações Iniciais

Recentemente, problemas em que a perturbação não-linear do operador é singular têm merecido muita atenção por parte dos pesquisadores.

Uma razão para isto é que o estudo de problemas estacionários envolvendo não-linearidades singulares, assim como as equações de evolução associadas, descrevem naturalmente vários fenômenos físicos. Aplicações neste sentido surgem, por exemplo, na teoria da condução do calor em materiais eletricamente conduzidos e no estudo de fluidos não-newtonianos.

Problemas de valor de fronteira com não-linearidades singulares surgem também no contexto de catalizadores químicos, superfícies mínimas singulares, no avanço glacial e em vários outros índices geofísicos e industriais (para maiores detalhes veja Radulescu [34], 2000, e referências por ele citadas).

Entre os trabalhos envolvendo singularidade do tipo $f(x,s) \to +\infty$ quando $s \to 0$ para o problema (L), podemos citar Gatica et al. [12], que em 1989 consideraram $f(x,s) = s^{-p},\ p > 0$; Crandall et al. [11], 1977; Lazer e McKenna [27], 1991; Gui e Lin [20], 1993; na abordagem de $f(x,s) = a(x)s^{-\alpha},$ onde $\alpha > 0$ é uma constante e a é uma função contínua não-negativa.

Em 2006, Hernandez et al. [22] estudaram (L) com $f(x,s) = s^{-\alpha} + s^p$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 2^*$, onde $2^* = (N+2)/(N-2)$ se $N > 2$ e $2^* = \infty$ se $N \leq 2$. Problemas (L) envolvendo $f(x,s) = a(x)s^{-\alpha} + b(x)s^{\gamma}$, onde $\alpha > 0$ e $\gamma \geq 0$ são constantes, a e b são funções contínuas não negativas, foram tratados por Sun e Wu [39, 40], em 2001, Yao e Zhao [43], em 2004, e Ghergu e Radulescu [13], em 2005.

Considerando agora problemas (L) com $f(x,s) = \rho a(x)g(s) + \lambda b(x)p(s)$, onde ρ e λ são parâmetros e a, b, g e p são funções contínuas não-negativas, citamos Coclite e Palmieri [8], em 1989, e Zhang [44], em 2005, que estudaram o caso no qual somente $g(s)$ é singular; Cirstea et al. [7], que em 2005 analisaram termos $g := g(x,s)$ e $p := p(x,s)$ mais gerais, onde somente $g(x,s)$ é singular e o recente trabalho de Gonçalves e Santos [37], em 2007, que estudaram o problema com g e/ou p singulares.

Para singularidade do tipo $f(x,s) \to -\infty$ quando $s \to 0^+$, podemos citar Chen [5], que em 1997 trabalhou com $f(x,s) = s - s^{1-\alpha}/\alpha$, $1 < \alpha < 2$, tendo seu resultado melhorado, em algum sentido, por Hirano e Shioji [23], em 2001, que usando Métodos Variacionais consideraram $f(x,s) = s - g(s)$, onde $m_1 s^{-\alpha} \leq g(s) \leq m_2 s^{-\alpha}$, para todo $s > 0$, para algumas constantes m_1, m_2, $0 < \alpha < 1$ e hipóteses adicionais.

Estes dois últimos trabalhos foram melhorados, em 2003, por Gonçalves e Santos [16], que, combinando Métodos Variacionais, argumentos de Ponto Fixo e técnicas de EDO, admitiram classes mais gerais de funções g, quais sejam,

$$\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = \infty, \quad \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s} = 0 \ \text{ e } \ \left(\frac{g(s)}{s}\right)' < 0.$$

Neste capítulo focamos nosso estudo no problema (CH), a saber:

$$(CH): \qquad \begin{cases} -\Delta u = u - \dfrac{u^{1-\alpha}}{\alpha}, & B_R, \\ u > 0, & B_R, \\ u = 0, & \partial B_R, \end{cases}$$

onde $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$, $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ e $1 < \alpha < 2$. Tal problema foi estudado por Chen [5], em 1997, que obteve resultados de existência de solução via Método de "Shooting".

Uma inspiração para o estudo de (CH), do ponto de vista radial, passa necessariamente pelos trabalhos de Gidas et al. [14], Kaper et al. [24], Gui [19] e Cortázar et al. [9, 10].

A forma radial de (CH) é (veja Santos [36], Apêndice D):

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{(N-1)}{r}u' + u - \dfrac{u^{1-\alpha}}{\alpha} = 0, \quad 0 < r < R, \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} -(r^{N-1}u')' = r^{N-1}f(u(r)), \quad 0 < r < R, \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $f(s) = s - (s^{1-\alpha})/\alpha$.

Para estudar o problema (2.1), vamos considerar o seguinte P.V.I. auxiliar:

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{(N-1)}{r}u' + u - \dfrac{u^{1-\alpha}}{\alpha} = 0, \quad r > 0, \\ u(0) = p > 0,\ u'(0) = 0,\ u > 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde p é o chamado parâmetro de “shooting”.

Acerca dos resultados apresentados na próxima seção, iniciamos com um teorema de não-existência de soluções para (CH) em termos do primeiro autovalor de (PA) (veja a seção Preliminares). A seguir estudamos o P.V.I. auxiliar (2.3) e estabelecemos a existência de uma solução para (CH), via método de “shooting”.

2.2 Resultados e Demonstrações

Temos o seguinte resultado de não-existência:

Teorema 2.1. *Existe $R_1 > 0$ tal que o problema (CH) não possui solução $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ para $R \leq R_1$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.12, existe $R_1 > 0$ tal que $\lambda_1(R_1) = 1$. Seja $R < R_1$. Suponha que $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$ seja uma solução para (CH) e ϕ_1 a correspondente autofunção de λ_1. Aplicando o Teorema de Green, temos:

$$\begin{aligned} \lambda_1(R)\int_{B_R} u\phi_1 dx &= -\int_{B_R} u\Delta\phi_1 dx = -\int_{B_R} \Delta u \phi_1 dx \\ &= \int_{B_R} u\phi_1 dx - \int_{B_R} \frac{u^{1-\alpha}}{\alpha}\phi_1 dx < \int_{B_R} u\phi_1 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_1(R)\int_{B_R} u\phi_1 dx < \int_{B_R} u\phi_1 dx,$$

isto é, $\lambda_1(R) < 1$. Mas, novamente pelo Lema 1.12, $\lambda_1(R) \geq \lambda_1(R_1) = 1$, o que é um absurdo. $\square$

Como corolário do Teorema 2.1, para o caso $N = 1$, temos:

Corolário 2.2. *Se $R \leq \pi/2$, então o problema*

$$\begin{cases} -u'' = u - \dfrac{u^{1-\alpha}}{\alpha}, & (-R, R), \\ u > 0, & (-R, R), \\ u(-R) = u(R) = 0, & \end{cases}$$

onde $1 < \alpha < 2$, não tem solução em $C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B}_R)$.

Demonstração. Desde que $\lambda_1(R_1) = \pi^2/4{R_1}^2$, segue que $R_1 = \pi/2$. $\square$

Mostraremos agora um resultado de existência e unicidade de soluções para (2.3).

Lema 2.3. *Para cada $p > 0$, existe uma única $u(r) = u(r,p) \in C^2[0, \epsilon)$, solução de (2.3), para algum $\epsilon > 0$.*

Demonstração. (Retirada de Ni e Nussbaum [31])

Defina $u'(r,p) = v(r,p)$. Então, obter uma solução de (2.3) é equivalente a resolver o sistema de equações integrais (ver detalhes no Apêndice 1):

$$\begin{cases} u(r,p) = p + \displaystyle\int_0^r v(s,p)ds, \\ v(r,p) = -r^{-(N-1)} \displaystyle\int_0^r s^{N-1} f(u(s,p))ds. \end{cases} \tag{2.4}$$

Dado $p_0 > 0$, escolha $B > 0$ tal que $|p - p_0| \leq B$ e $3B < p_0$. Para algum $\epsilon > 0$, defina o espaço de Banach X_ϵ (ver Apêndice 1) por

$$X_\epsilon = (X_\epsilon, \|\cdot\|) = \{(u,v)/u, v : [0,\epsilon] \to \mathbb{R} \text{ são contínuas e } v(0) = 0\},$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro e

$$\|(u,v)\| = \max\{\max_{0 \leq r \leq \epsilon} |u(r)|, \max_{0 \leq r \leq \epsilon} |v(r)|\}. \tag{2.5}$$

Se $(u,v) \in X_\epsilon$, defina $\phi_p : X_\epsilon \to C([0,\epsilon]) \times C([0,\epsilon])$ por

$$\phi_p(u,v)(r) = \left(p + \int_0^r v(s)ds, -r^{-(N-1)} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds\right) := (\phi_p^{(1)}(u,v)(r), \phi_p^{(2)}(u,v)(r))$$

e o espaço de Banach (ver Apêndice 1)

$$C_{p,\epsilon} := \{(u,v) \in X_\epsilon : \max_{0 \leq t \leq \epsilon} |u(t) - p| \leq B, \max_{0 \leq t \leq \epsilon} |v(t)| \leq B\} \subseteq X_\epsilon.$$

Afirmação 1: Existe $\epsilon > 0$ tal que ϕ_p satisfaz

$$\begin{array}{ll} (i) & \phi_p(C_{p,\epsilon}) \subset C_{p,\epsilon}, \\ (ii) & \|\phi_p(u_1,v_1) - \phi_p(u_2,v_2)\| \le k\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|, \\ & \text{para todos } (u_1,v_1),(u_2,v_2) \in C_{p,\epsilon} \text{ e para algum } k \in (0,1). \end{array}$$

Assumindo a Afirmação 1 segue, pelo Teorema 1.1, que ϕ_p tem um único ponto fixo, isto é, existem únicos $(u,v) = (u(\cdot,p), v(\cdot,p)) \in C_{p,\epsilon}$ solução de (2.4).

Desde que $0 < 2B < p - B \le u(r,p) \le p + B,\ r \in [0,\epsilon)$ e $u(r,p) \in C([0,\epsilon))$, segue que $f(u(r,p)) \in C([0,\epsilon))$. Daí,

$$v'(r) = (N-1)r^{-N}\int_0^r s^{N-1} f(u(s,p))ds - f(u(r,p)), \quad r \in (0,\epsilon).$$

Assim, $u'' = v' \in C((0,\epsilon))$.

Resta somente provar que u é C^2 em $r = 0$. Como

$$\begin{aligned} u''(0,p) &= v'(0,p) = \lim_{r\to 0}\frac{v(0+r,p)-v(0,p)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{v(r,p)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{-r^{1-N}\displaystyle\int_0^r s^{N-1}f(u(s,p))ds}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{-\displaystyle\int_0^r s^{N-1}f(u(s,p))ds}{r^N} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{-r^{N-1}f(u(r,p))}{Nr^{N-1}} = -\frac{f(u(0,p))}{N} = -\frac{f(p)}{N}, \end{aligned}$$

temos

$$u''(0,p) = -\frac{f(p)}{N}. \tag{2.6}$$

Por outro lado, desde que $u(\cdot,p)$ satisfaz

$$u'' + \frac{(N-1)}{r}u' + u - \frac{u^{1-\alpha}}{\alpha} = 0, \tag{2.7}$$

segue que

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} u''(r,p) &= \lim_{r\to 0}\left[\frac{(1-N)}{r}u'(r,p) - f(u(r,p))\right] \\ &= (1-N)\lim_{r\to 0}\frac{u'(r,p)}{r} - \lim_{r\to 0} f(u(r,p)) \\ &= (1-N)\lim_{r\to 0}\frac{-r^{1-N}\displaystyle\int_0^r s^{N-1}f(u(s,p))ds}{r} - f(u(0,p)) \\ &= (1-N)\left(-\frac{f(p)}{N}\right) - f(p) = -\frac{f(p)}{N}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

De (2.6) e (2.8),

$$\lim_{r\to 0} u''(r,p) = -\frac{f(p)}{N} = u''(0,p).$$

Portanto, $u \in C^2([0,\epsilon))$.

Para finalizar, vamos demonstrar a Afirmação 1.

Demonstração de (i):

Primeiramente mostraremos que ϕ_p está bem definida, isto é, que $\phi_p^{(i)}(u,v) \in C([0,\epsilon]),\ i = 1, 2$.

Como $v \in C([0,\epsilon))$, claramente $\phi_p^{(1)}(u,v) \in C([0,\epsilon))$, para todo $\epsilon > 0$. Além disto, de $2B < u(r,p) \leq p + B,\ r \in [0,\epsilon)$, segue que $\phi_p^{(2)}(u,v) \in C((0,\epsilon))$, para todo $\epsilon > 0$.

Finalmente, em $r = 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \phi_p^{(2)}(u,v)(r) &= \lim_{r\to 0} \frac{-\displaystyle\int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds}{r^{N-1}} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{-r^{N-1} f(u(r))}{(N-1)r^{N-2}} = \lim_{r\to 0} \frac{-rf(u(r))}{N-1} = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Assim, $\phi_p \in C([0,\epsilon])$, para todo $\epsilon > 0$. Além disto, (2.9) mostra que $\phi_p^{(2)}(u,v)(0) = 0$. Logo, $\phi_p(u,v) \in X_\epsilon$, se $(u,v) \in C_{p,\epsilon}$, para todo $\epsilon > 0$.

Para finalizar a prova de (i), resta apenas mostrar que existe $\epsilon > 0$ apropriado tal que $\phi_p(u,v) \in C_{p,\epsilon}$.

Como $|p - p_0| \leq B$ e $(u,v) \in C_{p,\epsilon}$, segue que

$$\begin{aligned}\|\phi_p(u,v) - (p,0)\| &= \left\| \left(\int_0^r v(s)ds, -\frac{1}{r^{(N-1)}} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds \right) \right\| \\ &\leq \max \left\{ \max_{0\leq r\leq\epsilon} \int_0^r |v(s)|ds, \max_{0\leq r\leq\epsilon} \frac{1}{r^{(N-1)}} \int_0^r s^{N-1} |f(u(s))|ds \right\}.\end{aligned}$$

Além disto,

$$|u - p_0| \leq |u - p| + |p - p_0| \leq B + B = 2B,$$

o que nos leva a

$$\max \left\{ \max_{0\leq r\leq\epsilon} \int_0^r |v(s)|ds, \max_{0\leq r\leq\epsilon} \frac{1}{r^{(N-1)}} \int_0^r s^{N-1} |f(u(s))|ds \right\}$$

$$\leq \max \left(\max_{0\leq r\leq\epsilon} Br, \max_{0\leq r\leq\epsilon} \frac{1}{r^{N-1}} M \cdot \frac{r^N}{N} \right) \leq \max \left(B\epsilon, \frac{M\epsilon}{N} \right),$$

onde $0 < M := \max\{\sup|f(s)|, \sup|f'(s)| \ : \ |s - p_0| \leq 2B\} < \infty$.

Portanto,

$$\|\phi_p(u,v)-(p,0)\| \leq \max\left(B\epsilon, \frac{M\epsilon}{N}\right) = \max\left(B, \frac{M}{N}\right)\epsilon. \tag{2.10}$$

Tomando $0<\epsilon_1<1$ suficientemente pequeno, tal que

$$\max\left(B, \frac{M}{N}\right)\epsilon_1 < B,$$

temos que $\phi_p(u,v) \in C_{p,\epsilon_1}$.

Demonstração de (ii):

Sejam $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in C_{p,\epsilon}$. Então,

$\|\phi_p(u_1,v_1)-\phi_p(u_2,v_2)\| =$

$$= \left\|\left(\int_0^r [v_1(s)-v_2(s)]ds, \frac{1}{r^{(N-1)}}\int_0^r s^{N-1}[-f(u_1(s))+f(u_2(s))]ds\right)\right\|$$

$$\leq \max\left\{\max_{0\leq r\leq\epsilon}\left(\int_0^r |v_1(s)-v_2(s)|ds\right), \max_{0\leq r\leq\epsilon}\left(\frac{1}{r^{(N-1)}}\int_0^r s^{N-1}|f(u_1(s))-f(u_2(s))|ds\right)\right\}.$$

Logo,

$$\|\phi_p(u_1,v_1)-\phi_p(u_2,v_2)\| \leq \max_{0\leq r\leq\epsilon}\int_0^r |v_1(s)-v_2(s)|ds \tag{2.11}$$

e

$$\|\phi_p(u_1,v_1)-\phi_p(u_2,v_2)\| \leq \max_{0\leq r\leq\epsilon}\frac{1}{r^{(N-1)}}\int_0^r s^{N-1}|f(u_1(s))-f(u_2(s))|ds. \tag{2.12}$$

Desde que, por (2.5),

$$\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\| = \max\{\max_{0\leq r\leq\epsilon}|u_1(r)-u_2(r)|, \max_{0\leq r\leq\epsilon}|v_1(r)-v_2(r)|\},$$

retomando (2.11),

$$\max_{0\leq r\leq\epsilon}\int_0^r |v_1(s)-v_2(s)|ds \leq \epsilon\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|.$$

Assim, para $\epsilon=\epsilon_1$,

$$\|\phi_p(u_1,v_1)-\phi_p(u_2,v_2)\| \leq \epsilon_1\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|. \tag{2.13}$$

Por outro lado, desde que $B \leq u_i(r) \leq p_0+2B,\ r\in[0,\epsilon), i=1,2$, segue que $f(u_i(s))$ está bem definida, é contínua em $[0,\epsilon]$ e derivável em $(0,\epsilon),\ i=1,2$. Portanto, pelo Teorema do Valor Médio,

$$|f(u_1(s))-f(u_2(s))| \leq |f'(\theta(s))||u_1(s)-u_2(s)|, \tag{2.14}$$

onde $\theta(s) \in (\min\{u_1(s), u_2(s)\}, \max\{u_1(s), u_2(s)\})$.

É claro que $B \leq \theta(s) \leq p_0 + 2B$. Logo, $|f'(\theta)| \leq M$.

Então de (2.14),

$$|f(u_1(s)) - f(u_2(s))| \leq M\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|.$$

Portanto, retomando (2.12),

$$\max_{0 \leq r \leq \epsilon} \frac{1}{r^{(N-1)}} \int_0^r s^{N-1}|f(u_1(s)) - f(u_2(s))|ds$$

$$\leq \max_{0 \leq r \leq \epsilon} M\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\| \frac{r^N}{Nr^{N-1}} \leq \frac{M\epsilon}{N}\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Tome $\epsilon_2 > 0$ tal que $k_{\epsilon_2} = \dfrac{M\epsilon_2}{N} \in (0, 1)$. Assim,

$$\|\phi_p(u_1, v_1) - \phi_p(u_2, v_2)\| \leq k_{\epsilon_2}\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|. \tag{2.15}$$

Tomando agora $\epsilon_3 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ temos, de (2.13) e (2.15), que ϕ_p é uma contração em C_{p,ϵ_3}, isto é, o item (*ii*) está provado para $\epsilon = \epsilon_3$. □

Seja $M_p := \sup\{r \in [0, \infty) : (2.3) \text{ tem uma única solução positiva em } [0, r)\} \in (0, \infty]$.

Lema 2.4. *A solução única* $u(\cdot, p)$ *do problema* (2.3)*, dada pelo lema anterior, é tal que* $u \in C^2([0, M_p)) \times C^1((0, \infty))$.

Demonstração. (Retirada e adaptada de Ni e Nussbaum [31]).

Vamos primeiramente mostrar que u é C^1 em p.

Defina

$$\psi : C([0, \epsilon]) \times C([0, \epsilon]) \times (0, \infty) \to C([0, \epsilon]) \times C([0, \epsilon]),$$

onde $\epsilon > 0$ é dado pelo Lema 2.3, tal que

$$\psi(u, v, p) = (u, v) - \phi(u, v, p),$$

onde

$$\phi(u, v, p) = \left(p + \int_0^r v(s)ds, -r^{-(N-1)} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds\right) = \phi_p(u, v),$$

foi definida na demonstração do lema anterior.

Então

$$\psi(u, v, p) = \left(u - p - \int_0^r v(s)ds, v + \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds\right).$$

Dado $p_0 > 0$, escolha $B > 0$ tal que $|p - p_0| \leq B$ e $3B < p_0$. Sejam (u, v, p), $h = (h_1, h_2, h_3) \in C([0, \epsilon)) \times C([0, \epsilon)) \times (p_0 - B, p_0 + B)$.

Então,

$d_G\psi(u,v,p)h=$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{\psi((u,v,p)+\delta(h_1,h_2,h_3))-\psi(u,v,p)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\psi(u+\delta h_1, v+\delta h_2, p+\delta h_3)-\psi(u,v,p)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{\left(\delta h_1(r)-\delta h_3-\int_0^r \delta h_2(s)ds,\ \delta h_2(r)+\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}[f((u+\delta h_1)(s))-f(u(s))]ds,\right)}{\delta}$$

$$= \left(h_1(r)-h_3-\int_0^r h_2(s)ds,\ h_2(r)+\lim_{\delta\to 0}\frac{\int_0^r s^{N-1}[f((u+\delta h_1)(s))-f(u(s))]ds}{r^{N-1}\delta}\right). \quad (2.16)$$

Vamos agora verificar as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Para cada $r\in(0,\epsilon)$ fixo, defina

$$g_\delta(s)=\frac{s^{N-1}[f((u+\delta h_1)(s))-f(u(s))]}{\delta},\ s\in(0,r).$$

(i) $\{g_\delta(s)\},\ \delta>0$, é seqüência de funções mensuráveis, pois $g_\delta(s)$ é contínua em $(0,r)$ com $r\le\epsilon$.

(ii) $\lim_{\delta\to 0} g_\delta(s)=s^{N-1}f'(u(s))h_1(s)$.

De fato. Desde que $2B\le u(r)\le p_0+B$, para todo $0\le s\le r$, temos que $f(u(s))$ está bem definida, é contínua em $[0,r]$ e derivável em $(0,r)$.

Portanto, pelo Teorema do Valor Médio,

$$|f((u+\delta h_1)(s))-f(u(s))|\le|f'(\theta_\delta)||\delta h_1|,$$

onde $\theta_\delta\in(\min_{0\le s\le r}\{u(s),(u+\delta h_1)(s)\},\max_{0\le s\le r}\{u(s),(u+\delta h_1)(s)\})$.

Assim,

$$B\le\theta_\delta\le p_0+B+\mid h_1\mid_{C([0,\epsilon])},\quad \text{para } \delta<\min\{1,\frac{B}{\mid h_1\mid_{C([0,\epsilon])}}\}.$$

Então

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} g_\delta(s) &= \lim_{\delta\to 0}\frac{s^{N-1}[f((u+\delta h_1)(s))-f(u(s))]}{\delta}\\ &= s^{N-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{f'(\theta_\delta)\delta h_1(s)}{\delta}=s^{N-1}f'(u(s))h_1(s).\end{aligned}$$

(iii) Vamos mostrar que g_δ é dominada por uma função em $L^1([0,t])$.

$$\begin{aligned}|g_\delta(s)| &= \frac{s^{N-1}}{\delta}|f((u+\delta h_1)(s))-f(u(s))|\le|f'(\theta_\delta)||\delta h_1|\\ &\le \delta[1-\frac{(1-\alpha)}{\alpha}B^{-\alpha}]\mid h_1\mid.\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\frac{\frac{1}{r^{N-1}}\displaystyle\int_0^r s^{N-1}[f((u+\delta h_1)(s))-f(u(s))]ds}{\delta}\\
&=\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{[f((u+\delta h_1)(s))-f(u(s))]ds}{\delta}\\
&=\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}d_G f(u)(s)h_1(s)ds.
\end{aligned}$$

Retomando (2.16),

$d_G\psi(u,v,p)(h_1,h_2,h_3)$

$$=\left(h_1(r)-h_3-\int_0^r h_2(s)ds,\ h_2(r)+\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}f'(u(s))h_1(s)ds\right),$$
$$\forall\ h\in C([0,\epsilon])\times C([0,\epsilon])\times((0,\infty)).$$

Desde que $f\in C^2((0,r])$, $u\in C^2([0,r])$ e $B\le u(s)\le p+B$, $0\le s\le r$, segue que $d_G\psi(u,v,p)$ é contínua para todo $(u,v,p)\in C([0,\epsilon])\times C([0,\epsilon])\times(0,\infty)$, o que implica que $\psi(u,v,p)$ é C^1, pelo Teorema 1.7.

Para concluir a demonstração, utilizaremos o Teorema 1.8.

Temos satisfeitas as condições

(a) $\psi\in C^1$, $\forall\ (u,v,p)\in C([0,\epsilon])\times C([0,\epsilon])\times(0,\infty)$.

(b) $\psi(u_0,v_0,p_0)=0$ sobre a solução de (2.3), pois

$$u_0=p_0+\int_0^r v_0(s,p)ds \quad \text{e} \quad v_0=-\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}f(u(s,p_0))ds.$$

(c) $\psi_x(u_0,v_0,p_0)\neq 0$, onde $x=(u,v)$. Pelas contas anteriores,

$$\psi_x(u_0,v_0,p_0)(h_1,h_2)=\left(h_1(r)-\int_0^r h_2(s)ds, h_2(t)+\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^r s^{N-1}f'(u_0(s))h_1(s)ds\right).$$

Logo, $\psi_x(u_0,v_0,p_0)\neq 0$. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças Θ de p_0 em $(0,\infty)$, U de (u_0,v_0) em $C([0,\epsilon])\times C([0,\epsilon])$ e uma aplicação $g\in C^1(\Theta,C([0,\epsilon])\times C([0,\epsilon]))$, tais que

(i) $\psi(g(p),p)=0$, $\forall\ p\in\Theta$

(ii) $\psi(u,v,p)=0$, $(u,v,p)\in\Theta\times U\Rightarrow(u,v)=g(p)=(g_1(p),g_2(p))$.

Disto segue que u é C^1 em p.

Considerando $u(\cdot,p):[0,M_p)\to\mathbb{R}$ sendo a solução de (2.3), segue diretamente que $u(\cdot,p)\in C^2([0,M_p))$, isto é, u é C^2 em r. □

Consideremos agora a função energia, definida por

$$E(r) = \frac{1}{2}[u'(r)]^2 + F(u(r)),$$

onde

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt = \frac{s^2}{2} - \frac{s^{2-\alpha}}{\alpha(2-\alpha)} \quad \text{e} \quad f(s) = s - \frac{s^{1-\alpha}}{\alpha}$$

e mostraremos que esta é uma função não-crescente em r.

Lema 2.5. *Seja $u > 0$ satisfazendo* (2.7) *em* $[r_1, r_2]$, $\quad r_1, r_2 \geq 0$.

Então,

$$E(r_2) - E(r_1) = -(N-1)\int_{r_1}^{r_2} [u'(r)]^2 \frac{dr}{r}. \tag{2.17}$$

Demonstração. Multiplicando (2.7) por u' e integrando de r_1 a r_2, temos

$$\int_{r_1}^{r_2} u''u'dr + (N-1)\int_{r_1}^{r_2} u'^2 \frac{dr}{r} + \int_{r_1}^{r_2} uu'dr - \frac{1}{\alpha}\int_{r_1}^{r_2} u^{1-\alpha}u'dr = 0.$$

Assim,

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[u'' + u - \frac{u^{1-\alpha}}{\alpha}\right] u'dr = -(N-1)\int_{r_1}^{r_2} [u'(r)]^2 \frac{dr}{r}. \tag{2.18}$$

Mas

$$\int_{r_1}^{r_2} u''u' = \frac{1}{2}[u'(r)]^2 \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{2}[u'(r_2)]^2 - \frac{1}{2}[u'(r_1)]^2$$

e

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[u - \frac{u^{1-\alpha}}{\alpha}\right] u'dr = \left[\frac{1}{2}u^2 - \frac{u^{2-\alpha}}{\alpha(2-\alpha)}\right]\Bigg|_{r_1}^{r_2} = F(u(r_2)) - F(u(r_1)).$$

Daí, retomando (2.18),

$$\frac{1}{2}[u'(r_2)]^2 + F(u(r_2)) - \left[\frac{1}{2}[u'(r_1)]^2 + F(u(r_1))\right] = -(N-1)\int_{r_1}^{r_2} [u'(r)]^2 \frac{dr}{r},$$

ou seja,

$$E(r_2) - E(r_1) = -(N-1)\int_{r_1}^{r_2} [u'(r)]^2 \frac{dr}{r}.$$

□

Definimos constantes positivas p_1, p_2 como segue:

$$p_1 := \inf\{s > 0; f(s) > 0\} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{2.19}$$

$$p_2 := \inf\{s > 0; F(s) > 0\} = \left(\frac{2}{\alpha(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.20}$$

O seguinte lema mostra que a solução positiva u de (2.3) é limitada.

Lema 2.6. *Seja* $u = u(\cdot, p)$ *uma solução positiva de* (2.3). *Então* $u(r,p) \leq \max\{p, p_2\} := M_\infty$, *para todo* $r \in [0, M_p)$.

Demonstração. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: $p = p_1$.

Neste caso, $u(r) = p_1$ para todo $r > 0$ pois, pelo Lema 2.3, o problema (2.3) tem solução única em $p = p_1$. Assim sendo, como $p_1 > p_2$, $u(r) \leq \max\{p, p_2\}$.

Caso 2: $p \neq p_1$.

Afirmação 1: Se $f(u(r_c)) = 0$, para algum $r_c > 0$, então $u'(r_c) \neq 0$.

De fato, isto segue do teorema de unicidade de soluções para problemas de valor inicial, visto que p_1 é solução de equilíbrio de (2.3).

Afirmação 2: Os pontos críticos de uma solução não-constante são isolados.

De fato. Seja r_0 ponto crítico de u. De (2.7),

$$u''(r_0) = -u(r_0) + \frac{u^{1-\alpha}(r_0)}{\alpha} = -f(u(r_0)).$$

Pela Afirmação 1, $f(u(r_0)) \neq 0$. Suponha, sem perda de generalidade, que $u''(r_0) > 0$.

Desde que $u \in C^2([0, M_p))$, $u''(r) > 0$, para todo $r \in (r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$. Assim,

$$u'(r) = u'(r) - u'(r_0) = \int_{r_0}^{r} u''(t)dt, \quad r \in (r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon),$$

onde $u'(r) > 0$, se $r_0 \in (r_0, r_0 + \epsilon)$ ou $u'(r_0) < 0$, se $r_0 \in (r_0 - \epsilon, r_0)$. Isto mostra a Afirmação 2.

Como conseqüência da Afirmação 2 e do Lema 2.5, segue que E é estritamente decrescente. Além disto, de u solução de (2.3),

$$u''(0) = -\frac{f(p)}{N}. \tag{2.21}$$

Caso 2.1: $p > p_1$.

Neste caso, $f(p) > f(p_1) = 0$. Daí, de (2.21) e $u \in C^2([0, M_p))$, $u''(r) < 0$, $r \in [0, \epsilon)$. Disto temos que $u(r) < p$, $r \in [0, \epsilon)$, ou seja, u atinge um máximo local no zero. Se existir $r_1 > \epsilon$ tal que $u(r_1) = p$,

$$E(r_1) = \frac{1}{2}[u'(r_1)]^2 + F(u(r_1)) \geq F(u(r_1)) = F(p) = E(0),$$

contradizendo o fato de que $E(r)$ é estritamente decrescente. Assim sendo, $u(r) < p$, para todo $r > 0$.

Caso 2.2: $p < p_1$.

Neste caso, $f(p) < 0$ e então $u''(r) > 0,\ r \in [0, \epsilon)$. Disto temos que $u(r) > p,\ r \in [0, \epsilon)$, ou seja, u atinge um mínimo local no zero. Suponha que exista $r_2 > 0$ tal que $u(r_2) = p_2$.

Então teríamos

$$E(r_2) = \frac{1}{2}[u'(r_2)]^2 + F(u(r_2)) = \frac{1}{2}[u'(r_2)]^2 \geq 0 > E(0),$$

pois

$$E(0) = \frac{1}{2}[u'(0)]^2 + F(p) < 0.$$

Isto contradiz o fato que E é estritamente decrescente. Portanto, dos Casos 2.1 e 2.2, segue que $u(r) \leq \max\{p, p_2\}$. □

Os lemas anteriores nos permitem mostrar:

Lema 2.7. *Seja $u(\cdot, p)$ solução de* (2.3)*. Então $M_p = \infty$ ou $u(M_p, p) = 0$, i.e., $M_p = T(p)$ (veja definição de $T(p)$ na pág. 10).*

Demonstração. Suponha M_p finito. Do Lema 2.5, segue que

$$\frac{1}{2}[u'(r)]^2 \leq \frac{1}{2}u'(0) + F(u(0)) - F(u(r)), \quad r \in [0, M_p). \tag{2.22}$$

Por outro lado, do Lema 2.6 segue que

$$F(p_1) \leq F(u(r)) \leq F(M_\infty), \quad r \in [0, M_p).$$

Logo, por (2.22), u' é limitada.

Se existem $r_n, s_n \in (0, M_p),\ r_n, s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M_p^-$ tais que $u(r_n, p) \to u_1$ e $u(s_n, p) \to u_2$ com $u_1 \neq u_2$, então, pelo Teorema do Valor Médio,

$$0 < |u_1 - u_2| = \lim_{n\to\infty} |u(r_n, p) - u(s_n, p)| \leq \lim_{n\to\infty} |u'(\theta_n)||r_n - s_n| = 0,$$

para algum $\theta_n \in (\min\{r_n, s_n\}, \max\{r_n, s_n\})$.

Mas isso é um absurdo. Portanto, existe

$$\lim_{r\to M_p^-} u(r, p) = u(M_p, p) \geq 0.$$

Suponha que $u(M_p, p) > 0$. Então,

$$|u''(r, p)| \leq \frac{2(N-1)}{M_p}|u'|_{C[\frac{M_p}{2}, M_p]} + M_\infty + \frac{{M_\infty}^{1-\alpha}}{\alpha}, \quad r \in [\frac{M_p}{2}, M_p].$$

Por outro lado, de $u \in C^2([0, M_p))$, segue que $u''(\cdot, p)$ é limitada.

Pelo raciocínio anterior, existe

$$\nu = \lim_{r \to M_p^-} u'(r, p).$$

Podemos então considerar o P.V.I.

$$\begin{cases} -(r^{N-1}w')' = r^{N-1}f(w(r)), & r > M_p, \\ w(M_p) = \hat{p}, \ w'(M_p) = \nu, & w > 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

onde $\hat{p} = u(M_p, p)$. Raciocinando de forma análoga à prova do Lema 2.3, obtemos uma única solução de (2.23) que estende a solução $u(\cdot, p)$ de

$$\begin{cases} -(r^{N-1}u')' = r^{N-1}f(u(r)), & r > 0, \\ u(0) = p, \ u'(0) = 0, \end{cases}$$

contradizendo a definição de M_p.

Portanto, $u(M_p, p) = 0$. □

O seguinte teorema nos dá uma condição suficiente para a existência global de solução positiva $u(\cdot, p)$ (*i.e.*, $M_p = \infty$).

Teorema 2.8. *Suponha que $u = u(\cdot, p)$ seja uma solução de* (2.3)*. Se $0 < p < p_2$, então $M_p = \infty$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.7, basta provar que $u(r, p) > 0$ em $[0, \infty)$.

De fato, se existe $r^* > 0$ tal que $u(r^*, p) = 0$, então devemos ter $E(r^*) < E(0)$. Mas

$$E(r^*) = \frac{1}{2}[u'(r^*, p)]^2 + \underbrace{F(u(r^*, p))}_{F(0)=0} = \frac{1}{2}[u'(r^*, p)]^2 \geq 0$$

e

$$E(0) = \frac{1}{2}[\underbrace{u'(0, p)}_{0}]^2 + F(\underbrace{u(0, p)}_{p}) = F(p) < 0, \text{ quando } 0 < p < p_2.$$

Logo, não podemos ter $E(r^*) \geq 0$, já que $E(0) < 0$. □

Pelo Teorema 2.8, uma condição necessária para que tenhamos $M_p < \infty$ é que seja $p \geq p_2$.

Observe que a solução $u(\cdot, p)$ de (2.3) produz a solução desejada para o problema (CH) precisamente se $T(p) = R$, ou seja, se $M_p = R$.

A seguir estabeleceremos, na Proposição 2.11, uma condição suficiente para que M_p seja finito, isto é, para que o problema (CH) tenha solução para algum $R > 0$ apropriado.

Neste sentido, enunciaremos e provaremos dois lemas indispensáveis para a demonstração da Proposição 2.11.

Para os resultados que seguem, consideremos dados $p > \overline{p} > p_1,\ u(\cdot,p)$ solução de (2.3) e definamos $q(p) = u'(T_{\overline{p}},p)$ e $T_{\overline{p}} = T_{\overline{p},p}$ o "tempo"que a solução $u(\cdot,p)$ de (2.3), partindo de $t = 0$, leva para atingir a reta $u = \overline{p}$.

Lema 2.9. $u'(r,p) < 0,\ r \in (0, T_{\overline{p}})$.

Demonstração. Desde que $u(0,p) = p > p_2 > p_1$, por (2.6) temos

$$u''(0,p) = -\frac{f(p)}{N} < 0,$$

e de (2.7) podemos concluir que $u'(r,p) < 0$ em algum intervalo $[0,\delta)$, pois temos, também da prova do Lema 2.3,

$$u''(0,p) = \lim_{r\to 0} \frac{u'(r,p)}{r} < 0.$$

Desta forma, se não existem pontos críticos em $(0, T_{\overline{p}})$, é óbvio que $u'(r,p) < 0$ para $r \in (0, T_{\overline{p}})$.

Vamos supor, por contradição, que exista $\xi \in (0, T_{\overline{p}})$ sendo o primeiro ponto crítico de u.

Isto é, $u'(\xi,p) = 0$ e $u'(r,p) < 0,$ para todo $r \in (0,\xi)$.

Daí,

$$u''(\xi,p) = \lim_{r\to\xi} \frac{u'(r,p) - u'(\xi,p)}{r-\xi} = \lim_{r\to\xi} \frac{u'(r,p)}{r-\xi} \geq 0.$$

Assim, da equação (2.7), temos

$$u''(\xi,p) + \frac{(N-1)}{r} u'(\xi,p) + f(u(\xi,p)) = 0,$$

o que nos leva a

$$f(u(\xi,p)) \leq 0.$$

Portanto, de acordo com o comportamento de f, temos $\overline{p} \leq u(\xi,p) \leq p_1 < p_2$, o que é um absurdo. $\square$

Lema 2.10. *Seja $u = u(\cdot,p)$ solução de (2.3). Então*

$$-q(p) T_{\overline{p},p} \geq -(N-2)(p-\overline{p}) + \frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}} \int_{\overline{p}}^{p} {T_\xi}^2 d\xi,$$

para cada $\overline{p} > p_1$.

Demonstração. Considere $\overline{p} < \xi_s < \xi_{s-1} < \cdots < \xi_1 < \xi_0 = p$. Se T_{ξ_j} denota o "tempo"que a solução $u(\cdot,p)$ leva para interceptar $u = \xi_j$, então, pelo Lema 2.9, $T_{\xi_j} = u^{-1}(\xi_j,p)$.

Tomando $T_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{T_{\overline{p}}} rf(u(r,p))dr &= \sum_{j=0}^{s-1}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} rf(u(r,p))dr + \int_{T_{\xi_s}}^{T_{\overline{p}}} rf(u(r,p))dr \\ &\geq \sum_{j=0}^{s-1}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} rf(u(r,p))dr. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Desde que $f(s)/s$ é crescente e $u(r,p) \geq \overline{p},\ r \in [0, T_{\overline{p}}]$,

$$\begin{aligned}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} rf(u(r,p))dr &= \int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} r\frac{f(u(r,p))}{u(r,p)}u(r,p)dr \geq \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} ru(r,p)dr \\ &\geq \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}}\int_{T_{\xi_j}}^{T_{\xi_{j+1}}} \xi_{j+1}rdr = \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}}\xi_{j+1}\frac{(T_{\xi_{j+1}})^2 - (T_{\xi_j})^2}{2}.\end{aligned}$$

Logo, retomando (2.24),

$$\begin{aligned}\int_0^{T_{\overline{p}}} rf(u(r,p))dr &\geq \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}}\sum_{j=0}^{s-1}\xi_{j+1}\frac{(T_{\xi_{j+1}})^2 - (T_{\xi_j})^2}{2} \\ &= \frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}}[\xi_1 {T_{\xi_1}}^2 + \xi_2({T_{\xi_2}}^2 - {T_{\xi_1}}^2) + \cdots + \xi_s({T_{\xi_s}}^2 - (T_{\xi_{s-1}})^2)] \\ &= \frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}}[{T_{\xi_1}}^2(\xi_1 - \xi_2) + {T_{\xi_2}}^2(\xi_2 - \xi_3) + \cdots + (T_{\xi_{s-1}})^2(\xi_{s-1} - \xi_s) + {T_{\xi_s}}^2\xi_s] \\ &\geq \frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}}[{T_{\xi_1}}^2(\xi_1 - \xi_2) + {T_{\xi_2}}^2(\xi_2 - \xi_3) + \cdots + (T_{\xi_{s-1}})^2(\xi_{s-1} - \xi_s)]\end{aligned}$$

e esta soma converge, quando $s \to \infty$, para a integral de Riemann-Stieltjes

$$\frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}}\int_{\overline{p}}^{p} {T_\xi}^2 d\xi.$$

Logo,

$$\int_0^{T_{\overline{p}}} rf(u(r,p))dr \geq \frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}}\int_{\overline{p}}^{p} {T_\xi}^2 d\xi. \tag{2.25}$$

Por outro lado, de

$$-(vr)' = -v'r - v \quad \text{e} \quad v' + \frac{N-1}{r}v + f(u) = 0,$$

obtemos

$$-(vr)' = (N-2)v + rf(u).$$

Então, integrando essa equação de $r = 0$ até $r = T_{\overline{p}}$,

$$\begin{aligned} -v(T_{\overline{p}})T_{\overline{p}} &= (N-2)u(T_{\overline{p}}) - (N-2)u(0) + \int_0^{T_{\overline{p}}} rf(u(r))dr \\ &= (N-2)\overline{p} - (N-2)p + \int_0^{T_{\overline{p}}} rf(u(r))dr. \end{aligned}$$

Daí,

$$-q(p)T_{\overline{p}} = -(N-2)(p-\overline{p}) + \int_0^{T_{\overline{p}}} rf(u(r))dr.$$

Portanto, por (2.25),

$$-q(p)T_{\overline{p}} \geq -(N-2)(p-\overline{p}) + \frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}} \int_{\overline{p}}^{p} {T_\xi}^2 d\xi. \tag{2.26}$$

□

Estabeleceremos, agora, uma condição suficiente para que tenhamos M_p finito, para algum $p > p_1$. Isto é, pelo Teorema 1.14 é suficiente mostrarmos que o limite em (2.26) converge ao infinito quando p tende ao infinito.

Proposição 2.11. *$D(T) \neq \emptyset$. Isto é, existe $p > 0$ suficientemente grande tal que $M_p = T(p)$.*

Demonstração. Consideremos os seguintes casos:

Caso (i): $N \leq 3$.

Caso (ii): $N > 3$.

Demonstração do Caso (i):

Observemos agora que, como

$$\frac{f(s)}{s} \to 1 \text{ quando } s \to \infty, \tag{2.27}$$

temos

$$-(r^{N-1}v(r))' = r^{N-1}f(u(r)) \leq r^{N-1}u(r) \leq r^{N-1}p.$$

Integrando de 0 a r,

$$-r^{N-1}v(r) \leq \frac{pr^N}{N}, \quad \text{ou seja,} \quad -v(r) \leq \frac{pr}{N}.$$

Integrando novamente de $r = 0$ a $r = T_\xi$, temos

$$-u(T_\xi) + u(0) \leq \frac{p{T_\xi}^2}{2N},$$

e, então,

$$T_\xi{}^2 \geq \frac{2N(p-\xi)}{p}.$$

Substituindo em (2.26), obtemos

$$\begin{aligned} -q(p)T_{\overline{p}} &\geq -(N-2)(p-\overline{p}) + \frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}} \int_{\overline{p}}^{p} \frac{2N}{p}(p-\xi)d\xi \\ &= -(N-2)(p-\overline{p}) + \frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}} \left[2N(p-\overline{p}) - \frac{2N}{p}\left(\frac{p^2}{2} - \frac{\overline{p}^2}{2}\right)\right] \\ &= -(N-2)p + (N-2)\overline{p} + \frac{f(\overline{p})Np}{2\overline{p}} - f(\overline{p})N - \frac{f(\overline{p})N\overline{p}}{2p} \\ &= \left[\frac{f(\overline{p})N}{2\overline{p}} - (N-2)\right]p + (N-2)\overline{p} - f(\overline{p})N - \frac{f(\overline{p})N\overline{p}}{2p}. \end{aligned}$$

Por (2.27), existe $\overline{p} > p_1$ tal que $f(\overline{p})/\overline{p} > 2/3$. Assim,

$$\frac{f(\overline{p})N}{2\overline{p}} > (N-2), \ \forall\ N = 1, 2, 3.$$

Isto é,

$$-q(p)T_{\overline{p}} \to \infty \text{ quando } p \to \infty.$$

Demonstração do Caso (ii): Desde que $p > 0$, temos

$$T_\xi = \int_p^\xi \frac{du}{v} = \int_\xi^p \frac{du}{-v}. \tag{2.28}$$

De fato. Do Lema 2.9 temos que existe w tal que $w = u^{-1}$, isto é, $w \circ u = I$. Daí, $w'(u) = 1/u'$.

De $u(0) = p$ e $u(T_\xi) = \xi$, temos $w(p) = 0$ e $w(\xi) = T_\xi$. Assim,

$$T_\xi = w(\xi) - w(p) = \int_p^\xi w'(u)du = \int_p^\xi \frac{1}{u'}du = \int_\xi^p \frac{du}{-v}, \quad \overline{p} \leq \xi \leq p.$$

Relembrando que $\overline{p} \leq \xi \leq u(r,p) \leq p,\ r \in [0, T_\xi]$, e que $u'(r,p) < 0,\ r \in [0, T_\xi]$ (Lema 2.9), segue que

$$f(u(\tau,p)) \geq \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}} u(\tau,p) \geq \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}} u(r,p),\ 0 \leq \tau \leq r \leq T_\xi.$$

Desde que

$$-r^{N-1}v = \int_0^r \tau^{N-1} f(u(\tau))d\tau \geq \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}} \int_0^r \tau^{N-1} u(r)d\tau,$$

obtemos

$$-\frac{v^2(\tau)}{\tau} \leq \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}} \frac{u(r)v(\tau)}{N}. \tag{2.29}$$

A seguir, desde que $F' = f$,

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{2} + F(u) - F(p) &= \frac{[v(r)]^2}{2} + F(u(r)) - \frac{[v(0)]^2}{2} - F(u(0)) = \int_0^r E'(s)ds \\ &= \int_0^r vv' + F'v = -\int_0^r \frac{(N-1)}{\tau} v^2 d\tau.\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{v^2}{2} + F(u) = F(p) - (N-1)\int_0^r \frac{v^2}{\tau} d\tau,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{2} &= F(p) - F(u) - (N-1)\int_0^r \frac{v^2}{\tau} d\tau \\ &= \int_u^p f(s)ds - (N-1)\int_0^r \frac{v^2}{\tau} d\tau. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Por (2.27),

$$\int_u^p f(s)ds \leq \int_u^p sds = \left.\frac{s^2}{2}\right|_u^p = \frac{p^2}{2} - \frac{u^2}{2} \tag{2.31}$$

e, de (2.29),

$$\begin{aligned}-(N-1)\int_0^r \frac{v^2}{t} dt &\leq \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}} \frac{(N-1)}{N} u(r) \int_0^r v(t)dt \\ &= \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}} \frac{(N-1)}{N} u(r)(u(r) - p),\ r \in [0, T_\xi]\ . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Portanto, retomando (2.30) e usando (2.31) e (2.32),

$$\frac{v^2}{2} \leq \frac{p^2}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}} \frac{(N-1)}{N} u(r)(p - u(r)).$$

Daí,

$$|v(r)| \leq \sqrt{2\left\{\frac{1}{2}(p^2 - u(r)^2) - \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}} \frac{(N-1)}{N} u(r)(p - u(r))\right\}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{-v(r)} \geq \frac{1}{\sqrt{2\left\{\frac{1}{2}(p^2 - u(r)^2) - \frac{f(\overline{p})}{\overline{p}} \frac{(N-1)}{N} u(r)(p - u(r))\right\}}}.$$

De (2.28),

$$T_\xi \geq \int_\xi^p \frac{du}{\sqrt{2\left\{\frac{1}{2}(p^2-u^2)-\frac{f(\overline{p})}{\overline{p}}\frac{(N-1)}{N}u(p-u)\right\}}},\quad \overline{p}\leq\xi\leq p.$$

Fazendo $u = ps$, temos

$$T_\xi \geq \int_{\frac{\xi}{p}}^1 \frac{pds}{\sqrt{2\left\{\frac{1}{2}(p^2-p^2s^2)-\frac{f(\overline{p})}{\overline{p}}\frac{(N-1)}{N}ps(p-ps)\right\}}},$$

isto é,

$$\begin{aligned} T_\xi &\geq \int_{\frac{\xi}{p}}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)-\frac{2f(\overline{p})(N-1)}{\overline{p}N}(s-s^2)}} \\ &= \int_{\frac{\xi}{p}}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)-\frac{2(N-1)}{N}(s-s^2)+\left(1-\frac{f(\overline{p})}{\overline{p}}\right)\frac{2(N-1)}{N}(s-s^2)}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Por (2.27), podemos tomar $\overline{p}$ suficientemente grande tal que

$$\left(1-\frac{f(\overline{p})}{\overline{p}}\right)\frac{2(N-1)}{N}(s-s^2)<\epsilon^2\left(\frac{N-2}{N}\right),$$

para todo $s\in(0,1]$, para algum $\epsilon>0$ tal que $\epsilon^2(N-2)^2<1$. Então (2.33) torna-se

$$\begin{aligned} T_\xi &> \int_{\frac{\xi}{p}}^1 \frac{ds}{\sqrt{\frac{N-2}{N}\left(\left[s^2-2\left(\frac{N-1}{N-2}\right)s+\left(\frac{N-1}{N-2}\right)^2-\frac{1}{(N-2)^2}+\epsilon^2\right]\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{N}{N-2}}\int_{\frac{\xi}{p}}^1 \frac{ds}{\sqrt{\left(s-\frac{N-1}{N-2}\right)^2-\frac{1}{(N-2)^2}+\epsilon^2}} \\ &= \sqrt{\frac{N}{N-2}}\ln\left|\frac{\sqrt{[s(N-2)-(N-1)]^2-1+\epsilon^2(N-2)^2}}{\sqrt{1-\epsilon^2(N-2)^2}}+\frac{s(N-2)-(N-1)}{\sqrt{1-\epsilon^2(N-2)^2}}\right|_{\frac{\xi}{p}}^1 \\ &> \sqrt{\frac{N}{N-2}}\ln\left|\left(-\frac{N-1}{N-2}+s\right)+\sqrt{\left(s-\frac{N-1}{N-2}\right)^2-\frac{1}{(N-2)^2}}\right|_{\frac{\xi}{p}}^1 \\ &= \sqrt{\frac{N}{N-2}}\ln\frac{\left|\frac{-1}{N-2}+\sqrt{\frac{1}{(N-2)^2}-\frac{1}{(N-2)^2}}\right|}{\left|\frac{-N+1+\xi/p(N-2)}{N-2}+\sqrt{\left[\frac{(N-2)\xi/p-(N-1)}{N-2}\right]^2-\frac{1}{(N-2)^2}}\right|} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{N}{N-2}}\ln\left(\frac{1}{|N-2|}\cdot\frac{|N-2|}{|-(N-1)+\xi/p(N-2)+\sqrt{[(N-2)\xi/p-(N-1)]^2-1}|}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{N}{N-2}}(-\ln|-(N-1)+\xi/p(N-2)+\sqrt{[(N-2)\xi/p-(N-1)]^2-1}|).$$

Assim,

$$\int_{\overline{p}}^{p} T_\xi{}^2 d\xi \geq \int_{\overline{p}}^{p} \frac{N}{N-2}\left[-\ln|-(N-1)+\xi/p(N-2)+\sqrt{[(N-2)\xi/p-(N-1)]^2-1}|\right]^2 d\xi.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y=(N-1)-(N-2)\xi/p$, teremos

$$\int_{\overline{p}}^{p} T_\xi{}^2 d\xi \geq p\int_{1}^{(N-1)-(N-2)\frac{\overline{p}}{p}} \frac{N}{(N-2)^2}[\ln|-y+\sqrt{(-y)^2-1}|]^2 dy.$$

Definindo $H(y)=N/(N-2)^2[\ln|-y+\sqrt{(-y)^2-1}|]^2$ e retomando (2.26),

$$-q(p)T_{\overline{p}} \geq (N-2)\left[\frac{\frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}}\int_1^{(N-1)-(N-2)\frac{\overline{p}}{p}} H(y)dy}{N-2}-1\right]p+(N-2)\overline{p}.$$

Por outro lado, do Lema 1.16, temos

$$\lim_{p\to\infty}\int_1^{(N-1)-(N-2)\frac{\overline{p}}{p}} H(y)dy = \int_1^{(N-1)} H(y)dy = \theta > 2(N-2), \quad N\geq 3.$$

Daí, desde que podemos tomar $f(\overline{p})/\overline{p}$ arbitrariamente próximo de 1,

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{\frac{f(\overline{p})}{2\overline{p}}\int_1^{(N-1)-(N-2)\frac{\overline{p}}{p}} H(y)dy}{N-2}-1\right] = \frac{f(\overline{p})\theta}{2\overline{p}(N-2)}-1>0.$$

Portanto, $-q(p)T_{\overline{p}}\to\infty$ quando $p\to\infty$, $N\geq 3$. □

Lema 2.12. *Seja $p\in D(T)$. Então $u'(r,p)<0$, para todo $0<r<T(p)$.*

Demonstração. Pela prova do Lema 2.9, sabemos que se existe um primeiro $\xi\in(0,T(p))$ satisfazendo $u'(\xi,p)=0$, então $u(\xi,p)\leq p_1<p_2$.

Pelo Lema 2.5, $E(\xi)>E(T(p))$.

Desde que

$$E(\xi)=\frac{1}{2}(u'(\xi,p))^2+F(u(\xi,p))<0,$$

e

$$E(T(p))=\frac{1}{2}(u'(T(p),p))^2+F(u(T(p),p))\geq 0,$$

temos $E(\xi)<E(T(p))$.

Portanto, não existem pontos críticos para u em $(0,T(p))$, e então $u'(r,p)<0$ para $r\in(0,T(p))$. □

Finalizamos este capítulo com a demonstração do Teorema (CH).

2.3 Demonstração do Teorema (CH)

Demonstração. Considere

$$p_c = \inf\{p : p \in D(T)\}.$$

Segue do Teorema 2.8 que $p_c \geq p_2$.

Mostraremos agora que, considerando p_c como o parâmetro de “shooting”, o problema (2.1) tem solução.

Afirmação 1: $p_c \in D(T)$, isto é, $u(\cdot, p_c)$ é solução de (2.1) com $R = T(p_c)$.

Seja $(p_n) \in D(T),\ p_n \searrow p_c$.

1º caso: $(T(p_n))$ é limitada.

Neste caso, existe $(T(p_{n_k})) \subset (T(p_n))$ tal que $T(p_{n_k}) \to T^* < \infty$.

Temos então as seguintes situações a considerar:

(i)Se $M_{p_c} < \infty$, então $M_{p_c} = T(p_c)$ e, pelo Lema 2.7, $u(T(p_c), p_c) = 0$, isto é, $p_c \in D(T)$.

(ii) Se $M_{p_c} = \infty$, então de $u \in C^2([0,\infty)) \times C^1((0,\infty))$, segue que

$$0 = \lim_{k\to\infty} u(T(p_{n_k}), p_{n_k}) = u(T^*, p_c).$$

Absurdo, pela definição de M_{p_c}. Portanto, $M_{p_c} < \infty$ e $p_c \in D(T)$.

2º caso: $(T(p_n))$ é ilimitada.

Neste caso, existe $(T(p_{n_k})) \subset (T(p_n))$ tal que $T(p_{n_k}) \to +\infty$. Por comodidade, denotaremos p_{n_k} por p_n.

Pelo Teorema 2.8, $p_n \geq p_2,$ para todo n. Do Lema 2.12, $u'(r, p_n) < 0,$ para todo $0 < r < T(p_n)$.

Assim, desde que $T(p_n) \to +\infty$,

$$u'(r, p_c) = \lim_{n\to\infty} u'(r, p_n) \leq 0,\ \text{para todo } r > 0. \tag{2.34}$$

Em particular, $M_{p_c} = \infty$.

Além disso,

$$E(u(T(p_n, p_n))) = \frac{1}{2}[u'(T(p_n), p_n)]^2 + F(u(T(p_n), p_n)) \geq F(0) = 0,$$

ou seja,

$$E(u(T(p_n, p_n))) \geq 0,\ \forall\ n.$$

Dado $r > 0$, tome $n > 0$ suficientemente grande tal que $r < T(p_n)$. Desde que E é decrescente,

$$E(u(r,p_n)) = E(r) > E(T(p_n)) = E(u(T(p_n),p_n)) \geq 0.$$

Fazendo $n \to \infty$ e lembrando que $u(r,\cdot) \in C^1((0,\infty))$, obtemos

$$E(u(r,p_c)) \geq 0, \quad \text{para todo} \;\; r > 0. \tag{2.35}$$

Por outro lado, seja $p_2 > \tilde{p} > p_1$. Suponha, por contradição, que não exista $\tilde{r} > 0$ tal que $u(\tilde{r},p_c) < \tilde{p}$. Isto é, $u(r,p_c) \geq \tilde{p}$, para todo $r \in [0, M_{p_c})$. Pelo Lema 2.7, $M_{p_c} = \infty$.

Denote por

$$m_f = \inf_{s\in[\tilde{p},p_c]} f(s) > 0 \;\; \text{e} \;\; M_f = \sup_{s\in[\tilde{p},p_c]} f(s) < \infty.$$

Segue de (2.34)

$$m_f r^{N-1} = r^{N-1} \inf_{\tilde{p}\leq u\leq p_c} f(u(r,p_c)) \leq r^{N-1} f(u(r,p_c)) \leq r^{N-1} \sup_{\tilde{p}\leq u\leq p_c} f(u(r,p_c)) = M_f r^{N-1}, \; \forall\, r > 0.$$

Integrando de 0 a r, temos

$$m_f \frac{r^N}{N} \leq \int_0^r s^{N-1} f(u(s,p_c))ds \leq M_f \frac{r^N}{N}.$$

De $u(\cdot,p_c)$ solução de (2.3),

$$\frac{m_f}{N} r \leq -v(r,p_c) \leq \frac{M_f}{N} r, \quad r > 0.$$

Integrando novamente de 0 a r, e usando que $u(\cdot,p_c)$ é solução de (2.3) com $p = p_c$, obtemos

$$\frac{m_f}{2N} r^2 \leq p_c - u(r,p_c) \leq \frac{M_f}{2N} r^2.$$

Isto é,

$$\frac{2N(p_c - u(r,p_c))}{M_f} \leq r^2 \leq \frac{2N(p_c - u(r,p_c))}{m_f}, \quad r > 0.$$

Fazendo $r \to \infty$, obtemos $u(r,p_c) \to -\infty$, o que viola a hipótese de contradição.

Assim sendo, existe $r = T_1$ tal que $u(T_1,p_c) = \tilde{p}$, isto é, $u(r,p_c)$ encontra $u = \tilde{p}$ num tempo finito T_1.

Afirmação 1.1: $\limsup_{r\to\infty} u'(r,p_c) = 0$.

De fato. Caso tivéssemos $\limsup_{r\to\infty} u'(r,p_c) = c < 0$, existiria $r_0 > 0$ tal que $u'(r,p_c) \leq c, \; r \geq r_0$. Integrando de r_0 a r, obteríamos

$$u(r) - u(r_0) = \int_{r_0}^r u'(s,p_c)ds \leq c(r - r_0).$$

Fazendo $r \to \infty$, teríamos

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} u(r,p_c) \leq u(r_0) + c \lim_{r\to\infty}(r - r_0) = -\infty,$$

o que é absurdo.

Afirmação 1.2: $\lim\limits_{r\to\infty} u'(r,p_c) = 0.$

Suponha, por contradição, que $\liminf\limits_{r\to\infty} u'(r,p_c) = \mu \in (0,\infty]$. Existe $r_k \to +\infty$ crescente tal que

(i) $u'(r_{2k},p_c) \to 0,$ e $u''(r_{2k},p_c) = 0$

(ii) $u'(r_{2K+1},p_c) \to \mu$ e $u''(r_{2k+1} - p_c) = 0.$

De (2.7), e fazendo $r = r_{2k}$,

$$\lim_{k\to\infty} f(u(r_{2k},p_c)) = 0 \Rightarrow u(r_{2k},p_c) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} p_1,$$

e desde que $u \leq' 0$, segue que

$$u(r,p_c) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} p_1.$$

Por outro lado, multiplicando (2.7) por u' e integrando de 0 a r, temos

$$-\frac{[u'(r,p_c)]^2}{2} = (N-1)\int_0^r \frac{[u'(s,p_c)]^2}{s}ds + F(u(r,p_c)) - F(u(0,p_c)). \tag{2.36}$$

Tomando $r = r_{2k}$ e passando (2.36) ao limite superior, obtemos

$$(N-1)\int_0^\infty \frac{[u'(s,p_c)]^2}{s}ds = F(p_c) - F(p_1). \tag{2.37}$$

Por outro lado, tomando $r = r_{2k+1}$ e passando (2.36) ao limite inferior, obtemos

$$-\frac{\mu^2}{2} = (N-1)\int_0^\infty \frac{[u'(s,p_c)]^2}{s}ds + F(p_1) - F(p_c). \tag{2.38}$$

Portanto, de (2.37) e (2.38), segue que $\mu = 0$, o que é absurdo. Isto prova a Afirmação 1.2.

Dado $\hat{p} \in (0,p_1),$ existe $c > 0$ suficientemente pequeno tal que $c^2/2 + F(s) < 0,$ para $s \in [\hat{p},\tilde{p}]$, pois $\sup\limits_{s\in[\tilde{p},p_c]} f(s) < \infty.$

Afirmação 1.3: $u'(T_1,p_c) < -c.$

De fato, temos

$$E(u(T_1,p_c)) = E(T_1) = \frac{[u'(T_1,p_c)]^2}{2} + F(u(T_1,p_c)).$$

Caso $u'(T_1, p_c) \geq -c$, teríamos $E(u(T_1, p_c)) \leq \dfrac{c^2}{2} + F(\underbrace{u(T_1, p_c)}_{\tilde{p}}) < 0$, o que contradiz (2.35).

Assim concluímos que $u'(T_1, p_c) < -c$, provando a Afirmação 1.3.

Agora considere $u \in [\hat{p}, p_c]$. Suponha que não exista $\hat{r} > 0$ tal que $u(\hat{r}, p_c) < \hat{p}$, isto é, $u(r, p_c) \geq \hat{p}$, para todo $r > 0$.

Daí, da Afirmação 1.2, existe $\overline{r} > 0$ suficientemente grande tal que

$$E(u(\overline{r}, p_c)) = \frac{\overbrace{[u'(\overline{r}, p_c)]^2}^{<\epsilon}}{2} + F(u(\overline{r}, p_c)) \leq \frac{1}{2}[u'(\overline{r}, p_c)]^2 + \max\{F(\hat{p}), F(\tilde{p})\} < 0,$$

contrariando (2.35).

Logo, $u(r, p_c)$ encontra $u = \hat{p}$ num tempo finito T_2.

Afirmação 1.4: $u'(T_2, p_c) < -c$.

De fato, temos

$$E(u(T_2, p_c)) = E(T_2) = \frac{[u'(T_2, p_c)]^2}{2} + F(u(T_2, p_c)).$$

Caso $u'(T_2, p_c) \geq -c$, teríamos

$$E(u(T_2, p_c)) \leq \frac{c^2}{2} + F(\underbrace{u(T_2, p_c)}_{\hat{p}}) < 0,$$

o que contradiz (2.35). Isto mostra a Afirmação 1.4.

Agora, como $f(u) < 0$ para $0 < u < \hat{p}$, seja $f(u) \leq -k,\ k > 0$.

Integrando a forma radial do nosso problema

$$(-r^{N-1}u'(r, p_c))' = r^{N-1}f(u(r, p_c))$$

de T_2 a $T_2 + t,\ \forall\ t > 0$, temos

$$-r^{N-1}u'(r, p_c)\Big|_{T_2}^{T_2+t} \leq -k\frac{s^N}{N}\Big|_{T_2}^{T_2+t},$$

ou seja,

$$-(T_2 + t)^{N-1}u'(T_2 + t, p_c) + T_2^{N-1}u'(T_2, p_c) \leq -k\frac{(T_2 + t)^N}{N} + \frac{kT_2^N}{N}.$$

Daí,

$$-(T_2 + t)^{N-1}u'(T_2 + t, p_c) \leq \underbrace{k\left[\frac{T_2^N - (T_2 + t)^N}{N}\right]}_{<0} - T_2^{N-1}\underbrace{u'(T_2, p_c)}_{<-c}.$$

Para t suficientemente grande tal que

$$k\left[\frac{T_2^N-(T_2+t)^N}{N}\right]-T_2^{N-1}u'(T_2,p_c)<0,$$

temos $u'(T_2+t,p_c)>0$, o que contradiz (2.34).

Então temos que $(T(p_n))$ é limitada, e assim $(T(p_n))$ possui subseqüência convergente. Voltamos assim ao primeiro caso, o que nos garante então que $p_c\in A$.

Logo, $u(T(p_c),p_c)=0$, ficando então demonstrada a Afirmação 1.

Afirmação 2: $T(p)$ é limitado inferiormente por cota positiva.

Dado $p\in D(T)$, seja $u(\cdot,p)$ solução do problema (2.3). Desde que E é não-crescente (Lema 2.5) segue, para $r>0$,

$$\frac{1}{2}[u'(r,p)]^2+F(u(r,p))\leq\frac{1}{2}[u'(0,p)]^2+F(u(0,p)),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}[u'(r,p)]^2\leq F(p)-F(u(r,p))\leq F(p)-F(p_1).$$

Daí

$$[u'(r,p)]^2\leq 2(F(p)-F(p_1))\text{ isto é }|u'(r,p)|\leq\sqrt{2(F(p)-F(p_1))}.$$

Então

$$\begin{aligned}
p &= u(0,p)-u(T(p),p)=-\int_0^{T(p)}u'(s,p)ds\\
&\leq \left|-\int_0^{T(p)}u'(s,p)ds\right|=\left|\int_0^{T(p)}u'(s,p)ds\right|\leq\int_0^{T(p)}|u'(s,p)|ds\\
&\leq \sqrt{2(F(p)-F(p_1))}\int_0^{T(p)}ds=T(p)\sqrt{2(F(p)-F(p_1))}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$p\leq T(p)\sqrt{2(F(p)-F(p_1))},\text{ isto é, }T(p)\geq\frac{p}{\sqrt{2(F(p)-F(p_1))}},\text{ para todo }p\geq p_c.$$

Desde que

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p}{\sqrt{2(F(p)-F(p_1))}}=1,$$

segue que $T(p)$ é limitado inferiormente por cota positiva. Isto prova a Afirmação 2.

Definamos

$$R_1=\inf\{T(p):p\in D(T)\}\geq\inf\{\frac{p}{\sqrt{2(F(p)-F(p_1))}}:p\geq p_c\}>0$$

e

$$R_2 = T(p_c).$$

Agora, dado $R \in (R_1, R_2] = T(D(T))$ existe, pelo Teorema 1.15, pelo menos $p_R > p_c$ tal que $T(p_R) = R$. Isto é, $u(\cdot, p_R)$ solução de (2.3) satisfaz $u(R, p_R) = 0$. Portanto, $u(\cdot, p_R)$ é solução de (2.1). Isto é, $u(x) = u(|x|, p_R) \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B}_R)$ é uma solução radialmente simétrica de (CH).

De fato, $u \in C^2(B_R)$ segue do Lema 2.4. Mostraremos agora que $u \in C^1(\overline{B}_R)$.

Desde que

$$F(p_1) \leq F(u(r)) \leq E(r) = \frac{1}{2}[u'(r)]^2 + F(u(r)) \leq \frac{1}{2}[u'(0)]^2 + F(u(0)) = F(p),$$

segue que E é limitada. Junte-se a isto o fato que E é decrescente e temos que existe $\lim\limits_{r \to R} E(r)$.

Temos então que existe

$$\lim_{r \to R} \left\{ \frac{1}{2}[u'(r)]^2 + F(u(r)) \right\}.$$

Mas $\lim\limits_{r \to R} F(u(r)) = 0$, o que nos diz que existe $\lim\limits_{r \to R} \frac{1}{2}[u'(r)]^2$.

Afirmação 3: Seja $u = u(\cdot, p_c)$ uma solução clássica radialmente simétrica de (CH) para $R = R_2$. Então $u'(R_2, p_c) = 0$.

Suponha que

$$\frac{\partial}{\partial r} u(T(p_c), p_c) \neq 0.$$

Desde que $u(T(p_c), p_c) = 0$ e $u \in C^2(0, M_p) \times C^1(0, \infty)$ segue, pelo Teorema da Função Implícita, que existe um retângulo aberto $I \times J$ de centro $(T(p_c), p_c)$ tal que $u^{-1}(0) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : J \to I$ de classe C^2.

Portanto, $u(\xi(p), p) = 0$ numa vizinhança de p_c, o que viola a definição de $p_c = \inf\{p : p \in A\}$. Logo, $u'(R_2, p_c) = 0$.

Isto finaliza a prova do Teorema (CH). $\square$

CAPÍTULO 3

Método de "Shooting" aplicado a um problema singular envolvendo o operador de Monge-Ampère

3.1 Considerações Iniciais

Nos últimos anos, problemas envolvendo o operador de Monge-Ampère têm recebido grande atenção. Em Geometria podemos citar, por exemplo, o problema de atribuir, a cada domínio convexo limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, uma métrica Riemanniana que é invariante sob transformações projetivas entre tais domínios.

Neste sentido, Loewner e Nirenberg [29], em 1975, propuseram a métrica Riemanniana $ds^2 = -(u)^{-1} \sum u_{x_i x_j} d_{x_i} d_{x_j}$, onde u é solução positiva, estritamente côncava do problema de Monge-Ampère singular

$$\begin{cases} \det(D^2 u) = \left(\dfrac{1}{-u}\right)^{N+2}, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio convexo limitado, tendo fronteira suave e estritamente convexa. Em [29], Loewner e Nirenberg provaram a existência de tal u para $N = 2$. Nirenberg [32], em 1975, estendeu o resultado acima para dimensões $N > 2$, considerando Ω limitado, estritamente convexo.

Outra aplicação em Geometria, proposta por Calabi (apud Nirenberg [32] e Cheng e Yao [6]), é a construção de uma métrica Kähler-Einstein em domínios tubulares. A métrica Kähler é dada pela expressão $ds^2 = \sum g_{ij} dz_i d\overline{z}_j$ e será considerada Einstein se o tensor de Ricci satisfizer $R_{ij} = kg_{ij}$, k constante.

Em 1975, Calabi [3] mostrou que podemos construir métricas Kähler-Einstein em $V = [(1/2)B \oplus i\mathbb{R}^N] \subset \mathbb{C}^N$ em função da solução da equação

$$\det(D^2 w) = \exp w,$$

onde B é uma bola aberta em $\mathbb{R}^N$. Este problema também foi discutido por Nirenberg [32], que considerou domínios tubulares $V = (\Omega \oplus i\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{C}^N$, onde Ω é um domínio convexo em $\mathbb{R}^N$.

Mais recentemente, uma conexão com problemas de transporte de massa foi descoberta, e isto conduziu a uma renovação do interesse dessas equações no cálculo de variações e na teoria da otimização, como também em aplicações na meteorologia, fluidos dinâmicos e física-matemática (veja Gutiérrez [21], 2001).

Estudos de existência e/ou unicidade para o problema (M) podem ser encontrados em Cheng e Yau [6], que em 1977 consideraram $\psi(x,s) = (-1/s)^{N+2}$ em um domínio convexo e limitado Ω contido em $\mathbb{R}^N$ e também em Lazer e McKenna [28], que em 1996 estabeleceram existência e unicidade para o problema (M) com $\psi(x,s) = p(x)(-s)^{-\gamma}$ em Ω, onde $\gamma > 1$, Ω é suave, estritamente convexo e limitado, $p(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$ e $p \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (veja também as referências neles contidas).

Considerando termos singulares $\psi(x,s)$ mais gerais, estes resultados foram melhorados, em algum sentido, por Gonçalves e Santos [17], em 2005, que consideraram o problema (GS) com hipóteses sobre ψ que incluem os casos anteriores, restritos a $\Omega = B$ (veja Introdução).

Podemos também citar o recente trabalho de Wang [41], em 2006, que considerando $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ contínua e hipóteses sobre $f_0 = \lim_{s\to 0} f(s)/s^N$ e $f_\infty = \lim_{s\to\infty} f(s)/s^N$, $N \geq 1$, estabeleceu a existência de soluções radiais para o problema (M).

Uma extensão dos resultados de existência e regularidade de soluções para o problema (M) em domínios estritamente convexos, para domínios limitados arbitrariamente suaves em $\mathbb{R}^N$, assim como variedades Riemannianas, em geral, pode ser vista no trabalho de Guan [18], 1998.

Neste capítulo, focamos nossa atenção no estudo de existência, unicidade e regularidade de soluções clássicas convexas e radialmente simétricas para o problema (GS).

De acordo com o Lema 1.17, uma função radialmente simétrica $v \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ com $v < 0$ e $v' \geq 0$ satisfaz (GS) se, e somente se, a função $u := -v$ satisfaz

$$\begin{cases} -(|u'|^{N-1}u')' = Nr^{N-1}\psi(r,u), & (0,1), \\ u(1) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Para mostrar existência de soluções de (3.1), associamos a ele o seguinte P.V.I.:

$$\begin{cases} -(|u'|^{N-1}u')' = Nr^{N-1}\psi(r,u), & r > 0, \\ u(0) = a, \quad u'(0) = 0, \quad u > 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $a > 0$ é o parâmetro de "shooting".

Para resolver (3.2) e explorar propriedades de suas soluções para valores distintos de $a > 0$, enunciamos os dois lemas que seguem:

Lema 3.1. *Suponha $(GS_1), (GS_2)$ e (GS_5). Então, para cada $a > 0$, existe algum $F(a) \in (0,1]$ e uma única $u(\cdot,a) \in C^2([0,F(a)))$ solução de*

$$\begin{cases} -(|u'|^{N-1}u')' = Nr^{N-1}\psi(r,u), \ r > 0, \\ u(0) = a, \quad u'(0) = 0, \\ u > 0, \ [0,F(a)). \end{cases} \tag{3.3}$$

Além disso,

$$u(r,a) \to 0 \text{ quando } r \to F(a), \text{ desde que } F(a) < 1; \tag{3.4}$$

$$u(\cdot,a) < u(\cdot,\widetilde{a}) \text{ em } [0,F(a)) \text{ se } a < \widetilde{a} \text{ e, além disso, } F(a) \leq F(\widetilde{a}). \tag{3.5}$$

Complementando o resultado enunciado acima, temos o Lema 3.2.

Lema 3.2. *Suponha $(GS_1), (GS_2)$ e (GS_5). Considere $\{a_n\}$ uma seqüência em $(0,\infty)$ tal que $a_n \nearrow a$ ou $a_n \searrow a$ para algum $a > 0$ e sejam $u(\cdot,a_n), u(\cdot,a)$ soluções de (3.2) dadas pelo Lema 3.1. Se $k \in (0, \min\{F(a), \sup_n F(a_n)\})$, então*

$$\|u(\cdot,a_n) - u(\cdot,a)\|_{C([0,k])} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad e$$

$$|u'(r,a_n) - u'(r,a)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad r \in [0,k].$$

Estes lemas serão indispensáveis para a demonstração do Teorema (GS), enunciado na Introdução deste trabalho.

3.2 Demonstrações dos Lemas

3.2.1 Demonstração do Lema 3.1

Demonstração. Observe que, se $u \in C^2([0,\epsilon))$ é uma solução de (3.2), então u satisfaz

$$u(r) = a - \int_0^r \left[\int_0^s N \ t^{N-1}\psi(t,u(t))dt \right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

De fato, se u é solução de (3.2), então, integrando de 0 a $r > 0$, obtemos

$$-|u'(s)|^{N-1}u'(s) = \int_0^s Nr^{N-1}\psi(r, u(r))dr.$$

Desde que

$$\int_0^s Nr^{N-1}\psi(r, u(r))dr \geq 0,$$

pois $r > 0$ e $\psi \geq 0$, temos que $u'(s) \leq 0$.

Logo,

$$-|u'(s)|^{N-1}u'(s) = -(-u'(s))^{N-1}u'(s) = [-u'(s)]^{N-1}[-u'(s)] = [-u'(s)]^N.$$

Assim,

$$[-u'(s)]^N = \int_0^s Nr^{N-1}\psi(r, u(r))dr.$$

Agora, integrando novamente de 0 a $r > 0$, e usando $u(0) = a$, obtemos

$$u(r) = a - \int_0^r \left[\int_0^s Nt^{N-1}\psi(t, u(t))dt\right]^{\frac{1}{N}} ds. \tag{3.6}$$

Definindo o operador T por

$$T(u)(r) := a - \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, u(t))dt\right]^{\frac{1}{N}} ds, \quad r \geq 0, \tag{3.7}$$

segue que uma eventual solução de (3.6) é um ponto fixo de T em um espaço de funções apropriado. A idéia é utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Seja $a > 0$. Por (GS_1), existe algum $K_a > 1$ tal que $\psi(r, \cdot)$ é Lipschitz em $[\frac{a}{K_a}, a]$, uniformemente para $r \in [0, 1)$.

Considere $\varepsilon > 0$ pequeno e o conjunto de funções

$$X_{a,\varepsilon} := \left\{u \in C([0, \varepsilon]) \ : \ u(0) = a, \ \frac{a}{K_a} \ \leq u(r) \leq a, \ r \in [0, \varepsilon]\right\}.$$

Afirmação 1: $X_{a,\varepsilon} = (X_{a,\varepsilon}, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço métrico completo, pois $X_{a,\varepsilon} \subset C([0, \varepsilon])$ é fechado.

Afirmação 2: Existe $\varepsilon = \varepsilon(a) > 0$ tal que

(i) $T(X_{a,\varepsilon}) \subset X_{a,\varepsilon}$

(ii) $\| T(u_1) - T(u_2) \|_\infty \leq k\|u_1 - u_2\|_\infty, \ \forall \ u_1, u_2 \in X_{a,\varepsilon(a)}$ e algum $k \in (0, 1)$.

(As demonstrações das Afirmações 1 e 2 encontram-se no Apêndice 2).

Portanto, assumindo provadas as afirmações 1 e 2, segue, pelo Teorema 1.1, que T possui precisamente um único ponto fixo, ou seja, existe um único $u = u(\cdot, a) \in X_{a,\varepsilon(a)}$ solução de (3.6).

Vamos agora definir

$$F(a) := \sup\{r \in (0,1) : \text{ (3.6) tem uma única solução em } [0,r)\}.$$

Como já garantimos a existência de uma única solução para (3.6) em $[0, \varepsilon(a))$, $F(a) \geq \varepsilon(a)$.

Considerando $u(\cdot, a) : [0, F(a)) \to \mathbb{R}$ sendo a solução de (3.6), $u(\cdot, a)$ é derivável e, portanto, contínua. Logo, $u(\cdot, a) \in C([0, F(a))$.

Derivando em (3.6), temos

$$u'(r,a) = -\left[\int_0^r t^{N-1} N\psi(t, u(t,a))dt\right]^{\frac{1}{N}}, \quad 0 < r < F(a). \tag{3.8}$$

O integrando do 2º membro desta igualdade é contínuo em $(0, F(a))$, o que implica em $u'(r,a)$ ser derivável e, portanto, contínua. Assim, $u \in C^2((0, F(a)))$.

Observe também que $\lim_{r\to 0} u'(r,a) = 0 = u'(0,a)$, o que implica em u' ser contínua em $r = 0$. Daí, $u(\cdot, a) \in C^1([0, F(a)))$.

Vamos agora mostrar que $u \in C^2([0, F(a)))$.

De (3.8) e do fato que $\psi(0,a) > 0$, temos que

$$u''(r,a) = -r^{N-1}\psi(r, u(r,a))\left[\int_0^r t^{N-1} N\psi(t, u(t,a))dt\right]^{\frac{1}{N}-1} \leq 0, \quad r \in (0, F). \tag{3.9}$$

De (3.9), $u''(r,a) \leq 0$, o que nos diz que u tem concavidade voltada para baixo.

Observe que u'' não está definida para $r = 0$, mas vamos analisar u'' quando $r \to 0$.

Temos

$$\psi(r, u(r,a)) \overset{r\to 0}{\longrightarrow} \psi(0,a) > 0. \tag{3.10}$$

Consideremos

$$m(r,s) := \min_{t\in[0,r]} \frac{\psi(t,s)}{s^N} \quad \text{e} \quad M(r,s) := \max_{t\in[0,r]} \frac{\psi(t,s)}{s^N},$$

já que $\psi(\cdot, s)$ é função contínua definida no compacto $[0, r]$.

Como $u(t,a) \leq a$, por (GS_2),

$$m(r,a) = \min_{t\in[0,r]} \frac{\psi(t,a)}{a^N} \leq \frac{\psi(t,a)}{a^N} \leq \frac{\psi(t, u(t,a))}{[u(t,a)]^N} \leq \max_{t\in[0,r]} \frac{\psi(t, u(r,a))}{u(r,a)^N} = M(r, u(r,a)).$$

Então,

$$m(r,a) \leq \frac{\psi(t,u(t,a))}{[u(t,a)]^N} \leq M(r,u(r,a)),$$

ou seja,

$$m(r,a)[u(t,a)]^N \leq \psi(t,u(t,a)) \leq M(r,u(r,a))[u(t,a)]^N.$$

Desde que $[u(t,a)]^N \leq a^N$,

$$[u(t,a)]^N m(r,a) \leq \psi(t,u(t,a)) \leq a^N M(r,u(r,a)).$$

Multiplicando a desigualdade acima por Nt^{N-1} e integrando em t, temos

$$\begin{aligned} m(r,a)\int_0^r Nt^{N-1}[u(t,a)]^N dt &\leq \int_0^r Nt^{N-1}\psi(t,u(t,a))dt \\ &\leq a^N M(r,u(r,a))\int_0^r Nt^{N-1}dt, \quad r>0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Desde que $u(t,a) \geq u(r,a),\ t \in (0,r]$, retomando (3.11) temos

$$m(r,a)[u(r,a)]^N \leq r^{-N}\int_0^r Nt^{N-1}\psi(t,u(t,a))dt \leq a^N M(r,u(r,a)).$$

Como $1/N - 1 \leq 0$,

$$\begin{aligned} [a^N M(r,u(r,a))]^{\frac{1}{N}-1} &\leq r^{N-1}\left[\int_0^r Nt^{N-1}\psi(t,u(t,a))dt\right]^{\frac{1}{N}-1} \\ &\leq [m(r,a)[u(r,a)]^N]^{\frac{1}{N}-1}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Observe que $M(r,u(r,a))$ *e* $m(r,a)$ são contínuas. Daí

$$\lim_{r\to 0}[a^N M(r,u(r,a))]^{\frac{1}{N}-1} = \left[a^N\frac{\psi(0,u(0,a))}{[u(0,a)]^N}\right]^{\frac{1}{N}-1} = [\psi(0,a)]^{\frac{1}{N}-1}$$

e

$$\lim_{r\to 0}[m(r,a)[u(r,a)]^N]^{\frac{1}{N}-1} = \left[\frac{\psi(0,a)}{a^N}[u(0,a)]^N\right]^{\frac{1}{N}-1} = [\psi(0,a)]^{\frac{1}{N}-1}.$$

Passando (3.12) ao limite,

$$\lim_{r\to 0}\left\{r^{N-1}\left[\int_0^r Nt^{N-1}\psi(t,u(t,a))dt\right]^{\frac{1}{N}-1}\right\} = [\psi(0,a)]^{\frac{1}{N}-1}. \tag{3.13}$$

Retomando (3.9), (3.10) e (3.13),

$$\lim_{r\to 0} u''(r,a) = -\psi(0,a)[\psi(0,a)]^{\frac{1}{N}-1} = -[\psi(0,a)]^{\frac{1}{N}}.$$

Daí, $u'' \in C([0,F(a))$, isto é, $u \in C^2([0,F(a)))$.

Por (3.8), $u' \leq 0$, o que implica que u é não-crescente. Como $0 \leq u(\cdot,a) \leq a$, u é limitada. Sendo função monótona limitada, existe $\lim\limits_{r\to F(a)^-} u(\cdot,a)$. Então, $u \in C([0,F(a)])$.

Sabemos que $u(F(a),a) \geq 0$. Suponha $F(a) < 1$. Afirmamos que $u(F(a),a) = 0$.

De fato, caso contrário, façamos $F = F(a) > 0$ e $\hat{a} = u(F(a),a)$. Assim, como $\hat{a} \leq u(\cdot,a) \leq a$, segue de (GS_2)

$$\frac{\psi(t,\hat{a})}{[\hat{a}]^N} \geq \frac{\psi(t,u(t,a))}{[u(t,a)]^N} \geq \frac{\psi(t,a)}{a^N}.$$

Retomando (3.8),

$$\begin{aligned} \mid u'(r,a) \mid^N &= \int_0^r t^{N-1} N \frac{\psi(t,u(t,a))}{[u(t,a)]^N}[u(t,a)]^N dt \\ &\leq \int_0^r t^{N-1} N \frac{\psi(t,\hat{a}))}{[\hat{a}]^N}[a]^N dt \\ &= N\left(\frac{a}{\hat{a}}\right)^N \int_0^r t^{N-1} N\psi(t,\hat{a})dt, \quad r \in (0,F(a)). \end{aligned}$$

$\psi(t,\hat{a})$ é contínua para $t \in [0,1)$; logo, é contínua para $t \in [0,F]$.

Então,

$$|u'(r,a)|^N \leq N\left(\frac{a}{\hat{a}}\right)^N \int_0^F t^{N-1}\psi(t,\hat{a})dt, \quad \forall\ r \in (0,F), \quad F < 1.$$

Ou seja,

$$|u'(r,a)| \leq \frac{a}{\hat{a}}\left[\int_0^F t^{N-1} N\psi(t,\hat{a})dt\right]^{\frac{1}{N}},$$

o que nos diz que u' é limitada.

Como $u'' \leq 0$, u' é não-crescente. Sendo u' função monótona limitada, existe $\lim\limits_{r\to F^-} u'(r,a)$. Daí, $u' \in C([0,F(a)])$, o que implica que $u \in C^1([0,F(a)])$.

Seja $\lim\limits_{r\to F^-} u'(r,a) := \gamma \in (-\infty,0]$. Vamos considerar o seguinte *P.V.I.*:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(|v'|^{N-1}v')' = Nr^{N-1}\psi(r,v), & r > F \\ v(F) = \hat{a}, \quad v'(F) = \gamma, & v > 0, \end{array} \right. \tag{3.14}$$

Observe que $\lim\limits_{r\to F} u'(r,a) = \gamma = v'(F)$, i.e., o vetor tangente a u no ponto F é o mesmo vetor tangente a v no ponto F. Além disso, $u(F,a) = \hat{a} = v(F)$. Assim, se (3.14) tiver solução única, esta será uma extensão da solução de (3.2), para $r > F$, $F < 1$.

Pelo raciocínio anterior, resolver (3.14) equivale a obter uma solução da seguinte equação integral:

$$v(r) = \hat{a} - \int_F^r \left[|\gamma|^N + \int_F^s t^{N-1} N\psi(t,v(t))dt\right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

Pelo mesmo argumento usado anteriormente, as soluções de (3.14) são os pontos fixos do seguinte operador:

$$\hat{T}(v)(r) := \hat{a} - \int_F^r \left[|\gamma|^N + \int_F^s N t^{N-1} \psi(t, v(t)) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

Novamente, por (GS_1), existe algum $k_{\hat{a}} > 1$ tal que $\psi(r, \cdot)$ é Lipschitz em $\left[\frac{\hat{a}}{k_{\hat{a}}}, \hat{a} \right]$, uniformemente para $r \in [F, 1)$.

Considere $\delta > 0$ pequeno e o espaço métrico completo

$$X_{\hat{a},\delta} = (X_{\hat{a},\delta}, \|\cdot\|_\infty) := \left\{ v \in C([F, F+\delta]) : \ v(F) = \hat{a}, \ \frac{\hat{a}}{k_{\hat{a}}} \leq v(r) \leq \hat{a}, \ r \in [F, F+\delta) \right\}.$$

De forma análoga à prova da Afirmação 2 (veja Apêndice 2), também provamos o seguinte

Afirmação 3 : Existe $\delta = \delta(\hat{a}) > 0$ tal que

(i) $\hat{T}(X_{\hat{a},\delta}) \ \subset X_{\hat{a},\delta}$;

(ii) $\|\hat{T}(v_1) - \hat{T}(v_2)\|_\infty \leq k \|v_1 - v_2\|_\infty, \ \forall \ v_1, v_2 \in X_{\hat{a},\delta}$, onde $k \in (0, 1)$.

Portanto, novamente pelo Teorema 1.1 e pelos argumentos anteriores, existe uma única solução de (3.14) em um intervalo $(F, F+\delta)$.

Assim mostramos que $u(\cdot, a)$ pode ser estendida como uma solução de (3.2) em $(0, F(a) + \delta)$, o que contradiz a definição de $F(a)$.

Logo, não podemos ter $u(F(a), a)) > 0$. Portanto, $u(F(a), a)) = 0$.

Com isso demonstramos (3.4), ou seja,

$$u(r, a) \to 0 \text{ quando } r \to F(a), \ \text{ desde que } F(a) < 1.$$

Vamos agora mostrar (3.5). Assuma, por contradição, que exista $F > 0$ tal que

$$u(r, a) < u(r, \tilde{a}), \quad \text{para} \ \ r \in [0, F) \tag{3.15}$$

e

$$u(F, a) = u(F, \tilde{a}), \quad \text{para algum} \ \ F < F(a). \tag{3.16}$$

Pelo Lema 1.18, com $b = 0$,

$$\left[\frac{u'(r, a)}{u(r, a)} - \frac{u'(r, \tilde{a})}{u(r, \tilde{a})} \right] (u(r, a) - u(r, \tilde{a})) \geq 0, \quad r \in (0, F).$$

Desde que $u(r, a) < u(r, \tilde{a})$, temos $u(r, a) - u(r, \tilde{a}) < 0$ e então

$$\left[\frac{u'(r, a)}{u(r, a)} - \frac{u'(r, \tilde{a})}{u(r, \tilde{a})} \right] \leq 0, \text{ ou seja, } u'(r, a) u(r, \tilde{a}) - u'(r, \tilde{a}) u(r, a) \leq 0, \quad r \in (0, F).$$

Assim,

$$\left(\frac{u(r,\tilde{a})}{u(r,a)}\right)' = \frac{u'(r,\tilde{a})u(r,a) - u(r,\tilde{a})u'(r,a)}{u^2(r,a)} \geq 0$$

pelo exposto anteriormente.

Logo,

$$\frac{u(r,\tilde{a})}{u(r,a)} \text{ é não-decrescente para } r \in [0,F],$$

Disto segue que

$$\frac{u(0,\tilde{a})}{u(0,a)} \leq \frac{u(F,\tilde{a})}{u(F,a)}.$$

Daí, de (3.15) e (3.16),

$$1 \leq \frac{u(0,\tilde{a})}{u(0,a)} \leq \frac{u(F,\tilde{a})}{u(F,a)} = 1,$$

o que é um absurdo!

Portanto, $u(r,a) < u(r,\tilde{a}),\ \ r \in [0, F(a)))$ e, além disso, $F(a) \leq F(\tilde{a})$. $\square$

3.2.2 Demonstração do Lema 3.2

Demonstração. Suponha $a_n \nearrow a$ $(0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \to a)$.

Como $a_n \leq a$, pelo Lema 3.1, $F(a_n) \leq F(a)$, para todo $n \geq 1$. Logo, $\sup\limits_n F(a_n) \leq F(a)$. Então, dado $k \in (0, \sup\limits_n F(a_n))$, consideremos $n_k \geq 1$ inteiro tal que $F(a_{n_k}) > k$. Pelo Lema 3.1, tomando $n \geq n_k$ temos que

$$F(a_{n_k}) \leq F(a_n) \leq F(a) \ \text{ e } \ u(r,a_{n_k}) \leq u(r,a_n) \leq u(r,a) \leq a, \quad r \in [0,k], \tag{3.17}$$

o que mostra que $\{u(\cdot,a_n)\}$ é eqüilimitada em $C([0,k])$.

Afirmamos que $\{u(\cdot,a_n)\}$ é eqüicontínua em $C([0,k])$, ou seja, o conjunto de funções $u(\cdot,a_n) : [0,k] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que, para cada $\varepsilon > 0$ real, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $r,t \in [0,k]$ e $\mid r - t \mid < \delta(\epsilon)$, então $|u(r,a_n) - u(t,a_n)| < \epsilon$, para todo $n \geq n_k$.

De fato, para $r \in [0,k]$ encontramos

$$\begin{aligned} |u'(r,a_n)|^N &= \int_0^r t^{N-1} N\psi(t,u(t,a_n))dt \\ &= \int_0^r t^{N-1} N \frac{\psi(t,u(t,a_n))}{[u(t,a_n)]^N}[u(t,a_n)]^N dt. \end{aligned} \tag{3.18}$$

De (3.17), segue que

$$\frac{\psi(t,u(t,a_n))}{[u(t,a_n)]^N} \leq \frac{\psi(t,u(k,a_{n_k}))}{[u(k,a_{n_k})]^N}.$$

Retomando (3.18),

$$|u'(r,a_n)|^N \leq \int_0^r t^{N-1} N \frac{\psi(t,u(k,a_{n_k}))}{[u(k,a_{n_k})]^N} a^N dt \leq \hat{k}, \tag{3.19}$$

para todo $r \in [0,k]$, para algum $\hat{k} > 0$ independente de n. Então $\{u'(\cdot,a_n)\}$ é eqüilimitada.

Observe também que $[0,k] \subset [0,F(a))$. Já sabemos, do Lema 3.1, que $u \in C([0,F(a)))$ e, portanto, u é contínua em $[0,k]$ e derivável em $(0,k)$.

Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta_n \in (\min\{r,t\}, \max\{r,t\})$ tal que

$$|u(r,a_n) - u(t,a_n)| = |u'(\theta,a_n)||r-t| \leq \hat{k}^{\frac{1}{N}} \mid r-t \mid .$$

Decorre daí que $\{u(\cdot,a_n)\}$ é eqüicontínua. Para tanto, tome $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{\hat{k}^{\frac{1}{N}}}$.

Assim, pelo Teorema de Arzelá-Àscoli, existe $v \in C([0,k])$ tal que $u(\cdot,a_{n_j}) \to v$ uniformemente em $[0,k]$. A título de facilitar a notação, considere $u(\cdot,a_{n_j}) = u(\cdot,a_n)$. Então $u(\cdot,a_n) \overset{unif.}{\longrightarrow} v$ em $C([0,k])$, ou seja,

$$\|u(\cdot,a_n) - v\|_{C([0,k])} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.20}$$

Tome $s \in (0,k]$ e assim, para $t \in (0,s]$, temos

$$|t^{N-1}\psi(t,u(t,a_n))| = t^{N-1}\frac{\psi(t,u(t,a_n))}{[u(t,a_n)]^N}[u(t,a_n)]^N. \tag{3.21}$$

Como $n \geq n_k,\ a_n \geq a_{n_k}$. De (3.17) e (GS_2),

$$\begin{aligned} t^{N-1}\frac{\psi(t,u(t,a_n))}{[u(t,a_n)]^N}[u(t,a_n)]^N &\leq t^{N-1}\frac{\psi(t,u(t,a_{n_k}))}{[u(t,a_{n_k})]^N}[u(t,a_n)]^N \\ &\leq t^{N-1}\frac{\psi(t,u(t,a_{n_k}))}{[u(t,a_{n_k})]^N}a^N. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $t \leq k$ e u é decrescente, por (GS_2) temos que

$$t^{N-1}\frac{\psi(t,u(t,a_{n_k}))}{[u(t,a_{n_k})]^N}a^N \leq t^{N-1}\frac{\psi(t,u(k,a_{n_k}))}{[u(k,a_{n_k})]^N}a^N. \tag{3.23}$$

Portanto, de (3.21), (3.22) e (3.23), temos

$$\mid t^{N-1}\psi(t,u(t,a_n)) \mid \leq t^{N-1}\left[\frac{a}{u(k,a_{n_k})}\right]^N \psi(t,u(k,a_{n_k})). \tag{3.24}$$

Seja $g_n = t^{N-1}\psi(t,u(t,a_n))$. Desde que g_n é contínua para todo n, $\{g_n\}$ é seqüência de funções mensuráveis.

Além disso, por (3.20),

$$t^{N-1}\psi(t, u(t, a_n)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} t^{N-1}\psi(t, v(t)).$$

Temos também que $|g_n|$ é dominada por uma função em $L^1[0, s]$, pois, no segundo membro de (3.24), temos uma função contínua.

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^s t^{N-1}\psi(t, u(t, a_n))dt = \int_0^s t^{N-1}\psi(t, v(t))dt. \tag{3.25}$$

Da demonstração do Lema 3.1, sabemos que

$$u'(s, a_n) = -\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, u(t, a_n))dt\right]^{\frac{1}{N}}.$$

Decorre então de (3.25) que

$$u'(s, a_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, v(t))dt\right]^{\frac{1}{N}}. \tag{3.26}$$

Tome $r \in (s, k]$. De (3.18) temos que

$$|\ u'(s, a_n)\ | \leq \frac{a}{u(k, a_{n_k})}\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, u(k, a_{n_k})))dt\right]^{\frac{1}{N}}.$$

Faça $h_n = u'(s, a_n)$. Como u' é contínua, $\{h_n\}$ é seqüência de funções mensuráveis. Considerando (3.25) e a continuidade do segundo membro de (3.26), usaremos novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtendo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^r u'(s, a_n)ds = -\int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, v(t))dt\right]^{\frac{1}{N}} ds,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} (u(r, a_n) - u(0, a_n)) = v(r) - a = -\int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, v(t))dt\right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

Daí,

$$v(r) = a - \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, v(t))dt\right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

Logo, v é uma solução de

$$\begin{cases} -(|u'|^{N-1}u')' = Nr^{N-1}\psi(r, u), & r > 0 \\ u(0) = a, \quad u'(0) = 0, & u > 0, \end{cases}$$

e, pela unicidade provada no Lema 3.1, $v = u(\cdot, a)$.

Por (3.20), $\parallel u(\cdot, a_n) - v \parallel_{C([0,k])} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e, portanto, $\parallel u(\cdot, a_n) - u(\cdot, a) \parallel_{C([0,k])} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Além disso, por (3.26), $u'(s, a_n) \to v'(s) = u'(s, a)$.

Logo, $|\ u'(s, a_n) - u'(s, a)\ | \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \ s \in [0, k]$. □

3.3 Demonstração do Teorema (GS)

Existência

Demonstração. Considere $A := \{a > 0 : F(a) = 1\}$.

Afirmamos que $A \neq \emptyset$. De fato, se $A = \emptyset$, então, por (3.4) podemos concluir que para cada $a > 0$ existe $r_a \in (0, F(a))$ tal que

$$\frac{a}{2} \leq u(r,a) \leq a, \text{ para } 0 \leq r \leq r_a \text{ e } u(r_a, a) = \frac{a}{2}.$$

De (3.6),

$$u(r_a, a) = a - \int_0^{r_a} \left[\int_0^s t^{N-1} N \psi(t, u(t,a)) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

Desde que $a/2 \leq u(t,a)$, de (GS_2) e (3.6) segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{r_a} \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, u(t,a))}{[u(t,a)]^N} [u(t,a)]^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds &\leq \int_0^{r_a} \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, \frac{a}{2})}{(\frac{a}{2})^N} a^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \\ &= a \int_0^{r_a} \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, \frac{a}{2})}{(\frac{a}{2})^N} dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \end{aligned}$$

Novamente de (3.6),

$$\frac{a}{2} - a \geq -a \int_0^{r_a} \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, \frac{a}{2})}{(\frac{a}{2})^N} dt \right]^{\frac{1}{N}} ds,$$

ou seja,

$$\frac{a}{2} \leq a \int_0^{r_a} \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, \frac{a}{2})}{(\frac{a}{2})^N} dt \right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{r_a} \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, \frac{a}{2})}{(\frac{a}{2})^N} dt \right]^{\frac{1}{N}} ds, \quad r_a \in (0,1). \tag{3.27}$$

De (GS_3), existe $a > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{\psi(t, \frac{a}{2})}{(\frac{a}{2})^N} < 1 \text{ uniformemente em } t \in [0, r_a).$$

Substituindo em (3.27),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \int_0^{r_a} \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, \frac{a}{2})}{(\frac{a}{2})^N} dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \\ &< \int_0^1 \left[\int_0^s t^{N-1} N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds = \int_0^1 \left[s^N \right]^{\frac{1}{N}} ds = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Isto é impossível. Logo, $A \neq \emptyset$, isto é, existe pelo menos um a tal que $F(a) = 1$ (na verdade são infinitos, pois acima deste a todos têm $F(a) = 1$).

Seja $a_\infty := \inf A$.

Afirmação 1: $0 < a_\infty < \infty$

Vamos primeiro mostrar que $a_\infty > 0$. Suponha, por contradição, que seja $a_\infty = 0$. Considere $U(r) := U(r, a) = u(r, a) - a(1 - r), \quad r \in [0, 1]$.

Afirmação 1.1: $U(r) \geq 0$**.**

Observe que $U'(r) = u'(r, a) + a$. Então, $U'(0) = u'(0, a) + a = a > 0$. Assim, $U'(r) > 0$ para $r \in [0, \epsilon)$, pois $U \in C^2((0, \epsilon)) \cap C^1([0, \epsilon))$.

Além disto,

$$(|U'|^{N-1}U')' = (U'^{N-1}U')' = (U'^{N})' = NU'^{N-1}U'' \text{ para } r \in [0, \epsilon).$$

Como $U' > 0$ para $r \in (0, \epsilon)$ e $U''(r) = u''(r, a) \leq 0$, temos que $(|U'|^{N-1}U')' \leq 0$.

Resumindo,

$$\begin{array}{ll} (i) & (|U'|^{N-1}U')' \leq 0, \quad r \in (0, \epsilon) \\ (ii) & U'(r) > 0, \quad r \in (0, \epsilon). \end{array} \tag{3.28}$$

De $(3.28)(ii)$,

$$U(r) > U(0) = 0, \quad r \in (0, \epsilon). \tag{3.29}$$

Agora suponha que $U(r_1) < 0$ para algum $r_1 \in [\epsilon, 1]$.

Como $U : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é função contínua definida num subconjunto conexo de $\mathbb{R}^N$ e $U(r_1) < 0 < U(r)$, existe $r_0 \in (0, 1]$ tal que $U(r_0) = 0$.

Uma vez que $U(1) = u(1, a) \geq 0$, segue que $U'(r_2) = 0$ e $U(r_2) < 0$, para algum $r_2 \in (r_0, 1)$.

Retomando (3.28) (i) e integrando de r_2 a r, com $r \in [r_2, 1]$, obtemos

$$\int_{r_2}^{r} (|U'|^{N-1}U')' ds = |U'(r)|^{N-1}U'(r) \leq 0.$$

Isto é, $U(r)$ é não-crescente para $r \in (r_2, 1)$.

E então $0 \leq U(1) \leq U(r_2) < 0$, o que é um absurdo.

Logo, não podemos ter $U(r_1) < 0$ para algum $r_1 \in [\epsilon, 1]$, ou seja, $U(r) \geq 0$ para $r \in [\epsilon, 1]$. Portanto, por (3.29), $U(r) \geq 0$ para todo $r \in [0, 1]$.

Por hipótese de contradição, $a_\infty = 0$, isto é, $F(a) = 1$ para todo $a \in (0, \infty)$. Segue de (3.6) que

$$-u(1, a) + a = \int_0^1 \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, u(t, a))}{[u(t, a)]^N} [u(t, a)]^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

De (GS_2), $\dfrac{\psi(t,u(t,a))}{[u(t,a)]^N} \geq \dfrac{\psi(t,a)}{a^N}$, pois $u(t,a) \leq a,\ t \in [0,1]$, e então

$$-u(1,a) + a \geq \int_0^1 \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t,a)}{a^N} [u(t,a)]^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

Agora, da Afirmação 1.1,

$$\begin{aligned} -u(1,a) + a &\geq \int_0^1 \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t,a)}{a^N} a^N (1-t)^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \\ &= a \int_0^1 \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t,a)}{a^N} (1-t)^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Assim, para todo $a > 0$,

$$0 \geq -u(1,a) \geq a \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t,a)}{a^N} (1-t)^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds - 1 \right\}. \tag{3.31}$$

De (GS_4), existe $a > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{\psi(t,a)}{a^N} > \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^s t^{N-1} N (1-t)^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \right\}^{-1}, \text{ uniformemente em } t \in (0,1).$$

E então, para a suficientemente pequeno, $-u(1,a) > 0$, o que é impossível por (3.31).

Logo, $a_\infty > 0$, o que confirma a afirmação 1.

Para concluir que $u(\cdot, a_\infty)$ é solução de (GS), é suficiente mostrar que $a_\infty \in A$, ou seja, $F(a_\infty) = 1$ e que $u(1, a_\infty) = 0$. Já sabemos que $0 \leq F(a_\infty) \leq 1$. Vamos supor que

$$F(a_\infty) < 1. \tag{3.32}$$

Escolhemos $\epsilon > 0$ tal que $F(a_\infty) + \epsilon < 1$ e uma seqüência $a_n \in A$, isto é, $F(a_n) = 1$, com $a_n \searrow a_\infty$.

Considere a seqüência $\{u(F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2}, a_n)\}$. Pelo Lema 3.1, a seqüência considerada é decrescente.

Seja

$$F_{\epsilon, a_\infty} := \inf_n \{u(F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2}, a_n)\} = \lim_{n\to\infty} \left[u(F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2}, a_n) \right].$$

Sabemos que $F_{\epsilon, a_\infty} \geq 0$. Afirmamos que

$$F_{\epsilon, a_\infty} > 0. \tag{3.33}$$

Vamos supor, por contradição, que $F_{\epsilon, a_\infty} = 0$.

Pelo Lema 3.1, como $u(\cdot, a_n)$ é decrescente,

$$u(F(a_\infty) + \epsilon, a_n) < u(F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2}, a_n). \tag{3.34}$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$u(F(a_\infty) + \epsilon, a_n) - u(F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2}, a_n) = u'(\theta_n, a_n)\frac{\epsilon}{2}, \tag{3.35}$$

para algum $\theta_n \in (F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2}, F(a_\infty) + \epsilon)$.

Por hipótese de contradição e (3.34),

$$\lim_{n\to\infty} \left| u(F(a_\infty) + \epsilon, a_n) - u(F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2}, a_n) \right| \leq 2 \lim_{n\to\infty} u(F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2}, a_n) = 0. \tag{3.36}$$

Aplicando agora o limite em (3.35), obtemos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\epsilon}\left[u(F(a_\infty) + \epsilon, a_n) - u(F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2}, a_n) \right] = \lim_{n\to\infty} u'(\theta_n, a_n). \tag{3.37}$$

De (3.8), temos que

$$u'(\theta_n, a_n) = -\left[\int_0^{\theta_n} t^{N-1} N \psi(t, u(t, a_n)) dt \right]^{\frac{1}{N}}, \quad 0 < \theta_n < F(a_n).$$

Portanto, de (3.37),

$$\int_0^{\theta_n} t^{N-1} \psi(t, u(t, a_n)) dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.38}$$

Observe que $0 < F(a_\infty) < F(a_\infty) + \frac{\epsilon}{2} < \theta_n < F(a_\infty) + \epsilon$.

Logo,

$$0 < \int_0^{F(a_\infty)} t^{N-1} \psi(t, u(t, a_n)) dt < \int_0^{\theta_n} t^{N-1} \psi(t, u(t, a_n)) dt.$$

Aplicando o limite na última desigualdade, temos

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^{F(a_\infty)} t^{N-1} \psi(t, u(t, a_n)) dt \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^{\theta_n} t^{N-1} \psi(t, u(t, a_n)) dt.$$

E por (3.38) temos

$$\int_0^{F(a_\infty)} t^{N-1} \psi(t, u(t, a_n)) dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.39}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2,

$$|u'(r, a_n) - u'(r, a_\infty)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ onde } k \in (0, \min\{F(a_\infty), \sup_n F(a_n)\}),$$

ou seja, $k \in (0, F(a_\infty))$, pois $F(a_n) \geq F(a_\infty)$.

Então,

$$\int_0^k t^{N-1}\psi(t, u(t, a_n))dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^k t^{N-1}\psi(t, u(t, a_\infty))dt \tag{3.40}$$

para cada $k \in (0, F(a_\infty))$.

Por (3.39) e (3.40),

$$\int_0^k t^{N-1}\psi(t, u(t, a_\infty))dt = 0.$$

Portanto,

$$\psi(t, u(t, a_\infty)) = 0 \text{ quase sempre em } (0, F(a_\infty)). \tag{3.41}$$

Assim, de (3.8) e (3.41),

$$u'(r, a_\infty) = 0, \ r \in (0, F(a_\infty)).$$

Logo, segue da hipótese de contradição e Lema 3.1, que

$$0 < a_\infty = u(r, a_\infty) \leq u(F(a_\infty), a_\infty) = 0,$$

o que é impossível.

Portanto, não podemos ter $F_{\epsilon, a_\infty} = 0$ e a afirmação (3.33) se confirma, ou seja, $F_{\epsilon, a_\infty} > 0$.

Escolhamos agora δ_0 tal que

$$u(r, a_\infty) < \frac{F_{\epsilon, a_\infty}}{4}, \quad \text{para } r \in [F(a_\infty) - \delta_0, F(a_\infty) - \frac{\delta_0}{2}]. \tag{3.42}$$

Pelo Lema 3.2,

$$\|u(\cdot, a_n) - u(\cdot, a_\infty)\|_{C([0,k])} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ para todo } k \in (0, F(a_\infty)),$$

pois $\sup_n F(a_n) = 1$.

Isto é,

$$\|u(\cdot, a_n) - u(\cdot, a_\infty)\|_{C([0, F(a_\infty) - \frac{\delta_0}{2}])} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

E assim existe $n_0 > 1$ tal que

$$|u(r, a_{n_0}) - u(r, a_\infty)| < \frac{F_{\epsilon, a_\infty}}{4}, \quad \text{uniformemente em } r \in [0, F(a_\infty) - \frac{\delta_0}{2}]. \tag{3.43}$$

Logo, de (3.42) e (3.43),

$$\begin{aligned} u(r, a_{n_0}) &\leq |u(r, a_{n_0}) - u(r, a_\infty)| + u(r, a_\infty) \\ &< \frac{F_{\epsilon, a_\infty}}{4} + \frac{F_{\epsilon, a_\infty}}{4} = \frac{F_{\epsilon, a_\infty}}{2}, \quad \forall\, r \in [F(a_\infty) - \delta_0, F(a_\infty) - \frac{\delta_0}{2}]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$u(r, a_{n_0}) < \frac{F_{\epsilon, a_\infty}}{2}, \quad \text{para todo } r \in [F(a_\infty) - \delta_0, F(a_\infty) - \frac{\delta_0}{2}]. \tag{3.44}$$

Da definição de F_{ϵ, a_∞} e u decrescente, segue que

$$u(r, a_n) \geq F_{\epsilon, a_\infty}, \quad \text{para todo } n > 1 \text{ e } r \in [0, F(a_\infty)]. \tag{3.45}$$

Logo, de (3.44) e (3.45),

$$u(F(a_\infty) - \delta_0, a_{n_0}) < \frac{F_{\epsilon, a_\infty}}{2} < F_{\epsilon, a_\infty} \leq u(F(a_\infty), a_{n_0}),$$

o que é impossível.

Portanto, não podemos ter $F(a_\infty) < 1$ e então $F(a_\infty) = 1$. Logo $a_\infty \in A$.

Para existência de solução do problema (GS), resta apenas mostrar que $u(1, a_\infty) = 0$.

Suponha, por contradição, que $u(1, a_\infty) > 0$. Escolha uma seqüência $a_n \nearrow a_\infty$.

Afirmação 2: $F(a_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

De fato, observe que $F(a_n) \leq F(a_{n+1}) \leq F(a_{n+2}) \leq \ldots < 1$.

Então $F(a_n) \nearrow F \leq 1$.

Se $F < 1$, faça $F_{a_\infty} = u(F, a_\infty)$. Para cada n suficientemente grande (por exemplo, tal que $a_n > F_{a_\infty}$), tome $t_n \in (0, F)$ satisfazendo $u(t_n, a_n) = F_{a_\infty}/4$. Como $u(\cdot, a_n)$ é decrescente, existe $\tilde{t}_n, 0 < \tilde{t}_n < t_n < F$, tal que $u(\tilde{t}_n, a_n) = F_{a_\infty}/2$.

Desde que $a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < \ldots$, pelo Lema 3.1 temos que

$$u(\cdot, a_n) < u(\cdot, a_{n+1}) < u(\cdot, a_{n+2}) < \cdots < a_\infty.$$

Por construção, $u(\tilde{t}_n, a_n) = u(\tilde{t}_{n+1}, a_{n+1}) = u(\tilde{t}_{n+2}, a_{n+2}) = \cdots = F_{a_\infty}/2$.

Então, temos

$$\tilde{t}_n < \tilde{t}_{n+1} < \tilde{t}_{n+2} < \ldots < F,$$

isto é,

$$\tilde{t}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{F} \leq F.$$

Vamos mostrar que $\tilde{F} = F$. Se $\tilde{F} < F$, existe $n_0 > 1$ tal que $F(a_{n_0}) > \tilde{F}$, pois $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_n) = F$.

Podemos concluir que

$$u(r, a_n) \leq \frac{F_{a_\infty}}{2}, \quad \text{para todo } n \geq n_0 \text{ e } r \in [\tilde{F}, F(a_{n_0})]. \tag{3.46}$$

De fato, pois, caso contrário, existiriam

$$\hat{n} \geq n_0 \text{ e algum } r_{\hat{n}} \in [\tilde{F}, F(a_{n_0})] \text{ com } \frac{F_{a_\infty}}{2} < u(r_{\hat{n}}, a_{\hat{n}}). \tag{3.47}$$

Assim, $\tilde{t}_{\hat{n}} \leq \tilde{F} \leq r_{\hat{n}}$ e segue de (3.47) e de u decrescente que

$$F_{a_\infty}/2 < u(r_{\hat{n}}, a_{\hat{n}}) \leq u(\tilde{t}_{\hat{n}}, a_{\hat{n}}) = F_{a_\infty}/2,$$

o que é absurdo.

Observe agora que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\tilde{F} + \epsilon < F(a_{n_0}), \text{ temos } u(r, a_\infty) > F_{a_\infty}, \ r \in [\tilde{F}, \tilde{F} + \epsilon]. \tag{3.48}$$

Logo, de (3.46) e (3.48),

$$\begin{aligned} |u(r, a_n) - u(r, a_\infty)| &\geq |u(r, a_\infty)| - |u(r, a_n)| > F_{a_\infty} - |u(r, a_n)| \\ &\geq F_{a_\infty} - \frac{F_{a_\infty}}{2} = \frac{F_{a_\infty}}{2}, \quad r \in [\tilde{F}, \tilde{F} + \epsilon]. \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2,

$$\|u(\cdot, a_n) - u(\cdot, a_\infty)\|_{C([0, \tilde{F}+\epsilon])} \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.49}$$

desde que $\lim_n F(a_n) = F < 1$, $F(a_\infty) = 1$, e assim $k = \tilde{F} + \epsilon < F(a_{n_0}) \leq F$ é tal que $k \in (0, \min\{F(a_\infty), \sup F(a_n)\})$.

Mas

$$\|u(\cdot, a_n) - u(\cdot, a_\infty)\|_{C([0, \tilde{F}+\epsilon])} \geq \|u(\cdot, a_n) - u(\cdot, a_\infty)\|_{C([\tilde{F}, \tilde{F}+\epsilon])} \geq \frac{F_{a_\infty}}{2}.$$

Passando o limite na desigualdade acima e usando (3.49), obtemos

$$0 = \lim_{n \to \infty} \|u(\cdot, a_n) - u(\cdot, a_\infty)\|_{C([0, \tilde{F}+\epsilon])} \geq \frac{F_{a_\infty}}{2} > 0,$$

o que é impossível. Portanto, não podemos ter $\tilde{F} < F$ e então $\tilde{F} = F$.

Agora, usando o Teorema do Valor Médio, temos

$$u(t_n, a_n) - u(\tilde{t}_n, a_n) = u'(\theta_n, a_n)(t_n - \tilde{t}_n), \quad \tilde{t}_n < \theta_n < t_n.$$

Então,

$$|u'(\theta_n, a_n)| = \frac{|u(t_n, a_n) - u(\tilde{t}_n, a_n)|}{|(t_n - \tilde{t}_n)|} = \frac{\left|\dfrac{F_{a_\infty}}{4} - \dfrac{F_{a_\infty}}{2}\right|}{|(t_n - \tilde{t}_n)|} = \frac{F_{a_\infty}}{4|(t_n - \tilde{t}_n)|} \tag{3.50}$$

Desde que $0 < \tilde{t}_n < t_n < F$ e $\tilde{t}_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} F$, segue de (3.50) que

$$|u'(\theta_n, a_n)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \tilde{t}_n < \theta_n < t_n.$$

Vamos mostrar que isto não pode ocorrer. De (3.8),

$$\begin{aligned} |u'(\theta_n, a_n)|^N &= \int_0^{\theta_n} t^{N-1} N \psi(t, u(t, a_n)) dt \\ &\leq \int_0^{t_n} t^{N-1} N \frac{\psi(t, u(t, a_n))}{[u(t, a_n)]^N} [u(t, a_n)]^N dt. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Como em (3.51) $0 \leq t \leq t_n$ e $u(t_n, a_n) = F_{a_\infty}/4$, temos $u(t, a_n) \geq u(t_n, a_n) = F_{a_\infty}/4$, já que u é decrescente.

Por (GS_2),

$$\frac{\psi(t, u(t, a_n))}{[u(t, a_n)]^N} \leq \frac{\psi(t, \frac{F_{a_\infty}}{4})}{[\frac{F_{a_\infty}}{4}]^N}$$

e, retomando (3.51),

$$\int_0^{t_n} t^{N-1} N \frac{\psi(t, u(t, a_n))}{[u(t, a_n)]^N} [u(t, a_n)]^N dt \leq \int_0^{t_n} t^{N-1} N \frac{\psi(t, \frac{F_{a_\infty}}{4})}{[\frac{F_{a_\infty}}{4}]^N} [u(t, a_n)]^N dt.$$

Desde que $a_n \nearrow a_\infty$, $a_n \leq a_\infty$ e, sendo u decrescente, $u(t, a_n) \leq a_\infty$.

Daí

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} t^{N-1} N \frac{\psi(t, \frac{F_{a_\infty}}{4})}{[\frac{F_{a_\infty}}{4}]^N} [u(t, a_n)]^N dt &\leq \int_0^{t_n} t^{N-1} N \frac{\psi(t, \frac{F_{a_\infty}}{4})}{[\frac{F_{a_\infty}}{4}]^N} [a_\infty]^N dt \\ &= \left(\frac{4a_\infty}{F_{a_\infty}}\right)^N N \int_0^{t_n} t^{N-1} \psi(t, \frac{F_{a_\infty}}{4}) dt. \end{aligned}$$

Como $t_n \nearrow F$,

$$\left(\frac{4a_\infty}{F_{a_\infty}}\right)^N N \int_0^{t_n} t^{N-1} \psi(t, \frac{F_{a_\infty}}{4}) dt \leq \left(\frac{4a_\infty}{F_{a_\infty}}\right)^N N \int_0^{F} t^{N-1} \psi(t, \frac{F_{a_\infty}}{4}) dt < \infty,$$

pois $\psi(\cdot, \frac{F_{a_\infty}}{4})$ é contínua em $[0, F]$, $F < 1$.

Portanto,

$$|u'(\theta_n, a_n)|^N \leq \left(\frac{4a_\infty}{F_{a_\infty}}\right)^N N \int_0^F t^{N-1}\psi(t, \frac{F_{a_\infty}}{4})dt < \infty.$$

Assim sendo, confirma-se o fato de que não podemos ter

$$|u'(\theta_n, a_n)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \tilde{t}_n < \theta_n < t_n.$$

Desta forma, $F < 1$ não ocorre, e então $F = 1$, isto é,

$$F(a_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{3.52}$$

Isto conclui a Afirmação 2.

Agora seja $l = u(1, a_\infty)$. Considere

$$F(\epsilon) = \int_0^{1-\epsilon} \left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, \frac{l}{4})dt\right]^{\frac{1}{N}} ds,$$

ou seja,

$$F(\epsilon) = \int_0^1 \left\{\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, \frac{l}{4})dt\right]^{\frac{1}{N}} \chi_{(0,1-\epsilon)}(s)\right\}ds, \ \epsilon \in (0,1).$$

Faça

$$g_\epsilon(s) = \left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, \frac{l}{4})dt\right]^{\frac{1}{N}} \chi_{(0,1-\epsilon)}(s), \quad s \in (0,1).$$

Vamos verificar as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:

$(i) g_\epsilon(s) \stackrel{\epsilon\to0}{\longrightarrow} g(s)$ quase sempre em $s \in (0,1)$.

De fato. Tome $s \in (0,1)$ e, assim, para ϵ suficientemente pequeno, $s < 1-\epsilon$, o que implica que $\chi_{(0,1-\epsilon)}(s) = 1$.

Daí

$$\lim_{\epsilon\to0} g_\epsilon(s) = \left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, \frac{l}{4})dt\right]^{\frac{1}{N}} = g(s).$$

$(ii) |g_\epsilon| \leq \phi, \ \phi : (0,1) \to (0,+\infty), \ \phi \in L^1((0,1))$.

De fato,

$$\begin{aligned} |g_\epsilon(s)| &= \left|\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, \frac{l}{4})dt\right]^{\frac{1}{N}}\right|\left|\chi_{(0,1-\epsilon)}(s)\right| \\ &\leq \left|\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, \frac{l}{4})dt\right]^{\frac{1}{N}}\right| = \left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t, \frac{l}{4})dt\right]^{\frac{1}{N}} = \phi(s). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Vamos mostrar que $\phi = g \in L^1((0,1))$.

Por (GS_3), $\lim\limits_{s\to\infty} \psi(t,s)/s^N = \psi_\infty(t) < 1$, uniformemente em t. Então dado $\delta > 0$ existe $S_\delta > 0$ tal que $s \geq S_\delta$ implica em

$$\left|\frac{\psi(t,s)}{s^N} - \psi_\infty(t)\right| < \delta.$$

Daí, $\psi(t,S_\delta)/S_\delta^N < \delta + \psi_\infty(t)$.

Tome $\delta = l/4$. Assim,

$$\frac{\psi(t,S_l)}{S_l^N} < \frac{l}{4} + \psi_\infty(t) < \frac{l}{4} + 1, \ \forall\ t \in [0,1). \tag{3.54}$$

Escolha $S_l > l/4$. Dado $s \in [l/4, S_l]$, existe (por (GS_1)) I_s, intervalo aberto, tal que $\psi(t,\cdot)$ é Lipschitz em I_s, isto é, desde que

$$|\psi(t,\tilde{s}) - \psi(t,\overline{s})| \leq k_s|\tilde{s} - \overline{s}|, \ \forall\ \tilde{s}, \overline{s} \in I,$$

segue que

$$\left[\frac{l}{4}, S_l\right] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{s_i}, \text{ para algum } s_i \in \left[\frac{l}{4}, S_l\right], \ i = 1, \cdots, n.$$

Tome $\tilde{s}_1 = l/4,\ \tilde{s}_2 \in I_{s_1} \cap I_{s_2},\ \tilde{s}_3 \in I_{s_2} \cap I_{s_3}, \ldots,\ \tilde{s}_n \in I_{s_{n-1}} \cap I_{s_n}$ e $\tilde{s}_{n+1} = S_l$.

Então

$$\left|\psi(t,\frac{l}{4}) - \psi(t,\tilde{s}_2)\right| \leq k_{s_1}\left|\frac{l}{4} - \tilde{s}_2\right|$$

$$\left|\psi(t,\tilde{s}_2) - \psi(t,\tilde{s}_3)\right| \leq k_{s_2}\left|\tilde{s}_2 - \tilde{s}_3\right|$$

$$\vdots$$

$$\left|\psi(t,\tilde{s}_n) - \psi(t,S_l)\right| \leq k_{s_n}\left|\tilde{s}_n - S_l\right|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\psi(t,\frac{l}{4}) - \psi(t,S_l)\right| &\leq \left|\psi(t,\frac{l}{4}) - \psi(t,\tilde{s}_2)\right| + \left|\psi(t,\tilde{s}_2) - \psi(t,\tilde{s}_3)\right| \\
&+ \ldots + \left|\psi(t,\tilde{s}_n) - \psi(t,S_l)\right| \\
&\leq k_{s_1}\left|\frac{l}{4} - \tilde{s}_2\right| + k_{s_2}\left|\tilde{s}_2 - \tilde{s}_3\right| + \ldots + k_{s_n}\left|\tilde{s}_n - S_l\right| \\
&= k.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\psi(t,\frac{l}{4}) \leq \psi(t,S_l) + k \overset{(3.54)}{\leq} S_l^N\left[\frac{l}{4} + 1\right] + k, \quad \forall\ t \in [0,1).$$

Ou seja, $\psi(t, l/4) \in L^{\infty}((0,1))$. Daí, por (3.53), $\phi \in L^1(0,1)$.

Assim sendo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{1-\epsilon} \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t, \frac{l}{4}) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds = \int_0^1 \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t, \frac{l}{4}) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds < \infty.$$

Podemos então escolher $t_1 \in (0,1)$ tal que

$$\int_{t_1}^1 \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t, \frac{l}{4}) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds < \frac{l^2}{16a_{\infty}}, \tag{3.55}$$

e, pelo Lema 3.2, temos

$$\|u(\cdot, a_n) - u(\cdot, a_{\infty})\|_{C([0,t_1])} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

onde $t_1 \in (0, \min\{F(a_{\infty}), \sup_n F(a_n)\})$, pois $F(a_n) \to 1$ e $F(a_{\infty}) = 1$.

Como conseqüência, $|u(t_1, a_n) - u(t_1, a_{\infty})| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Assim, para n_0 suficientemente grande tal que

$$u(t_1, a_{\infty}) - u(t_1, a_{n_0}) < \frac{l}{2},$$

segue que

$$u(t_1, a_{n_0}) > u(t_1, a_{\infty}) - \frac{l}{2} \geq l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}, \tag{3.56}$$

e então $u(t_1, a_{\infty}) \geq l$. Escolha $t_2 \in (t_1, 1)$ tal que $u(t_2, a_{n_0}) = l/4$.

De (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} u(t_2, a_{n_0}) &= a - \left\{ \int_0^{t_1} \left[\int_0^s t^{N-1} t N\psi(t, u(t, a_{n_0})) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \right. \\ &+ \left. \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t, u(t, a_{n_0})) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$u(t_2, a_{n_0}) = u(t_1, a_{n_0}) - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t, u(t, a_{n_0})) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds. \tag{3.57}$$

Desde que

$$\frac{\psi(t, u(t, a_{n_0}))}{[u(t, a_{n_0})]^N} \leq \frac{\psi(t, \frac{l}{4})}{[\frac{l}{4}]^N},$$

pois $u(t, a_{n_0}) \geq l/4$ para $t_1 \leq t \leq t_2$, temos,

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t,u(t,a_{n_0}))dt\right]^{\frac{1}{N}}ds\\
&\quad = \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^s t^{N-1}N\frac{\psi(t,u(t,a_{n_0}))}{[u(t,a_{n_0})]^N}[u(t,a_{n_0})]^N dt\right]^{\frac{1}{N}}ds\\
&\quad \leq \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^s t^{N-1}N\frac{\psi(t,\frac{l}{4}))}{(\frac{l}{4})^N}[u(t,a_{n_0})]^N dt\right]^{\frac{1}{N}}ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&< \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^s t^{N-1}N\frac{\psi(t,\frac{l}{4}))}{(\frac{l}{4})^N}a_\infty^N dt\right]^{\frac{1}{N}}ds\\
&= \frac{4a_\infty}{l}\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t,\frac{l}{4})dt\right]^{\frac{1}{N}}ds\\
&< \frac{4a_\infty}{l}\int_{t_1}^{1}\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t,\frac{l}{4})dt\right]^{\frac{1}{N}}ds \overset{3.55}{<} \frac{4a_\infty}{l}\frac{l^2}{16a_\infty}.
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Retomando (3.57), de (3.56) e (3.58),

$$
\begin{aligned}
u(t_2,a_{n_0}) &= u(t_1,a_{n_0}) - \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t,u(t,a_{n_0}))dt\right]^{\frac{1}{N}}ds\\
&> \frac{l}{2} - \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^s t^{N-1}N\psi(t,u(t,a_{n_0}))dt\right]^{\frac{1}{N}}ds\\
&> \frac{l}{2} - \frac{4a_\infty}{l}\frac{l^2}{16a_\infty} = \frac{l}{2} - \frac{l}{4} = \frac{l}{4},
\end{aligned}
$$

contradizendo a escolha de t_2 tal que $u(t_2,a_{n_0}) = l/4$.

Portanto, $u(1,a_\infty) = 0$ e a solução $u := u(\cdot,a_\infty)$ dada pelo Lema 3.1 é solução de (3.1). Finalmente, pelo Lema 1.17, $-u$ é solução de (GS). □

Unicidade:

Demonstração. Sejam $-u,-v \in C^2(B)\cap C(\overline{B})$ soluções radialmente simétricas de (GS). Pelo Lema 1.17, u,v são soluções de (1.3). Suponha que $u(0) > v(0)$. Assim, por (3.5), $u \geq v,\ [0,1]$.

Portanto, pelo Lema 1.18,

$$
\left[\frac{u'(r)}{u(r)+b} - \frac{v'(r)}{v(r)+b}\right](u(r)-v(r)) \geq 0,\ r\in[0,1].
$$

Ou seja,

$$\frac{u'(r)}{u(r)+b} - \frac{v'(r)}{v(r)+b} \geq 0, \;\; v \in [0,1]. \tag{3.59}$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{u(r)+b}{v(r)+b}\right)' = \frac{u'(r)(v(r)+b) - v'(r)(u(r)+b)}{[v(r)+b]^2} \geq 0, \quad \text{por (3.59)}.$$

Logo,

$$\frac{u(r)+b}{v(r)+b} \text{ é não-decrescente para } r \in [0,1).$$

Como $u(t) \geq v(t)$ e $\psi(x,s)/(s+b)^N$ é não-crescente em s,

$$\frac{\psi(t,u(t))}{[u(t)+b]^N} \leq \frac{\psi(t,v(t))}{[v(t)+b]^N}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,u(t))dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \\
&= \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t,u(t))}{[u(t)+b]^N}[u(t)+b]^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \\
&\leq \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t,v(t))}{[v(t)+b]^N}[u(t)+b]^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \\
&= \frac{u(r)+b}{v(r)+b} \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,v(t))dt \right]^{\frac{1}{N}} ds.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Por (3.6) e pelo fato de que $u(r), v(r) \xrightarrow{r\to 1} 0$ (pois $u(1) = v(1) = 0$), temos

$$u(0) = \lim_{r\to 1} \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,u(t))dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \tag{3.61}$$

e

$$v(0) = \lim_{r\to 1} \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,v(t))dt \right]^{\frac{1}{N}} ds. \tag{3.62}$$

Retomando a desigualdade (3.60), de (3.61) e (3.62), temos

$$\begin{aligned}
1 < \frac{u(0)}{v(0)} &= \lim_{r\to 1} \frac{\displaystyle\int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,u(t))dt \right]^{\frac{1}{N}} ds}{\displaystyle\int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,v(t))dt \right]^{\frac{1}{N}} ds} \\
&\leq \lim_{r\to 1} \frac{u(r)+b}{v(r)+b} = \frac{b}{b} = 1.
\end{aligned}$$

Impossível. Analogamente, chegamos a uma contradição se $u(0) < v(0)$. Portanto, $u(0) = v(0)$ e, pelo Lema 3.1, $u = v$. $\square$

Apêndice 1

Neste apêndice demonstraremos alguns resultados utilizados no Capítulo 2.

Lema 2.3

• (2.3) é equivalente ao sistema de equações integrais:

$$\begin{aligned} u(r) &= p + \int_0^r v(s)ds, \\ v(r) &= -r^{-(N-1)} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds \end{aligned} \tag{3.63}$$

De fato. Seja $u \in C^2(0,\epsilon) \cap C^1[0,\epsilon]$. Se u é solução de (2.3), então

$$-(r^{N-1}u')' = r^{N-1}f(u(r)), \quad u(0) = p, \; u'(0) = 0.$$

Integrando de 0 a r, obtemos

$$v(r) = -r^{-(N-1)} \int_0^r s^{N-1} f(u(s))ds,$$

onde $v(r) = u'(r)$.

Portanto, u e v satisfazem (3.63).

Por outro lado, se u e v satisfazem (3.63), então seguem da continuidade de u e f, após alguns cálculos,

$$-(r^{N-1}u')' = r^{N-1}f(u(r)), \quad u(0) = p.$$

Além disto, novamente da continuidade de f e $u \in C^1[0,\epsilon]$ segue, por L'Hopital,

$$u'(0) = \lim_{r \to 0} v(r) = 0.$$

Isto mostra que u é uma solução de (2.3).

• X_ϵ **é um espaço de Banach**.

(i) $X_\epsilon \subset C([0,\epsilon]) \times C([0,\epsilon])$.

Da definição da norma em (2.5), segue que $C([0,\epsilon]) \times C([0,\epsilon])$ é espaço de Banach.

(ii) X_ϵ é fechado.

Seja $\{(u_n, v_n)\} \in X_\epsilon$ uma seqüência convergente. Então, dado $\delta > 0$, existe $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $\|(u_n, v_n) - (u_0, v_0)\| < \delta$. Vamos mostrar que $(u_0, v_0) \in X_\epsilon$.

Por hipótese,

$$\max\{\max_{0\leq t\leq\epsilon} |u_n(t) - u_0(t)|, \max_{0\leq t\leq\epsilon} |v_n(t) - v_0(t)|\} < \delta,$$

ou seja,

$$\max_{0\leq t\leq\epsilon} |u_n(t) - u_0(t)| < \delta \quad \text{e} \quad \max_{0\leq t\leq\epsilon} |v_n(t) - v_0(t)| < \delta.$$

Segue que

$$|u_n(t) - u_0(t)| < \delta \quad \text{e} \quad |v_n(t) - v_0(t)| < \delta, \quad \forall\ t \in [0,\epsilon],$$

e, então, $u_n(t) \longrightarrow u_0(t)$ e $v_n(t) \longrightarrow v_0(t)$ uniformemente para $t \in [0,\epsilon]$.

Logo, $(u_0, v_0) \in C([0,\epsilon]) \times C([0,\epsilon])$, por ser limite uniforme de funções contínuas.

Como $(u_n, v_n) \in X_\epsilon$, $v_n(0) = 0$, para todo n. Daí, $\lim_{n\to\infty} v_n(0) = 0 = v_0(0)$.

Portanto, X_ϵ é um espaço de Banach.

• $C_{p,\epsilon}$ **é um espaço de Banach.**

$(i) C_{p,\epsilon} \subset X_\epsilon$ e X_ϵ é um espaço de Banach.

$(ii) C_{p,\epsilon}$ é fechado.

Se $(u_n, v_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (u_0, v_0)$, já vimos que $(u_0, v_0) \in X_\epsilon$.

Como $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$, para todo $t \in [0,\epsilon]$, $\lim_{n\to\infty} (u_n - p) = u_0 - p$, para todo t.

Como $\max_{0\leq t\leq\epsilon} |u_n(t) - p| \leq B$, para todo n, $\max_{0\leq t\leq\epsilon} |u_0(t) - p| \leq B$.

Da mesma forma, $\max_{0\leq t\leq\epsilon} |v_0(t)| \leq B$, o que implica que $(u_0, v_0) \in C_{p,\epsilon}$.

Apêndice 2

Neste apêndice demonstraremos alguns resultados utilizados no Capítulo 3.

Demonstração da Afirmação 1, Lema 3.1:

Demonstração. (a) $C([0,\varepsilon])$ é um espaço métrico completo.

$(C([0,\varepsilon]), d)$ é um espaço métrico, onde

$$d(u_1, u_2) = \max_{r\in[0,\varepsilon]} |u_1(r) - u_2(r)| = \|u_1 - u_2\|_\infty, \quad u_1, u_2 \in C([0,\varepsilon]).$$

Devemos mostrar que toda seqüência de Cauchy $\{u_n\}$ em $C([0,\varepsilon])$ converge, i.e., existe $u_0 \in C([0,\varepsilon])$ tal que $u_n \to u_0$.

Seja $\{u_n\}$ uma seqüência de Cauchy de elementos de $C([0,\varepsilon])$. Assim, para todo $\delta > 0$ dado, existe N_δ tal que $m, n > N_{\delta(a)}$ implica $d(u_m, u_n) = \max_{r\in[0,\varepsilon]} |u_m(r) - u_n(r)| < \delta$.

Então, para algum $r \in [0,\varepsilon]$,

$$|u_m(r) - u_n(r)| < \delta. \tag{3.64}$$

Fixando $r \in [0,\varepsilon]$, vemos que a seqüência numérica $\{u_n(r)\}$ é uma seqüência de Cauchy de números reais, e então existe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(r)$. Seja $u_0(r) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(r)$.

Vamos provar que $u_0 \in C([0,\varepsilon])$ e que $u_n \to u_0$ na métrica d.

Em (3.64), façamos $m \to \infty$. Daí $|u_0(r) - u_n(r)| < \delta$.

Logo, para todo $\delta > 0$ dado, existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_\delta$ implica $|u_n(r) - u_0(r)| < \delta,$ para todo $r \in [0,\varepsilon]$. Portanto, $u_n(r) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0(r),$ uniformemente.

Como o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua, $u_0 \in C([0,\varepsilon])$.

(b) $X_{a,\varepsilon}$ é fechado.

Seja $\{u_n\} \in X_{a,\varepsilon}$ uma seqüência convergente. Dado $\delta > 0,$ existe $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $\|u_n - u_0\|_\infty < \delta$. Vamos mostrar que $u_0 \in X_{a,\varepsilon(a)}$.

Por hipótese, $\max\limits_{r\in[0,\varepsilon]} |u_n(r) - u_0(r)| < \delta$. Pelo demonstrado em (a), $|u_n(r) - u_0(r)| < \delta,\ n \geq n_0,$ para todo $r \in [0,\varepsilon]$, ou seja, $u_n(r) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0(r),$ uniformemente para $r \in [0,\varepsilon]$.

Como $X_{a,\varepsilon} \subset C([0,\varepsilon])$ e $C([0,\varepsilon])$ é completo,

$$u_0 \in C([0,\varepsilon]). \tag{3.65}$$

Já que $u_n \in X_{a,\varepsilon}, u_n(0) = a,$ para todo n.

Daí

$$\lim_{n\to 0} u_n(0) = a = u_0(0). \tag{3.66}$$

Como $a/k_a \leq u_n(r) \leq a, \quad r \in [0,\varepsilon]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{k_a} \leq u_0(r) \leq a. \tag{3.67}$$

Por $(3.65), (3.66)$ e $(3.67), \quad u_0 \in X_{a,\varepsilon}.$ $\square$

Demonstração da Afirmação 2, Lema 3.1:

Demonstração. **Verificação de (i)**:

Observe que se $u \in X_{a,\varepsilon}, T(u) \in C([0,\varepsilon])$.

De fato,

$$T(u)(r) := a - \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,u(t))dt \right]^{\frac{1}{N}} ds.$$

Pelas hipóteses sobre ψ e, como $u \in X_{a,\varepsilon(a)},\ r \in [0,\varepsilon(a)],\ \psi(t,u(t))$ é contínua em $[0,\varepsilon]$. Então, $T(u)$ é derivável em $[0,\varepsilon]$. Portanto,

$$T(u) \in C([0,\varepsilon]). \tag{3.68}$$

É claro que

$$T(u)(0) = a. \tag{3.69}$$

Por outro lado, como $\dfrac{a}{k_a} \leq u(r) \leq a$, por (GS_2),

$$\frac{\psi(r,u(r))}{[u(r)]^N} \leq \frac{\psi(r,\frac{a}{k_a})}{[\frac{a}{k_a}]^N} \Rightarrow \frac{\psi(r,u(r))}{[u(r)]^N} \leq (k_a)^N \frac{\psi(r,\frac{a}{k_a})}{a^N}. \tag{3.70}$$

E então, por (3.70) e $u(r) \leq a,\ r \in [0,\varepsilon]$,

$$\begin{aligned} \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,u(t))dt \right]^{\frac{1}{N}} ds &= \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t,u(t))}{[u(t)]^N}[u(t)]^N dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \\ &\leq k_a \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,\frac{a}{k_a})dt \right]^{\frac{1}{N}} ds. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Observe que

$$k_a \int_0^{\varepsilon} \left[\int_0^s t^{N-1} N \psi(t, \frac{a}{k_a}) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Tomando $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(a) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\int_0^{\varepsilon_1} \left[\int_0^s t^{N-1} N \psi(t, u(t)) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds < \frac{(k_a - 1)}{k_a} a,$$

segue de (3.71) que

$$T(u)(r) = a - \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N \psi(t, u(t)) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \geq a - \frac{(k_a - 1)}{k_a} a$$

$$= \frac{a k_a - a k_a + a}{k_a} = \frac{a}{k_a}, \quad r \in [0, \varepsilon_1].$$

Daí,

$$\frac{a}{k_a} \leq T(u)(r) \leq a, \quad r \in [0, \varepsilon_1]. \tag{3.72}$$

Portanto, por (3.68), (3.69) *e* (3.72), $T(X_{a,\varepsilon_1}) \subset X_{a,\varepsilon_1}$, ficando o item (i) demonstrado.

Verificação de (ii): Sejam $u_i \in X_{a,\varepsilon}, i = 1, 2$.

Temos

$$\begin{aligned} \mid T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \mid \quad \leq \quad & \int_0^r \left[\int_0^s t^{N-1} N \psi(t, u_1(t)) dt \right]^{\frac{1}{N}} \\ - \quad & \left[\int_0^s t^{N-1} N \psi(t, u_2(t)) dt \right]^{\frac{1}{N}} ds \end{aligned} \tag{3.73}$$

Temos agora dois casos a considerar: $N = 1$ e $N > 1$.

1º caso: $N = 1$

Retomando (3.73),

$$\mid T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \mid \leq \int_0^r \left[\int_0^s \Big| \psi(t, u_1(t)) - \psi(t, u_2(t)) \Big| dt \right] ds. \tag{3.74}$$

Por (GS_1), temos

$$\mid T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \mid \leq \int_0^r \left[\int_0^s \lambda \left| u_1(t) - u_2(t) \right| dt \right] ds,$$

onde

$$|u_1(t) - u_2(t)| \ \leq \max_{t \in [0,\varepsilon]} |u_1(t) - u_2(t)| = \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Segue de (3.74):

$$| \, T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \, | \leq \lambda \|u_1 - u_2\|_\infty \int_0^r \left[\int_0^s dt \right] ds = \lambda \|u_1 - u_2\|_\infty \frac{r^2}{2}, \; r \in [0, \varepsilon].$$

Assim,

$$| \, T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \, | \leq \; \lambda \frac{\varepsilon^2}{2} \|u_1 - u_2\|_\infty = k_\varepsilon \|u_1 - u_2\|_\infty, \; r \in [0, \varepsilon].$$

Tome $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(a) > 0$ suficientemente pequeno tal que $k_{\varepsilon_2} \in (0,1)$, onde $k_\varepsilon = \dfrac{\lambda \varepsilon^2}{2}$.

Portanto,

$$\| \, T(u_1) - T(u_2) \, \|_\infty \leq k_{\varepsilon_2} \, \| \, u_1 - u_2 \, \|_\infty \; , \; k_{\varepsilon_2} \in (0,1),$$

o que implica que $T : X_{a,\varepsilon_2} \to X_{a,\varepsilon_2}$ é uma contração.

2º caso: $N > 1$

Considerando

$$X u_i(t) := \int_0^s t^{N-1} N \psi(t, u_i(t)) dt, \; i = 1, 2$$

e, retomando (3.73),

$$\begin{aligned} | \, T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \, | \quad &\leq \quad \int_0^r \left| |Xu_1(t)|^{\frac{1}{N}-1} Xu_1(t) - |Xu_2(t)|^{\frac{1}{N}-1} Xu_2(t) \right| ds \\ &\leq \quad \int_0^r C_N(|Xu_1(t)|^{\frac{1}{N}-1} + |Xu_2(t)|^{\frac{1}{N}-1}) |Xu_1(t) - Xu_2(t)| ds, \end{aligned}$$

onde usamos, na última desigualdade, o Lema 1.19.

Isto é, para $r \in [0, \varepsilon]$,

$$| \, T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \, | \leq \int_0^r C_N(|Xu_1(t)|^{\frac{1}{N}-1} + |Xu_2(t)|^{\frac{1}{N}-1}) |Xu_1(t) - Xu_2(t)| ds. \quad (3.75)$$

Vamos agora mensurar $|Xu_i(t)|^{\frac{1}{N}-1}$. Como $Xu_i(t) \geq 0, \; |Xu_i(t)| = Xu_i(t)$.

Então,

$$|Xu_i(t)| = \int_0^s t^{N-1} N \psi(t, u_i(t)) dt = \int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, u_i(t))}{[u_i(t)]^N} [u_i(t)]^N dt.$$

Como $u_i(t) \leq a$, por (GS_2) temos

$$|Xu_i(t)| \geq \int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t, a)}{a^N} [u_i(t)]^N dt.$$

Mas

$$\frac{a}{k_a} \leq u_i(t) \Rightarrow [u_i(t)]^N \geq \frac{a^N}{{k_a}^N}.$$

Daí
$$|Xu_i(t)| \geq \int_0^s t^{N-1} N \frac{\psi(t,a)}{a^N} \frac{a^N}{k_a^N} dt = k_a^{-N} \int_0^s t^{N-1} N\psi(t,a)dt.$$
Desde que $1/N - 1 < 0$,
$$|Xu_i(t)|^{\frac{1}{N}-1} \leq k_a^{N-1} \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,a)dt \right]^{\frac{1}{N}-1}. \tag{3.76}$$
Substituindo (3.76) em (3.75) e usando (GS_1),

$| \; T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \; |$
$$\leq \int_0^r C_N 2k_a^{N-1} \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,a)dt \right]^{\frac{1}{N}-1} \left[\int_0^s t^{N-1} N \mid \psi(t,u_1(t)) - \psi(t,u_2(t)) \mid dt \right] ds$$
$$\leq \int_0^r C_N 2k_a^{N-1} \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,a)dt \right]^{\frac{1}{N}-1} \left[\int_0^s t^{N-1} N\lambda \mid u_1(t) - u_2(t) \mid dt \right] ds$$
$$\leq \int_0^r C_N 2k_a^{N-1} \lambda \|u_1 - u_2\|_\infty \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,a)dt \right]^{\frac{1}{N}-1} \left[\int_0^s t^{N-1} N dt \right] ds,$$
onde λ independe de t e $|u_1(t) - u_2(t)| \leq \| u_1 - u_2 \|_\infty$.

Daí, $r \in [0, \varepsilon]$,
$$| \; T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \; | \leq \int_0^r C_N 2k_a^{N-1} \lambda \|u_1 - u_2\|_\infty \left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,a)dt \right]^{\frac{1}{N}-1} ts^N ds. \tag{3.77}$$
Vamos agora interpretar a hipótese (GS_5):
$$\mu_s |x|^N \leq \int_{B(0,|x|)} \psi(y,s)dy = \int_0^{|x|} \left(\int_{\partial B(0,|x|)} \psi(|y|,s) dS_y \right) dt$$
$$= \int_0^{|x|} \psi(t,s) \left(\int_{\partial B(0,|x|)} dS_y \right) dt = \omega_n \int_0^{|x|} \psi(t,s) t^{N-1} dt.$$
Isto é,
$$\int_0^{|x|} \psi(t,s) t^{N-1} dt \geq \frac{\mu_s}{\omega_n} |x|^N,$$
onde ω_n é o volume da bola unitária.

Daí
$$\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,a)dt \geq N \frac{\mu_a s^N}{\omega_n}$$
e, como $1/N - 1 < 0$,
$$\left[\int_0^s t^{N-1} N\psi(t,a)dt \right]^{\frac{1}{N}-1} \leq \left[\frac{N\mu_a s^N}{\omega_n} \right]^{\frac{1}{N}-1} = \overline{C_N} s^{1-N}. \tag{3.78}$$

Retomando (3.77) e aplicando (3.78),

$$
\begin{aligned}
\mid T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \mid &\leq \int_0^r \left(C_N 2k_a^{N-1}\lambda \|u_1 - u_2\|_\infty \overline{C_N} s^{1-N} s^N \right) ds \\
&= C_N \overline{C_N} 2k_a^{N-1} \lambda \|u_1 - u_2\|_\infty \int_0^r s ds = D_N \frac{r^2}{2} \|u_1 - u_2\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Desde que $r \in [0, \varepsilon]$,

$$
\mid T(u_1)(r) - T(u_2)(r) \mid \leq \; D_N \frac{\varepsilon^2}{2} \|u_1 - u_2\|_\infty = k_\varepsilon \|u_1 - u_2\|_\infty .
$$

Assim, podemos tomar $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(a) > 0$ suficientemente pequeno tal que $k_{\varepsilon_3} \in (0,1)$.

Portanto,

$$
\| \, T(u_1) - T(u_2) \, \|_\infty \leq \; k_{\varepsilon_3} \, \| \, u_1 - u_2 \, \|_\infty, \; k_{\varepsilon_3} \in (0,1),
$$

o que implica que $T : X_{a,\varepsilon_3} \to X_{a,\varepsilon_3}$ é uma contração.

Finalmente, tomando

$$
\varepsilon(a) = \begin{cases} \min\{\varepsilon_1(a), \varepsilon_2(a)\}, & \text{se} \quad N = 1 \\ \min\{\varepsilon_1(a), \varepsilon_3(a)\}, & \text{se} \quad N > 1, \end{cases}
$$

segue a Afirmação 2. □

Demonstração do Lema 1.18 :

Demonstração. Sejam $T, h > 0$. Dado $r \in (0, T]$ considere

$$
X := \{ w \in C^1([0,r]) : w \geq h, \; w'(0) = 0 \}.
$$

Se $w_1, w_2 \in X$, seja $H : [0,r] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida por

$$
\begin{aligned}
H(0) \;&:=\; 0 \quad e \\
H(t) \;&:=\; \left[|(w_2^{\frac{1}{N+1}})'|^{(N-1)} (w_2^{\frac{1}{N+1}})' w_2^{\frac{-N}{N+1}} - |(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{(N-1)} (w_1^{\frac{1}{N+1}})' w_1^{\frac{-N}{N+1}} \right] \cdot \\
&\quad \cdot (w_1 - w_2)(t), \quad \text{se } t \in (0, r]
\end{aligned}
$$

Considere o funcional $J_r : L^1([0,r]) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$
J_r(w) := \begin{cases} \dfrac{1}{N+1} \displaystyle\int_0^r \left| (w^{\frac{1}{N+1}})' \right|^{N+1} dt, & \text{se} \quad w \in X \\ \infty, & \text{se} \quad w \notin X \end{cases}
$$

Afirmamos que X é convexo. De fato, se $w_1, w_2 \in X$ e $\lambda \in (0,1)$, entâo

$$
z_\lambda := \lambda w_1 + (1-\lambda) w_2 \in X
$$

satisfaz

(1) $z_\lambda(t) := \lambda w_1(t) + (1-\lambda)w_2(t) \geq \lambda h + (1-\lambda)h = h;$

(2) $z_\lambda \in C^1([0,r])$, pois $w_1, w_2 \in C^1([0,r])$;

(3) $z'_\lambda(0) = \lambda w'_1(0) + (1-\lambda)w'_2(0) = 0.$

Logo, $z_\lambda \in X$, e portanto X é convexo.

Afirmamos agora que J_r é convexo. De fato, façamos $p = N+1$.

Consideremos os seguintes casos:

1. $w_1, w_2 \in X$.

   Neste caso, observe que $w_1 \geq h > 0$ e $\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \geq h > 0$.

   Sejam $z_1 = w_1^{\frac{1}{p}}$, $z_2 = w_2^{\frac{1}{p}}$ e $z_3 = (\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2)^{\frac{1}{p}}$.

   Daí,

$$\begin{aligned} z_3^{p-1}|z'_3| &= \frac{1}{p}(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2)^{\frac{p-1}{p}} \cdot (\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2)^{\frac{1}{p}-1} \cdot |\lambda w'_1 + (1-\lambda)w'_2| \\ &\leq \frac{1}{p}[\lambda|w'_1| + (1-\lambda)|w'_2|] \end{aligned} \tag{3.79}$$

   Desde que ${z_1}^p = w_1$, temos $w'_1 = p{z_1}^{p-1} \cdot z'_1$.

   Retomando (3.79),

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}[\lambda|w'_1| + (1-\lambda)|w'_2|\ ] &= \frac{1}{p}[p\lambda {z_1}^{p-1}|z'_1| + p(1-\lambda){z_2}^{p-1}|z'_2|\ ] \\ &= \lambda {z_1}^{p-1}|z'_1| + (1-\lambda){z_2}^{p-1}|z'_2|. \end{aligned} \tag{3.80}$$

   Tomando $q > 0$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,e retomando (3.80), temos

$$\begin{aligned} \lambda {z_1}^{p-1}|z'_1| + (1-\lambda){z_2}^{p-1}|z'_2| &= \underbrace{(\lambda^{\frac{1}{q}}{z_1}^{p-1})}_{a}\underbrace{(\lambda^{\frac{1}{p}}|z'_1|)}_{b} + \underbrace{((1-\lambda)^{\frac{1}{q}}{z_2}^{p-1})}_{c}\underbrace{((1-\lambda)^{\frac{1}{p}}|z'_2|)}_{d} \\ &= (a^q)^{\frac{1}{q}} \cdot (b^p)^{\frac{1}{p}} + (c^q)^{\frac{1}{q}} \cdot (d^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (a^q + c^q)^{\frac{1}{q}} \cdot (b^p + d^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= [\lambda {z_1}^{q(p-1)} + (1-\lambda){z_2}^{q(p-1)}]^{\frac{1}{q}}[\lambda|z'_1|^p \\ &+ (1-\lambda)|z'_2|^p]^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{3.81}$$

   Como $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p} \Rightarrow q = \dfrac{p}{p-1}$.

   Daí, retomando (3.81), obtemos

$$[\lambda {z_1}^{q(p-1)} + (1-\lambda){z_2}^{q(p-1)}]^{\frac{1}{q}} \cdot [\lambda|z'_1|^p + (1-\lambda)|z'_2|^p]^{\frac{1}{p}}$$

$$= [\lambda {z_1}^p + (1-\lambda){z_2}^p]^{\frac{p-1}{p}} \cdot [\lambda|z_1'|^p + (1-\lambda)|z_2'|^p]^{\frac{1}{p}}$$
$$= [\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2]^{\frac{p-1}{p}} \cdot [\lambda|z_1'|^p + (1-\lambda)|z_2'|^p]^{\frac{1}{p}}$$
$$= {z_3}^{p-1}[\lambda|z_1'|^p + (1-\lambda)|z_2'|^p]^{\frac{1}{p}}.$$

Daí,

$${z_3}^{p-1} \underbrace{|z_3'|}_{\geq 0} \leq {z_3}^{p-1} \underbrace{[\lambda|z_1'|^p + (1-\lambda)|z_2'|^p]^{\frac{1}{p}}}_{\geq 0}.$$

Como $z_3 \geq h^{\frac{1}{p}} > 0$, segue que ${z_3}^{p-1} > 0$ e então

$$|z_3'|^p \leq \lambda|z_1'|^p + (1-\lambda)|z_2'|^p. \tag{3.82}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} J_r(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) &= \frac{1}{p}\int_0^r \left|\{[\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2]^{\frac{1}{p}}\}'\right|^p dt \\ &= \frac{1}{p}\int_0^r |z_3'|^p dt \\ &\leq \frac{1}{p}\int_0^r [\lambda|z_1'|^p + (1-\lambda)|z_2'|^p]dt. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Mas $z_1' = ({w_1}^{\frac{1}{p}})'$ e $z_2' = ({w_2}^{\frac{1}{p}})'$, então, retomando (3.83),obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}\int_0^r \left(\lambda|z_1'|^p + (1-\lambda)|z_2'|^p\right)dt &= \lambda\left(\frac{1}{p}\int_0^r |({w_1}^{\frac{1}{p}})'|^p dt\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1}{p}\int_0^r |({w_2}^{\frac{1}{p}})'|^p dt\right) \\ &= \lambda J_r(w_1) + (1-\lambda)J_r(w_2). \end{aligned}$$

Logo, J_r é convexo.

2. $w_1, w_2 \notin X$.

   Temos duas situações a considerar:

   2.1) $\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \in X$.

   Neste caso, $J_r(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) < \infty = \lambda \underbrace{J_r(w_1)}_{=\infty} + (1-\lambda) \underbrace{J_r(w_2)}_{=\infty}.$

   2.2) $\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \notin X$.

   Assim, $J_r(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) = \infty = \lambda \underbrace{J_r(w_1)}_{=\infty} + (1-\lambda) \underbrace{J_r(w_2)}_{=\infty}.$

3. $w_1 \in X$ e $w_2 \notin X$.

   Temos, novamente, duas situações a considerar:

   3.1)$\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \in X$.

$$J_r(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) < \infty = \lambda \underbrace{J_r(w_1)}_{<\infty} + (1-\lambda) \underbrace{J_r(w_2)}_{=\infty}.$$

3.2)$\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \notin X$.

$$J_r(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) = \infty = \lambda \underbrace{J_r(w_1)}_{<\infty} + (1-\lambda)\underbrace{J_r(w_2)}_{=\infty}.$$

De qualquer forma, qualquer que seja $w \in C^1([0,r]), \lambda \in (0,1]$, temos

$$J_r(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2) \leq \lambda J_r(w_1) + (1-\lambda)J_r(w_2), \forall \lambda \in [0,1].$$

Sejam $w_1, w_2 \in X,\ \eta := w_1 - w_2$.

Primeiramente, observamos que:

(i) $w_2 + \lambda\eta = w_2 + \lambda(w_1 - w_2) = \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 \in X, \lambda \in (0,1)$, pois X é convexo.

(ii) $w_1 - \lambda\eta = w_1 - \lambda(w_1 - w_2) = \lambda w_2 + (1-\lambda)w_1 \in X, \lambda \in (0,1)$.

Denotando por $< J_r'(w), \eta >$ a derivada direcional de J_r em w na direção η, temos

$$\begin{aligned} < J_r'(w_2), \eta > &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{J_r(w_2+\lambda\eta) - J_r(w_2))}{\lambda} \\ &= \frac{1}{p}\lim_{\lambda\to 0}\int_0^r \left\{\frac{|[(w_2+\lambda\eta)^{\frac{1}{p}}]'|^p - |(w_2^{\frac{1}{p}})'|^p}{\lambda}\right\}dt. \end{aligned}$$

Tomando $f(s) = |s|^p$, $x = [(w_2+\lambda\eta)^{\frac{1}{p}}]'$ e $y = (w_2^{\frac{1}{p}})'$, obtemos

$$|x|^p - |y|^p = f(x) - f(y) = f'(\theta_\lambda)(x-y) = (|\theta_\lambda|^p)'(x-y) = p|\theta_\lambda|^{p-2}\theta_\lambda(x-y),$$

onde

$a)$ $\min\{\underbrace{[(w_2+\lambda\eta)^{\frac{1}{p}}]'}_{x}, \underbrace{(w_2^{\frac{1}{p}})'}_{y}\} \leq \theta_\lambda \leq \max\{\underbrace{[(w_2+\lambda\eta)^{\frac{1}{p}}]'}_{x}, \underbrace{(w_2^{\frac{1}{p}})'}_{y}\}$

$b)$ $|\theta_\lambda|^{p-2}\theta_\lambda = f'(\theta_\lambda) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ é mensurável, pois f o é.

Assim,

$$< J_r'(w_2), \eta >= \lim_{\lambda\to 0}\int_0^r |\theta_\lambda|^{p-2}\theta_\lambda\left[\frac{\overbrace{[(w_2+\lambda\eta)^{\frac{1}{p}}]'}^{x} - \overbrace{(w_2^{\frac{1}{p}})'}^{y}}{\lambda}\right]dt. \tag{3.84}$$

Analogamente, tomando $\tilde{\eta} = -\eta$, temos

$$< J_r'(w_1), -\eta >=< J_r'(w_1), \tilde{\eta} >= \lim_{\lambda\to 0}\int_0^r |\tilde{\theta}_\lambda|^{p-2}\tilde{\theta}_\lambda\left[\frac{\overbrace{[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]'}^{\tilde{x}} - \overbrace{(w_1^{\frac{1}{p}})'}^{\tilde{y}}}{\lambda}\right]dt \tag{3.85}$$

onde

$a')$ $\min\{\underbrace{[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]'}_{\tilde{x}}, \underbrace{(w_1^{\frac{1}{p}})'}_{\tilde{y}}\} \leq \tilde{\theta}_\lambda \leq \max\{\underbrace{[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]'}_{\tilde{x}}, \underbrace{(w_1^{\frac{1}{p}})'}_{\tilde{y}}\}.$

b') $|\tilde{\theta}_\lambda|^{p-2}\tilde{\theta}_\lambda = f'(\tilde{\theta}_\lambda)$ é mensurável, pois f o é.

No que segue, calculamos o limite em (3.85), já que o limite em (3.84) é similar. Para isto definimos

$$\tilde{g}_\lambda(t) := |\tilde{\theta}_\lambda|^{p-2}\tilde{\theta}_\lambda \left[\frac{[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]' - ({w_1}^{\frac{1}{p}})'}{\lambda}\right]$$

e mostraremos que $\tilde{g}_\lambda$ satisfaz as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Afirmamos que

$$\tilde{g}_\lambda(t) \to \frac{1}{p}|({w_1}^{\frac{1}{p}})'|^{p-2}({w_1}^{\frac{1}{p}})'({w_1}^{\frac{1-p}{p}}\tilde{\eta})'(r), \text{ para cada } \ t \in (0, r]. \tag{3.86}$$

De fato, primeiro observamos que para cada $r > 0$, $\tilde{\theta}_\lambda(r) \to (w_1(t)^{\frac{1}{p}})'$, pois

$$\underbrace{[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]'}_{\tilde{x}} = \frac{1}{p}(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1-p}{p}}(w_1'+\lambda\tilde{\eta}') \xrightarrow{\lambda\to 0} \frac{1}{p}{w_1}^{\frac{1-p}{p}} \cdot w_1' = \underbrace{({w_1}^{\frac{1}{p}})'}_{\tilde{y}}.$$

Assim,

$$|\tilde{\theta}_\lambda(t)|^{p-2}\tilde{\theta}_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda\to 0} |({w_1}^{\frac{1}{p}})'|^{p-2}({w_1}^{\frac{1}{p}})', \qquad \tilde{\theta}_\lambda \in (\min\{\tilde{x},\tilde{y}\}, \max\{\tilde{x},\tilde{y}\}).$$

Além disto, definindo

$$\tilde{\beta}_\lambda(t) := \frac{[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]' - ({w_1}^{\frac{1}{p}})'}{\lambda},$$

temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\tilde{\beta}_\lambda(r) &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{1}{p}(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1-p}{p}} \cdot (w_1'+\lambda\tilde{\eta}') - \frac{1}{p}{w_1}^{\frac{1-p}{p}} \cdot w_1'}{\lambda} \\
&= \frac{1}{p}\left\{\lim_{\lambda\to 0}\frac{(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1-p}{p}} \cdot w_1' + (w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1-p}{p}} \cdot \lambda\tilde{\eta}' - {w_1}^{\frac{1-p}{p}} \cdot w_1'}{\lambda}\right\} \\
&= \frac{1}{p}\left\{\lim_{\lambda\to 0}\frac{(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1-p}{p}} \cdot (w_1'+\lambda\tilde{\eta}'-w_1')}{\lambda} + w_1'\lim_{\lambda\to 0}\frac{(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1-p}{p}} - {w_1}^{\frac{1-p}{p}}}{\lambda}\right\} \\
&= \frac{1}{p}\left\{{w_1}^{\frac{1-p}{p}} \cdot \tilde{\eta}' + w_1'\lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{1-p}{p}(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1-2p}{p}} \cdot \tilde{\eta}}{1}\right\} \\
&= \frac{1}{p}({w_1}^{\frac{1-p}{p}}\tilde{\eta})'.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\tilde{g}_\lambda(t) = |\tilde{\theta}_\lambda|^{p-2} \cdot \tilde{\theta}_\lambda \cdot \tilde{\beta}_\lambda(t) \to |({w_1}^{\frac{1}{p}})'|^{p-2} \cdot ({w_1}^{\frac{1}{p}})' \cdot \frac{1}{p} \cdot ({w_1}^{\frac{1-p}{p}}\tilde{\eta})',$$

o que confirma a afirmação (3.86).

Afirmamos agora que

$$|\tilde{g}_\lambda(r)| \leq q(r), \text{ para alguma } \ q \in L^1((0, r)). \tag{3.87}$$

De fato, primeiro observe que, por definição de $\tilde{g}$ e $\tilde{\beta}$, segue que $|\tilde{g}_\lambda(t)| \leq |\tilde{\theta}_\lambda(t)|^{p-1} \cdot |\tilde{\beta}_\lambda(t)|$. Além disso, para $0 \leq \lambda \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
(i)\ \underbrace{[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]'}_{\tilde{x}} \ &\leq\ \left|[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]'\right| = \left|\frac{1}{p}(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1-p}{p}} \cdot (w_1'+\lambda\tilde{\eta}')\right| \\
&\leq\ \frac{1}{p}\frac{|w_1'|+\lambda|\tilde{\eta}'|}{(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{p-1}{p}}} \leq \frac{|w_1'|+\lambda|\tilde{\eta}'|}{h^{\frac{p-1}{p}}},\ \text{pois } (w_1+\lambda\tilde{\eta}) \geq h(\in X) \\
&\leq\ \frac{1}{h^{\frac{p-1}{p}}}(|w_1'|+|\eta'|),\ \text{já que } \lambda \leq 1\ e\ |\tilde{\eta}'| = |-\eta'| = |\eta'|.
\end{aligned}
$$

$$
(ii)\ \underbrace{(w_1{}^{\frac{1}{p}})'}_{\tilde{y}} \leq \left|\frac{1}{p}\cdot w_1{}^{\frac{1-p}{p}} \cdot w_1'\right| = \left|\frac{1}{p}\cdot\frac{w_1'}{\underbrace{w_1{}^{\frac{p-1}{p}}}_{\geq h}}\right| \leq \frac{|w_1'|}{\underbrace{ph^{\frac{p-1}{p}}}_{p\geq 1}} \leq \frac{|w_1'|}{h^{\frac{p-1}{p}}}.
$$

Logo, de (i) e (ii),

$$
\tilde{\theta}_\lambda \leq \max\left\{\frac{1}{h^{\frac{p-1}{p}}}(|w_1'|+|\eta'|)\ ,\ \frac{1}{h^{\frac{p-1}{p}}}|w_1'|\right\} = \frac{1}{h^{\frac{p-1}{p}}}(|w_1'|+|\eta'|). \tag{3.88}
$$

Por outro lado, temos

$$(iii)\ \ -[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]' \ \leq |\ \ [(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]'| \overset{(i)}{\leq} \frac{1}{h^{\frac{p-1}{p}}}(|w_1'|+|\eta'|).$$

$$(iv)\ \ -(w_1{}^{\frac{1}{p}})' \ \leq\ |(w_1{}^{\frac{1}{p}})'| \overset{(ii)}{\leq} \frac{|w_1'|}{h^{\frac{p-1}{p}}}.$$

Portanto, por (iii) e (iv),

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}_\lambda &\geq \min\{[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]', (w_1{}^{\frac{1}{p}})'\} \\
&= -\max\{-[(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1}{p}}]', -(w_1{}^{\frac{1}{p}})'\} \\
&\geq -\max\left\{\frac{1}{h^{\frac{p-1}{p}}}(|w_1'|+|\eta'|), \frac{|w_1'|}{h^{\frac{p-1}{p}}}\right\} \\
&= -\frac{1}{h^{\frac{p-1}{p}}}(|w_1'|+|\eta'|).
\end{aligned} \tag{3.89}
$$

De (3.88) e (3.89) obtemos

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\theta}_\lambda|^{p-1} &\leq \left[\frac{1}{h^{\frac{p-1}{p}}}(|w_1'|+|\eta'|)\right]^{p-1} \\
&= h^{\frac{-(p-1)^2}{p}}(|w_1'|+|\eta'|)^{p-1}
\end{aligned}
$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} |\tilde{\beta}_\lambda(t)| &\leq \underbrace{(w_1+\lambda\tilde{\eta})}_{\in X}^{\frac{1-p}{p}} \cdot |\tilde{\eta}'| + |w_1'| \cdot \left| \frac{(w_1+\lambda\tilde{\eta})^{\frac{1-p}{p}} - w_1^{\frac{1-p}{p}}}{\lambda} \right| \\ &\leq h^{\frac{1-p}{p}}|\eta'| + \frac{p-1}{p}|w_1'||\theta_\lambda|^{\frac{1-2p}{p}}|\eta|, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema do Valor Médio para a função $H(x) = x^{\frac{1-p}{p}}$, pois

$$\begin{aligned} \frac{H(w_1+\lambda\tilde{\eta}) - H(w_1)}{\lambda} &= \frac{H'(\theta_\lambda)\lambda\tilde{\eta}}{\lambda} \\ &= \frac{\overbrace{1-p}^{\leq 0}}{p} \cdot (\theta_\lambda)^{\frac{1-2p}{p}} \cdot \theta_\lambda' \cdot \tilde{\eta} \\ &\leq \frac{p-1}{p} \cdot |\theta_\lambda|^{\frac{1-2p}{p}} \cdot |\eta| \end{aligned}$$

com $0 < h \leq \min\{w_1 + \lambda\tilde{\eta}, w_1\} \leq \theta_\lambda \leq \max\{w_1+\lambda\tilde{\eta}, w_1\}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_\lambda(t)| &\leq |\tilde{\theta}_\lambda(t)|^{p-1} \cdot |\tilde{\beta}_\lambda(t)| \\ &\leq \frac{1}{h^{\frac{(p-1)^2}{p}}}(|w_1'| + |\eta'|)^{p-1} \cdot \left[h^{\frac{1-p}{p}}|\eta'| + \frac{p-1}{p}|w_1'||\eta| h^{\frac{1-2p}{p}} \right] := q(t), \end{aligned}$$

isto é,

$$|\tilde{g}_\lambda(t)| \leq q(t), \quad \text{com } q \in L_1[0,r],$$

pois como $w_1, w_2 \in X$ e $\eta = w_1 - w_2$, $(|w_1'| + |\eta'|)^{p-1} \xrightarrow{t \to 0} 0$.

Isto mostra a afirmação (3.87).

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to 0} \int_0^r \tilde{g}_\lambda(t)dt &= \int_0^r \lim_{\lambda \to 0} \tilde{g}_\lambda(t)dt \\ &= \int_0^r |(w_1^{\frac{1}{p}})'|^{p-2} \cdot (w_1^{\frac{1}{p}})' \cdot \frac{1}{p} \cdot (w_1^{\frac{1-p}{p}}\tilde{\eta})'dt. \end{aligned}$$

Daí

$$< J_r'(w), \tilde{\eta} >= \frac{1}{N+1}\int_0^r |(w^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w^{\frac{1}{N+1}})' \cdot (w^{\frac{-N}{N+1}}\tilde{\eta})'dt.$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
< J_r'(w), \overbrace{-\eta}^{\tilde{\eta}} >= & - \frac{1}{N+1} \cdot |(w_1^{\frac{1}{N+1}}(r))'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}}(r))' \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}}(r) \cdot \eta(r) \\
& + \frac{1}{N+1} \cdot |(w_1^{\frac{1}{N+1}}(0))'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}}(0))' \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}}(0) \cdot \eta(0) \\
& + \frac{1}{N+1} \cdot \int_0^r \frac{\left(|(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}})'\right)' \cdot \eta(t) dt}{w_1^{\frac{N}{N+1}}}
\end{aligned}
$$

De fato, integrando

$$
\frac{1}{N+1} \cdot \int_0^r \underbrace{\eta \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}}}_{u} \overbrace{(|(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}})')' dt}^{dv}
$$

por partes, temos

$$
u = \eta \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}} \quad \text{e então} \quad du = \eta' \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}} + \eta \cdot \left(\frac{-N}{N+1} \cdot w_1^{\frac{-2N-1}{N+1}} \cdot w_1' \right)
$$

e

$$
dv = (|(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}})')' dt \quad \text{o que nos dá} \quad v = |(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}})'.
$$

E então

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N+1} & \int_0^r \eta \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}} (|(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}})')' dt \\
= & \frac{1}{N+1} \Bigg\{ \eta \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}} \cdot |(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}})' \Bigg|_0^r \\
- & \int_0^r \left[|(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}})' \left[\eta' \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}} + \eta \cdot \left(\frac{-N}{N+1} \cdot w_1^{\frac{-2N-1}{N+1}} \cdot w_1' \right) \right] dt \right\} \\
= & \frac{1}{N+1} \eta(r) \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}}(r) \cdot |(w_1^{\frac{1}{N+1}}(r))'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}}(r))' \\
- & \frac{1}{N+1} \eta(0) \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}}(0) \cdot |(w_1^{\frac{1}{N+1}}(0))'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}}(0))' \\
- & \frac{1}{N+1} \int_0^r |(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}})' \cdot (w_1^{\frac{-N}{N+1}} \cdot \eta)' dt.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
< J_r'(w_1), \eta >= & + \frac{1}{N+1} \cdot |(w_1^{\frac{1}{N+1}}(r))'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}}(r))' \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}}(r) \cdot \eta(r) \\
& - \frac{1}{N+1} \cdot |(w_1^{\frac{1}{N+1}}(0))'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}}(0))' \cdot w_1^{\frac{-N}{N+1}}(0) \cdot \eta(0) \\
& - \frac{1}{N+1} \cdot \int_0^r \frac{\left(|(w_1^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1^{\frac{1}{N+1}})'\right)' \cdot \eta(t) dt}{w_1^{\frac{N}{N+1}}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
< J_r'(w_2), \eta > \quad - \quad & < J_r'(w_1), \eta >= \frac{1}{p}\Bigg\{ H(r) - \int_0^r \Bigg[\frac{(|(w_2{}^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_2{}^{\frac{1}{N+1}})')'}{w_2{}^{\frac{N}{N+1}}} \\
- \quad & \frac{(|(w_1{}^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1{}^{\frac{1}{N+1}})')'}{w_1{}^{\frac{N}{N+1}}} \Bigg] \cdot (w_1 - w_2) dt \Bigg\}. \qquad (3.90)
\end{aligned}
$$

Do Teorema 1.10, concluímos que

$$
< J_r'(w_1) - J_r'(w_2), \overbrace{w_1 - w_2}^{\eta} > \geq 0,
$$

e então (3.90) é não-positiva. Logo,

$$
\begin{aligned}
H(r) \quad \leq \quad & \int_0^r \Bigg[\frac{(|(w_2{}^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_2{}^{\frac{1}{N+1}})')'}{w_2{}^{\frac{N}{N+1}}} \\
- \quad & \frac{(|(w_1{}^{\frac{1}{N+1}})'|^{N-1} \cdot (w_1{}^{\frac{1}{N+1}})')'}{w_1{}^{\frac{N}{N+1}}} \Bigg] \cdot (w_1 - w_2) dt \qquad (3.91)
\end{aligned}
$$

Sejam $w_1 := (u+b)^{N+1}$ e $w_2 := (v+b)^{N+1}$. Por (3.91), obtemos

$$
\begin{aligned}
& \Bigg\{ |v'(r)|^{N-1} \cdot v'(r) \cdot [v(r)+b]^{-N} - |u'(r)|^{N-1} \cdot u'(r) \cdot [u(r)+b]^{-N} \Bigg\} \\
& \qquad \times \Bigg[\Bigg(u(r) + b \Bigg)^{N+1} - \Bigg(v(r) + b \Bigg)^{N+1} \Bigg]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq \quad & \int_0^r \Bigg\{ \frac{[|v'(s)|^{N-1} v'(s)]'}{[v(s)+b]^N} - \frac{[|u'(s)|^{N-1} u'(s)]'}{[u(s)+b]^N} \Bigg\} \cdot \Bigg\{ [u(s)+b]^{N+1} - [v(s)+b]^{N+1} \Bigg\} ds \\
\overset{Hip.}{=} \quad & N \int_0^r s^{N-1} \Bigg[- \frac{\psi(s, v(s))}{[v(s)+b]^N} + \frac{\psi(s, u(s))}{[u(s)+b]^N} \Bigg] \cdot \Bigg\{ [u(s)+b]^{N+1} - [v(s)+b]^{N+1} \Bigg\} ds \leq 0, \qquad (3.92)
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade decorre do seguinte:

(i)Se $u(s) \geq v(s)$, $\dfrac{\psi(s, u(s))}{[u(s)+b]^N} \leq \dfrac{\psi(s, v(s))}{[v(s)+b]^N}$ e então, na integral acima, temos

$$
\Bigg[- \frac{\psi(s, v(s))}{[v(s)+b]^N} + \frac{\psi(s, u(s))}{[u(s)+b]^N} \Bigg] \leq 0
$$

e

$$
\Bigg\{ [u(s)+b]^{N+1} - [v(s)+b]^{N+1} \Bigg\} \geq 0.
$$

(ii) Se $u(s) \leq v(s)$, $\dfrac{\psi(s,u(s))}{[u(s)+b]^N} \geq \dfrac{\psi(s,v(s))}{[v(s)+b]^N}$ e então, na integral acima, temos

$$\left[-\frac{\psi(s,v(s))}{[v(s)+b]^N} + \frac{\psi(s,u(s))}{[u(s)+b]^N}\right] \geq 0$$

e

$$\left\{[u(s)+b]^{N+1} - [v(s)+b]^{N+1}\right\} \leq 0.$$

Como

$$\begin{aligned}(u+b)^{N+1} - (v+b)^{N+1} &= (u-v)[(u+b)^N + (u+b)^{N-1}(v+b) + (u+b)^{N-2}(v+v)^2 \\ &+ \ldots + (u+b)^{N-(N-1)}(v+b)^{N-1} + (v+b)^N],\end{aligned}$$

de (3.92) temos que a expressão

$$\begin{aligned}\left[\frac{|u'|^{N-1}u'}{(u+b)^N} - \frac{|v'|^{N-1}v'}{(v+b)^N}\right] &\cdot (u-v)\cdot[(u+b)^N + (u+b)^{N-1}(v+b) \\ &+ \ldots + (u+b)^{N-(N-1)}(v+b)^{N-1} + (v+b)^N]\end{aligned}$$

é não-negativa, o que implica

$$\left[\frac{|u'|^{N-1}u'}{(u+b)^N} - \frac{|v'|^{N-1}v'}{(v+b)^N}\right]\cdot(u-v) \geq 0 \text{ em } (0,T). \tag{3.93}$$

Pelo Lema 1.11,

$$\left[\frac{|u'|^{N-1}u'}{(u+b)^N} - \frac{|v'|^{N-1}v'}{(v+b)^N}\right]\cdot\left[\frac{u'}{u+b} - \frac{v'}{v+b}\right] \geq 0 \text{ em } (0,T). \tag{3.94}$$

Por (3.93) e (3.94),

$$\left[\frac{|u'|^{N-1}u'}{(u+b)^N} - \frac{|v'|^{N-1}v'}{(v+b)^N}\right]^2\cdot\left[\frac{u'}{u+b} - \frac{v'}{v+b}\right]\cdot(u-v) \geq 0 \text{ em } (0,T).$$

Conseqüentemente,

$$\left[\frac{u'(r)}{u(r)+b} - \frac{v'(r)}{v(r)+b}\right]\cdot(u(r)-v(r)) \geq 0, \quad r \in (0,T).$$

$\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Ambrosetti, A. and Prodi, G., *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, (1993).

[2] Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*, John Wiley&Sons, New York, (1976).

[3] Calabi, E., *A construction of nonhomogeneous Einstein metrics*, Differential geometry, Part2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, 17-24.

[4] Chen, H., *Analysis of blowup for a nonlinear degenerate parabolic equation*, J. Math. Anal. Appl. 192, (1995), no. 1, 180-193.

[5] Chen, H., *On a singular nonlinear elliptic equation*, Nonlinear Anal. 29, (1997), no. 3, 337-345.

[6] Cheng, S. Y. and Yau, S. T., *On the regularity of the Monge-Ampère equation* $\det(\frac{\partial 2u}{\partial x_i \partial x_j}) = F(x,u)$, Comm. Pure Appl. Math. 30, no. 1,(1977), 41-68.

[7] Cirstea, F.; Ghergu, M. and Radulescu, V., *Combined effects of asymptotically linear and singular nonlinearities in bifurcation problems of Lane-Emden-Fowler type*, J. Math. Pures Appl. 84, (2005), 493-508.

[8] Coclite, M. and Palmieri, G., *On a singular nonlinear Dirichlet problem*, Comm. Partial Differential equations 14, (1989), 1315-1327.

[9] Cortázar, C.; Elgueta, M. and Felmer, P., *Symmetry in an elliptic problem and the blow-up set of a quasilinear heat equation*, Comm. Partial Differential Equations 21, no. 3, 4, (1996), 507-520.

[10] Cortázar, C.; Elgueta, M. and Felmer, P., *On a semilinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ with a non-Lipschitzian nonlinearity*, Adv. Differential Equations 1, no. 2, (1996), 199-218.

[11] Crandall, M.; Rabinowitz, P. and Tartar, L., *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations 2, (1977), 193-222.

[12] Gatica, J. A.; Oliker, V. and Waltman, P., *Singular nonlinear boundary value problems for second-order ordinary differential equations*, J. Differential Equations 79, (1989), no. 1, 62-78.

[13] Ghergu, M. and Radulescu, V., *Multiparameter bifurcation and asymptotics for the singular Lane-Emden-Fowler equation with convection term*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 135, (2005), 61-83.

[14] Gidas, B.; Ni, W. M. and Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68 , no. 3, (1979), 209-243.

[15] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Third edition, Berlin, (1997).

[16] Gonçalves, J. V. A. and Santos, C. A. P., *Quasilinear singular equations: a variational approach for nondifferentiable functionals*, Nonlinear Analysis 55, (2003), 583-607.

[17] Gonçalves, J. V. A. and Santos, C. A. P., *Classical solutions of singular Monge-Ampère equations in a ball*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 305, (2005), 240-252.

[18] Guan, B., *The Dirichlet problem for Monge-Ampère equations in non-convex domains and spacelike hypersurfaces of constant Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 350, no. 12,(1998), 4955-4971.

[19] Gui, C., *Symmetry of the blow-up set of a porous medium type equation*, Comm. Pure Appl. Math. 48, no. 5, (1995), 471-500.

[20] Gui, C. and Lin, F. H., *Regularity of an elliptic problem with a singular nonlinearity*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 123, (1993), 1021-1029.

[21] Gutiérrez, C. E., *The Monge-Ampère equation*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 44, Boston, (2001).

[22] Hernández, J.; Karátson, J. and Simon, P. L., *Multiplicity for semilinear elliptic equations involving singular nonlinearity*, Nonlinear Analysis 65, (2006), 265-283.

[23] Hirano, N. and Shioji, N., *Existence of positive solutions for singular Dirichlet problems*, Diff. and Int. Eq. 14, no. 12, (2001), 1531-1540.

[24] Kaper, H. G.; Kwong, M. K. and Li, Y., *Simmetry results for reaction-diffusion equations*, Differential Integral Equations 6, no. 5, (1993), 1045-1056.

[25] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag, Paris, (1993).

[26] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis With Applications*, Wiley, United States of America, (1978).

[27] Lazer, A. C. and McKenna, P. J., *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 111, (1991), no. 3, 721-730.

[28] Lazer, A. C. and McKenna, P. J., *On singular boundary value problems for the Monge-Ampère operator*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 197, (1996), 341-362.

[29] Loewner, C. and Nirenberg, L., *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations*, in: Contributions to analysis, Academic Press, New York, (1975), 245-274.

[30] Ni, W. N., *Uniqueness of solutions of nonlinear Dirichlet problems*, Journal of Differential Equations 50, (1983), 289-304.

[31] Ni, W. M. and Nussbaum, R. D., *Uniqueness and Nonuniqueness for Positive Radial Solutions of* $\triangle u + f(u,r) = 0$, Comm. on Pure and App. Math., vol. XXXVIII, (1985), 67-108.

[32] Nirenberg, L., *Monge-Ampère equations and some associated problems in geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C.), vol. 2, (1975), 275-279.

[33] Peral, I., *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, (1997).

[34] Radulescu, V. D., *Singular phenomena in nonlinear elliptic problems*, Craiova, (2000).

[35] Roberts, S. M. and Shipman, J. S., *Two-point boundary value problems: Shooting Methods*, American Elsevier, New York, (1972).

[36] Santos, C. A. P., *Soluções radialmente simétricas de problemas quasilineares singulares*, Tese de Doutorado, UnB, (2003).

[37] Santos, C. A. P. and Goncalves, J. V., *Singular Elliptic Problems: Existence, Non-Existence and Boundary Behavior*, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications, Estados Unidos, v. 66, (2007), 2078-2090.

[38] Smoller, J. A. and Wasserman, G., *Existence, uniqueness and nondegeneracy of positive solutions of semilinear elliptic equations*, Communications in Mathematical Physics 95, (1984), 129-159.

[39] Sun, Y. and Wu, S., *Iterative solution for a singular nonlinear elliptic problem*, Appl. Math. Comput. 118, (2001), 53-62.

[40] Sun, Y. and Wu, S., *Combined effects of singular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems*, J. Differential Equations 176, (2001), 511-531.

[41] Wang, H., *Convex solutions of boundary value problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 318, (2006), 246-252.

[42] Wheeden, R. L. and Zygmund, A., *Measure and Integral, An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York, (1977).

[43] Yao, M. and Zhao, J., *Positive solution of a singular non-linear elliptic boundary value problem*, Appl. Math. Comput. 148, (2004), 773-782.

[44] Zhang, Z.,*Critical points and positive of singular elliptic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 302, (2005), 476-483.