Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

# Limitações para os autovalores de Laplace em domínios de $\mathbb{R}^n$ e em subvariedades da esfera unitária

por

Leonardo Gomes

Brasília
Julho de 2007

*Aos meus pais*

# Agradecimentos

-Primeiramente a Deus, pela vida e por essa oportunidade;

-Aos meus pais Julemar e Else, que sempre fizeram o possível e, até em alguns momentos, o impossível para que eu não deixasse de estudar;

-Às minhas irmãs Vívian e Vanessa, pelo amor fraternal;

-À minha prima Marisa, que muito ajudou em minha vinda para Brasília;

-Ao professor Xia Changyu, pela orientação deste trabalho;

-Aos professores José Valdo e Valdair Bonfim, por sempre terem acreditado em meu potencial;

-A todos meus amigos, em especial ao Miguel, pelas discussões e troca de conhecimento em geometria, ao Vagner, meu grande amigo desde os tempos de graduação, pela fiel amizade e à Isabel, Flávia, Magno, Luciene, Maryane e Tertuliano pela compreensão, paciência e companheirismo;

-À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nesta dissertação, estudamos limitações para autovalores do operador Laplaciano e equação de Shrödinger sobre um domínio limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$ (espaço euclidiano n-dimensional), e em dois casos de subvariedades $M$ contidas na esfera unitária: quando $M$ é um domínio com condição de fronteira de Dirichlet e quando $M$ é uma hipersuperfície mínima compacta. Este trabalho é baseado em um artigo de Mark Asbaugh [1], no qual apresenta as desigualdades de Payne-Pólya-Weinberger, Hile-Protter e H.C.Yang estimando o $(k+1)$-ésimo autovalor em função dos primeiros $k$ autovalores.

# Abstract

In this dissertation, we study bounds on eigenvalues of Laplacian operator and the Schödinger's equation on a bounded connected domain of $\mathbb{R}^n$ (n-dimensional euclidean space), and in two cases of submanifold $M$ in a unit sphere: when $M$ is a domain with Dirichlet boundary condition and when $M$ is a compact minimal hipersurface. This work is based on the Mark Asbaugh's paper [1] which presents the inequalities of Payne-Pólya-Weinberger, Hile-Protter and H.C.Yang of estimating the $(k+1)$-th eigenvalue by the first $k$ eigenvalues.

# Sumário

# Introdução

Dentre os vários problemas matemáticos existentes com aplicações físicas apresentamos neste trabalho o problema do autovalor para o Laplaciano

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \qquad \text{em } \Omega, \\ u\,\big|_{\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é aberto conexo e limitado, e $\lambda$ um número real chamado o autovalor de Dirichlet. O estudo deste problema, chamado também às vezes de Problema da Membrana fixa (para $n = 2$ o problema modela a vibração de uma membrana com extremidades fixas), torna-se importante pois sabe-se que existe uma proporcionalidade entre estes autovalores e o quadrado da autofrequência da membrana, além de as autofunções $u$ que satisfazem (1) descreverem o comportamento desta membrana. A partir daí faz sentido investigar a respeito de limitações para estes autovalores.

Desta forma, em 1956 Payne-Pólya-Weinberger [13] (PPW) provaram para o problema (1) ( para $n = 2$), a desigualdade

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

a qual para o caso geral ($n \geq 2$) fica

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{nk} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Em 1980, Hile e Protter provaram em [10] (prova original) uma desigualdade mais forte do que a de PPW, a saber

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{nk}{4} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

a qual chamaremos de desigualdade de HP. É fácil ver que substituindo $\lambda_i$ do denominador da desigualdade de HP obteremos a desigualdade de PPW, logo $PPW \Rightarrow HP$.

A procura de melhores limitações, em 1991, Yang [15] deduziu uma desigualdade mais forte do que as de PPW e HP:

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left( \lambda_{k+1} - \lambda_i \left( 1 + \frac{4}{n} \right) \right) \leq 0 \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots.$$

Embora Yang nunca tenha publicado a sua prova original, os métodos utilizados por ele para tal prova foram publicados por [9]. Observando então a desigualdade de Yang, implicada por ela teremos o que chamamos de a segunda desigualdade de Yang (Yang 2), e que é dada por

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{4}{n} \right) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Por isso denotamos às vezes a desigualdade de Yang por (Yang 1).
Pouco tempo depois, utilizando de seus métodos, Yang obteve resultados semelhantes para domínios e hipersuperfícies contidos na esfera unitária.

Naturalmente a dissertação está organizada seguindo a ordem cronológica com que as desigualdades foram sendo provadas. No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos e resultados acerca de autovalores que serão utilizados durante todo o trabalho. No Capítulo 2, exibimos uma prova para as desigualdades de Hile-Protter e Yang conforme [1], finalizando com a justificativa da implicação da desigualdade de HP em Yang 1. Para o Capítulo 3 consideramos um problema um pouco mais geral do que o problema do autovalor de Laplace. Em particular consideraremos os operadores de Schödinger: $-\Delta + V(x)$ com $V \geq 0$ tal que $-\Delta u + V(x)u = \rho\lambda u$ em $\Omega \in \mathbb{R}^n$ com $\rho \geq 0$, onde $V$ e $\rho$ são funções reais definidas em $\Omega$. Provaremos então a desigualdade de Yang para este caso obtendo uma extensão para a desigualdade de Yang provada no Capítulo 2, ou seja, teremos uma generalização para as limitações do autovalor de Laplace. Por fim, no Capítulo 4 apresentamos a prova da estensão destes resultados para domínios contidos em $\mathbb{S}^n$ com condições de fronteira de Dirichlet e para hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$, de acordo com os métodos de Asbaugh [1].

# Capítulo 1

# Resultados Preliminares

Apresentamos neste capítulo alguns conceitos e resultados que serão utilizados nos capítulos subseqüentes. No que segue, a palavra diferenciável significará $C^\infty$.

Cosideremos $M$ como sendo uma variedade Riemanniana de dimensão $n$ $(n \geq 1)$, conexa e diferenciável. Para nós, $M$ sempre será orientada e sua fronteira, $\partial M$, também será diferenciável. Assim, para cada ponto $p \in M$, o espaço tangente a $M$ no ponto $p$ será denotado por $T_pM$, e a união de todos os espaços tangentes munidos com uma estrutura diferenciável natural, chamado de fibrado tangente, será denotado por $TM$. No que segue, para os capítulos 2 e 3, podemos pensar em $\Omega$ como um domínio limitado da variedade Riemanniana $\mathbb{R}^n$.

## 1.1 Operadores Divergente, Gradiente e Laplaciano

**Definição 1.1.** Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em $M$. Suponha $\alpha(0) = p \in M$ com $\alpha'(0) = \xi \in T_pM$, e seja $f$ uma função diferenciável definida em uma vizinhança de $p$. Então para cada $\xi \in T_pM$ associamos a *derivada direcional de $f$ em $p$* na direção $\xi$, denotada por $\xi f$, definida por

$$\xi f = (f \circ \alpha)'(0).$$

Não é difícil verificar que da definição seque diretamente que vale

$$\xi(f+h) = \xi f + \xi h$$

e

$$\xi(fh) = h(\xi f) + f(\xi h),$$

para funções $f$ e $h$ diferenciáveis em $M$.

Para cada $p \in M$ a métrica Riemanniana associa um produto interno em $T_pM$ o qual iremos denotar por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A norma associada será denotada por $|\cdot|$. Desta forma, dizemos que a métrica Riemanniana é diferenciável no sentido de que, se $X$ e $Y$ são campos vetoriais diferenciáveis em $M$, então $\langle X, Y \rangle$ é uma função real diferenciável sobre $M$.

**Definição 1.2.** Seja $f$ uma função real diferenciável sobre $M$. Definimos o *gradiente de* $f$, denotado por $\nabla f$, como sendo o campo vetorial sobre $M$ satisfazendo

$$\langle \nabla f, \xi \rangle = \xi f,$$

para todo $\xi \in T_pM$.
Consequentemente, temos as seguintes propriedades sobre o gradiente de funções $f$ e $h$:

*i)* $\nabla(f+h) = \nabla f + \nabla h$,

*ii)* $\nabla(fh) = h(\nabla f) + f(\nabla h)$.

**Definição 1.3.** Sejam $\chi(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em $M$, $X, Y \in \chi(M)$. Uma conexão $\nabla$ em $M$ é uma aplicação

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes condições:

*i)* $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Y + g\nabla_X Y$,

*ii)* $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

*iii)* $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g$ são funções diferenciáveis em $M$.

**Observação 1.1.** O campo de vetores $\nabla_X Y$ também é chamado de derivada covariante. Embora a definição forneça uma maneira de derivar campos de vetores em $\chi(M)$, esta forma de derivar fica fortemente ligada à escolha da conexão. Todavia, existe um resultado que diz que a métrica Riemanniana em $M$ determmina uma única conexão em $M$, a saber

**Teorema 1.1 (Levi-Civita).** *Dada uma variedade Riemanniana $M$, existe uma única conexão $\nabla$ em $M$ satisfazendo as condições:*

*i)* $\nabla$ *é simétrica, isto é,* $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = XY - YX$, *para todo* $X, Y \in \chi(M)$,

*ii)* $\nabla$ *é compatível com a métrica Riemanniana* $\langle \, , \rangle$, *ou seja, para todo* $X, Y, Z \in \chi(M)$ *vale* $Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$.

Uma demonstração para este fato pode ser encontrada em [6].

**Definição 1.4.** Seja $X$ um campo de vetores em $\chi(M)$. A *divergência de* $X$, denotada por $divX$, é uma função diferenciável em $M$ tal que

$$(divX)(p) = traço(\xi \longrightarrow \nabla_\xi X),$$

onde $\xi$ varia em $T_pM$.

**Observação 1.2.** Segue diretamente das definições de derivada covariante e divergência, para $X$ e $Y$ em $\chi(M)$ e $f \in C^1(M)$, as igualdades:

*i)* $div(X + Y) = divX + divY$,

*ii)* $div(fX) = f(divX) + \langle \nabla f, X\rangle$.

**Definição 1.5.** Para qualquer função $f \in C^k$ em $M$, $k \geq 2$, definimos o *Laplaciano de* $f$, denotado por $\Delta f$, por

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Em razão das definições de gradiente e divergente temos, para $f, h \in C^k$ $(k \geq 2)$:

*i)* $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h$,

*ii)* $div(h(\nabla f)) = h(\Delta f) + \langle \nabla h, \nabla f\rangle$,

*iii)* $\Delta(fh) = h(\Delta f) + f(\Delta h) + 2\langle \nabla f, \nabla h\rangle$.

**Observação 1.3.** Para $M = \mathbb{R}^n$, $\Delta$ coincide com o Laplaciano usual, a saber, $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Do mesmo modo temos para o divergente e gradiente as respectivas fórmulas usuais conhecidas em $M = \mathbb{R}^n$: $divX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ e $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$. Para uma variedade Riemanniana $M$ qualquer, expressões sobre estes operadores em coordenadas locais podem ser encontradas em [7].

## 1.2 Fórmulas de Green

Enunciaremos nesta seção fórmulas que serão utilizadas na maioria das vezes durante todo este trabalho: as fórmulas de Green. Porém, convém primeiro definir uma teoria de integração para variedades Riemannianas. Assim começaremos com algumas definições.

**Definição 1.6.** Seja $U_\alpha \subset M$ uma família de abertos com $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha = M$. Dizemos que a família de abertos $U_\alpha$ é *localmente finita* se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança $V$ de $p$ tal que $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices. Se $f$ é uma função real em $M$, definimos o *suporte de* $f$, denotado por $suptf$, como o fecho do conjunto dos pontos onde $f$ é diferente de zero, ou seja, $suptf = \overline{\{x \in M; f(x) \neq 0\}}$.

**Definição 1.7.** Uma família $\{f_\alpha\}$ de funções diferenciáveis $f_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma partição diferenciável da unidade se:

*i)* Para todo $\alpha$, $f_\alpha \geq 0$ e $suptf_\alpha$ está contido em uma vizinhança coordenada $U_\alpha$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ de $M$;

*ii)* A família $\{U_\alpha\}$ é localmente finita;

*iii)* $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$.

Neste caso dizemos também que a partição $\{f_\alpha\}$ da unidade está subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$.

**Teorema 1.2.** *Uma variedade diferenciável $M$ possui partição diferenciável da unidade se e somente se toda componente conexa de $M$ é de Hausdorf e tem base enumerável.*

Para uma demonstração ver [5].

Tendo em mãos as definições acima, podemos então associar a uma métrica Riemanniana uma teoria de integração tal que:

*i*) a função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se, para todo sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em $M$, $f \circ \mathbf{x}^{-1}$ é mensurável sobre $\mathbf{x}(U)$;

*ii*) para toda cobertura $\{\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ de $M$ por sistemas de coordenadas com partição da unidade $\{f_\alpha\}$, a medida Riemanniana em $M$ é dada pela densidade

$$dv = \sum_\alpha f_\alpha \sqrt{g_\alpha}\, dx^1_\alpha \cdots dx^n_\alpha,$$

onde $dx^1_\alpha \cdots dx^n_\alpha$ é a densidade da medida de Lebesgue em $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $g_\alpha$ é o determinante da matriz $g^\alpha_{ij}$ dada por

$$g^\alpha_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^j_\alpha} \right\rangle.$$

Do modo como foi construída a teoria de integração acima em $M$, temos que a densidade em um domínio $U$ não depende do sistema de coordenadas $\mathbf{x}$. Deste modo temos

$$\int_{\mathbf{x}^{-1}(U)} f dx = \int_{\mathbf{x}(U)} f \circ \mathbf{x}^{-1} dv.$$

Dispondo agora de uma teoria de integração estamos em condições de enunciar o Teorema da Divergência e as fórmulas de Green. Suponhamos que $M$ possui fronteira $\partial M$ com métrica Riemanniana induzida mensurável e densidade da medida denotada por $dA$. Considere $\nu$ o campo de vetores unitário normal e exterior a $\partial M$.

**Teorema 1.3 (da Divergência I).** *Seja $X$ uma campo de vetores $C^1$ em $\overline{M}$ com suporte compacto em $\overline{M}$. Então*

$$\int_M (divX)dV = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dA. \tag{1.1}$$

**Teorema 1.4 (Fórmulas de Green I).** *Sejam $f \in C^1(\overline{M})$ tal que $h(\nabla f)$ possui suporte compacto em $\overline{M}$. Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f \rangle\}\, dV = \int_{\partial M} h(\nu f) dA. \tag{1.2}$$

*Se também tivermos $h \in C^2(\overline{M})$ com ambas $f, h$ com suporte compacto em $\overline{M}$, então*

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\}\, dV = \int_{\partial M} \{h(\nu f) - f(\nu h)\}\, dA. \tag{1.3}$$

Dos teoremas acima citados temos as seguintes versões mais simples para o Teorema da Divergência e para as Fórmulas de Green:

**Teorema 1.5 (da Divergência II).** *Seja $X$ um campo de vetores $C^1$ em $M$ com suporte compacto. Então*

$$\int_M (divX)dV = 0. \tag{1.4}$$

**Teorema 1.6 (Fórmulas de Green II).** *Sejam $h \in C^1$, $f \in C^2$ funções reais em $M$ tal que $h(\nabla f)$ possui suporte compacto em $M$. Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle\} \, dV = 0. \tag{1.5}$$

*Se também tivermos $h \in C^2$ com ambas $f, h$ com suporte compacto em $M$,então*

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} \, dV = 0. \tag{1.6}$$

## 1.3 Sobre autovalores do operador Laplaciano

Apresentamos nesta seção alguns resultados importantes sobre o problema do autovalor para o operador Laplaciano.

Para tal, iniciamos definindo por $L^2(M)$ o espaço das funções $f$ mensuráveis em $M$ tal que

$$\int_M |f|^2 dv < +\infty.$$

Sobre $L^2(M)$ temos um produto interno $(\cdot, \cdot) : L^2(M) \times L^2(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ e induzido por ele uma norma $||f||^2 : L^2(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, dados respectivamente por

$$(f, h) = \int_M fh \, dv,$$

e

$$\|f\|^2 = (f, f),$$

para $f, h \in L^2(M)$. Temos assim que com este produto interno, $L^2(M)$ é um espaço de Hilbert.

**Definição 1.8.** Definiremos o delta de Kronecker, $\delta_{ij}$ como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{se } i = j \\ 0\,, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

**Definição 1.9.** Seja $f \in L^2(M)$. Um conjunto de funções $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ é dito uma base ortonormal de $L^2(M)$ se:

*i)* $f$ pode ser escrita como $f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j$ onde $a_j = (f, u_j)$;

*ii)* $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$.

Existem problemas interessantes envolvendo autovalores, entretanto o foco deste trabalho está nos seguintes problemas:

*Problema Fechado*: Seja $M$ compacta e conexa. O problema consiste em encontrar todos os números reais $\lambda$ para o qual existe uma solução não trivial $\varphi \in C^2(M)$ tal que

$$\Delta\varphi = -\lambda\varphi. \tag{1.7}$$

*Problema de Dirichlet*: Seja $\partial M \neq \emptyset$, $\overline{M}$ compacta e conexa. Deseja-se encontrar todos os números reais $\lambda$ para o qual existe uma solução não trivial $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ de (1.7), tal que $\varphi = 0$ em $\partial M$.

Os números reais acima referidos são chamados de autovalores de $\Delta$, e o espaço vetorial de soluções de (1.7) para cada $\lambda$ é chamado de autoespaço. Os elementos de cada autoespaço são chamados de autofunções.

O próximo teorema nos fornece importantes informações a respeito do comportamento dos autovalores dos problemas acima citados, bem como o comportamento das autofunções correspondentes.

**Teorema 1.7.** *Para os problemas de autovalores acima, temos:*

*i) o conjunto de autovalores consiste em uma seqüência crescente de números reais*

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 < \cdots \to \infty;$$

*ii) cada autoespaço associado tem dimensão finita.*

Apresentamos agora um resultado que é utilizado como principal ferramenta para a prova de todos os resultados dos próximos capítulos.

**Teorema 1.8 (Desigualdade de Rayleigh).** *Considere o problema de Dirichlet (ou Fechado) e seus autovalores*

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty,$$

*onde escrevemos desta forma para dizer que cada autovalor é repetido o número de vezes igual a sua multiplicidade. Se* $f \neq 0$ *está no completamento de* $C^\infty$ *com* $f\mid_{\partial\Omega} = 0$ *(para o caso do problema de Dirichlet), ou* $\int_M f dx = 0$ *(para o caso do problema fechado), então*

$$\lambda_1 \leq \frac{\displaystyle\int_M |\nabla f|^2 \, dx}{\displaystyle\int_M f^2 \, dx}, \tag{1.8}$$

*onde a igualdade ocorre se e somente se* $f$ *é uma autofunção de* $\lambda_1$*. Além disso, se* $\{u_1, u_2, \cdots\}$ *é uma base ortonormal de* $L^2(M)$ *tais que* $u_j$ *é uma autofunção de* $\lambda_j$*, para cada* $j = 1, 2, \cdots$*, e* $f$ *é uma função* $C^\infty$*, com* $f \neq 0$ *e* $f\mid_{\partial\Omega} = 0$ *tal que*

$$(f, u_1) = (f, u_2) = \cdots = (f, u_k) = 0, \tag{1.9}$$

*então*

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\displaystyle\int_M |\nabla f|^2 \, dx}{\displaystyle\int_M f^2 \, dx},$$

*onde a igualdade ocorre se e somente se* $f$ *é autofunção de* $\lambda_{k+1}$*.*

**Demonstração**: Definamos $\alpha_j = (f, u_j)$ para $f$ e $u_j$ nas hipóteses do teorema acima. Assim para $k > 1$, (1.9) é equivalente a $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Então para todo $k = 1, 2, \ldots$ e $r = k+1, k+2, \ldots$, temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_M \langle \nabla(f - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j u_j), \nabla(f - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j u_j) \rangle \, dx \\
&= \int_M \langle \nabla f, \nabla f \rangle \, dx - 2 \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j \int_M \langle \nabla f, \nabla u_j \rangle \, dx + \sum_{l,j=k+1}^{r} \alpha_j \alpha_l \int_M \langle \nabla u_j, \nabla u_l \rangle \, dx \\
&= \int_M |\nabla f|^2 \, dx + 2 \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j (f, \Delta u_j) - \sum_{l,j=k+1}^{r} \alpha_j \alpha_l (u_j, \Delta u_l) \\
&= \int_M |\nabla f|^2 \, dx - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j^2 \lambda_j.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, como $\int_M |\nabla f|^2 \, dx < +\infty$, temos $\sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^2 \lambda_j < +\infty$. Portanto

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla f|^2 \, dx &\geq \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^2 \lambda_j \\
&\geq \lambda_{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^2 \\
&= \lambda_{k+1} \int_M f^2 \, dx,
\end{aligned}
$$

concluindo a demonstração da Desigualdade de Rayleigh. ♦

## 1.4 Imersões Isométricas

Nesta seção introduzimos brevemente alguns conceitos básicos como imersões e subvariedades mínimas tendo como alvo o Capítulo 4 deste trabalho. Para nós, $M$ e $N$ denotarão variedades Riemannianas de dimensão $m$ e $n$ ($m \leq n$, $n = m + k$), respectivamente.

**Definição 1.10.** Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se além disso, $\varphi$ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem topologia induzida por $N$, diz-se que $\varphi$ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que $M$ é subvariedade de $N$.

Uma conseqüência da definição é apresentada pela seguinte proposição:

**Proposição 1.1.** *Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ uma imersão. Para todo ponto $p \in M$, existe uma* *vizinhança* $V \subset M$ *de* $p$ *tal que a restrição* $\varphi_{|_V} : V \longrightarrow N$ *é um mergulho.*

A demonstração deste resultado é uma conseqüência do Teorema da Função Inversa e pode ser encontrada em [6].

Temos então que se $f : M \longrightarrow N$ é uma imersão, existe para cada $p \in M$, uma vizinhança $V \subset M$ de $p$ tal que $f(V) \subset N$ é uma subvariedade de $N$. Então existe uma vizinhança $\overline{U} \subset N$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$, tais que $\varphi$ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Simplificamos então a notação identificando $U$ com $f(U)$ com a intenção de extender um campo local em $M$ (ou seja, definido em $U$) a um campo local em $N$ (isto é, definido em $\overline{U}$).

Denotando por $T_pM^\perp$ o complemento ortogonal de $T_pM$ para cada $p \in M$, o produto interno em $T_pN$ decompõe $T_pN$ na soma direta

$$T_pN = T_pM \oplus T_pM^\perp.$$

Se $\xi \in T_pN$, podemos assim escrever

$$\xi = \xi^T + \xi^N,$$

onde $\xi^T \in T_pM$ e $\xi^N \in T_pM^\perp$. Denominamos $\xi^T$ a *componente tangencial* de $\xi$ e $\xi^N$ a *componente normal* de $\xi$.
Sejam agora $\nabla$ e$\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita com respeito às métricas Riemannianas em $M$ e $N$, respectivamente. Para todo $p \in M$, $\xi \in T_pM$ e $Y$ um campo de vetores tangentes em $N$ definido na vizinhança de $p$, definimos

$$\nabla_\xi Y = (\overline{\nabla}_\xi Y)^T.$$

**Definição 1.11.** Sejam $\xi$ e $\eta$ em $T_pM$, e $Y$ um campo de vetores tangentes que extende $\eta$ em uma vizinhança de $p$. Considere a aplicação $B : T_pM \times T_pM \longrightarrow (T_pM)^\perp$ definida por

$$B(\xi, \eta) = (\overline{\nabla}_\xi Y)^N.$$

Temos assim que $B$ é uma forma bilinear simétrica, que é chamada a *segunda forma fundamental* de $M$ em $N$.

Tome agora $\eta \in (T_pM)^\perp$. Temos então que a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(\xi, \zeta) = \langle B(\xi, \zeta), \eta \rangle$$

para $\xi, \zeta \in T_pM$, define uma forma bilinear simétrica. Observe que a esta aplicação bilinear simétrica fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ dada por

$$\langle S_\eta(\xi), \zeta \rangle = H_\eta(\xi, \zeta) = \langle B(\xi, \zeta), \eta \rangle .$$

Com base nestas informações temos uma expressão em $p$ da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante (cf.[6], pg. 142), em outras palavras, temos

$$S_\eta(\xi) = -(\overline{\nabla}_\xi N)^\perp,$$

para $\xi \in T_pM$ e $N$ uma extensão local de $\eta \in (T_pM)^\perp$ normal a $M$.

**Definição 1.12.** Uma imersão $f : M \longrightarrow N$ é dita ser *mínima* se para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$ tem-se traço $S_\eta = 0$.

Tomando $E_1, \ldots, E_k$ um referencial ortonormal de vetores em $\chi(U)$ onde $U$ é uma vizinhança em $p$ na qual $f$ é um mergulho, temos

$$\begin{aligned} B(\xi, \zeta) &= \sum_{i=1}^{k} H_{E_i}(\xi, \zeta) E_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \langle B(\xi, \zeta), E_i \rangle E_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \langle S_{E_i}(\xi), \zeta \rangle E_i. \end{aligned}$$

Deste modo o vetor normal definido por

$$H = \sum_{i=1}^{k} (\text{traço} S_{E_i}) E_i,$$

não depende do referencial $E_i$ escolhido. Este vetor $H$ é chamado o *vetor curvatura média* de $f$. Segue assim que $f$ é mínima se e somente se $H(p) = 0$, para todo $p \in M$.

A razão da palavra mínima neste contexto é que tais imersões minimizam o volume da métrica induzida do mesmo modo que as geodésicas minimizam o comprimento de arco. Mais precisamente, se $M \subset N$ é uma subvariedade mínima e $D \subset M$ um domínio suficientemente pequeno de $M$ com bordo $\partial D$, então o volume de qualquer de $D$ na métrica induzida é menor ou igual ao volume de qualquer outra subvariedade de $N$ com o mesmo bordo.

# Capítulo 2

# As desigualdades de Hile-Protter,Yang e Payne-Pólya-Weinberger

Neste capítulo tratamos as desigualdades de HP, Yang e PPW para o problema do operador Laplaciano, restringindo-nos a provar somente as duas desigualdades inicialmente citadas por motivos que serão justificados ao longo do capítulo, a saber na seção (2.2) que trata as implicações a respeito de tais desigualdades.

Este é um dos capítulos mais importantes. É neste que estabelecemos o método para a prova das desigualdades, método que possui como principal referência o uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz e que será utilizado durante todo este trabalho.

## 2.1 A desigualdade de Hile-Protter (HP)

**Teorema 2.1 (Desigualdade de Hile-Protter (HP)).** *Seja $\lambda_k$ o k-ésimo autovalor para o problema de Dirichlet (1) em um domínio conexo limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então vale:*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{nk}{4}$$

*para $k = 1, 2, \ldots$.*

**Demonstração**: Seja $\varphi \neq 0$ com $\varphi\,|_{\partial\Omega}$ uma função não trivial ortogonal a $u_i$, $i =$

$1, \ldots, k$ (ortogonal com respeito ao produto interno $L^2(\Omega)$ definido no Capítulo 1) tal que $\int_\Omega u_i u_j dx = \delta_{ij}$. Pela Desigualdade de Rayleigh

$$\lambda_k \leq \frac{\int_\Omega \varphi(-\Delta\varphi)dx}{\int_\Omega \varphi^2 dx}. \tag{2.1}$$

Através de escolhas adequadas de $\varphi$, construída através de $u_1, \ldots, u_k$, podemos encontrar limitações para $\lambda_{k+1}$ em termos dos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Em particular tomamos

$$\varphi = \varphi_i = xu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}u_j, \qquad 1 \leq i \leq k,$$

onde $x$ representa qualquer coordenada cartesiana $x_l$, $l = 1, \ldots, n$.
Assim os $a_{ij}$'s são as componentes de $xu_i$ ao longo de $u_j$, ou seja,

$$a_{ij} = \int_\Omega xu_iu_jdx.$$

Como $\varphi_i \perp u_j$ para todo $i, j = 1, \ldots, k$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_i(-\Delta\varphi_i)dx &= \int_\Omega \varphi_i(\lambda_i xu_i - 2u_{i_x} - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}u_ju_i)dx \\ &= \lambda_i \int_\Omega xu_i\varphi_i dx - 2\int_\Omega u_{i_x}\varphi_i dx, \end{aligned}$$

donde

$$\int_\Omega \varphi_i(-\Delta\varphi_i)dx = \lambda_i \int_\Omega {\varphi_i}^2 dx - 2\int_\Omega u_{i_x}\varphi_i dx, \tag{2.2}$$

onde denotamos $u_{i_x} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x}$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_i^2 dx &= \int_\Omega xu_i\varphi_i dx - \int_\Omega \sum_{j=1}^{k} a_{ij}u_j\varphi_i dx \\ &= \int_\Omega xu_i\varphi_i dx, \end{aligned}$$

obtendo

$$\int_\Omega \varphi_i^2 dx = \int_\Omega x^2u_i^2 dx - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2 dx. \tag{2.3}$$

Por (2.1) e (2.2) podemos escrever

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}\int_\Omega \varphi_i^2 dx &\leq \int_\Omega \varphi_i(-\Delta\varphi_i)dx\\ &= \lambda_i\int_\Omega \varphi_i^2 dx - \int_\Omega u_{i_x}\Delta\varphi_i dx,\end{aligned}$$

e então

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\int_\Omega \varphi_i^2 dx \leq -2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx. \tag{2.4}$$

Como $\lambda_{k+1} \geq \lambda_i$ para todo $k$, em particular concluímos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx\\ &= -2\int_\Omega (xu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}u_j)u_{i_x} dx\\ &= -2\int_\Omega xu_iu_{i_x}dx + 2\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\int_\Omega u_ju_{i_x}dx\\ &= -\int_\Omega x(u_i^2)_x dx + 2\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\int_\Omega u_ju_{i_x}dx.\end{aligned}$$

Denotando $b_{ij} = \displaystyle\int_\Omega u_{i_x}u_j dx$, a equação acima assume a forma

$$-2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx = \int_\Omega u_i^2 dx + 2\sum_{j=1}^{k} a_{ij}b_{ij}. \tag{2.5}$$

Agora que encontramos uma expressão para a integral do lado esquerdo acima, procuramos para a mesma uma espressão que seja conhecida para nós. Para tanto, notemos que por Cauchy-Schwarz:

$$\left(-2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx\right)^2 \leq 4\left(\int_\Omega {\varphi_i}^2 dx\right)\left(\int_\Omega u_{i_x}^2 dx\right). \tag{2.6}$$

Assim

$$\frac{-2\displaystyle\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_i^2 dx} \leq \frac{4\displaystyle\int_\Omega u_{i_x}^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx.} \tag{2.7}$$

Aqui entendemos que caso $\varphi_i = 0$ ambos os membros são interpretados como infinito, e que se $\displaystyle\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx = 0$, interpretamos o lado direito da desigualdade acima como sendo infinito. Deste modo, por (2.4),(2.5) e (2.7), temos

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} - \lambda_i &\leq \frac{4\displaystyle\int_\Omega u_{i_x}^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx} \\ &= \frac{\displaystyle\int_\Omega u_{i_x}^2 dx}{1 + 2\displaystyle\sum_{j=1}^k a_{ij} b_{ij}}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Procuramos agora uma expressão para os $b_{ij}$'s em função dos $a_{ij}$'s. Assim

$$\begin{aligned}2b_{ij} &= 2\int_\Omega u_{i_x} u_j dx \\ &= \int_\Omega (\Delta(xu_i) - x\Delta u_i) u_j dx \\ &= -\int_\Omega xu_i(-\Delta u_j) dx - \int_\Omega xu_j \Delta u_i dx \\ &= -\lambda_j \int_\Omega xu_i u_j dx + \lambda_i \int_\Omega u_i u_j x dx \\ &= (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij},\end{aligned}$$

e então (2.8) fica

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\left[1 + \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 (\lambda_i - \lambda_j)\right] \leq 4\int_\Omega u_{i_x}^2 dx. \tag{2.9}$$

Introduzimos agora o índice $l$ fazendo as seguintes substituições: $x \to x^{(l)}$; $\varphi_i \to \varphi_i^{(l)}$; $a_{ij} \to a_{ij}^{(l)}$; $b_{ij} \to b_{ij}^{(l)}$. Em particular, (2.9) torna-se

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\left[1 + \sum_{j=1}^k (a_{ij}^{(l)})^2 (\lambda_i - \lambda_j)\right] \leq 4\int_\Omega (u_{i_x}^{(l)})^2 dx. \tag{2.10}$$

Desde que $\int_\Omega u_i dx = 1$, a Desigualdade de Rayleight nos diz que $\lambda_i = \int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx$. Somando (2.10) em $l$ de 1 a $n$ obtemos

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\left[n + \sum_{j=1}^k A_{ij} (\lambda_i - \lambda_j)\right] \leq 4\int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx = 4\lambda_i, \tag{2.11}$$

onde denotamos

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^{k} (a_{ij}^{(l)})^2 = A_{ji} \geq 0.$$

Finalmente dividimos a equação (2.11) por $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)$ e somamos com respeito ao índice $i$, onde $i = 1, \ldots, k$. Com isto, observamos que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} A_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$, e a desigualdade resultante será

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_i} \geq \frac{nk}{4}. \tag{2.12}$$

Finalizamos assim a prova da Desigualdade de Hile-Protter. ♦

## 2.2 Desigualdade de Yang

A prova da desigualdade de Yang utiliza basicamente a mesma estratégia da prova da Desigualdade de Hile-Protter. Veremos que a diferença está no modo de como escrevemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Uma vez feita esta modificação, resta-nos descobrir uma maneira de eliminarmos os termos indesejáveis da inequação resultante utilizando do que já sabemos pela seção anterior.

**Teorema 2.2 (Desigualdade de Yang).** *Seja $\lambda_k$ o k-ésimo autovalor para o problema de Dirichlet em um domínio conexo limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então vale:*

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left( \lambda_{k+1} - \lambda_i \left( 1 + \frac{4}{n} \right) \right) \leq 0$$

*para $k = 1, 2, \ldots$.*

**Demonstração**: Tomando $\varphi$, $x$ e $u_j$ como na demonstração do Teorema 2.1, isto é,

$$\varphi = \varphi_i = x u_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j,$$

onde $i \leq i, j \leq k$ com $\varphi \perp u_j$ para todo $j$ ainda sobre o produto interno em $L^2(\Omega)$, observamos que a integral $\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx$ fica inafetada caso subtrairmos de $u_{i_x}$ suas componentes ao longo das $u_j$'s, para todo $i, j = 1, \ldots, k$.

Assim escrevemos agora (2.6) de outra forma:

$$\begin{aligned}
\left(-2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx\right)^2 &= \left(-2\int_\Omega \varphi_i \left(u_{i_x} - \sum_{j=1}^k b_{ij}u_j\right) dx\right)^2 \\
&\leq 4\left(\int_\Omega \varphi_i^2 dx\right)\left(\int_\Omega \left(u_{i_x} - \sum_{j=1}^k b_{ij}u_j\right)^2 dx\right) \\
&= 4\left(\int_\Omega \varphi_i^2 dx\right)\left(\int_\Omega \left(u_{i_x}^2 - 2\sum_{j=1}^k b_{ij}u_j u_{i_x} + \sum_{j=1}^k b_{ij}^2 u_j^2\right) dx\right) \\
&= 4\left(\int_\Omega \varphi_i^2 dx\right)\left(\int_\Omega u_{i_x}^2 dx - \sum_{j=1}^k b_{ij}^2\right) \\
&= 4\left(\int_\Omega \varphi_i^2 dx\right)\left(\int_\Omega u_{i_x}^2 dx - \sum_{j=1}^k (\lambda_i - \lambda_j)^2 a_{ij}^2\right).
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Rayleight podemos então escrever

$$\frac{-2\displaystyle\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_i^2 dx} \leq \frac{4\displaystyle\int_\Omega u_{i_x}^2 dx - \sum_{j=1}^k (\lambda_i - \lambda_j)^2 a_{ij}^2}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx}. \tag{2.13}$$

Logo (2.13) fica

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\left[1 + \sum_{j=1}^k a_{ij}^2(\lambda_i - \lambda_j)\right] \leq 4\int_\Omega u_{i_x}^2 dx - \sum_{j=1}^k (\lambda_i - \lambda_j)^2 a_{ij}^2,$$

ou ainda

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i) + \sum_{j=1}^k (\lambda_{k+1} - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)a_{ij}^2 \leq 4\int_\Omega u_{i_x}^2 dx. \tag{2.14}$$

Adotando a mesma idéia da seção (2.1), atribuímos o índice $l$ à coordenada $x$, isto é, (2.14) escreve-se

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_i)+\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)(a_{ij}^{(l)})^2 \leq 4\int_\Omega u_{i_{x_l}}^2 dx.$$

Somamos agora em $l$ com $l=1,\ldots,n$, e em seguida multiplicamos ambos os membros da desigualdade obtida por $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)$. Desta forma obtemos

$$n(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2+\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(\lambda_{k+1}-\lambda_j)(\lambda_i-\lambda_j)A_{ij} \leq 4\lambda_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i),$$

onde $A_{ij}$ é como definido na seção (2.1). Finalmente somamos em $i$ de 1 até $k$, observando que os termos que acompanham os $A_{ij}$'s se anulam no somatório em $i$. Em outras palvras,

$$n\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq 4\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i),$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\lambda_{k+1}-\lambda_i\left(1+\frac{4}{n}\right)\right) \leq 0$$

para $k=1,2,\ldots$, que é a desigualdade desejada. ♦

## 2.3 Implicações entre as desigualdades de Yang, HP e PPW

Provamos nesta seção como a segunda desigualdade de Yang (e portanto a primeira desigualdade) implica na desigualdade de HP, e porque esta última implica na desigualdade de PPW.

Para isto definamos a seguinte função:

$$F(s)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{s-\lambda_i},$$

a qual não está definida para todo $s = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Observe que trata-se de uma função estritamente decrescente entre cada $\lambda_i$ e em particular, estritamente decrescente para $s > \lambda_k$, com valores que variam de $+\infty$ a 0. Assim existe um único valor $\sigma > \lambda_k$ satisfazendo $F(\sigma) = \dfrac{nk}{4}$. Como $F$ é decrescente,

$$F(\sigma) \leq F(\lambda_{k+1}).$$

Portanto podemos escrever a desigualdade de HP da seguinte forma

$$\sigma \geq \lambda_{k+1}.$$

Defina agora a função

$$f(x) = \frac{x}{s-x},$$

para $s > x$ com $s$ positivo.

É fácil ver que $f''(x) = \dfrac{2s}{(s-x)^2}$, mostrando que f é estritamente convexa para $x \in (-\infty, s)$. Então, para $s \geq \lambda_k$ temos

$$\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) \\
&\geq kf\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right) \\
&= k\frac{\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{s - \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\lambda_i},
\end{aligned}$$

onde interpretamos $F(s)$ como infinito se $s = \lambda_k$.

Fazendo agora

$$s = \left(1 + \frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i,$$

temos que

$$F\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right) \geq \frac{nk}{4}.$$

Portanto concluímos que

$$\lambda_{k+1} \leq \left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \leq \sigma,$$

o que prova a segunda desigualdade de Yang ser mais forte do que a desigualdade de Hile-Protter, ou ainda, que ambas as desigualdades de Yang são melhores do que a de Hile-Protter.

**Observação 2.1.** A desigualdade de HP

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\lambda_{k+1}-\lambda_i} \geq \frac{nk}{4}.$$

para $k = 1, 2, \ldots$, é claramete mais forte do que a de PPW. Para tanto, como dito na introdução, basta substituir $\lambda_i$ na desigualdade de HP por $\lambda_k$.

Assim temos as seguintes implicações:

$$Yang1 \Rightarrow Yang2 \Rightarrow HP \Rightarrow PPW,$$

para cada $k = 1, 2, \ldots$.

As implicações acima nos levam então a procurar limitações para autovalores através do método usado para provar a primeira desigualdade de Yang. Por esse motivo, as desigualdades que provaremos daqui em diante serão análogos da primeira (ou da segunda) desigualdade de Yang.

# Capítulo 3

# Extensões para autovalores do operador de Schrödinger

Estamos agora interessados em estender alguns resultados das seções anteriores. Para isto consideremos o problema do autovalor

$$\begin{aligned} -\Delta u + V(x)u &= \lambda \rho(x) u \qquad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u\,|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aqui, $\Omega$ significa um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $V(x)$ representa um potencial não negativo, e $\rho(x)$ é uma função contínua positiva também chamada de função densidade (as funções $\rho$ e $V$ recebem estes nomes devido aos seus interesses voltados para a Física). O operador acima $-\Delta + V(x)$ é chamado de operador de Schrödinger. O objetivo deste capítulo é encontrar limitações para o autovalor do problema (3.1).

Porém, antes de iniciarmos pela procura por estas limitações, notemos que precisamos definir um produto interno diferente de todos os outros definidos anteriormente.

Denotaremos por $L^2(\Omega, \rho)$ como sendo o espaço das funções $f$ definidas em $\Omega$ para as quais

$$\int_\Omega \rho f^2 dx < +\infty.$$

Desta forma munimos o espaço $L^2(\Omega, \rho)$ de um produto interno

$$(\cdot, \cdot) : L^2(\Omega, \rho) \times L^2(\Omega, \rho) \longrightarrow \mathbb{R},$$

o qual induz uma norma $|| \cdot || : L^2(\Omega, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$, dados respectivamente por:

$$(f, g)_\rho = \int_\Omega \rho f g dx \tag{3.2}$$

e

$$||f||_\rho^2 = (f, f)_\rho, \tag{3.3}$$

onde f, h $\in L^2(\Omega, \rho)$.

**Afirmação 3.1.** Em particular, a desigualdade de Rayleight para o problema (3.1), onde denotamos $H = -\Delta + V(x)$, fica

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\displaystyle\int_\Omega f(Hf)dx}{\displaystyle\int_\Omega \rho f^2 dx}, \tag{3.4}$$

isto é, se $u_1, u_2, \ldots$ são autofunções ortonormais correspondendo a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, respectivamente, $f$ é uma função diferenciável em $\Omega$, com $f \neq 0$ e $f\ |_{\partial\Omega}$, satisfazendo

$$(f, u_1)_\rho = (f, u_2)_\rho = \cdots = (f, u_k)_\rho = 0,$$

temos a desigualdade (3.4). Para provarmos a afirmação utilizamos a mesma idéia da prova da a Desigualdade de Rayleigh feita no Capítulo 1. Definamos primeiramente

$$D[f, f] = \int_\Omega f(Hf)dx.$$

Desta forma, como

$$(f, u_1)_\rho = (f, u_2)_\rho = \cdots = (f, u_k)_\rho = 0,$$

desprezamos as $k$-ésimas componentes de $f$ em $L^2(\Omega, \rho)$ e escrevemos, para $r = k+1, k+$

$2, \ldots$:

$$\begin{aligned}
0 &\leq D\left[f - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j u_j, f - \sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j u_j\right] \\
&= D[f,f] - 2\sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j D[f,u_j] + \sum_{l,j=k+1}^{r} \alpha_j \alpha_l D[u_j,u_l] \\
&= D[f,f] - 2\sum_{j=k+1}^{r} \alpha_j \lambda_j (f,u_j)_\rho + \sum_{l,j=k+1}^{r} \alpha_j \alpha_l \lambda_l (u_j,u_l)_\rho \\
&= D[f,f] - \sum_{j=k+1}^{r} \lambda_j \alpha_j^2.
\end{aligned}$$

Como $D[f,f] < \infty$, temos $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 < \infty$. Assim

$$D[f,f] \geq \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j^2 \geq \lambda_{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^2 = \lambda_{k+1} ||f||_\rho^2.$$

Logo vale a afirmação.

Então para $x$ representando qualquer coordenada cartesiana $x_l$, $1 \leq l \leq n$, tomamos

$$\varphi = \varphi_i = xu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j$$

com

$$\int_\Omega u_i u_j \rho \, dx = \delta_{ij}$$

e assim,

$$a_{ij} = \int_\Omega \rho x u_i u_j \, dx, \qquad\qquad \mathit{para} \ \ 1 \leq i,j \leq k.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
H\varphi_i &= -x\Delta u_i - u_i \Delta x - 2u_{i_x} + V(x) x u_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j \lambda_j \rho \\
&= xHu_i - 2u_{i_x} - \sum_{j=1}^{k} a_{ij} u_j \lambda_j \rho,
\end{aligned}$$

que multiplicado por $\varphi_i$ e integrado em $\Omega$ fica

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_i(H\varphi_i)dx &= \lambda_i \int_\Omega \varphi_i x\rho u_i dx - 2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx\\ &= \lambda_i \int_\Omega \varphi_i^2 \rho dx - 2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx.\end{aligned}$$

Assim temos que

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\int_\Omega \varphi_i^2\rho dx \leq -2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx. \tag{3.5}$$

Porém, também temos

$$\begin{aligned}0 &\leq -2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx\\ &= -2\int_\Omega (xu_i - \sum_{j=1}^k a_{ij}u_j)u_{i_x} dx\\ &= -\int_\Omega x(u_i)^2{}_x dx + 2\int_\Omega \sum_{j=1}^k a_{ij}u_j u_{i_x} dx\\ &= \int_\Omega u_i^2 dx + 2\sum_{j=1}^k a_{ij}b_{ij},\end{aligned}$$

onde $b_{ij} = \displaystyle\int_\Omega u_{i_x} u_j dx = b_{ji}$.

**Afirmação 3.2.** Da maneira como $b_{ij}$ foi definido acima, temos $b_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)a_{ij}$.
Com efeito,

$$\begin{aligned}2b_{ij} &= 2\int_\Omega u_{i_x} u_j dx\\ &= \int_\Omega \left[\Delta(xu_i) - x\Delta u_i\right] u_j dx\\ &= -\int_\Omega xu_i(-\Delta u_j)dx + -\int_\Omega xu_j(-\Delta u_i)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_\Omega [xu_iHu_j - V(x)xu_iu_j]dx + \int_\Omega [xu_jHu_i - V(x)xu_iu_j]dx \\
&= -\int_\Omega xu_iHu_jdx + \int_\Omega xu_jHu_idx \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)\int_\Omega \rho xu_iu_jdx \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)a_{ij},
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Segue então que

$$-2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx = \int_\Omega u_i^2 dx + \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_i - \lambda_j).$$

Tentaremos agora utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz como feito no Capítulo 2 (Seção 2.2). Entretanto, para tentar facilitar os cálculos, introduzimos a função $\rho$ apropriadamente como segue:

$$-2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx = -2\int_\Omega \varphi_i \rho^{\frac{1}{2}}\left[\rho^{-\frac{1}{2}}u_{i_x} - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\rho^{\frac{1}{2}}u_j\right]dx.$$

Estamos agora em condições de aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz como segue:

$$\begin{aligned}
\left(-2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx\right)^2 &\leq 4\left(\int_\Omega \rho\varphi_i^2 dx\right)\left(\int_\Omega \left[\rho^{-\frac{1}{2}}u_{i_x} - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\rho^{\frac{1}{2}}u_j\right]^2 dx\right) \\
&= 4\left(\int_\Omega \rho\varphi_i^2 dx\right)\left(\int_\Omega \rho^{-1}u_{i_x}^2 dx + \sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2 - 2\sum_{j=1}^{k} b_{ij}u_{i_x}u_j\right).
\end{aligned}$$

Portanto temos

$$\left(-2\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx\right)^2 \leq 4\left(\int_\Omega \rho\varphi_i^2 dx\right)\left(\int_\Omega \rho^{-1}u_{i_x}^2 dx - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2\right). \tag{3.6}$$

Da equação (3.5) e (3.6) escrevemos então

$$\lambda_{k+1} - \lambda_i \leq \frac{-2\displaystyle\int_\Omega \varphi_i u_{i_x} dx}{\displaystyle\int_\Omega \rho\varphi_i^2 dx} dx \leq \frac{4\displaystyle\int_\Omega \rho^{-1} u_{i_x}^2 dx - \sum_{j=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_j)^2 a_{ij}^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega u_i^2 dx + \sum_{j=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}^2},$$

ou ainda,

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_\Omega u_i^2 dx + \sum_{j=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j) a_{ij}^2 \leq 4 \int_\Omega \rho^{-1} u_{i_x}^2 dx. \qquad (3.7)$$

Como $x$ representa qualquer função coordenada em $\mathbb{R}^n$, como feito anteriormente, somamos (3.7) em $l$, $1 \leq l \leq n$, obtendo assim

$$n(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_\Omega u_i^2 dx + \sum_{j=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j) A_{ij} \leq 4 \int_\Omega \rho^{-1} |\nabla u_i|^2 dx, \qquad (3.8)$$

com $A_{ij} = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} (a_{ij}^{(l)})^2 = A_{ji} \geq 0$ e $a_{ij}^{(l)} = \displaystyle\int_\Omega x_l \rho u_i u_j dx$.

Multiplicando a equação (3.8) por $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)$ e em seguida somando a desigualdade resultante em $i$ com $1 \leq i \leq k$, observamos que o termo do lado esquerdo envolvendo o somatório será igual a zero. Em outras palavras, a desigualdade resultante será

$$n \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_\Omega u_i^2 dx \leq 4 \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \int_\Omega \rho^{-1} |\nabla u_i|^2 dx. \qquad (3.9)$$

A tarefa agora é tentar solucionar o problema da falta da função $\rho$ no integrando do lado esquerdo da inequação, asim como o problema do aparecimento da função $\rho^{-1}$ no integrando do lado direito da inequação (queremos que apareça algo como o produto interno definido em (3.2)).

Remediamos esta situação fazendo $\rho_{max} = \displaystyle\max_{x \in \overline{\Omega}} \rho(x)$ e $\rho_{min} = \displaystyle\min_{x \in \overline{\Omega}} \rho(x)$. Desta forma podemos escrever (3.9):

$$n \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \int_\Omega \frac{\rho}{\rho_{max}} u_i^2 dx \leq 4 \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \rho_{min}^{-1} \int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx.$$

Porém, como $V(x) \geq 0$ e $\displaystyle\int_\Omega \rho u_i^2 = 1dx$, temos $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx \leq \lambda_i$. Segue assim a desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\left[\lambda_{k+1} - \left(1 + \frac{4}{n}\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}}\right)\lambda_i\right] \leq 0, \tag{3.10}$$

que é o análogo da desigualdade de Yang para este caso. Em outras palavras, temos o

**Teorema 3.1.** *Considere o probema do autovalor (3.1) onde $\Omega$ é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $V$ é um potencial não negativo em $L^\infty(\Omega)$, e $\rho$ é uma função peso a qual é contínua e positiva em $\overline{\Omega}$. Então para cada $k = 1, 2, ...$, os autovalores satisfazem a desigualdade (3.10).*

**Observação 3.1.** De (3.10) temos:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} \leq & \frac{1}{k}\left(1 + \frac{2}{n}\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}}\right)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i + \\ + & \left[\frac{4}{n^2}\frac{\rho_{max}^2}{\rho_{min}^2}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2 - \left(1 + \frac{4}{n}\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Assim, como feito no Capítulo 2, podemos deduzir o análogo para a segunda desigualdade de Yang:

$$\lambda_{k+1} \leq \left(1 + \frac{4}{n}\frac{\rho_{max}}{\rho_{min}}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.$$

# Capítulo 4

# Autovalores do Operador Laplaciano em subvariedades da esfera

Estamos agora interessados em utilizar os métodos usados anteriormente para obter limitações para o autovalor $\lambda$ do o problema de Laplace $\Delta u = -\lambda u$ em uma variedade subvariedade Riemanniana $M$ contida em uma esfera unitária. Agora $u$ é uma função em $M$ tal que $M$ é um domínio em $\mathbb{S}^n$ com $u$ satisfazendo o problema de Dirichlet, ou ainda, $M$ é uma hipersuperfície mínima compacta em $\mathbb{S}^{n+1}$ (fatos a mais sobre autovalores para estes tipos de problemas podem ser encontrados em [7] e [15]).
Começaremos enunciando uma proposição a qual não demonstraremos e que nos será útil para a prova do Teorema 4.1.

**Proposição 4.1.** *Se $x_i$ com $1 \leq i \leq n+1$ representam as $\mathbb{R}^{n+1}$-funções coordenadas de $\mathbb{S}^n$, temos que estas funções coordenadas formam o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = n$, ou seja,*

$$-\Delta x_i = n x_i.$$

Considere agora $M$ um domínio em $\mathbb{S}^n$ com condições de fronteira de Dirichlet, ou seja, o problema do Laplaciano

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda u & \text{em } M, \\ u\,|_{\partial M} & = & 0. & \end{array} \tag{4.1}$$

Observe que neste caso 0 não é um autovalor do problema acima (a menos que $M = \mathbb{S}^n$), o que nos leva ao espectro discreto real

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \to \infty.$$

Temos portanto o seguinte teorema:

**Teorema 4.1.** *Considere o problema do autovalor (4.1). Se $\lambda_i$ representa o i-ésimo autovalor do problema acima, então*

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\left(\lambda_{k+1} - \left(1 + \frac{4}{n}\right)\lambda_i - n\right) \leq 0,$$

*para $k = 1, 2, \ldots$.*

**Demonstração**: Se $x_1, \ldots, x_{n+1}$ são as funções coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}$, então definimos

$$\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{l=1}^{n+1} {x_l}^2 = 1\right\}.$$

Logo, se $\varphi \neq 0$ é uma função diferenciável em $M$ satisfazendo (4.1), temos que vale a desigualdade de Rayleight. Tomamos assim

$$\varphi = \varphi_i = xu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}u_j$$

com $\varphi_i \perp u_j$ (com relação ao produto interno$(f,g) = \int_M fgdx$) para todo $i, j = 1, \ldots, k$, buscando limitações para o (k+1)-ésimo autovalor. Pela Proposição 4.1:

$$\Delta x_l = -nx_l, \quad para\ \ l = 1, \ldots, n+1. \tag{4.2}$$

Considere então uma função diferenciável $\varphi \neq 0$ em $M$. Pela desigualdade de Rayleight temos que

$$\lambda_k \leq \frac{\displaystyle\int_M \varphi(-\Delta\varphi)dx}{\displaystyle\int_M \varphi^2 dx}. \tag{4.3}$$

para $\varphi$ ortogonal às autofunções $u_1, \cdots, u_k$ com autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, respectivamente (com relação ao produto interno em $L^2(\Omega)$). Assim, se $x$ representa qualquer função coordenada padrão de $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathbb{S}^n$, para

$$\varphi = \varphi_i = xu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}u_j,$$

teremos $a_{ij} = \int_M xu_iu_jdx$, e ainda

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi_i &= -\Delta(xu_i) - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(-\Delta u_j) \\ &= \lambda_i u_i x - 2\nabla u_i \cdot \nabla x + nxu_i - \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\lambda_j u_j. \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde o símbolo $\cdot$ representa o produto interno $\langle\ ,\rangle$, e $\nabla$ representa o operador gradiente. Então por (4.3) e (4.4) temos

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}\int_M \varphi_i^2 dx &\leq \int_M \varphi_i(-\Delta\varphi_i)dx \\ &= \lambda_i \int_M \varphi_i^2 dx - \int_M \varphi_i(2\nabla u_i \cdot \nabla x - nxu_i)dx, \end{aligned}$$

ou ainda

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\int_M \varphi_i^2 dx \leq -\int_M \varphi_i(2\nabla u_i \cdot \nabla x - nxu_i)dx. \tag{4.5}$$

Desde que $\varphi_i \perp u_j$, para obtermos a desigualdade de Yang subtraimos $2\sum_{j=1}^{k} b_{ij}u_j$ da integral do lado direito de (4.5)

$$-\int_M \varphi_i(2\nabla u_i \cdot \nabla x - nx)dx = -\int_M \varphi_i(2\nabla u_i \cdot \nabla x - nxu_i - 2\sum_{j=1}^{k} b_{ij}u_j)dx := w_i.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$w_i^2 \leq 4\left(\int_M \varphi_i^2 dx\right)\int_M \left(\nabla u_i \cdot \nabla x - \frac{nxu_i}{2}\Delta x - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}u_j\right)^2 dx,$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
(\lambda_{k+1}-\lambda_i) &\leq \frac{w_i}{\displaystyle\int_M \varphi_i^2 dx} \\
&\leq \frac{4\displaystyle\int_M \left(\nabla u_i\cdot\nabla x - \frac{nxu_i}{2} - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}u_j\right)^2 dx}{w_i} \\
&= \frac{4\sigma_i}{w_i},
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

onde

$$
\sigma_i = \int_M \left(\nabla u_i\cdot\nabla x - \frac{nxu_i}{2} - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}u_j\right)^2 dx.
$$

Entretanto, para continuarmos nossos cálculos precisamos também da

**Afirmação 4.1.** Temos que vale: $2b_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\lambda_j a_{ij} &= \int_M x\lambda_j u_i u_j dx \\
&= \int_M x u_i \Delta u_j \, dx \\
&= \int_M u_j \Delta(xu_i)\, dx \\
&= -\int_M (u_i\Delta x + x\Delta u_i + 2\nabla x\cdot\nabla u_i)u_j dx \\
&= -\int_M (-nxu_i + 2\nabla x\cdot\nabla u_i)u_j dx + \int_M \lambda_i x u_i u_j dx \\
&= -2b_{ij} + \lambda_i a_{ij},
\end{aligned}
$$

isto é, $2b_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)$, como afirmado.

Resta-nos agora encontrar expressões mais simples para $\sigma_i$ e $w_i$. Assim

$$
\begin{aligned}
\sigma_i &= \int_M \left(\nabla u_i\cdot\nabla x - \frac{nxu_i}{2} - \sum_{j=1}^{k} b_{ij}u_j\right)^2 \\
&= \int_M (\nabla u_i\cdot\nabla x)^2 + \frac{n^2}{4}\int_M u_i^2 x^2 dx + \sum_{j=1}^{k} b_{ij}^2 \\
&- \sum_{j=1}^{k} b_{ij}\int_M u_j(2\nabla u_i\cdot\nabla x + u_i\Delta x)dx + n\int_M u_i x(\nabla u_i\cdot\nabla x)dx \\
&= \int_M (\nabla u_i\cdot\nabla x)^2 dx + \frac{n^2}{4}\int_M u_i^2x^2dx - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^2(\lambda_i-\lambda_j)^2 + n\int_M \nabla u_i^2\cdot\nabla x^2 dx.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
w_i &= -\int_M \varphi_i(2\nabla u_i \cdot \nabla x + u_i \Delta x)dx \\
&= -\int_M (xu_i - \sum_{j=1}^{k} aiju_j)(2\nabla x \cdot \nabla u_i + u_i\Delta x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_M (\nabla x^2 \cdot \nabla u_i^2)dx + n\int_M x^2u_i^2dx + \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j).
\end{aligned}$$

Atribuímos agora o índice $l$ à função coordenada $x$ como feito na Seção 2.1. Em seguida substituímos $w_i$ e $\sigma_i$ na equação (4.6), somando em seguida a desigualdade obtida com respeito ao índice $l$, onde $l = 1, \ldots, n+1$.

**Afirmação 4.2.** Para todo ponto $p \in M$ temos $\sum_{l=1}^{n+1}(\nabla u_i \cdot \nabla x_l)^2 = |\nabla u_i|^2$.
Com efeito, para qualquer campo de vetor $Y \in T_pM$ temos $\langle Y, \nabla x_i\rangle = Y(x_i)$. Deta forma

$$\sum_{l=1}^{n+1}(\nabla u_i \cdot \nabla x_l)^2 = \sum_{l=1}^{n+1}(\nabla u_i(x_l))^2 = |(\nabla u_i(x_1), \ldots, \nabla u_i(x_{n+1}))|^2.$$

Mas para $p \in M$ e uma curva em $M$ $\gamma : I \longrightarrow M$ tal que $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_{n+1}(t))$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, temos que

$$\begin{aligned}
(v(x_1), \ldots, v(x_{n+1})) = v(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \frac{d}{dt}(x_1, \ldots, x_{n+1})(\gamma(t)) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(x_1(t), \ldots, x_{n+1}(t)) \mid_{t=0} \\
&= v.
\end{aligned}$$

Assim, $(\nabla u_i(x_1), \ldots, \nabla u_i(x_{n+1})) = \nabla u_i$ e daí segue que $|(\nabla u_i(x_1), \cdots, \nabla u_i(x_{n+1}))|^2 = |\nabla u_i|^2$.

Portanto, como

$$\sum_{l=1}^{n+1}(\nabla x_l \cdot \nabla u)^2 = |\nabla u_i|^2 \text{ e } \sum_{l=1}^{n+1} {x_l}^2 = 1,$$

obteremos

$$(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \leq \frac{4\lambda_i + n^2 - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_i - \lambda_j)^2 A_{ij}}{n + \sum_{j=1}^{k} A_{ij}(\lambda_i - \lambda_j),} \tag{4.7}$$

onde

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^{n+1}(a_{ij}^{(l)})^2 = A_{ji} \geq 0.$$

Então (4.7) fica

$$n(\lambda_{k+1} - \lambda_i) + \sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_j)A_{ij} \leq 4\lambda_i + n^2 - \sum_{j=1}^{k}(\lambda_i - \lambda_j)^2 A_{ij},$$

ou ainda,

$$n(\lambda_{k+1} - \lambda_i) + \sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)A_{ij} \leq 4\lambda_i + n^2. \tag{4.8}$$

Para finalizarmos a demonstração do teorema, multiplicamos (4.8) por $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)$ somando em seguida, com respeito ao índice $i$ de 1 a $k$. Basta então observar que

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) = 0.$$

Conseqüentemente teremos

$$n\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)(4\lambda_i + n^2),$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)\left(\lambda_{k+1} - \left(1 + \frac{4}{n}\right)\lambda_i - n\right) \leq 0, \tag{4.9}$$

para $k = 1, 2, ...$, completando a demonstração do teorema. ♦

**Observação 4.1.** Desenvolvendo o somatório da equação (4.9) podemos encontrar uma limitação para $\lambda_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} &\leq \left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\frac{n}{2}+\\ &+ \left\{\left(\frac{2}{kn}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\frac{n}{2}\right)^2-\left(1+\frac{4}{n}\right)\frac{1}{k^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^2-k\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

De (4.10) podemos também deduzir o análogo para a segunda desigualdade de Yang, basta aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz na expressão dentro dos colchetes, isto é,

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+n.$$

**Corolário 4.1.** *O i-ésimo autovalor para o problema (4.1) satisfaz*

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{4\lambda_i+n^2}{\lambda_{k+1}-\lambda_i} \geq nk.$$

**Demonstração**: Considere a desigualdade (4.8). Substitua $(\lambda_{k+1}-\lambda_j)$ por $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)$ e divida a equação resultante por $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)$. O resultado fica provado quando somamos a desigualdade resultante em $i$, $i = 1, ..., k$. ♦

**Proposição 4.2.** *Seja $M$ uma hipersuperfície mínima compacta na esfera unitária $n+1$ dimensional $\mathbb{S}^{n+1}$. Se $x_i$ com $1 \leq i \leq n+2$ representam as $\mathbb{R}^{n+2}$-funções coordenadas de $\mathbb{S}^{n+1}$, temos que estas funções coordenadas são autofunções associadas ao autovalor $\lambda = n$, ou seja,*

$$-\Delta x_i = nx_i.$$

De posse da proposição acima podemos enunciar o segundo e último resultado principal deste capítulo.

**Teorema 4.2.** *Seja $M$ uma hipersuperfície mínima compacta na esfera unitária $n+1$ dimensional $\mathbb{S}^{n+1}$. Se $\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots$, é o i-ésimo autovalor do problema $\Delta u = -\lambda u$, então*

$$\sum_{i=0}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\left(\lambda_{k+1}-\left(1+\frac{4}{n}\right)\lambda_i-n\right) \leq 0,$$

*para $k = 1, 2, \ldots$.*

**Demonstração**: Considerando $x_1, \ldots, x_{n+2}$ como sendo as funções coordenadas de $\mathbb{R}^{n+2}$, temos

$$\mathbb{S}^{n+1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}; \sum_{l=1}^{n+2} {x_l}^2 = 1 \right\}.$$

Temos também que vale, pela Proposição 4.2,

$$\Delta x_l = -n x_l, \quad para \;\; l = 1, \ldots, n+2. \tag{4.11}$$

Por outro lado, como o problema não apresenta condições de fronteira, concluímos que o espectro de autovalores apresenta o seguinte comportamento

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \to \infty.$$

Considere então uma função diferenciável $\varphi \neq 0$ em $M$ para $\varphi$ ortogonal às autofunções $u_1, \cdots, u_k$ com autovalores $\lambda_0, \cdots, \lambda_k$, respectivamente (com relação ao produto interno em $L^2(\Omega)$). Novamente, pensando em $x$ como uma função coordenada qualquer padrão de $\mathbb{R}^{n+2}$ em $\mathbb{S}^{n+1}$, para

$$\varphi = \varphi_i = x u_i - \sum_{j=0}^{k} a_{ij} u_j,$$

teremos

$$a_{ij} = \int_M x u_i u_j dx.$$

Procedendo de forma inteiramente análoga como feito no Teorema 4.1, obteremos o análogo de (4.8)

$$n(\lambda_{k+1} - \lambda_i) + \sum_{j=0}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j) A_{ij} \leq 4\lambda_i + n^2. \tag{4.12}$$

Multiplicamos (4.12) por $(\lambda_{k+1} - \lambda_i)$ somando em seguida, com respeito ao índice $i$ de 0 a $k$. Basta então observar que

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_{k+1} - \lambda_j) = 0,$$

e (4.12) resultará em

$$\sum_{i=0}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \left( \lambda_{k+1} - \left( 1 + \frac{4}{n} \right) \lambda_i - n \right) \leq 0, \tag{4.13}$$

finalizando a demonstração do teorema. ♦

**Observação 4.2.** É fácil ver que (4.13) é uma desigualdade quadrática, isto é,

$$(k+1)\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1}\sum_{i=0}^{k}\left(\left(2+\frac{4}{n}\right)+n\right)\lambda_i + \sum_{i=0}^{k}\lambda_i\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)+n\right) \leq 0.$$

Encontramos assim uma limitação para $\lambda_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} \leq\; & \frac{1}{k+1}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sum_{i=0}^{k}\lambda_i + \frac{n}{2} + \left\{\left(\frac{2}{n(k+1)}\sum_{i=0}^{k}\lambda_i + \frac{n}{2}\right)^2\right.\\ & \left. - \frac{1}{k+1^2}\left(1+\frac{4}{n}\right)\left[\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\right)^2 - (k+1)\sum_{i=0}^{k}\lambda_i^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Ainda de (4.14) podemos obter o análogo para a segunda desigualdade de Yang (por Cauchy-Schwarz $\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\right)^2 \leq (k+1)\sum_{i=0}^{k}\lambda_i^2$):

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{1}{k+1}\left(1+\frac{4}{n}\right)\sum_{i=0}^{k}\lambda_i + n.$$

**Corolário 4.2.** *Sob as hipóteses do Teorema 4.1, para $k = 1, 2, ...$, temos (nosso análogo para a desigualdade de HP):*

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{4\lambda_i + n^2}{\lambda_{k+1}-\lambda_i} \geq n(k+1).$$

**Demonstração**: Basta substituir na equação (4.12) acima $(\lambda_{k+1}-\lambda_j)$ por $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)$. ♦

**Corolário 4.3.** *Ainda sob as hipóteses do Teorema 4.1, para $k = 1, 2, ...$, temos (nosso análogo para a desigualdade de PPW):*

$$\lambda_{k+1} \leq \lambda_k + n + \frac{4}{n(k+1)}\sum_{i=0}^{k}\lambda_i$$

**Demonstração**: Substitua $\lambda_i$ do denominador da desigualdade do corolário acima por $\lambda_k$. ♦

# Referências Bibliográficas


[1] Asbaugh,M.S., *Universal eigenvalue bounds of Payne-Polya-Weinberguer, Hile-Protter and H.C.Yang*, Proc. Indian Acad. Sci.(Math.Sci.) **112**, 3-30 (2002).

[2] Asbaugh,M.S., Benguria,R.D., *More bounds on eigenvalue ratios for Dirichlet Laplacians in n dimensions*, SIAM J. Math. Anal. **24**, 1622-1651 (1993).

[3] Brands,J.J.A.M., *Bounds for the ratios of the first three membrane eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 256-258 (1964).

[4] Brezis,H., *Analyse Fonctionele: Theorie et applications*. Paris Masson (1987).

[5] Brickel,F.,Clark,R.S., *Diferentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold Co., London (1970) chap.3.

[6] Carmo,M.P., *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, sexta edição (2002).

[7] Chavel,I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, New York: Academic Press (1984).

[8] Cheng,Q-M., Yang,H.C., *Estimates on eigenvalues of Laplacian*, Math. Ann. **331**, 445-460 (2005).

[9] Cheng,Q-M., Yang,H.C., *Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian*, Math. Ann. **337**, 159-175 (2007).

[10] Hile,G.N., Protter,M.H., *Inequalities for eigenvalues of the Laplacian*, Indiana Univ. Math. J.**29**, 523-538 (1980).

[11] Leung,P.F., *On the consecutive eigenvalues of the Laplacian of a compact minimal submanifold in a sphere*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **50**, 409-416 (1991).

[12] Lima,E.L., *Curso de Análise vol. 2*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, sexta edição (2000).

[13] Payne,L., Polya,G. and Weinberger,H., *On the ratio of consecutive eigenvalues*, J. Math. Phys. **35**, 289-298 (1956).

[14] Takahashi,T., *Minimal imersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **18**, 380-385 (1996).

[15] Yang,H.C., *Estimates of the difference beween consecutive eigenvalues*, (1995) preprint (revision of International Centre for Theoretical Physics preprint IC/91/60, Trieste, Italy, April 1991).