Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções "*ground state*" para uma classe de problemas elípticos semilineares

por

Magno Alves de Oliveira

2007

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Soluções "*ground state*" para uma classe de problemas elípticos semi-lineares

por

Magno Alves de Oliveira*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de Julho de 2007.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Alberto P. dos Santos - MAT/UnB (Orientador)

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves - MAT/UnB - Membro

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - MAT/UFV - Membro

*O autor foi bolsista do CNPQ durante a elaboração deste trabalho.

Às minhas mães,
Marilde e Dalva.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, a força suprema sobre todas as coisas.

Aqui na Terra, há muitas pessoas a quem gostaria de agradecer, especialmente aos professores Marinês Guerreiro, Sônia Maria Fernandes e Olímpio Hiroshi Miyagaki, da UFV, pelo incentivo inicial; ao Professor Carlos Alberto Pereira dos Santos, pelo cuidadoso trabalho de orientação, por sua generosidade ao compartilhar sua experiência e pelo exemplo profissional que se tornou pra mim; aos professores José Valdo Abreu Gonçalves, Olímpio Hiroshi Miyagaki e Antônio Luiz de Melo, respectivamente, membros e suplente da banca examinadora, por terem avaliado o trabalho e pelas oportunas correções e sugestões, e às grandes amigas Avelita, Cristina, Raquel, Rita e Vera, que apesar de distantes, sempre estiveram presentes.

Num trabalho como este, estou convicto de que o mais complicado não são as barreiras teóricas, pois isto a gente supera com dedicação e orientação adequada. O mais complicado é construir um contidiano saudável que te faça acreditar que tudo isso vale a pena. Nesse sentido, agradeço a todos os meus amigos da UnB, especialmente ao Miguel, Pêra, Léo, Vagner, Flavinha, Zapata, Lú, Bel, Manú, Monique, Gisliane, Karise, Jorjão e Tertu, pelas horas e horas de estudo, sempre bem humoradas, pelo apoio nos momentos de fraqueza, pelas alegrias divididas e experiências compartilhadas.

Finalmente, agradeço a minha família pelo apoio incondicional.

Resumo

Consideraremos neste trabalho uma classe de problemas semilineares em $\mathbb{R}^N$ cuja principal característica é a presença de um termo singular na perturbação não linear do operador.

Combinando técnicas variacionais, argumentos do tipo sub e super soluções e princípio de comparação provamos um teorema, devido à Zhang [49], 2007, que estabelece a existência de pelo menos uma "*ground state*" para o problema.

Além disso, com algumas variações nas hipóteses da perturbação do operador, provamos resultados que estabelecem unicidade e não-existência de "*ground state*" radialmente simétrica. Estes resultados são devidos à Gonçalves e Santos [25], 2004, e à Cirstea e Radulescu [9], 1999.

Palavras-chaves: "*ground state*" , subsolução, supersolução, existência, não-existência, unicidade.

Abstract

We will consider in this work a class of semilinear problems in $\mathbb{R}^N$ whose main characteristic is the presence of a singular term in the not linear perturbation of the operator.

Combining variational techniques, arguments of the type upper and lower solutions and principle of comparison we prove a theorem, due to Zhang [49], 2007, that it establishes the existence of at least one *ground state* for the problem.

Moreover, with some variations in the hypotheses of the perturbation of the operator, we prove results that establish unicity and nonexistence of radially symmetrical *ground state*. These results are due to Gonçalves and Santos [25], 2004, and to Cirstea and Radulescu [9], 1999.

Key words: *ground state*, lower solution, upper solution, existence, nonexistence, unicity.

SUMÁRIO

Introdução

Neste trabalho consideraremos o seguinte problema semilinear

$$(GS): \qquad \begin{cases} -\Delta u = b(x)g(u(x)), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ \qquad u > 0, \\ \displaystyle\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases}$$

onde $b : \mathbb{R}^N \longrightarrow (0, \infty)$ e $g : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ são funções apropriadas.

Por uma solução clássica do problema (GS) entenderemos como sendo uma função $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (GS), a qual será designada de agora em diante como uma "*ground state*" de (GS).

O nosso principal objetivo nesse trabalho é provar alguns resultados recentes acerca de existência, não existência e unicidade de soluções clássicas para o problema (GS). Estamos principalmente focados no caso em que a perturbação não linear do operador, a função g, se comporta como

$$\lim_{s\to 0^+} g(s) = \infty.$$

De agora em diante, o problema (GS) com esse tipo de não-linearidade será denominado, neste trabalho, como problema singular.

A pesquisa para esta classe de problemas com b e g satisfazendo hipóteses apropriadas é razoavelmente recente. Um dos trabalhos pioneiros foi o publicado por Edelson [16], em 1989.

No entanto, a pesquisa para problemas do tipo (GS) em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$, isto é,

$$(GL): \qquad \begin{cases} -\Delta u = b(x)g(u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) > 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular e b e g apresentam algum tipo de singularidade, antecede às pesquisas para a classe de problemas (GS) e já existe uma ampla e importante teoria produzida.

Neste trabalho, entenderemos como uma solução clássica para o problema (GL) como sendo uma função $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (GL), tal que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Problemas estacionários envolvendo singularidades não-lineares, bem como os associados a equações de evolução, descrevem naturalmente diversos fenômenos físicos. Pelo melhor do nosso conhecimento, o interesse em torno do problema (GL) surgiu a partir da década de 60 em pesquisas realizadas por Maybe e Fulks [19], que abordavam um problema de condutividade elétrica.

O problema considerado por Maybe e Fulks [19], em 1960, foi modelado assim: Seja Ω uma região de $\mathbb{R}^3$ ocupada por um condutor elétrico. Denote por $u(x, t)$ a temperatura no ponto $x \in \Omega$, no tempo t. Suponha que $E(x, t)$ é a queda de tensão local em Ω dada em função de x e t e que a resistividade elétrica é dada pela função $\sigma(s)$. Então a taxa de geração do calor em qualquer ponto x no tempo t é

$$\frac{f(x,t)}{\sigma(u)}.$$

Denotando por c e por k o calor específico e a condutividade térmica de Ω, respectivamente, as quais são supostas constantes, Maybe e Fulks obtiveram que $u(x, t)$ satisfaz a seguinte equação parabólica

$$cu_t - k\Delta u = \frac{f(x,t)}{\sigma(u)}, \tag{1}$$

onde σ foi considerada no caso mais simples onde $\sigma(s) = \gamma s$, onde γ é uma constante positiva.

No caso mais geral, onde $\sigma(s) > 0$ se $s > 0$, σ crescente e $\sigma \longrightarrow 0$ quando $s \longrightarrow 0^+$ (por exemplo $\sigma(s) = \gamma s$), o comportamento de σ provoca uma singularidade do lado direito da equação (1). Em particular, quando temos soluções estacionarias de (1), somos levados ao problema elíptico

$$-k\Delta u = \frac{f(x)}{\sigma(u)}.$$

Maybe e Fulks provaram resultados de existência e unicidade usando argumento de ponto fixo, e além disso, mostraram que soluções do problema parabólico (1) tendiam à única solução da equação elíptica correspondente.

Além disso, problemas do tipo (GL) surgem no contexto de catalizadores químicos heterogêneos, superfícies singulares mínimas, fluidos não-Newtonianos (os chamados fluidos pseudoplásticos), em fenômenos de camada limite para fluidos viscosos, em processos de reação-difusão, na obtenção de diversos índices geofísicos (avanço glacial) e industriais e também na teoria de investigação de paternidade biológica. Para maiores detalhes, veja [5]- [7], [10], [13], [14], [19], [28]- [30], [39], [44], [45], e suas referências.

O conceito de problemas singulares do tipo (GL) encontrado atualmente na literatura é bastante amplo. Por exemplo, em 1979, Taliaferro [46] considerou o caso $N = 1$ e $\Omega = (0, 1)$, permitindo $b(x)$ ser singular em $x = 0$ e $x = 1$. Ele provou que uma condição necessária e suficiente para a existência de solução é

$$\int_0^1 x(1-x)b(x)dx \ < \ \infty.$$

Seu principal objetivo, ao contrário do nosso neste texto, era considerar problemas do tipo (GL) nos quais b apresentasse algum tipo de singularidade.

O resultado obtido por Taliaferro foi estendido por Usami [47] em 1989 para o caso $N \geq 2$ e $\Omega = B$. Usami considerou o problema mais geral

$$(GL)_1 : \qquad \begin{cases} \Delta u + b(x)g(u) = 0, & x \in B \\ u > 0, & x \in B \\ u = 0, & x \in \partial B, \end{cases}$$

onde $f(x, s) := b(x)g(s)$ é localmente *Hölder* contínua com respeito a (x, s) em $B \times (0, \infty)$ e localmente lipchitziana com respeito a s em $(0, \infty)$ e satisfaz

$$0 < f_*(|x|, s) \leq f(x, s) \leq f^*(|x|, s), \ para \ (x, s) \in B \times (0, \infty),$$

onde f_* e f^* têm continuidade similar com f e são estritamente decrescentes com respeito a s em $(0, \infty)$, e estabeleceu condições suficientes e/ou necessárias para a existência de soluções para o problema $(GL)_1$.

Voltando ao nosso interesse principal, qual seja, singularidade no termo g do problema (GL), um exemplo típico é o problema

$$(GL)_2 : \quad \begin{cases} -\Delta u = b(x)u^{-\lambda}, & x \in \Omega \\ u(x) > 0, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde b é uma função positiva, localmente *Hölder* contínua e $g(s) = s^{-\lambda}$, com $\lambda > 0$. Este problema foi estudado por Crandall, Rabinowitz e Tartar [11], em 1977, no caso em que $\Omega = B = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < 1\}$, sob a hipótese que $b \in C^1(\overline{B})$ e $\min_{x\in\overline{\Omega}} b(x) > 0$.

Mais tarde, Lazer e Mackenna, em 1991, provaram em [36] que o problema $(GL)_2$ tem única solução clássica se b é uma função suficientemente suave e positiva em $\overline{\Omega}$.

Além disso, problemas singulares do tipo (GL) são considerados para operadores mais gerais, como, por exemplo, o operador p-Laplaciano,

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

(veja [41] e suas referências), o operador de Monge-Ampère,

$$M[u] = det(\nabla^2 u),$$

onde $\nabla^2 u$ é a matriz hessiana de u, (veja [4], [8], [23], [27], [37] e suas referências), e operadores do tipo

$$div(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

(veja [42], e suas referências).

No recente trabalho [26], em 2007, Gonçalves e Santos consideram o problema mais geral, que inclui o problema (GL),

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x) f(u) + \rho b(x) g(u) = 0, & x \in \Omega \\ u > 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $a, b : \overline{\Omega} \longrightarrow [0, \infty)$ são funções Hölder contínuas com expoente $\nu \in (0,1)$, $\lambda, \rho \geq 0$ são parâmetros e $f, g : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ são funções em $Lip_{loc}(0,\infty)$, e discutem a existência, unicidade e comportamento na fronteira de solução para este problema.

De volta ao problema (GS), a partir de agora, considere b satisfazendo

$$b \in C^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N), \ \textit{para algum } \alpha \in (0,1), \ b > 0 \textit{ em } \mathbb{R}^N, N \geq 3.$$

Conforme já mencionamos, em 1989, Edelson [16] estudou o problema (GS), considerando $g(s) = s^{-\lambda}$, $\lambda \in (0,1)$, e demonstrou a existência de uma solução de (GS) sob a hipótese adicional

$$\int_1^\infty r^{N-1+\lambda(N-2)}\varphi(r)dr < \infty,$$

onde

$$\varphi(r) := \max_{|x|=r} b(x).$$

Esse resultado foi generalizado, em 1993, por Shaker [43] para $\lambda > 0$, via método de sub e super soluções.

Em 1996, Lair e Shaker [34] mostraram a existência de uma única solução do problema (GS), ainda considerando $g(s) = s^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, sob a hipótese

(b_1)
$$\int_0^\infty r\varphi(r)dr < \infty.$$

Em 1997, Zhang [48] conseguiu demonstrar a existência de uma solução para o caso de uma não linearidade g positiva e decrescente, satisfazendo

$$g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$$

e também

$$\lim_{s\to 0} g(s) = \infty.$$

Nesse sentido, em 1999, Cirstea e Radulescu [9] generalizaram os principais resultados anteriores. Eles demonstraram a existência de uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in (0,1)$, do problema (GS) para não linearidades da função g, não necessariamente decrescente, satisfazendo:

(g_1) *Existe* $\beta > 0$ *tal que* $\dfrac{g(s)}{s+\beta}$ *é decrescente em* $(0,\infty)$;

(g_2) g *é limitada numa vizinhança do infinito*;

e

(g_3)
$$\lim_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = \infty.$$

Recentemente, no trabalho escrito por Dinu [15] em 2006, supondo b satisfazendo

(b_2)
$$\int_0^\infty r^{N-1}\varphi(r)dr < \infty$$

e $g : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) \in C^{\alpha}_{loc}(0, \infty)$ satisfazendo $(g_3) - (g_5)$, onde

$$(g_4) \qquad \lim_{s \to \infty} \frac{g(s)}{s} = 0$$

e

$$(g_5) \qquad \frac{g(s)}{s} \text{ é decrescente em } (0, \infty),$$

foi mostrado existência e unicidade de "*ground state*" para o problema (GS), desde que a função g fosse crescente em $(0, \infty)$.

Esses resultados foram melhorados, em parte, por Gonçalves e Santos [24], em 2006, onde a existência de "*ground state*" foi mostrada sob a hipótese

$$(g_6) \qquad \frac{g(s)}{s} \text{ é não crescente em } (0, \infty),$$

no lugar de (g_1), e (g_4) no lugar de (g_2).

O principal objetivo deste trabalho, realizado mais especificamente no Capítulo 2, é demonstrar o teorema abaixo, devido à Zhang [49], em 2007, que melhora os resultados anteriores no sentido que nenhuma hipótese de monotonicidade sobre g e sobre o quociente $\frac{g(s)}{s}$ é exigida.

Teorema (ZH). *Suponha b satisfazendo (b_1), e $g \in C^1((0, \infty), (0, \infty))$ satisfazendo $(g_3) - (g_4)$. Então o problema (GS) possui pelo menos uma solução $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, isto é, admite pelo menos uma "ground state" .*

Considere, agora, as seguintes hipóteses:

$$(g_7) \qquad \liminf_{s \to 0} g(s) > 0,$$

$$(g_8) \qquad \limsup_{s \to 0} g(s) > 0$$

e

$$(g_9) \qquad \text{Existe } \beta > 0 \text{ tal que } \frac{g(s)}{s + \beta} \text{ é não crescente em } (0, \infty).$$

Um outro resultado importante no contexto de problemas do tipo (GS) diz respeito à não existência de "*ground state*" para essa classe de problemas. Provaremos no Capítulo 3 o teorema abaixo, devido à Cirstea e Radulescu [9], em 1999, e à Gonçalves e Santos [25], em 2004.

Teorema (NE). *Suponha que b seja uma função radialmente simétrica, isto é, $b(x) = b(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^N$, e $g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$. Então o problema (GS) não possui solução radial positiva se*
(i) $N \geq 3$, *g satisfaz (g_9) e*

$$\int_0^\infty rb(r) = \infty$$

ou
(ii) $N \leq 2$.

O outro resultado demonstrado nesse trabalho é devido à Gonçalves e Santos [25] e diz respeito a situações onde é possível obter unicidade de "*ground state*" para o problema (GS). Trata-se do

Teorema (UN). *Suponha $g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ satisfazendo (g_9) e b radialmente simétrica. Então o problema (GS) admite, no máximo, uma solução.*

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, listamos alguns resultados, que não serão demonstrados, que nos auxiliarão na demonstração dos resultados principais. No Capítulo 2, provamos o Teorema (ZH). Para demonstração deste teorema usamos o método de sub e super soluções e nos apoiamos num teorema de fundamental importância, devido à Cui [12], em 2000, que diz respeito à existência de solução clássica para problemas do tipo (GL). Uma demonstração completa desse teorema encontra-se no Apêndice B desse trabalho.

No Capítulo 3, discutimos a questão da não-existência de "*ground state*" para o problema (GS), sob hipóteses apropriadas. Em particular, provamos o Teorema (NE) . Adicionalmente, discutimos a questão da unicidade de solução e provamos o Teorema (UN).

Neste trabalho, incluímos três apêndices que contêm alguns resultados técnicos. Colocamos no Apêndice A alguns resultados gerais; no Apêndice B, conforme já mencionado, introduzimos alguns resultados com o objetivo de provar o Teorema (B.5), de sub e super solução para problemas singulares em domínios limitados, devido à Cui [12]. Reservamos o Apêndice C para a demonstração de alguns resultados técnicos relacionados à demonstração que consta do Apêndice B.

CAPÍTULO 1

Noções preliminares e resultados auxiliares

1.1 Noções preliminares

Nesta seção, apresentamos algumas definições e noções que compõem o meio sobre o qual desenvolveremos o nosso trabalho. Nos limitamos a apresentar apenas as noções fundamentais, de maneira resumida, e que foram utilizadas, de alguma forma, no decorrer do trabalho, por questão de compacidade. Apresentamos, também, alguns teoremas clássicos que nos auxiliarão a compreender os resultados obtidos.

1.1.1 Espaços de funções e noções gerais

Sejam Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e L um operador diferencial parcial linear de segunda ordem

$$L := L(x, D) = \sum_{|p|\leq 2} a_p(x) D^p,$$

onde $p = (p_1, ..., p_n)$, $p_j \geq 0$ inteiro, $|p| = \sum_{j=1}^{n} p_j$, $D^p = D_1^{p_1} ... D_n^{p_n}$, com $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, e os coeficientes a_p são funções complexas definidas em Ω.

Definição 1.1. O operador L é *elíptico* se a forma quadrática

$$L'(x, \xi) = \sum_{|p|=2} a_p(x) \xi^p$$

for definida, para cada $x \in \overline{\Omega}$.

Definição 1.2. O operador L é *uniformemente elíptico* se existir uma constante $C > 0$ tal que

$$L'(x, \xi) \geq C|\xi|^2, \ \forall x \in \overline{\Omega} \ e \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Observação 1.3. Se os coeficientes do operador elíptico L são contínuos em $\overline{\Omega}$, então L é uniformente elíptico.

Observação 1.4. O operador Laplaciano $\Delta = \sum_{j=1}^{n} D_j^2$ é elíptico.

Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ e $m \geq 0$ um número inteiro. Designamos por $C^m(\overline{\Omega})$ o espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ que são restrições a $\overline{\Omega}$ de funções diferenciáveis até a ordem m e definidas em uma vizinhança aberta de $\overline{\Omega}$. O espaço $C^m(\overline{\Omega})$, munido da norma $\|.\|_{C^m(\overline{\Omega})}$, é um espaço de *Banach*, onde

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|p| \leq m} \|D^p u\|_0 \ e \ \|u\|_0 = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Definição 1.5. Uma função $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser *Hölder contínua de expoente* α se

$$H_\alpha[u] := \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \overline{\Omega}}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Designamos por $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ o espaço das funções de $C^m(\overline{\Omega})$ cujas m-ésimas derivadas são *Hölder* contínuas de expoente α. O espaço $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, munido da norma $\|.\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})}$, onde

$$\|u\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \sum_{|p| = m} H_\alpha[D^p u],$$

é um espaço de *Banach*, denominado *espaço de Schauder.*

Observação 1.6. Se $m = 0$, denotaremos $C^{0,\alpha} = C^\alpha$.

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ um número inteiro, $1 \leq p < \infty$, e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ um multi-índice. Designamos $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq m$, sendo $D^\alpha u$ a derivada de u no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$, munido da norma $\|.\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, onde

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de *Banach*, denominado *espaço de Sobolev.*

O conjunto $W_0^{m,p}(\Omega)$ representa o fecho no espaço $W^{m,p}(\Omega)$ de todas as funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω.

Teorema 1.7 (Teorema da estimativa interior L^p). [1] *Sejam Ω_0, Ω domínios abertos limitados em $\mathbb{R}^N$ com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$. Suponha que L é um operador elíptico de segunda ordem com coeficientes contínuos em $\overline{\Omega}$ e $q > N$. Então existe uma constante k tal que*

$$\|w\|_{W^{2,q}(\Omega_0)} \leq k \left(\|Lw\|_{L^q(\Omega)} + \|w\|_{L^q(\Omega)} \right), \forall w \in W^{2,q}(\Omega).$$

A constante k depende de: N, q, o diâmetro de Ω, a distância de Ω_0 a $\partial\Omega$, a constante de elipticidade de L, os limites para os coeficientes de L (em $L^\infty(\Omega)$) e os módulos de continuidade dos coeficientes.

1.1.2 Teoremas de regularidade

Nesta subseção, apresentamos de forma resumida alguns elementos da teoria de *Schauder* que usaremos no decorrer deste trabalho, além de algumas definições.

Definição 1.8. Sejam X e Y espaços vetoriais normados, e $\|.\|_X$ e $\|.\|_Y$ suas respectivas normas. Dizemos que X está *imerso continuamente* em Y (Notação: $X \hookrightarrow Y$) se X é um subspaço vetorial de Y e a inclusão

$$\begin{array}{rccl} I: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & I(x) := x \end{array}$$

é uma aplicação contínua.

Observação 1.9. Como I é linear, temos que $X \hookrightarrow Y$ se e somente se existe uma constante $C > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$.

Definição 1.10. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que um operador $T : X \longrightarrow Y$ é *compacto* se T é contínuo e, além disso, qualquer que seja $A \subset X$ limitado é tal que $\overline{T(A)}$ é compacto em Y.

Definição 1.11. Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Dizemos que X está *compactamente imerso* em Y (Notação: $X \overset{compacta}{\hookrightarrow} Y$) se a aplicação I é compacta.

Observação 1.12. $X \overset{compacta}{\hookrightarrow} Y$ se e somente se toda sequência limitada em X possui subsequência convergente em Y, isto é, se $\{u_n\} \subset X$ é tal que $\|u_n\|_X \leq M$, então existem $\left\{u_{n_j}\right\} \subset \{u_n\}$ e $u \in Y$ tal que $\left\|u_{n_j} - u\right\|_Y \longrightarrow 0$.

Teorema 1.13. [2] *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1, $k \geq 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Se $kp > N$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$, onde $\alpha = k - \frac{N}{p}$ se $k - \frac{N}{p} < 1$; $\alpha \in [0,1)$ é arbitrário se $k - \frac{N}{p} = 1$ e $p > 1$; $\alpha = 1$ se $k - \frac{N}{p} > 1$.*

[1] Confira [17], Lema 2.2 .
[2] Confira [2], Teorema 0.4, pág. 4.

Teorema 1.14. *Sejam m um inteiro não negativo e $0 < \nu < \lambda \leq 1$. Então:*

(i) $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m}(\overline{\Omega})$;
(ii) $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega})$.

Se Ω é limitado, então as imersões (i) e (ii) são compactas.

Demonstração: Conforme [1], Teorema 1.31, pág. 11. □

Teorema 1.15 (Teorema da estimativa interior de *Schauder*). [3] *Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$, L um operador elíptico com coeficientes reais $a_p \in C^{\alpha}(\Omega)$ e c a constante de elipticidade de L. Então, para Ω_0 e Ω_1, com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega_1}$ compacto, existe uma constante C, que depende apenas de c, Ω_0, Ω_1 e das normas $C^{\alpha}(\overline{\Omega_1})$ dos coeficientes a_p, tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_0)} \leq C\left(\|Lu\|_{C^{\alpha}(\Omega_1)} + \|u\|_{C^{0}(\Omega_1)}\right), \ \forall u \in C^{2,\alpha}(\Omega).$$

Teorema 1.16. *Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$ e $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C^{\nu}_{loc}(\Omega)$ tal que $\Delta u = f$ em Ω. Então $u \in C^{2,\nu}(\Omega)$ e para $\Omega_0, \Omega_1 \subset \Omega$, com $\overline{\Omega_0} \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega_1}$ compacto temos*

$$\|u\|_{C^{2,\nu}(\Omega_0)} \leq k\left(\|u\|_{C(\Omega_1)} + \|f\|_{C^{\nu}(\Omega_1)}\right)$$

onde $k \equiv k(\Omega_0, \Omega_1)$.

Demonstração: Conforme [21], Teorema 4.6, pág. 59. □

Teorema 1.17 (Teorema de *Schauder*). [4] *Seja L um operador uniformemente elíptico definido por*

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}u + b.\nabla u + cu,$$

onde se supõe que os coeficientes $a_{ij}, b \in C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ para algum $\theta \in (0,1)$ e um inteiro $k \geq 0$. Assim, se o aberto Ω é limitado de classe $C^{k+2,\theta}$ e $\varphi \in C^{k+2,\theta}(\partial\Omega)$ e $f \in C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$ são dados, então existem uma única função $u \in C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} Lu &= f \quad ,\Omega \\ u &= \varphi \quad ,\partial\Omega \end{cases}$$

e uma constante C dependendo somente de Ω, θ, α e dos coeficientes a_{ij}, b_i, c em $C^{k,\theta}(\overline{\Omega})$, tal que

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{k+1}(\overline{\Omega})} &\leq C\left(\|f\|_{C^{k}(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{k}(\overline{\Omega})}\right) \\ \|D^2u\|_{C^{k,\theta}(\overline{\Omega})} &\leq C\left(\|f\|_{C^{k}(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{k+2,\theta}(\overline{\Omega})}\right) \end{aligned}$$

[3] Confira [18], Teorema 1.7, pág. 11 .
[4] Confira [31], Teorema 11.2, pág. 46 .

Teorema 1.18. *Seja L um operador elíptico com coeficientes reais $a_p \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ em um domínio limitado Ω de classe $C^{2,\alpha}$. Seja $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\phi \in C(\partial\Omega)$. Então o problema de Dirichet*

$$\begin{cases} Lu = f, & \Omega \\ u = \phi, & \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ se se supõe $a_0 \leq 0$.

Demonstração: Conforme [18], Teorema 1.4', pág. 14. □

1.2 Resultados auxiliares

Nesta seção, enunciamos algumas definições e resultados necessários à melhor compreensão deste trabalho. Mais especificamente, os teoremas enunciados nesta seção, que são por si sós de grande importância para o desenvolvimento dessa classe de problemas singulares, constituem ferramentas essenciais para as demonstrações dos teoremas (ZH), (UN) e (NE).

Considere o problema (GL), isto é,

$$(GL) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= b(x)g(u), & x \in \Omega \\ u &> 0, & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Aqui e no que segue, exceto quando explicitamente dito o contrário, estamos supondo que $b \in C^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $b > 0$ e $g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$.

Teorema 1.19 (Existência, Gonçalves e Santos). *Se $g \in Lip_{loc}(0,\infty)$ satisfaz $(g_3)-(g_5)$, então o problema (GL) tem uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Conforme [24]. □

Como exemplos de funções que satisfazem as hipóteses do lema acima temos:
(i) $\quad g(s) = s^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ $(s > 0)$;
(ii) $\quad g(s) = s^{-\alpha} + s^{\gamma}$, onde $\alpha > -1$ e $\gamma < 1$ $(s > 0)$.
No segundo exemplo, observe que

$$(\frac{g(s)}{s})' = -(\alpha+1)s^{-\alpha-2} + (\gamma-1)s^{\gamma-2} < 0.$$

Teorema 1.20. *Seja $F : \overline{\Omega} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que, para cada $x \in \Omega$, a função*

$$\frac{F(x,s)}{s} \text{ é decrescente com respeito a } s > 0.$$

Assuma também que $v, w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazem:
(i) $\Delta w + F(x, w) \leq 0 \leq \Delta v + F(x, v)$ *em* Ω,
(ii) $v, w > 0$ *em* Ω *e* $v \leq w$ *em* $\partial\Omega$,
(iii) $\Delta w \in L^1(\Omega)$ *ou* $\Delta v \in L^1(\Omega)$.
Então $v \leq w$ em Ω.

Demonstração: Conforme [20]. □

Agora, vamos construir uma função positiva $\widetilde{\omega}$, radialmente simétrica, isto é, $\omega(x) = \omega(r)$, onde $r = |x|$, tal que

$$-\Delta\widetilde{\omega} = \varphi(r), \text{ onde } \varphi(r) = \max_{|x|=r} b(x), \tag{1.1}$$

e

$$\lim_{r \to 0} \widetilde{\omega}(r) = 0.$$

Um cálculo direto, análogo ao desenvolvido para obter (3.5), mostra que

$$\Delta\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}''(r) + \frac{N-1}{r}\widetilde{\omega}'(r). \tag{1.2}$$

Multiplicando (1.1) por r^{N-1} e observando (1.2), vemos que

$$r^{N-1}\widetilde{\omega}''(r) + (N-1)r^{N-2}\widetilde{\omega}'(r) = -r^{N-1}\varphi(r). \tag{1.3}$$

Integrando (1.3) em $(0, s)$, obtemos

$$\int_0^s r^{N-1}\widetilde{\omega}''(r)dr + \int_0^s (N-1)r^{N-2}\widetilde{\omega}'(r)dr = -\int_0^s r^{N-1}\varphi(r)dr. \tag{1.4}$$

Usando integração por partes, vemos que a primeira integral do primeiro membro da equação (1.4) torna-se

$$\int_0^s r^{N-1}\widetilde{\omega}''(r)dr = \widetilde{\omega}'(s)s^{N-1} - \int_0^s (N-1)r^{N-2}\widetilde{\omega}'(r)dr. \tag{1.5}$$

Assim, de (1.4) e (1.5), temos

$$\widetilde{\omega}'(r) = -s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}\varphi(t)dt. \tag{1.6}$$

Integrando (1.6) de $(0, r)$, obtemos para cada $r \in [0, \infty)$,

$$\widetilde{\omega}(r) = c_0 - \int_0^r s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}\varphi(t)dtds,$$

onde

$$c_0 = \int_0^{\infty} s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}\varphi(t)dtds,$$

desde que seja $c_0 < \infty$.

Observe também que

$$\int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}\varphi(t)dtds = -\frac{1}{N-2}\int_0^r \frac{d}{ds}s^{2-N}\int_0^s t^{N-1}\varphi(t)dtds.$$

Usando integração por partes, fazendo

$$u = \int_0^s t^{N-1}\varphi(t)dt$$

$$du = s^{N-1}\varphi(s)ds$$

$$dv = \frac{d}{ds}s^{2-N}$$

$$v = r^{2-N},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^r s^{1-N} \int_0^s t^{N-1}\varphi(t)dtds &= \frac{1}{N-2}\left(-r^{2-N}\int_0^r t^{N-1}\varphi(t)dt + \int_0^r s\varphi(s)ds\right) \\ &< \frac{1}{N-2}\int_0^r s\varphi(s)ds.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Passando (1.7) ao limite quando $r \longrightarrow 0$, obtemos

$$c_0 \leq \frac{1}{N-2}\int_0^{\infty} s\varphi(s)ds. \tag{1.8}$$

Teorema 1.21 (Lair e Shaker). *Se b satisfaz (b_1), então a função $\widetilde{\omega}$ é a única solução inteira do problema*

$$\begin{cases} -\Delta\omega = \varphi(r), & 0 < r < \infty, \\ \omega(r) > 0, & 0 < r < \infty, \\ \lim\limits_{r\to\infty} \omega(r) = 0, & \omega(0) = c_0, \quad \omega'(0) = 0. \end{cases}$$

Demonstração: Conforme [34]. □

Note que, de (1.8) e pela hipótese (b_1),

$$c_0 = \int_0^{\infty} s^{1-n}\int_0^s t^{n-1}\varphi(t)dtds \leq \frac{1}{N-2}\int_0^{\infty} s\varphi(s)ds < \infty.$$

O Teorema que enunciaremos a seguir é devido a Gonçalves e Santos [25]. A sua importância é que ele nos fornece uma função inteira que limita, conforme provaremos, todas as soluções do problema (GL) em bolas de raio k, $k = 1, 2, \ldots$.

Teorema 1.22 (Gonçalves e Santos). *Seja b satisfazendo (b_1). Se g satisfaz $(g_3)-(g_5)$, então $v(x) = \Gamma^{-1}(c_2\widetilde{\omega}(x))$ satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta v \geq \varphi(x)g(v), & \mathbb{R}^N \\ v(x) > 0, & \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = 0, & \end{cases}$$

onde $\Gamma(r) = \displaystyle\int_0^r \frac{s}{g(s)}ds$, $r \geq 0$, Γ^{-1} denota a função inversa de Γ em $(0,\infty)$ e c_2 é uma constante positiva com $c_0c_2 \leq \Gamma(c_2) = \displaystyle\int_0^{c_2} \frac{s}{g(s)}ds$.

Demonstração: Conforme [25]. □

A seguir, apresentamos as definições de subsolução e supersolução do problema (GL).

Definição 1.23. Uma função $\underline{u} \in C^{2,\alpha}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ é chamada uma subsolução do problema (GL) se

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} & \leq & b(x)g(\underline{u}), & x \in \Omega \\ \underline{u} & > & 0, & x \in \Omega \\ \underline{u} & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 1.24. Uma função $\overline{u} \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é chamada uma supersolução do problema (GL) se

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} & \geq & b(x)g(\overline{u}), & x \in \Omega \\ \overline{u} & > & 0, & x \in \Omega \\ \overline{u} & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Podemos, agora, enunciar um teorema que terá fundamental importância na prova do Teorema (ZH), que consta no Capítulo 2.

Teorema 1.25 (S. Cui). *Suponha que o problema (GL) tem uma supersolução $\overline{u}$ e uma subsolução $\underline{u}$ tal que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω; então o problema (GL) tem pelo menos uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ no intervalo ordenado $[\underline{u}, \overline{u}]$.*

Demonstração: Confira Apêndice B deste trabalho. □

Este teorema é uma particularização de um teorema mais geral, devido à Cui [12], e, dada a sua importância e abrangência, dedicamos o Apêndice B desse trabalho para sua discussão e demonstração.

Considere, também, o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}u'\right)' &= r^{N-1}b(r)g(u(r)), \quad r \in (0,\infty) \\ u(0) &= a \\ u'(0) &= 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

onde $a > 0$ é um parâmetro.

Note que a equação do problema acima é equivalente à equação integral

$$u(r) = a - \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} b(x) g(u(s)) ds dt. \tag{1.10}$$

Além disso, a solução de (1.10) é o ponto fixo do operador

$$\Lambda u(r) = a - \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} b(x) g(u(s)) ds dt.$$

Teorema 1.26. *Assuma (g_6). Então para cada $a > 0$ existe $T(a) \in (0,\infty]$ e uma única solução de (1.9), $u := u(.,a) \in C^1([0,T(a))) \cap C^2((0,T(a)))$, tal que $u(r) \to 0$ quando $r \to T(a)$, desde que $T(a) < \infty$.*

Demonstração: Conforme [25]. □

Teorema 1.27. *Assuma (g_6). Suponha $a < b$ e sejam $u(.,a)$, $u(.,b)$ as correspondentes soluções dadas pelo Teorema (1.26). Então $u(.,a) < u(.,b)$ em $[0,T(a))$ e, além disso, $T(a) \leq T(b)$.*

Demonstração: Conforme [25]. □

Dados $T, h > 0$, seja

$$X := \left\{ w \in C^1([0,T]); w \geq h \right\}.$$

Sejam $w_1, w_2 \in X$, e $H : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida por

$$H(s) := s^{N-1} \left[(w_2^{1/2})' w_2^{-1/2} - (w_1^{1/2})' w_1^{-1/2} \right] (w_1 - w_2)(s). \tag{1.11}$$

Teorema 1.28. *Se w_1 e $w_2 \in X$ e $0 \leq s \leq r \leq T$, então*

$$H(r) - H(s) \leq \int_s^r \left[\frac{(t^{N-1}(w_2^{1/2})')'}{w_2^{1/2}} - \frac{(t^{N-1}(w_1^{1/2})')'}{w_1^{1/2}} \right] (w_1 - w_2) dt.$$

Demonstração: Conforme [25]. □

CAPÍTULO 2

Existência de "*ground state*" para o problema (GS)

Neste capítulo nos propomos a investigar a existência de "*ground states*" para o problema (GS), isto é,

$$(GS): \quad \begin{cases} -\Delta u = b(x)g(u), x \in \mathbb{R}^N \\ u > 0, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases}$$

onde $b \in C^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $b > 0$ e $g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$.

Este problema tem origem em muitos ramos da Matemática e da Matemática Aplicada, e tem sido discutido e estendido a problemas mais gerais em um número significativo de trabalhos.

Para $g(s) = s^{-\gamma}$, com $\gamma > 0$, e b satisfazendo (b_1), Lair e Shaker [34], em 1996, mostraram que o problema (GS) tem única solução $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Depois, Lair e Shaker [33] e Zhang [48], em 1997, estenderam o resultado acima para uma função g mais geral, não crescente e positiva, e exigindo que b fosse simplesmente uma função não negativa não trivial satisfazendo (b_1). Em 1999, houve um novo melhoramento de resultados acerca do problema (GS) dado por Cirstea e Radulescu, em [9], para uma não linearidade da função g, qual seja, (g_3), desde que, além de (b_1) fosse satisfeita (g_2).

O resultado obtido por Gonçalves e Santos [25], em 2004, melhora os anteriores no sentido que cobre uma classe mais geral de operadores e aplica-se, por exemplo, e diferentemente do que tinha sido obtido até então, à classe de funções $g(s) = as^{-\lambda} + bs^{\gamma}$, onde $a, b > 0$ são parâmetros, $\lambda > 0$ e $0 \leq \gamma < 1$.

No recente trabalho [22], 2007, Gonçalves, Santos e Melo conseguiram resultados novos a cerca da existência de "*ground state*" para o problema anterior, considerando $\gamma \geq 1$ e a e b parâmetros não muito grandes. A principal novidade neste trabalho é ainda obter "*ground state*"para o problema (GS) sob uma hipótese mais geral que inclui, em particular,

$$\lim_{s \to \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty.$$

Em 2006, Gonçalves e Santos [24] obtiveram um resultado bastante geral de existência para o problema (GS), exigindo que a função g satisfaça apenas as hipóteses $(g_3) - (g_5)$.

Finalmente, Zhang [49], 2007, generaliza os resultados obtidos até então provando a existência de "*ground state*" para o problema (GS) sem exigir hipótese alguma de monotonicidade tanto em g, quanto no quociente $\frac{g(s)}{s}$.

A técnica padrão utilizada por Zhang foi considerar o problema auxiliar (GL), em domínios limitados, e em seguida, motivado por uma ferramenta proposta por Feng [17], em que a partir de uma função f arbitrária, produz funções majorantes que possuem a monotonicidade desejada.

No caso específico, Zhang construiu funções auxiliares que satisfazem as hipóteses de Gonçalves e Santos em [24], inclusive na monotonicidade do quociente, e, com elas, considerou problemas auxiliares, obtendo, assim, sub e super soluções para o problema (GL). Finalmente, obteve solução para o problema (GL) via Teorema de sub e super soluções.

A seguir, passamos a demonstrar o Teorema (ZH), que garante a existência de solução para o problema (GS), considerando funções g sem exigência de monotonicidade no quociente, como, por exemplo:
(i) $g(s) = s^{-\gamma} + s^{\lambda} + senf(s) + 1$, onde $\gamma > 0$, $\lambda < 1$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$;
(ii) $g(s) = e^{\frac{1}{s^{\gamma}}} + s^{\lambda} + \cos f(s) + 1$, onde $\gamma > 0$, $\lambda < 1$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$;
(iii) $g(s) = s^{-\gamma}ln^{-q_1}(1+s) + ln^{q_2}(1+s) + s^{\lambda} + senf(s) + 2$, onde $\gamma > 0$, $\lambda < 1$, $q_1, q_2 > 0$, com $f \in C^2(\mathbb{R})$;
(iv) $g(s) = s^{-\gamma} + arctanf(s) + \pi$, com $\gamma > 0$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$.

2.1 Resultados e Demonstrações

Abaixo estão relacionados e demonstrados alguns resultados importantes que nos auxiliarão na demonstração do Teorema (ZH), que é o objetivo principal deste capítulo.

Lema 2.1. *Se g satisfaz $(g_3) - (g_4)$, então existe uma função $f_\infty : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ de classe C^1 tal que:*

(i) $\quad \dfrac{g(s)}{s} \leq f_\infty(s),\ \forall s > 0,$

(ii) $\quad \lim\limits_{s\to 0^+} f_\infty(s) = \infty$ *e* $\lim\limits_{s\to\infty} f_\infty(s) = 0,$

(iii) $\quad f_\infty$ *é não-crescente em* $(0,\infty)$.

Demonstração:

Defina

$$\overline{f}_\infty(s) := \sup_{0<s\leq t} \frac{g(t)}{t}. \tag{2.1}$$

Observe, pela definição acima e da positividade de g, que

$$\overline{f}_\infty(s) \geq \frac{g(s)}{s} > 0,\ \forall\ s > 0, \tag{2.2}$$

e que

$$\overline{f}_\infty(s_2) = \sup_{t\geq s_2>0} \frac{g(t)}{t} \leq \sup_{t\geq s_1>0} \frac{g(t)}{t} = \overline{f}_\infty(s_1),$$

para $0 < s_1 \leq s_2$. Isto mostra que $\overline{f}_\infty$ é não crescente em $(0,\infty)$. Além disso, afirmamos que

$$\lim_{s\to 0^+} \overline{f}_\infty(s) = \infty \tag{2.3}$$

e

$$\lim_{s\to\infty} \overline{f}_\infty(s) = 0. \tag{2.4}$$

De fato. Passando ao limite em (2.2) e usando (g_3), obtemos

$$\lim_{s\to 0^+} \overline{f}_\infty(s) \geq \lim_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = \infty,$$

o que prova a afirmação (2.3).

Em seguida, provaremos (2.4). Dado $\epsilon > 0$, segue de (g_4) que existe $s_0 > 0$ tal que

$$\frac{g(s)}{s} < \epsilon,\ s > s_0.$$

Ou seja,

$$\overline{f}_\infty(s_0) = \sup_{0<s_0\leq s} \frac{g(s)}{s} \leq \epsilon.$$

Portanto, do fato de ser $\overline{f}_\infty$ não-crescente, segue que

$$0 < \overline{f}_\infty(s) \leq \overline{f}_\infty(s_0) \leq \epsilon, \ \forall s \geq s_0.$$

Isto finaliza a prova da afirmação feita.

Finalmente, defina f_∞ por

$$f_\infty(s) = \frac{2}{s}\int_{\frac{s}{2}}^{s} \overline{f}_\infty(t)dt, \ s > 0.$$

Desde que como $\overline{f}_\infty$ é não-crescente, segue que

$$f_\infty(s) = \frac{2}{s}\int_{\frac{s}{2}}^{s} \overline{f}_\infty(t)dt \geq \frac{2}{s}\int_{\frac{s}{2}}^{s} \overline{f}_\infty(s)dt = \overline{f}_\infty(s), \ s > 0. \tag{2.5}$$

Portanto, segue de (2.2) o item (i) e de (2.3) o primeiro limite do item (ii).

Além disso, novamente pela monotonicidade de $\overline{f}_\infty$, obtemos

$$f_\infty(s) = \frac{2}{s}\int_{\frac{s}{2}}^{s} \overline{f}_\infty(t)dt \leq \frac{2}{s}\int_{\frac{s}{2}}^{s} \overline{f}_\infty(\frac{s}{2})dt = \overline{f}_\infty(\frac{s}{2}), \ s > 0. \tag{2.6}$$

Daí,

$$\lim_{s\to\infty} f_\infty(s) \leq \lim_{s\to\infty} \overline{f}_\infty(\frac{s}{2}) = 0,$$

por (2.4). Isto prova o segundo limite do item (ii).

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e as inequação (2.5) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}
f'_\infty(s) &= \left(\frac{2}{s}\int_{\frac{s}{2}}^{s} \overline{f}_\infty(t)dt\right)' \\
&= \frac{2}{s}\left(\overline{f}_\infty(s) - \frac{1}{2}\overline{f}_\infty(\frac{s}{2})\right) - \frac{2}{s^2}\int_{\frac{s}{2}}^{s} \overline{f}_\infty(t)dt \\
&= \frac{1}{s}\left[2\left(\overline{f}_\infty(s) - \frac{1}{2}\overline{f}_\infty(\frac{s}{2})\right) - \frac{2}{s}\int_{\frac{s}{2}}^{s} \overline{f}_\infty(t)dt\right] \\
&= \frac{1}{s}\left[2\left(\overline{f}_\infty(s) - \frac{1}{2}\overline{f}_\infty(\frac{s}{2})\right) - \overline{f}_\infty(s)\right].
\end{aligned}$$

Desde que $\overline{f}_\infty$ é contínua, segue que $f_\infty \in C^1$. Além disso,

$$\begin{aligned} f'_\infty(s) &= \frac{1}{s}\left[2\left(\overline{f}_\infty(s) - \frac{1}{2}\overline{f}_\infty(\frac{s}{2})\right) - \overline{f}_\infty(s)\right] \\ &= \frac{1}{s}\left(\overline{f}_\infty(s) - \overline{f}_\infty(\frac{s}{2})\right) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

o que mostra o item (iii).

$\square$

Lema 2.2. *Se g satisfaz $(g_3) - (g_4)$, então existe uma função $f_0 : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ de classe C^1 tal que:*
(i) $\quad \dfrac{g(s)}{s} \geq f_0(s),\ \forall s > 0,$
(ii) $\quad \lim\limits_{s\to 0^+} f_0(s) = \infty$ *e* $\lim\limits_{s\to\infty} f_0(s) = 0,$
(iii) $\quad f_0$ *é não-crescente em* $(0,\infty)$.

Demonstração: Defina

$$\overline{f}_0(s) := \inf_{0<t\leq s} \frac{g(t)}{t}.$$

Observe, pela definição acima e da positividade de g, que

$$0 < \overline{f}_0(s) \leq \frac{g(s)}{s},\ \forall s > 0, \tag{2.7}$$

e que

$$\overline{f}_0(s_2) = \inf_{0<t\leq s_2} \frac{g(t)}{t} \leq \inf_{0<t\leq s_1} \frac{g(t)}{t} = \overline{f}_0(s_1),$$

para $0 < s_1 \leq s_2$. Isso mostra que o que mostra que $\overline{f}_0(s)$ é não crescente em $(0,\infty)$. Além disso, afirmamos que

$$\lim_{s\to 0^+} \overline{f}_0(s) = \infty \tag{2.8}$$

e

$$\lim_{s\to\infty} \overline{f}_0(s) = 0 \tag{2.9}$$

De fato. Primeiramente, observe que de (g_3) temos que

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{g(s)}{s} = \infty.$$

Isso significa que dado $k > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$\frac{g(s)}{s} > k, \quad s < s_0.$$

Isso implica que

$$\overline{f}_0(s_0) = \inf_{0<t\leq s_0} \frac{g(t)}{t} \geq k.$$

Daí, de $\overline{f}_0$ ser não crescente,

$$\overline{f}_0(s) \geq \overline{f}_0(s_0) \geq k, \ \forall s \leq s_0$$

Como k é arbritrário, temos

$$\lim_{s\to 0^+} \overline{f}_0(s) = \infty,$$

o que mostra a afirmação (2.8).

Em seguida, passando ao limite a inequação (2.7) e observando a hipótese (g_4), obtemos o limite (2.9), e isto conclui a prova da afirmação feita.

Finalmente, defina

$$f_0(s) = \int_s^{s+1} \overline{f}_0(t)dt, \ s > 0.$$

Desde que $\overline{f}_0$ é não crescente, segue que

$$f_0(s) = \int_s^{s+1} \overline{f}_0(t)dt \leq \int_s^{s+1} \overline{f}_0(s)dt = \overline{f}_0(s).$$

Logo, segue de (2.7) o item (i) e de (2.9) o segundo limite de (ii). Além disso, novamente pela monotonicidade de $\overline{f}_0$, obtemos

$$f_0(s) = \int_s^{s+1} \overline{f}_0(t)dt \geq \int_s^{s+1} \overline{f}_0(s+1)dt = \overline{f}_0(s+1).$$

Daí,

$$\lim_{s\to 0} f_0(s) \geq \lim_{s\to 0} \overline{f}_0(s+1) \geq \infty,$$

por (2.8). Isto prova o primeiro limite do item (ii). Como

$$\overline{f}_0(s+1) \leq f_0(s) \leq \overline{f}_0(s),$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$f_0'(s) = \left[\int_s^{s+1} \overline{f}_0(t)dt\right]' = f_0(s+1) - f_0(s) \leq 0, \ \forall s > 0,$$

o que prova o item (iii).

$\square$

Lema 2.3. *Se g satisfaz $(g_3)-(g_4)$, então o problema (GL) tem pelo menos uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Seja $\psi_1 \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a primeira autofunção corespondente ao primeiro autovalor λ_1 do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega \\ u > 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Então, segue do Lema (2.2), (ii), da regularidade de b e da definição de limite que existe $\delta > 0$ tal que

$$f_0(s) > \frac{\lambda_1}{\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} b(x)}, \ \forall s \in (0, \delta). \tag{2.11}$$

Considere $c_1 > 0$ uma constante satisfazendo

$$c_1 < \frac{\delta}{\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \psi_1(x)}. \tag{2.12}$$

Inferimos que $\underline{u} = c_1\psi_1$ é uma subsolução para o problema (GL), pois, de (2.11) e (2.12), segue que

$$-\Delta \underline{u} = \lambda_1 c_1 \psi_1 \leq \min_{x \in \underline{\Omega}} b(x) f_0(c_1\psi_1) c_1 \psi_1 \leq b(x) g(c_1\psi_1) = b(x) g(\underline{u}).$$

Para construir uma supersolução, defina

$$h_\infty(s) := s\left(f_\infty(s) + \frac{1}{s}\right), \ s > 0,$$

e considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= b(x) h_\infty(u), & x \in \Omega \\ u &> 0, & x \in \Omega \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

Assim, pelo Lema (2.1), $h_\infty \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$ e, adicionalmente, satisfaz:

$$\lim_{s \longrightarrow 0^+} \frac{h_\infty(s)}{s} = \lim_{s \longrightarrow 0^+} \left(f_\infty(s) + \frac{1}{s}\right) = \infty; \tag{2.14}$$

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{h_\infty(s)}{s} = \lim_{s \longrightarrow \infty} \left(f_\infty(s) + \frac{1}{s}\right) = 0 \tag{2.15}$$

e

$$\frac{h_\infty(s)}{s} = f_\infty(s) + \frac{1}{s},\ s > 0,\ \textit{é decrescente.} \tag{2.16}$$

Isto é, h_∞ satisfaz todas as hipóteses de Gonçalves e Santos no Teorema (1.19) e, portanto, o problema (2.13) admite solução $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Além disso, pelo Lema (2.1), (i),

$$h_\infty(\overline{u}) = \overline{u}\left(f_\infty(\overline{u}) + \frac{1}{\overline{u}}\right) = \overline{u} f_\infty(\overline{u}) + 1 > \overline{u} f_\infty(\overline{u}) \geq g(\overline{u}).$$

Logo

$$-\Delta \overline{u} = b(x) h_\infty(\overline{u}) \geq b(x) g(\overline{u}),$$

o que mostra que $\overline{u}$ é supersolução do problema (GL).

Com o objetivo de aplicarmos o Teorema de Sub e Super Soluções, devido à Cui [12] (o Teorema (1.25)), resta-nos mostrar apenas que

$$\underline{u} \leq \overline{u}\ em\ \Omega.$$

Inicialmente, observe que, por (2.16), a função

$$b(x)\frac{h_\infty(s)}{s},\ s > 0,\ \textit{é decrescente para cada } x \in \Omega.$$

Além disto, da definição de h_∞, do Lema (2.1), (i), e de ser $\underline{u}$ subsolução do problema (GL), segue que $\underline{u}$ e $\overline{u}$ satisfazem

$$\begin{cases} \Delta \overline{u} + b(x) h_\infty(\overline{u}) = 0 \leq \Delta \underline{u} + b(x) h_\infty(\underline{u}),\ em\ \Omega \\ \\ \underline{u}, \overline{u} \geq 0,\ em\ \Omega\ \ e\ \ \underline{u} = \overline{u},\ em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Da definição da subsolução $\underline{u}$ e da regularidade da primeira autofunção ψ_1, temos ainda que

$$|\Delta \underline{u}| = |\lambda_1 c_1 \psi_1| \leq \lambda_1 c_1 \max_{\overline{\Omega}} \psi_1 < \infty,$$

o que faz com que $\Delta \underline{u} \in L^1(\Omega)$.

Portanto, todas as hipóteses do Teorema (1.20) foram satisfeitas, o que mostra que $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Finalmente, podemos aplicar o Teorema (1.25), para concluir que o problema (GL) tem pelo menos uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

$\square$

Em seguida, de posse do Lema (2.3), estamos aptos a provar o Teorema (ZH).

2.2 Demonstração do Teorema (ZH)

Nesta seção, provaremos o Teorema (ZH). A idéia básica da demonstração consiste em considerar soluções, digamos u_k, do problema (GL) em domínios da forma $\Omega = B(0,k)$, dadas pelo Lema (2.3), onde $B(0,k)$ é a bola de centro 0 e raio k e $k = 1, 2, \ldots$.

Usando argumentos de comparação e regularidade, obteremos uma solução via um processo de limite sobre as soluções u_k.

Demonstração do Teorema (ZH):

Relembrando que a função h_∞, de classe C^1, definida acima satisfaz as hipóteses $(g_3)-(g_5)$ (confira (2.14)-(2.16)), segue pelo Teorema (1.22), de Gonçalves e Santos, que existe uma função $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$, radialmente simétrica, que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v \geq b(x) h_\infty(v), & \mathbb{R}^N \\ v(x) > 0, & \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = 0. & \end{cases}$$

Consideremos, agora, o problema (GL) com

$$\Omega = B(0,k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N;\ |x| < k \right\},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Segue, pelo Lema (2.3), que o problema (GL) tem, para cada k, uma solução

$$u_k \in C^{2,\alpha}(B(0,k)) \cap C(\overline{B}(0,k)).$$

Afirmamos que

$$u_k(x) \leq v(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{2.17}$$

onde u_k é estendida ao complementar de $B(0,k)$ como 0.

Suponhamos que exista $k_0 \geq 1$ e um $x_0 \in B(0,k_0)$ tal que $u_{k_0}(x_0) > v(x_0)$, isto é, estaríamos admitindo que o conjunto

$$A_{k_0,\infty} := \{x \in B(0,k_0) / u_{k_0}(x) > v(x)\}$$

é não vazio.

Desde que $x \in \partial A_{k_0,\infty} \cap \partial B(0,k_0)$ implicaria $v(x) = u_{k_0}(x) = 0$, segue que $A_{k_0,\infty} \subset\subset B(0,k_0)$, uma vez que $v > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, pelo Lema (1.22).

Assim,

$$0 < \min_{x \in \overline{A_{k_0,\infty}}} v(x) \leq v(x) < u_{k_0}(x) \leq \max_{x \in \overline{A_{k_0,\infty}}} u_{k_0}(x) =: c(k_0) = c, \; x \in \overline{A_{k_0,\infty}},$$

onde c é uma constante que depende de k_0. Isso implica que

$$0 < \frac{\min_{x \in \overline{A_{k_0,\infty}}} v(x)}{\max_{x \in \overline{A_{k_0,\infty}}} v(x)} \leq \frac{\min_{x \in \overline{A_{k_0,\infty}}} v(x)}{v(x)} \leq \frac{u_{k_0}(x)}{v(x)} \leq \frac{\max_{x \in \overline{A_{k_0,\infty}}} u_{k_0}(x)}{\min_{x \in \overline{A_{k_0,\infty}}} v(x)}$$

Logo, a função

$$h_{k_0,\infty}(x) := ln \frac{u_{k_0}(x)}{v(x)}, \; x \in \overline{A_{k_0,\infty}},$$

assume máximo em $\overline{A_{k_0,\infty}}$, digamos no ponto $\overline{x} \in \overline{A_{k_0,\infty}}$.

Além disso, de $x_0 \in A_{k_0,\infty}$, segue que

$$h_{k_0,\infty}(\overline{x}) = ln\left(\frac{u_{k_0}(\overline{x})}{v(\overline{x})}\right) \geq ln\left(\frac{u_{k_0}(x_0)}{v(x_0)}\right) > ln1 = 0,$$

isto é,

$$u_{k_0}(\overline{x}) > v(\overline{x}), \tag{2.18}$$

o que mostra $\overline{x} \in A_{k_0,\infty}$.

Como consequência deste fato, segue que

$$0 = \nabla h_{k_0,\infty}(\overline{x}) = \nabla\left(lnu_{k_0}(\overline{x}) - lnv(\overline{x})\right) = \frac{\nabla u_{k_0}(\overline{x})}{u_{k_0}(\overline{x})} - \frac{\nabla v(\overline{x})}{v(\overline{x})} \tag{2.19}$$

e

$$0 \geq \Delta h_{k_0,\infty}(\overline{x}) = \Delta\left(lnu_{k_0}(\overline{x}) - lnv(\overline{x})\right),$$

onde

$$\Delta\left(lnu_{k_0}(x) - lnv(x)\right) = \frac{\Delta u_{k_0}(x)}{u_{k_0}(x)} - \frac{1}{(u_{k_0}(x))^2}|\nabla u_{k_0}(x)|^2 - \frac{\Delta v(x)}{v(x)} + \frac{1}{(v(x))^2}|\nabla v(x)|^2.$$

Segue de (2.19), u_{k_0} ser solução do problema (GL) em $B(0,k_0)$, v satisfazer (2.13) e da definição de h_∞ que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta\left(lnu_{k_0}(\overline{x}) - lnv(\overline{x})\right) \\ &= \frac{\Delta u_{k_0}(\overline{x})}{u_{k_0}(\overline{x})} - \frac{\Delta v(\overline{x})}{v(\overline{x})} \\ &= -b(\overline{x})\frac{g(u_{k_0}(\overline{x}))}{u_{k_0}(\overline{x})} - \frac{\Delta v(\overline{x})}{v(\overline{x})} \\ &\geq -b(\overline{x})\frac{g(u_{k_0}(\overline{x}))}{u_{k_0}(\overline{x})} + \frac{b(\overline{x})v(\overline{x})\left(f_\infty(v(\overline{x})) + \frac{1}{v(\overline{x})}\right)}{v(\overline{x})} \\ &\geq -b(\overline{x})\left[\frac{g(u_{k_0}(\overline{x}))}{u_{k_0}(\overline{x})} - \left(f_\infty(v(\overline{x})) + \frac{1}{v(\overline{x})}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por outro lado, segue do Lema (2.1), (i) e (iii), e de (2.18) que

$$\frac{g(u_{k_0}(\overline{x}))}{u_{k_0}(\overline{x})} \leq f_\infty(u_{k_0}(\overline{x})) \leq f_\infty(v(\overline{x})). \tag{2.21}$$

Assim, substituindo (2.21) em (2.20), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq -b(\overline{x})\left[\frac{g(u_{k_0}(\overline{x}))}{u_{k_0}(\overline{x})} - \left(f_\infty(v(\overline{x})) + \frac{1}{v(\overline{x})}\right)\right] \\ &\geq -b(\overline{x})\left[\frac{g(u_{k_0}(\overline{x}))}{u_{k_0}(\overline{x})} - \left(\frac{g(u_{k_0}(\overline{x}))}{u_{k_0}(\overline{x})} + \frac{1}{v(\overline{x})}\right)\right] \\ &= \frac{b(\overline{x})}{v(\overline{x})} \\ &> 0, \end{aligned}$$

que é uma impossibilidade. Logo, a sequência $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uniformemente limitada superiormente por v.

Além disso, mostraremos que

$$u_k(x) \geq \underline{u}_{k_1}(x) > 0, \ \forall x \in B(0,k_1), \ \forall k \geq k_1, \tag{2.22}$$

onde k_1 é um inteiro positivo qualquer fixado.

É imediato que a afirmação é verdadeira se $k = k_1$, pelo Teorema (1.25). Suponha, por contradição, que exista $k_0 > k_1$ e $\widetilde{x_0} \in B(0,k_1)$ tal que $u_{k_0}(\widetilde{x_0}) < \underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_0})$, e considere o conjunto

$$A_{k_0,k_1} = \left\{x \in B(0,k_1)/\underline{u}_{k_1}(x) > u_{k_0}(x)\right\}.$$

Assim, $\widetilde{x_0} \in A_{k_0,k_1}$, isto é, $A_{k_0,k_1} \neq \emptyset$. Além disso, se $\widetilde{x} \in \partial A_{k_0,k_1} \cap \partial B(0,k_1)$, então, pela definição de A_{k_0,k_1} e de $\underline{u}_{k_1}$ ser subsolução do problema (GL) com $\Omega = B(0,k_1)$, segue que $u_{k_0}(\widetilde{x}) = \underline{u}_{k_1}(\widetilde{x}) = 0$. Mas isso é absurdo, pela positividade de u_{k_0} em B_{k_0}.

Disto, segue que

$$0 < \min_{x \in \overline{A_{k_0,k_1}}} u_{k_0}(x) \leq u_{k_0}(x) \leq \underline{u}_{k_1}(x) \leq \max_{x \in \overline{A_{k_0,k_1}}} \underline{u}_{k_1}(x), \ x \in \overline{A_{k_0,k_1}},$$

ou seja,

$$0 < \widetilde{s_1} := \frac{\displaystyle\min_{x \in \overline{A_{k_0,k_1}}} u_{k_0}(x)}{\displaystyle\max_{x \in \overline{A_{k_0,k_1}}} u_{k_0}(x)} \leq \frac{\displaystyle\min_{x \in \overline{A_{k_0,k_1}}} u_{k_0}(x)}{u_{k_0}(x)} \leq \frac{\underline{u}_{k_1}(x)}{u_{k_0}(x)} \leq \frac{\displaystyle\max_{x \in \overline{A_{k_0,k_1}}} \underline{u}_{k_1}(x)}{\displaystyle\min_{x \in \overline{A_{k_0,k_1}}} u_{k_0}(x)} =: \widetilde{s_2}, \ x \in \overline{A_{k_0,k_1}}.$$

Logo, a função

$$h_{k_0,k_1}(x) := ln\frac{\underline{u}_{k_1}(x)}{u_{k_0}(x)}, \ x \in \overline{A_{k_0,k_1}},$$

assume máximo em $\overline{A_{k_0,k_1}}$, digamos no ponto $\widetilde{x_1} \in \overline{A_{k_0,k_1}}$.

Além disso, do fato de $\widetilde{x_0} \in A_{k_0,k_1}$, segue que

$$h_{k_0,k_1}(\widetilde{x_1}) = ln\frac{\underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1})}{u_{k_0}(\widetilde{x_1})} \geq ln\frac{\underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_0})}{u_{k_0}(\widetilde{x_0})} > ln1 = 0,$$

isto é,

$$u_{k_0}(\widetilde{x_1}) < \underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1}),$$

o que mostra que $\widetilde{x_1} \in A_{k_0,k_1}$.

Como consequência deste fato, segue que

$$0 = \nabla h_{k_0,k_1}(\widetilde{x_1}) = \nabla\left(ln\frac{\underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1})}{u_{k_0}(\widetilde{x_1})}\right) = \frac{\nabla\underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1})}{\underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1})} - \frac{\nabla u_{k_0}(\widetilde{x_1})}{u_{k_0}(\widetilde{x_1})} \tag{2.23}$$

e

$$0 \geq \Delta h_{k_0,k_1}(\widetilde{x_1}) = \Delta\left(ln\frac{\underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1})}{u_{k_0}(\widetilde{x_1})}\right),$$

onde

$$\Delta\left(ln\frac{\underline{u}_{k_1}(x)}{u_{k_0}(x)}\right) = \frac{\Delta\underline{u}_{k_1}(x)}{\underline{u}_{k_1}(x)} - \frac{1}{(\underline{u}_{k_1}(x))^2}|\nabla\underline{u}_{k_1}(x)|^2 - \frac{\Delta u_{k_0}(x)}{u_{k_0}(x)} + \frac{1}{(u_{k_0}(x))^2}|\nabla u_{k_0}(x)|^2.$$

Isto é, de (2.23), u_{k_0} solução do problema (GL) em $B(0,k_0)$ e $\underline{u}_{k_1} = c_1\psi_1$ ser solução do problema (2.10), considerando $\Omega = B(0,k_1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\geq \Delta\left(ln\underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1}) - lnu_{k_0}(\widetilde{x_1})\right) \\
&= \frac{\Delta\underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1})}{\underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1})} - \frac{\Delta u_{k_0}(\widetilde{x_1})}{u_{k_0}(\widetilde{x_1})} \\
&= -\frac{\lambda_1 c_1\psi_1(\widetilde{x_1})}{c_1\psi_1(\widetilde{x_1})} + b(\widetilde{x_1})\frac{g(u_{k_0}(\widetilde{x_1}))}{u_{k_0}(\widetilde{x_1})} \\
&= b(\widetilde{x_1})\frac{g(u_{k_0}(\widetilde{x_1}))}{u_{k_0}(\widetilde{x_1})} - \lambda_1.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Por outro lado, por (2.12),

$$\delta > c_1 \max_{x\in B(0,k_1)}\psi_1(x) \geq c_1\psi(\widetilde{x_1}) = \underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1}),$$

o que torna

$$u_{k_0}(\widetilde{x_1}) < \underline{u}_{k_1}(\widetilde{x_1}) < \delta. \tag{2.25}$$

Logo, por (2.11), (2.25) e pelo Lema (2.2), (i), concluímos que

$$\lambda_1 < \min_{x\in\overline{\Omega}} b(x)f_0(u_{k_0}(\widetilde{x_1})) \leq b(\widetilde{x_1})f_0(u_{k_0}(\widetilde{x_1})) \leq b(\widetilde{x_1})\frac{g(u_{k_0}(\widetilde{x_1}))}{u_{k_0}(\widetilde{x_1})},$$

que é uma contradição, por (2.24). Isto mostra a afirmação (2.22).

Após obtermos as limitações (2.17) e (2.22), o nosso próximo objetivo é obtermos a convergência da sequência $\{u_k\}$ em $C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Para isto, consideremos $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado suave $C^{2,\alpha}$, Ω_1, Ω_2 abertos com fronteiras suaves $C^{2,\alpha}$ e k_1 suficientemente grande tais que

$$\Omega' \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset B(0,k_1) \subset B(0,k),\ k \geq k_1. \tag{2.26}$$

Em seguida, denotando por

$$b_\infty := \max_{x\in\overline{\Omega_2}} b(x),$$

$$v_\infty := \max_{x\in\overline{\Omega_2}} v(x)$$

e

$$m_0 := \min_{x\in\overline{\Omega_2}} \underline{u}_{k_1}(x),$$

segue da positividade de b e $\underline{u}_{k_1}$ em $\overline{\Omega_2}$, da continuidade de v em $\overline{\Omega_2}$ e de (2.17) que

$$0 < b_\infty < \infty, \;\; m_0 < v_\infty$$

e

$$0 < m_0 < u_k(x) \leq v_\infty < \infty, \; x \in \overline{\Omega_2}.$$

Além disso, denotando por M_j, $j = 1, 2, ...$, constantes independentes de k,

$$c_\infty := \max_{s\in[m_0,v_\infty]} \frac{g(s)}{s},$$

e definindo, para cada $k \geq k_1$,

$$h_k(x) := b(x)g(u_k(x)), \; x \in \overline{\Omega_2},$$

segue que

$$|h_k(x)| = |b(x)||g(u_k(x))| \leq b_\infty \frac{g(u_k(x))}{u_k(x)} u_k(x) \leq b_\infty c_\infty v_\infty := M_1, \; x \in \overline{\Omega_2}.$$

Isto é, a sequência

$$\{h_k\}_{k_1}^{\infty} \text{ \textit{é uniformemente limitada em} } \overline{\Omega_2}. \tag{2.27}$$

Em particular, para cada k, $h_k \in L^p(\overline{\Omega_2})$, para todo $p > 1$.

No que segue, considere $p > N$ suficientemente grande tal que $\alpha < 1 - \frac{N}{p} = \nu \in (0, 1)$. Desde que

$$-\Delta u_k(x) = h_k(x), \; x \in \overline{\Omega_2},$$

segue, por (2.27) e pelo Teorema de Regularidade em L^p, o Teorema (1.7), que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{W^{2,p}(\Omega_1)} &\leq C_1 \left(\|h_k\|_{L^p(\Omega_2)} + \|u_k\|_{L^p(\Omega_2)} \right) \\ &\leq C_1 \left(M_1 |\Omega_2|^{\frac{1}{p}} + v_\infty |\Omega_2|^{\frac{1}{p}} \right) \\ &=: M_2, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência

$$\left\{\|u_k\|_{W^{2,p}(\Omega_1)}\right\}_{k_1}^{\infty} \text{ é limitada.}$$

Portanto, do Teorema (1.13), segue que

$$\|u_k\|_{C^{\nu}(\overline{\Omega_1})} \leq M_3. \tag{2.28}$$

Desde que

$$C^{\nu}(\overline{\Omega_1}) \hookrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega_1}),$$

segue, pela Proposição (A.1) do Apêndice A, que

$$h_k(x) = b(x)g(u_k(x)) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega_1}) \ \ e \ \ \|h_k\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega_1})} \leq C_k, \ \forall k \geq k_1.$$

Afirmamos que C_k é independente de k. De fato, primeiramente, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{|h_k(x)-h_k(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &= \frac{|b(x)g(u_k(x))-b(y)g(u_k(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\leq \frac{|b(x)g(u_k(x))-b(x)g(u_k(y))|}{|x-y|^{\alpha}} + \frac{|b(x)g(u_k(y))-b(y)g(u_k(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \qquad (2.29) \\
&= b(x)\frac{|g(u_k(x))-g(u_k(y))|}{|x-y|^{\alpha}} + \frac{g(u_k(y))}{u_k(y)}\frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|^{\alpha}}u_k(y), \ \ x \neq y.
\end{aligned}$$

Além disso, de $g \in C^1(0,\infty)$, segue pelo Teorema do Valor Médio que

$$|g(s)-g(t)| \leq \widetilde{M}|s-t|, \ \forall s,t \in [m_0, v_\infty],$$

onde

$$\widetilde{M} = \sup_{s\in[m_0,v_\infty]} |g'(s)|.$$

Em particular,

$$|g(u_k(x))-g(u_k(y))| \leq \widetilde{M}|u_k(x)-u_k(y)|.$$

Daí,

$$\frac{|g(u_k(x))-g(u_k(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \widetilde{M}\frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^{\alpha}}, \ x \neq y.$$

Como $u_k \in C^{\alpha}(\overline{\Omega_1})$, temos, por (2.28), que

$$\frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < M_3$$

e, portanto,

$$\frac{|g(u_k(x)) - g(u_k(y))|}{|x-y|^\alpha} \leq \widetilde{M} M_3 =: M_4.$$

Assim, observando que $b \in C^\alpha_{loc}(\mathbb{R}^N)$, segue de (2.29) que

$$\begin{aligned} \|h_k\|_{C^\alpha(\overline{\Omega_1})} &= \|h_k\|_{C^0(\overline{\Omega_1})} + H_\alpha[h_k] \\ &= \max_{x \in \overline{\Omega_1}} |h_k(x)| + \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_1}}} \frac{|h_k(x) - h_k(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq b_\infty \max_{s \in [m_0, v_\infty]} g(s) + b_\infty M_4 + c_\infty \widetilde{M_3} v_\infty \\ &=: M_6, \end{aligned} \tag{2.30}$$

o que mostra que a sequência

$$\left\{ \|h_k\|_{C^\alpha(\overline{\Omega_1})} \right\}_{k_1}^\infty \ \textit{é limitada.}$$

Pelo Teorema (1.15),

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq C_2 \left(\|h_k\|_{C^\alpha(\overline{\Omega_1})} + \|u_k\|_{C(\overline{\Omega_1})} \right),$$

e assim, por (2.28) e (2.30), temos que a sequência

$$\left\{ \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \right\}_{k_1}^\infty \ \textit{é limitada,}$$

isto é,

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})} \leq M_7. \tag{2.31}$$

Pelo Teorema (1.14),

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'}) \overset{compacta}{\hookrightarrow} C^2(\overline{\Omega'}),$$

e como consequência disto e de (2.31), segue que existe $\left\{u_{k_j}\right\}_{j=1}^\infty \subset \{u_k\}_{k=k_1}^\infty$, tal que

$$u_{k_j} \longrightarrow u \in C^2(\overline{\Omega'}). \tag{2.32}$$

Adicionalmente, por (2.22) e da definição de m_0, segue que

$$u \geq m_0 > 0, \ \forall x \in \overline{\Omega'}. \tag{2.33}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\left\|u_{k_j}-u\right\|_{C^2(\overline{\Omega'})} &= \sum_{|p|\leq 2}\left\|D^p(u_{k_j}-u)\right\|_0 \\ &= \sum_{|p|\leq 2}\max_{x\in\overline{\Omega'}}\left|D^p(u_{k_j}-u)\right| \\ &\geq \left|\Delta(u_{k_j}-u)\right| \\ &= \left|\Delta u_{k_j}-\Delta u\right|.\end{aligned}$$

Logo, por (2.32), temos que

$$\left|\Delta u_{k_j}-\Delta u\right| \longrightarrow 0,\ x\in\overline{\Omega'},$$

isto é,

$$\Delta u_{k_j} \longrightarrow \Delta u,\ \ x\in\overline{\Omega'}.$$

Como

$$-\Delta u_{k_j} = b(x)g(u_{k_j}),\ \forall x\in\overline{\Omega'},$$

segue de (2.33), da continuidade de g, fazendo $j\longrightarrow\infty$, que u satisfaz

$$-\Delta u = b(x)g(u),\ \forall x\in\overline{\Omega'}.$$

Definindo

$$h(x) = b(x)g(u(x)),\ x\in\overline{\Omega'},$$

segue, da Proposição (A.2), que $h\in C^\alpha(\overline{\Omega'})$ e, do Teorema (1.16), que $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega'})$.

No que segue, tomaremos domínios apropriados em (2.26) e usaremos a estimativa obtida em (2.31) para construirmos, através de um processo diagonal, uma "*ground state*" para o problema (GS).

Para isto, dado k_1 inteiro positivo, tome em (2.26) $\Omega' = B(0,k_1) =: B_{k_1}$, $\Omega_1 = B(0,k_1+1)$, $\Omega_2 = B(0,k_1+2)$ e $k\geq k_1+3$. Assim, obtemos por (2.31) que

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{k_1}})} \leq N_{k_1},\ \ k\geq k_1+3,$$

onde relembramos que u_k satisfaz

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u_k &=& b(x)g(u_k), & B_{k_1} \\ \underline{u}_{k_1} &\leq& u_k\leq v, & \forall x\in\overline{B_{k_1}}. \end{array}\right. \tag{2.34}$$

Isto é, para $k_1 = 1, 2, 3, ...$, encontramos $N_1, N_2, N_3, ...$ tais que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_1})} &\leq N_1,\ k \geq 4 \\ \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_2})} &\leq N_2,\ k \geq 5 \\ \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_3})} &\leq N_3,\ k \geq 6 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.35}$$

Defina, para cada inteiro $k_1 = i \geq 1$,

$$u_i^k := u_k|_{B_i},\ k \geq i + 3.$$

Então, de (2.35) e do fato de

$$C^{2,\alpha}(\overline{B_i}) \overset{compacta}{\hookrightarrow} C^2(\overline{B_i}),\ i = 1, 2, ...,$$

existem, para cada $i = 1, 2, ...$, subsequências de $\left\{u_i^k\right\}_{k=i+3}^{\infty}$ e $u_i \in C^2(\overline{B_i})$, tais que

$$u_i^{k_{ij}} \longrightarrow u_i \ em\ C^2(\overline{B_i}),$$

onde $k_{ij} \geq i + 3$, para todo j, e $k_{i1} < k_{i2} < k_{i3} ...$, $\forall\ i$. Mais especificamente,

$$\begin{aligned} &u_1^{k_{11}}, u_1^{k_{12}}, u_1^{k_{13}}, ... \overset{C^2(\overline{B_1})}{\longrightarrow} u_1 \quad (i = 1) \\ &u_2^{k_{21}}, u_2^{k_{22}}, u_2^{k_{23}}, ... \overset{C^2(\overline{B_2})}{\longrightarrow} u_2 \quad (i = 2) \\ &u_3^{k_{31}}, u_3^{k_{32}}, u_3^{k_{33}}, ... \overset{C^2(\overline{B_3})}{\longrightarrow} u_3 \quad (i = 3) \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

Note que $u_{i+1}|_{B_i} = u_i$, pois a sequência $\left\{u_{i+1}^{k_{(i+1)j}}\right\}$ foi tomada como uma subsequência da sequência $\left\{u_i^{k_{ij}}\right\}$, onde cada $u_i^{k_{ij}}$ foi estendida à bola B_{i+1}.

Defina $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$ tal que

$$u(x)|_{B_i} = u_i(x),\ \ para\ cada\ i = 1, 2, ...$$

Segue da positividade das u_i que $u > 0$, e da regularidade das u_i que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Além disso, a sequência

$$w_n := u_n^{k_{nn}},\ n = 1, 2, 3, ...$$

é tal que

$$w_n \overset{(C^2(\overline{B_i}))}{\longrightarrow} u \;\; \textit{para cada } i \geq 1.$$

De fato, para cada $i \geq 1$ e para cada $n \geq i$, temos

$$w_n|_{B_i} = u_n^{k_{nn}}|_{B_i}.$$

Por sua vez, a sequência $\left\{u_n^{k_{nn}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, restrita à B_i, é uma subsequência da sequência $\left\{u_i^{k_{in}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ e

$$u_i^{k_{in}} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} u_i := u, \; \forall x \in B_i.$$

Observe que, de (2.34),

$$\begin{cases} -\Delta w_n = b(x)g(w_n), & B_i \\ \underline{u} \leq w_n \leq v, & \overline{B_i}. \end{cases}$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos, de (2.34), que

$$\begin{cases} -\Delta u = b(x)g(u), & B_i \\ \underline{u} \leq u \leq v, & \overline{B_i}. \end{cases} \tag{2.36}$$

Finalmente, fazendo $i \longrightarrow \infty$, temos

$$\begin{cases} -\Delta u = b(x)g(u), & \mathbb{R}^N \\ u > 0, & \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) \leq \lim\limits_{|x|\to\infty} v(x) = 0, & \end{cases}$$

sendo que a última desigualdade provém do Teorema (1.22). Portanto, u é uma "*ground state*" do problema (GS).

Além disso, segue de (2.36), do Teorema (1.16) e da arbitrariedade de B_i que $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

$\square$

CAPÍTULO 3

Unicidade e não existência de soluções radialmente simétricas

Neste capítulo, continuaremos com o problema (GS), isto é,

$$(GS): \quad \begin{cases} -\Delta u = b(x)g(u), x \in \mathbb{R}^N \\ u > 0, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases}$$

sob as hipóteses de que a função $b \in C^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $b > 0$ e a função $g \in C^1((0,\infty),(0,\infty))$.

Em 1999, Cirstea e Radulescu [9] estenderam os resultados de Lair e Shaker [33] e Zhang [48], obtidos até então, para o caso de uma não-linearidade g que não é necessariamente decrescente em $(0,\infty)$, e provaram a existência de solução para o problema (GS), desde que, adicionalmente, fossem satisfeitas as condições (b_1) e $(g_1)-(g_3)$.

Um dos objetivos deste capítulo é provar o Teorema (NE), que mostra que a condição (b_1) no parágrafo anterior é, na verdade, quase necessária para a existência de solução. Além disso, este teorema garante a inexistência de solução para o problema (GS) no caso de $N \leq 2$, sem nenhuma hipótese adicional para a função g.

Em particular, o item (i) do Teorema (NE) garante que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{1}{1+|x|}(u^{-\lambda} + u^{\gamma}), & x \in \mathbb{R}^N \\ u > 0 \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases}$$

com $N \geq 3$, $\lambda > 0$ e $0 < \gamma < 1$, não admite solução radialmente simétrica, uma vez que as funções

$$b(x) = \frac{1}{1+|x|} \ \ e \ \ g(s) = s^{-\lambda} + s^{\gamma}$$

satisfazem suas hipóteses.

Uma outra aplicação do Teorema (NE) mostra que

$$\begin{cases} -u'' = \dfrac{1}{1+t^2}(u^{-\lambda} + u^{\gamma}), & t \in \mathbb{R} \\ u > 0 \\ \lim\limits_{|t|\to\infty} u(t) = 0 \end{cases}$$

não tem solução.

Este segundo exemplo se refere ao item (ii) do Teorema (NE). Por sua vez, este item é um caso particular de um resultado mais geral demonstrado por Gonçalves e Santos [25], em 2004, para o seguinte problema envolvendo o operador p-Laplaciano,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = b(x)g(u), & \mathbb{R}^N \\ u > 0, & \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $1 < p < \infty$, $b : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ é uma função contínua radialmente simétrica e $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ é uma função de classe C^1.

Para funções g tais que

$$\frac{g(s)}{s^{p-1}} \ \textit{é não crescente em} \ (0, \infty) \tag{3.2}$$

e

$$\liminf_{s\to 0} g(s) > 0, \quad \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s^{p-1}} = 0, \tag{3.3}$$

Gonçalves e Santos demonstraram em [25] o

Teorema 3.1. *Assuma* (3.2), (3.3),

$$0 < \int_1^\infty r^{\frac{1}{p-1}} b(r)^{\frac{1}{p-1}} dr < \infty, \quad se\ 1 < p \leq 2;$$

e

$$0 < \int_1^\infty r^{\frac{(p-2)N+1}{p-1}} b(r) dr < \infty, \quad se\ p \geq 2.$$

Então o problema (3.1)
(*i*) *tem uma solução radialmente simétrica* u *em* $C^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N - \{0\})$ *se* $p < N$,
ou
(*ii*) *não possui solução radiamente simétrica em* $C^1(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N - \{0\})$ *se* $p \geq N$.

Um fato interessante também demonstrado neste trabalho é que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ se e somente se $p \leq 2$. Observe que o problema (GS) é um caso particular do problema (3.1), isto é, o problema (3.1) torna-se no problema (GS) no caso de $p = 2$.

O nosso segundo objetivo neste capítulo é provarmos o Teorema (UN).

No que segue, provaremos o Teorema (NE).

3.1 Prova do Teorema (NE)

Demonstração do Teorema (NE)**, item** (i): Suponha que o problema (GS) tenha uma solução radialmente simétrica, digamos $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, com $u(x) = u(r)$, onde $r = |x|$. Então u satisfaz a forma radialmente simétrica de (GS), isto é,

$$\begin{cases} -(r^{N-1}u')' = r^{N-1}b(r)g(u(r)), & r > 0 \\ u'(0) = 0 & \\ u > 0, & r \geq 0 \\ \lim_{r\to\infty} u(r) = 0. & \end{cases} \tag{3.4}$$

De fato, como $u(x) = u(|x|)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u'(r)\frac{\partial}{\partial x_i} r\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u'(r)\frac{x_i}{r}\right] \\
&= \left(u''(r)\frac{x_i}{r}\right)\frac{x_i}{r} + u'(r)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) \\
&= u''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + u'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\
&= u''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{u'(r)}{r} - \frac{u'(r)x_i^2}{r^3},\ i = 1, 2, ..., N.
\end{aligned}$$

Somando as N parcelas acima, obtemos

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) = \frac{(r^{N-1}u')'}{r^{N-1}}. \tag{3.5}$$

Denotando por

$$\widetilde{u}(x) = ln(u(x) + \beta),\ x \in \mathbb{R}^N,$$

onde β é o mesmo da hipótese (g_9), segue por derivação e pela radialidade de u que

$$\Delta\widetilde{u}(x) = \widetilde{u}''(r) + \frac{N-1}{r}\widetilde{u}'(r). \tag{3.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} ln(u(x) + \beta)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{u(x)+\beta}\frac{\partial}{\partial x_i}(u(x)+\beta)\right) \\
&= -\frac{1}{(u(x)+\beta)^2}\frac{\partial}{\partial x_i}(u(x)+\beta) + \frac{1}{(u(x)+\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u(x)+\beta) \\
&= -\frac{1}{(u(x)+\beta)^2}\frac{\partial}{\partial x_i}u(x) + \frac{1}{(u(x)+\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x),\ \forall\ i = 1, 2, ..., N.
\end{aligned}$$

Somando as N parcelas acima, obtemos

$$\Delta\widetilde{u}(x) = \frac{1}{u(x)+\beta}\Delta u(x) - \frac{1}{(u(x)+\beta)^2}|\nabla u(x)|^2. \tag{3.7}$$

Assim, de (3.6) e (3.7), e observando a radialidade de u, isto é, $|\nabla u(x)|^2 = |u'(r)|^2$, e a hipótese de que u é solução do problema (GS), segue que

$$\widetilde{u}''(r) + \frac{N-1}{r}\widetilde{u}'(r) + \frac{1}{(u(r)+\beta)^2}|u'(r)|^2 = -\frac{g(u(r))b(r)}{u(r)+\beta}. \tag{3.8}$$

Multiplicando (3.8) por r^{N-1} e integrando de $(0,s)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^s r^{N-1}\widetilde{u}''(r)dr + \int_0^s (N-1)r^{N-2}\widetilde{u}'(r)dr \quad &+ \int_0^s \frac{r^{N-1}}{(u(r)+\beta)^2}|u'|^2 dr \\ &= \quad -\int_0^s \frac{g(u(r))}{u(r)+\beta}b(r)r^{N-1}dr. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Desde que

$$\int_0^s r^{N-1}\widetilde{u}''(r)dr = \widetilde{u}'(s)s^{N-1} - \int_0^s (N-1)\widetilde{u}'(r)r^{N-2}dr,$$

segue de (3.9) que

$$\widetilde{u}'(s)s^{N-1} + \int_0^s \frac{t^{N-1}}{(u(t)+\beta)^2}|u'|^2 dt = -\int_0^s \frac{g(u(t))}{(u(t)+\beta)}b(t)t^{N-1}dt. \tag{3.10}$$

Multiplicando (3.10) por s^{1-N} e integrando de $(0,r)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^r \widetilde{u}'(s)ds \quad &+ \int_0^r s^{1-N}\int_0^s \frac{t^{N-1}}{(u(t)+\beta)^2}|u'|^2 dtds \\ &= \quad -\int_0^r s^{1-N}\int_0^s \frac{g(u(t))}{(u(t)+\beta)}b(t)t^{N-1}dtds. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(r) - \widetilde{u}(0) + \quad &\int_0^r s^{1-N}\int_0^s \frac{t^{N-1}}{(u(t)+\beta)^2}|u'|^2 dtds \\ &= \quad -\int_0^r s^{1-N}\int_0^s \frac{g(u(t))}{(u(t)+\beta)}b(t)t^{N-1}dtds. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Observe desta última igualdade que

$$\widetilde{u}(r) < \widetilde{u}(0), \ \forall\ r > 0,$$

isto é,

$$ln(u(r)+\beta) = \widetilde{u}(r) < \widetilde{u}(0) = ln(u(0)+\beta),\ \forall\ r > 0.$$

Podemos melhorar o nosso entendimento sobre o comportamento da função u. Integrando a equação do problema (3.4) de $(0, r)$, lembrando que aparecerá uma integral imprópria, obtemos

$$-r^{N-1}u'(r) + \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{N-1}u'(\epsilon) = \int_0^r t^{N-1}b(t)g(u(t))dt.$$

Logo, $u'(\epsilon)$ é limitado numa vizinhança do 0.

Desde que $u \in C^2[0, \infty)$, segue que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{N-1}u'(\epsilon) = 0$$

e, como consequência, a derivada de u satisfaz

$$u'(r) = -r^{1-N}\int_0^r t^{N-1}b(t)g(u(t))dt < 0,\ \forall\ r > 0,$$

o que mostra que u é decrescente.

Logo,

$$\beta \leq u(r) + \beta \leq u(0) + \beta,\ \forall\ r > 0,$$

e, assim,

$$u(r) < u(0),\ \forall\ r > 0. \tag{3.12}$$

e

$$ln\beta \leq \widetilde{u}(r) \leq ln(u(0)+\beta) =: C\ -\ constante,\ \forall\ r > 0. \tag{3.13}$$

De (3.11), vemos que

$$\widetilde{u}(0) - \widetilde{u}(r) \geq \int_0^r s^{1-N}\int_0^s \frac{g(u(t))}{u(t)+\beta}b(t)t^{N-1}dtds. \tag{3.14}$$

Além disso, por (g_9) e (3.12), temos que

$$\frac{g(u(t))}{u(t)+\beta} \geq \frac{g(u(0))}{u(0)+\beta},\ \forall\ t > 0.$$

Substituindo esta última desigualdade em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(0)-\widetilde{u}(r) &\geq \int_0^r s^{1-N}\int_0^s \frac{g(u(0))}{u(0)+\beta}b(t)t^{N-1}dtds\\ &= \frac{g(u(0))}{u(0)+\beta}\int_0^r s^{1-N}\int_0^s b(t)t^{N-1}dtds.\end{aligned}$$

Logo, por (3.13),

$$\begin{aligned}\int_0^r s^{1-N}\int_0^s b(t)t^{N-1}dtds &\leq \frac{u(0)+\beta}{g(u(0))}(\widetilde{u}(0)-\widetilde{u}(r))\\ &\leq \frac{u(0)+\beta}{g(u(0))}\max\{\widetilde{u}(0)-ln\beta;\widetilde{u}(0)-C)\} \qquad (3.15)\\ &=: k\ -\ constante,\ \forall\ r>0.\end{aligned}$$

Usando integração por partes no primeiro membro da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^r s^{1-N}\int_0^s b(t)t^{N-1}dtds &= \frac{r^{2-N}}{2-N}\int_0^r b(t)t^{N-1}dt-\int_0^r \frac{s^{2-N}}{2-N}b(s)s^{N-1}ds\\ &= -\frac{r^{2-N}}{N-2}\int_0^r b(t)t^{N-1}dt+\frac{1}{N-2}\int_0^r sb(s)ds\\ &= \frac{1}{N-2}\left(-r^{2-N}\int_0^r b(t)t^{N-1}dt+\int_0^r sb(s)ds\right).\end{aligned}$$

Do fato de $N \geq 3$ e da hipótese em b, segue, passando ao limite a última equação, que

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^r s^{1-N}\int_0^s b(t)t^{N-1}dtds \quad =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N-2}\lim_{r\to\infty}\frac{-\displaystyle\int_0^r b(t)t^{N-1}dt + r^{N-2}\int_0^r sb(s)ds}{r^{N-2}} \\
&= \frac{1}{N-2}\lim_{r\to\infty}\frac{-b(r)r^{N-1} + (N-2)r^{N-3}\displaystyle\int_0^r sb(s)ds + r^{N-2}rb(r)}{(N-2)r^{N-3}} \\
&= \frac{1}{N-2}\lim_{r\to\infty}\int_0^r sb(s)ds \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, fazendo $r \to \infty$ em (3.15), obtemos

$$\frac{1}{N-2}\lim_{r\to\infty}\int_0^r sb(s)ds \ \le\ k\ <\ \infty,$$

o que é uma contradição.

Fica, assim, demonstrado o primeiro item do Teorema (NE).

□

No que segue, passamos a demonstrar o segundo item do Teorema (NE).

Demonstração do Teorema (NE), item (ii): Assuma o contrário, isto é, que o problema (GS) tem uma "*ground state*" radialmente simétrica u.

Defina

$$p(r) := r^{N-1}u'(r),\ r \ge 0.$$

Observe, de $u \in C^2[0,\infty]$ e da forma radial do problema (GS), que

$$p(0) = 0 \ e\ p'(r) < 0,\ \forall\ r > 0.$$

Portanto, existe $M > 0$ tal que $p(M) < 0$.

Tome $C = -p(M)$. De $p' < 0$, segue que

$$p(r) < p(M) = -C,\ \forall\ r > M,$$

isto é,

$$r^{N-1}u'(r) \le -C,\ para\ r \ge M.$$

Daí,

$$u'(r) \leq -\frac{C}{r^{N-1}}, \ r \geq M.$$

Integrando de M a r a inequação acima, temos dois casos a considerar:

<u>CASO 1:</u> Se $N = 1$, obtemos

$$u(r) \leq u(M) - C(r - M).$$

Fazendo $r \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{r \to \infty} u(x) = -\infty.$$

<u>CASO 2:</u> Se $N = 2$, obtemos

$$u'(r) \leq -\frac{C}{r}.$$

Integrando a inequação acima de M a r, obtemos

$$u(r) - u(M) \leq -C(lnr - lnM),$$

ou ainda,

$$u(r) \leq u(M) - Cln\left(\frac{r}{M}\right).$$

Passando o limite quando $r \longrightarrow \infty$, obtemos novamente que

$$\lim_{r \to \infty} u(x) = -\infty.$$

Em ambos os casos, temos uma contradição, pois, por hipótese,

$$\lim_{r \to \infty} u(r) = 0.$$

$\square$

Isto finaliza a prova do Teorema (NE).

No que segue, provaremos o Teorema (UN). Para melhor compreensão deste resultado, note que a hipótese (g_9) implica na hipótese (g_6). De fato, dados $s_2 > s_1 > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{g(s_1)}{s_1} &= \frac{g(s_1)}{s_1+\beta}\frac{s_1+\beta}{s_1} &&= \frac{g(s_1)}{s_1+\beta}\left(1+\frac{\beta}{s_1}\right)\\
&\geq \frac{g(s_2)}{s_2+\beta}\left(1+\frac{\beta}{s_1}\right) &&> \frac{g(s_2)}{s_2+\beta}\left(1+\frac{\beta}{s_2}\right)\\
&= \frac{g(s_2)}{s_2+\beta}\frac{s_2+\beta}{s_2} &&= \frac{g(s_2)}{s_2}.
\end{aligned}
$$

3.2 Prova do Teorema (UN)

Demonstração: Considere u e v soluções radialmente simétricas do problema (GS), isto é, u e v satisfazem o problema (3.4). Suponha $u(0) \neq v(0)$. Se $u(0) > v(0)$, então, pelo Teorema (1.27), $u(r) > v(r)$, $\forall\ r > 0$.

Tome

$$w_1(r) := (v(r)+\beta)^2 \;\; e \;\; w_2(r) := (u(r)+\beta)^2, \;\; r \geq 0,$$

onde β é o mesmo da hipótese (g_9), e observe da regularidade de u e v que

$$w_1, w_2 \in X^1.$$

[1]Conforme definido no Capítulo 1.

Usando o Teorema (1.28), segue para $r > 0$ que

$$\begin{aligned}
H(r) &\leq \int_0^r \left[\frac{(s^{N-1}(w_2^{1/2})')'}{w_2^{1/2}} - \frac{(s^{N-1}(w_1^{1/2})')'}{w_1^{1/2}} \right] (w_1 - w_2) ds \\
&= \int_0^r \left[\frac{(s^{N-1}(u+\beta)')'}{u+\beta} - \frac{(s^{N-1}(v+\beta)')'}{v+\beta} \right] (v-u) ds \\
&= \int_0^r \left[\frac{(s^{N-1}u')'}{u+\beta} - \frac{(s^{N-1}v')'}{v+\beta} \right] (v-u) ds \\
&= \int_0^r \left[\frac{s^{N-1}b(s)g(v(s))}{v+\beta} - \frac{s^{N-1}b(s)g(u(s))}{u+\beta} \right] (v-u) ds \\
&= \int_0^r s^{N-1}b(s) \left[\frac{g(v(s))}{v+\beta} - \frac{g(u(s))}{u+\beta} \right] (v-u) ds \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da hipótese (g_9) e do fato de $u(r) > v(r),\ \forall\ r > 0$.

Por outro lado, segue da definição de H em (1.11) e da desigualdade anterior que

$$\left[\frac{(w_2^{1/2})'}{w_2^{1/2}} - \frac{(w_1^{1/2})'}{w_1^{1/2}} \right] (w_1 - w_2)(r) \leq 0,$$

o que implica, da definição de $w_i,\ i = 1, 2$, que

$$\frac{(w_2^{1/2})'(r)}{w_2^{1/2}(r)} - \frac{(w_1^{1/2})'(r)}{w_1^{1/2}(r)} \geq 0,\ \forall\ r > 0.$$

Isto é,

$$\frac{u'(r)}{u(r)+\beta} - \frac{v'(r)}{v(r)+\beta} \geq 0,\ \forall\ r > 0.$$

Como

$$\begin{aligned}\left(\frac{u+\beta}{v+\beta}\right)' &= \frac{u'(v+\beta)-(u+\beta)v'}{(v+\beta)^2}\\ &= \frac{(v+\beta)(u+\beta)\left[\dfrac{u'}{u+\beta}-\dfrac{v'}{v+\beta}\right]}{(v+\beta)^2}\\ &= \frac{u+\beta}{v+\beta}\left[\frac{u'}{u+\beta}-\frac{v'}{v+\beta}\right],\end{aligned}$$

segue de (**??**) que a função

$$\frac{u+\beta}{v+\beta} \text{ } \textit{é não decrescente em } (0,\infty). \tag{3.16}$$

Desde que $u(r) > v(r)$, $\forall\ r > 0$, segue de (g_9) que

$$\begin{aligned}\int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}b(s)g(u(s))dsdt &= \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}b(s)\frac{g(u(s))}{u(s)+\beta}(u(s)+\beta)dsdt\\ &\le \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}b(s)\frac{g(v(s))}{v(s)+\beta}(u(s)+\beta)dsdt \quad (3.17)\\ &\le \frac{u(r)+\beta}{v(r)+\beta}\int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}b(s)g(v(s))dsdt,\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é obtida de (3.16).

Por outro lado, desde que u e v são soluções radialmente simétricas do problema (3.4), segue de (1.10) que

$$u(0) = u(r) + \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}b(s)g(u(s))dsdt,\ \forall\ r > 0, \tag{3.18}$$

e

$$v(0) = v(r) + \int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}b(s)g(v(s))dsdt,\ \forall\ r > 0. \tag{3.19}$$

Passando ao limite nas equações (3.18) e (3.19), e relembrando que $u(r),\ v(r) \longrightarrow 0$ quando $r \longrightarrow \infty$, temos que

$$u(0) = \lim_{r\to\infty}\int_0^r t^{1-N}\int_0^t s^{N-1}b(s)g(u(s))dsdt \tag{3.20}$$

e

$$v(0) = \lim_{r\to\infty} \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} b(s) g(v(s)) dsdt. \tag{3.21}$$

Assim, por (3.17), (3.20) e (3.21), obtemos

$$\begin{aligned}
1 &< \frac{u(0)}{v(0)} \\
&= \frac{\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} b(s) g(u(s)) dsdt}{\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} b(s) g(v(s)) dsdt} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} b(s) g(u(s)) dsdt}{\displaystyle\int_0^r t^{1-N} \int_0^t s^{N-1} b(s) g(v(s)) dsdt} \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \frac{u(r)+\beta}{v(r)+\beta} \\
&= \frac{\displaystyle\lim_{r\to\infty} u(r)+\beta}{\displaystyle\lim_{r\to\infty} v(r)+\beta} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

o que é impossível. Portanto, $u(0) \leq v(0)$.

De forma análoga, supondo $u(0) < v(0)$, chegamos a mesma contradição. Logo, $u(0) = v(0)$, e portanto, da unicidade dada pelo Teorema (1.26), segue que $u(r) = v(r)$, $\forall\ r > 0$.

□

APÊNDICE A

Resultados Gerais

Neste apêndice, provaremos duas proposições que justificam algumas afirmações feitas durante a prova do Teorema (ZH), no Capítulo 2.

Considere Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$.

Proposição A.1. *Sejam* $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $C^1(0,\infty)$ *e* $u : \Omega \longrightarrow (0,\infty)$ *de classe* $C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$. *Então* $g \circ u \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Demonstração: Considere um domínio $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Então existem $s_0, s_1 > 0$ tais que

$$s_0 < u(x) < s_1, \ \forall \ x \in \overline{\Omega_0}. \tag{A.1}$$

Desde que $g|_{[s_0,s_1]}$ é contínua, $g|_{(s_0,s_1)}$ é diferenciável e $|g'(s)| \leq M$, $\forall \ s \in (s_0, s_1)$, então, pelo Teorema do Valor Médio[1], segue

$$|g(s) - g(t)| \leq M|s - t|, \ \forall \ s, t \in (s_0, s_1).$$

Em particular, de (A.1),

$$|g(u(x)) - g(u(y))| \leq M|u(x) - u(y)|, \ \forall \ x, y \in \overline{\Omega_0},$$

isto é, para $x \neq y$,

$$\frac{|g(u(x)) - g(u(y))|}{|x - y|^{\alpha}} \leq M\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}}, \ \forall \ x, y \in \overline{\Omega_0}. \tag{A.2}$$

[1] Conforme [38], Corolário 2, pág. 138.

Além disso, da hipótese $u \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$, segue

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_0}}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} = \|u\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega_0})}, \ \forall\ x,y \in \overline{\Omega_0},\ x \neq y.$$

Daí, passando ao supremo em (A.2), segue que

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_0}}} \frac{|(g \circ u)(x) - (g \circ u)(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq M\|u\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega_0})} < \infty,$$

isto é, $(g \circ u) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega_0})$.

Como Ω_0 é arbitrário, temos que $(g \circ u) \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$.

$\square$

Proposição A.2. *Sejam g e u definidas como na proposição anterior e $b : \Omega \longrightarrow (0,\infty)$ de classe $C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$. Então $h(x) := b(x)g(u(x)) \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração: Sejam $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, e $x, y \in \Omega_0$, tais que $x \neq y$. Então

$$\begin{aligned} \frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|^{\alpha}} &= \frac{|b(x)g(u(x)) - b(y)g(u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \\ &\leq \frac{|b(x)g(u(x)) - b(x)g(u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} + \frac{|b(x)g(u(y)) - b(y)g(u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \qquad \text{(A.3)} \\ &= b(x)\frac{|g(u(x)) - g(u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} + g(u(y))\frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|^{\alpha}},\ x \neq y. \end{aligned}$$

Da hipótese em b e da Proposição (A.1), segue que

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_0}}} b(x)\frac{|g(u(x)) - g(u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} &\leq \|b\|_{L^{\infty}(\Omega_0)} \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_0}}} \frac{|g(u(x)) - g(u(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \\ &= \|b\|_{L^{\infty}(\Omega_0)}\|g \circ u\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega_0})}, \ \ \forall\ x,y \in \overline{\Omega_0}. \end{aligned}$$

Além disso, da positividade e regularidade de u em $\overline{\Omega_0}$ e da regularidade da função g, segue que

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_0}}} g(u(y))\frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C\|b\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega_0})}.$$

Portanto, segue de (A.3), passando ao supremo, que $h \in C^{\alpha}_{loc}(\overline{\Omega_0})$.

Como Ω_0 é arbitrário, temos que $h \in C^{\alpha}(\Omega)$.

$\square$

As contas apresentadas a seguir servem de referência para outras similares que apareceram algumas vezes durante a demonstração do Teorema (ZH), no Capítulo 2.

Observação A.3.

$$\begin{aligned}
\Delta\left(lnu(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{u(x)}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}(u(x)) + \frac{1}{u(x)}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(u(x)) + ... \\
&\quad ... + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{1}{u(x)}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}(u(x)) + \frac{1}{u(x)}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}(u(x)) \\
&= \frac{1}{u(x)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(u(x)) + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}(u(x))\right] + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{u(x)}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}(u(x)) + ... \\
&\quad ... + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{1}{u(x)}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}(u(x)) \\
&= \frac{\Delta u(x)}{u(x)} + \left[\frac{-1}{(u(x))^2}\frac{\partial}{\partial x_1}(u(x))\frac{\partial}{\partial x_1}(u(x)) + ... + \frac{-1}{(u(x))^2}\frac{\partial}{\partial x_n}(u(x))\frac{\partial}{\partial x_n}(u(x))\right] \\
&= \frac{\Delta u(x)}{u(x)} - \frac{(\nabla u(x))^2}{(u(x))^2}
\end{aligned}$$

APÊNDICE B

Demonstração do Teorema de Sub e Super Soluções

O principal objetivo deste apêndice é demonstrar um teorema (Teorema (1.25)), devido à Cui [12], em 2000, que foi de fundamental importância na obtenção dos nossos resultados, mas que possui um caráter mais geral cujo qual merece ser discutido separadamente.

Inicialmente, apresentamos, sem demonstração, alguns resultados necessários à prova do teorema supracitado. As noções que passamos a desenvolver visam estabelecer as idéias essenciais para a compreensão da demonstração que pretendemos fazer neste apêndice.

Considere o problema de valor de fronteira elíptico semilinear da forma

$$\begin{cases} Au &= f(x,u,\nabla u),\ \Omega \\ Bu &= g,\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.1}$$

onde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua apropriada, $Au = -\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} D_i D_k u$, com matriz de coeficientes simétrica é tal que $a_{ik} \in C^{\mu}(\overline{\Omega})$ e existe uma constante positiva α_0 tal que $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi^i\xi^k \geq \alpha_0|\xi|^2$, $Bu := b_0 u + \delta\frac{\partial u}{\partial\beta}$ e $g \in C^{2-\delta+\mu}(\partial\Omega)$.

Definição B.1. Uma função u é chamada uma subsolução do problema (B.1) se $u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{cases} Au &\leq f(x,u,\nabla u),\ \Omega \\ Bu &\leq g,\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição B.2. Uma função u é chamada uma supersolução do problema (B.1) se $u \in$

$C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{cases} Au & \geq & f(x,u,\nabla u),\ \Omega \\ Bu & \geq & g,\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição B.3. Uma subsolução $\underline{v}$ e uma supersolução $\overline{v}$ são ditas (B,g)- relacionadas se existe uma função $u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$ com $Bu = g$, tal que $\underline{v} \leq u \leq \overline{v}$.

No que segue, para enunciarmos o Teorema (B.4), suporemos que f satisfaz

(B_1) $f(\cdot, s, \xi) \in C^{\mu}(\overline{\Omega})$ uniformemente para (s,ξ) em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$;

(B_2) $\frac{\partial f}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$, $i = 1, ..., n$, existem e são contínuas em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$;

(B_3) Existe uma função $c : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ tal que

$$|f(x,s,\xi)| \leq c(\rho)(1+|\xi|^2),\ \ \forall \rho \geq 0 \ e \ (x,s,\xi) \in \overline{\Omega} \times [-\rho,\rho] \times \mathbb{R}^N.$$

Teorema B.4 (Teorema de Amann). *Suponha* $(B_1)-(B_3)$ *e sejam* $\underline{v}$ *e* $\overline{v}$ *subsolução e supersolução, respectivamente, do problema* (B.1) *tais que* $\underline{v}$ *e* $\overline{v}$ *são* (B,g)*- relacionadas. Então o problema* (B.1) *tem pelo menos uma solução* $u \in [\underline{v},\overline{v}]$*. Mais precisamente, existem uma solução mínima* $\widetilde{u} \in [\underline{v},\overline{v}]$ *e uma solução máxima* $\widehat{u} \in [\underline{v},\overline{v}]$*, no sentido que toda solução* $u \in [\underline{v},\overline{v}]$ *satisfaz* $\widetilde{u} \leq u \leq \widehat{u}$*.*

Demonstração: Conforme [3]. □

No que segue, provaremos o Teorema de Sub e Super Solução para Problemas Singulares em Domínios Limitados, devido à Cui, [12], 2000, aplicando o Teorema (B.4), de Amann, a uma forma particular do seguinte problema

$$\begin{cases} Lu + f(x,u,Du) = 0, & x \in \Omega \\ u > 0, & x \in \Omega \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.2}$$

onde suporemos que $f : \Omega \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow [0,\infty)$ são funções contínuas e

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

é um operador uniformemente elíptico de segunda ordem, com $a_{ij}(x), b_i(x) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha \in (0,\infty)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Adicionalmente, suponha

(B_4) $f(x,s,\xi)$ é localmente hölder contínua em $\Omega \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ e continuamente diferenciável com respeito às variáveis u e ξ

e

(B_5) Para qualquer $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ e quaisquer $a, b \in (0,\infty), a < b$, existe uma constante

$C = C(\Omega_1, a, b) > 0$ tal que $|f(x, s, \xi)| \leq C(1 + |\xi|^2)$, $\forall\ x \in \Omega_1$, $\forall\ s \in [a, b]$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$.

Então, temos o seguinte teorema:

Teorema B.5 (Teorema de Sub e Super Soluções para Problemas Singulares em Domínios Limitados, S. Cui). *Considere a função f satisfazendo $(B_4) - (B_5)$. Além disso, suponha que o problema* (B.2) *tem um par de super e sub soluções $\overline{u}$ e $\underline{u}$, respectivamente, satisfazendo as condições:*

(i) $\overline{u}, \underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;
(ii) $0 < \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$, $\forall\ x \in \Omega$;
(iii) $\overline{u}(x) = \underline{u}(x) = \varphi(x)$, $\forall\ x \in \partial\Omega$.

Então este problema tem uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$.

Demonstração: Pelo Lema (C.3), podemos tomar uma sequência de domínios regulares $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset ... \subset\subset \Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1} \subset\subset ...\ e \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega.$$

Então, para cada Ω_j, considere o problema

$$\begin{cases} Lu + f(x, u, Du) = 0, & x \in \Omega_j \\ u > 0, & x \in \Omega_j \\ u(x) = \underline{u}(x), & x \in \partial\Omega_j, \end{cases} \tag{B.2$_j$}$$

e observe que as restrições de $\underline{u}$ e $\overline{u}$ a $\overline{\Omega_j}$ são, respectivamente, uma sub e uma super-solução do problema $(B.2)_j$.

Portanto, admitindo satisfeitas as hipóteses do Teorema (B.4) (Teorema de Amann), concluímos que existe uma solução mínima, digamos u_j, para o problema $(B.2)_j$ satisfazendo

(a) $u_j \in C^{2,\alpha}(\Omega_j) \cap C(\overline{\Omega_j})$;
(b) $\underline{u}(x) \leq u_j(x) \leq \overline{u}(x)$, $\forall\ x \in \overline{\Omega_j}$.

Estenda $u_j(x)$ para $\overline{\Omega}$ como $u_j(x) = \underline{u}(x)$, $\forall\ x \in \overline{\Omega} - \Omega_j$. Assim, $u_j \in C(\overline{\Omega})$ e satisfaz:

(d) $\underline{u}(x) \leq u_1(x) \leq u_2(x) \leq ... \leq u_j(x) \leq ... \leq \overline{u}(x)$, $\forall\ x \in \overline{\Omega}$;
(e) $Lu_j + f(x, u_j, Du_j) = 0$, $\overline{\Omega_j}$, $\forall\ j = 1, 2, ...$

De fato, desde que u_{j+1} satisfaz

$$\begin{cases} Lu_{j+1} + f(x, u_{j+1}, Du_{j+1}) = 0, & x \in \Omega_{j+1} \\ u_{j+1}(x) = \underline{u}(x), & x \in \overline{\Omega} - \Omega_{j+1} \end{cases}$$

e $u_{j+1} \geq \underline{u}$ em Ω_{j+1}, segue que u_{j+1} satisfaz

$$\begin{cases} Lu_{j+1} + f(x, u_{j+1}, Du_{j+1}) = 0, & x \in \Omega_j \\ u_{j+1}(x) \geq \underline{u}(x), & x \in \partial\Omega_j, \end{cases}$$

isto é, u_{j+1} é supersolução de $(B.2)_j$.

Logo, pelo Teorema (B.4), existe $\widetilde{u_j}$ solução do problema $(B.2)_j$ com

$$\underline{u} \leq \widetilde{u_j} \leq u_{j+1}, \ \forall \ j = 1, 2, ...$$

e pela minimalidade de u_j, segue que

$$u_j \leq \widetilde{u_j} \leq u_{j+1}, \ \forall \ j = 1, 2, ...$$

Assim, $\{u_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ satisfaz (d). Como $u_j \in C(\overline{\Omega_j})$, temos que (e) é satisfeita.

De (d), temos que $\{u_j(x)\}_1^{\infty}$ converge pontualmente em $\overline{\Omega}$. Denotemos por

$$u(x) = \lim_{j \to \infty} u_j(x).$$

Por outro lado, pelo Lema (C.6) e por ser compacta a imersão

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_k}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega_k}),$$

temos, para cada $k = 1, 2, ...$, que a sequência $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ tem uma subsequência convergindo em $C^2(\overline{\Omega_k})$, que ainda denotaremos por u_j. Pela unicidade do limite

$$u \in C^2(\overline{\Omega_k}), \ \forall \ k,$$

ou seja, $u \in C^2(\Omega)$.

Pelo Teorema (1.15), temos que

$$\begin{aligned} \|u_j - u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_k)} &\leq C \left(\|L(u_j - u)\|_{C^{\alpha}(\Omega_{k+1})} + \|u_j - u\|_{C^0(\Omega_{k+1})} \right) \\ &= C \left(\|f(x, u, Du) - f(x, u_j, Du_j)\|_{C^{\alpha}(\Omega_{k+1})} + \|u_j - u\|_{C^0(\Omega_{k+1})} \right). \end{aligned}$$

Tomando o limite da subsequência convergente em $C^2(\overline{\Omega_k})$, e levando em consideração a hipótese feita sobre f e a regularidade de u, vemos que

$$\|u_j - u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_k})} \longrightarrow 0.$$

Como

$$\begin{aligned} \|u_j - u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_k})} &= \sum_{|m|\,\leq\,2} \max_{x\,\in\,\Omega_k} \|D^m(u_j - u)\| + \sum_{|m|\,\leq\,2} H_\alpha[D^m(u_j - u)] \\ &\geq \sum_{|m|\,\leq\,2} \|D^m u_j - D^m(u)\| \\ &\geq \|Lu_j - Lu\|, \end{aligned}$$

temos que

$$\|Lu_j - Lu\| \longrightarrow 0.$$

Portanto, u satisfaz a equação

$$Lu + f(x, u, Du) = 0,\ \overline{\Omega_k},\ \forall\ k. \tag{B.3}$$

Consequentemente, u satisfaz (B.3) em todo Ω.

Ao lado disso, tomando o limite pontual da sequência $\{u_j(x)\}_1^\infty$, vemos que

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega},$$

o implica que

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0),\ \forall\ x_0 \in \partial\Omega.$$

Assim, $u \in C(\overline{\Omega})$ e satisfaz a condição de fronteira. Resta provar que $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Até agora, temos o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{lcll} Lu & = & \widetilde{f}, & \Omega \\ u & = & \varphi, & \partial\Omega, \end{array} \right.$$

onde $\widetilde{f}(x) = -f(x, u(x), Du(x))$ em Ω e $u \in C^2(\Omega)$.

Em particular, dado $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, pelo Lema (C.6) e usando a Desigualdade do Valor Médio, obtemos

$$\begin{aligned} H_\alpha[\widetilde{f}] &= \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in\overline{\Omega_0}}} \frac{|\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\leq \sup_{\substack{\eta_1\neq\eta_2 \\ \eta_1,\eta_2\in\Omega_{k+1}\times(a,b)\times B(0,R)}} \frac{|f(\eta_1)-f(\eta_2)|}{\|\eta_1-\eta_2\|^\alpha} \\ &+ \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in\overline{\Omega_k}}} \frac{|f(x,u(x),Du(x))-f(y,u(y),Du(x))|}{|x-y|^\alpha} \\ &+ \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in\overline{\Omega_k}}} \frac{|f(x,u(y),Du(x))-f(y,u(y),Du(y))|}{|x-y|^\alpha} \\ &\overset{DVM}{\leq} d(\Omega_0)\ -\ constante, \end{aligned}$$

isto é, resumindo, temos

$$\begin{cases} Lu &= \widetilde{f}, \qquad \Omega_0 \\ u &= \phi = u|_{\partial\Omega_0}, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\widetilde{f} \in C^\alpha(\overline{\Omega_0})$ e $\phi \in C(\partial\Omega_0)$.

Portanto, da arbitrariedade de Ω_0 e pelo Teorema (1.18), concluímos que $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

□

No que segue, verificação as hipóteses do Teorema (B.4).

Primeiramente, definimos

$$f_j(x,s,\xi) = \begin{cases} f(x,s,\xi), & (x,s,\xi) \in \Omega_j \times [m_j,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ f(x,m_j,\xi), & (x,s,\xi) \in \Omega_j \times (-\infty,m_j) \times \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

onde

$$m_j = \min_{\overline{\Omega_j}} \underline{u},\ \ para\ cada\ j = 1,2,....$$

Pela hipótese (B_4), se $s > m_j$,

$$\sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in\overline{\Omega_j}}} \frac{|f_j(x,s,\xi)-f_j(y,s,\xi)|}{|(x,s,\xi)-(y,s,\xi)|^\mu} = \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in\overline{\Omega_j}}} \frac{|f(x,s,\xi)-f(y,s,\xi)|}{|x-y|^\mu} < \infty;$$

e, se $s < m_j$,

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_j}}} \frac{|f_j(x,s,\xi) - f_j(y,s,\xi)|}{|(x,s,\xi) - (y,s,\xi)|^{\mu}} = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{\Omega_j}}} \frac{|f(x,m_j,\xi) - f(y,m_j,\xi)|}{|x-y|^{\mu}} < \infty.$$

Além disto, da continuidade de f, segue que f_j é contínua, e isso conclui a verificação da hipótese (B_1).

Desde que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial s}(x,m_j,\xi) &= \lim_{t\to 0} \frac{f_j(x,m_j+t,\xi) - f_j(x,m_j,\xi)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x,m_j+t,\xi) - f(x,m_j,\xi)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x,m_j,\xi), \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\frac{\partial f_j}{\partial \xi_i}(x,m_j,\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x,m_j,\xi),$$

segue, usando a hipótese (B_4), que f_j satisfaz (B_2).

Verificaremos (B_3). Dado $\rho > 0$, tome $b = \rho$ e $0 < a < m_j$. Assim, segue de (D_2) que existe $c = c(\rho)$ tal que, se $s \geq m_j$,

$$|f_j(x,u,\xi)| = |f(x,s,\xi)| \leq c(1+|\xi|^2),\ \forall x \in \overline{\Omega_j},\ s \in [m_j,b],\ \xi \in \mathbb{R}^n$$

e, se $s < m_j$,

$$|f_j(x,s,\xi)| = |f(x,m_j,\xi)| \leq c(1+|\xi|^2),\ \forall x \in \overline{\Omega_j},\ s \in [-b,b],\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja, a função $c : (0,\infty) \to [0,\infty) \in \overline{\Omega_j} \times [-\rho,\rho] \times \mathbb{R}^n$ é tal que

$$|f_j(x,s,\xi)| \leq c(\rho)(1+|\xi|^2,\ \forall\ \rho > 0\ \ e\ \ (x,s,\xi) \in \overline{\Omega_j},\ s \in [-\rho,\rho],\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, ficam verificadas as hipóteses do Teorema (B.4).

APÊNDICE C

Resultados Técnicos

Objetivamos, neste apêndice, demonstrar dois lemas relacionados ao Teorema de Sub e Super Solução do Cui, 2000, que consta no Apêndice B (o Teorema (B.5)). Primeiramente, listaremos alguns teoremas que nos auxiliarão na obtenção dos resultados desejados. São eles:

Teorema C.1 (Teorema de *Sard*). *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação suave, com U aberto de $\mathbb{R}^N$, e seja C o conjunto dos pontos críticos, que é o conjunto de todos $x \in U$ com posto $f'(x) < p$. Então $f(C) \subset \mathbb{R}^p$ tem medida nula.*

Demonstração: Conforme [40]. □

Teorema C.2 (Teorema da função implícita). *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k $(k \geq 1)$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se $p = (x_0, y_0) \in U$ é tal que $f(p) = c$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, então existem uma bola $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ tais que $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é gráfico de uma função $\xi : B \longrightarrow J$, de classe C^k.*

Demonstração: Conforme [38]. □

O lema a seguir foi retirado de Lazer e Mckenna [35], 1993. Por completicidade do trabalho, passamos a demonstrá-lo abaixo.

Lema C.3. *Seja Ω um conjunto limitado de $\mathbb{R}^N$. Então existe uma sequência $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ de conjuntos abertos tal que*

$$\overline{\Omega_m} \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \Omega$$

e a fronteira $\partial\Omega_m$ é uma subvariedade suave (C^∞) de dimensão $N-1$ para $m \geq 1$.

Demonstração: Considere

$$U_m = \left\{ x \in \Omega;\ |x| < m \ e \ d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Assim, $U_m \subset \Omega$ é um aberto e satisfaz

$$\overline{U_m} \subset U_{m+1} \subset \Omega \ \ e \ \ \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m = \Omega.$$

Agora, para cada m, considere $f_m : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$ [1] uma função de classe C^∞ tal que

$$\begin{array}{rcl} 0 \ \leq \ f_m(x) & \leq & 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N; \\ f_m(x) & = & 1, \quad x \in \overline{U_m}; \\ f_m(x) & = & 0, \quad x \in \mathbb{R}^n - U_{m+1}. \end{array}$$

Segue pelo Teorema (C.1), existe $c_m \in (0,1)$ valor regular de f_m.

Defina $\Omega_m = f_m^{-1}\left((c_m, 1]\right) \subset \Omega$. Assim,

$$\overline{U_m} = f_m^{-1}\{1\} \subset f_m^{-1}\left((c_m, 1]\right) = \Omega_m \subset f_m^{-1}\left((0,1]\right) = U_{m+1} \subset \Omega,$$

ou seja,

$$\overline{U_m} \subset \Omega_m \subset U_{m+1}, \ \forall\, m = 1, 2, ...$$

e, consequentemente,

$$\overline{\Omega_m} \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega.$$

Além disto, da definição de U_m e Ω_m, temos que

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m \subset \Omega.$$

A regularidade de cada Ω_m segue da aplicação do Teorema (C.2) para f_m, e isto conclui a prova do lema.

□

Em seguida, consideraremos uma equação na forma divergente, isto é,

$$\frac{d}{dx_i} a_i(x, u, Du) + a(x, u, Du) = 0, \tag{C.1}$$

[1] Conforme [38], pág. 431-433.

onde,

$$a(x,s,\rho) = a(x_1,...,x_N,s,\rho_1,...,\rho_N),$$

$$a_i(x,s,\rho) = a(x_1,...,x_N,s,\rho_1,...,\rho_N),\ i = 1,...,N,$$

$$Du(x) = (u_{x_1}(x),...,u_{x_N}(x))$$

e $x = (x_1,...,x_N)$, $\rho = (\rho_1,...,\rho_N)$.

Observação C.4.

$$\frac{d}{dx_i}a(x,u(x),Du(x)) = \frac{\partial a}{\partial x_i} + \frac{\partial a}{\partial u}u_{x_i} + \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}}u_{x_k x_i},\ \mathit{onde}\ \frac{\partial a}{\partial u_{x_k}}u_{x_k x_i} = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial a}{\partial u_{x_k}}u_{x_k x_i}.$$

Como exemplos de equações na forma (C.1), podemos citar as equações quasilineares escritas da forma

$$a_{ij}(x,u)u_{x_i x_j} + a(x,u,Du) = 0.$$

Uma equação do tipo (C.1) é uniformemente elíptica se e somente se existem funções contínuas ν e μ definidas para $t \geq 0$ tais que ν é positiva não crescente, μ é não decrescente e

$$\nu(|u|)(1+|\rho|)^{m-2}\sum_{i=1}^{N}\xi^2 \ \leq\ a_{ij}(x,u,\rho)\xi_i\xi_j \ \leq\ \mu(|u|)(1+|\rho|)^{m-2}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2.$$

Nos referiremos a uma função $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tal que

$$\max_{\overline{\Omega}}|u| \ <\ \infty$$

e

$$I(u,\eta) := \int_{\Omega}\left[a_i(x,u,Du)\eta_{x_i} - a(x,u,Du)\eta\right]dx = 0$$

para toda função arbitrária limitada η em $W_0^{m,p}(\Omega)$, como uma *solução limitada generalizada* da equação (C.1).

O teorema que enunciaremos a seguir estabelece um limite para o valor máximo absoluto das primeiras derivadas das soluções u de equações elípticas com parte principal na forma divergente, em termos de constantes que caracterizam as funções $a_i(x,u,\rho)$ e $a(x,u,\rho)$ e do $\max_{\Omega'}|u|$, para uma subregião interior arbitrária $\Omega^{'} \subset \Omega$.

Teorema C.5 (Teorema da estimativa interior gradiente de *Ladyzenskaya* e *Ural'treva*). *Considere a equação* (C.1), *onde as funções* $a_i(x,u,Du)$, $i=1,...,N$, *e* $a(x,u,Du)$ *são mensuráveis para* $x\in\overline{\Omega}$, u *e* ρ *arbitrários, e* $a_i(x,u,Du)$ *são diferenciáveis com respeito a* x, u *e* ρ. *Além disso, todas essas funções satisfazem as desigualdades*

$$(i)\quad \nu(|u|)(1+|\rho|)^{m-2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\leq\frac{\partial a_i(x,u,\rho)}{\partial\rho_j}\xi_i\xi_j\leq\mu(|u|)(1+|\rho|)^{m-2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$$

e

$$(ii)\quad \sum_{i=1}^{n}\left(|\frac{\partial a_i}{\partial u}|+|a_i|\right)(1+|\rho|)+\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right|+|a|\leq\mu(|u|)(1+|\rho|)^m,$$

com $m>1$. *Seja* u *uma solução generalizada limitada da equação* (C.1) *em* $W^{l,2}(\Omega)$ *e suponha*

$$(iii)\quad \int_{\Omega'}(1+|\nabla u|)^{m-2}\sum_{i,j=1}^{n}u^2_{x_ix_j}dx<\infty$$

e

$$(iv)\quad \int_{\Omega'}|\nabla u|^{m+2}dx<\infty.$$

Então $max_{\Omega'}|\nabla u|$, *onde* $\Omega'\subset\subset\Omega$, *é limitado por uma expressão em termos de* $M=max_{\Omega'}|u|$, m, $\nu(M)$ *e* $\mu(M)$ *nas condições (i) e (ii), e a distância de* Ω' *a* $\partial\Omega$.

Demonstração: Confira [32], Teorema 3.1, pág. 266. □

Lema C.6. *Seja* $u_j\in C^{2,\alpha}(\Omega_j)\cap C\overline{\Omega_j}$, *com* $\underline{u}(x)\leq u_j(x)\leq\overline{u}(x)$, $\forall\ x\in\overline{\Omega_j}$, *uma solução do problema* $(B.2)_j$. *Então para qualquer* $k=1,2,...$ *existe uma constante positiva* C_k *tal que para todo* $j\geq k+1$,

$$\|u_j\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega_k})}\leq C_k.$$

Demonstração: Na prova deste lema, denotaremos C_i, $i=1,2,...$, como sendo constantes positivas independentes de j.

Para cada k fixo, considere domínios Q_1 e Q_2 tais que

$$\Omega_k\subset\subset Q_1\subset\subset Q_2\subset\subset\Omega_{k+1}$$

e u_j, com $j\geq k+1$, a solução de

$$Lu_j+f_j(x)=0, x\in\Omega_{k+1}, \tag{C.2}$$

onde

$$f_j(x):=f(x,u_j,Du_j).$$

Usaremos alguns resultados de estimativa interior. Desde que

$$\underline{u}(x)\leq u_j(x)\leq\overline{u}(x),$$

temos que

$$|u_j(x)| \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) := M, \ \forall \ x \in \overline{\Omega_{k+1}},$$

ou seja, a sequência $\{u_j\}_{j=k+1}^{\infty}$ é uniformemente limitada em $\overline{\Omega_{k+1}}$.

Aplicando o Teorema (C.5) e usando a desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \max_{x \in \overline{Q_2}} |Du_j(x)| &\leq C_1 \max_{x \in \overline{\Omega_{k+1}}} |u_j(x)| \\ &\leq C_1 \max_{x \in \overline{\Omega}} \overline{u}(x) \\ &=: C_2, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência $\{Du_j\}_{j=k+1}^{\infty}$ é uniformemente limitada em $\overline{Q_2}$.

Assim, da hipótese (B_5) e da estimativa anterior, segue que

$$|f(x, u_j, Du_j)| \leq C(1 + |Du_j|^2) =: C_3, \ \forall \ x \in \overline{Q_2}, \tag{C.3}$$

isto é, a sequência

$$\{f_j\}_{k+1}^{\infty} \ \textit{é uniformemente limitada em } \overline{Q_2}.$$

Em particular, $f_j \in L^p(Q_2), \ \forall \ p \geq 1$.

Fixe $p > \frac{N}{1-\alpha}$. Pelo Teorema (1.7), segue que

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{W^{2,p}(Q_2)} &\leq C_4 \left(\|f_j\|_{L^p(Q_2)} + \|u\|_{L^p(Q_2)} \right) \\ &= C_4 \left(\left(\int_{Q_2} |f_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{Q_2} |u_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &= C_4 (|Q_2|)^{\frac{1}{p}} \left(\max_{x \in \overline{Q_2}} |f_j(x)| + \max_{x \in \overline{Q_2}} u_j(x) \right) \\ &=: C_5. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Portanto, segue do Teorema (1.13) e de (C.4) que

$$\|u_j\|_{C^{1,\alpha}(\overline{Q_1})} \leq C_6, \ j \geq k+1.$$

Além disto, afirmamos que

$$\|f_j\|_{C^\alpha(\overline{Q_1})} \leq C_7. \tag{C.5}$$

Portanto, pelo Teorema (1.15), observando (C.5) e a regularidade de u_j, temos que

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_k)} &\leq C_{12}\left(\max_{x\in Q_1} u_j(x) + \|f_j\|_{C^\alpha(Q_1)}\right) \\ &\leq C_k, \end{aligned}$$

onde C_k é uma constante independente de j.

Para finalizar a prova, verificaremos a afirmação (C.5). Observe que

$$\begin{aligned} \frac{|f_j(x)-f_j(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \frac{|f(x,u_j(x),Du_j(x))-f(y,u_j(x),Du_j(x))|}{|x-y|^\alpha} \\ &+ \frac{|f(y,u_j(x),Du_j(x))-f(y,u_j(y),Du_j(x))|}{|x-y|^\alpha} \\ &+ \frac{|f(y,u_j(y),Du_j(x))-f(y,u_j(y),Du_j(y))|}{|x-y|^\alpha} \\ &= (I)+(II)+(III). \end{aligned}$$

Mostraremos que (I), (II) *e* (III) são limitados por uma constante independente de j. Para isto, faremos as seguintes considerações:

- $f(x,s,\xi) \in C^\alpha_{loc}(\Omega')$, onde $\Omega' = \Omega \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, e é continuamente diferenciável com respeito às variáveis s e ξ;

- do fato de $Q_1 \subset\subset \Omega_j$ e $\underline{u}(x) \leq u_j(x) \leq \overline{u}(x)$, $\forall\, x \in \overline{\Omega_{k+1}}$,, denotando por

  $$a = \min_{x\in\overline{Q_1}} \underline{u}(x) - \epsilon \;\; e \;\; b = \max_{x\in\overline{Q_1}} \overline{u}(x) + \epsilon,$$

  temos que $u_j(x) \in (a,b) \subset\subset (0,\infty)$ para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno;

- considerando $B(0,R)$, $R > C_2$, temos que $Du_j(x) \in B(0,R)$, $\forall\, x \in \overline{Q_1}$, $\forall\, j \geq k+1$;

- definindo o aberto $\widetilde{\Omega} = Q_2 \times (a,b) \times B(0,R)$, temos que $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega'$.

Assim, vemos que

$$
\begin{aligned}
(I) &= \frac{|f(x,u_j(x),Du_j(x)) - f(y,u_j(x),Du_j(x))|}{|(x,u_j(x),Du_j(x)) - (y,u_j(x),Du_j(x))|^{\alpha}} \\
&= \frac{|f(\eta_1) - f(\eta_2)|}{|\eta_1 - \eta_2|^{\alpha}} \\
&\leq \sup_{\substack{\eta_1 \neq \eta_2 \\ \eta_1,\eta_2 \in \widetilde{\Omega}}} \frac{|f(\eta_1) - f(\eta_2)|}{|\eta_1 - \eta_2|^{\alpha}} \\
&= C_8.
\end{aligned}
$$

Além disso, dados $x, y \in \overline{Q_1}$, $x \neq y$, considere $\eta_x, \eta_y \in \widetilde{\Omega}$, tais que

$$\eta_x := (y, u_j(x), Du_j(x)) \text{ e } \eta_y := (y, u_j(y), Du_j(x)).$$

Temos que $f|_{\widetilde{\Omega}}$ é diferencíável em cada ponto do segmento de reta (η_x, η_y) e $f|_{[\eta_x,\eta_y]}$ é contínua. Além disso, $\forall\ \eta \in (\eta_x, \eta_y)$, temos que

$$|f'(\eta)| = \left|(0, \frac{\partial f}{\partial u}(\eta), 0)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial u}(\eta)\right| \leq N_1\text{- constante},$$

pois f é continuamente diferenciável com respeito a u. Logo, pela Desigualdade do Valor Médio e pela regularidade de u_j, temos que

$$
\begin{aligned}
(II) &= \frac{|f(\eta_x) - f(\eta_y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\overset{DVM}{\leq} N_1 \frac{|\eta_x - \eta_y|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\leq N_1 \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{Q_1}}} \frac{|u_j(x) - u_j(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\leq C_9.
\end{aligned}
$$

Analogamente, se considerarmos para $x, y \in \overline{Q_1}$, $\mu_x, \mu_y \in \widetilde{\Omega}$, tais que

$$\mu_x := (y, u_j(x), Du_j(x)) \text{ e } \mu_y := (y, u_j(y), Du_j(x)),$$

levando em conta as hipóteses feitas sobre f, a regularidade de u_j e novamente aplicando a Desigualdade do Valor Médio, obtemos

$$
\begin{aligned}
(III) \quad &= \quad \frac{|f(\mu_x) - f(\mu_y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\overset{DVM}{\leq} \quad N_2 \frac{|\mu_x - \mu_y|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\leq \quad N_2 \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{Q_1}}} \frac{|Du_j(x) - Du_j(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \\
&\leq \quad C_{10}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{Q_1}}} \frac{|f_j(x) - f_j(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C_{11}
$$

e, por (C.3), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|f_j\|_{C^{\alpha}(\overline{Q_1})} &= |f_j|_0 + \sum_{|m|=0} H_{\alpha}[D^m f_j] \\
&= \max_{x \in \overline{Q_1}} |f_j(x)| + \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \overline{Q_1}}} \frac{|f_j(x) - f_j(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \qquad \text{(C.6)} \\
&\leq C_7,
\end{aligned}
$$

o que prova a afirmação feita.

Finalizamos, assim, a prova do Lema (C.6).

$\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Adams, R. A., *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Ambrosetti, A. e Prodi, G., *A primer of nonlinear analysis* Cambridge University Press, New York, 1993.

[3] Amann, H. *Existence and multiplicity theorems for semilinear elliptic boundary value problems*, Math. Z. **150** (1976), 567-597.

[4] Calabi, E., *A construction of nonhomogeneous Einstein metrics*, Differential geometry, Part2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, 17-24.

[5] Caffarelli, L., Hardt, R. e Simon, L. *Minimal surfaces with isolated singularities*, Manuscripta Math. **48** (1984), 1-18.

[6] Callegari, A. e Nashman, A., *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids*, SIAM J. Appl. Math. **38** (1980), 275-281.

[7] Callegari, A. e Nashman, A., *Some singular nonlinear equations arising in boundary layer theory*, J. Math. Anal. Appl. **64** (1978), 96-105.

[8] Cheng, S. Y. e Yau, S. T., *On the regularity of the Monge-Ampère equation* $\det(\frac{\partial 2u}{\partial x_i \partial x_j}) = F(x,u)$, Comm. Pure Appl. Math. **30**, no. 1,(1977), 41-68.

[9] Cirstea, F. e Radulescu, V., *Existence and uniqueness of positive solutions to a semilinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. **229** (1999), 417-425.

[10] Cohen, D. S. e Keller, H. B., *Some positive problems suggested by nonlinear heat generation*, J. Mech. **16** (1967), 1361-1376.

[11] Crandall, M., Rabinowitz, P. e Tartar, L., *On a dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations **2** (1977), 193-222.

[12] Cui, S., *Existence and nonexistence of positive solutions for singular semilinear elliptic boundary value problems*, Nonlinear Anal. **41** (2000), 149-176.

[13] Díaz, J. I., *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*, vol. 1. Elliptic Equations, Research Notes in Mathematics, vol. 106, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[14] Díaz, J. I., Morel, J. M. e Oswald, L. *An elliptic equation with singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations **12** (1987), 1333-1344.

[15] Dinu, T. L., *Entire solutions of sublinear elliptic equations in anisotropic media*, J. Math. Anal. Appl. **322** (2006), 382-392.

[16] Edelson, A., *Entire solution of singular elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl. **139** (1989), 523-532.

[17] Feng, W. e Liu, X., *Existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, Acta Math. Sin. **20** (2004), 983-988.

[18] Figueiredo, D. G., *Equações elípticas não-lineares*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[19] Fulks, W. e Maybee, J. S., *A singular nonlinear equation*, Osaka Math. J. **12** (1960), 1-19.

[20] Ghergu, M. e Radulescu, V., *On a class of sublinear singular elliptic problems with a convection term,* J. Math. Anal. Appl. **311** (2005), 635-646.

[21] Gilbard, D. e Trundinger, N. S., *Eliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.

[22] Gonçalves, J. V. A., Melo, A. L. e Santos, C. A. P., *On existence of L^∞ - ground states for singular elliptic equations in the presence of a strongly nonlinear term*, Advanced Nonlinear Studies **7** (2007), 475-490.

[23] Gonçalves, J. V. A. e Santos, C. A. P., *Classical solutions of singular Monge-Ampère equations in a ball*, J. Math. Anal. Appl. **305** (2005), 240-252.

[24] Gonçalves, J. V. e Santos, C. A. P., *Existence and asymptotic behavior of non-radially symmetric ground states of semilinear singular elliptic equations*, Nonlinear Anal. **65** (2006), 719-727.

[25] Gonçalves, J. V. e Santos, C. A. P., *Positive solutions for a class of quasilinear singular equations*, EJDE **56** (2004), 1-15.

[26] Gonçalves, J. V. e Santos, C. A. P., *Singular elliptic problems: existence, non-existence and boundary behavior*, Nonlinear Anal. **66** (2007), 2078-2090.

[27] Gutiérrez, C. E., *The Monge-Ampère equation*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 44, Birkhaüser, Boston, (2001).

[28] Haitao, Y., *Multiplicity and asymtotic behavior of positive solutions for a singular semilinear elliptic problem*, J. Differential Equations **189** (2003), 487-512.

[29] Hernadéz, J., Mancebo, F. J. e Vega, J. M., *Nonlinear singular elliptic problems: recent results and open problems*, Preprint, 2005.

[30] Hernadéz, J., Mancebo, F. J. e Vega, J. M., *On the linearization of some singular nonlinear elliptic problems and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non linéaire **19** (2002), 777-813.

[31] Kavian, O., *Introduction à la thèorie des points critiques et apllications aux problèmes elliptiques*. Springer-Verlag, Paris, Berlin, Heidelberg, New York, Londres, Tokyo, Hong Kong, Barcelone, Budapest, 1993.

[32] Ladyzenskaya, O. A. e Ural'treva, N. N., *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York, London, 1968.

[33] Lair, A. V. e Shaker, A. W., *Classical and weak solutions of a singular elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 371-385.

[34] Lair, A. V. e Shaker, A. W., *Entire solution of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. **200** (1996), 498-505.

[35] Lazer, A. C. e Mckenna, P. J., *On a problem of Bieberbach and Rademacher*. Nonlinear Anal. **21** (1993), 327-335.

[36] Lazer, A. C. e McKenna, P. J., *On a singular nonlinear elliptic boundary value problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 721-730.

[37] Lazer, A. C. e McKenna, P. J., *On singular boundary value problems for the Monge-Ampère operator*, J. Math. Anal. Appl. **197** (1996), 341-362.

[38] Lima, E. L., *Curso de análise*, vol. 2, IMPA, Rio de janeiro, 2005.

[39] Meadows, A., *Stable and singular solutions of the equation* $\Delta u = \frac{1}{u}$, Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), 1681-1703.

[40] Milnor, J., *Topology from the differenciable viewpoint*. University of Virginia Press, Charlottesville, Virgínia, 1965.

[41] Perera, K. e Silva, E. A. B., *Existence and multiplicity of positive solutions for singular quasilinear problems*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), n. 2, 1238-1252.

[42] Pucci, P., Huidobro, M. G., Manásevich, R. e Serrin, J., *Qualitative properties of ground states for singular elliptic equations with weights*, Annali di Matematica **185** (2006), 205-243.

[43] Shaker, A.W., *On singular semilinear elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl. **173** (1993), 222-228.

[44] Shi, J. e Yao, M., *On a singular nonlinear semilinear elliptic problem*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, sect. A **128** (1998), 1389-1401.

[45] Shi, J. e Yao, M., *Positive solutions for elliptic equations with singular nonlinearity*, Eletronic Journal of Differential Equations **4** (2005), 1-11.

[46] Taliaferro, S. D., *A nonlinear singular boundary value problem*, Nonlinear Anal. **3** (1979), 897-904.

[47] Usami, H., *On a singular elliptic boundary value problem in a ball*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 1163-1170.

[48] Zhang, Z., *A remark on the existence of entire solutions of a singular semilinear elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. **215** (1997), 579-582.

[49] Zhang, Z., *A remark on the existence of positive solutions of a sublinear elliptic problem*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 147-153.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo