Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sistemas Elípticos Fracamente Acoplados Assintoticamente Lineares

por
Luís Henrique de Miranda

Brasília
2007

Em memória do meu amado irmão,
Carlos Eduardo de Miranda.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela ajuda silenciosa nos momentos difíceis.

À minha família: meus pais Conceição e Onofre, minhas irmãs Dulce, Elaine, Gabi, Rose e Rosângela e aos meus sobrinhos Artur, Helena, Higor, Kadidja, Sarah, Thaís e Thaynara, pelo carinho reservado a mim que muitas vezes serviu de inspiração para esse trabalho.

À minha orientadora professora Liliane, por sempre ter sido muito atenciosa comigo e por ter acreditado em mim desde o princípio.

Aos professores Célius e João Carlos pelos conselhos, apoio e incentivo desde os tempos da graduação.

Aos meus colegas da UnB: Adail, Anyelle, Enai, Flávia, Fernanda, Isabel, Ítalo, Janete, Karise, Kélem, Magno, Manuela, Maryane, Miguel, Pablo, Rangel, Ricardo, Sandra, Vágner e Walter.

Aos meus amigos: Adilton, Caiana, Diogo, Dani, Elmar, Glória, Hécio, Jhames, Júnior, Luverci, Marcus, Paulo, Paulo Augusto, Pedro, Robson, Rogério, Verônica, Vinícius e Wagner, pelos momentos de diversão e por me ajudarem em muitos dos problemas que eu não conseguiria resolver sozinho.

Agradeço também aos membros da comissão examinadora, por aceitarem o convite em fazer parte da banca e por todas as sugestões, correções e comentários, que melhoraram o trabalho.

Finalmente agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho estudaremos o sistema elíptico fracamente acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega^2 v = \dfrac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

para $N \geq 3$ e constantes $0 < s < 1$ e $0 < \omega < 1$. Este é um sistema gradiente com

$$\nabla F(u,v) = (F_u, F_v) = \left(\frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}, \frac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \right),$$

onde

$$F(u,v) = \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1+s(u^2+v^2)).$$

Mostraremos que esse sistema possui solução radial não-trivial através de métodos variacionais. Na realidade, provaremos que a solução encontrada tem energia mínima entre todas as outras soluções possíveis.

Abstract

In this work we study the weakly coupled elliptic system

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega^2 v = \dfrac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

for $N \geq 3$ and constants $0 < s < 1$ e $0 < \omega < 1$. This is a gradient system such with

$$\nabla F(u,v) = (F_u, F_v) = \left(\frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}, \frac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \right),$$

where

$$F(u,v) = \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1+s(u^2+v^2)).$$

We will show that this system has a nontrivial radial solution via variational methods. In fact, we will prove that this solution is a ground-state.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, ondas estácionárias que se propagam sem distorções em sua forma têm atraído grande atenção de físicos e matemáticos devido à sua aplicação, por exemplo, em sistemas de comunicações ópticos ultra-rápidos. Estudos recentes sobre o assunto procuram estabelecer critérios para a existência de soluções que têm energia mínima, ou então, descrever a interação de pares dessas ondas de sólitons (veja [1], [6], [16] e [19]). Em [19], Ostrovskaya e Kivshar mostraram que as amplitudes normalizadas de dois feixes de luz em certos meios são governadas pelo seguinte sistema de Schrödinger fracamente acoplado

$$\begin{cases} i\varphi_t + \varphi_{xx} + \varphi \, \dfrac{(|\varphi|^2 + |\psi|^2)}{1 + s(|\varphi|^2 + |\psi|^2)} = 0, \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ i\psi_t + \psi_{xx} + \psi \, \dfrac{(|\varphi|^2 + |\psi|^2)}{1 + s(|\varphi|^2 + |\psi|^2)} = 0, \text{ em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1}$$

Este modelo representa as amplitudes de dois raios de luz linearmente polarizados, quando ocorre interação incoerente num meio de interferência fotorrefrativa. No que segue, s denota uma constante real positiva que representa um parâmetro de saturação associado à força de acoplamento mútuo entre as duas componentes. No estudo das trocas de dados ultra-rápidas as soluções mais importantes são as ondas estacionárias. Logo somos motivados a procurar por soluções do tipo ondas estacionárias de (1), isto é, soluções na forma

$$\varphi(x,t) = e^{it}u(x) \;\text{ e }\; \psi(x,t) = e^{i\omega^2 t}v(x).$$

Nesse caso, podemos mostrar que u e v satisfazem o sistema

$$\begin{cases} -u'' + u = u\,\dfrac{(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} & \text{em } \mathbb{R}, \\ -v'' + \omega^2 v = v\,\dfrac{(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Devido as possíveis aplicações de sólitons ópticos N-dimensionais, N um número natural, nos sistemas puramente ópticos de troca de dados ultra-rápidas, como sugere [19], decidimos estudar o sistema (2) em dimensões mais gerais. Dessa forma o primeiro objetivo do presente trabalho será encontrar soluções radiais não-triviais do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}\,, \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega^2 v = \dfrac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}\,, \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3}$$

Nosso segundo objetivo será mostrar que a solução obtida é um "ground-state", isto é, tem o nível de energia mínimo dentre todas as soluções possíveis. Trata-se de um fato muito importante pois as únicas candidatas para ondas estacionárias estáveis são os "ground-states", como afirmaram Ambrosetti e Colorado em [1].

Precisamos dedicar atenção especial ao tipo de solução não-trivial do sistema (3) que estamos lidando. De fato, $(u_0, 0)$ e $(0, v_0)$ satisfazem (3), onde u_0 e v_0 são respectivamente soluções radiais positivas dos problemas

$$-\Delta u + u = u\frac{u^2}{1+su^2} \text{ e } -\Delta v + \omega^2 v = v\frac{v^2}{1+sv^2} \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \tag{4}$$

Por meio dos resultados obtidos por Stuart e Zhou (cf. [21]), é possível garantir a existência de tais u_0 e v_0. Contudo, o trabalho de Berestycki e Lions em [3] nos fornece soluções minimizantes para os problemas em (4). As soluções (u, v) interessantes do ponto de vista da física para o problema (3) são aquelas em que ambas u e v não são indenticamente nulas, chamadas de puramente vetoriais (cf. [15], [16]).

Ultimamente, o sistema (3) e suas variantes têm sido alvo de diversos trabalhos. Em [10], Furtado, Maia e Silva estudam um problema similar a (3), com a exigência de que a não-linearidade associada seja superlinear, isto é, tenha crescimento um pouco "maior"do que o linear no infinito. No entanto, em (3) a não-linearidade tem crescimento linear no infinito, o que nos impede de usar [10]. Em [16], Maia, Montefusco e Pellacci provaram a existência de uma solução (u, v) radial, com $u_0 > 0$ e $v_0 > 0$ para um caso semelhante a (3). Basta fazermos $s = 0$ para obtermos um dos sistemas estudados em [16]. O resultado mais próximo do que desejamos obter para (3) encontra-se em [5]. Nesse artigo, Brezis e Lieb provaram a existência de uma solução $(u, v) \neq (0, 0)$, via métodos minimizantes com vínculo, para um grande número de sistemas autônomos dentre os quais (3) está incluído. No entanto, a partir desses argumentos não é possível distingüi-la das soluções do problema escalar do sistema desacoplado, além do que não sabemos se a solução obtida é radial.

Encontrar soluções fracas de (3) é o mesmo que achar os pontos críticos do funcional I associado ao sistema definido no espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2 - \frac{u^2 + v^2}{s} + \frac{1}{s^2} ln(1 + s(u^2 + v^2))\, dx. \qquad (5)$$

Esse funcional é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e sua derivada de Gateaux é dada por

$$\begin{aligned} \nabla I(u, v) \cdot (\varphi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \psi + u\varphi + \omega^2 v \psi \\ &- \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} \big(u\varphi + v\psi \big)\, dx. \end{aligned}$$

As soluções fracas associadas a (3) serão obtidas via métodos variacionais. Usaremos uma variante do Teorema do Passo da Montanha devida inicialmente a Bartolo, Benci e Fortunato [2]. Nessa versão, a condição de compacidade exigida é conhecida como condição de Cerami (Ce). Na realidade, a definição de (Ce) que apresentaremos é mais moderna que originalmente introduzida em [2]. Pode-se provar que as duas versões são equivalentes. Optamos pela mais nova, pois essa tem uma apresentação simples e concisa.

Vamos procurar os pontos críticos do funcional I no subespaço das funções radiais $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Tal escolha é justificada pelo decrescimento uniforme no infinito dos elementos desse subespaço, garantido pela desigualdade de Strauss (cf.

[13] ou [22]). De certa forma, a ausência de coercividade dos potenciais associados ao problema (3) é compensada por esse comportamento dos elementos do subespaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ no infinito. Usando o Princípio da Criticalidade Simétrica, vamos mostrar que os pontos críticos do funcional I que encontramos no subespaço das funções radiais serão pontos críticos de I no espaço $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$. Todos esses resultados abstratos serão apresentados no primeiro capítulo.

Em seguida faremos uma abordagem do caso escalar seguindo o artigo de Stuart e Zhou. O método que apresentam é interessante pois a solução encontrada é uma espécie de extensão para $\mathbb{R}^N$ de uma função previamente definida em $\mathbb{R}$. A demonstração de existência de solução para o problema escalar poderia ter sido feita como um caso particular do sistema. Entretanto, optamos por fazer uma revisão do trabalho de Stuart e Zhou para ressaltarmos as diferenças entre os métodos e respeitarmos a ordem cronológica do estudo do problema, já que algumas idéiais utilizadas na demonstração da condição de Cerami em [21] nos inspiraram a criar um argumento semelhante para o sistema.

Os capítulos 3 e 4 serão de fato os mais importantes de nosso trabalho pois apresentam resultados originais de existência de solução de energia mínima para o problema (3). Estes fazem parte de um artigo em fase de preparação (cf. [15]). Primeiramente, no capítulo 3 vamos estabelecer a existência de solução $(u, v) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ fraca, radial e não trivial para (3) quando $0 < s < 1$, $0 < \omega < 1$ e $N \geq 3$. Pela natureza do problema, a Teoria de Regularização pode ser usada para mostrar que as soluções fracas que obtemos na realidade são soluções clássicas. No argumento de existência, vamos recorrer à hipótese de não quadraticidade (NQ) como foi definida por Costa e Magalhães em [7]. Nos lemas 3.2.1 e 3.2.2 mostraremos que o funcional I satisfaz a condição (Ce). O maior obstáculo encontrado nessa etapa é a falta de compacidade nas imersões $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, em que $2 < p < 2^*$. Para contornarmos essa dificuldade , restringiremos nosso estudo ao subespaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso adaptaremos os argumentos usados em [21] e [7] para mostrarmos que I satisfaz (Ce). Depois, no Teorema 3.0.7 vamos provar que I tem a geometria exigida pelo Teorema do Passo da Montanha. Nessa demonstração usaremos fortemente o crescimento "sublinear"no infinito de parte da não-linearidade associada a (3). De fato, vamos usar que dado

$\alpha > 0$ existe $R = R(\alpha) > 0$ tal que

$$\ln(1 + sr) \leq sr\alpha \ , \forall\, r > R.$$

Finalmente no capítulo 4 mostraremos que a solução radial não-trivial encontrada no capítulo 3 é na realidade de energia mínima se considerarmos todas as possíveis soluções de (3). Nos basearemos no artigo de Jeanjean e Tanaka [12] e nos resultados de simetria para soluções minimizantes devidos a Lopes (cf. [14] ou [23]).

Devemos ressaltar que apesar do método de Berestycki e Lions [3] ser consideravelmente diferente do apresentado nos capítulos 3 e 4, os resultados que são obtidos são semelhantes. Por outro lado, apesar de servir como inspiração para o presente trabalho , o método apresentado em [21] apresenta resultados diferentes dos nossos. A partir dos argumentos contidos em [21] nada sabemos, ao menos em princípio, sobre a energia da solução encontrada. Entretanto, em nosso caso como a solução encontrada é do tipo minimax, conhecemos o nível de energia desta.

É interessante observar que se $\omega = 1$ e $u_0 > 0$ é solução de (4), então definindo

$$u(x) := u_0(x)\cos(\theta) \text{ e } v(x) := u_0(x)\text{sen}(\theta),$$

em que θ é um ângulo qualquer em $\big(0, 2\pi\big)$, nós obtemos que

$$-\Delta u + u = \cos(\theta)\big(-\Delta u_0 + u_0\big) \text{ e } \frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} = \frac{u_0^3\cos(\theta)}{1+su_0^2}.$$

Logo,

$$-\Delta u + u = \frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)},$$

e o mesmo valendo para v. Assim obteríamos infinitas soluções não triviais (u, v) para o problema (3), onde

$$u = u_0(x)\cos(\theta) \text{ e } v = u_0(x)\text{sen}(\theta)),$$

e $\omega = 1$. É fácil ver que todas essas soluções têm o mesmo nível de energia de u_0.

Da mesma forma, é importante ressaltar que caso (u, v) seja solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \omega^2 v = \dfrac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ , em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

com u e v não sendo nulas quase sempre (q.s.) em $\mathbb{R}^N$, então multiplicando-se a primeira equação por v e a segunda por u e integrando-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{uv(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \omega^2 uv \, dx,$$

e dessa forma

$$\left(1-\omega^2\right) \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx = 0.$$

Caso $\omega \neq 1$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx = 0,$$

ou seja, u é perpendicular a v no produto interno usual defindo em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Essa observação nos alerta para o fato de que não existe solução (u,v) com $u > 0$ e $v > 0$ para o problema (3).

No Apêndice A demonstraremos uma série de resultados técnicos que aparecem no decorrer do trabalho.

No Apêndice B enunciamos alguns teoremas importantes e não tão conhecidos, utilizados em nosso estudo.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos três resultados fundamentais para este trabalho: o Teorema do Passo da Montanha, a desigualdade de Strauss e o princípio da criticalidade simétrica. Faremos algumas adaptações importantes nos resultados originais para podermos aplicá-los como desejamos e, no caso da desigualdade de Strauss, também faremos uma breve introdução sobre o espaço das funções radiais.

1.1 O Teorema do Passo da Montanha

Iremos demonstrar uma variante do Teorema do Passo da Montanha devida a Bartolo, Benci e Fortunato (cf. [2]). Na verdade, vamos modificar um pouco a condição de compacidade exigida inicialmente em [2], por uma versão mais moderna. No que segue, E denotará um espaço de Banach real com norma $\|.\|$ e M uma constante real.

Definição 1.1.1. *Dizemos que um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Cerami (Ce) se toda seqüência $(u_n) \in E$ com $|I(u_n)| < M$ e $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) \to 0$ possui subseqüência convergente, $u_{n_k} \to u$, $u \in E$.*

Observação 1.1.2. *Nossa definição de (Ce) é apresentada de forma ligeiramente distinta daquela em [2]. Na realidade usaremos a condição de Cerami definida acima, cf. [7], de forma que, quando necessário faremos algumas adaptações em nossas provas.*

Teorema 1.1.3. *(do Passo da Montanha) Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (Ce) tal que $I(0) = 0$. Suponha que*

(I_1) *existem constantes* $\alpha, \rho > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$, *e*
(I_2) *existe* $e \in E \setminus \bar{B}_\rho$ *tal que* $I(e) \leq 0$.
Além disso, considere o conjunto

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = 0 \text{ e } I(g(1)) < 0\}.$$

Então

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} I(u) \tag{1.1}$$

é um valor crítico de I.

Na realidade, o Teorema 1.1.3 é quase um corolário do Lema da Deformação, a seguir. Antes de mais nada, consideraremos para um funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$ os seguintes conjuntos:

- $K_c = \{u \in E : I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}$
- $A_c = \{u \in E : I(u) \leq c\}$
- $E_* = \{u \in E : I'(u) \neq 0\}$

Desse modo, estamos prontos para enunciar o seguinte resultado, fundamental para nossas pretensões.

Lema 1.1.4. *(da Deformação) Seja* E *um espaço de Banach real e* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ *satisfazendo* (Ce). *Se* $c \in \mathbb{R}$, Ω *é alguma vizinhaça de* K_c *e* $\hat{\epsilon} > 0$, *então existem* $\eta : E \longrightarrow E$ *homeomorfismo limitado e* $\varepsilon \in (0, \hat{\epsilon})$ *tais que:*

i) $\eta(u) = u$ *se* $u \notin I^{-1}(]c - \hat{\epsilon}, c + \hat{\epsilon}[)$

ii) $\eta(A_{c+\varepsilon} \setminus \Omega) \subset A_{c-\varepsilon}$

iii) $\eta(A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$ *se* $K_c = \emptyset$.

Demonstração : Para construirmos nossa deformação vamos primeiramente obter alguns resultados preliminares, que usaremos de forma recorrente na prova deste lema. Inicialmente afirmamos que K_c é um conjunto compacto. De fato, tomemos $(u_n) \subset K_c$. Assim, $I(u_n) = c$, além de que $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Desta forma, por (Ce) existe $u \in E$ tal que $u_n \to u$, a menos de subseqüências. Logo pela continuidade de

I, $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, e então $u \in K_c$. Portanto, K_c é compacto. Em segundo lugar, afirmamos que para cada $c \in \mathbb{R}$ existem constantes positivas α, R e σ tais que para todo $u \in I^{-1}([c-\sigma, c+\sigma])$, $\|u\| \geq R$ teremos

$$\|I'(u)\|\|u\| \geq \alpha. \tag{1.2}$$

Até o fim deste capítulo, as contantes α, R e σ, serão como nesta afirmação. De fato, suponha por contradição que não existem tais constantes. Logo existe c tal que dados α, R e $\sigma > 0$ existe $u \in I^{-1}([c-\sigma, c+\sigma]), u = u(\alpha, R, \sigma), \|u\| \geq R$, mas $\|I'(u)\|\|u\| < \alpha$. Considere então $n \in \mathbb{N}$, de modo que $R = n$ e $\alpha = \sigma = \frac{1}{n}$. Assim, obtemos $(u_n) \subset E$ onde $\forall\ n \in \mathbb{N}, u_n \in I^{-1}([c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}]), \|u_n\| \geq n$ e $\|I'(u_n)\|\|u_n\| < \dfrac{1}{n}$. Observe que daqui segue que existe um constante $M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|I(u_n)| \leq M$. Além disso, $\|I'(u_n)\|n \leq \|I'(u_n)\|\|u_n\| \leq \dfrac{1}{n}$, logo $I'(u_n) \to 0$ em E'. Desse modo, $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) \to 0$ em $\mathbb{R}$. Por (Ce), existirá $u \in E$ tal que $u_n \to u$ em E, a menos de subseqüências, mas por hipótese (u_n) não era seqüência limitada, contradição. Sendo assim, nossa afirmação é verdadeira. Veja que aqui residiu o ponto de diferença nas definições das condições de Cerami, cf. observação 1.1.2. Em último lugar, considere $N_\delta = \{u \in E : \|u - K_c\| < \delta\}$. Como K_c é compacto, podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de maneira que $N_\delta \subset \Omega$. Então, basta mostrarmos *ii)* com N_δ no lugar de Ω. Afirmamos que existem constantes positivas $\bar{\epsilon}, b_0$ e b_1, tais que:

$$\|I'(u)\| > b_0 \text{ para } u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}}) \cap (N_\delta \setminus N_{\frac{\delta}{8}}) \tag{1.3}$$

$$\|I'(u)\| > b_1 \text{ para } u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}}) \cap (B_R \setminus N_{\frac{\delta}{8}}) \tag{1.4}$$

onde $B_R = \{u \in E : \|u\| \leq R\}$ e R é dado pela afirmação acima. Suponha por contradição que (1.3) seja falsa. Assim, obteríamos seqüências $b_n \to 0, \bar{\epsilon}_n \to 0$ e (u_n), com $(u_n) \subset (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}}) \cap (N_\delta \setminus N_{\frac{\delta}{8}})$. Deste modo, existiria $M > 0$ tal que $|I(u_n)| < M, \forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\|I'(u_n)\| \to 0$, quando $n \to \infty$. Além disso, como $u_n \in N_\delta \setminus N_{\frac{\delta}{8}}, \forall\ n \in \mathbb{N}$, (u_n) é limitada em E. Segue por (Ce) que existiria $u \in E$ tal que, a menos de subseqüências, $u_n \to u$ em E. Da continuidade de I, obteríamos que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, logo $u \in K_c$. Por outro lado, $\|u_n - K_c\| > \dfrac{\delta}{8}, \forall n \in \mathbb{N}$, e então, $\|u - K_c\| > 0$, um absurdo. Analogamente, caso (1.4) fosse falso, obteríamos $(u_n) \subset E$ e $u \in E$, tais que

$u_n \to u$ em E e $u \in K_c \cap N_{\frac{\delta}{8}} = \emptyset$. Observe que (1.3) e (1.4) continuam válidas para valores menores de $\bar{\epsilon}$, então tomemos

$$\bar{\epsilon} < \min\left\{\frac{b_0\delta}{8}, \hat{\epsilon}, \sigma\right\}, \tag{1.5}$$

σ conforme afirmação anterior. Por um lado, para $u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}}) \setminus N_{\frac{\delta}{8}}$, veja que se $\|u\| \leq R$, então por (1.4), $\|I'(u)\| > b_1 > 0$. Por outro lado, se $\|u\| > R$, pela escolha de $\bar{\epsilon} < \sigma, u \in A_{c+\sigma} \setminus A_{c-\sigma}$, i.e., $u \in I^{-1}([c-\sigma, c+\sigma])$. Logo, segue por (1.2), que $\|I'(u)\|\|u\| > \alpha > 0$. Assim,

$$\forall\, u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}}) \setminus N_{\frac{\delta}{8}},\ \|I'(u)\| > 0. \tag{1.6}$$

Estamos prontos para construirmos nossa deformação. Consideremos $\varepsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ e os conjuntos

$$A = \{u : u \notin I^{-1}([c-\bar{\epsilon}, c+\bar{\epsilon}]) \text{ ou } u \in N_{\frac{\delta}{8}}\}$$

e

$$B = \{u : u \in I^{-1}([c-\bar{\epsilon}, c+\bar{\epsilon}]) \text{ e } u \notin N_{\frac{\delta}{4}}\}.$$

Como $A \cap B = \emptyset$, definamos

$$\lambda(u) = \frac{\|u-A\|}{\|u-A\| + \|u-B\|}.$$

Teremos então

$$0 \leq \lambda(u) \leq 1,\ \lambda(u) = 0 \text{ em } A \text{ e } \lambda(u) = 1 \text{ em } B, \tag{1.7}$$

além de que λ é lipschitiziana. Prosseguindo, seja $f : E_* \longrightarrow E$, o campo pseudo-gradiente associado ao funcional $G : E_* \longrightarrow \mathbb{R}$, $G = \dfrac{I(u)}{\|I'(u)\|^2}$. Temos, pelas propriedades do campo pseudo-gradiente, que

$$\|f(u)\| \leq \frac{2}{\|I'(u)\|}, \forall\, u \in E_* \tag{1.8}$$

e

$$I'(u) \cdot f(u) \geq 1, \forall\, u \in E_*. \tag{1.9}$$

Sendo assim, consideremos agora

$$V(u) = \begin{cases} -\lambda(u)f(u), \text{ se } u \in E_* \\ 0, \text{ se } u \notin E_*. \end{cases} \tag{1.10}$$

Desse modo, como f é localmente lipschitziana e λ é lipschitziana em E , então V é localmente lipschitziana em E. Além disso, por (1.7) segue que

$$\|V(u)\| \leq \frac{2}{\|I'(u)\|}, \forall\, u \in E_*. \tag{1.11}$$

Mostremos que existem constantes positivas k_1 e k_2, tais que

$$\|V(u)\| \leq k_1 + k_2\|u\|, \forall\, u \in E. \tag{1.12}$$

De fato, se $u \notin I^{-1}([c-\bar{\epsilon}, c+\bar{\epsilon}]) \setminus N_{\frac{\delta}{8}}$, obtemos (1.12) trivialmente. Suponha então que $u \in I^{-1}([c-\bar{\epsilon}, c+\bar{\epsilon}]) \setminus N_{\frac{\delta}{8}}$. Caso $\|u\| \leq R$, então por (1.4), $\|I'(u)\| > b_1$. Como $u \in (A_{c+\bar{\epsilon}} \setminus A_{c-\bar{\epsilon}})$, por (1.11) segue que $\|V(u)\| \leq \dfrac{2}{b_1}$. Por outro lado, se $\|u\| > R$, por (1.2) e (1.5) segue que $\|I'(u)\|\|u\| > \alpha$. Assim, por (1.11), $\|V(u)\| < \dfrac{2}{\alpha}\|u\|$. Dessa forma,

$$\|V(u)\| \leq \frac{2}{b_1} + \frac{2}{\alpha}\|u\| := k(u), \forall\, u \in E, \tag{1.13}$$

como esperávamos. Consideremos o seguinte problema de valor inicial no espaço de Banach E

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dt} = V(u) \\ \eta(0, u) = u. \end{cases} \tag{1.14}$$

Dada $u \in E$, pelo Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias em espaços Banach o problema (1.14) tem solução única definida num intervalo maximal para t em $(t^-(u), t^+(u))$. Afirmamos que $(0, \infty) \subset (t^-(u), t^+(u))$. De fato, suponha que $t^+(u) < \infty$. Consideremos então $t_n \to t^+(u)$, com $t_n < t^+(u)$. Integremos (1.14) e façamos uso de (1.13), para obtermos

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\eta}{dt} dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(u)\, dt \\ \|\eta(t_{n+1}) - \eta(t_n)\| &\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|V(u)\|\, dt \\ \|\eta(t_{n+1}) - \eta(t_n)\| &\leq k|t_{n+1} - t_n|. \end{aligned}$$

Desse modo, $(\eta(t_n))$ é seqüência de Cauchy em E, portanto converge para algum $\tilde{u} \in E$. A solução de (1.14) usando $\tilde{u}$ como valor inicial em $t^+(u)$, nos fornece um prolongamento de u para $t > t^+(u)$, contrariando a maximalidade do intervalo $(t^-(u), t^+(u))$.

Logo, $\eta(\cdot, u)$ está bem definida em $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$. Pelo Teorema de Dependência Contínua dos parâmetros iniciais, obtemos que $\eta \in C([0,\infty)\times E)$. Além disso, pela propriedades de semi-grupo das soluções de (1.14) e por (1.13), obtemos que $\eta : E \longrightarrow E$, é um homeomorfismo limitado. Observe que, como $V(u) = 0$ em A, qualquer solução de (1.14) já satisfaz *i)*. Falta provarmos a existência de $\tilde{t}$ tal que $\eta(\tilde{t}, \cdot)$ satisfaz *ii)*. Paralelamente, observe que $\forall\ u \in E$ a aplicação $S_u(t) = I(\eta(t,u)), t \in \mathbb{R}^+$ é não crescente. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S_u(t) &= I'(\eta(t,u)) \cdot \frac{d}{dt}\eta(t,u) \\ &= I'(\eta(t,u) \cdot V(\eta(t,u)). \end{aligned}$$

Mas pela definição de V, se $\eta(t,u) \notin E_*$, $\dfrac{d}{dt}S_u(t) = 0$. Pela mesma razão, se $\eta(t,u) \in E_*$,

$$\frac{d}{dt}S_u(t) = -\lambda(\eta(t,u))I'(\eta(t,u)) \cdot f(\eta(t,u)) \leq -1,$$

onde usamos (1.7) e (1.9). Assim,

$$\forall\ t \in \mathbb{R}^+,\ \frac{d}{dt}S_u(t) \leq 0, \text{ e então, } S_u(t) \text{ é decrescente.} \tag{1.15}$$

Podemos prosseguir agora com a prova de *ii)*. Consideremos então o conjunto $Y = (A_{c+\varepsilon} \setminus A_{c-\varepsilon}) \setminus N_\delta$. Queremos mostrar que existe $\tilde{t} > 0$ tal que $\forall\ u \in Y, \eta(\tilde{t}, u) \in A_{c-\varepsilon}$. Para este fim, seja

$$Z = (A_{c+\varepsilon} \setminus A_{c-\varepsilon}) \setminus N_{\frac{\delta}{2}}.$$

Primeiramente, mostremos que $\forall\ u \in Y$, existe $t_u \leq 2\varepsilon$, de modo que, $\eta(t_u, u) \in Z$. De fato, tomemos $u \in Y$ e $t > 0$ tal que, $\forall\, \tau \in [0,t]$, $\eta(\tau, u) \in Z$. Vamos mostrar que $t < 2\varepsilon$. Sabemos que $Z \subset E_*$ de acordo com (1.6). Então, por (1.15) $\forall\ \tau \in [0,t]$

$$\begin{aligned} -\int_0^t \frac{d}{d\tau}S_u(\tau)d\tau &\geq \int_0^t d\tau \\ S_u(0) - S_u(t) &\geq t. \end{aligned}$$

Mas, $S_u(0)$ e $S_u(t) \in (A_{c+\varepsilon} \setminus A_{c-\varepsilon})$, logo

$$t < c + \varepsilon - (c - \varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Deste modo, tomemos $t_\varepsilon = 2\varepsilon$. Tal escolha, implica que existe $t_u \in [0, 2\varepsilon]$, tal que $\eta(t_u, u) \notin Z$. Conseqüentemente, no instante t_u, $\eta(t_u, u) \in A_{c-\varepsilon}$ ou $N_{\frac{\delta}{2}}$. Por um lado, consideremos que uma órbita $\eta(\cdot, u)$, $u \in E$, entre em $N_{\frac{\delta}{2}}$. Seja t_2 o primeiro instante o qual $\eta(\cdot, u)$ intercepta a fronteira de $N_{\frac{\delta}{2}}$. Suponha por contradição que $\forall\, t \leq t_2,\ \eta(t, u) \notin A_{c-\varepsilon}$. Assim, pela escolha de t_2, para cada $t \in [0, t_2]$, $\eta(t, u) \in Z$. Logo, pelo que acabamos de mostrar, $t_2 < 2\varepsilon$. Paralelamente, seja t_1 o último instante antes de t_2 tal que $\eta(\cdot, u)$ intercepta a fronteira de N_δ. Desta forma, pelas escolhas de t_1 e t_2, para cada t em $]t_1, t_2[$, $\eta(t, u) \in (A_{c+\varepsilon} \setminus A_{c-\varepsilon}) \cap (N_\delta \setminus N_{\frac{\delta}{2}})$. Assim, por (1.3)

$$\|I'(\eta(t, u))\| \geq b_0,\ \forall\, t \in [t_1, t_2]. \tag{1.16}$$

Veja que,

$$\|\eta(t_2, u) - K_c\| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Além disso, como $\eta(t_1, u) \in N_\delta$, então

$$\|\eta(t_1, u) - K_c\| \geq \delta$$

Logo, pela desigualdade triangular

$$\|\eta(t_1, u) - K_c\| \leq \|\eta(t_2, u) - \eta(t_1, u)\| + \|\eta(t_2, u) - K_c\|,$$

obtemos que,

$$\|\eta(t_1, u) - \eta(t_2, u)\| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{2} &\leq \|\eta(t_2, u) - \eta(t_1, u)\| \\
&= \left\| \int_{t_1}^{t_2} V(\eta(t, u))\, dt \right\| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \|V(\eta(t, u))\|\, dt \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(\eta(t, u))\|\, dt \\
&\leq 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\|I'(\eta(t, u))\|}\, dt \leq \frac{2t_2}{b_0}.
\end{aligned}$$

Assim, por um lado temos

$$t_2 \geq \frac{b\delta}{4} \text{ e } t_2 < 2\varepsilon. \tag{1.17}$$

Por outro lado, pela escolha de ε sabemos que

$$\varepsilon < \frac{b_0\delta}{8}, \tag{1.18}$$

contradição. Logo existe $t_0 \leq t_2$, tal que $\eta(t_0, u) \in A_{c-\varepsilon}$. Basta então tomarmos $\eta(t_0, u)$ para satisfazermos $ii)$. Por fim, falta considerarmos o caso em que $\eta(t_u, u)$ deixa Z através de $A_{c-\varepsilon}$. Neste caso, temos que $t_u \leq 2\varepsilon$. Mas

$$S_u(t) = I(\eta(t, u)) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}S_u(t) \leq -1,$$

e assim, $I(\eta(2\varepsilon) \leq I(\eta(t_u, u)) \leq c - \varepsilon$. Logo $ii)$ é satisfeito para $\eta(2\varepsilon, u)$ e o lema está provado. ■

Estamos prontos para demontrarmos o teorema 1.1.3.

Demonstração do teorema 1.1.3.

Como $I(0) = 0$ e $I(e) < 0$ então $\Gamma \neq \emptyset$. Seja $g \in \Gamma$ qualquer, Γ como em (1.1). Seja $u \in g([0,1]) \subset E$. Como $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, então

$$\max_{u \in g([0,1])} I(u) < \infty.$$

Assim por (1.1), $c < \infty$. Vamos mostrar que $c \geq \alpha$. De fato, como $g \in C[0,1]$, então $g([0,1]) \cap \partial B_\rho \neq \emptyset$. Logo por (I_1), teremos que

$$\max_{u \in g([0,1])} I(u) \geq \alpha.$$

Suponha, por contradição, que c não seja valor crítico de I, de modo que $K_c = \emptyset$. Tomemos $\hat{\epsilon}$, com $0 < \hat{\epsilon} < \dfrac{\alpha}{2}$. Deste modo, pelo lema da deformação existe $\varepsilon \in (0, \hat{\epsilon})$ e um homeomorfismo limitado, $\eta : E \longrightarrow E$, tal que

i) $\eta(A_{c+\varepsilon}) \subset \eta(A_{c-\varepsilon})$ e *ii)* $\eta(u) = u$ se $u \notin I^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$.

Pela definição de ínfimo, existe $g \in \Gamma$, tal que,

$$\max_{u \in g([0,1])} I(u) \leq c + \varepsilon. \tag{1.19}$$

Consideremos $h(t) = \eta(g(t))$. Claramente, $h \in C^1([0,1], E)$.Além disso, observe que:

$$I(0) = 0 \leq \alpha - \varepsilon \leq c - \varepsilon \quad \text{e} \quad I(g(1)) \leq 0. \tag{1.20}$$

Logo 0 e $g(1)$ não pertecem a $I^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Desta forma, pelo lema da deformação temos

$$h(0) = \eta(0) = 0 \text{ e } h(1) = \eta(g(1)) = g(1). \tag{1.21}$$

Assim, $h \in \Gamma$. Logo, por (1.1),

$$c \leq \max_{u \in h([0,1])} I(u) \tag{1.22}$$

Mas como $g([0,1]) \in A_{c+\varepsilon}$, por *ii)* temos que

$$\eta(g([0,1])) = h([0,1]) \subset A_{c-\varepsilon},$$

logo

$$\max_{u \in h([0,1])} I(u) \leq c - \varepsilon,$$

contradição. Portanto c é valor crítico de I. ■

1.2 Funções Radiais

Dois motivos são fundamentais para a escolha das funções radiais em nosso estudo. O primeiro vem do fato que estas funções comportam-se de maneira similar à das soluções encontradas através de experimentos ou simulações numéricas como é indicado por [19]. O segundo motivo é que as funções radiais compensam a falta de compacidade da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$. Tudo porque, a grosso modo, os elementos deste espaço decrescem uniformemente no infinito. Neste capítulo vamos ver que podemos aplicar o teorema 1.1.3 quando restritos a $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, vamos mostrar a desigualdade que nos garante esse "decrescimento uniforme"no infinito.

Lema 1.2.1. *O espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) = (H^1_{rad}(\mathbb{R}^N), \|.\|_{H^1})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração : É fácil ver que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um subespaço vetorial normado de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Basta mostrarmos que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é fechado em $H^1(\mathbb{R}^N)$ na topologia induzida pela norma $\|.\|_{H^1}$. Tomemos $(u_n) \subset H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, afirmamos que $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. De fato, caso contrário existiria $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, tal que $|\Omega| > 0$ tal que $u_n(x)$ não converge para $u(x)$ em Ω. Deste modo, existiria $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^2 + |u_n - u|^2\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2\, dx \geq \varepsilon_0 |\Omega|,$$

contradição. Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $|\Omega| = 0$, tal que $u_n(x) \to u(x)$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Assim, se x e $y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e $|x| = |y|$

$$u(x) = \lim_n u_n(x) = \lim_n u_n(y) = u(y).$$

Logo $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. ∎

Lema 1.2.2. *O espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) = (H^1_{rad}(\mathbb{R}^N), \|.\|_{H^1})$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração : De fato, sabemos que $H^1(\mathbb{R}^N)$ é espaço de Hilbert. Consideremos então a restrição do produto interno de $H^1(\mathbb{R}^N)$ para $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Veja que assim obtemos um produto interno para $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Mas pela proposição 1.2.1, $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é completo na métrica induzida por esse produto interno, e portanto $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é espaço de Hilbert. ∎

No que segue $H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ denotará o espaço de Hilbert

$$H^1_\omega(\mathbb{R}^N) = \Big(H^1(\mathbb{R}^N), \|.\|_\omega\Big). \tag{1.23}$$

Proposição 1.2.3. *Considere o espaço $E_\omega = \Big(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N), \|.\|_\omega\Big)$, com $\|v\|^2_\omega := \|\nabla v\|^2_2 + \omega^2\|v\|^2_2$. Então o espaço $E := H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times E_\omega$ é espaço de Hilbert.*

Demonstração : Consideremos o espaço $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ com norma

$$\|(u,v)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2\, dx.$$

Sabemos que $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ é espaço de Hilbert. Como sempre é fácil ver que E é subespaço vetorial normado, para a norma induzida por $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$. Além disso, como no lema 1.2.2 podemos ver que E tem um produto interno definido por:

$$((u_1, v_1)|(u_2, v_2))_E = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1 \nabla u_2 + \nabla v_1 \nabla v_2 + u_1 u_2 + \omega^2 v_1 v_2\, dx.$$

Falta ver que E é completo na métrica induzida por esse produto interno. Para isso, basta quer que se (z_n) é seqüência de Cauchy em E, com $z_n = (u_n, v_n)$, então (u_n) e (v_n) serão seqüências de Cauchy em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Mas as normas $\|.\|$ e $\|.\|_\omega$ são claramente equivalentes, assim (v_n) será seqüência de Cauchy em E_ω. Desse modo, existem u e v em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, tais que $u_n \to u$, em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $v_n \to v$ em E_ω. Logo $z_n \to (u, v)$ em E. ■

De agora em diante para z e $w \in E$, $(z \,|\, w)$ denotará o produto interno de z com w em E. À seguir, mostraremos a principal propriedade das funções radiais usada neste trabalho. É possível encontrar uma demonstração feita por Strauss em [22] que por um lado, é um pouco mais sofisticada, e por outro, fornece conclusões mais fortes. Para nós, o que obtemos aqui é mais do que suficiente.

Proposição 1.2.4. *(Desigualdade de Strauss) Seja $N \geq 2$, $N \in \mathbb{N}$. Para cada $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ existe C_N dependendo apenas da dimensão N, tal que*

$$|u(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(1-N)}{2}} \|u\|_{H^1},$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração : Primeiramente, mostremos o resultado para $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$. Para $|x| = r$ temos,

$$\begin{aligned} u^2(r) &= -2\int_r^\infty u'(s)u(s)\,ds && (1.24)\\ &\leq 2\int_r^\infty s^{1-N}|u'(s)||u(s)|s^{N-1}\,ds \\ &\leq r^{1-N}\int_r^\infty \big(|u'(s)|^2 + |u(s)|^2\big)s^{N-1}\,ds. && (1.25)\end{aligned}$$

Usando uma mudança em coordenadas esféricas, obtemos

$$\int_r^\infty s^{N-1}(|u'|^2(s) + u^2(s))\,ds = \omega_N \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |\nabla u(x)|^2 + u^2(x)\,dx \leq \omega_N \|u\|^2_{H^1}. \quad (1.26)$$

Portanto, por (1.24) e (1.26)

$$|u(x)| \leq C_N \|u\| r^{\frac{1-N}{2}}, \quad (1.27)$$

onde $C_N^2 = \dfrac{1}{\omega_N}$. Tomemos agora $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Sabemos, pelo corolário IX.8 de [4], que existe $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. Desse modo, dado $x \in \mathbb{R}^N$ com $u_n(x) \to u(x)$, temos por (1.27)

$$|u_n(x)| \leq C_N r^{\frac{1-N}{2}} \|u_n\|_{H^1}.$$

Logo, tomando $n \to \infty$ temos

$$|u(x)| \leq C_N r^{\frac{1-N}{2}} \|u\|_{H^1}, \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

■

1.3 Criticalidade Simétrica

Como já foi dito na introdução, vamos usar o teorema $1.1.3$ em E, isto é, procurar soluções de (3) no espaço $E = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times E_\omega$. Estas são pontos críticos do funcional (5) em E. Mostraremos que as soluções encontradas também são pontos críticos do funcional (5) em $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$. Para este fim, precisaremos introduzir alguns conceitos, além de usar o princípio da criticalidade simétrica. Denotaremos por G o grupo das rotações de $\mathbb{R}^N$, isto é, $G = \{g : g(x) = y, |x| = |y| \text{ e } x \neq y\}$. Inicialmente este princípio foi mostrado por Palais em [20], mas preferimos nos basear em [23], já que, apesar de semelhantes, a abordagem do princípio da criticalidade simétrica em [23] é mais próxima do nosso trabalho até aqui.

Observação 1.3.1. *Para cada $g \in G, g$ será uma transformação linear de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$, e portanto, uma aplicação de classe C^1. Como são rotações, $|det\, g| = 1$. Além disso, já que excluímos as rotações triviais de G, essas trasformações serão injetivas.*

Definição 1.3.2. *A ação de G em $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ é definida por*

$$(gu, gv) = (u(g^{-1}x), v(g^{-1}x)) \tag{1.28}$$

Lema 1.3.3. $\|(gu, gv)\| = \|(u, v)\|$ *para cada $g \in G$ e para cada $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração : Dado $g \in G, g(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$. Além disso,

$$\|(gu, gv)\| = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla gu|^2 + |\nabla gv|^2 + |gu|^2 + \omega^2 |gv|^2 \, dx.$$

Então, usando a definição de ação,

$$\|(gu, gv)\| = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(g^{-1}x)|^2 + |\nabla v(g^{-1}x)|^2 + u^2(g^{-1}x) + \omega^2 v^2(g^{-1}x) \, dx.$$

Como $g \in G$ é uma rotação não trivial, então g será uma transformação linear injetiva e de classe C^1, e mais ainda, a matriz jacobiana de g, J_g, coincide com g. Logo temos que $|det\, J_g| = 1$. Dessa forma, pelo Teorema da Mundança de Variáveis,

$$\|(gu, gv)\| = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 + u^2(x) + \omega^2 v^2(x) \, dx.$$

■

Definição 1.3.4. *Dizemos que $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função invariante de G se $\varphi \circ g = \varphi, \forall\, g \in G$. Uma aplicação $f : E \longrightarrow E$ é equivariante se $g \circ f = f \circ g \quad \forall\, g \in G$.*

Lema 1.3.5. *O funcional I em (5) é uma função invariante de G.*

Demonstração : Dados $g \in G$ e $(u, v) \in E = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times E_\omega$ e

$$I(u, v) = \frac{1}{2}\|(u, v)\| + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2s^2} ln(1 + s(u^2 + v^2)) - \frac{u^2 + v^2}{2s} \, dx,$$

então

$$I(gu, gv) = \frac{1}{2}\|(gu, gv)\| + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2s^2} ln(1 + s(gu^2 + gv^2)) - \frac{|gu|^2 + |gv|^2}{2s} \, dx. \tag{1.29}$$

Usando o lema anterior em (1.29), juntamente com a definição de ação, temos,

$$I(gu, gv) = \frac{1}{2}\|(u, v)\| + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2s^2} ln(1 + s(u(g^{-1}x)^2 + v(g^{-1}x)^2)) \, dx$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2(g^{-1}x) + v^2(g^{-1}x)}{2s} \, dx.$$

Mais uma vez, aplicando o Teorema da Mudança de Variáveis,

$$I(gu, gv) = \|(u, v)\| + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{s^2} ln(1 + s(u^2(x) + v^2(x))) \, dx$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2(x) + v^2(x)}{s} \, dx = I(u, v).$$

■

Para podermos demonstrar o Princípio da Criticalidade Simétrica, precisamos apenas de mais uma definição.

Definição 1.3.6. $Fix(G) = \{(u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N) : (gu, gv) = (u,v) \quad \forall\, g \in G\}$

Observação 1.3.7. $Fix(G) = E$.

Teorema 1.3.8. *(Princípio da Criticalidade Simétrica) Seja I o funcional associado ao problema (3). Se (u,v) é ponto crítico de I em E, então (u,v) será ponto crítico de I em $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração : Por hipótese $\nabla I(u,v)$ é ortogonal a $Fix(G)$, pois (u,v) é ponto crítico de I. Basta então mostrarmos que $\nabla I(u,v) \in Fix(G)$, já que $Fix(G) \cap Fix(G)^\perp = 0$. Pelo lema $(1.3.5)$, I é g-invariante, então,

$$\begin{aligned}
\nabla I(gu,gv)\cdot(z_1,z_2) &= \lim_{t\to 0}\frac{I((gu,gv)+t(z_1,z_2)) - I(gu,gv)}{t} && (1.30)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{I((u,v)+t(g^{-1}z_1,g^{-1}z_2)) - I(u,v)}{t}\\
&= \nabla I(u,v)\cdot(g^{-1}z_1,g^{-1}z_2). && (1.31)
\end{aligned}$$

Pelo lema $1.3.3$, a ação é uma isometria, logo,

$$g\nabla I(u,v)\cdot(z_1,z_2) = \nabla I(u,v)\cdot(g^{-1}z_1,g^{-1}z_2),$$

usando (1.31),

$$g\nabla I(u,v)\cdot(z_1,z_2) = \nabla I(gu,gv)\cdot(z_1,z_2).$$

Assim $g\nabla I(u,v) = \nabla I(gu,gv)$, $\forall g \in G$, e desse modo, $\nabla I(u,v)$ é equivariante. Mas como I é g-invariante,

$$g\nabla I(u,v)\cdot(z_1,z_2) = \nabla I(gu,gv)\cdot(z_1,z_2) = \nabla I(u,v), \forall g \in G.$$

Logo, $\nabla I(u,v) \in Fix(G)$, e portanto, $\nabla I(u,v) \in Fix(G) \cap Fix(G)^\perp$. ■

Capítulo 2

O Problema Escalar

Nesse capítulo estudaremos o caso escalar do problema (3), para o qual $v \equiv 0$. Nosso objetivo será encontrar uma solução radial positiva para

$$-\Delta u(x) = -u(x) + u(x)\frac{u^2(x)}{1+su^2(x)}, \; x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

com $N \geq 3$.

Basearemos nosso trabalho no artigo de Stuart e Zhou (cf. [21]), apesar de que em alguns momentos a abordagem feita aqui será mais simples devido ao comportamento "privilegiado"do funcional associado a (2.1). Utilizando [3] é possível encontrar resultados semelhantes aos deste capítulo, mas nessa abordagem alternativa procura-se por soluções diretamente no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ e depois mostra-se que estas pertencem a $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Em nosso caso, procuramos por soluções em $H^1_0(0,\infty)$ e então, de um certo modo, estendemos tais soluções para $\mathbb{R}^N$. Além disso, pelo método de Berestycki e Lions (cf. [3]) as soluções obtidas são de energia mínima e pelo método aqui apresentado não sabemos, em princípio, o nível de energia da solução obtida. Poderíamos também obter uma solução positiva radial do problema escalar utilizando diretamente o Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, como faremos no próximo capítulo para o sistema. Optamos por seguir as idéias de Stuart e Zhou em [21] para ressaltarmos aquelas que nos inspiraram na resolução problema no caso do sistema de equações, além de evidenciarmos as diferenças entre os métodos.

2.1 Teoremas Preliminares

Consideraremos o espaço de Hilbert $H = H_0^1(0, \infty)$, munido de $\|u\|_1$, definida por

$$\|u\|_1 = \left\{ \int_0^\infty (u')^2(r) + u^2(r) + \frac{(N-1)(N-3)}{4} \frac{u^2(r)}{r^2} \, dr \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Observe que

$$\|u\|_1 \geq \|u\| = \left\{ \int_0^\infty (u')^2(r) + u^2(r) \, dr \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Além disso, sabemos pela desigualdade de Hardy (cf. [4]), que

$$\int_0^\infty \frac{u^2(r)}{r^2} \, dr \leq 4\|u'\|_2^2. \tag{2.4}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 &\leq \int_0^\infty u^2(r) + (u')^2(r) \, dr + (N-1)(N-3)\|u\|_2^2 \\ &= \|u\|_2^2 + (N-1)^2\|u'\|_2^2 \\ &\leq (N-2)^2\|u\|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u\|_1 \leq (N-2)\|u\|. \tag{2.5}$$

Segue, por (2.3) e (2.5) que as normas $\|.\|_1$ e $\|.\|$ são equivalentes, o que denotaremos por $\|.\|_1 \approx \|.\|$.
Iremos considerar também

$$F_1(r, \tau) = \int_0^\tau \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1 + sr^{1-N}(t^+)^2} \, dt. \tag{2.6}$$

Claramente,

$$0 \leq F_1(r, \tau) \leq \frac{1}{2s}\tau^2, \, \forall \, r > 0 \quad \text{e} \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, podemos definir o funcional $J : H \longrightarrow \mathbb{R},$ por

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \int_0^\infty \int_0^{u(r)} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1 + sr^{1-N}(t^+)^2} \, dt \, dr. \tag{2.7}$$

Este funcional é de classe $C^1(H,\mathbb{R})$ e para toda $v \in H$

$$\begin{aligned} J'(u)v &= \int_0^\infty u'v' + uv + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}uv\,dr \\ &- \int_0^\infty \frac{r^{1-N}(u^+)^2}{1+sr^{1-N}(u^+)^2}uv\,dr. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Na realidade, esse funcional é de certa forma um caso particular do funcional $I(u,v)$, associado ao sistema (3). No apêndice mostraremos que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ e possui tal formulação. Na proposição que segue descrevemos algumas características importantes dos pontos críticos de J.

Proposição 2.1.1. *Suponha que* $u \in H \setminus \{0\}$ *e* $J'(u) = 0$. *Então* $u \in C^2(0,\infty)$ *com* $u(r) \geq 0$ *e*

$$u''(r) = \left\{ \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + 1 - \frac{u^2}{1+su^2} \right\} u(r).$$

Além disso,

$$r^{\frac{N}{2}-2}\left\{ r^{\frac{1-N}{2}}u(r) \right\}' \to 0, \quad se \quad r \to 0.$$

Demonstração : Como $J'(u)v = 0$, $\forall\, v \in C_0^\infty(0,\infty)$, temos por (2.8) que

$$\int_0^\infty u'v'\,dr = \int_0^\infty -v\{u + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}u - \frac{r^{1-N}(u^+)^2}{1+sr^{1-N}(u^+)^2}u\}\,dr. \tag{2.9}$$

Assim u' tem derivada fraca e

$$u''(r) := h(r) = \left\{ 1 + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} - \frac{r^{1-N}(u^+)^2}{1+sr^{1-N}(u^+)^2} \right\} u\,,\ \text{q.s. em } (0,\infty). \tag{2.10}$$

Como $u \in H$, pela imersão de Sobolev $H^1(0,\infty) \hookrightarrow C(0,\infty)$, u é contínua em $(0,\infty)$. Sendo assim, a função f definida por

$$f(r, r^{\frac{1-N}{2}}u^+(r)) = \frac{r^{1-N}(u^+)^2}{1+sr^{1-N}(u^+)^2} \tag{2.11}$$

também será contínua e desta forma $h \in C(0,\infty)$. Logo, $u \in C^2(0,\infty)$. Caso $u(r_0) < 0$ para algum $r_0 > 0$, teremos que

$$f(r_0, r_0^{\frac{1-N}{2}}u^+(r)) = 0,$$

logo,

$$u''(r_0) = \left\{1 + \frac{(N-1)(N-3)}{4r_0^2}\right\} u(r_0) < 0,$$

e então r_0 não será ponto de mínimo, i.e., u não possui mínimo negativo. Visto que

$$\lim_{r\to 0} u(r) = \lim_{r\to\infty} u(r) = 0,$$

teremos que $u(r) \geq 0, \forall\, r \geq 0$. Então $u^+(r) = u(r), \forall\, r > 0$. Usando o método da variação dos parâmetros em

$$\begin{aligned} -u''(r) + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} u(r) = K(r), \text{ em } \quad (0,\infty), \\ \text{com} \quad K(r) = \left\{-1 + \frac{r^{1-N}(u)^2}{1 + sr^{1-N}(u)^2}\right\} u(r), \end{aligned} \tag{2.12}$$

encontramos A e B tais que

$$u(r) = r^{\frac{N-1}{2}} \left\{A - \int_1^r \frac{\tau^{\frac{3-N}{2}} K(\tau)}{N-2}\, d\tau\right\} + r^{\frac{3-N}{2}} \left\{B + \int_1^r \frac{\tau^{\frac{N-1}{2}} K(\tau)}{N-2}\, d\tau\right\}, \text{para } r > 0. \tag{2.13}$$

Observe que $K \in C(0,\infty)$ e

$$|K(r)| \leq \Big(1 + \frac{1}{s}\Big)|u(r)|. \tag{2.14}$$

Assim, visto que $N \geq 3$, se

$$g(r) := \int_1^r \frac{\tau^{\frac{3-N}{2}} K(\tau)}{N-2}\, d\tau,$$

então

$$\begin{aligned} g(r) \ &\leq \int_1^r \frac{\Big(1 + \frac{1}{s}\Big) u(r)}{N-2}\, d\tau \\ &\leq \Big(1 + \frac{1}{s}\Big) \frac{M}{N-2}(r-1), \ \text{ para } r > 1, \end{aligned}$$

onde

$$M = \max_{0 \leq t \leq r} u(t) > 0.$$

Desta forma,

$$\lim_{r\to 0} r^{\frac{N-1}{2}} \int_1^r \tau^{\frac{3-N}{2}} K(\tau)\, d\tau = 0.$$

Mas,

$$u(r) r^{\frac{N-3}{2}} = rA - r\int_1^r \frac{\tau^{\frac{3-N}{2}} K(\tau)}{N-2}\, d\tau + B + \int_1^r \frac{\tau^{\frac{N-1}{2}} K(\tau)}{N-2}\, d\tau.$$

Como $u(r) \to 0,$ se $r \to 0,$ temos

$$B = \int_0^1 \frac{\tau^{\frac{N-1}{2}} K(\tau)}{N-2}\, d\tau \quad \text{e portanto,}$$

$$u(r) = r^{\frac{N-1}{2}} \left\{ A - \int_1^r \frac{\tau^{\frac{3-N}{2}} K(\tau)}{N-2}\, d\tau \right\} + r^{\frac{3-N}{2}} \int_0^r \frac{\tau^{\frac{N-1}{2}} K(\tau)}{N-2}\, d\tau.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \left\{ u(r) r^{\frac{1-N}{2}} \right\}' &= -\frac{r^{\frac{3-N}{2}} K(r)}{N-2} + (2-N) r^{1-N} \int_0^r \frac{\tau^{\frac{N-1}{2}K(\tau)}}{N-2}\, d\tau + \frac{r^{2-N} r^{\frac{N-1}{2}} K(r)}{N-2} \\ &= -r^{1-N} \int_0^r \tau^{\frac{N-1}{2}} K(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

E assim, utilizando (2.14) segue que

$$\begin{aligned} \left| r^{\frac{N}{2}-2} \left\{ u(r) r^{\frac{1-N}{2}} \right\}' \right| &= \left| r^{\frac{N}{2}+1} \int_0^r \tau^{\frac{N-1}{2}} K(\tau)\, d\tau \right| && (2.15) \\ &\leq r^{\frac{-N}{2}-1} \int_0^r \tau^{\frac{N-1}{2}} \Big(1 + \frac{1}{s}\Big) |u(\tau)|\; d\tau. && (2.16) \end{aligned}$$

Como $u \in H$, então

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\, dt \leq \left[\int_0^x (u'(t))^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^x dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Dessa forma, para algum intervalo $(0, \tau)$, com τ suficientemente pequeno, teremos

$$u(\tau) = o(\tau^{\frac{1}{2}}), \text{ i.e,}$$

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se, $\tau < \delta$, $u(r) < \varepsilon\tau^{\frac{1}{2}}$. Logo para $\varepsilon = 1$, se $r < \delta$,

$$\begin{aligned}\int_0^r \tau^{\frac{N-1}{2}}\Big(1+\frac{1}{s}\Big)|u(\tau)|\,d\tau &\leq \int_0^r \tau^{\frac{N-1}{2}}\Big(1+\frac{1}{s}\Big)\tau^{\frac{1}{2}}\,d\tau \\ &= r^{N+1}\Big(1+\frac{1}{s}\Big)\frac{1}{N+1}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por (2.15) e (2.17) segue que

$$\lim_{r\to 0}\left| r^{\frac{N}{2}-2}\left\{r^{\frac{N-1}{2}}u(r)\right\}'\right| = 0$$

e a proposição está provada. ■

Proposição 2.1.2. *Nas mesmas hipóteses da proposição (2.1.1), seja $w(x) = r^{\frac{1-N}{2}}u(r),$ para $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| = r > 0$. Então w é uma solução fraca do problema escalar (2.1).*

Demonstração : Pela proposição 2.1.1 $w \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Logo, segue que

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\left\{\frac{1-N}{2r}u(r) + u'(r)\right\} r^{\frac{1-N}{2}}, \text{ para } \quad x \neq 0,$$

e então,

$$|\nabla w(x)|^2 = r^{1-N}\left\{(u')^2(r) - \frac{(N-1)u(r)u'(r)}{r} + \frac{(N-1)^2u^2(r)}{4r^2}\right\}.$$

Dessa forma, se ω_N denota a medida de $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\},$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + w^2\,dx =$$

$$= \omega_N \int_0^\infty (u')^2(r) - \frac{(N-1)u(r)u'(r)}{r}u^2(r) + \frac{(N-1)^2}{4}\frac{u^2(r)}{r^2} + u^2(r)dr. \tag{2.18}$$

Observe que para a e $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{u'(r)u(r)}{r}\,dr &= \int_a^b \frac{(u^2)'(r)}{2r}\,dr \\ &= \frac{1}{2r}u^2(r)\Big|_a^b + \int_a^b \frac{u^2(r)}{2r^2}\,dr \\ &= \frac{u^2(b)}{2b} - \frac{u^2(a)}{2a} + \int_a^b \frac{u^2(r)}{2r^2}\,dr.\end{aligned}$$

Como já vimos anteriormente, para uma vizinhaça suficientemente próxima de zero, $u(a) = o(a^{\frac{1}{2}})$. Logo

$$\lim_{a\to 0} \frac{u^2(a)}{2a} = 0.$$

Então segue que,

$$\int_0^\infty \frac{u'(r)u(r)}{r}\,dr = \int_0^\infty \frac{u^2(r)}{2r^2}\,dr. \tag{2.19}$$

Por (2.18) e (2.19) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + w^2\,dx = \omega_N \int_0^\infty (u')^2(r) + u^2(r) + \frac{(N-1)(N-3)}{4}\frac{u^2(r)}{r^2}\,dr.$$

Logo

$$\|u\|_1^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + w^2\,dx < \infty.$$

Em particular, w e $\dfrac{\partial w}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N),\ i = 1, \ldots, N$. Por outro lado, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} w(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx. \tag{2.20}$$

Segue pelo Teorema da Divergência que

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\varepsilon} w(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx &= \int_{|x|\geq\varepsilon} |x|^{\frac{1-N}{2}}u(|x|)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_{|x|=\varepsilon} \varepsilon^{\frac{1-N}{2}}u(\varepsilon)\varphi(x)\frac{x_i}{\varepsilon}\,dS_x - \int_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}w(x)\,dx.
\end{aligned}$$

No entanto,

$$\left|\int_{|x|=\varepsilon} \varepsilon^{\frac{1-N}{2}}u(\varepsilon)\varphi(x)\frac{x_i}{\varepsilon}\,dS_x\right| \leq \omega_N \varepsilon^{\frac{N-1}{2}}u(\varepsilon)\|\varphi\|_\infty.$$

Assim,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|=\varepsilon} \varepsilon^{\frac{1-N}{2}}u(\varepsilon)\varphi(x)\frac{x_i}{\varepsilon}\,dS_x = 0. \tag{2.21}$$

Então por (2.20) e (2.21) obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}w(x)\,dx.$$

Logo, $\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$ é a derivada fraca de w em $\mathbb{R}^N$ e conseqüentemente $w \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla v \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \nabla w \nabla v \, dx. \tag{2.22}$$

Mais uma vez pelo Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\varepsilon} \nabla w \nabla v \, dx &= -\int_{|x|\geq\varepsilon} v \Delta w \, dx - \int_{|x|=\varepsilon} v \nabla w \cdot \frac{x}{\varepsilon} \, dS_x \\
&= -\int_{|x|\geq\varepsilon} v \Delta w \, dx - \int_{|x|=\varepsilon} v \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{1-N}{2\varepsilon} u(r) + u'(r) \right\} \varepsilon^{\frac{1-N}{2}} \, dS_x \\
&= -\int_{|x|\geq\varepsilon} v \Delta w \, dx - \int_{|x|=\varepsilon} v \left\{ \frac{1-N}{2\varepsilon} u(r) + u'(r) \right\} \varepsilon^{\frac{1-N}{2}} \, dS_x \\
&= -\int_{|x|\geq\varepsilon} v \Delta w \, dx - \int_{|x|=\varepsilon} v \frac{dw}{dr} dS_x. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Note que

$$r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} w(x) = r^{N-1} \left\{ r^{\frac{1-N}{2}} u(r) \right\}'.$$

Logo pela proposição 2.1.1, como $N - 1 \geq \dfrac{N}{2} - 2$,

$$\lim_{r \to 0} r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} w(x) = 0. \tag{2.24}$$

No entanto,

$$\left| \int_{|x|=\varepsilon} v \frac{\partial}{\partial r} w(x) \, dS_x \right| \leq \|v\|_\infty \varepsilon^{N-1} \omega_N \left| \frac{\partial}{\partial r} w(x) \right|. \tag{2.25}$$

Dessa forma, por (2.24) e (2.25) obtemos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|=\varepsilon} v \frac{\partial}{\partial r} w(x) \, dS_x = 0. \tag{2.26}$$

Mais do que isso,

$$\begin{aligned}
\Delta w(x) &= w''(r) + \frac{N-1}{r} w'(r) \\
&= r^{\frac{1-N}{2}} \left\{ u'' - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} u \right\}.
\end{aligned}$$

Pela escolha de u (vide página 24), sabemos que

$$u''(r) - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}u(r) = u(r)\left\{-1 + \frac{r^{1-N}u^2}{1+sr^{1-N}u^2}\right\},$$

e então,

$$\Delta w(x) = -w\left\{-1 + \frac{w^2}{1+sw^2}\right\},$$

de modo que,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} v\Delta w\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N}\left\{-1 + \frac{w^2}{1+sw^2}\right\} wv\, dx, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.27}$$

Desse modo, por (2.22),(2.23),(2.26) e (2.27) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla v\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N}\left\{-1 + \frac{w^2}{1+sw^2}\right\} wv\, dx, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Portanto w é uma solução fraca radial não-negativa do problema escalar (2.1).

■

2.2 Problema Escalar via Métodos Variacionais

A estratégia nessa seção será muito simples. Vamos usar o Teorema do Passo da Montanha para encontrarmos os pontos críticos do funcional definido em (2.7), i.e., $u \in H$ tais que $J'(u) = 0$, para então, aplicarmos a proposição 2.1.2, e assim obtermos a solução desejada do problema escalar (2.1). Veja que é um método de obtenção de soluções radiais sutil, pois estas são de uma certa forma "extensões" para $\mathbb{R}^N$, de funções primeiramente definidas em $\mathbb{R}$. No próximo capítulo, quando estudarmos o sistema (3), faremos uma abordagem um pouco distinta, já que aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha diretamente no espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

Seja $f(u) = \dfrac{u^2}{1+su^2}$, $0 < s < 1$. Considere

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \int_0^\infty F_1(r, u(r))\, dr,\ u \in H,$$

em que

$$F_1(r,\tau) = \int_0^\tau \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt,$$

e $\|u\|_1$ como definida em (2.2).

Lema 2.2.1.

(a) Existem ρ *e* $\alpha > 0$ *tais que* $J(u) \geq \alpha, \ \forall\, u \in \ H$ *com* $\|u\|_1 = \rho.$

(b) Existe $e \in \ H,$ *tal que*

$$\|e\|_1 > \rho \quad e \quad J(e) \leq 0.$$

Demonstração : Primeiro vamos mostrar (a). Seja $\varepsilon > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que se $0 < t < \delta$,

$$f(t) = \frac{t^2}{1 + st^2} \leq \varepsilon.$$

Além disso, para $\sigma = 2^*\lambda + 2(1-\lambda)$, existe $M_\varepsilon > 0,$ tal que se $t \geq \delta$

$$f(t) = \frac{t^2}{1 + st^2} \leq \frac{1}{s} \leq M_\varepsilon \delta^\sigma \leq M_\varepsilon t^\sigma.$$

Logo,

$$F_1(r, \tau) = \int_0^\tau \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1 + sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt \leq \frac{\varepsilon \tau^2}{2} + \frac{M_\varepsilon \tau^{\sigma+2}}{\sigma + 2}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty u^{\sigma+2}\, dr &= \int_0^\infty u^{2^*\lambda} u^{2(1-\lambda)}\, dr \\
&\leq \left(\int_0^\infty u^{2^*}\, dr \right)^\lambda \left(\int_0^\infty u^2\, dr \right)^{1-\lambda} \\
&= \|u\|_{2^*}^{2^*\lambda} \|u\|_{2\lambda}^{2(1-\lambda)} \\
&\leq C\|\nabla u\|_2^{2^*\lambda} \|u\|_{2\lambda}^{2(1-\lambda)} \\
&\leq \|u\|^{\sigma+2}.
\end{aligned}$$

Assim, dado $u \in \ H,$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty F_1(r, u(r))\, dr &\leq \frac{\varepsilon \|u\|^2}{2} + \frac{CM_\varepsilon \|u\|^{\sigma+2}}{\sigma + 2} \\
&= \|u\|^2 \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{CM_\varepsilon \|u\|^\sigma}{\sigma + 2} \right) \\
&\leq \|u\|_1^2 \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{CM_\varepsilon \|u\|_1^\sigma}{\sigma + 2} \right),
\end{aligned}$$

Onde usamos (2.3). Então temos que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \|u\|_1^2\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{CM_\varepsilon\|u\|_1^\sigma}{\sigma+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_1^2\left(1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{2CM_\varepsilon\|u\|_1^\sigma}{\sigma+2}\right) \end{aligned}$$

Tomando $0 < \varepsilon < 1$ e $u \in H$ tal que $0 < \|u\|_1^\sigma \leq \dfrac{\sigma+2}{8CM_\varepsilon}$ temos que

$$J(u) \geq \frac{1}{4}\|u\|_1^2 > 0,$$

para cada $u \in H,$ tal que $\|u\|_1^2 = \dfrac{\sigma+2}{8CM_\varepsilon} = \rho.$
Vamos agora à prova de (b). Dado $\beta > 0$ seja

$$V_\beta(r) = 2\beta^{\frac{3}{2}} r e^{-\beta r},$$

onde $r > 0$ e $e^{(-\beta r)} = \exp(-\beta r)$. Dessa forma temos que

$$V_\beta \in H, \ \|V_\beta\|_2 = 1 \quad \text{e} \ \|V_\beta'\|_2 = \beta. \tag{2.28}$$

De fato, $V_\beta \in C^\infty(0,\infty)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_a^b V_\beta^2(r)\,dr &= \int_a^b 4\beta^3 r^2 e^{-2\beta r}\,dr \\ &= \left.\frac{4\beta^3 r^2 e^{-2\beta r}}{-2\beta}\right|_a^b + \int_a^b 4\beta^2 r e^{-2\beta r}\,dr \\ &= \left.\frac{4\beta^3 r^2 e^{-2\beta r}}{-2\beta}\right|_a^b + \left.\frac{4\beta^2 r e^{-2\beta r}}{-2\beta}\right|_a^b + \int_a^b 2\beta e^{-2\beta r}\,dr. \end{aligned}$$

Tomando $b \to \infty$ e $a \to 0,$ temos

$$\int_0^\infty V_\beta^2(r)\,dr = -e^{-2\alpha r}\Big|_0^\infty = 1. \tag{2.29}$$

Analogamente é possível mostrar que $\|V_\alpha'\| = \beta$. Dessa forma,

$$\|V_\beta\|_1^2 = \beta^2 + 1 + \int_0^\infty \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} V_\beta^2(r)\,dr$$

Mas

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{V_\beta^2(r)}{r^2} &= \int_0^\infty 4\beta^3 e^{-2\beta r}\, dr\\ &= \frac{4\beta^3 e^{-2\beta r}}{-2\alpha}\bigg|_0^\infty = 2\beta^2.\end{aligned}$$

Então

$$\|V_\beta^2\|_1^2 \leq \beta^2 + 1 + (N-1)(N-3)\beta^2 = \beta^2(N-2)^2 + 1.$$

Logo, para cada β e $\tau > 0,$ temos

$$\tau^{-2} J(\tau V_\beta^2) = \frac{1}{2}(\beta^2(N-2)^2+1) - \tau^{-2}\int_0^\infty F_1(r, \tau V_\beta(r))\, dr. \tag{2.30}$$

Observe que,

$$F_1(r,\tau V_\beta(r)) = \int_0^{\tau V_\beta(r)} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1 + s r^{1-N}(t^+)^2}\, dt,$$

e para $\sqrt{x} = \dfrac{t}{\tau V_\beta(r)}$, i.e., $t^2 = x\tau^2 V_\beta^2(r),$

$$F_1(r,\tau V_\beta(r)) = \int_0^1 \frac{r^{1-N} x\tau^2 V_\beta^2(r)}{1 + s r^{1-N} x \tau^2 V_\beta^2(r)} \frac{\tau^2 V_\beta^2(r)}{2}\, dx,$$

sendo assim

$$\tau^{-2}\int_0^\infty F_1(r,\tau V_\beta(r))\, dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty V_\beta^2(r) \int_0^1 \frac{r^{1-N} x\tau^2 V_\beta^2(r)}{1 + s r^{1-N} x \tau^2 V_\beta^2(r)}\, dxdr. \tag{2.31}$$

Afirmamos que

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^\infty V_\beta^2(r) \int_0^1 \frac{r^{1-N} x\tau^2 V_\beta^2(r)}{1 + s r^{1-N} x \tau^2 V_\beta^2(r)}\, dxdr = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{V_\beta^2(r)}{s}\, dr. \tag{2.32}$$

De fato, por um lado

$$V_\beta^2(r)\int_0^1 \frac{r^{1-N} x\tau^2 V_\beta^2(r)}{1 + s r^{1-N} x \tau^2 V_\beta^2(r)}\, dx \leq \frac{V_\beta^2(r)}{s}, \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, segue de (2.29) que $\dfrac{V_\beta^2(r)}{s} \in L^1(0,\infty).$ Além disso $\dfrac{r^{1-N} x\tau^2 V_\beta^2(r)}{1 + s r^{1-N} x \tau^2 V_\beta^2(r)}$ é uma função contínua da variável x no intervalo limitado $[0,1]$. Desse modo,

$$\int_0^1 \frac{r^{1-N} x\tau^2 V_\beta^2(r)}{1 + s r^{1-N} x \tau^2 V_\beta^2(r)}\, dx \to \frac{1}{s}, \quad se\ \tau \to \infty,$$

para quase todo $x \in (0,\infty)$. Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos (2.32). No entanto, por (2.29)

$$\int_0^\infty \frac{V_\beta^2(r)}{2s}\,dr = \frac{1}{2s}. \tag{2.33}$$

Então por (2.30), (2.31), (2.32) e (2.33) obtemos que

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau^{-2} J(\tau V_\beta) \leq \frac{\beta^2(N-2)^2}{2} - \frac{1}{2s}.$$

Tomando $\beta_1 > 0$, tal que $\beta_1^2(N-2)^2 \leq \dfrac{1}{2s}$, teremos

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau^{-2} J(tV_{\beta_1}) \leq -\frac{1}{4s} < 0.$$

Portanto, basta tomarmos $e := \tau V_{\beta_1}(r)$ para algum τ suficientemente grande.

■

Provaremos agora que o funcional J satisfaz a condição de compacidade de Cerami (Ce). Para isso, vamos usar dois lemas um tanto quanto técnicos.

Lema 2.2.2. *Seja $(u_n) \subset H$ tal que $J'(u_n) \to 0$, se $n \to \infty$, e (u_n) é limitada. Então (u_n) possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração : De fato, como (u_n) é limitada e H é espaço de Hilbert, então existe $u \in H$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em H. Como $J'(u_n) \to 0$, então $\forall\, \varphi \in H$,

$$J'(u_n)\varphi \to 0,\ n \to \infty.$$

Segue por (2.8), página 23, que para $\varphi = u$

$$J'(u_n)u = \int_0^\infty u_n'u' + u_n u + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} u_n u\,dr - \int_0^\infty \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1+sr^{1-N}(u_n^+)^2} u_n u\,dr = o(1), \tag{2.34}$$

onde $o(1) \to 0$, se $n \to \infty$. Como $J'(u_n)u_n \to 0$ temos que

$$\|u_n\|_1^2 - \int_0^\infty \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1+sr^{1-N}(u_n^+)^2} u_n u\,dr = o(1). \tag{2.35}$$

Na realidade, basta ver que

$$|J'(u_n)u_n| \leq \|J'(u_n)\| \|u_n\|_1 \to 0, \text{ se } \quad n \to \infty.$$

Além disso, como $u_n \rightharpoonup u$, temos

$$\int_0^\infty u_n'u' + u_n u + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} u_n u \, dr \to \|u\|_1^2, \text{ se } \quad n \to \infty. \tag{2.36}$$

Segue de (2.34), (2.35) e (2.36) que

$$\|u_n\|_1^2 - \|u\|_1^2 = \int_0^\infty \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1 + sr^{1-N}(u_n^+)^2} u_n \big(u_n - u\big) \, dr + o(1). \tag{2.37}$$

Observe que como (u_n) é limitada, existe $L > 0$ tal que

$$\|u_n\|_1 \leq L, \quad \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Então, (cf. [4] teorema IX.12, vide Apêndice B),

$$\|u_n\|_\infty \leq L, \quad \forall \, n \in \mathbb{N}. \tag{2.38}$$

Sendo assim, dado $R > 0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_R^\infty \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1 + sr^{1-N}(u_n^+)^2} u_n \big(u_n - u\big) \, dr \right| &\leq L^2 \left| \int_R^\infty r^{1-N} u_n \big(u_n - u\big) \, dr \right| \\ &\leq \frac{2R^{2-N}L^4}{s(2-N)}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Logo dado $\varepsilon > 0$, tome $R > 0$, tal que

$$\frac{2R^{2-N}L^4}{s(2-N)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.40}$$

Agora, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_0$,

$$\left| \int_0^R \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1 + sr^{1-N}(u_n^+)^2} u_n \big(u_n - u\big) \, dr \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.41}$$

Logo, por (2.37), (2.40) e (2.41), existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n > n_0$

$$\Big| \|u_n\|_1^2 - \|u\|_1^2 \Big| < \varepsilon.$$

Assim, $\|u_n\|_1 \to \|u\|_1$ e como $u_n \rightharpoonup u$, segue que $u_n \to u$ em H, completando a prova do lema. ∎

Lema 2.2.3. *Seja $c > 0$ uma constante dada, então existem constantes $\delta,\ R,\ \eta > 0$, tais que*

$$\|J'(u)\|\|u\|_1 \geq \eta,\ \forall u \text{ tal que } J(u) \in [c-\delta, c+\delta] \text{ e } \|u\|_1 \geq R.$$

Demonstração : Com efeito, sejam

$$\begin{aligned} A_n &= \Big\{u \in H : c - \frac{1}{n} \leq J(u) \leq c + \frac{1}{n} \ e\ \|u\|_1 \geq n\Big\}, \\ m_n &= \inf\Big\{\|J'(u)\|\|u\|_1 : u \in A_n\Big\}, \\ m_n &= \infty \text{ se } A_n = \emptyset. \end{aligned}$$

Caso $m_n > 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, não há mais o que se mostrar e a afirmação é verdadeira. Suponhamos, por contradição, que $m_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então existirá uma seqüência $(u_n) \subset H$, tal que $u_n \in A_n$ com

$$\|J'(u_n)\|\|u_n\|_1 < \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.42}$$

$$J(u_n) \to c \tag{2.43}$$

e

$$\|u_n\|_1 \to \infty,\ \text{se } n \to \infty. \tag{2.44}$$

Assim, utilizando (2.43)

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_1^2 - \int_0^\infty \int_0^{u_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1 + sr^{1-N}(t^+)^2}\, dtdr = c + o(1) \tag{2.45}$$

e, por (2.42)

$$\|u_n\|_1^2 - \int_0^\infty \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1 + sr^{1-N}(u_n^+)^2} u_n^2\, dr = o(1). \tag{2.46}$$

Mais do que isso, de (2.46) segue que existe $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_n \to 0$ e

$$-\alpha_n < \|u_n\|_1^2 - \int_0^\infty \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1 + sr^{1-N}(u_n^+)^2} u_n^2\, dr < \alpha_n \tag{2.47}$$

Vejamos que dado $\xi > 0$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$J(\xi u_n) \leq \frac{\xi^2 \alpha_n}{2} + \int_0^\infty \left\{ \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1 + sr^{1-N}(u_n^+)^2} \frac{u_n^2}{2} - \int_0^{u_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1 + sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt \right\} dr. \tag{2.48}$$

De fato, para cada $\xi > 0$, $r > 0$ fixado e $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$h(\xi) := \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1+sr^{1-N}(u_n^+)^2}\frac{\xi^2 u_n^2}{2} - \int_0^{\xi u_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt.$$

Observe que

$$h'(\xi) = \xi u_n^2 \left\{ \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1+sr^{1-N}(u_n^+)^2} - \frac{r^{1-N}(u_n^+\xi)^2}{1+sr^{1-N}(u_n^+\xi)^2} \right\}.$$

Logo,

$$h'(\xi) \leq 0 \text{ se } 0 \leq \xi \leq 1.$$

Desse modo,

$$h(\xi) \leq h(1),\ \forall\, 0 < \xi \leq 1. \tag{2.49}$$

Agora,

$$J(\xi u_n) = \frac{\xi^2}{2}\|u_n\|_1^2 - \int_0^\infty \int_0^{\xi u_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr,$$

e por (2.47)

$$J(\xi u_n) \leq \frac{\xi^2}{2}\left\{ \alpha_n + \int_0^\infty \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1+sr^{1-N}(u_n^+)^2} u_n^2\, dr \right\} - \int_0^\infty \int_0^{\xi u_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr.$$

Usando (2.49) temos

$$J(\xi u_n) \leq \frac{\alpha_n \xi^2}{2} + \int_0^\infty \left\{ \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1+sr^{1-N}(u_n^+)^2}\frac{u_n^2}{2} - \int_0^{u_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt \right\} dr,$$

justificando (2.48). No entanto,

$$\begin{aligned} J(u_n) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_1^2 - \int_0^\infty \int_0^{u_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr \\ &\geq -\frac{\alpha_n}{2} + \int_0^\infty \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1+sr^{1-N}(u_n^+)^2}\frac{u_n^2}{2}\, dr - \int_0^\infty \int_0^{u_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt, \end{aligned}$$

de modo que

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1+sr^{1-N}(u_n^+)^2}\frac{u_n^2}{2} - \int_0^{u_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt \right\} dr \leq \frac{\alpha_n}{2} + J(u_n). \tag{2.50}$$

A partir de (2.48) e (2.50) teremos,

$$J(\xi u_n) \leq \Big(\frac{1+\xi^2}{2}\Big)\alpha_n + J(u_n),\ \forall\, \xi > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{2.51}$$

Seja $\tilde{u}_n = \dfrac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|_1}u_n$. Como $\|\tilde{u}_n\|_1 \leq 2\sqrt{c}$, então existe $\tilde{u} \in H$ tal que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em H. Afirmamos que $\tilde{u} \neq 0$ q.s. em $\mathbb{R}$. Caso contrário, teríamos para $R > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr &= \int_0^R \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr \\ &+ \int_R^\infty \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr.\end{aligned}$$

Mas $g(x) = \dfrac{x^3}{1+sx^2}$ é não decrescente, logo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr &\leq \int_0^R \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr + \int_R^\infty r^{1-N}\frac{(\tilde{u}_n^+)^4}{4}\, dr \\ &= \int_0^R \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr + \frac{R^{2-N}4c^2}{2-N},\end{aligned}$$

já que $\|\tilde{u}_n\|_\infty \leq 2\sqrt{c}$. Dessa forma, seja $R_0 > 0$ tal que $R_0^{2-N} < \dfrac{\varepsilon(2-N)}{8c^2}$ então,

$$\int_0^\infty \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr \leq \int_0^{R_0} \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr + \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\tilde{u}_n \rightharpoonup 0$, então $\tilde{u}_n(r) \to 0$ q.s. em $\mathbb{R}$. Assim, mais uma vez pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$,

$$\int_0^{R_0} \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \int_0^{\tilde{u}_n} \frac{r^{1-N}(t^+)^2 t}{1+sr^{1-N}(t^+)^2}\, dt\, dr = 0,$$

e conseqüentemente,

$$J(\tilde{u}_n) = \frac{1}{2}\|\tilde{u}_n\|_1^2 + o(1) = 2c + o(1). \tag{2.52}$$

Por outro lado, para $\xi_n = \dfrac{2\sqrt{c}}{\|u_n\|_1}$, por (2.44) segue que $\xi_n \to 0$, se $n \to \infty$. Mais ainda, por (2.51) nós obtemos que

$$J(\tilde{u}_n) = J(\xi_n u_n) \leq \left(\frac{1+\xi_n^2}{2}\right)\alpha_n + J(u_n). \tag{2.53}$$

Dessa forma, como $\alpha_n \to 0$ se $n \to \infty$, usando (2.43), (2.52) e (2.53)

$$2c \leq \left(\frac{1+\xi_n^2}{2}\right)\alpha_n + J(u_n) = c + o(1), \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Mas isto é um absurdo, pois $c > 0$ por hipótese. Logo, $\tilde{u} \neq 0$, q.s. em $\mathbb{R}$. Mostraremos que $\tilde{u}$ satisfaz

$$\int_0^\infty \tilde{u}'\varphi' + \tilde{u}\varphi + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}\tilde{u}\varphi - \frac{1}{s}\tilde{u}^+\varphi\, dr = 0, \tag{2.54}$$

$\forall\, \varphi \in H$. Para tanto, definamos

$$P_n(r) = \frac{r^{1-N}(u_n^+)^2}{1 + sr^{1-N}(u_n^+)^2} \leq \frac{1}{s}\,.$$

Dada $\varphi \in C_0^\infty(0,\infty)$, seja $supt\,(\varphi) = [a,b]$, onde $supt\,(\varphi)$ é o suporte de φ. Dessa maneira, fica claro que

$$\|P_n\|_{L^2[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{2}}}{s}\,.$$

Logo existe $P \in L^2[a,b]$ tal que $P_n \rightharpoonup P$ em $L^2[a,b]$, a menos de subseqüências. Mas é fácil ver que se $\tilde{u}(r) > 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} u_n(r) = \infty.$$

Desse modo, $P(r) = \dfrac{1}{s}$ se $\tilde{u}(r) > 0$. Além disso, se $\tilde{u}(r) < 0$, temos $P(r) = 0$. Como

$$\int_0^\infty P_n(r)\tilde{u}_n(r)\varphi(r)\, dr = \int_a^b P_n(r)\tilde{u}_n(r)\varphi(r)\, dr,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\int_0^\infty P_n(r)\tilde{u}_n(r)\varphi(r)\, dr \to \int_a^b P(r)\tilde{u}(r)\varphi(r)\, dr = \int_0^\infty P(r)\tilde{u}^+(r)\varphi(r)\, dr,$$

$\forall\, \varphi \in\ C_0^\infty(0,\infty)$. Desta forma, como $\overline{C_0^\infty(0,\infty)}^{\|.\|_1} = H$, temos

$$\int_0^\infty P_n(r)\tilde{u}_n(r)\varphi\, dr \to \int_0^\infty P(r)\tilde{u}^+(r)\varphi(r)\, dr,\ \forall\, \varphi \in\ H.$$

Logo, $P_n\tilde{u}_n \rightharpoonup P\tilde{u}^+$ em $L^2(0,\infty)$. Mas note que de (2.42), página 35,

$$\big|J'(u_n)\varphi\big| \leq \|J'(u_n)\|\|\varphi\|_1 \leq \frac{\|\varphi\|_1}{n\|u_n\|_1}$$

e

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty \tilde{u}_n'\varphi' + \tilde{u}_n\varphi + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}\tilde{u}_n\varphi - P_n\tilde{u}_n^+\varphi\, dr\right| \\
=&\ \left|\int_0^\infty \xi_n\Big\{u_n'\varphi' + u_n\varphi + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}u_n\varphi - P_n u_n^+\varphi\Big\}\, dr\right| \\
=&\ \xi_n\big|J'(u_n)\varphi\big| \\
\leq&\ \frac{\sqrt{c}\|\varphi\|_1}{n\|u_n\|_1^2}.
\end{aligned}$$

Como por (2.44) $\|u_n\|_1 \to \infty$ e $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$, se $n \to \infty$, obtemos que

$$\int_0^\infty \tilde{u}'\varphi' + \tilde{u}\varphi + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}\tilde{u}\varphi - P\tilde{u}^+\varphi\, dr = 0,$$

$\forall\, \varphi\ \in H$. Em particular, para $\varphi = \tilde{u}^-$, teremos $\|\tilde{u}^-\|^2 = 0$. Assim,

$$\tilde{u} = \tilde{u}^+ \geq 0 \text{ em } (0,\infty). \tag{2.55}$$

Logo,

$$\int_0^\infty \tilde{u}'\varphi' + \tilde{u}\varphi + \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}\tilde{u}\varphi - \frac{1}{s}\tilde{u}^+\varphi\, dr = 0,$$

$\forall\, \varphi\ \in H$, o que prova (2.54). Desse modo, $\tilde{u}$ é solução fraca da equação

$$\tilde{u}''(r) = \left\{\frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + 1 - \frac{1}{s}\right\}\tilde{u}(r).$$

Pelo Princípio do Máximo, $\tilde{u}(r) > 0$ em $(0,\infty)$. Note que existe $R > 0$ tal que, se $r \geq R$,

$$-1 + \frac{1}{s} - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} \geq \left(-1 + \frac{1}{s}\right)\frac{1}{2}$$

Seja I_R o intervalo $\left(R, R+2\pi\sqrt{\dfrac{s}{1-s}}\right)$. Definamos,

$$\varphi(r)=\begin{cases} sen\left(\sqrt{\dfrac{s}{1-s}}\left(\dfrac{r-R}{2}\right)\right), \text{ se } \quad r\in I_R,\\ 0, \text{ se } \quad r\notin I_R. \end{cases}$$

Então $\varphi\geq 0$ em $(0,\infty)$, $\varphi>0$ em I_R e $\varphi\in H$. Por (2.54) e pela escolha de φ,

$$\begin{aligned} \int_{I_R}\tilde{u}'\varphi'\,dr &= \int_{I_R}\left\{-1+\frac{1}{s}-\frac{(N-1)(N-3)}{4r^2}\right\}\tilde{u}\varphi\,dr \\ &\geq \frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{s}\right)\int_{I_R}\tilde{u}\varphi\,dr. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Por outro lado, por meio de um cálculo direto temos

$$\int_{I_R}\tilde{u}'\varphi'\,dr=-\int_{I_R}\tilde{u}\varphi''\,dr=\frac{1}{4}\left(-1+\frac{1}{s}\right)\int_{I_R}\tilde{u}\varphi\,dr. \tag{2.57}$$

Como $\int_{I_R}\varphi\,dr>0$, temos por (2.56) e (2.57) uma contradição. Logo, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $m_n>0$, e assim fica provado o lema 2.2.3. ∎

Enfim estamos prontos para mostrar que J satisfaz (Ce), isto é, se $(u_n)\subset H$ é tal que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $|J(u_n)|<M$ e $\|J'(u_n)\|(1+\|u_n\|_1)\to 0$, quando $n\to\infty$, então $u_n\to u$ em H, a menos de subseqüências.

Lema 2.2.4. *J como em (2.7) satisfaz (Ce).*

Demonstração : Em primeiro lugar, afirmamos que (u_n) é limitada, i.e., existe $L>0$ tal que $\|u_n\|_1\leq L, \forall\, n\in\mathbb{N}$. Com efeito, suponha por contradição que não exista tal M, i.e., $\|u_n\|_1\to\infty$. Dado $n\in\mathbb{N}$, como $|J(u_n)|<M$, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existem $c\in\mathbb{R}$ e $(u_{n_k})\subset(u_n)$ tais que $J(u_{n_k})\to c$. Logo, denotando (u_{n_k}) por (u_n), temos que $\forall\,\delta>0$, existe n_0, tal que $J(u_n)\in[c-\delta,c+\delta]$, se $n\geq n_0$. Por outro lado, como $\|J'(u_n)\|\big(1+\|u_n\|_1\big)\to 0$, temos que $\|J'(u_n)\|\|u_n\|_1\to 0$. Então, dado $\eta>0$, existe $n_1\in\mathbb{N}$, tal que se $n\geq n_1$, $\|J'(u_n)\|\|u_n\|_1<\eta$. Por fim, como $\|u_n\|_1\to\infty$, dado $R>0$, existe $n_2\in\mathbb{N}$, tal que se $n\geq n_2$, então $\|u_n\|_1\geq R$. Assim se $n\geq\max\{n_0,n_1,n_2\}$, $\forall R,\eta$ e $\delta>0$, com

$$J(u_n)\in[c-\delta,c+\delta] \quad \text{e} \quad \|u_n\|_1\geq R,$$

teremos $\|J'(u_n)\|\|u_n\|_1 < \eta$, o que contraria o lema 2.2.3. Assim, existe M tal que $\|u_n\|_1 \le M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \|J'(u_n)\|\Big(1 + \|u_n\|_1\Big) = 0.$$

Logo, $J'(u_n) \to 0$, se $n \to \infty$. Dessa forma, pelo lema 2.2.2, (u_n) possui subseqüência convergente em H. ∎

Observação 2.2.5. *Acabamos de mostrar que as afirmações dos lemas 2.2.2 e 2.2.3 implicam a condição de Cerami. O leitor atento deve ter percebido que no início da demostração do lema da deformação, foi feito o trabalho inverso, i.e., mostramos que a condição de Cerami implicava essas duas afirmações. Sendo assim, na realidade, são duas maneiras equivalentes de se definir a condição de compacidade* (Ce).

Finalmente, estamos prontos para mostrarmos que o problema 2.1 tem a solução que desejamos.

Teorema 2.2.6. *O problema 2.1 possui solução radial positiva.*

Demonstração : Primeiramente iremos obter uma solução radial. Para tanto, pelas proposições 2.1.1 e 2.1.2 basta provarmos que o funcional J definido em (2.7), satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha, e assim, possui um valor crítico. No lema 2.2.1 já mostramos que J satisfaz a geometria do teorema 1.1.3, pelas condições (I_1) e (I_2).
No lema 2.2.4 mostramos que o funcional J satisfaz (Ce), além de que trivialmente $J(0) = 0$ logo são válidas as condições do Teorema do Passo da Montanha (teorema 1.1.3) e assim existe $u \in H$ tal que $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$. Pela proposição 2.1.2 segue que $w(x) = r^{1-N}u(r)$ é solução de (2.1) falta apenas mostrarmos que w é positiva em $\mathbb{R}^N$. Pelo que já vimos, $w(x) \ge 0$ em $\mathbb{R}^N$. Mas note que, como w é solução de (2.1),

$$-\Delta w(x) + w(x) = w(x)\frac{w^2(x)}{1 + sw^2(x)} \ge 0, \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

e portanto, pelo Princípio do Máximo Forte (cf [11], teorema 8.19), temos que $w(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Concluímos que $w > 0$ é solução fraca de (2.1). ∎

Por meio desse método um tanto quanto peculiar, conseguimos obter uma solução fraca, radial e positiva do problema (2.1). Surgem naturalmente dúvidas sobre a regularidade e o comportamento do nível de energia da solução encontrada pelo teorema 2.2.6. Através da proposição 2.1.1 respondemos parte das dúvidas sobre regularidade, e assim, a maior dificuldade fica em conhecer o nível de energia desta solução. Observe que poderíamos ter um comportamento arbitrário da energia, já que a solução foi obtida pela multiplicação de um ponto crítico de um problema em $\mathbb{R}$, escolhido convenientemente, por uma "função corretiva". Não sabemos se é possível caracterizar o nível de energia da solução que encontramos, um dos motivos para o estudo do problema (3) ter uma abordagem distinta.

Capítulo 3

Existência de Solução para o Sistema

Estamos prontos para mostrarmos o resultado principal de nosso estudo. Encontraremos uma solução radial não-trivial para (3) através do Teorema do Passo da Montanha com condição de compacidade de Cerami. O resultado apresentado aqui é original e pode ser visto, com pequenas diferenças, em [15]. A grande vantagem desse método em comparação ao encontrado em [21] que aplicamos ao problema escalar, é que no presente argumento sabemos exatamente o nível de energia da solução e assim podemos provar diretamente que a solução encontrada é de enegia mínima **sem novas restrições dos parâmetros associados** s e ω. Em [5] são obtidos resultados semelhantes, apesar dos métodos apresentados em [5] e [15] serem métodos conceitualmente diferentes. Em [5] o problema (3) é resolvido, mas não se sabe se a solução obtida é radial, nem se esta é puramente vetorial, insto é, para (u, v) solução de (3) $(u, v) \neq (u, 0)$ e $(u, v) \neq (0, v)$.

Teorema 3.0.7. *Para cada $0 < s < 1$ e $0 < \omega < 1$, se $N \geq 3$ então existe uma solução não trivial $(u, v) \in E$ do problema (3), onde u e v são radiais.*

3.1 Notação e resultados principais

Neste capítulo ω_N representa o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$ e C e M denotam constantes positivas quaisquer. Vamos usar, de acordo com o capítulo 1, o seguinte espaço de Hilbert

$$E = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times E_\omega, \|z\|^2 = \|(u, v)\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2_{E_\omega}, \tag{3.1}$$

$$E_\omega = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \text{ em que } (v|v)_\omega = \|v\|^2_\omega = \|\nabla v\|^2_2 + \omega^2 \|v\|^2_2 \,, \tag{3.2}$$

onde, como fora indicado anteriormente, $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é o subespaço das funções radiais em $H^1(\mathbb{R}^N)$ com norma $\|\cdot\|$, e $\|\cdot\|_2$ denota a norma padrão em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

O funcional associado a (3) é

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2 - \frac{u^2+v^2}{s} + \frac{1}{s^2}\ln(1+s(u^2+v^2))\,dx. \tag{3.3}$$

De fato, obtemos por integração em (3), $F(u,v)$ tal que:

$$F(u,v) = \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2}\ln(1+s(u^2+v^2)), \tag{3.4}$$

onde

$$\big(F_u(u,v), F_v(u,v)\big) = \left(\frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}, \frac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}\right). \tag{3.5}$$

Assim, cf. [5] o funcional associado será:

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u,v)\,dx$$

Isto é,

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2 - \frac{u^2}{s} - \frac{v^2}{s} + \frac{1}{s^2}\ln(1+s(u^2+v^2))\,dx.$$

■

O funcional I é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e sua diferencial é dada por

$$\nabla I(u,v)\cdot(\varphi,\psi) = (u|\varphi) + (v,|\psi)_\omega + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}\varphi + \frac{v(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)}\psi\,dx, \tag{3.6}$$

(Vide apêndice A).

As soluções fracas do sistema (3) são os pontos críticos do funcional I no espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$.

Vamos mostrar que a não-linearidade $F(u,v)$ definida em (3.4) satisfaz a hipótese de não quadraticidade (NQ) como foi definida por Costa e Magalhães em [7].

Proposição 3.1.1. *$F(u,v)$ definida em (3.4) satisfaz a hipótese de não quadraticidade (NQ), isto é, para $(u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$*

$$\begin{cases} \lim\limits_{|(u,v)|\to\infty} \frac{1}{2}\nabla F(u,v)\cdot(u,v) - F(u,v) = +\infty, \\ \frac{1}{2}\nabla F(u(x),v(x))\cdot(u(x),v(x)) - F(u(x),v(x)) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{NQ}$$

Demonstração : Inicialmente provaremos que

$$\frac{1}{2}\nabla F(u(x),v(x))\cdot(u(x),v(x)) - F(u(x),v(x)) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, consideremos a função auxiliar

$$h(t) := \frac{t^2}{2}\frac{(u^2+v^2)^2}{1+s(u^2+v^2)} - \frac{t^2}{2s}(u^2+v^2) + \frac{1}{2s^2}\ln(1+st^2(u^2+v^2)). \tag{3.7}$$

Assim,

$$h'(t) = t\frac{(u^2+v^2)^2}{1+s(u^2+v^2)} - t^3\frac{(u^2+v^2)^2}{1+st^2(u^2+v^2)}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} h'(t) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad t > 1, \\ h'(t) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad t < 1 \text{ e} \\ h'(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad t = 1. \end{aligned}$$

Logo

$$h(t) \leq h(1),\ \forall\, t > 0. \tag{3.8}$$

Então

$$\frac{1}{2}\nabla F(u(x),v(x))\cdot(u(x),v(x)) - F(u(x),v(x)) = h(1) > h(0) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Por fim veja que $\forall\, \xi > 0$

$$\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+s\xi} - \frac{\xi}{2s} \geq -\frac{1}{2s^2}.$$

Logo $\forall\, \xi > 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+s\xi} - \frac{\xi}{2s} + \frac{1}{2s^2}\ln(1+s\xi) \geq -\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2s^2}\ln(1+s\xi).$$

Assim,

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{1+s\xi} - \frac{\xi}{2s} + \frac{1}{2s^2}\ln(1+s\xi) = +\infty,$$

e portanto (NQ) fica provada. ■

3.2 Existência de Soluções

Agora vamos finalmente aplicar o Teorema do Passo da Montanha com a condição de Cerami para demonstrarmos o teorema 3.0.7. Nos próximos dois lemas vamos mostrar que o funcional I satisfaz a condição (Ce) definida em (1.1.1).

Lema 3.2.1. *Se toda seqüência $(z_n) \subset E$ tal que $|I(z_n)| \leq M$ e $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|_E) \to 0$, possui uma subseqüência* ***limitada****, então I satisfaz (Ce).*

Demonstração : Seja $(z_n) = (u_n, v_n)$ limitada em E, a menos de subseqüências, tal que $|I(z_n)| \leq M$ uniformemente e $\|\nabla I(z_n)\|(1 + \|z_n\|_E) \to 0$. Então $\nabla I(z_n) \to 0$ quando $n \to \infty$ e, a menos de subseqüências,

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v \text{ em } E, \\ u_n \to u, v_n \to v \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N), \\ u_n \to u, v_n \to v \text{ em } L^q_{loc}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.9}$$

pelas imersões compactas de $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), 2 < p < 2^*$, e $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq q < 2^*$. Seja $z = (u, v) \in E$, obtemos que

$$\nabla I(z_n) \cdot z = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla z_n \nabla z + z_n z - \nabla F(z_n) \cdot z \, dx = o(1) \text{ e} \tag{3.10}$$

$$\nabla I(z_n) \cdot z_n = \|z_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) \cdot z_n \, dx = o(1), \tag{3.11}$$

onde, como sempre, $o(1)$ representa uma quantidade que tende a 0 quando $n \to \infty$. A partir de (3.9) segue que

$$(z_n \,|\, z) = \|z\|^2 + o(1). \tag{3.12}$$

Desse modo, por (3.10), (3.11) e (3.12),

$$\begin{aligned} \|z_n\|^2 - \|z\|^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) \cdot z_n \; dx + o(1)\right) - \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) \cdot z \; dx + o(1)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) \cdot (z_n - z) \, dx + o(1). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)\cdot(z_n - z)\,dx = \int_{B_R} \nabla F(z_n)\cdot(z_n - z)\,dx \tag{3.14}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} \nabla F(z_n)\cdot(z_n - z)\,dx, \tag{3.15}$$

onde $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq R\}$, para $R > 0$ um número real ainda a ser escolhido. Por um lado,

$$\int_{B_R} \nabla F(z_n)\cdot(z_n - z)\,dx = \int_{B_R} \frac{(u_n^2+v_n^2)^2}{1+s(u_n^2+v_n^2)} - \frac{(u_n u + v_n v)(u_n^2+v_n^2)}{1+s(u_n^2+v_n^2)}\,dx.$$

Visto que de (3.9) $z_n \to z$ em $L^2(B_R)$ e

$$\frac{(u_n^2+v_n^2)^2}{1+s(u_n^2+v_n^2)} - \frac{(u_n u + v_n v)(u_n^2+v_n^2)}{1+s(u_n^2+v_n^2)} \to 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_{B_R} \nabla F(z_n)\cdot(z_n - z)\,dx \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.16}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} \nabla F(z_n)\cdot(z_n - z)\,dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} |\nabla F(z_n)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} |z_n - z|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} |\nabla F(z_n)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} (u_n^2+v_n^2)\left(\frac{u_n^2+v_n^2}{1+s(u_n^2+v_n^2)}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R} (u_n^2+v_n^2)^3\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Mas pela desigualdade de Strauss temos que

$$u_n^2(x) + v_n^2(x) \leq C_N\,|x|^{(1-N)}\left(\|u_n\|_{H^1}^2 + \|v_n\|_{E_\omega}^2\right),$$

logo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \nabla F(z_n)\cdot(z_n - z)\,dx &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} C_N\,|x|^{3(1-N)}\,\|z_n\|^6\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\left(\int_\theta\int_R^\infty r^{2-2N}\,drd\theta\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= Cr^{\frac{3-2N}{2}}\Big|_R^\infty\\
&= CR^{\frac{3-2N}{2}} \to 0 \text{ se } R\to\infty,\ \text{ pois } N\geq 2. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Segue diretamente de (3.13), (3.16) e (3.17) que

$$
\limsup_{n\to\infty}\Big|\|z_n\|^2 - \|z\|^2\Big| \leq \epsilon, \forall\, \epsilon > 0,
$$

e dessa maneira,

$$
\lim_{n\to\infty}\|z_n\| = \|z\|\,.
$$

Mas, $z_n \rightharpoonup z$ e portanto podemos concluir que $z_n \to z$ em E. ■

A partir deste lema estamos prontos para mostrar que I satisfaz a condição de Cerami.

Lema 3.2.2. *I como em (3.3) satifaz* (Ce).

Demonstração : Pelo lema 3.2.1 basta provarmos que se M é uma constante positiva, cada seqüência $(z_n) = \Big((u_n, v_n)\Big) \subset E$ com

$$
|I(z_n)| \leq M \quad \text{e} \quad \|\nabla I(z_n)\|\,(1 + \|z_n\|) \to 0,
$$

possui uma subseqüência limitada. Por contradição, suponha que

$$
\begin{cases}
\|z_n\| \to \infty\\
I(z_n) \to c,\\
\|\nabla I(z_n)\|\,\|z_n\| \to 0.
\end{cases}
$$

Assim, a menos de subseqüência temos que

$$
\|\nabla I(z_n)\|\,\|z_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{quando} \quad n\to\infty.
$$

Dessa forma,

$$I(z_n) = \frac{1}{2}\|z_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(z_n)\,dx = c + o(1). \tag{3.18}$$

Além disso, por (3.11) temos que

$$-\frac{1}{n} < \nabla I(z_n)\cdot z_n = \|z_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)\cdot z_n\,dx < \frac{1}{n}. \tag{3.19}$$

Afirmamos que para qualquer $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$

$$I(tz_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\nabla F(z_n)\cdot z_n - F(z_n)\,dx. \tag{3.20}$$

Façamos uso mais uma vez da função auxiliar h definida em (3.7), mas agora aplicada em $z_n = (u_n, v_n)$. Veja que

$$h(t) = h_n(t) = \frac{1}{2}t^2\nabla F(z_n(x))\cdot z_n(x) - F(tz_n(x)).$$

Assim por (3.8) página 45,

$$h_n(t) \leq h_n(1) \text{ para todo } t > 0. \tag{3.21}$$

Além disso, por (NQ) temos que

$$\frac{1}{2}\nabla F(z_n(x))\cdot z_n(x) - F(z_n(x)) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.22}$$

Agora veja que

$$I(tz_n) = \frac{1}{2}t^2\|z_n\| - \int_{\mathbb{R}^N} F(tz_n)\,dx$$

Usando (3.19) e (3.21) obtemos que

$$I(tz_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\nabla F(z_n)\cdot z_n - F(z_n)\,dx, \quad \forall\, t > 0$$

o que completa a verificação da afirmação. Além disso, a partir de (3.19) nós teremos

$$I(z_n) \geq \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{n} + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)\cdot z_n\,dx\right\} - \int_{\mathbb{R}^N} F(z_n)\,dx,$$

de forma que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\nabla F(z_n)\cdot z_n - F(z_n)\,dx \leq \frac{1}{2n} + I(z_n). \tag{3.23}$$

Desse modo, por (3.20) e (3.23)

$$I(tz_n) \leq \frac{1+t^2}{2n} + I(z_n),\ \forall\, t > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\frac{t^2\,\|z_n\|^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} F(tz_n)\,dx \leq \frac{1+t^2}{2n} + c + o(1),$$

para n suficientemente grande e para todo $t > 0$. Seja $t_n := \dfrac{2\sqrt{c}}{\|z_n\|} \to 0$, quando $n \to \infty$. Assim substituindo t por t_n acima obtemos que

$$c \leq o(1) + \int_{\mathbb{R}^n} F(t_n z_n)\,dx. \tag{3.24}$$

Agora vamos calcular $\int_{\mathbb{R}^N} F(t_n z_n)\,dx$:

$$\int_{R^N} F(t_n z_n)\,dx = \int_{B_R(0)} F(t_n z_n)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} F(t_n z_n)\,dx$$

R a ser escolhido independentemente de n. Seja $\hat{z}_n = t_n z_n$ tal que $\|\hat{z}_n\| = 2\sqrt{c}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em primeiro lugar, iremos encontrar uma cota superior para a integral calculada dentro da bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$

$$\int_{B_R(0)} F(\hat{z}_n)\,dx = \int_{B_R(0)} \frac{\hat{u}_n^2 + \hat{v}_n^2}{2s} - \frac{1}{2s^2}\ln(1 + s(\hat{u}_n^2 + \hat{v}_n^2))\,dx.$$

Assim, por (3.9) para $\hat{u}_n$ e $\hat{v}_n$, que são limitadas

$$\int_{B_R(0)} F(\hat{z}_n)\,dx \leq \int_{B_R(0)} \frac{\hat{u}_n^2 + \hat{v}_n^2}{2s}\,dx \to \int_{B_R(0)} \frac{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}{2s}\,dx. \tag{3.25}$$

Agora vejamos o comportamento da integral fora da bola de raio R. Consideremos a seguinte função auxiliar

$$k(\xi) := \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{\xi}{2s} + \frac{1}{2s^2}\ln(1 + s\xi)$$

É fácil ver que $k'(\xi) \geq 0$ para todo $\xi \geq 0$. Dessa forma $k(\xi) \geq k(0) = 0$ se $\xi \geq 0$. Logo, segue que nesse caso

$$F(\hat{z}_n(x)) \leq \frac{1}{4}(\hat{u}_n^2(x) + \hat{v}_n^2(x))^2 \tag{3.26}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} F(\hat{z}_n(x))\,dx &\leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} (\hat{u}_n^2+\hat{v}_n^2)^2\,dx,\\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \hat{u}_n^4+\hat{v}_n^4\,dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Strauss temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} F(\hat{z}_n(x))\,dx &\leq \frac{C}{2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} C_N^2|x|^{2(1-N)}(\|\hat{u}_n\|_{H^1}^4+\|\hat{v}_n\|_{\tilde{E}_\omega}^4)\,dx \qquad (3.27)\\ &\leq C\int_R^\infty r^{2(1-N)}r^{N-1}\,dr\\ &= C\int_R^\infty r^{1-N}\,dr = CR^{2-N} < \epsilon.\end{aligned}$$

se R for suficientemente grande independentemente de n e $N \geq 3$. Das estimativas obtidas em (3.25) e (3.27) segue que, tomando o limite com $n\to\infty$ em (3.24)

$$c \leq \frac{1}{2s}\int_{B_R(0)} \hat{u}^2(x)+\hat{v}^2(x)\,dx+\epsilon$$

Dessa forma, se escolhermos $\epsilon < c$,

$$0 < c-\epsilon \leq \frac{1}{2s}\int_{B_R(0)} \hat{u}^2(x)+\hat{v}^2(x)\,dx$$

Portanto $(\hat{u}(x),\hat{v}(x)) \neq (0,0)$ em $A \subset B_R(0)$, com medida de Lebesgue positiva, i.e., $|A|>0$. Porém,

$$\hat{u}^2(x)+\hat{v}^2(x) = \lim_{n\to\infty}(\hat{u}_n^2(x)+\hat{v}_n^2(x)) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{u_n^2(x)}{\|z_n\|^2}+\frac{v_n^2(x)}{\|z_n\|^2}\right]4c$$

e visto que $\|z_n\|\to\infty$, então $u_n^2(x)+v_n^2(x)\to\infty$ nesse subconjunto A de medida positiva. Então, por um lado usando (3.22), o lema de Fatou, a hipótese de não quadraticidade (NQ) e o comportamento de $u_n^2(x)+v_n^2(x)$ no subconjunto A temos que

$$\begin{aligned}\liminf\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}\nabla F(z_n)\cdot z_n - F(z_n)\,dx &\geq \liminf\int_A \frac{1}{2}\nabla F(z_n)\cdot z_n - F(z_n)\,dx\\ &\geq \int_A \liminf \frac{1}{2}\nabla F(z_n)\cdot z_n - F(z_n)\,dx = +\infty.\end{aligned}$$

Por outro lado, por (3.23) temos que

$$\liminf \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\nabla F(z_n)\cdot z_n - F(z_n)\,dx \le c, \tag{3.28}$$

levando-nos a uma contradição. Portanto (z_n) tem uma subseqüência limitada de modo que pelo lema 3.2.1 podemos concluir que I satisfaz (Ce).

■

Demonstração do Teorema 3.0.7.

Basta verificarmos que I satisfaz as hipóteses do teorema 1.1.3. Primeiramente, para (I_1) recordemos que se $(u,v)=z\in E$

$$I(u,v) = \frac{1}{2}\left\|u\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|v\right\|^2_{E_\omega} - \int_{\mathbb{R}^N} F(u,v)\,dx. \tag{3.29}$$

Seja $\xi^2 = u^2+v^2$, então F é de fato uma função de ξ e

$$F(\xi) = \frac{\xi^2}{2s} - \frac{1}{2s^2}\ln(1+s\xi^2).$$

Vamos mostrar, usando as propriedades de crescimento de $\ln(1+s\xi^2)$ juntamente com sua expansão de Taylor próximo de zero, que dado ε com $0<\epsilon<1$, existem $\delta(\epsilon)>0$, e $M>0$ tais que para cada $\xi>0$

$$F(\xi) \le \frac{\epsilon}{2}\xi^2 + M\xi^p, \text{ com } \quad p = \frac{2+2^*}{2}. \tag{3.30}$$

Primeiro vejamos que

$$F(\xi) = o(\xi^2), \text{ quando } \xi \to 0. \tag{3.31}$$

De fato,

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{F(\xi)}{\xi^2} = \lim_{\xi\to 0}\frac{\frac{\xi^2}{2s} - \frac{1}{2s^2}\ln\left(1+s\xi^2\right)}{\xi^2}.$$

Podemos supor $0<s\xi^2<1$. Por L'Hôpital temos

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{s\xi^2 - \ln\left(1+s\xi^2\right)}{s^2\xi^2} = 0.$$

Por outro lado, para todo $\xi > 0$ temos que $\ln(1+s\xi) \leq s\xi$, logo

$$\begin{aligned} \Big|F(\xi)\Big| &\leq \frac{\xi^2}{2s} + \frac{1}{2s^2}\ln\left(1+s\xi^2\right) \\ &\leq \frac{\xi^2}{s}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Segue de (3.31) que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\xi < \delta$ então

$$|F(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}\xi^2.$$

Se $\xi \geq \delta$, ou seja $\dfrac{\xi}{\delta} \geq 1$, e $2 < p < 2^*$

$$|F(\xi)| \leq \frac{\xi^2}{s} \leq \frac{\xi^p}{s\delta^{p-2}}.$$

Logo

$$|F(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\xi^2 + M\xi^p,\ \ \forall \xi \geq 0,$$

onde $M = \dfrac{1}{s\delta^{p-2}}$. Mas por (3.29) e (3.30) segue diretamente que

$$I(u,v) \geq \frac{1}{2}\left\|(u,v)\right\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2+v^2\,dx - M\int_{\mathbb{R}^N}\left(u^2+v^2\right)^{\frac{p}{2}}\,dx. \tag{3.33}$$

Pelas desigualdades de Hölder e Sobolev, mais uma desigualdade de interpolação (vide apêndice A), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(u^2+v^2\right)^{\frac{p}{2}}\,dx \leq C\|(u,v)\|^p. \tag{3.34}$$

Assim usando (3.33) e (3.34)

$$I(u,v) \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}\right)\left\|(u,v)\right\|^2 - M\left\|(u,v)\right\|^p.$$

Desse modo, seja $\rho < 1$ tal que $\rho^p < \dfrac{1}{2M}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\epsilon}{2}\right)\rho^2$. Pela escolha de ρ, se $\|(u,v)\| = \rho$ e $\epsilon < 1$, então

$$I(u,v) > \left(\frac{1}{4}-\frac{\epsilon}{4}\right)\left\|(u,v)\right\|^2 = \alpha > 0.$$

Então I satisfaz (I_1).

Agora para demonstrarmos (I_2), seja $R > 0$. Consideremos φ_1 e ψ_1 soluções dos problemas de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \text{ em } B_R(0) \\ \varphi_1 = 0 \,\text{em}\, \partial B_R(0) \end{cases} \tag{3.35}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta\psi_1 = \hat{\lambda}_1\omega^2\psi_1, \text{ em } B_R(0) \\ \psi_1 = 0, \text{ em } \partial B_R(0) \end{cases} \tag{3.36}$$

Sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $R_0(\epsilon)$ tal que se $R > R_0$ então λ_1 e $\hat{\lambda}_1 < \epsilon$, pois λ_1 e $\hat{\lambda}_1$ decaem a zero quando $R \to \infty$. Também sabemos que φ_1 e ψ_1 pertencem a $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Então para $t > 0$, consideremos $u_1 = t\varphi_1$ e $v_1 = t\psi_1$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} I(u_1, v_1) &= \frac{1}{2}t^2\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_1|^2 + |\nabla\psi_1|^2 + \varphi_1^2(1 - \frac{1}{s}) + \psi_1^2(\omega^2 - \frac{1}{s})\, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{t^2s^2}\ln(1 + st^2(\varphi_1^2 + \psi_1^2))\, dx\bigg) \end{aligned}$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\tau = \tau(s,k)$ tal que se $\varphi_1^2(x) + \psi_1^2(x) \geq \tau^2$ então

$$\ln(1 + st^2(\varphi_1^2 + \psi_1^2)) \leq \frac{st^2}{k}(\varphi_1^2 + \psi_1^2), \ \forall\, t \ \geq 1.$$

Sejam

$$A_{k,s} = \Big\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi_1^2(x) + \psi_1^2(x) < \tau^2\Big\} \tag{3.37}$$

e

$$B_{k,s} = \Big\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi_1^2(x) + \psi_1^2(x) \geq \tau^2\Big\}. \tag{3.38}$$

Desse modo temos que

$$\begin{aligned} I(u_1, v_1) &\leq \frac{1}{2}t^2\bigg(\int_{B_R(0)} \varphi_1^2(\lambda_1 + 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{sk}) + \psi_1^2(\hat{\lambda}_1\omega^2 + \omega^2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{sk})\, dx\bigg) \\ &+ \frac{1}{2}t^2\bigg(\frac{1}{t^2s^2}\int_{A_{k,s}} \ln(1 + st^2\tau^2)\, dx\bigg) \\ &\leq \frac{t^2}{2}\bigg(\|\varphi_1\|_2^2\left(\lambda_1 + 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{sk}\right) + \|\psi_1\|_2^2\left(\hat{\lambda}_1\omega^2 + \omega^2 - \frac{1}{s} + \frac{1}{sk}\right)\bigg) \\ &+ \frac{t^2}{2}\bigg(\frac{1}{s^2t^2}\ln(1 + st^2\tau^2)|A_{k,s}|\bigg), \end{aligned}$$

onde $|A_{k,s}|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto $A_{k,s}$. Escolhamos k de modo que $1-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{sk}<0$ e $\omega^2-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{sk}<0$. Façamos $R>0$ suficientemente grande de modo que $\lambda_1+1-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{sk}<0$ e $\hat{\lambda}_1\omega^2+\omega^2-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{sk}<0$. Por último, escolhamos $t\geq 1$ tal que

$$\begin{aligned}\|\varphi_1\|_2^2\left(\lambda_1+1-\frac{1}{s}+\frac{1}{sk}\right) &+ \|\psi_1\|_2^2\left(\hat{\lambda}_1\omega^2+\omega^2-\frac{1}{s}+\frac{1}{sk}\right)\\ &+ \frac{1}{t^2s^2}|A_{k,s}|\ln(1+st^2\tau^2)<0.\end{aligned}$$

Desse modo teremos que $I(u_1,v_1)<0$ e tomando $e=(u_1,v_1)$, mostramos que I satifaz (I_2). Finalmente, pelo lema 3.2.2, I satifaz (Ce) e portanto usando o teorema 1.1.3 o problema (3) tem uma solução fraca não trivial (u,v) em E, que pelo Princípio da Criticalidade Simétrica é na realidade solução não trivial em $H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$.

■

Observe que a solução não-trivial que encontramos $(u,v)\neq(0,0)$ é tal que $I(u,v)=c_r$ em que

$$c_r=\inf_{g\in\Gamma_r}\max_{(u,v)\in g([0,1])}I(u,v),$$

com

$$\Gamma_r=\{g\in C([0,1],E): g(0)=0 \text{ e } I(g(1))<0\}.$$

e por isso sabemos extamente o nível de energia de (u,v).

Capítulo 4

O Nível de Energia da Solução do Sistema

Neste capítulo estamos interessados em caracterizar o nível de energia da solução encontrada pelo teorema 3.0.7. Até agora, obtivemos uma solução $z_r = (u_r, v_r) \in E$ do problema (3) tal que

$$\begin{aligned} c_r = I(u_r, v_r) &= \inf_{g \in \Gamma_r} \max_{(u,v) \in g[0,1]} I(u,v), \quad \text{onde} \\ \Gamma_r &= \Big\{ g \in C([0,1], E) : g(0) = 0 \text{ e } I(g(1)) < 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Usaremos um argumento devido a Lopes (cf. [14] ou [23] apêndice C) para mostrarmos que o mínimo do funcional I, definido em (3.3), com a restrição

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\, dx = 1 \tag{4.2}$$

em que

$$G(u,v) = -\frac{1}{2}(u^2 + \omega^2 v^2) + \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln\left(1 + s(u^2+v^2)\right). \tag{4.3}$$

é atingido sobre o subespaço das funções radiais, e assim

$$\begin{aligned} m &:= \inf \Big\{ I(u,v) : (u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N) \setminus \{(0,0)\} \text{ e } (u,v) \text{ é solução de } (3) \Big\} \\ &= \inf \Big\{ I(u,v) : (u,v) \in E \setminus \{(0,0)\} \text{ e } (u,v) \text{ é solução de } (3) \Big\}, \end{aligned}$$

em que (4.2) é satisfeita. Esse ínfimo é atigido segundo [5], logo

$$m = \min \Big\{ I(u,v) : (u,v) \in E \text{ e } (u,v) \text{ é solução de } (3) \text{ e satisfaz } (4.2) \Big\}. \tag{4.4}$$

No apêndice A verificaremos que as hipóteses exigidas em [5] são satisfeitas pelo sistema (3) e depois no apêndice B enunciaremos os principais resultados de [5] .
Por fim, seguiremos o argumento de Jeanjean e Tanaka (cf. [12]), para concluirmos que

$$m = c,$$

em que

$$\begin{aligned} c = I(u_r, v_r) &= \inf_{g\in\Gamma} \max_{(u,v)\in g[0,1]} I(u,v), \text{ onde} \\ \Gamma &= \Big\{ g \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)) : g(0) = 0 \text{ e } I(g(1)) < 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Perceba que dessa forma Γ_r é a restrição de Γ ao subespaço das funções radiais. Assim, $c \leq c_r$. Por outro lado, vamos mostrar que existe $(u_r, v_r) \in \Gamma$ tal que $I(u_r, v_r) = m$. Mas por (4.4) $(u_r, v_r) \in E$, e assim, $(u_r, v_r) \in \Gamma_r$ e portanto $c_r \leq I(u_r, v_r) = c$. Sendo assim, iremos provar que

$$c_r = c = m.$$

Logo, dada $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ solução de (3) teremos que

$$c_r \leq I(u, v),$$

mostrando que nossa solução é de fato um estado de energia mínima.

Observação 4.0.1. *O leitor irá observar que para mostrarmos que nossa solução encontrada no capítulo 3 tem energia mínima usaremos fortemente os resultados de [5]. Surge então a pergunta: por que não encontrar diretamente a solução de (3) reproduzindo o argumento dado em [5]? De fato, a razão para evitarmos tal caminho vem de que desejamos futuramente diferenciar a solução encontrada (u, v) de $(u, 0)$ e $(0, v)$, soluções do problema escalar, tarefa que não é, em princípio, possível por [5] (cf. [15]). Além disso podemos mostrar que a solução de energia mínima é radial o que não é feito em [5].*

Recordemos a seguinte hipótese satisfeita por $G(u, v)$ como em (4.3),

$$\begin{aligned} G(0,0) &= 0 \text{ e} \\ \Big|\nabla G(u,v)\Big| &\leq C\Big(|(u,v)| + |(u,v)|^{2^*-1}\Big). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Proposição 4.0.2. *(O. Lopes) Seja o problema*

$$\begin{cases} \textit{minimizar} \;\; I(u,v) \\ \int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\,dx = 1 \\ (u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{4.7}$$

Então qualquer solução de (4.7) é radial, i.e., pertence a E.

Demonstração : Dada (u,v) solução de (4.7), para $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$, definamos

$$\Omega^i_- := \Big\{x \in \mathbb{R}^N : x_i \leq 0\Big\} \text{ e}$$
$$\Omega^i_+ := \Big\{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0\Big\}.$$

Inicialmente vamos supor que $u(x)$ e $v(x)$ não sejam nulas q.s. em Ω^i_+. Consideremos também

$$\begin{aligned} C^i_\pm(u,v) \;&:=\; \frac{1}{2}\int_{\Omega^i_\pm} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2\,dx \\ &-\; \frac{1}{2s}\int_{\Omega^i_\pm} u^2 + v^2\,dx + \frac{1}{2s^2}\int_{\Omega^i_\pm} \ln\left(1 + s(u^2+v^2)\right)dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D^i_\pm(u,v) \;&:=\; \frac{1}{2}\int_{\Omega^i_\pm} u^2 + \omega^2 v^2\,dx - \frac{1}{2s}\int_{\Omega^i_\pm} u^2 + v^2\,dx \\ &+\; \frac{1}{2s^2}\int_{\Omega^i_\pm} \ln\left(1 + s(u^2+v^2)\right)dx. \end{aligned}$$

Veja que através de uma translação podemos considerar

$$D^i_-(u,v) = D^i_+(u,v) = \frac{1}{2}. \tag{4.8}$$

Desse modo, tomemos $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v})$, tal que

$$(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) := \begin{cases} (u(x), v(x)), \text{ se } x_i \geq 0 \\ (u(-x_i), v(-x_i)) \text{ se } x_i \leq 0, \end{cases}$$

onde denotaremos

$$u(-x_i) := u(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_N),$$

o mesmo valendo para $v(-x_i)$.
Geometricamente falando, $(\tilde{u}, \tilde{v})$ é a reflexão de (u, v) com relação ao hiperplano $x_i = 0$.
Note que pela escolha de $(\tilde{u}, \tilde{v})$, temos pelo Teorema da Mudança de Variáveis

$$\begin{aligned} C^i_+(\tilde{u}, \tilde{v}) &= C^i_-(\tilde{u}, \tilde{v}). \text{ Assim,} \\ I(\tilde{u}, \tilde{v}) &= 2C^i_+(\tilde{u}, \tilde{v}) = 2C^i_-(\tilde{u}, \tilde{v}). \end{aligned}$$

Veja que como (u, v) é solução de por (4.7)

$$\begin{aligned} m &= \min_{(u,v)\in H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1{}_\omega(\mathbb{R}^N)} I(u, v), \text{ em que } (u, v) \text{ satisfaz } (4.2), \\ &= C^i_+(u, v) + C^i_-(u, v), \end{aligned}$$

logo,

$$C^i_+(u, v) + C^i_-(u, v) \leq 2C^i_+(\tilde{u}, \tilde{v}) = 2C^i_+(u, v),$$

onde a igualdade vem do fato de $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$ em Ω^i_+. Temos então que

$$C^i_-(u, v) \leq C^i_+(u, v). \tag{4.9}$$

Analogamente, se trocarmos o "lado"da reflexão em (u, v), obtemos que

$$C^i_+(u, v) \leq C^i_-(u, v). \tag{4.10}$$

Além disso, observe que por (4.8)

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}, \tilde{v})\, dx = 2\int_{\Omega^i_+} G(\tilde{u}, \tilde{v})\, dx = 1.$$

Dessa forma, $(\tilde{u}, \tilde{v})$ será solução de (4.7). Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange temos que existem $\lambda_1, \lambda_2, \tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_2 > 0$ tais que

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} - G_u(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{\lambda}_1 G_u(\tilde{u}, \tilde{v}), x \text{ em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta\tilde{v} - G_v(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{\lambda}_2 G_v(\tilde{u}, \tilde{v}), x \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u - G_u(u, v) = \lambda_1 G_u(u, v), x \text{ em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta v - G_v(u, v) = \lambda_2 G_v(u, v), x \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4.12}$$

Caso $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 1$ teríamos u ou v harmônicas em $\mathbb{R}^N$, mas como

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0$$

pelo Princípio do Máximo Forte u ou v seriam identicamente nulas em $\mathbb{R}^N$, o que não nos interessa no momento, e então, vamos considerar λ_1 e $\lambda_2 \neq 1$. Além disso, note que $G_u(u(x), v(x))$ e $G_v(u(x), v(x))$ não podem ser nulas para quase todo $x \in \Omega_+^i$. De fato, suponha por contradição que $G_u(u(x), v(x)) = 0$ q.s. em Ω_+^i. Temos então que

$$u = \frac{u(u^2+v^2)}{1+s(u^2+v^2)} \text{ para quase todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Logo, como $u(x) \neq 0$ q.s. em Ω_+^i,

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{1-s} \text{ q.s. em } \Omega_+^i.$$

Desse modo, já que

$$G(u,v) \geq \frac{1}{2s}(u^2+v^2),$$

então

$$\int_{\Omega_+^i} G(u,v)\,dx \geq \int_{\Omega_+^i} \frac{1}{(1-s)2s}\,dx = +\infty,$$

contradição, pois tinhamos que

$$\int_{\Omega_+^i} G(u,v)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Analogamente mostramos que $G_v(u(x), v(x))$ não pode ser nula quase sempre em Ω_+^i. Como $\tilde{u}(x) = u(x)$ em Ω_+^i segue de (4.11) e (4.12) que

$$G_u(u(x), v(x))\big(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1\big) = 0 \text{ em } \Omega_+^i.$$

Mas como acabamos de ver $G_u(u,v)$ não é identicamente nula em Ω_+^i, logo

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1. \tag{4.13}$$

Da mesma forma mostramos que

$$\lambda_2 = \tilde{\lambda}_2. \tag{4.14}$$

Assim, por (4.13) e (4.14), fazendo a diferença de (4.11) e (4.12), pelo Teorema do Valor Médio existem $\alpha_u(x) \in (u(x), \tilde{u}(x))$ e $\beta_v(x) \in (v(x), \tilde{v}(x))$, com

$$\begin{cases} -\Delta\big(u-\tilde{u}\big)+\big(u-\tilde{u}\big)\big(1-\lambda_1\big)=\big(u-\tilde{u}\big)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)}{1+s(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)}\right)\Bigg|_{\alpha_u}(1-\lambda_1), x \text{ em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta\big(v-\tilde{v}\big)+\omega^2\big(v-\tilde{v}\big)(1-\lambda_2)=\big(v-\tilde{v}\big)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)}{1+s(\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)}\right)\Bigg|_{\beta_u}(1-\lambda_2), x \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Logo, para $w_1 = u - \tilde{u}$ e $\bar{z}_2 = v - \tilde{v}$, temos

$$\begin{cases} -\Delta\bar{z}_1 + w_1(1-\lambda_1) = \bar{z}_1 L_1(x), x \text{ em } \mathbb{R}^N \\ -\Delta\bar{z}_2 + \omega^2 w_2(1-\lambda_2) = \bar{z}_2 L_2(x), x \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

No entanto, $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = 0$ em Ω^i_+, logo pelo Princípio da Continuação Única e pela hipótese (4.6), $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = 0$ em $\mathbb{R}^N$. Dessa forma, (u, v) é simétrica com relação ao plano $x_i = 0$ para $i = 1, 2, ..., N$. O mesmo raciocínio pode ser feito em qualquer rotação dos eixos coordenados e portanto a solução é radial. Se $u(x)$ e $v(x)$ não são identicamente nulas em Ω^i_- temos uma situação completamente análoga. Caso $u(x)$ e $v(x)$ não sejam identicamente nulas em "lados"opostos de $\mathbb{R}^N$, i.e., $u(x)$ em Ω^i_- e $v(x)$ em Ω^i_+, etc, podemos fazer uma translação para que estas anulem-se no mesmo "lado"de $\mathbb{R}^N$. Por fim, se apenas uma delas não for identicamente nula em $\mathbb{R}^N$, então basta repetirmos o argumento para $(u, 0)$ ou $(0, v)$. ■

Consideremos agora o seguinte funcional

$$\begin{aligned} I_N(u,v) &= \frac{(N-2)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\,dx + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 + \omega^2 v^2 \\ &- \frac{1}{s}\big(u^2+v^2\big)+\frac{1}{s^2}\big(\ln\left(1+s(u^2+v^2)\right)\big)\,dx. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Observação 4.0.3. *Por um argumento análogo ao da demonstração da condição I_1 do teorema 3.0.7 podemos mostrar que se $N \geq 3$, existe $\rho_0 > 0$ tal que*

$$I_N(u,v) = \frac{N-2}{2}\Big(\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2\Big) - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\,dx > 0,$$

para todo $0 < \|(u,v)\| \leq \rho_0$. Com efeito, note que para $F(u,v)$ definida em (3.4), pág. 44

$$I_N(u,v) \geq \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2\,dx - N\int_{\mathbb{R}^N} F(u,v)\,dx.$$

Por (3.30), pág. 52 e (3.34), pág. 53 dado ε com $0 < \epsilon < 1$, existe $M > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u,v)\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 + v^2\,dx + M\|(u,v)\|^p.$$

Logo,

$$I_N(u,v) \geq \left(\frac{N-2}{2} - \frac{N\varepsilon}{2}\right)\|(u,v)\|^2 - \frac{N}{2}M\|(u,v)\|^P.$$

Escolhamos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{N-2}{2} - \frac{N\varepsilon}{2} > 0$$

e $\rho > 0$ tal que

$$\rho^2 < \left(\frac{N-2}{2} - \frac{N\varepsilon}{2}\right)\frac{\rho^2}{2M}.$$

Assim, para todo $(u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N) \setminus \{(0,0)\}$ tal que $\|(u,v)\| \leq \rho$

$$I_N(u,v) \geq \left(\frac{N-2}{4} - \frac{N\varepsilon}{4}\right)\|(u,v)\|^2 > 0.$$

Observação 4.0.4. *Adaptando muito pouco a prova da condição I_2 do teorema 3.0.7 obtemos que existe $e = (u_1, v_1) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ tal que $I_N(e) \leq 0$, i.e.,*

$$\frac{N-2}{2}\Big(\|\nabla(u_1)\|_2^2 + \|\nabla v_1\|_2^2\Big) - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u_1,v_1)\,dx \leq 0.$$

Tomando u_1 e v_1 como em I_2, pág. 54, temos que

$$\begin{aligned} I_N(u_1,v_1) &= t^2\Bigg(\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda_1\varphi_1^2 + \hat{\lambda}_1\omega^2\psi_1^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{N-2}{2}\Big)\Big(1-\frac{1}{s}\Big)\varphi_1^2 \\ &+ \Big(\frac{N-2}{2}\Big)\Big(\omega^2 - \frac{1}{s}\Big)\psi_1^2\,dx + \Big(\frac{N-2}{2t^2s^2}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\ln(1+st^2(\varphi_1^2+\psi_1^2))\,dx\Bigg) \end{aligned}$$

Dado $k > 0$ existe $\tau > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\ln(1+st^2(\varphi_1^2+\psi_1^2))\,dx \leq \frac{t^2}{sk}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^2+\psi_1^2\,dx + \ln(1+st^2\tau^2)\big|A_{k,s}\big|,$$

onde τ e $A_{k,s}$ são como em (3.37), pág. 54. Logo,

$$I_N(u_1,v_1) \leq \frac{t^2}{s}\left[\|\psi_1\|_2^2\Big(N\lambda_1+(N-2)\Big(1-\frac{1}{s}\Big)+\frac{1}{sk}\Big)+\|\psi_1\|_2^2\Big(N\omega^2\hat{\lambda}_1+(N-2)\Big(\omega^2-\frac{1}{s}\Big)+\frac{1}{sk}\Big)\right],$$

assim para t e k suficientemente grandes, escolhendo $e = (u_1, v_1)$ o resultado segue.

Observação 4.0.5. *Veja que existe $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}, \tilde{v})\, dx > 1.$$

De fato, dados $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ e $t > 0$, considere (tu, tv). Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} G(tu, tv)\, dx &= -\frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 + \omega^2 v^2\, dx \\ &+ \frac{t^2}{2s}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 + v^2\, dx - \frac{1}{2s^2}\int_{\mathbb{R}^N} \ln\left(1 + st^2(u^2 + v^2)\right) dx.\end{aligned}$$

Definindo os conjuntos $A_{k,s}$ e $B_{k,s}$ como em (3.37) e (3.38) obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} G(tu, tv)\, dx &\geq \frac{t^2}{2}\Big(\|u\|_2^2(-1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{sk}) \\ &+ \|v\|_2^2(-\omega^2 + \frac{1}{s} - \frac{1}{sk}) + \frac{1}{t^2 s^2}\ln\left(1 + st^2\tau^2\right)\big|A_{k,s}\big|\Big),\end{aligned}$$

τ como fora definido logo antes de (3.37) e (3.38). Assim, de maneira análoga a feita em 3.0.7 para t suficientemente grande

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(tu, tv)\, dx > 1.$$

Observação 4.0.6. *A expressão*

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\, dx = N\int_{\mathbb{R}^N} G(u, v)\, dx,$$

em que $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$, é chamada de Identidade de Pohozaev. As soluções do problema (3) satisfazem tal identidade (cf. apêndice A).

Lema 4.0.7. *Existe $\bar{z} \in E$ tal que $I(\bar{z}) = m$ e $\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{z})\, dx = 1$.*

Demonstração : De fato, pela proposição 4.0.2, já sabemos que caso tal $\bar{z}$ exista, $\bar{z} \in E$. Segue pelo teorema 2.2 de [5] que existe $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ tal que $I(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = m$ e $\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{z}_1, \bar{z}_2)\, dx = 1$(cf. apêndice A). ■

Lema 4.0.8. *Dado $\bar{z} \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ com $I(\bar{z}) = m$ existe $g \in \Gamma$ tal que*

$$\bar{z} \in g([0, 1]),$$

$$\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) = I(\bar{z}) = m.$$

Demonstração : Pelo lema 4.0.7, tal $\bar{z}$ existe. Logo, para $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, considere $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ com

$$\gamma_i(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t = 0 \\ \bar{z}_i\Big(\dfrac{x}{t}\Big), \text{ se } t > 0. \end{cases}$$

para $i = 1, 2$.

Note que

$$\|\gamma(t)\|^2 = t^{N-2}\big(\|\nabla \bar{z}_1\|_2^2 + \|\nabla \bar{z}_2\|_2^2\big) + t^N\big(\|\bar{z}_1\|_2^2 + \omega^2\|\bar{z}_2\|_2^2\big),$$

logo $g(t) : [0, \infty) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$.

Paralelamente, como $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ é solução de (3), segue pela identidade de Pohozaev (cf. observação 4.0.6) que $\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{z}_1, \bar{z}_2)\, dx > 0$. Além disso,

$$I(\gamma(t)) = \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{z}_1|^2 + |\nabla \bar{z}_2|^2\, dx - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{z}_1, \bar{z}_2)\, dx. \tag{4.16}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\gamma(t)) &= (N-2)\frac{t^{N-3}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{z}_1|^2 + |\nabla \bar{z}_2|^2\, dx - Nt^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{z}_1, \bar{z}_2)\, dx \quad (4.17)\\ &= At^{N-3} + Bt^{N-1} \\ &= t^{N-3}\Big(A - Bt^2\Big), \text{ onde} \end{aligned}$$

$$A := \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{z}_1|^2 + |\nabla \bar{z}_2|^2\, dx, \tag{4.18}$$

e

$$B := N\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{z}_1, \bar{z}_2)\, dx. \tag{4.19}$$

Mais uma vez pela identidade de Pohozaev segue que $A = B$. Então por (4.17),

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}I(\gamma(t) > 0, \text{ se } 0 < t < 1 \\ \dfrac{d}{dt}I(\gamma(t) = 0, \text{ se } t = 1 \\ \dfrac{d}{dt}I(\gamma(t) < 0, \text{ se } t > 1. \end{cases} \tag{4.20}$$

Logo de (4.16) e (4.20) para algum $L > 0$ suficientemente grande, temos

$$\max_{0 \le t \le L} I(\gamma(t)) = m \text{ e } I(\gamma(L)) < 0. \tag{4.21}$$

Portanto, se considerarmos $g(t) = \gamma\Big(\dfrac{t}{L}\Big)$, o resultado segue. ∎

Observação 4.0.9. *O que acabamos de mostrar nos garante que $c \leq m$.*

Vamos considerar os seguintes conjuntos

$$\mathcal{P} = \big\{(u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N) \setminus \{(0,0)\} : I_N(u,v) = 0\big\} \tag{4.22}$$

e

$$S = \left\{(u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\,dx = 1\right\}. \tag{4.23}$$

Pelas observações (4.0.3), (4.0.4) e (4.0.5), temos que $P \neq \emptyset$ e $S \neq \emptyset$.

Lema 4.0.10.

$$m = \inf_{(u,v)\in\mathcal{P}} I(u,v).$$

Demonstração : Se

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\,dx = 1, \text{ então temos}$$

$$\begin{aligned}
(N-2) \quad & \frac{t_*^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\,dx - Nt_*^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\,dx = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & t_*^{N-2}\left(\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\,dx - Nt_*^2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & t_* = \sqrt{\frac{N-2}{2N}}\|(\nabla u, \nabla v)\|_2,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

em que

$$\|(\nabla u, \nabla v)\|_2 = \sqrt{\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2}.$$

Dessa forma, para t_* como em (4.24), definamos

$$\Phi : S \longrightarrow \mathcal{P},\ \Phi(u,v) = \left(u\Big(\frac{x}{t_*}\Big), v\Big(\frac{x}{t_*}\Big)\right).$$

Veja que Φ nos fornece uma correspondência sobrejetiva um entre os conjuntos S e $\mathcal{P}$. De fato, dado $\tilde{w} = (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{P}$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}, \tilde{v})\,dx > 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}(\lambda x), \tilde{v}(\lambda x))\,dx = 1,$$

se, e somente se,

$$\lambda^N = \left(\frac{N-2}{2N}\right)\|(\nabla\tilde{u}, \nabla\tilde{v})\|_2^2.$$

Seja então

$$w_\lambda(x) := \big(\tilde{u}(\lambda x), \tilde{v}(\lambda x)\big).$$

Pela definição de t_*,

$$t_*(w_\lambda) = \sqrt{\frac{N-2}{2N}}\lambda^{\frac{2-N}{2}}\|(\nabla\tilde{u}, \nabla\tilde{v})\|_2. \tag{4.25}$$

Logo, segue de (4.25) e (4.25) que

$$\frac{t_*(w_\lambda)}{\lambda} = 1.$$

Dessa forma,

$$\Phi(\tilde{u}(\lambda x), \tilde{v}(\lambda x)) = (\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)), \text{ com } \int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}(\lambda x), \tilde{v}(\lambda x))\, dx = 1,$$

e assim, Φ é de fato uma sobrejeção de S em $\mathcal{P}$. Além disso, observe que dado $(u,v) \in S$,

$$\begin{aligned}
I(\Phi(u,v)) &= \frac{1}{2}t_*^{N-2}\|(\nabla u, \nabla v)\|_2^2 - t_*^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{N-2}{2N}\Big)^{\frac{N-2}{2}}\|(\nabla u, \nabla v)\|_2^N - \Big(\frac{N-2}{2N}\Big)^{\frac{N}{2}}\|(\nabla u, \nabla v)\|_2^N \\
&= \frac{1}{N}\Big(\frac{N-2}{2N}\Big)^{\frac{N-2}{2}}\|(\nabla u, \nabla v)\|_2^N.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\inf_{(u,v)\in\mathcal{P}} I(u,v) = \inf_{(u,v)\in S} I(\Phi(u,v)) = \inf_{(u,v)\in S} \frac{1}{N}\Big(\frac{N-2}{2N}\Big)^{\frac{N-2}{2}}\|(\nabla u, \nabla v)\|_2^N. \tag{4.26}$$

Por [5], teorema 2.1 temos que existe $(\hat{u}, \hat{v}) \in S$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\hat{u}|^2 + |\nabla\hat{v}|^2\, dx = \inf\left\{\frac{1}{2}\|(\nabla u, \nabla v)\|_2^2 : \int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\, dx \geq 1\right\},$$

e mais,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\hat{u}, \hat{v})\, dx = 1.$$

Logo,

$$\|(\nabla\hat{u},\nabla\hat{v})\|_2^2 = \inf_{(u,v)\in S}\left\{\frac{1}{2}\|(\nabla u,\nabla v)\|_2^2\right\}.$$

Além disso, por [5] teorema 2.2, $\Phi(\hat{u},\hat{v})$ tem energia mínima, logo por (4.26) segue que

$$\inf_{(u,v)\in\mathcal{P}} I(u,v) = I(\Phi(\hat{u},\hat{v})) = m.$$

■

Teorema 4.0.11. $m = c$.

Demonstração : Pelo lema 4.0.8 já temos que $m \geq c$. Resta mostrar que $m \leq c$. Observe que para Γ como em (4.5), dado $g \in \Gamma$, $g\big([0,1]\big)\cap\mathcal{P} \neq \emptyset$. De fato, pela observação 4.0.1, existe $\rho_0 > 0$ tal que $I_N(u,v) > 0$ para $0 < \|(u,v)\| < \rho_0$, com

$$\begin{aligned} I_N(u,v) &= \frac{N-2}{2}\|(\nabla u,\nabla v\|_2^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\,dx \\ &= NI(u,v) - \|(\nabla u,\nabla v)\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim, dado $g \in \Gamma$, $g(0) = 0$ e $I(g(1)) < 0$, logo

$$I_N(g(0)) = 0, \text{ e } I_N(g(1)) < NI(g(1)) < 0.$$

Então existe $t_0 > 0$ tal que $\|g(t_0)\| > \rho_0$ e $I_N(g(t_0)) = 0$ e assim $g(t_0) \in \mathcal{P}$. No entanto, pelo lema 4.0.10

$$m = \inf_{(u,v)\in\mathcal{P}} I(u,v),$$

Dessa forma, para cada $g \in \Gamma$

$$\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \geq I(g(t_0)) \geq \inf_{(u,v)\in\mathcal{P}} I(u,v) = m,$$

portanto $c \geq m$. Segue pelo lema 4.0.8 que $m = c$. ■

Resumindo $c = m$ e como $E \subset H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ então $c \leq c_r$. Porém como o mínimo m é atingido sobre uma função radial, segue que $m = c = c_r$.

Apêndice A

Proposição 5.0.1. *(Desigualdade de Interpolação) Existe $C > 0$ tal que se $2 \leq p \leq 2^*$ e $(u,v) \in H^1 \times H^1_\omega$*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(u^2 + v^2\right)^{\frac{p}{2}} dx \leq C\|(u,v)\|^p. \tag{5.1}$$

Demonstração : De fato, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(u^2 + v^2\right)^{\frac{p}{2}} \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p + |v|^p \, dx,$$

pois existe $C > 0$, tal que

$$(a+b)^p \leq C(a^p + b^p), \ \forall a, b > 0.$$

Consideremos $p = 2\lambda + (1-\lambda)2^*$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\lambda + (1-\lambda)2^*} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\lambda} |u|^{(1-\lambda)2^*} \, dx$$

Note que para $r = \dfrac{1}{\lambda}$ e $r' = \dfrac{1}{1-\lambda}$,

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Logo, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \leq \{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2\lambda r} \, dx\}^{\lambda} \{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*(1-\lambda)r} \, dx\}^{1-\lambda},$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \leq \|u\|^{2\lambda}_{L^2} \|u\|^{2^*(1-\lambda)}_{L^{2^*}}.$$

Pela desigualdade de Sobolev, $\|u\|_{L^{2^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}$, obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \leq \|u\|_{L^2}^{2\lambda} \|\nabla u\|_{L^2}^{2^*(1-\lambda)}.$$

Mas veja que,

$$\|u\|_{H^1}^{2\lambda} = (\|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2})^{2\lambda}$$

e

$$\|u\|_{H^1}^{2^*(1-\lambda)} = (\|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2})^{2^*(1-\lambda)}.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx \leq C\|u\|_{H^1}^{2\lambda} \|u\|_{H^1}^{2^*(1-\lambda)} = C\|u\|_{H^1}^p.$$

Analogamente, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx \leq C\|v\|_{H^1_\omega}^p.$$

■

Iremos mostrar que o funcional I associado ao problema (3) é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. Para isso consideremos os funcionais auxiliares V e T onde

$$V(u,v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{s^2}\ln(1 + s(u^2 + v^2)) - \frac{1}{s}u^2 - \frac{1}{s}v^2 \, dx \tag{5.2}$$

$$T(u,v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2 \, dx. \tag{5.3}$$

Proposição 5.0.2. *V é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.*

Demonstração : Mostremos que V é Gateaux diferenciável. Sejam $(\varphi, \psi) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ e $t \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t} \quad \{V(u + t\varphi, v + t\psi) - V(u,v)\} \\
&= \frac{1}{2ts^2}\int_{\mathbb{R}^N} \ln(1 + s\big((u + t\varphi)^2 + (v + t\psi)^2\big)) - \ln(1 + s\big(u^2 + v^2)) \, dx \\
&- \frac{1}{2ts}\int_{\mathbb{R}^N} (u + t\varphi)^2 + (v + t\psi)^2 - u^2 - v^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Sabemos pelo teorema do valor médio que existe $\theta_\tau = (\theta_1, \theta_2)$ com

$$\theta_1(t) = u + \tau t\varphi, \ \theta_2(t) = v + \tau t\psi \text{ e } \quad 0 < \tau < 1,$$

de forma que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2s^2}\Bigg(\ln(1+s\big((u+t\varphi)^2+(v+t\psi)^2\big))-\ln(1+s\big(u^2+v^2)\big)\Bigg)-\Bigg(\frac{1}{2s}(u+t\varphi)^2\\
+\quad&(v+t\psi)^2-u^2-v^2\Bigg)=F(u+t\varphi,v+t\psi)-F(u,v)=\nabla F(\theta_1,\theta_2)\cdot(t\varphi,t\psi),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2s^2}\Bigg(\ln(1+s\big((u+t\varphi)^2+(v+t\psi)^2\big))-\ln(1+s\big(u^2+v^2)\big)\Bigg)-\Bigg(\frac{1}{2s}(u+t\varphi)^2\\
+\quad&(v+t\psi)^2-u^2-v^2\Bigg)\\
=\quad&\frac{\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t)}{1+s(\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t))}\theta_1(t)t\varphi+\frac{\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t)}{1+s(\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t))}\theta_2(t)t\psi.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\ \ \frac{1}{t}\ \ &\big\{V(u+t\varphi,v+t\psi)-V(u,v)\big\}\\
=\ \ &\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t)}{1+s(\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t))}\theta_1(t)\varphi+\frac{\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t)}{1+s(\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t))}\theta_2(t)\psi\,dx. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Agora usaremos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para calcularmos (5.4). Para não carregar a notação, definamos

$$
h(t,x):=\frac{\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t)}{1+s(\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t))}\theta_1(t)\varphi(x)+\frac{\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t)}{1+s(\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t))}\theta_2(t)\psi(x).
$$

Observe inicialmente que para todo $x\in\mathbb{R}^N$

$$
h(t,x)\to\frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}u\varphi+\frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}v\psi, \qquad (5.5)
$$

quando $t\to 0$. Definamos também

$$
g_\tau(x):=\frac{1}{s}\Bigg(|\varphi u|+|\psi v|+\tau(\varphi^2+\psi^2)\Bigg).
$$

Para todo $0<t<1$ temos que

$$
\begin{aligned}
|h(t,x)|\ \ &\le\ \ \frac{\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t)}{1+s(\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t))}|\theta_1(t)||\varphi|+\frac{\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t)}{1+s(\theta_1^2(t)+\theta_2^2(t))}|\theta_2(t)||\psi|\\
&\le\ \ \frac{|\theta_1(t)||\varphi|}{s}+\frac{|\theta_2(t)||\psi|}{s}\\
&\le\ \ \frac{1}{s}\big(|u||\varphi|+\tau t\varphi^2+|v||\psi|+\tau\psi^2 t\big)\le g_\tau(x). \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_\tau(x)|\, dx \leq \frac{1}{s}\Big(\|\varphi\|_2\|u\|_2 + \tau\|\varphi\|_2^2 + \|v\|_2\|\psi\|_2 + \tau\|\psi\|_2^2 \Big) < \infty, \tag{5.7}$$

i.e., $g_\tau \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Mas por (5.4), (5.5), (5.6) e (5.7), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para obtermos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \quad \frac{1}{t} \quad & \big\{V(u+t\varphi, v+t\psi) - V(u,v)\big\} \\ = \quad & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)} u\varphi + \frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)} v\psi\, dx. \end{aligned}$$

Logo V é Gateaux diferenciável e mais

$$\begin{aligned} \nabla V(u,v)\cdot(\varphi,\psi) \quad = \quad & \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)} u\varphi + \frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)} v\psi\, dx, \\ & \forall \quad (\varphi,\psi) \in H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1_\omega(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Provaremos agora que $\nabla V(u,v)$ é linear e limitado para cada $(u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$. Veremos somente a prova da limitação, já que a linearidade é trivial. Temos que

$$\begin{aligned} |\nabla V(u,v)|^2 \quad \leq \quad & \left(\int_{\mathbb{R}^N} \big(|u\varphi| + |v\psi|\big) \frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}\, dx \right)^2 \\ \leq \quad & \frac{1}{s}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u\varphi| + |v\psi|\, dx \right)^2 \text{, e pela desigualdade de Hölder,} \\ \leq \quad & \frac{1}{s}\Big(\|u\|_2^2\|\varphi\|_2^2 + \|v\|_2^2\|\psi\|_2^2 \Big) \\ \leq \quad & C\big(\|\varphi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2\big) \\ \leq \quad & C\big(\|\varphi\|_{H^1}^2 + \|\psi\|_{H^1}^2\big) \\ \leq \quad & C\|(\varphi,\psi)\|^2. \end{aligned}$$

Falta mostrarmos que $\nabla V(u,v)$ é contínua.

Seja $(u_n, v_n) \to (u,v)$ em $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$, isto é, $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $v_n \to v$ em $H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$. Sabemos que $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e da mesma forma $v_n(x) \to v(x)$. Consideremos

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) \quad := \quad & \frac{u_n^2(x)+v_n^2(x)}{1+s(u_n^2(x)+v_n^2(x))}[u_n(x)\varphi(x) + v_n(x)\psi(x)] \\ = \quad & \nabla F(u_n,v_n)\cdot(\varphi,\psi), \end{aligned} \tag{5.8}$$

segue então que $\Phi_n(x) \to \Phi(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$, onde

$$\Phi(x) := \frac{u^2(x)+v^2(x)}{1+s(u^2(x)+v^2(x))}[u(x)\varphi(x)+v(x)\psi(x)].$$

Sabemos que

$$|\Phi_n(x)| \leq \left|\frac{1}{s}(u_n(x)\varphi(x)+v_n(x)\psi(x))\right| := |g_{0,n}(x)|.$$

Pela desigualdade de Hölder, $g_{0,n}(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim $\Phi_n(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{1}{s}(u_n(x)-u(x))\varphi(x)+\frac{1}{s}(v_n(x)-v(x))\psi(x)\right| dx \\
= \; & \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{u_n(x)-u(x)}{s}\right)^2 dx\right)^{1/2}\|\varphi\|_2 + \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{v_n(x)-v(x)}{s}\right)^2 dx\right)^{1/2}\|\psi\|_2.
\end{aligned}$$

Como $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então $u_n \to u$ em L^2. Analogamente , como $v_n \to v$ em $H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$, então $v_n \to v$ em L^2. Logo

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{1}{s}u_n(x)\varphi+\frac{1}{s}v_n(x)\psi-u\varphi-v\psi\right| dx = 0.$$

Vamos definir

$$g_0(x) := \frac{1}{s}\{|u(x)\varphi(x)|+|v(x)\psi(x)|\}$$

Já que $\Phi_n(x) \to \Phi(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$, $\lim_{n\to\infty}\|g_{0,n}-g_0\|_{L_1(\mathbb{R}^N)} = 0$ e $|\Phi_n| \leq |g_{0,n}|$, segue pelo corolário 4.14 capítulo 1 de [13] (vide Apêndice B), que $\lim_{n\to\infty}\|\Phi_n-\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0$. Isto é,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_n(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{u_n(x)^2+v_n(x)^2}{1+s(u_n(x)^2+v_n(x)^2)}(u_n(x)\varphi(x)+v_n(x)\psi(x))\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\nabla V(u_n,v_n)\cdot(\varphi,\psi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{u(x)^2+v(x)^2}{1+s(u(x)^2+v(x)^2)}(u(x)\varphi(x)+v(x)\psi(x))\,dx \\
&= \nabla V(u,v)\cdot(\varphi,\psi).
\end{aligned}$$

Assim $V(u,v)$ é de classe C^1, pois

$$\begin{aligned}
\|\nabla V(u_n,v_n)-\nabla V(u,v)\| &= \sup_{\|(\varphi,\psi)\|=1}|<\nabla V(u_n,v_n)-\nabla V(u,v),(\varphi,\psi)>| \\
&= \sup_{\|(\varphi,\psi)\|=1}\left|\int_{\mathbb{R}^N}(\Phi_n(x)-\Phi(x))\,dx\right|
\end{aligned}$$

onde o último termo das igualdades acima tende a zero quando $n \to \infty$ ∎

Proposição 5.0.3.

$$T(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + \omega^2 v^2\, dx$$

é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$

Demonstração : Primeiramente vamos mostrar que $T(u,v)$ é Gateaux diferenciável. De fato, considere $(\varphi, \psi) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ e $t \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\frac{T(u+t\varphi, v+t\psi) - T(u,v)}{t} = \frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\big(u+t\varphi\big)|^2 + |\nabla\big(v+t\psi\big)|^2 \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
&+ \big(u+t\varphi\big)^2 + \omega^2\big(v+t\psi\big)^2 - |\nabla u|^2 - |\nabla v|^2 - u^2 - \omega^2 v^2\, dx \\
&= \frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}^N} t^2|\nabla\varphi|^2 + t^2|\nabla\psi|^2 + 2t\nabla u\cdot\nabla\varphi + 2t\nabla v\cdot\nabla\psi \\
&+ 2tu\varphi + 2\omega^2 tv\psi + t^2\varphi^2 + \omega^2 t^2\psi^2\, dx \\
&= \frac{t}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 + |\nabla\psi|^2 + \varphi^2 + \omega^2\psi^2\, dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\cdot\nabla\varphi + \nabla v\cdot\nabla\psi + u\varphi + \omega^2 v\psi\, dx
\end{aligned}$$

Assim, por (5.9) temos

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(u+t\varphi, v+t\psi) - T(u,v)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\cdot\nabla\varphi + \nabla v\cdot\nabla\psi + u\varphi + \omega^2 v\psi\, dx.$$

Logo T é Gateaux diferenciável. Mostraremos agora que $\nabla T(u,v)$ é linear e limitada. Observe que,

$$\begin{aligned}
\big|\nabla T(u,v)\cdot(\varphi,\psi)\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\cdot\nabla\varphi + \nabla v\cdot\nabla\psi + u\varphi + \omega^2 v\psi\, dx\right| \\
&\leq \|\nabla u\|_2\|\nabla\varphi\|_2 + \|u\|\|\varphi\|_2 \\
&+ \|\nabla v\|_2\|\nabla\psi\|_2 + \omega^2\|v\|_2\|\psi\|_2.
\end{aligned}$$

Tomemos $C := \max\Big\{\|\nabla u\|_2, \|\nabla v\|_2, \|u\|_2, \|v\|_2\Big\}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\big|\nabla T(u,v)\cdot(\varphi,\psi)\big| &\leq C\bigg(\|\nabla\varphi\|_2\|\nabla\psi\|_2\|\psi\|_2 + \omega^2\|\psi\|_2\bigg) \\
&= C\|(\varphi,\psi)\|.
\end{aligned}$$

Por fim, vamos mostrar que $\nabla T(u,v)$ é contínua. Seja $(u_n,v_n) \to (u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$. Note que

$$\nabla T(u_n,v_n)\cdot(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla\varphi + \nabla v_n \nabla \psi + u_n\varphi + \omega^2 v_n \psi \, dx.$$

Dessa forma, usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \Big|\big(\nabla T(u_n,v_n) - \nabla T(u,v)\big)\cdot\big(\varphi,\psi\big)\Big| &\leq \Big(\|\nabla u_n - \nabla u\|_2 \|\nabla \varphi\|_2 \\ + \quad \|\nabla v_n - \nabla v\|_2\|\psi\|_2 &+ \|u_n - u\|_2\|\varphi\|_2 + \omega^2\|v_n - v\|_2\|\psi\|_2\Big). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Como $(u_n,v_n) \to (u,v)$ em E então por (5.10)

$$\Big|\big(\nabla T(u_n,v_n) - \nabla T(u,v)\big)\cdot\big(\varphi,\psi\big)\Big| \to 0 \text{ se } n \to \infty$$

Desse modo,

$$\|T(u_n,v_n) - \nabla T(u,v)\| = \sup_{\|(\varphi,\psi)\|=1} \Big|\big(\nabla T(u_n,v_n) - \nabla T(u,v)\big)\cdot\big(\varphi,\psi\big)\Big| \to 0 \text{ se } n \to \infty.$$

Portanto, $\nabla T(u,v)$ é contínua. ∎

Corolário 5.0.4. *$I(u,v) = T(u,v) - V(u,v)$ é de classe $C^1(\mathbb{R},E)$ e*

$$\begin{aligned} \nabla I(u,v)\cdot(\varphi,\psi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \psi + u\varphi + \omega^2 v\psi \\ &- \frac{u^2+v^2}{1+s(u^2+v^2)}\big(u\varphi + v\psi\big)\, dx. \end{aligned}$$

Vamos agora verificar que as hipóteses do artigo de Brezis e Lieb (cf. [5]) são satisfeitas pelo problema (3).

Observação 5.0.5. *A função $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ citada em [5] em nosso caso é dada por*

$$G(u,v) := -\frac{u^2+\omega^2v^2}{2} + \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2}\ln(1+s(u^2+v^2)). \tag{5.11}$$

Proposição 5.0.6. *G como em (5.11) pertence a classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ e satifaz*

$$\begin{aligned} G_u(0,0) = 0 \text{ e } G_v(0,0) &= 0, && (5.12)\\ \lim_{|(u,v)|\to\infty} |(u,v)|^{-2^*} G(u,v) &= 0, && (5.13)\\ \limsup_{|(u,v)|\to 0} |(u,v)|^{-2^*} G(u,v) &\le 0, && (5.14)\\ G(u_0,v_0) > 0 \text{ para algum } (u_0,v_0) &\in \mathbb{R}^2. && (5.15) \end{aligned}$$

Demonstração : Trivialmente $G(u,v) \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ e $G_u(0,0) = G_v(0,0) = 0$. Vejamos agora a prova de (5.13). Temos que,

$$\begin{aligned} |(u,v)|^{-2^*} G(u,v) &= \big(u^2+v^2\big)^{\frac{-N}{N-2}} \Big[-\frac{u^2+\omega^2 v^2}{2} + \frac{u^2+v^2}{2s} \qquad (5.16)\\ &- \frac{1}{2s^2} \ln(1+s(u^2+v^2)) \Big] \\ &\le \big(u^2+v^2\big)^{\frac{-N}{N-2}} \Big[u^2\big(-\frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2s}\big) + v^2\big(-\frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2s}\big) \\ &- \frac{1}{2s^2} \ln(1+s(u^2+v^2)) \Big] \\ &= C\big(u^2+v^2\big)^{\frac{-2}{N-2}} - \frac{\big(u^2+v^2\big)^{\frac{-N}{N-2}}}{2s^2} \ln(1+s(u^2+v^2)). \end{aligned}$$

Como $N \ge 3$ por (5.16) temos

$$\lim_{|(u,v)|\to\infty} |(u,v)|^{-2^*} G(u,v) = 0.$$

Mostremos agora (5.14). De fato, seja $\xi > 0$ tal que $\xi^2 = u^2+v^2$. Para $\xi > 0$ suficientemente pequeno temos pela expansão de Taylor que

$$\ln(1+s\xi) = \xi s - \frac{\xi^2 s^2}{2} + \frac{\xi^3 s^3}{3} + o(\xi^3),$$

em que

$$\lim_{\xi\to 0} \frac{o(\xi^3)}{\xi^3} = 0.$$

Assim para $\xi > 0$ suficientemente pequeno

$$
\begin{aligned}
& -\ \frac{u^2+\omega^2 v^2}{2} + \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2}\ln(1+s(u^2+v^2)) && (5.17)\\
&= \ -\frac{u^2+\omega^2 v^2}{2} + \frac{\big(u^2+v^2\big)^2}{4} - \frac{\big(u^2+v^2\big)^3 s}{6} + \frac{o\big((u^2+v^2)^3\big)}{2s^2} && (5.18)
\end{aligned}
$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $u^2+v^2 < \delta\omega^2$ então

$$o\big((u^2+v^2)^3\big) \leq \varepsilon\big(u^2+v^2\big)^3.$$

Façamos $\varepsilon = \dfrac{s^3}{12}$. Por (5.17) e pelas escolhas de ε e δ

$$-\frac{u^2+\omega^2 v^2}{2} + \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2}\ln(1+s(u^2+v^2)) \leq 0.$$

Dessa forma por (5.16)

$$\limsup_{|(u,v)|\to 0} |(u,v)|^{-2^*} G(u,v) \leq 0.$$

Falta verificarmos (5.15). Basta seguirmos um argumento análogo ao do teorema 3.0.7, na demonstração de (I_2), para tal verificação. Dado $\alpha > 0$ seja $\xi = \xi(\alpha) > 0$ tal que

$$\ln(1+s\xi) < \frac{\alpha s\xi}{2}.$$

Tomemos $u^2+v^2 > \xi$, assim

$$
\begin{aligned}
G(u,v) &> -\frac{u^2+\omega^2 v^2}{2} + \frac{u^2+v^2}{2s} - \frac{\alpha}{4s}(u^2+v^2)\\
&\geq \big(u^2+v^2\big)\big(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4s}\big).
\end{aligned}
$$

Podemos escolher $\alpha > 0$ tal que

$$\big(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4s}\big) > 0,$$

e desse modo, se $(u_0, v_0) > \xi(\alpha)$ então

$$G(u_0, v_0) > 0.$$

■

Vamos mostrar que as soluções de (3) satisfazem a identidade de Pohozaev. Observe que pelo teorema 2.3 [5] as soluções (u, v) do problema (3) estarão no espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 5.0.7. *(Identidade de Pohozaev) Seja* $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ *solução de (3). Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \, dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) \, dx, \tag{5.19}$$

em que $G(u, v)$ *é como em (5.11).*

Demonstração : Consideremos $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ solução de (3). Sejam

$$g_1(x) := -u(x) + \frac{(u^2(x) + v^2(x))u(x)}{1 + s(u^2(x) + v^2(x))}$$

e

$$g_2(x) := -\omega^2 v(x) + \frac{(u^2(x) + v^2(x))v(x)}{1 + s(u^2(x) + v^2(x))}.$$

Note que

$$\frac{\partial}{\partial u} G(u, v) = g_1 \text{ e } \frac{\partial}{\partial v} G(u, v) = g_2.$$

Por um lado, para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, segue por integração por partes que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) g_1(x) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + \varphi g_2(x) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) \, dx \\ = \;& -\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x), v(x)) \varphi(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x), v(x)) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) \, dx. \end{aligned}$$

Note que $\frac{\partial}{\partial x_i} G(u(x), v(x)) = g_1(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + g_2(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x)$. Prosseguindo, temos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\big(g_1(x), g_2(x)\big) \cdot \sum_{i=1}^N x_i \big(\frac{\partial}{\partial x_i} u(x), \frac{\partial}{\partial x_i} v(x)\big) \, dx \qquad (5.20) \\ = \;& -N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x), v(x)) \varphi(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x), v(x)) \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) \, dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela 2ª fórmula de Green

$$
\begin{aligned}
- & \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} \varphi x_i \{\Delta u \frac{\partial u}{\partial x_i} + \Delta v \frac{\partial v}{\partial x_i}\} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big)\, dx \\
+ & \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} \Big\{ x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \Big\} dx \\
+ & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\Big| \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|^2 \Big) \varphi x_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\Big| \frac{\partial v}{\partial x_j} \Big|^2 \Big) \varphi x_i \Big\} dx.
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

Mas por integração por partes,

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\Big| \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|^2 \Big) \varphi x_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(\Big| \frac{\partial v}{\partial x_j} \Big|^2 \Big) \varphi x_i \Big\} dx = \\
- & \int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_i \, dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big) \varphi \, dx.
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

Usando (5.21) e (5.22) segue que

$$
\begin{aligned}
- & \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{N} \varphi x_i \{\Delta u \frac{\partial u}{\partial x_i} + \Delta v \frac{\partial v}{\partial x_i}\} = \big(1 - \frac{N}{2}\big) \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big)\, dx \\
+ & \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} \Big\{ x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \Big\} dx \\
- & \int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_i \, dx.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

Logo por (5.20), (5.23) e como $(u, v) \in E$ é solução de (3), temos

$$
\begin{aligned}
& -N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x), v(x)) \varphi(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x), v(x)) \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \, dx \\
= & \big(1 - \frac{N}{2}\big) \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} \Big\{ x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \Big\} dx \\
- & \int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_i \, dx.
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

Façamos $\varphi(x) = \varphi_n(x) = \psi\Big(\dfrac{x}{n}\Big)$, em que

$$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \ \psi(x) = 1 \text{ se } |x| < 1 \ \psi(x) = 0 \text{ se } |x| > 2.$$

Por um lado,

$$\Big|G\big(u(x), v(x)\big)\varphi_n(x)\Big| \leq \Big|G\big(u(x), v(x)\big)\Big|$$

e

$$G\big(u(x), v(x)\big)\varphi_n(x) \to G\big(u(x), v(x)\big),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso,

$$\Big|\varphi_n(x)\Big|\big(\big|\nabla u\big|^2 + \big|\nabla v\big|^2\big) \leq \big|\nabla u\big|^2 + \big|\nabla v\big|^2$$

e mais

$$\varphi_n(x)\big(\big|\nabla u\big|^2 + \big|\nabla v\big|^2\big) \to \big|\nabla u\big|^2 + \big|\nabla v\big|^2,$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} -N\int_{\mathbb{R}^N} G\big(u(x), v(x)\big)\varphi_n(x)\,dx = -N\int_{\mathbb{R}^N} G\big(u(x), v(x)\big)\,dx \tag{5.25}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 - \frac{N}{2}\big)\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x)\big(\big|\nabla u\big|^2 + \big|\nabla v\big|^2\big)\,dx = \big(1 - \frac{N}{2}\big)\int_{\mathbb{R}^N} \big|\nabla u\big|^2 + \big|\nabla v\big|^2\,dx. \tag{5.26}$$

Por outro lado, pela escolha de ψ

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big)x_i G\big(u(x), v(x)\big)\,dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_{x_i}(x)|\frac{2}{n^{N+1}}\Big[u^2(nx)\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2s}\Big) \\ +\ \ v^2(nx)\Big(\frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2s}\Big) &+ \frac{1}{2s^2}\ln\big(1 + s(u^2(nx) + v^2(nx))\big)\Big]\,dx \\ \leq\ \ \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_{x_i}(x)|\frac{2}{n^{N+1}}\Big[C\big(u^2(nx) + v^2(nx)\big) &+ \frac{1}{2s}\Big) + \frac{1}{2s^2}\ln\big(1 + s(u^2(nx) + v^2(nx))\big)\Big]\,dx. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Como $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ é solução de (3) então segue pelo teorema 2.3 em [5],

$$u(nx) \leq \|u\|_\infty < \infty,\ \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N,$$

$$v(nx) \leq \|v\|_\infty < \infty,\ \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Desse modo considerando

$$h_n(x) := |\psi_{x_i}(x)|\frac{2}{n^{N+1}}\Big[C\big(u^2(nx)+v^2(nx)\big)+\frac{1}{2s}\Big)+\frac{1}{2s^2}\ln\big(1+s(u^2(nx)+v^2(nx))\Big],$$

temos

$$\begin{aligned} h_n(x) &\leq \frac{|\psi_{x_i}(x)|}{n^{N+1}}\Big[C\big(\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2\big)+\frac{1}{2s^2}\ln\big(1+s(\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2)\big)\Big] \qquad (5.28)\\ &\leq C\frac{|\psi_{x_i}(x)|}{n^{N+1}} \leq C|\psi_{x_i}(x)|, \end{aligned}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Tomando $h(x) := C|\psi_{x_i}(x)|$ temos $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e por (5.28) $\big|h_n(x)\big|\leq h(x)$ q.s. em $\mathbb{R}^N$. No entanto, por (5.28)

$$h_n(x) \leq C\frac{|\psi_{x_i}(x)|}{n^{N+1}} \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$h_n(x) \to 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Dessa forma pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} h_n(x)\,dx = 0. \qquad (5.29)$$

Assim, segue de (5.27) e (5.29)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big)x_iG\big(u(x),v(x)\big)\,dx = 0, \text{ para } i=1,2,...,N,$$

e então

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big)x_iG\big(u(x),v(x)\big)\,dx = 0. \qquad (5.30)$$

Prosseguindo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{i,j=1}^{N}\Big\{x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}+x_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big\}\,dx = 0. \qquad (5.31)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \Big|x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big| &\leq \Big|\frac{2}{n}\psi_{x_i}\Big(\frac{x}{n}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big| \qquad (5.32)\\ &\leq \frac{2}{n}\|\psi_{x_i}\|_\infty\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|, \end{aligned}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Considerando

$$k_n(x) := \frac{2}{n}\|\psi_{x_i}\|_\infty \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|,$$

temos que

$$k_n(x) \leq 2\|\psi_{x_i}\|_\infty \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| := k(x).$$

Observe que pela desigualdade de Hölder $k \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$k_n(x) \to 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Então pelo Teorema da Convergência de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} k_n(x)\, dx = 0. \tag{5.33}$$

Logo por (5.32) e (5.33)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx \right| = 0,$$

para $i, j = 1, 2, ..., N$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} \Big\{ x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \Big\}, dx \right| = 0. \tag{5.34}$$

Analogamente,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^{N} \Big\{ x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\psi\Big(\frac{x}{n}\Big)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \Big\}, dx \right| = 0. \tag{5.35}$$

Assim por meio de (5.34) e (5.35) segue (5.31). Repetindo o argumento que acabamos de fazer obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\big) \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} x_i\, dx = 0. \tag{5.36}$$

Basta notar que

$$\Big(\big|\nabla u\big|^2 + \big|\nabla v\big|^2\Big) \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \leq \sum_{i=1}^{N} \Big(\big|\nabla u\big|^2 + \big|\nabla v\big|^2\Big) \frac{2}{n}\|\psi_{x_i}\|_\infty,$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto por (5.24), (5.25), (5.26), (5.30), (5.31), e (5.36), dada $(u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1_\omega(\mathbb{R}^N)$ solução de (3) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \, dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u,v) \, dx.$$

$\blacksquare$

Apêndice B

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = g_1(u(x), v(x)), \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v(x) = g_2(u(x), v(x)), \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{6.1}$$

onde para alguma função $G : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $G \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$,

$$\begin{aligned} G_u(u,v) &= g_1(u,v), \\ G_v(u,v) &= g_2(u,v). \end{aligned}$$

Consideremos também o conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(u,v) : u \text{ e } v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N), |\nabla u| \text{ e } |\nabla v| \in L^2(\mathbb{R}^N), G(u,v) \in L^1(\mathbb{R}^N), \\ &|\{x : u(x) > \alpha\}| < \infty \text{ e } |\{x : v(x) > \alpha\}| < \infty\}. \end{aligned}$$

Por fim, seja

$$T := \inf\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\, dx : (u,v) \in \mathcal{C}, \int_{\mathbb{R}^N} G(u,v)\, dx \geq 1\right\}.$$

Teorema 6.0.1. *(Teorema 2.1 Brezis e Lieb) Assuma que G pertence a classe $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ e satisfaz*

$$G_u(0,0) = 0 \text{ e } G_v(0,0) = 0, \tag{6.2}$$

$$\lim_{|(u,v)|\to\infty} |(u,v)|^{-2^*} G(u,v) = 0, \tag{6.3}$$

$$\limsup_{|(u,v)|\to 0} |(u,v)|^{-2^*} G(u,v) \leq 0, \tag{6.4}$$

$$G(u_0,v_0) > 0 \text{ para algum } (u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2. \tag{6.5}$$

Então existe $(u_0, v_0) \in \ \mathcal{C}$ *tal que*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2 \, dx = T$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_0, v_0) \, dx = 1.$$

Teorema 6.0.2. *(Teorema 2.2 Brezis e Lieb) Seja* (u_0, v_0) *dada pelo teorema anterior. Então depois de alguma mudança de variável conveniente,*

$$\big(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)\big) = \big(u_0(\theta x), v_0(\theta x)\big), \theta > 0$$

satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = g_1(\tilde{u}), \ \ em D' \\ -\Delta \tilde{v} = g_2(\tilde{v}), \ \ em D'. \end{cases}$$

Além disso, para cada $(u, v) \in \ \mathcal{C} \cap L^{\infty}_{loc}$*,* $(u, v) \neq (0, 0)$*, solução de (6.1) teremos que*

$$I(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq I(u, v),$$

onde I *é o funcional associado ao sistema (6.1).*

Teorema 6.0.3. *(Teorema 2.3 Brezis e Lieb) Seja* $(u, v) \in \mathcal{C}$ *solução de (6.1) com* G_u *e* $G_v \in L^1_{loc}$*. Então* u *e* $v \in W^{2,q}_{loc}$*, para todo* $q < \infty$ *e*

$$u \ e \ v \in L^{\infty} \ com \ \lim_{|x| \to \infty} u(x) = \lim_{|x| \to \infty} v(x) = 0$$

As demonstrações dos três últimos teoremas podem ser encontradas em [5].

Teorema 6.0.4. *(Morrey) Seja* $p > N$*, então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

A demonstração do Teorema de Morrey está em [4], página 166.

Teorema 6.0.5. *Considere* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$*, aberto. Sejam* $\big(f_n\big)_{n \geq 1}$ *e* $\big(g_n\big)_{n \geq 1}$ *duas seqüências de funções pertencentes a* $L^1(\Omega)$ *tais que* $f_n(x) \to f(x)$ *e* $g_n(x) \to g(x)$ *q.s. em* Ω*. Além disso, suponha que:*

$$|f_n(x)| \leq |g_n(x)|, \ \ q.s. \ em \ \Omega \ e \ \lim_{n \to \infty} \|g_n - g\|_{L_1(\Omega)} = 0.$$

Então

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L_1(\Omega)} = 0 \ e \ |f(x)| \leq |g(x)|, \ \ q.s. \ em \ \Omega.$$

Para ver a demonstração, consulte [13].

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti A., Colorado E., *Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations*, preprint, 2006.

[2] Bartolo P., Benci V. e Fortunato D., *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Anal. TMA **7**(1983), 981-1012.

[3] Berestycki H., Lion P.L., *Nonlinear scalar field equations I*, Arch. Rational Mech. Anal., **82** (1983), 313-345.

[4] Brezis H., *Analyse Fonctionnnelle: Théorie et Applications*, seg. ed.:Dunod(1999).

[5] Brezis H. e Lieb E.H., *Minimum action solutions of some vector field equations*, Commun. Math. Phys. **96**(1984), 97-113.

[6] Champneys A.R. e Yang J., *A scalar nonlocal bifurcation of solitary waves for coupled nonlinear Schrödinger systems*, Nonlinearity **15** (2002), 2165-2192.

[7] Costa D.G. e Magalhães C.A., *Variational Elliptic Problems Wich Are Nonquadratic at Infinity*, Nonlinear Anal. TMA, vol. 23, number **11**(1994), 1401-141.

[8] Costa D.G. e Magalhães C.A., *On a class of ellliptic systems in* $\mathbb{R}^N$, Electronic J. Diff. Eq. **7**(1994), 1-14.

[9] Evans L.C., *Partial Differential Equations*, AMS.

[10] Furtado M.F, Maia L.A e Silva E.A., *Solutions for a Resonant Elliptic System with Coupling in* $\mathbb{R}^N$, Commun. Partial Diff. Eq. **27**(2002),nº 7-8, 1515-1536.

[11] Gilbarg D. e Trudinger N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer(1983).

[12] Jeanjean L., Tanaka K., *A remark on least energy solutions in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. **131**(2003),2399-2408.

[13] Kavian O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques el Applications aus Problemes Elliptiques*, seg. ed.: Springer Verlag(1993).

[14] Lopes O., *Radial symmetry of minimizers for some translations and rotation invariant functionals*, J. Diff. Eq. **124**(1996), 378-388.

[15] Maia L.A., Miranda L.H., Montefusco E. e Pellaci B., *Ground states of saturable coupled nonlinear Schrödinger systems*, em preparação.

[16] Maia L.A., Montefusco E. e Pellaci B., *Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system*, Journal of Differential Equations, vol.229, issue 2, **15** (2006), 743-767.

[17] Manakov S.V., *On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **65**(1973), 505 (Engl. transl. Sov.Phys.-JETP **38**(1974), 248-253).

[18] Mcleod K., Serrin J., *Uniqueness of Positive Radial Solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Rational Mech. Anal. **99**(1987), number 2, 115-145.

[19] Ostrovskaya E.A. and Kivshar Yu.S., *Multi-hump optical solitons in a saturable medium*, J.Opt.B: Quantum Semiclass.Opt **1**(1999), 77-83.

[20] Palais R.S., *The Principle of Symmetric Criticality*, Comm. Math. Phys. **1**(1979),number 1, 19-30.

[21] Stuart C.A. e Zhou H.S., *Applying the mountain pass theorem to an asymptotically linear elliptic equation on* $\mathbb{R}^N$, Commun. Partial Diff. Equ. (1999), vol. 24, number **9** - **10**, 1731-1758.

[22] Strauss W.A., *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. **55** (1977), 149-162.

[23] Willem M., *Minimax Theorems*, Birkhäuser (1996).