Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Aplicação de Gauss de Superfícies Completas de Curvatura Média Constante em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$

por

Karise Gonçalves Oliveira

Brasília
2007

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

À vovó Geralda

Agradecimentos

Aos meus pais, Divina e Elisio, pelo incentivo e por estarem presentes em todos os momentos de minha vida.

Ao Jardel, pela compreensão e carinho.

Aos meus tios e primos, que ficaram felizes com mais esta meta atingida.

Aos meus amigos, em especial Vagner, Flávia, Luciene, Rangel, Evander e Eunice, pelo amparo, trocas de conhecimento e momentos de distração.

Ao meu orientador, professor Dr. Pedro Roitman, pela indispensável ajuda e pelos esclarecimentos.

Aos professores da banca, pelas correções e sugestões.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Apresentamos demonstrações dos seguintes teoremas, que são encontrados em Hoffman, Osserman e Schoen [11].

Seja S uma superfície completa de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$, tal que a sua imagem pela aplicação de Gauss está contida em um hemisfério fechado, então S é um cilindro circular reto ou um plano.

Seja S uma superfície completa em $\mathbb{R}^4$, com vetor curvatura média paralelo e não nulo, tal que a sua imagem por qualquer projeção da aplicação de Gauss generalizada está contida em um hemisfério fechado, então S é um cilindro circular reto em algum $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ou um produto de círculos.

Palavras-chave: Aplicação de Gauss generalizada, quádrica complexa $\mathbb{Q}_2$, superfícies de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Abstract

We proof the theorems below, that are found in Hoffman, Osserman and Schoen [11].

Let S be a complete surface of constant mean curvature in $\mathbb{R}^3$, such that the image under its Gauss map lies in a closed hemisphere, then S will be a right circular cylinder or a plane.

Let S be a complete surface in $\mathbb{R}^4$, whose mean curvature vector is parallel and non-zero, such that its image under any projection of the generalized Gauss map lies in a closed hemisphere, then S is a right circular cylinder in some $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$, or a product of circles.

Keywords: Generalized Gauss map, complex quadric $\mathbb{Q}_2$, surfaces of constant mean curvature in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$.

Sumário

Introdução

A aplicação de Gauss clássica foi introduzida por Gauss em seu artigo fundamental sobre a teoria de superfícies, [6]. O presente trabalho abrange questões relacionadas com a aplicação de Gauss clássica e a aplicação de Gauss generalizada dada pelo artigo de Hoffman e Osserman [10], tendo como objetivo a demonstração dos seguintes teoremas.

Teorema 4.0.2 *Seja S uma superfície completa orientada de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$. Se a imagem de S pela aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério aberto então S é um plano. Se a imagem pela aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério fechado então S é um plano ou um cilindro circular reto.*

Teorema 4.0.3 *Seja S uma superfície completa orientada em $\mathbb{R}^4$, cujo vetor curvatura média é paralelo e não nulo. Suponha que o Grassmanniano de 2-planos orientados em $\mathbb{R}^4$ é representado como um produto de esferas $S_1 \times S_2$. Então a imagem de S pela aplicação de Gauss generalizada é tal que nenhuma das projeções em S_1 ou S_2 situa-se em um hemisfério aberto. Se quaisquer das projeções situam-se em um hemisfério fechado, então S é um cilindro circular reto em algum $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ou um produto de círculos.*

Nos teoremas acima, o elo fundamental entre Geometria e Análise é o seguinte: as hipóteses sobre a curvatura média implicam que a aplicação de Gauss é harmônica. Tal fato, combinado com as hipóteses sobre a imagem da aplicação de Gauss e a análise do tipo conforme de S, nos permite exibir uma demonstração dos teoremas a partir de resultados clássicos sobre funções subharmônicas e da não existência de soluções de uma certa equação diferencial parcial encontrada no artigo de Fischer-Colbrie e Schoen [5].

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 fazemos referência a alguns fatos clássicos que serão utilizados freqüentemente em todo o texto, tais como Grassmanniano de k-planos orientados em $\mathbb{R}^n$, o qual denotaremos por $G_{k,n}$, e aplicação de Gauss generalizada, bem como uma rápida análise relacionando o espaço imagem, $G_{2,3}$, de tal aplicação com uma quádrica complexa conveniente.

No Capítulo 2, usando a equivalência obtida entre $G_{2,3}$ e a quádrica complexa, que agora indicaremos por Q_1, passamos a trabalhar com $G_{2,4}$ e exploramos algumas propriedades geométricas desta quádrica, mostrando que ela pode ser identificada com $S_1 \times S_2$ onde cada S_k é uma esfera padrão em $\mathbb{R}^3$ de raio $1/\sqrt{2}$.

No Capítulo 3, são feitas observações gerais sobre a aplicação de Gauss de superfícies imersas em $\mathbb{R}^n$. Em particular, obtemos expressões importantes para o caso $n = 4$, que são fundamentais para a demonstração do Teorema 4.0.3.

Por fim, no Capítulo 4, usando resultados de Hoffman e Osserman [8], Fischer-Colbrie e Schoen [5], e Hoffman [12] demonstramos os Teoremas 4.0.2 e 4.0.3.

Capítulo 1

Aplicação de Gauss Generalizada

Neste capítulo definimos a aplicação de Gauss generalizada, o Grassmanniano de k-planos orientados em $\mathbb{R}^n$ e identificamos o Grassmanniano de 2-planos orientados em $\mathbb{R}^3$ com a quádrica complexa Q_1 em $\mathbb{C}P^2$, a ser definida na Seção 1.1, que mostraremos ser topologicamente equivalente à esfera unitária. Este capítulo é baseado no trabalho de Hoffman e Osserman [10].

1.1 Aplicação de Gauss Generalizada

Suponha que $G_{k,n}$ denote o Grassmanniano de k-planos orientados em $\mathbb{R}^n$, isto é, o conjunto de todos subespaços k-dimensionais em $\mathbb{R}^n$ e seja M uma subvariedade k-dimensional orientada de $\mathbb{R}^n$, $2 \leq k \leq n-1$. A aplicação

$$g : M \longrightarrow G_{k,n}$$

definida por

$$g(p) = T_pM$$

onde T_pM é o espaço tangente a M em p, é a *aplicação de Gauss generalizada*.

Quando $k = n-1$, $G_{n-1,n}$ pode ser identificado com a esfera unitária S^{n-1}, onde a cada hiperplano corresponde um vetor normal unitário (com a orientação induzida de $\mathbb{R}^n$). A aplicação g então torna-se a aplicação de Gauss clássica, que atribui a cada ponto p de uma hipersuperfície M, um vetor normal unitário a M em p.

Observação 1.1.1. Estamos usando a convenção de identificar $T_p\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n$ e assim $T_pM \subset$

$T_p\mathbb{R}^n$ é identificado com um subespaço k-dimensional de $\mathbb{R}^n$.

Trabalhamos em um contexto um pouco mais geral, com variedades M imersas definidas por uma aplicação

$$X : M \to \mathbb{R}^n$$

onde M é uma variedade k-dimensional orientada.

Neste capítulo trabalharemos somente com propriedades locais, podendo então considerar nossas imersões como mergulhos.

É conveniente identificar $G_{2,n}$ com uma quádrica no espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{n-1}$. Tal identificação é feita da seguinte maneira: dado um 2-plano orientado P em $\mathbb{R}^n$, seja v,w um par ordenado de vetores ortonormais gerando P, a ordem dependendo da orientação. O vetor complexo

$$z = v + iw$$

atribui um ponto de $\mathbb{C}^n$ ao plano P. Uma escolha diferente de bases fornece um ponto da forma $e^{i\theta}z$. Se passarmos ao espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^{n-1}$, notamos que a cada plano P corresponde um único ponto de $\mathbb{C}P^{n-1}$. A ortonormalidade do par v,w implica que o conjunto de pontos na forma

$$z = v + iw \Longleftrightarrow (z_1, \ldots, z_n) = (v_1 + iw_1, \ldots, v_n + iw_n),$$

satisfaz

$$\textstyle\sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n (v_i + iw_i)^2 = |v|^2 + 2iv \cdot w - |w|^2 = 0,$$

pois v e w são ortonormais. A equação acima define a quádrica Q_{n-2} em $\mathbb{C}P^{n-1}$. Vamos verificar que a seguinte aplicação

$$\gamma : G_{2,n} \longrightarrow Q_{n-2}$$

tal que

$$\gamma(P) = [z]$$

é uma bijeção.

De fato, dado $z \in Q_{n-2}$, $z = v + iw$, onde v e w são vetores reais linearmente independentes, o plano P gerado por v e w é tal que $\gamma(P) = [z]$. Assim a aplicação é sobrejetora. Para mostrar a injetividade, suponha que $[z_1] = [z_2]$. Assim $z_1 = e^{i\theta}z_2$, logo $v_1 = e^{i\theta}v_2$ e $w_1 = e^{i\theta}w_2$. Portanto o plano P_1 gerado por v_1, w_1 coincide com o plano P_2 gerado por v_2, w_2 e a aplicação é injetora. Conseqüentemente nossa aplicação é uma bijeção e desta forma podemos identificar a quádrica

Q_{n-2} com o Grassmanniano $G_{2,n}$. A partir de agora, usaremos livremente esta identificação.

Dada uma 2-variedade orientada M em $\mathbb{R}^n$, temos a aplicação de Gauss

$$g : M \longrightarrow Q_{n-2}.$$

Localmente, se (u_1, u_2) são parâmetros isotérmicos em uma vizinhança de um ponto p pertencente a M, e M é definida em uma vizinhança de p por uma aplicação

$$(u_1, u_2) \longmapsto (x_1, ..., x_n),$$

então os vetores

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2}$$

são ortogonais e de mesmo comprimento. Segue que a aplicação de Gauss g pode ser dada localmente por

$$(u_1, u_2) \longmapsto [\frac{\partial x}{\partial u_1} + i\frac{\partial x}{\partial u_2}] \in Q_{n-2} \subset \mathbb{C}P^{n-1}. \tag{1.1}$$

No caso clássico de superfícies em $\mathbb{R}^3$, sabe-se que esferas e superfícies mínimas são caracterizadas pelo fato de que suas aplicações de Gauss são conformes (ver [19]). Se fixarmos uma orientação sobre a esfera unitária imagem, podemos distinguir os dois casos, se a aplicação de Gauss preserva ou reverte a orientação, isto é, é conforme ou anti-conforme.

Vamos relembrar a definição da segunda forma fundamental

$$B_{ij} = (\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j})^N \tag{1.2}$$

onde "N" denota a componente do vetor normal à superfície.

Definição 1.1.2. Uma superfície é totalmente umbílica em um ponto se

$$B_{11} = B_{22}, \quad B_{12} = 0$$

(onde u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos).

Teorema 1.1.3. *Seja M uma 2-variedade orientada em $\mathbb{R}^n$. A aplicação de Gauss $g : M \longrightarrow Q_{n-2}$ é holomorfa não-constante se, e somente se, M é totalmente umbílica. Conseqüentemente* *situa-se sobre uma* 2*-esfera em algum* 3*-espaço afim de* $\mathbb{R}^n$*; a aplicação de Gauss* g *é anti-holomorfa se, e somente se,* M *é uma superfície mínima.*

Demonstração: Uma vez que todas as propriedades consideradas são locais, podemos introduzir parâmetros isotérmicos locais u_1, u_2 e assim definir a aplicação de Gauss por (1.1). Introduzindo a notação

$$w = u_1 + iu_2, \quad \varphi(w) = (\varphi_1(w), ..., \varphi_n(w)),$$

$$\varphi_k(w) = 2\frac{\partial x_k}{\partial w} = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}, \tag{1.3}$$

podemos representar a aplicação de Gauss por

$$g : w \longrightarrow [\bar{\varphi}(w)]. \tag{1.4}$$

Assim g é holomorfa quando a aplicação φ é anti-holomorfa e a aplicação g é anti-holomorfa quando a aplicação φ é holomorfa. Para uma superfície mínima em $\mathbb{R}^n$ temos que as φ_k definidas por (1.3) são holomorfas, (ver, por exemplo, [15]). Conseqüentemente a aplicação g dada por (1.4) é anti-holomorfa. Reciprocamente, se cada φ_k é holomorfa segue que M é mínima. De fato, temos que M é mínima se, e somente se, suas funções coordenadas são harmônicas e como mostrado abaixo, φ_k é holomorfa se, e somente se, as funções coordenadas são harmônicas.

$$\begin{aligned}
(\varphi_k)_w &= \frac{\partial x_k}{\partial u_1 u_1} + i\frac{\partial x_k}{\partial u_1 u_2} - i(\frac{\partial x_k}{\partial u_2 u_1} + i\frac{\partial x_k}{\partial u_2 u_2}) \\
&= \frac{\partial x_k}{\partial u_1 u_1} + \frac{\partial x_k}{\partial u_2 u_2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois x_k é harmônica.

Para um ponto $[z]$ do espaço projetivo as coordenadas z_k sozinhas não têm significado; somente os quocientes z_j/z_k estão bem definidos. Por definição, a aplicação $w \longrightarrow \overline{\varphi}$ é anti-holomorfa se, e somente se, os quocientes $\varphi_j(w)/\varphi_k(w)$ são funções holomorfas sempre que os denominadores não se anulam. Uma vez que a superfície M está imersa, em qualquer ponto w_0, nem todas $\varphi_k(w_0)$ se anulam. Faça $\varphi_j(w_0) \neq 0$. Então $\psi_k(w) = \varphi_k(w)/\varphi_j(w)$ é holomorfa em uma vizinhança de w_0. Fazendo $\mu(w) = 1/\varphi_j(w)$ então pela hipótese de que g é anti-holomórfica

$$0 = \frac{\partial \psi_k}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial [\mu \varphi_k]}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial \mu}{\partial \overline{w}} \varphi_k + \mu \frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{w}}.$$

Assim

$$-\frac{\varphi_k}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{w}}.$$

Mas então por (1.3) temos que

$$\Delta x_k = \frac{4\partial^2 x_k}{\partial w \partial \overline{w}} = 2\frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{w}} = -\frac{2}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \overline{w}} \varphi_k.$$

Escrevamos

$$-\frac{2}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \overline{w}} = f(w) + ig(w) \tag{1.5}$$

onde f e g são reais. Uma vez que Δx_k é real, usando (1.3) e (1.5)

$$\begin{aligned}
\Delta x_k &= [f(w) + ig(w)]\varphi_k \\
&= [f(w) + ig(w)][\frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}] \\
&= f(w)\frac{\partial x_k}{\partial u_1} + g(w)\frac{\partial x_k}{\partial u_2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta x = f(w)\frac{\partial x}{\partial u_1} + g(w)\frac{\partial x}{\partial u_2}. \tag{1.6}$$

O lado direito de (1.6) representa, em cada ponto, um vetor tangente a M; mas Δx é um múltiplo escalar do vetor curvatura média H, que é normal a M. (ver Osserman [15], Lema 4.1). Segue que $\Delta x = 0$, logo $H = 0$. Conseqüentemente M é mínima, o que demonstra a segunda afirmação do Teorema 1.1.3. A demonstração da primeira parte do teorema é análoga.

Suponha que a aplicação de Gauss é holomorfa. Novamente, temos localmente uma função μ tal que

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial w}=\frac{\partial(\mu\varphi)}{\partial w}=\mu\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\varphi\frac{\partial\mu}{\partial w}.$$

Isto implica que as partes real e imaginária do vetor $\partial\varphi/\partial w$ são combinações lineares de $\partial x/\partial u_1$, $\partial x/\partial u_2$, portanto tangentes a M. Mas

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial w} &= \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial u_1}(\frac{\partial x}{\partial u_1}-i\frac{\partial x}{\partial u_2})-i\frac{\partial}{\partial u_2}(\frac{\partial x}{\partial u_1}-i\frac{\partial x}{\partial u_2})]\\ &= \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}-2i\frac{\partial^2 x}{\partial u_1\partial u_2}-\frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}]\end{aligned}$$

então por (1.2)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w}=\frac{1}{2}(B_{11}-B_{22}-2iB_{12})=(\frac{\partial\varphi}{\partial w})^N=0,$$

conseqüentemente,

$$B_{11}=B_{22} \text{ e } B_{12}=0.$$

Conseqüentemente, pela Definição 1.1.2, M é totalmente umbílica em cada ponto. Mas então, M situa-se sobre um plano ou sobre uma 2-esfera em algum 3-espaço afim (ver B. Y. Chen [2]). O primeiro caso corresponde à situação degenerada, na qual a aplicação de Gauss é constante.

Reciprocamente, dada uma 2-esfera em um 3-espaço afim de $\mathbb{R}^n$, podemos usar o fato de que a aplicação de Gauss é conforme, junto com a correspondência entre as aplicações de Gauss clássica e generalizada. Por exemplo, usando a projeção estereográfica

$$x_1=\frac{u}{1+|w|^2},\quad x_2=\frac{v}{1+|w|^2},\quad x_3=\frac{1-|w|^2}{1+|w|^2},\quad x_4=\ldots=x_n=0,$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial w} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial x_1}{\partial u}-i\frac{\partial x_1}{\partial v})\\ &= \frac{1}{2}(\frac{2(1+|w|^2)-4u^2+i4uv}{(1+|w|^2)^2})\\ &= \frac{1}{2}(\frac{2(1-u^2+v^2+2iuv)}{(1+|w|^2)^2})\\ &= \frac{(1-\bar{w}^2)}{(1+|w|^2)^2}.\end{aligned}$$

Com cálculos análogos obtemos

$$\frac{\partial x_2}{\partial w} = -\frac{i(1+\overline{w}^2)}{(1+|w|^2)^2}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial w} = -\frac{2\overline{w}}{(1+|w|^2)^2}.$$

Logo

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{(1+|w|^2)^2}(1-\overline{w}^2, -i(1+\overline{w}^2), -2\overline{w}, 0, ..., 0),$$

e os quocientes φ_j/φ_k são anti-holomorfos. O que conclui a demonstração do teorema. $\square$

O teorema de Ruh-Vilms (ver [17]) afirma que dada M uma subvariedade m-dimensional de $\mathbb{R}^n$, a aplicação de Gauss de M é uma aplicação harmônica se, e somente se, M tem vetor curvatura média paralelo. Este teorema será de grande importância no decorrer do presente trabalho.

Note que as superfícies mínimas e as esferas têm vetor curvatura média paralelo e também que, as aplicações holomorfas e anti-holomorfas são harmônicas. Assim ambas as classes de superfícies do Teorema 1.1.3 estão incluídas em uma classe mais geral do teorema de Ruh-Vilms. Note também que para hipersuperfícies, vetor curvatura média paralelo equivale à curvatura média constante, e que define a classe de hipersuperfícies cuja aplicação de Gauss é harmônica.

Para concluir este capítulo vamos descrever explicitamente a correspondência entre a aplicação de Gauss clássica e a aplicação de Gauss generalizada no caso de uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Dado um 2-plano orientado P em $\mathbb{R}^3$, suponha que $\mathsf{v} = (\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2, \mathsf{v}_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ formam uma base ortonormal apropriada para P. Então, associado a P temos seu vetor unitário ortonormal $\nu \in S^2$ dado por

$$\nu = \nu(P) = \mathsf{v} \times w = (\mathsf{v}_2 w_3 - \mathsf{v}_3 w_2, \mathsf{v}_3 w_1 - \mathsf{v}_1 w_3, \mathsf{v}_1 w_2 - \mathsf{v}_2 w_1)$$

e o ponto $[z]$ da quádrica Q_1 em $\mathbb{C}P^2$, com z dado por

$$z = z(P) = \mathsf{v} + iw = (\mathsf{v}_1 + iw_1, \mathsf{v}_2 + iw_2, \mathsf{v}_3 + iw_3).$$

Como

$$Im(\overline{z_2} z_3) = \mathsf{v}_2 w_3 - \mathsf{v}_3 w_2, \quad Im(\overline{z_3} z_1) = \mathsf{v}_3 w_1 - \mathsf{v}_1 w_3, \quad Im(\overline{z_1} z_2) = \mathsf{v}_1 w_2 - \mathsf{v}_2 w_1$$

logo

$$\nu(P) = Im(\bar{z_2}z_3, \bar{z_3}z_1, \bar{z_1}z_2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} z_3 = 0 &\Leftrightarrow \mathsf{v}_3 + iw_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathsf{v}_3 = w_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \nu = (0, 0, \mathsf{v}_1 w_2 - \mathsf{v}_2 w_1) \\ &\Leftrightarrow \nu = (0,0,1) \text{ ou } \nu = (0,0,-1), \end{aligned}$$

pois ν é unitário. Defina

$$Q_1^* = \{[z] \in Q_1; z_3 \neq 0\}.$$

Para $[z] \in Q_1^*$, seja

$$\zeta = \frac{z_1}{z_3} + i\frac{z_2}{z_3}. \tag{1.7}$$

Uma vez que $[z] \in Q_1^*$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = -z_3^2 \Rightarrow (\frac{z_1}{z_3} + i\frac{z_2}{z_3})(\frac{z_1}{z_3} - i\frac{z_2}{z_3}) = -1.$$

Pela expressão de ζ segue que

$$-\frac{1}{\zeta} = (\frac{z_1}{z_3} - i\frac{z_2}{z_3}).$$

Assim, para $[z] \in Q_1^*$, com $\zeta \neq 0$ segue que

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{1}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta}), \quad \frac{z_2}{z_3} = \frac{1}{2i}(\zeta + \frac{1}{\zeta}), \quad \zeta \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}.$$

Essas equações definem uma aplicação bijetora do plano menos um ponto $\mathbb{C}^*$ sobre a quádrica Q_1^*. Usando-as junto com a relação entre ν e z, obtemos

$$\nu = (\frac{2\xi}{1+|\zeta|^2}, \frac{2\eta}{1+|\zeta|^2}, \frac{1-|\zeta|^2}{1+|\zeta|^2}), \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{1.8}$$

que é a projeção estereográfica de $\mathbb{C}^*$ sobre a esfera menos dois pontos S^*. De fato, vamos calcular a terceira coordenada de ν.

De

$$\overline{z_1}z_2 = (\mathsf{v}_1 - iw_1)(\mathsf{v}_2 + iw_2) = \mathsf{v}_1\mathsf{v}_2 + w_1w_2 + i(w_2\mathsf{v}_1 - w_1\mathsf{v}_2),$$

$$|\zeta|^2 = (\frac{z_1}{z_3} + i\frac{z_2}{z_3})(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_3}} - i\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}}) = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 + i(z_2\overline{z_1} - \overline{z_2}z_1)}{|z_3|^2},$$

$$\frac{1}{|\zeta|^2} = (\frac{z_1}{z_3} - i\frac{z_2}{z_3})(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_3}} + i\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}}) = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - i(z_2\overline{z_1} - \overline{z_2}z_1)}{|z_3|^2},$$

segue que

$$|\zeta|^2 - \frac{1}{|\zeta|^2} = \frac{2i(z_2\overline{z_1} - \overline{z_2}z_1)}{|z_3|^2} = \frac{2i(2i\mathrm{Im} z_2\overline{z_1})}{|z_3|^2} = -\frac{4\mathrm{Im}(z_2\overline{z_1})}{|z_3|^2}, \tag{1.9}$$

e

$$|\zeta|^2 + \frac{1}{|\zeta|^2} = \frac{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)}{|z_3|^2}. \tag{1.10}$$

Como $|\mathsf{v}| = 1$ e $|w| = 1$, logo $\mathsf{v}_3 = 1 - \mathsf{v}_1^2 - \mathsf{v}_2^2$ e $w_3 = 1 - w_1^2 - w_2^2$ respectivamente. Assim

$$|z_3|^2 = 2 - |z_1|^2 - |z_2|^2, \text{ ou equivalentemente } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2 - |z_3|^2. \tag{1.11}$$

Substituindo (1.11) em (1.10) segue que

$$|\zeta|^2 + \frac{1}{|\zeta|^2} = \frac{2(2 - |z_3|^2)}{|z_3|^2}.$$

Vamos isolar $|z_3|^2$ na igualdade acima

$$\frac{1}{2}(|\zeta|^2 + \frac{1}{|\zeta|^2}) = \frac{2}{|z_3|^2} - 1$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1 + |\zeta|^4 + |\zeta|^2}{|\zeta|^2}) = \frac{2}{|z_3|^2}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{(1 + |\zeta|^2)^2}{|\zeta|^2}) = \frac{2}{|z_3|^2}.$$

Substituindo o resultado acima em (1.9) segue que

$$\begin{aligned} |\zeta|^2 - \frac{1}{|\zeta|^2} &= -\frac{4\mathrm{Im}(z_2\overline{z_1})}{|z_3|^2} \\ &= -\mathrm{Im}(z_2\overline{z_1})(\frac{(1 + |\zeta|^2)^2}{|\zeta|^2}), \end{aligned}$$

logo
$$\mathrm{Im}(z_2\overline{z_1}) = \frac{1-|\zeta|^2}{1+|\zeta|^2}.$$

Com cálculos análogos, obtemos $v_1 = \frac{2\xi}{1+|\zeta|^2}$, $v_2 = \frac{2\eta}{1+|\zeta|^2}$. Assim temos a correspondência bijetora
$$Q_1^* \leftrightarrow \mathbb{C}^* \leftrightarrow S^*$$

pela variável intermediária ζ. Para estender a aplicação a todo Q_1, note que

$$z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \pm i z_2$$

assim $Q_1 - Q_1^* = [(1,i,0)] \cup [(1,-i,0)]$.

Para $[z] \in Q_1^*$, se

$$\begin{aligned} z \to (1,i,0) \quad &\Rightarrow \quad \frac{-1}{\zeta} = (\frac{z_1}{z_3} - i\frac{z_2}{z_3}) = \frac{z_1 - iz_2}{z_3} \to \infty \\ &\Rightarrow \quad \zeta \to 0 \\ &\Rightarrow \quad v \to (0,0,1), \end{aligned}$$

usando (1.8). Analogamente, se

$$z \to (1,-i,0) \Rightarrow \quad v \to (0,0,-1).$$

Assim a aplicação bijetora entre Q_1^* e S^* se estende a uma aplicação bijetora entre Q_1 e S.

Capítulo 2

A Geometria da Quádrica Q_{n-2}

Na demonstração do Teorema 4.0.3 vamos utilizar a aplicação de Gauss de superfícies 2-dimensionais em $\mathbb{R}^4$, que iremos descrever neste capítulo. Vimos no capítulo anterior que a imagem pela aplicação de Gauss situa-se sobre o Grassmanniano $G_{2,n}$, que pode ser identificado com a quádrica Q_{n-2} em $\mathbb{C}P^{n-1}$. Mostramos também que Q_1 é topologicamente equivalente a S^2. Neste capítulo vamos obter as expressões da métrica canônica em $\mathbb{C}P^2$ e em $\mathbb{C}P^3$ restritas a Q_1 e Q_2 respectivamente, e mostrar que com a métrica canônica de $\mathbb{C}P^3$, Q_2 é isométrica a $S^2(1/\sqrt{2}) \times S^2(1/\sqrt{2})$, onde $S^2(1/\sqrt{2})$ é a 2-esfera padrão de raio $1/\sqrt{2}$. Este capítulo é baseado no trabalho de D. A. Hoffman e R. Osserman [10].

2.1 A Geometria da Quádrica Q_2

A métrica canônica em $\mathbb{C}P^n$ é a métrica de Fubini-Study, que é dada por

$$ds^2 = 2\frac{|Z \wedge dZ|^2}{|Z|^4} = 2\frac{\sum_{j<k,j=1}^{n} |z_j dz_k - z_k dz_j|^2}{[\sum_{j=1} |z_j|^2]^2}.$$

A seguir vamos obter a expressão desta métrica para $n = 3$ e $n = 4$, que são os casos trabalhados nas demonstrações dos dois teoremas principais deste trabalho. Para $n = 3$ a métrica de Fubini-Study é dada por

$$ds^2 = 2\frac{\sum_{j<k,j=1}^{3} |z_j dz_k - z_k dz_j|^2}{[\sum_{j=1}^{3} |z_j|^2]^2}. \tag{2.1}$$

Agora vamos utilizar as informações obtidas do parâmetro ζ sobre Q_1 em (1.7), e fazendo

$$z_3 = 1, \quad z_1 = \frac{1}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta}), \quad z_2 = \frac{1}{2i}(\zeta + \frac{1}{\zeta}), \quad \zeta \in \mathbb{C}^*$$

logo,

$$dz_3 = 0, \quad dz_1 = \frac{1}{2}(d\zeta + \frac{1}{\zeta^2}d\zeta), \quad dz_2 = \frac{1}{2i}(d\zeta - \frac{1}{\zeta^2}d\zeta).$$

Como

$$\begin{aligned} |z_1|^2 &= \frac{1}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})\frac{1}{2}(\overline{\zeta} - \frac{1}{\zeta}) \\ &= \frac{1}{4}[|\zeta|^2 + \frac{1}{|\zeta|^2} - \frac{\zeta}{\zeta} - \frac{\overline{\zeta}}{\zeta}], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |z_2|^2 &= \frac{1}{2i}(\zeta + \frac{1}{\zeta})\frac{-1}{2i}(\overline{\zeta} + \frac{1}{\zeta}) \\ &= \frac{1}{4}[|\zeta|^2 + \frac{1}{|\zeta|^2} + \frac{\zeta}{\zeta} + \frac{\overline{\zeta}}{\zeta}], \end{aligned}$$

concluímos que

$$[\sum_{j=1}^{3} |z_i|^2]^2 = [|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2]^2 = [\frac{1}{2}(|\zeta|^2 + \frac{1}{|\zeta|^2}) + 1]^2.$$

Agora vamos simplificar o numerador de (2.1), substituindo as informações obtidas acima para z_1, z_2 e z_3.

$$\begin{aligned} 2\sum_{j<k,j=1}^{3} |z_j dz_k - z_k dz_j|^2 &= 2|\frac{1}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})\frac{1}{2i}(d\zeta - \frac{d\zeta}{\zeta^2}) - \frac{1}{2i}(\zeta + \frac{1}{\zeta})\frac{1}{2}(d\zeta + \frac{d\zeta}{\zeta^2})|^2 + \\ &\quad + |\frac{1}{2}(d\zeta + \frac{d\zeta}{\zeta^2})|^2 + |\frac{1}{2i}(d\zeta - \frac{d\zeta}{\zeta^2})|^2 \\ &= 2|\frac{1}{4i}(\zeta d\zeta - \frac{2d\zeta}{\zeta} + \frac{d\zeta}{\zeta^3}) - \frac{1}{4i}(\zeta d\zeta + \frac{2d\zeta}{\zeta} + \frac{d\zeta}{\zeta^3})|^2 + \\ &\quad + |\frac{1}{2}(d\zeta + \frac{d\zeta}{\zeta^2})|^2 + |\frac{1}{2i}(d\zeta - \frac{d\zeta}{\zeta^2})|^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2[|\frac{id\zeta}{\zeta}|^2 + |\frac{1}{2}(d\zeta + \frac{d\zeta}{\zeta^2})|^2 + \frac{1}{2i}(d\zeta - \frac{d\zeta}{\zeta^2})|^2] \\
&= 2\{\frac{|d\zeta|^2}{|\zeta|^2} + \frac{1}{4}[(d\zeta + \frac{d\zeta}{\zeta^2})(d\overline{\zeta} + \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta^2}})] + \frac{1}{4}[(d\zeta - \frac{d\zeta}{\zeta^2})(d\overline{\zeta} - \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta^2}})]\} \\
&= 2[\frac{|d\zeta|^2}{|\zeta|^2} + \frac{1}{4}(|d\zeta|^2 + 2\frac{|d\zeta|^2}{\zeta^2} + \frac{|d\zeta|^2}{|\zeta|^4})] \\
&= 2[\frac{|d\zeta|^2}{|\zeta|^2} + \frac{1}{2}(|d\zeta|^2 + \frac{|d\zeta|^2}{|\zeta|^4})] \\
&= \frac{2|d\zeta|^2}{|\zeta|^2} + |d\zeta|^2 + \frac{|d\zeta|^2}{|\zeta|^4} \\
&= |d\zeta|^2(\frac{2}{|\zeta|^2} + 1 + \frac{1}{|\zeta|^4}) \\
&= |d\zeta|^2(1 + \frac{1}{|\zeta|^2})^2.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{|d\zeta|^2(1+\frac{1}{|\zeta|^2})^2}{[\frac{1}{2}(|\zeta|^2 + \frac{1}{|\zeta|^2}) + 1]^2} \\
&= 4[\frac{(1+\frac{1}{|\zeta|^2})|d\zeta|}{2 + |\zeta|^2 + \frac{1}{|\zeta|^2}}]^2 \\
&= 4[\frac{(1+|\zeta|^{-2})|d\zeta|}{|\zeta|^{-2}(2|\zeta|^2 + |\zeta|^4 + 1)}]^2 \\
&= 4\frac{|d\zeta|^2}{(1+|\zeta|^2)^2},
\end{aligned}
$$

que é a métrica sobre a esfera unitária dada pela projeção estereográfica sobre o ζ-plano complexo.

A estrutura da quádrica Q_2 em $\mathbb{C}P^3$ será de interesse particular na seqüência. Algebricamente, Q_2 é uma superfície complexa duplamente regrada, isto é, cada ponto de Q_2 é a interseção de um par de retas projetivas situadas sobre Q_2. Por exemplo, considere o ponto

$$P = [(1, i, 0, 0)]$$

sobre a quádrica Q_2, que é dada por $z \in \mathbb{C}^4$ tal que,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0. \tag{2.2}$$

O hiperplano em $\mathbb{C}^4$

$$H_2 : z_1 + iz_2 = 0$$

contém o ponto P e é tangente a Q_2 em P.

De fato, seja $[\alpha] : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow Q_2$ dada por $\alpha(t) = (z_1(t), ..., z_4(t))$, tal que $[\alpha(0)] = P$. Então, em $t = 0$, $z_1' z_1 + z_2' z_2 + z_3' z_3 + z_4' z_4 = 0$. Como $P = [(1, i, 0, 0)]$, segue que $z_1' + iz_2' = 0$. Portanto o hiperplano H_2 é tangente a Q_2 em P.

Temos que todo ponto de $Q_2 \cap H_2$ satisfaz $z_3^2 + z_4^2 = 0$.

De fato, como $H_2 : z_1 + iz_2 = 0$, multiplicando ambos os lados da igualdade por $z_1 - iz_2$ segue que

$$(z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2) = z_1^2 + z_2^2 = 0.$$

Substituindo em (2.2), segue que $z_3^2 + z_4^2 = 0$. Conseqüentemente, um tal ponto em $Q_2 \cap H_2$ situa-se sobre um dos hiperplanos

$$H_2' : z_3 + iz_4 = 0,$$
$$H_2'' : z_3 - iz_4 = 0.$$

Assim, verificamos que

$$Q_2 \cap H_2 = (H_2' \cap H_2) \cup (H_2'' \cap H_2). \tag{2.3}$$

O lado direito de (2.3) representa a união de um par de retas projetivas sobre Q_2 que se intersectam somente no ponto P. Vamos mostrar que $Q_2 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ como segue. Considere o hiperplano

$$H : z_1 - iz_2 = 0$$

e seja

$$Q_2^* = Q_2 - H.$$

Uma vez que H é o plano tangente a Q_2 no ponto $[(i, 1, 0, 0)]$, pelo argumento precedente, temos que

$$Q_2 \cap H = L' \cup L'',$$

onde L' e L'' são retas projetivas definidas por

$$L' : z_1 - iz_2 = 0, \quad z_3 - iz_4 = 0,$$
$$L'' : z_1 - iz_2 = 0, \quad z_3 + iz_4 = 0.$$

Além disso,

$$L' \cap L'' = \{[(i,1,0,0)]\}.$$

Agora dado $[z] \in Q_2^*$, com $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, e fazendo

$$w_1 = \frac{z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2}, \quad w_2 = \frac{-z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2}, \tag{2.4}$$

então

$$w_1 - w_2 = \frac{2z_3}{z_1 - iz_2}, \quad w_1 + w_2 = \frac{2iz_4}{z_1 - iz_2}.$$

Usando (2.2)

$$\begin{aligned} w_1 w_2 &= \frac{(z_3 + iz_4)(-z_3 + iz_4)}{(z_1 - iz_2)^2} \\ &= \frac{-(z_3^2 + z_4^2) + iz_3 z_4 - iz_3 z_4}{(z_1 - iz_2)^2} \\ &= \frac{z_1^2 + z_2^2}{(z_1 - iz_2)^2} \\ &= \frac{z_1 + iz_2}{z_1 - iz_2}, \end{aligned}$$

conseqüentemente

$$1 + w_1 w_2 = 1 + \frac{z_1 + iz_2}{z_1 - iz_2} = \frac{2z_1}{z_1 - iz_2},$$

$$1 - w_1 w_2 = 1 + \frac{z_1 + iz_2}{z_1 - iz_2} = \frac{-2iz_2}{z_1 - iz_2}.$$

Assim

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)\frac{2}{z_1 - iz_2} = (1 + w_1 w_2, i(1 - w_1 w_2), w_1 - w_2, -i(w_1 + w_2)).$$

Logo, dado $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$, o ponto

$$(1 + w_1 w_2, i(1 - w_1 w_2), w_1 - w_2, -i(w_1 + w_2)) \tag{2.5}$$

satisfaz a equação de Q_2, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{z_1 - iz_2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) \\ &= (1 + w_1 w_2)^2 + (i(1 - w_1 w_2))^2 + (w_1 - w_2)^2 + (-i(w_1 + w_2))^2 \end{aligned}$$

segue que (2.5) define uma aplicação φ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ em Q_2 com a propriedade que, sobre Q_2^*, φ^{-1} é dada por (2.4). A imagem de φ é

$$Q_2 - \{L' \cup L''\}.$$

Estamos considerando (2.5) como coordenadas homogêneas de um ponto em $\mathbb{C}P^3$. Agora considere $(w_1, w_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Note que φ definida por (2.5), se estende continuamente a uma bijeção $[\varphi]$ de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ sobre Q_2. A saber, fixado $w_2 \in \mathbb{C}$, dividindo (2.5) por w_1 e fazendo $w_1 \to \infty$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{w_1 \to \infty} \frac{[\varphi(w_1, w_2)]}{w_1} &= \lim_{w_1 \to \infty} [(\frac{1}{w_1} + w_2, i(\frac{1}{w_1} - w_2), 1 - \frac{w_2}{w_1}, -i(1 + \frac{w_2}{w_1}))] \\ &= [(w_2, -iw_2, 1, -i)]. \end{aligned}$$

O ponto acima pertence a L', e todo ponto de L' pode ser representado desta forma, exceto quando z_3 ou z_4 se anulam. Analogamente

$$\begin{aligned} \lim_{w_2 \to \infty} \frac{[\varphi(w_1, w_2)]}{w_2} &= \lim_{w_2 \to \infty} [(\frac{1}{w_2} + w_1, i(\frac{1}{w_2} - w_1), -1 + \frac{w_1}{w_2}, -i(1 + \frac{w_1}{w_2}))] \\ &= [(w_1, -iw_1, -1, -i)], \end{aligned}$$

que fornece todos os pontos de L'' exceto quando $z_3 = z_4 = 0$. Por fim

$$\begin{aligned} \lim_{w_1, w_2 \to \infty} \frac{[\varphi(w_1, w_2)]}{w_1 w_2} &= \lim_{w_1, w_2 \to \infty} [(\frac{1}{w_1 w_2} + 1, i(\frac{1}{w_2 w_1} - 1), \frac{1}{w_2} - \frac{1}{w_1}, -i(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}))] \\ &= [(1, -i, 0, 0)], \end{aligned}$$

que é exatamente o único ponto de $L' \cap L''$, pois $[(1, -i, 0, 0)] = [(i, 1, 0, 0)] = P$.

Assim obtemos uma aplicação contínua bijetora de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ sobre Q_2, mostrando que Q_2 é homeomorfo a $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, isto é, a $S^2 \times S^2$.

Capítulo 3

Superfícies em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo tomamos como modelo para o Grassmanniano de 2-planos orientados em $\mathbb{R}^n$ a quádrica Q_{n-2} em $\mathbb{C}P^{n-1}$ que definimos no Capítulo 1 pela equação abaixo

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = 0.$$

Para qualquer ponto $P = (z_1, ..., z_n)$ em Q_{n-2}, se $z_k = a_k + ib_k$, obtemos um par de vetores reais $\mathbf{A} = (a_1, ..., a_n)$ e $\mathbf{B} = (b_1, ..., b_n)$ que satisfazem

$$|\mathbf{A}|^2 = a_1^2 + ... + a_n^2 = |\mathbf{B}|^2 = b_1^2 + ... + b_n^2 \text{ e } \mathbf{AB} = a_1b_1 + ... + a_nb_n = 0. \tag{3.1}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} z_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + ib_k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + 2ia_kb_k - b_k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 - b_k^2) \\
&= |\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Além disso, **A** e **B** não se anulam, uma vez que as coordenadas homogêneas $(z_1, ..., z_n)$ de um ponto em $\mathbb{C}P^{n-1}$ não são todas nulas. Assim o par **A**, **B** forma uma base ortogonal de um

2-plano orientado Π. Diferentes coordenadas homogêneas de P determinam o mesmo plano. Reciprocamente, para qualquer 2-plano Π podemos escolher uma base ortogonal $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ de Π e colocar $z_k = a_k + ib_k$, obtendo um ponto P de Q_{n-2}. Vamos usar a notação $K = [w]$, para denotar o ponto em $\mathbb{C}P^{n-1}$ correspondendo ao ponto $w = (w_1, ..., w_n)$ em $\mathbb{C}^n - \{0\}$. Este capítulo é baseado no artigo de Hoffman e Osserman [8].

3.1 Superfícies em $\mathbb{R}^n$

Definição 3.1.1. Uma superfície de Riemann é um espaço de Hausdorff conexo W com uma estrutura conforme definida por uma família ϕ de homeomorfismos locais sobre W, denotado por (W, ϕ).

Para maiores explicações com relação à definição acima ver [1], páginas 112-114.

Definição 3.1.2. Uma superfície S em $\mathbb{R}^n$ é um par (S_0, X), onde S_0 é uma superfície de Riemann e $X : S_0 \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão conforme.

Como nossas superfícies estão imersas, elas têm um plano tangente bem definido em cada ponto. Se $z = \vartheta + i\varsigma \in \mathbb{C}$ é uma coordenada conforme local na superfície de Riemann S_0 e $(x_1, ..., x_n)$ são coordenadas em $\mathbb{R}^n$, então a aplicação que define S é dada localmente por

$$X(z), \quad X = (x_1, ..., x_n).$$

A conformidade da aplicação é expressa por

$$|\frac{\partial X}{\partial \vartheta}|^2 = |\frac{\partial X}{\partial \varsigma}|^2 = \lambda^2 \neq 0, \quad \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial X}{\partial \varsigma} = 0.$$

O plano tangente a S, gerado por $\partial X / \partial \vartheta, \quad \partial X / \partial \varsigma$, corresponde, como acima, ao ponto

$$[\frac{\partial X}{\partial \vartheta} + i \frac{\partial X}{\partial \varsigma}] \tag{3.2}$$

da quádrica Q_{n-2}. A aplicação de Gauss G de S é a aplicação de S_0 em Q_{n-2} definida localmente por (3.2). Usando a definição de derivada complexa, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial \vartheta} - i \frac{\partial f}{\partial \varsigma}), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + i \frac{\partial f}{\partial \varsigma})$$

podemos escrever a aplicação de Gauss na forma

$$G(z) = [\frac{\partial X}{\partial \bar{z}}].$$

Por razões históricas vamos trabalhar com o complexo conjugado desta aplicação

$$\bar{G}(z) = [\frac{\partial X}{\partial z}] = [\frac{\partial X}{\partial \vartheta} - i\frac{\partial X}{\partial \varsigma}], \tag{3.3}$$

cuja imagem também situa-se em Q_{n-2}. A métrica induzida em S_0 pela imersão X é dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= |\frac{\partial X}{\partial \vartheta}|^2 |d\vartheta|^2 + 2\frac{\partial X}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial X}{\partial \varsigma} d\vartheta d\varsigma + |\frac{\partial X}{\partial \varsigma}|^2 |d\varsigma|^2 \\ &= \lambda^2(|d\vartheta|^2 + |d\varsigma|^2) \\ &= \lambda^2 |dz|^2, \end{aligned}$$

com $z = \vartheta + i\varsigma$. Também vamos usar a relação

$$(\frac{4}{\lambda^2})X_{z\bar{z}} = \Delta X = 2H, \tag{3.4}$$

onde H é o vetor curvatura média de X e Δ é o operador Laplace-Beltrami em S.

A aplicação de Gauss de S_0 em Q_{n-2}, pode ser representada localmente na forma $[\Phi]$, onde $\Phi(z) = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ satisfaz

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(z) = 0. \tag{3.5}$$

Pela equação (3.3), podemos escrever

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \psi \Phi, \tag{3.6}$$

para alguma função complexa $\psi : S_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ que não se anula. De (3.4) e (3.6) temos

$$\frac{\lambda^2}{2} H = (X)_{z\bar{z}} = \psi \Phi_{\bar{z}} + \psi_{\bar{z}} \Phi.$$

Da conformidade da aplicação X segue que

$$\frac{\lambda^2}{2} = |\partial X/\partial z|^2 = |\psi|^2 |\Phi|^2,$$

conseqüentemente

$$|\Phi|^2\bar{\psi}H = \Phi_{\bar{z}} + \frac{\psi_{\bar{z}}}{\psi}\Phi = \Phi_{\bar{z}} + (\log\psi)_{\bar{z}}\Phi, \tag{3.7}$$

sempre que $\psi \neq 0$.

Lema 3.1.3. *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio simplesmente conexo e seja $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação C^1. Uma condição necessária e suficiente para que exista uma aplicação $X : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $X_z = \Phi$ é que Φ satisfaça Im$\Phi_{\bar{z}} = 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema de Green, a condição para que a expressão

$$X(z) = \mathrm{Re}\int_\gamma \Phi\, dz, \text{ onde } \gamma(0) = z_0 \text{ e } \gamma(1) = z, \quad \Phi = \varphi + i\psi$$

defina uma aplicação é justamente Im$\Phi_{\bar{z}} = 0$. Assumindo isto, verifica-se sem dificuldades que

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \Phi.$$

□

Lema 3.1.4. *Seja W um vetor em $\mathbb{C}^n$ da forma $W = A + iB$, onde A e B são vetores reais não nulos satisfazendo (3.1). Seja Π o plano gerado por A e B. Para qualquer vetor C em $\mathbb{R}^n$, seja C^Π a projeção de C sobre Π. Para qualquer par de vetores C, D em $\mathbb{R}^n$, seja $Z = C + iD \in \mathbb{C}^n$, e defina $Z^\Pi = C^\Pi + iD^\Pi$. Então*

$$Z^\Pi = \langle Z, W\rangle \frac{W}{|W|^2} + \langle Z, \bar{W}\rangle \frac{\bar{W}}{|W|^2},$$

onde $\langle\ ,\rangle$ denota o produto Hermitiano usual sobre $\mathbb{C}^n$.

Demonstração: Mostrar

$$Z^\Pi = \langle Z, W\rangle \frac{W}{|W|^2} + \langle Z, \bar{W}\rangle \frac{\bar{W}}{|W|^2},$$

é equivalente a mostrar que

$$Z^\Pi = \langle Z, A\rangle \frac{A}{|A|^2} + \langle Z, \bar{B}\rangle \frac{\bar{B}}{|B|^2}.$$

Fazendo a identificação $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $A = (A, 0)$ e $B = (0, B)$, onde $A, B \in \mathbb{R}^n$, com $|A| = |B|$

e $A \cdot B = 0$ segue que

$$\begin{aligned} Z^{\Pi} &= Z \cdot A \frac{A}{|A|^2} + Z \cdot B \frac{\bar{B}}{|B|^2} \\ &= \langle A, \bar{Z} \rangle \frac{A}{|A|^2} + \langle B, \bar{Z} \rangle \frac{\bar{B}}{|B|^2} \\ &= \left\langle Z, \bar{A} \right\rangle \frac{A}{|A|^2} + \langle Z, \bar{B} \rangle \frac{\bar{B}}{|B|^2} \\ &= \langle Z, A \rangle \frac{A}{|A|^2} + \langle Z, B \rangle \frac{\bar{B}}{|B|^2}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $A, B \in \mathbb{R}^n$ e a propriedade $\langle X, Y \rangle = \overline{\langle Y, X \rangle}$ do produto Hermitiano usual sobre $\mathbb{C}^n$. $\square$

Aplicamos o Lema 3.1.4 com $W = \Phi$, fazendo Π como o plano tangente a nossa superfície e $Z = \Phi_{\bar{z}}$. Podemos escrever (3.5) como $\Phi \cdot \Phi = 0$, logo

$$0 = (\Phi \cdot \Phi)_{\bar{z}} = 2\Phi \cdot \Phi_{\bar{z}} = 2 \left\langle \Phi_{\bar{z}}, \bar{\Phi} \right\rangle.$$

Assim pelo Lema 3.1.4,

$$(\Phi_{\bar{z}})^{\Pi} = \frac{\Phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\Phi}}{|\Phi|^2} \Phi = \eta \Phi,$$

onde

$$\eta = \Phi_{\bar{z}} \cdot \bar{\Phi} / |\Phi|^2. \tag{3.8}$$

Além disso, denotamos por V a componente de $\Phi_{\bar{z}}$ ortogonal a Π, e temos que

$$V = \Phi_{\bar{z}} - (\Phi_{\bar{z}})^{\Pi} = \Phi_{\bar{z}} - \eta \Phi. \tag{3.9}$$

Uma vez que o vetor curvatura média H é ortogonal ao plano Π, obtemos duas equações tomando as componentes tangente e ortogonal de (3.7)

$$(\log \psi)_{\bar{z}} = -\eta. \tag{3.10}$$

$$|\Phi|^2 \bar{\psi} H = V, \tag{3.11}$$

Teorema 3.1.5. *Seja S uma superfície em $\mathbb{R}^n$ dada localmente por uma aplicação conforme $X : D \to \mathbb{R}^n$, onde D é um domínio de $\mathbb{R}^2$ simplesmente conexo. Seja Φ a aplicação de Gauss de S no sentido de $G(z) = [\frac{\partial X}{\partial \bar{z}}]$ e $\frac{\partial X}{\partial z} = \psi\Phi$. Defina as expressões η e V de Φ por (3.8) e (3.9) respectivamente. Então para todo $z \in D$, temos que*

$$V(z) = R(z)e^{i\alpha(z)}, \tag{3.12}$$

onde $R(z)$ é um vetor real. Além disso, no conjunto onde $V(z) \neq 0$, a função $\alpha(z)$ é unicamente determinada módulo 2π, e satisfaz

$$\alpha_{z\bar{z}} = Im\{\eta_z\}. \tag{3.13}$$

Demonstração: Façamos $\rho = |\psi|$ e escrevamos

$$\psi = \rho e^{-i\alpha}, \tag{3.14}$$

onde α é unicamente determinado módulo 2π quando $\rho \neq 0$. Então (3.11) pode ser escrito como $V = \rho|\Phi|^2 e^{i\alpha}H$, o que prova (3.12). Quando $V \neq 0$ precisamos ter $\rho \neq 0$, e substituindo (3.14) em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} (\log\rho e^{-i\alpha})_{\bar{z}} &= -\eta \\ (\log\rho)_{\bar{z}} - i\alpha_{\bar{z}} &= -\eta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\log\rho_{z\bar{z}} = i\alpha_{z\bar{z}} - \eta_z$$

e portanto a equação (3.13) segue do fato de que $(\log\rho)_{z\bar{z}}$ e $\alpha_{z\bar{z}}$ são reais. $\square$

3.2 Superfícies em $\mathbb{R}^4$

Começamos esta seção relembrando alguns fatos do Capítulo 2, com respeito à quádrica $Q_2 \subset \mathbb{C}P^3$. A aplicação φ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi : (w_1, w_2) \longrightarrow (1 + w_1w_2, i(1 - w_1w_2), w_1 - w_2, -i(w_1 + w_2))$$

tem a propriedade que $\varphi^2 = \sum_{k=1}^{4} \varphi_k^2 = 0$. Logo, $[\varphi]$ toma valores em $Q_2 = \{[Z] \in \mathbb{C}P^3; Z^2 = 0\}$. Sobre $\varphi(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$, φ^{-1} é dada por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \longmapsto (w_1, w_2) = (\frac{z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2}, \frac{-z_3 + iz_4}{z_1 - iz_2}). \tag{3.15}$$

Mostramos no Capítulo 2 que φ, se estende a uma aplicação $[\varphi]$ de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ sobre Q_2, que é um homeomorfismo. Se consideramos $\mathbb{C}P^3$ com a métrica de Fubini-Study de curvatura holomorfa constante 2, pelo Apêndice A, segue que a métrica induzida sobre Q_2, expressa em termos de (w_1, w_2), tem a forma

$$ds^2 = \frac{2|dw_1|^2}{(1+|w_1|^2)^2} + \frac{2|dw_2|^2}{(1+|w_2|^2)^2},$$

de onde concluímos que Q_2 é o produto de duas esferas padrão de curvatura Gaussiana constante 2. Agora usamos estes resultados para deduzir condições necessárias sobre a aplicação de Gauss de uma superfície orientada imersa em $\mathbb{R}^4$. Suponha que $S \subset \mathbb{R}^4$ seja uma superfície cuja aplicação de Gauss é dada por $G : S \longrightarrow Q_2$. Podemos escrever Q_2 como um produto de esferas $Q_2 = S_1 \times S_2$, onde S_k é uma esfera padrão de raio $1/\sqrt{2}$. Denote por π_k a projeção de Q_2 sobre cada S_k, k=1,2. Usando a variável complexa w_k para parametrizar S_k, onde w_k é dada em termos de coordenadas homogêneas sobre $\mathbb{C}P^3$ por (3.15), o conjugado $\overline{G}$ da aplicação de Gauss pode ser expresso em termos de um parâmetro conforme local z sobre S, por um par de funções $w_1 = f_1(z)$, $w_2 = f_2(z)$. Podemos então escrever

$$\overline{G}(z) = [\Phi(z)],$$

onde,

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \varphi(f_1(z), f_2(z)) \\ &= (1 + f_1(z) f_2(z), i(1 - f_1(z) f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), -i(f_1(z) + f_2(z))). \end{aligned}$$

Para enunciar o principal resultado deste capítulo, precisamos introduzir funções auxiliares obtidas das funções f_1, f_2 que descrevem a aplicação de Gauss. São elas

$$F_k = \frac{(f_k)_{\bar{z}}}{1+|f_k|^2} \quad \hat{F}_k = \frac{(f_k)_z}{1+|f_k|^2}, \quad k = 1, 2. \tag{3.16}$$

O teorema a seguir será utilizado na demonstração do Teorema 4.0.3.

Teorema 3.2.1. *Seja S uma superfície orientada imersa em $\mathbb{R}^4$ cuja aplicação de Gauss é dada* *localmente por*

$$\Phi(z) = (1 + f_1(z) f_2(z), i(1 - f_1(z) f_2(z)), f_1(z) - f_2(z), -i(f_1(z) + f_2(z))),$$

via um par de funções $f_1,\ f_2$*, onde z é um parâmetro conforme local em S. Então*

$$|F_1| \equiv |F_2|.$$

Demonstração: Vamos aplicar o Teorema (3.1.5). Primeiro expressaremos a função

$$\eta = \Phi_{\bar{z}}.\bar{\Phi}/\|\Phi\|^2,$$

e a função a valores vetoriais complexos

$$V = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi,$$

em termos das funções f_j e F_j. Uma vez que,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\bar{z}} &= ((f_1)_{\bar{z}} f_2 + f_1 (f_2)_{\bar{z}}, -i((f_1)_{\bar{z}} f_2 + f_1 (f_2)_{\bar{z}}), (f_1)_{\bar{z}} - (f_2)_{\bar{z}}, -i((f_1)_{\bar{z}} + (f_2)_{\bar{z}})) \\
&= (f_1)_{\bar{z}} (f_2, -i f_2, 1, i) + (f_2)_{\bar{z}} (f_1, -i f_1, -1, -i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|^2 &= \Phi\bar{\Phi} \\
&= 2(1 + |f_1|^2)(1 + |f_2|^2),
\end{aligned}$$

e

$$F_k = \frac{(f_k)_{\bar{z}}}{1 + |f_k|^2}, \quad k = 1, 2,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\eta &= (\frac{F_1}{2(1+|f_2|^2)}(f_2,-if_2,1,-i)+\frac{F_2}{2(1+|f_1|^2)}(f_1,-if_1,-1,-i))\cdot \\
&\quad \cdot(1+\bar{f_1}\bar{f_2}, i(-1+\bar{f_1}\bar{f_2}), \bar{f_1}-\bar{f_2}, i(\bar{f_1}+\bar{f_2})) \\
&= \frac{F_1}{2(1+|f_2|^2)}((1+\bar{f_1}\bar{f_2})f_2+f_2(-1+\bar{f_1}\bar{f_2})+\bar{f_1}-\bar{f_2}+\bar{f_1}+\bar{f_2})+ \\
&\quad +\frac{F_2}{2(1+|f_1|^2)}((1+\bar{f_1}\bar{f_2})f_1+f_1(-1+\bar{f_1}\bar{f_2})-\bar{f_1}+\bar{f_2}+\bar{f_1}+\bar{f_2}) \\
&= \frac{F_1}{2(1+|f_2|^2)}(f_2+2\bar{f_1}|f_2|^2-f_2+2\bar{f_1})+\frac{F_2}{2(1+|f_1|^2)}(f_1+2\bar{f_2}|f_1|^2+2f_2) \\
&= \frac{F_1}{2(1+|f_2|^2)}2\bar{f_1}(1+|f_2|^2)+\frac{F_2}{2(1+|f_1|^2)}2\bar{f_2}(1+|f_1|^2) \\
&= \bar{f_1}F_1+\bar{f_2}F_2.
\end{aligned}$$

Logo

$$\eta = \bar{f_1}F_1+\bar{f_2}F_2. \tag{3.17}$$

Agora vamos definir uma função a valores vetoriais complexos $A(z)$ por

$$A = (f_2-\bar{f_1}, -i(f_2+\bar{f_1}), 1+\bar{f_1}f_2, -i(1-\bar{f_1}f_2))$$

e vamos mostrar que

$$V = F_1A - F_2\bar{A}.$$

De fato, pela definição de Φ, A e a expressão de η obtida em (3.17) segue que

$$\begin{aligned}
V &= \Phi_{\bar{z}}-\eta\Phi \\
&= \Phi_{\bar{z}}-(\bar{f_1}F_1+\bar{f_2}F_2)(1+f_1f_2, i(1-f_1f_2), f_1-f_2, -i(f_1+f_2)) \\
&= \Phi_{\bar{z}}-(\frac{\bar{f_1}f_{1\bar{z}}}{(1+|f_1|^2)}+\frac{\bar{f_2}f_{2\bar{z}}}{(1+|f_2|^2)})(1+f_1f_2, i(1-f_1f_2), f_1-f_2, -i(f_1+f_2)) \\
&= \Phi_{\bar{z}}-(\frac{\bar{f_1}f_{1\bar{z}}}{(1+|f_1|^2)}+\frac{\bar{f_2}f_{2\bar{z}}}{(1+|f_2|^2)})(1+f_1f_2), (\frac{\bar{f_1}f_{1\bar{z}}}{(1+|f_1|^2)}+\frac{\bar{f_2}f_{2\bar{z}}}{(1+|f_2|^2)})(i(1-f_1f_2), \\
&\quad (\frac{\bar{f_1}f_{1\bar{z}}}{(1+|f_1|^2)}+\frac{\bar{f_2}f_{2\bar{z}}}{(1+|f_2|^2)})(f_1-f_2), (\frac{\bar{f_1}f_{1\bar{z}}}{(1+|f_1|^2)}+\frac{\bar{f_2}f_{2\bar{z}}}{(1+|f_2|^2)})(-i(f_1+f_2))).
\end{aligned}$$

Façamos $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$, $V = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ e calculemos os V_j separadamente.

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{f_{1\bar{z}} f_2 (1+|f_1|^2) - \overline{f_1} f_{1\bar{z}} (1+f_1 f_2)}{(1+|f_1|^2)} + \frac{f_{2\bar{z}} f_1 (1+|f_2|^2) - \overline{f_2} f_{2\bar{z}} (1+f_1 f_2)}{(1+|f_2|^2)} \\
&= \frac{f_{1\bar{z}} f_2 - \overline{f_1} f_{1\bar{z}}}{(1+|f_1|^2)} + \frac{f_{2\bar{z}} f_1 - \overline{f_2} f_{2\bar{z}}}{(1+|f_2|^2)} \\
&= \frac{f_{1\bar{z}} (f_2 - \overline{f_1})}{(1+|f_1|^2)} + \frac{f_{2\bar{z}} (f_1 - \overline{f_2})}{(1+|f_2|^2)} \\
&= F_1 A_1 - F_2 \overline{A_1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{-i f_{1\bar{z}} f_2 (1+|f_1|^2) - \overline{f_1} f_{1\bar{z}} i (1-f_1 f_2)}{(1+|f_1|^2)} + \frac{-i f_{2\bar{z}} f_1 (1+|f_2|^2) - \overline{f_2} f_{2\bar{z}} i}{(1+|f_2|^2)} \\
&= \frac{-i f_{1\bar{z}} f_2 - i \overline{f_1} f_{1\bar{z}}}{(1+|f_1|^2)} + \frac{-i f_{2\bar{z}} f_1 - i \overline{f_2} f_{2\bar{z}}}{(1+|f_2|^2)} \\
&= \frac{-i f_{1\bar{z}} (f_2 + \overline{f_1})}{(1+|f_1|^2)} + \frac{-i f_{2\bar{z}} (f_1 + \overline{f_2})}{(1+|f_2|^2)} \\
&= F_1 A_2 - F_2 \overline{A_2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3 &= \frac{f_{1\bar{z}} (1+|f_1|^2) - \overline{f_1} f_{1\bar{z}} (f_1 - f_2)}{(1+|f_1|^2)} - \frac{f_{2\bar{z}} (1+|f_2|^2) + \overline{f_2} f_{2\bar{z}} (f_1 - f_2)}{(1+|f_2|^2)} \\
&= \frac{f_{1\bar{z}} + \overline{f_1} f_{1\bar{z}} f_2}{(1+|f_1|^2)} - \frac{f_{2\bar{z}} + \overline{f_2} f_{2\bar{z}} f_1}{(1+|f_2|^2)} \\
&= \frac{f_{1\bar{z}} (1 + \overline{f_1} f_2)}{(1+|f_1|^2)} - \frac{f_{2\bar{z}} (1 + \overline{f_2} f_1)}{(1+|f_2|^2)} \\
&= F_1 A_3 - F_2 \overline{A_3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_4 &= \frac{-i f_{1\bar{z}} (1+|f_1|^2) + \overline{f_1} f_{1\bar{z}} i (f_1 + f_2)}{(1+|f_1|^2)} + \frac{-i f_{2\bar{z}} (1+|f_2|^2) + \overline{f_2}\, \overline{f_{2\bar{z}}} i (f_1 + f_2)}{(1+|f_2|^2)} \\
&= \frac{-i f_{1\bar{z}} + \overline{f_1} f_{1\bar{z}} f_2}{(1+|f_1|^2)} + \frac{-i f_{2\bar{z}} + \overline{f_2}\, \overline{f_{2\bar{z}}} i (f_1 + f_2)}{(1+|f_2|^2)} \\
&= \frac{-i f_{1\bar{z}} (-1 + \overline{f_1} f_2)}{(1+|f_1|^2)} + \frac{-i f_{2\bar{z}} (1 - \overline{f_2} f_1)}{(1+|f_2|^2)} \\
&= F_1 A_4 - F_2 \overline{A_4}.
\end{aligned}$$

Portanto $V = F_1 A - F_2 \overline{A}$.

Temos que $A^2 \equiv 0$. Além disso,

$$\|A\|^2 = 2(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2) = \|\Phi\|^2, \tag{3.18}$$

logo A não pode se anular. Calculando

$$\begin{aligned} V_j\overline{V_k} &= (F_1A_j - F_2\overline{A_j})(F_1A_k - F_2\overline{A_k}) \\ &= |F_1|^2A_j\overline{A_k} + |F_2|^2A_k\overline{A_j} - F_1\overline{F_2}A_jA_k - F_2\overline{F_1}\overline{A_j}\overline{A_k} \\ &= |F_1|^2A_j\overline{A_k} + |F_2|^2A_k\overline{A_j} - 2Re(F_1\overline{F_2}A_jA_k) \\ &= (|F|_1{}^2 + |F|_2{}^2)Re(A_j\overline{A_k}) + i(|F|_1{}^2 + |F|_2{}^2)Im(A_j\overline{A_k}) - 2Re(F_1\overline{F_2}A_jA_k). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Segue de (3.18), (3.19) e de $A^2 = \sum_{i=1}^4 A_j^2 = 0$ que

$$\begin{aligned} \|V\|^2 &= \sum_{j=1}^4 V_j\overline{V_j} = (|F_1|^2 + |F_2|^2)\|A\|^2 \\ &= 2(|F_1|^2 + |F_2|^2)(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2). \end{aligned}$$

Da equação acima concluímos que $V(z) = 0$ se, e somente se, $F_1(z) = F_2(z) = 0$ ou equivalentemente se, e somente se, $(f_1)_{\overline{z}}(z) = (f_2)_{\overline{z}}(z) = 0$. Em particular, sempre que $V(z) = 0$, temos que $|F_1| \equiv |F_2|$. A condição que $V(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$ do Teorema 3.1.5, a saber que V é igual a uma função a valores vetoriais reais multiplicada por uma função complexa não nula, sempre que $V(z) \neq 0$, é equivalente a requerer que a matriz hermitiana 4×4 $V^T\overline{V}$ seja uma matriz real. De fato,

$$V^T\overline{V} = e^{i\alpha(z)}(r_1,r_2,r_3,r_4)^T e^{-i\alpha(z)}(r_1,r_2,r_3,r_4) \in M_4(\mathbb{R}).$$

Da expressão das componentes de $V_j\overline{V_k}$ dadas em (3.19) segue que $V^T\overline{V}$ é uma matriz real se, e somente se,

$$(|F_1|^2 - |F_2|^2)\mathrm{Im}(A_j\overline{A_k}) = 0 \quad j,k = 1,\ldots,4. \tag{3.20}$$

Claramente temos que se $|F_1| = |F_2|$ então (3.20) é válido.

Mostraremos que (3.20) implica $|F_1| = |F_2|$.

Assumindo que $|F_1| \neq |F_2|$ em algum ponto $z_0 \in D$ onde $V(z_0) \neq 0$. Então em z_0 (3.20) é equivalente, uma vez que $V^T\overline{V}$ é hermitiana simétrica, às seis equações

$$\mathrm{Im}(A_j(z_0)\overline{A}_k(z_0)) = 0 \quad 1 \leq j < k \leq 4. \tag{3.21}$$

Vamos usar a definição de A para mostrar que (3.21) leva a uma contradição.

$$\begin{aligned} A_1\overline{A}_2 = (f_2 - \overline{f}_1)(f_1 + \overline{f}_2)i &= i(f_1 f_2 + |f_2|^2 - |f_1|^2 - \overline{f}_1\overline{f}_2) \\ &= i(|f_2|^2 - |f_1|^2 + 2\mathrm{Im}(f_1 f_2)). \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Im}(A_1\overline{A}_2) = |f_2|^2 - |f_1|^2$.

$$\begin{aligned} A_3\overline{A}_4 &= (1 + \overline{f}_1 f_2)i(1 - f_1\overline{f}_2) \\ &= i(1 + 2\mathrm{Im}(f_1\overline{f}_2) - |f_1|^2|f_2|^2). \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Im}(A_3\overline{A}_4) = 1 - |f_1|^2|f_2|^2$.

De (3.20) segue que $|f_1(z_0)|^2 = |f_2(z_0)|^2$ e $|f_1(z_0)|^2|f_2(z_0)|^2 = 1 \Longrightarrow |f_1(z_0)| = |f_2(z_0)| = 1$.

Vamos encontrar as outras 4 equações de (3.20) em z_0, lembrando que vale $|f_1(z_0)| = |f_2(z_0)| = 1$.

$$\begin{aligned} A_1\overline{A}_3 &= (f_2 - \overline{f}_1)(1 + f_1\overline{f}_2) \\ &= f_2 + |f_2|^2 f_1 - \overline{f}_1 - \overline{f}_2|f_1|^2 \\ &= 2\mathrm{Im}(f_1 + f_2). \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Im}(A_1\overline{A}_3) = 2\mathrm{Im}(f_1 + f_2) = 0$.

$$\begin{aligned} A_1\overline{A}_4 &= (f_2 - \overline{f}_1)i(1 - f_1\overline{f}_2) \\ &= i[f_2 - |f_2|^2 f_1 - \overline{f}_1 + \overline{f}_2|f_1|^2] \\ &= 2i\mathrm{Re}(f_2 - f_1). \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Im}(A_1\overline{A}_4) = 2\mathrm{Re}(f_2 - f_1) = 0$.

$$\begin{aligned} A_2\overline{A}_3 &= -i(f_2 + \overline{f}_1)(1 + f_1\overline{f}_2) \\ &= -i[f_2 + |f_2|^2 f_1 + \overline{f}_1 + \overline{f}_2|f_1|^2] \\ &= -2i\mathrm{Re}(f_1 + f_2). \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Im}(A_2\bar{A}_3) = -2\mathrm{Re}(f_1 + f_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
A_2\bar{A}_4 &= -i(f_2 + \bar{f_1})i(1 - f_1\bar{f_2}) \\
&= [f_2 - |f_2|^2 f_1 + \bar{f_1} - \bar{f_2}|f_1|^2] \\
&= 2\mathrm{Im}(-f_1 + f_2).
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathrm{Im}(A_2\bar{A}_4) = 2\mathrm{Im}(f_2 - f_1) = 0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(A_1\bar{A}_3) &= 2\mathrm{Im}(f_1 + f_2) = 0, \\
\mathrm{Im}(A_1\bar{A}_4) &= 2\mathrm{Re}(f_2 - f_1) = 0, \\
\mathrm{Im}(A_2\bar{A}_3) &= -2\mathrm{Re}(f_1 + f_2) = 0, \\
\mathrm{Im}(A_2\bar{A}_4) &= 2\mathrm{Im}(f_2 - f_1) = 0, \text{ em } z_0.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

De (3.22), temos que $f_1(z_0) + f_2(z_0) = f_2(z_0) - f_1(z_0) = 0 \Longrightarrow f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$, o que é um absurdo pois supomos $|f_1(z_0)| = |f_2(z_0)| = 1$. Assim, (3.20) implica que $|F_1| \equiv |F_2|$, e conseqüentemente, (3.20) é equivalente a $|F_1| \equiv |F_2|$, sempre que $V(z) \neq 0$. $\square$

Capítulo 4

Superfícies de Curvatura Média Constante em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$

Neste capítulo estamos interessados na demonstração dos seguintes teoremas.

Teorema 4.0.2. *Seja S uma superfície completa orientada de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$. Se a imagem de S pela aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério aberto, então S é um plano. Se a imagem pela aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério fechado, então S é um plano ou um cilindro circular reto.*

Teorema 4.0.3. *Seja S uma superfície completa orientada em $\mathbb{R}^4$, cujo vetor curvatura média é paralelo e não nulo. Suponha que o Grassmanniano de 2-planos orientados em $\mathbb{R}^4$ é representado como um produto de esferas $S_1 \times S_2$. Então a imagem de S pela aplicação de Gauss generalizada é tal que nenhuma das projeções em S_1 ou S_2 situa-se em um hemisfério aberto. Se quaisquer das projeções situam-se em um hemisfério fechado, então S é um cilindro circular reto em algum $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ou um produto de círculos.*

Primeiramente vamos fazer algumas considerações sobre os teoremas acima. Notamos que no caso de superfícies mínimas um fato muito importante é que sua aplicação de Gauss é anti-holomorfa, fato que demonstramos no Teorema 1.1.3. A propriedade correspondente para superfícies de curvatura média paralela é que sua aplicação de Gauss é harmônica (ver [17]). O principal fato que utilizaremos na demonstração do Teorema 4.0.2 é a equação

$$\Delta \nu + \|d\nu\|^2 \nu = 0, \tag{4.1}$$

para a normal unitária ν a uma superfície S de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$, onde o coeficiente $\|d\nu\|^2$ pode ser visto como a norma ao quadrado da segunda forma fundamental de S.

Uma interpretação de (4.1) é que a aplicação de Gauss é harmônica, o que podemos ver pela observação a seguir.

Observação 4.0.4. A equação (4.1) é um caso especial da equação

$$\Delta X + \frac{1}{r^2}\|dX\|^2 X = 0, \tag{4.2}$$

caracterizando as aplicações harmônicas de uma superfície S em uma esfera de raio r em $\mathbb{R}^n$. A saber, se

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é uma aplicação cuja imagem situa-se em uma subvariedade N de $\mathbb{R}^n$, então a aplicação $X : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é harmônica se, e somente se, em cada ponto de S o n-vetor ΔX é normal a N em $X(p)$. No nosso caso, quando $N = S^{n-1}(r)$, a condição se torna

$$\Delta X = \lambda X, \tag{4.3}$$

para alguma função λ em S. Assim (4.2) implica que a aplicação $X : S \longrightarrow S^{n-1}(r)$ é harmônica. Reciprocamente, se $z = x + iy$ é um parâmetro conforme local em S, então uma vez que $X \cdot X = r^2$, temos

$$X_z \cdot X = 0$$

e

$$X_{\bar{z}z} \cdot X + X_z \cdot X_{\bar{z}} = 0 \Longleftrightarrow X_{\bar{z}z} \cdot X = -X_z \cdot X_{\bar{z}}.$$

Como

$$X_z = \frac{1}{2}(X_x - iX_y) \quad \text{e} \quad X_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(X_x + iX_y),$$

$$X_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(\|X_x\|^2 + \|X_y\|^2) \Longleftrightarrow 4X_{\bar{z}z} = \|X_x\|^2 + \|X_y\|^2 = \|dX\|^2.$$

Assim,

$$\Delta X \cdot X = 4X_{\bar{z}z} \cdot X = -4X_z \cdot X_{\bar{z}} = -\|dX\|^2. \tag{4.4}$$

Portanto, se vale a igualdade (4.3), então $\Delta X \cdot X = \lambda \|X\|^2 = \lambda r^2$ e por (4.4), $\lambda = -\|dX\|^2/r^2$. Assim, também vale (4.2).

Este capítulo é baseado no trabalho de Hoffman, Osserman e Schoen [11].

4.1 Demonstração do Teorema 4.0.2

Teorema 4.1.1. *(Teorema de Uniformização) A superfície de recobrimento universal de qualquer superfície de Riemann é conformemente equivalente a um disco, ao plano ou à esfera.*

Demonstração: Ver [1] página 181. □

Teorema 4.1.2. *(Teorema de Liouville para funções subharmônicas) Se u é uma função subharmônica no plano inteiro exceto possivelmente na origem e se u é uniformemente limitada superiomente então u é uma constante.*

Demonstração: Ver [16] páginas 128-130. □

Teorema 4.1.3. *(Princípio do Máximo para funções subharmônicas) Seja $\Delta u \geq 0$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$ e suponha que exista um ponto $y \in \Omega$ tal que $u(y) = sup_{\Omega} u$. Então u é constante.*

Demonstração: Ver [7] página 15. □

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema 4.0.2.

Demonstração: Sejam S uma superfície completa de curvatura média constante em $\mathbb{R}^3$ e $\tilde{S}$ a superfície de recobrimento universal de S. Se a imagem de S pela aplicação de Gauss situa-se em um hemisfério, então o mesmo é válido para $\tilde{S}$. Pelo Teorema de Uniformização temos três possibilidades.

Caso 1. $\tilde{S}$ é conforme a uma 2-esfera.

Este caso não pode ocorrer, uma vez que a imagem de uma esfera pela aplicação de Gauss contém todos os pontos da esfera. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [3], página 482.

Caso 2. $\tilde{S}$ é conforme ao plano.

Por hipótese, temos que S tem curvatura média constante. Logo sua aplicação de Gauss é harmônica. Assim, conseguimos uma aplicação v do plano na esfera unitária satisfazendo (4.1). Podemos assumir que o hemisfério contendo a imagem é o hemisfério inferior. Neste caso, $-1 \leq v_3 \leq 0$. Como por (4.1) temos que

$$\Delta v_3 = -\|dv\|^2 v_3,$$

segue que v_3 é uma função subharmônica limitada. Como a noção de subharmonicidade é invariante por transformações conformes, e temos que $\tilde{S}$ é conforme ao plano, utilizando o Teorema 4.1.2, segue que v_3 é constante. Observamos que se v_3 é uma constante não nula então, pela equação $\Delta v_3 = -\|dv\|^2 v_3$, temos que $\|dv\|^2 = 0$. Logo $v =$constante, o que nos fornece um vetor fixo na esfera, e conseqüentemente S é um plano. Se $v_3 = 0$ então o vetor vertical e_3 situa-se no espaço tangente a S em todo ponto. Isto implica que por cada ponto de S passa uma reta paralela a e_3 e situada inteiramente em S. Assim, S é um cilindro sobre uma curva plana. Como S tem curvatura média constante, a curva plana é um círculo ou uma reta. Portanto S é um plano ou um cilindro circular reto.

Caso 3. $\tilde{S}$ é conforme ao disco unitário.

Vamos mostrar que este caso não pode ocorrer. Vamos usar novamente a equação (4.1) e notar que

$$\begin{aligned}
\|dv\|^2 &= \sum_{i,j}^{2} |B_{ij}|^2 \\
&= |B_{11}|^2 + 2|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 \\
&= |B_{11} + B_{22}|^2 + 2(|B_{12}|^2 - B_{11}B_{22}) \\
&= 4H^2 - 2K,
\end{aligned}$$

onde dv é a segunda forma fundamental de S, H é a curvatura média de S e K é a curvatura gaussiana de S. Assim v_3 satisfaz a equação

$$\Delta v_3 - 2Kv_3 + 4H^2 v_3 = 0.$$

Assumindo novamente que a imagem pela aplicação de Gauss situa-se no hemisfério inferior, então $-1 \leq v_3 \leq 0$. Por (4.1) temos $\Delta v_3 = -\|dv\|^2 v_3$. Assim v_3 é subharmônica. Pelo Princípio do Máximo para funções subharmônicas, se $v_3 = 0$ em qualquer ponto interior então $v_3 = 0$. Mas, pelo que vimos no Caso 2, isto implica que S é um plano ou um cilindro circular reto, o que força $\tilde{S}$ ser um plano e não um disco. Assim concluímos que v_3 é estritamente negativo, pois $\tilde{S}$ não é um plano. Mas [5] (corol. 3 pg. 205) demonstra que quando K é a curvatura Gaussiana de uma métrica conforme completa no disco unitário, então não existe solução negativa da equação

$$\Delta v_3 - 2Kv_3 + 4H^2 v_3 = 0.$$

O que completa a prova do teorema. □

4.2 Demonstração do Teorema 4.0.3

Na demonstração vamos usar os seguintes fatos com relação ao Grassmanniano de 2-planos orientados em $\mathbb{R}^4$ e a aplicação de Gauss de superfícies em $\mathbb{R}^4$. O $G_{2,4}$ pode ser identificado com o produto $S^2 \times S^2$, onde cada fator é uma 2-esfera padrão de raio $1/\sqrt{2}$, resultado obtido no Apêndice A. A representação produto de $G_{2,4}$ nos permite associar à aplicação de Gauss g de uma superfície orientada S em $\mathbb{R}^4$ um par de aplicações $g_1 = \pi_1 \circ g$ e $g_2 = \pi_2 \circ g$, onde cada g_k é uma projeção de g em um fator S^2.

Seja f_k a aplicação a valores complexos obtida pela composição de g_k com a projeção estereográfica. Em [17], temos que uma superfície S tem vetor curvatura média paralelo se, e somente se, sua aplicação de Gauss g é harmônica, o que é equivalente a cada g_k ser harmônica. A harmonicidade da aplicação g_k pode ser expressa pela equação

$$\Delta v_k + 2\|dv_k\|^2 v_k = 0, \tag{4.5}$$

onde v_k representa o vetor posição sobre a esfera S_k, considerada como uma esfera padrão de raio $1/\sqrt{2}$ em $\mathbb{R}^3$.

Utilizaremos vários fatos com relação às aplicações g_1, g_2, e suas funções correspondentes f_1 e f_2. Vamos precisar das funções F_k e $\hat{F}_k$, obtidas em (3.16). Relembrando,

$$F_k = \frac{(f_k)_{\bar{z}}}{1+|f_k|^2}, \quad \hat{F}_k = \frac{(f_k)_z}{1+|f_k|^2},$$

onde z é um parâmetro isotérmico local em S. Notamos que se f_k é composta com uma transformação de Möbius, correspondendo a uma rotação da esfera, então as quantidades $|F_k|$ e $|\hat{F}_k|$ permanecem invariantes. Assim não existem singularidades nos pontos onde $f_k = \infty$, como podemos ver pelo seguinte lema.

Lema 4.2.1. *Seja $W = R[w]$ uma transformação de Möbius correspondendo a uma rotação da* *esfera de Riemann,*

$$W = \frac{aw+b}{-\bar{b}w+\bar{a}} \quad onde\ |a|^2+|b|^2 = 1.$$

Então as quantidades $|F|$ e $|\hat{F}|$ permanecem invariantes quando trocamos a função $w = f(z)$ pela função $W = R[f(z)]$.

Demonstração: Vamos mostrar que $\hat{F}(W) = \hat{F}(f)$ e $F(W) = F(f)$. De fato,

$$F(W) = \frac{W_{\bar{z}}}{1+|W|^2}, \text{ onde } W = \frac{af(z)+b}{-\bar{b}f(z)+\bar{a}}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}} &= \frac{af_{\bar{z}}(-\bar{b}f+\bar{a})+(af+b)\bar{b}f_{\bar{z}}}{(-\bar{b}f(z)+\bar{a})^2} \\ &= \frac{f_{\bar{z}}(|a|^2+|b|^2)}{(-\bar{b}f+\bar{a})^2} \\ &= \frac{f_{\bar{z}}}{(-\bar{b}f+\bar{a})^2}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 1+|W|^2 &= 1+\frac{(af+b)}{(-\bar{b}f+\bar{a})}\frac{(\bar{a}\bar{f}+\bar{b})}{(-b\bar{f}+a)} \\ &= 1+\frac{|a|^2(|f|^2-1)+1+2Re(a\bar{b}f)}{(-\bar{b}f+\bar{a})(-b\bar{f}+a)} \\ &= \frac{1+|f|^2}{(-\bar{b}f+\bar{a})(-b\bar{f}+a)}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos acima para $W_{\bar{z}}$ e $1+|W|^2$ na expressão de $F(W)$, segue que

$$\begin{aligned} F(W) &= \frac{W_{\bar{z}}}{1+|W|^2} \\ &= \frac{f_{\bar{z}}}{(1+|f|^2)}\frac{(-\bar{b}f+\bar{a})(-b\bar{f}+a)}{1+|f|^2} \\ &= F(f)\frac{(-\bar{b}f+\bar{a})(-b\bar{f}+a)}{1+|f|^2}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
|F(W)|^2 &= \frac{|W_{\bar{z}}|^2}{(1+|W|^2)^2} \\
&= |F(f)|^2 \frac{(-\bar{b}f+\bar{a})^2(-b\bar{f}+a)^2}{(-bf+\bar{a})^2(-b\bar{f}+a)^2} \\
&= |F(f)|^2.
\end{aligned}$$

Assim $|F(W)| = |F(f)|$ e, portanto, $|F|$ é invariante por uma transformação de Möbius correspondendo a uma rotação da esfera de Riemann. Analogamente, temos que $|\hat{F}|$ também é invariante. $\square$

Corolário 4.2.2. *Seja S_0 uma superfície de Riemann e seja $g : S_0 \longrightarrow S^2(r)$ uma aplicação diferenciável de S_0 em uma esfera padrão. Suponha que g é representada em termos de uma coordenada local z sobre S_0 por $w = f(z)$, onde f assume valores no plano estendido. Então as funções associadas $|F|$ e $|\hat{F}|$ definidas por (3.16) são funções diferenciáveis inclusive nos pontos onde $f = \infty$.*

Demonstração: Temos que $|F|$ e $|\hat{F}|$ são diferenciáveis sempre que $f \neq \infty$. Em uma vizinhança de um ponto onde $f = \infty$, fazemos uma rotação $R[W]$ levando ∞ a um ponto finito e usamos a invariância de $|F|$ e $|\hat{F}|$ por uma rotação da esfera de Riemann obtida pelo Lema 4.2.1. $\square$

Para a demonstração do Teorema 4.0.3, os fatos seguintes são utilizados na seqüência em que são apresentados.

(1) Se $e(g)$ denota a densidade de energia da aplicação de Gauss g, então

$$e(g) = e_1 + e_2$$

onde e_k denota a densidade de energia de g_k.

De fato, usando a definição da métrica produto, (ver por exemplo [4] página 46), e a expressão para a densidade de energia da aplicação harmônica g em função da métrica de $S_1 \times S_2$, (ver [13]), com alguns cálculos segue o resultado desejado.

(2) Em termos de f_k,

$$\lambda^2 e_k = 2[|F_k|^2 + |\hat{F}_k|^2], \tag{4.6}$$

onde a métrica em S é dada por $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$.

De fato, se $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação diferenciável entre as superfícies M e N munidas de métricas conformes, dadas localmente por $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$ em M e $d\sigma^2 = \mu^2|dw|^2$ em N, então a densidade de energia de f, que é dada por

$$e(f) = \tfrac{1}{2}\|df\|^2,$$

se decompõe nas componentes

$$e(f) = \varepsilon_1(f) + \varepsilon_2(f),$$

onde

$$\varepsilon_1(f) = \frac{\mu^2}{\lambda^2}|w_z|^2, \quad \varepsilon_2(f) = \frac{\mu^2}{\lambda^2}|w_{\bar{z}}|^2, \tag{4.7}$$

e f é representada localmente na forma $w = f(z)$ (ver [9]).

Vamos tratar o caso particular: $N = S^2(1/\sqrt{2})$, a esfera padrão de raio $1/\sqrt{2}$. Se w é o parâmetro conforme obtido por uma transformação conforme de $S^2(1/\sqrt{2})$ em $S^2(1)$ seguido pela projeção estereográfica então

$$\mu = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{1+|w|^2}.$$

Assim, se g aplica S em $S^2(1/\sqrt{2})$, as equações (4.7) se reduzem a

$$\varepsilon_1(g) = \frac{\mu^2}{\lambda^2}|w_{1z}|^2 = \frac{2}{\lambda^2}\frac{|f_{1z}|^2}{(1+|f_1|^2)^2},$$

e

$$\varepsilon_2(g) = \frac{\mu^2}{\lambda^2}|w_{2\bar{z}}|^2 = \frac{2}{\lambda^2}\frac{|f_{2\bar{z}}|^2}{(1+|f_2|^2)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e_k &= \frac{\mu^2}{\lambda^2}|w_{kz}|^2 + \frac{\mu^2}{\lambda^2}|w_{k\bar{z}}|^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2}\frac{|f_{kz}|^2}{(1+|f_k|^2)^2} + \frac{2}{\lambda^2}\frac{|f_{k\bar{z}}|^2}{(1+|f_k|^2)^2} \\ &= \frac{2}{\lambda^2}[|F_k|^2 + |\hat{F}_k|^2], \end{aligned}$$

onde a métrica em S é dada por $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$.

(3) Se J_k denota o Jacobiano da aplicação g_k, então

$$\lambda^2 J_k = 2[|\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2]. \tag{4.8}$$

De fato, o Jacobiano J de uma aplicação complexa $w = f(z)$, onde $f = \varphi + i\psi$, é dado por

$$J = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x.$$

Como

$$f_z = \frac{1}{2}(\varphi_x - i\varphi_y) + \frac{i}{2}(\psi_x - i\psi_y), \quad \text{e } f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\varphi_x + i\varphi_y) + \frac{i}{2}(\psi_x + i\psi_y),$$

temos que

$$\begin{aligned} |f_z|^2 &= \frac{1}{4}[(\varphi_x + \psi_y) + i(-\varphi_y + \psi_x)][(\varphi_x + \psi_y) - i(-\varphi_y + \psi_x)] \\ &= \frac{1}{4}[(\varphi_x + \psi_y)^2 + (-\varphi_y + \psi_x)^2] \\ &= \frac{1}{4}(\varphi_x^2 + \psi_y^2 + 2\varphi_x\psi_y + \varphi_y^2 + \psi_x^2 - 2\varphi_y\psi_x), \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned} |f_{\bar{z}}|^2 &= \frac{1}{4}[(\varphi_x - \psi_y) + i(\varphi_y + \psi_x)][(\varphi_x - \psi_y) - i(\varphi_y + \psi_x)] \\ &= \frac{1}{4}[(\varphi_x - \psi_y)^2 + (\varphi_y + \psi_x)^2] \\ &= \frac{1}{4}(\varphi_x^2 + \psi_y^2 - 2\varphi_x\psi_y + \varphi_y^2 + \psi_x^2 + 2\varphi_y\psi_x). \end{aligned}$$

Assim,

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x = J.$$

Os fatores $1/\lambda^2$ e $2/(1+|f|^2)^2$, que aparecem em J_k, provêm das parametrizações conformes da superfície S e da esfera S_k, respectivamente. Assim,

$$\lambda^2 J_k = \frac{2}{(1+|f|^2)^2}(|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2) = 2[|\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2].$$

(4)

$$|F_1| \equiv |F_2|. \tag{4.9}$$

Resultado demonstrado no Teorema 3.2.1.

(5) A curvatura Gaussiana da superfície S é dada por

$$K = J_1 + J_2. \tag{4.10}$$

Usando a fórmula para a curvatura Gaussiana em termos de parâmetros isotérmicos, isto é, $K = -\frac{2}{\lambda^2}(\log\lambda^2)_{z\bar{z}}$, e (4.8), segue que mostrar (4.10) é equivalente a mostrar que

$$-\frac{2}{\lambda^2}(\log\lambda^2)_{z\bar{z}} = \frac{2}{\lambda^2}(|\hat{F}_1|^2 - |F_1|^2 + |\hat{F}_2|^2 - |F_2|^2)$$

ou seja,

$$-(\log\lambda^2)_{z\bar{z}} = |\hat{F}_1|^2 - |F_1|^2 + |\hat{F}_2|^2 - |F_2|^2.$$

Vamos mostrar então a igualdade acima. Suponha que S é dada localmente por $X(z)$ onde z é um parâmetro conforme local. Então a métrica em S é da forma $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$, onde $\lambda^2 = 2|X_z|^2$. Também temos que $X_z = \psi\Phi$, para alguma função complexa ψ que não se anula. Então $\lambda^2 = 2|\psi|^2|\Phi|^2$, logo

$$\lambda^2 = 4|\psi|^2(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2). \tag{4.11}$$

As equivalências escritas a seguir serão combinadas para assim mostrarmos (5). Pelo Lema 3.1.4, temos que

$$\eta = -(\log\psi)_{\bar{z}}. \tag{4.12}$$

Na demonstração do Teorema 3.2.1 obtemos a igualdade abaixo

$$\eta = \bar{f}_1 F_1 + \bar{f}_2 F_2. \tag{4.13}$$

Da expressão de F_k em (3.16), omitindo o índice k, obtemos

$$(\bar{f}\hat{F})_{\bar{z}} - (\bar{f}F)_z = \frac{|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2}{(1+|f|^2)^2} = |\hat{F}|^2 - |F|^2. \tag{4.14}$$

De (3) temos que

$$\lambda^2 J_k = 2[|\hat{F}_k|^2 - |F_k|^2]. \tag{4.15}$$

Utilizando (4.11) segue que

$$\begin{aligned} \log\lambda^2 &= \log 4|\psi|^2(1+|f_1|^2)(1+|f_2|^2) \\ &= \log 4 + \log|\psi|^2 + \log(1+|f_1|^2) + \log(1+|f_2|^2). \end{aligned}$$

Assim

$$(\log\lambda^2)_{\bar{z}z} = (\log|\psi|^2)_{\bar{z}z} + (\log(1+|f_1|^2))_{\bar{z}z} + (\log(1+|f_2|^2))_{\bar{z}z},$$

Como, por (4.12)

$$\begin{aligned} (\log|\psi|^2)_{\bar{z}z} &= (\log\psi\bar{\psi})_{\bar{z}z} \\ &= (\log\bar{\psi})_{\bar{z}z} + (\log\psi)_{\bar{z}z} \\ &= -\eta_z - \bar{\eta}_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Concluímos, utilizando (4.13), (4.14) e (4.15) que

$$\begin{aligned} (\log|\lambda|^2)_{\bar{z}z} &= -\eta_z - \bar{\eta}_{\bar{z}} + (\log(1+|f_1|^2))_{\bar{z}z} + (\log(1+|f_2|^2))_{\bar{z}z} \\ &= -\eta_z - \bar{\eta}_{\bar{z}} + \left(\frac{f_{1z}\bar{f_1} + f_1\bar{f}_{1z}}{1+|f_1|^2}\right)_{\bar{z}} + \left(\frac{f_{2z}\bar{f_2} + f_2\bar{f}_{2z}}{1+|f_2|^2}\right)_{\bar{z}} \\ &= -\eta_z - \bar{\eta}_{\bar{z}} + (\bar{f_1}\hat{F_1})_{\bar{z}} + (\bar{f_2}\hat{F_2})_{\bar{z}} + (f_1\bar{F_1})_{\bar{z}} + (f_2\bar{F_2})_{\bar{z}} \\ &= -(\bar{f_1}F_1 + \bar{f_2}F_2)_z + (\bar{f_1}\hat{F_1})_{\bar{z}} + (\bar{f_2}\hat{F_2})_{\bar{z}} \\ &= |\hat{F_1}|^2 - |F_1|^2 + |\hat{F_2}|^2 - |F_2|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$K = J_1 + J_2.$$

(6) Seja H o vetor curvatura média de S. Então

$$H \equiv 0 \text{ se, e somente se, } F_1 = 0 \text{ e } F_2 = 0. \tag{4.16}$$

De fato, em [8] foi provado que S é mínima se, e somente se, ambas as projeções g_1 e g_2 são anti-holomorfas, isto é, f_1 e f_2 são anti-holomorfas. Logo $f_{1\bar{z}} = 0$ e $f_{2\bar{z}} = 0$ se, e somente se, $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$.

(7) Suponha que a aplicação g_k é harmônica. Então em qualquer ponto onde $F_k \neq 0$, vale

$$\Delta\log|F_k| = 2J_k, \tag{4.17}$$

onde Δ é o operador Laplace-Beltrami em S.

A demonstração deste fato pode ser encontrada no Apêndice B.

Agora vamos combinar os sete resultados anteriores para assim demonstrar o teorema. Uma vez que S tem vetor curvatura média constante $H \neq 0$, cada g_k é uma aplicação harmônica, e por (4.16) podemos aplicar (4.17) para $k = 1,2$. Combinando (4.9) com (4.17) segue que

$$2J_1 = \Delta \log |F_1| = \Delta \log |F_2| = 2J_2 \Longleftrightarrow J_1 = J_2. \tag{4.18}$$

Aplicando novamente (4.9) com (4.15) e (4.18) segue que

$$|\hat{F}_1| = |\hat{F}_2|. \tag{4.19}$$

De (4.9), (4.19) e (4.6) segue que

$$e_1 = e_2.$$

Como $e(g) = e_1 + e_2 = 2e_1 = 2e_2$, segue que $e_k = \frac{1}{2}||d\nu_k||^2 = \frac{1}{2}e(g)$. Logo as equações (4.5) assumem a seguinte forma

$$\Delta \nu_k + 2e(g)\nu_k = 0, k = 1,2. \tag{4.20}$$

Vamos usar a hipótese de que ν_1 e ν_2 situam-se em um hemisfério. Suponhamos que isso ocorra para ν_1. Então, para algum vetor unitário fixo c, a função μ dada por

$$\mu = c \cdot \nu_1$$

satisfaz

$$\mu \leq 0. \tag{4.21}$$

Por (4.20), segue que

$$\Delta \mu = -2e(g)\mu. \tag{4.22}$$

Uma vez que $e(g) \geq 0$, temos por (4.21) e (4.22) que μ é uma função subharmônica, isto é, $\Delta \mu \geq 0$.

Afirmamos que $\mu =$ constante.

De fato, seja $\tilde{S}$ a superfície de recobrimento universal de S e $\tilde{\mu}$ o levantamento de μ a $\tilde{S}$. Então

$\tilde{\mu}$ é uma função subharmônica contínua limitada superiormente. Temos três casos a considerar.

Caso 1. $\tilde{S}$ é conforme a uma esfera. Então $\tilde{\mu}$ atinge um máximo e, conseqüentemente, é constante.

Caso 2. $\tilde{S}$ é conforme ao plano. Uma vez que $\tilde{\mu}$ é subharmônica limitada superiormente, temos pelo Teorema 4.1.2, que ela é constante.

Caso 3. $\tilde{S}$ é conforme ao disco unitário. Neste caso observamos que o coeficiente $e(g)$ em (4.22) pode ser escrito em termos da segunda forma fundamental B de S. Como

$$\begin{aligned} e(g) = ||B||^2 &= \sum_{i,j=1}^{2} |B|^2 \\ &= |B_{11}|^2 + |B_{12}|^2 + |B_{21}|^2 + |B_{22}|^2 \\ &= |B_{11}|^2 + 2|B_{12}|^2 + |B_{22}|^2 \\ &= |B_{11} + B_{22}|^2 + 2(|B_{12}|^2 - B_{11}B_{22}) \\ &= 4|H|^2 - 2K. \end{aligned}$$

Então (4.22) assume a forma

$$\Delta\tilde{\mu} + 4|H|^2\tilde{\mu} - 2K\tilde{\mu} = 0. \tag{4.23}$$

Como na demonstração do Teorema 4.0.2, obtemos em [5], que (4.23) não tem soluções negativas para uma métrica conforme completa sobre o disco unitário. Uma vez que $\tilde{\mu} \leq 0$, segue que $\tilde{\mu} = 0$. Mas pelo Princípio do Máximo para funções subharmônicas segue que $\tilde{\mu} \equiv 0$.

Assim concluímos que em quaisquer dos casos μ precisa ser constante. Pela definição de μ, segue que ν_1 situa-se sobre um círculo da esfera S^2. Mas então $J_1 = 0$, pois caso contrário temos pelo Teorema da Função Inversa que existe $p \in S$ tal que $J_1(p) \neq 0$ e ν_1 é um difeomorfismo local, isto é, ν_1 leva, localmente, abertos em abertos. Mas $\nu_1(U)$, onde U é um aberto de S, é um arco de círculo que não é aberto em $\mathbb{R}^3$, logo $J_1 \equiv 0$. Como por (4.18), temos que $J_1 = J_2$, logo $J_2 \equiv 0$ e de (4.10) concluímos que $K \equiv 0$ sobre S. Finalmente, um teorema de Hoffman em [12], garante que uma superfície de curvatura média paralela em $\mathbb{R}^4$ com curvatura Gaussiana nula situa-se sobre um cilindro circular reto em algum $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ou sobre um produto de círculos, o que conclui a demonstração do teorema.

Apêndice A

Vamos obter a expressão da métrica de Fubini-Study para $n = 4$, restrita a Q_2^*. Temos que ela é dada por

$$ds^2 = 2\frac{\sum_{j<k,j=1}^4 |z_j dz_k - z_k dz_j|^2}{[\sum_{j=1}^4 |z_j|^2]^2}$$

em termos das variáveis w_1, w_2. Como

$$z_1 = 1 + w_1 w_2, \quad z_2 = i(1 - w_1 w_2), \quad z_3 = w_1 - w_2, \quad z_4 = -i(w_1 + w_2)$$

temos

$$dz_1 = w_2 dw_1 + w_1 dw_2, \quad dz_2 = -i(w_2 dw_1 + w_1 dw_2), \quad dz_3 = dw_1 - dw_2, \quad dz_4 = -i(dw_1 + dw_2).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 |z_i|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 \\
&= (1 + w_1 w_2)(1 + \bar{w_1}\bar{w_2}) + (1 - w_1 w_2)(1 - \bar{w_1}\bar{w_2}) + (w_1 - w_2)(\bar{w_1} - \bar{w_2}) + \\
&\quad + (w_1 + w_2)(\bar{w_1} + \bar{w_2}) \\
&= 2(1 + |w_1 w_2|^2 + |w_1|^2 + |w_2|^2) \\
&= 2(1 + |w_1|^2 |w_2|^2 + |w_1|^2 + |w_2|^2) \\
&= 2(1 + |w_1|^2)(1 + |w_2|^2).
\end{aligned}$$

Vamos calcular cada fator da soma abaixo separadamente

$$\begin{aligned}
\sum_{j<k,j=1}^4 |z_j dz_k - z_k dz_j|^2 &= |z_1 d_2 - z_2 dz_1|^2 + |z_1 d_3 - z_3 dz_1|^2 + |z_1 d_4 - z_4 dz_1|^2 + \\
&\quad + |z_2 d_3 - z_3 dz_2|^2 + |z_2 d_4 - z_4 dz_2|^2 + |z_3 d_4 - z_4 dz_3|^2.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_1dz_2 - z_2dz_1 &= -i(1+w_1w_2)(w_2dw_1+w_1dw_2) - i(1-w_1w_2)(w_2dw_1+w_1dw_2)\\
&= -2i(w_2dw_1+w_1dw_2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z_1dz_2 - z_2dz_1|^2 &= 4(w_2dw_1+w_1dw_2)(\overline{w_2}d\overline{w_1}+\overline{w_1}d\overline{w_2})\\
&= 4[|w_1|^2|dw_2|^2 + w_1\overline{w_2}d\overline{w_1}dw_2 + \overline{w_1}w_2dw_1d\overline{w_2} + |w_2|^2 dw_1{}^2].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1dz_3 - z_3dz_1 &= (1+w_1w_2)(dw_1-dw_2) - (w_1-w_2)(w_2dw_1+w_1dw_2)\\
&= (1+w_2^2)dw_1 - (1+w_1^2)dw_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z_1dz_3 - z_3dz_1|^2 &= [(1+w_2^2)dw_1 - (1+w_1^2)dw_2][(1+\overline{w_2}^2)d\overline{w_1} - (1+\overline{w_1}^2)d\overline{w_2}]\\
&= (1+w_2^2)(1+\overline{w_2}^2)|dw_1|^2 + (1+w_1^2)(1+\overline{w_1}^2)|dw_2|^2 -\\
&\quad -(1+w_1^2)(1+\overline{w_2}^2)dw_2d\overline{w_1} - (1+w_2^2)(1+\overline{w_1}^2)dw_1d\overline{w_2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1dz_4 - z_4dz_1 &= -i(1+w_1w_2)(dw_1+dw_2) + i(w_1+w_2)(w_2dw_1+w_1dw_2)\\
&= i(w_2^2-1)dw_1 + i(w_1^2-1)dw_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z_1d_4 - z_4dz_1|^2 &= [i(w_2^2-1)dw_1 + i(w_1^2-1)dw_2][-i(\overline{w_2}^2-1)d\overline{w_1} - i(\overline{w_1}^2-1)d\overline{w_2}]\\
&= (|w_2|^4 - w_2^2 - \overline{w_2}^2 + 1)|dw_1|^2 + (w_2^2\overline{w_1}^2 - w_2^2 - \overline{w_1}^2 + 1)dw_1d\overline{w_2} +\\
&\quad +(w_1^2\overline{w_2}^2 - \overline{w_2}^2 - w_1^2 + 1)dw_2d\overline{w_1} + (|w_1|^4 - w_1^2 - \overline{w_1}^2 + 1)|dw_2|^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_2dz_3 - z_3dz_2 &= i(1-w_1w_2)(dw_1-dw_2) + i(w_1-w_2)(w_2dw_1+w_1dw_2)\\
&= i(1-w_2^2)dw_1 + i(w_1^2-1)dw_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z_2dz_3 - z_3dz_2|^2 &= [i(1-w_2^2)dw_1 + i(w_1^2-1)dw_2][-i(1-\overline{w_2}^2)d\overline{w_1} - i(\overline{w_1}^2-1)d\overline{w_2}]\\
&= (1-\overline{w_2}^2 - w_2^2 + |w_2|^4)|dw_1|^2 + (-1+w_2^2-\overline{w_1}^2w_2^2+\overline{w_1}^2)dw_1d\overline{w_2} +\\
&\quad +(w_1^2 - w_1^2\overline{w_2}^2 - 1 + \overline{w_2}^2)dw_2d\overline{w_1} + (1+|w_1|^4 - \overline{w_1}^2 - w_1^2)|dw_2|^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_2dz_4 - z_4dz_2 &= (1-w_1w_2)(dw_1+dw_2)+(w_1+w_2)(w_2dw_1+w_1dw_2)\\
&= (1+w_2^2)dw_1+(1+w_1^2)dw_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z_2dz_4 - z_4dz_2|^2 &= [(1+w_2^2)dw_1+(1+w_1^2)dw_2][(1+\bar{w_2}^2)d\bar{w_1}+(1+\bar{w_1}^2)d\bar{w_2}]\\
&= (1+\bar{w_1}^2+w_2^2+\bar{w_1}^2w_2^2)d\bar{w_2}dw_1+(1+|w_2|^4+w_2^2+\bar{w_2}^2)|dw_1|^2+\\
&\quad +(1+w_1^2+\bar{w_2}^2+\bar{w_1}^2w_2^2)d\bar{w_1}dw_2+(1+|w_1|^4+\bar{w_1}^2+w_1^2)|dw_2|^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_3dz_4 - z_4dz_3 &= -i(w_1-w_2)(dw_1+dw_2)+i(w_1+w_2)(dw_1-dw_2)\\
&= 2i(w_2dw_1-w_1dw_2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z_3dz_4 - z_4dz_3|^2 &= 4(w_2dw_1-w_1dw_2)(\bar{w_2}d\bar{w_1}-\bar{w_2}d\bar{w_2})\\
&= 4[|w_2|^2|dw_1|^2-w_2\bar{w_1}dw_1d\bar{w_2}-w_1\bar{w_2}d\bar{w_1}dw_2+|w_1|^2|dw_2|^2]
\end{aligned}
$$

Em $\sum_{j<k,j=1}^{4}|z_jdz_k - z_kdz_j|^2$, usando os resultados obtidos acima segue que o coeficiente de $|dw_1|^2$ é

$4|w_2|^2+1+w_2^2+\bar{w_2}^2+|w_2|^4+|w_2|^4-w_2^2-\bar{w_2}^2+1+1-\bar{w_2}^2-w_2^2+|w_2|^4+1+|w_2|^4+w_2^2+\bar{w_2}^2+4|w_2|^4=4(1+|w_2|^2)^2$.

Analogamente o coeficiente de $|dw_2|^2$ é

$8|w_1|^2+4+4|w_1|^4=4(1+|w_1|^2)^2$,

o coeficiente de $d\bar{w_2}dw_1$ é

$4w_2\overline{w_1}2-1-\bar{w_1}-w_2-\bar{w_1}^2w_2^2+w_2^2\bar{w_1}^2-w_2^2-\bar{w_1}^2+1-1+w_2^2-\bar{w_1}^2w_2^2+\bar{w_1}^2+1+w_2^2\bar{w_1}^2+w_2^2+\bar{w_1}^2-4w_2\bar{w_1}=0$,

e o coeficiente de $dw_2d\bar{w_1}$ é

$4\bar{w_2}w_1-1-w_1^2-\bar{w_2}^2-w_1^2\bar{w_2}^2+\bar{w_2}^2w_1^2-\bar{w_2}^2-w_1^2+1-1+\bar{w_2}^2-w_1^2\bar{w_2}^2+w_1^2+1+\bar{w_2}^2w_1^2+w_2^2+w_1^2-4\bar{w_2}w_1=0$.

Portanto

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2\frac{\sum_{j<kj=1}^{4}|z_j dz_k - z_k dz_j|^2}{[\sum_{j=1}^{4}|z_j|^2]^2} \\ &= \frac{8[(1+|w_2|^2)^2|dw_1|^2 + (1+|w_1|^2)^2 dw_2{}^2]}{4(1+|w_2|^2)^2(1+|w_1|^2)^2} \\ &= \frac{2|dw_1|^2}{(1+|w_1|^2)^2} + \frac{2|dw_2|^2}{(1+|w_2|^2)^2}. \end{aligned}$$

Assim a métrica em Q_2 é a métrica produto, onde cada fator tem a métrica sobre uma esfera de raio $1/\sqrt{2}$ obtida pela projeção estereográfica nos w_1 e w_2 planos complexos respectivamente.

Apêndice B

Sejam M e M' superfícies de Riemann. Seja $f : M \longrightarrow M'$ tal que $f \in C^\infty(M)$. Seja $z = x + iy$ uma coordenada complexa local em M e $u = u_1 + iu_2$ uma coordenada local em M'. Sejam $\sigma(z)|dz|^2$ e $\rho(u)|du|^2$ métricas conformes em M e M' respectivamente. Neste apêndice vamos expressar a condição de f ser harmônica e deduzir a fórmula local (4.17), isto é,

$$\Delta \log |F_k| = 2J_k.$$

Defina 1-formas locais $\theta = \sqrt{\sigma(z)}dz$ em M e $\omega = \sqrt{\rho(u)}du$ em M, e escreva a primeira equação de estrutura

$$d\theta = \theta_c \wedge \theta \text{ em } M,$$

e

$$d\omega = \omega_c \wedge \omega \text{ em } M'.$$

Aqui θ_c e ω_c são 1-formas de conexão Riemanniana dadas por

$$\theta_c = \frac{\partial \log \sqrt{\sigma(z)}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} - \frac{\partial \log \sqrt{\sigma(z)}}{\partial z} dz, \tag{4.24}$$

$$\omega_c = \frac{\partial \log \sqrt{\rho(u)}}{\partial \bar{u}} d\bar{u} - \frac{\partial \log \sqrt{\rho(u)}}{\partial u} du. \tag{4.25}$$

As funções curvaturas K em M e K' em M' são definidas por

$$d\theta_c = -\frac{K}{2}\theta \wedge \bar{\theta},$$

e

$$d\omega_c = -\frac{K'}{2}\omega \wedge \bar{\omega}$$

De (4.24) e (4.25), segue que

$$
\begin{aligned}
d\theta_c &= \frac{\partial^2 \log\sqrt{\sigma(z)}}{\partial z \partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z} - \frac{\partial^2 \log\sqrt{\sigma(z)}}{\partial z \partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz \\
&= 2\frac{\partial^2 \log\sqrt{\sigma(z)}}{\partial z \partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z},
\end{aligned}
$$

logo

$$
2\frac{\partial^2 \log\sqrt{\sigma(z)}}{\partial z \partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z} = -\frac{K}{2}\sqrt{\sigma} dz \wedge \sqrt{\sigma} d\overline{z}.
$$

Assim,

$$
K = -\frac{4}{\sigma}\frac{\partial^2 \log\sqrt{\sigma}}{\partial z \partial \overline{z}},
$$

analogamente,

$$
K' = -\frac{4}{\rho}\frac{\partial^2 \log\sqrt{\rho}}{\partial u \partial \overline{u}}.
$$

Agora consideramos a aplicação $f : M \longrightarrow M'$ e definimos as primeiras derivadas covariantes de f pelas equações

$$
f^*\omega = u_\theta \theta + u_{\overline{\theta}} \overline{\theta}, \tag{4.26}
$$

e

$$
f^*\overline{\omega} = \overline{u}_\theta \theta + \overline{u}_{\overline{\theta}} \overline{\theta},
$$

onde f^* denota o ”pull-back” de formas diferenciais pela aplicação f e $u_\theta, u_{\overline{\theta}}, \overline{u}_\theta, \overline{u}_{\overline{\theta}}$ são funções definidas localmente. Conjugando (4.26), vemos que $\overline{u_\theta} = \overline{u}_{\overline{\theta}}$ e $\overline{u}_\theta = u_{\overline{\theta}}$. Vamos definir a densidade de energia e o Jacobiano de f por

$$
e(f) = |u_\theta|^2 + |u_{\overline{\theta}}|^2,
$$

e

$$
J(f) = |u_\theta|^2 - |u_{\overline{\theta}}|^2.
$$

respectivamente, onde $|\ |$ denota o valor absoluto de números complexos.

Agora definimos as segundas derivadas covariantes de f pelas equações

$$du_\theta + u_\theta\theta_c - u_\theta f^*\omega_c = u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}, \tag{4.27}$$

e

$$du_{\bar{\theta}} + u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_c - u_{\bar{\theta}} f^*\omega_c = u_{\bar{\theta}\theta}\theta + u_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\bar{\theta}. \tag{4.28}$$

Diferenciando exteriormente (4.26), temos por um lado, usando (4.27) e (4.28), que

$$\begin{aligned}
d(f^*\omega) &= d(u_\theta\theta + u_{\bar{\theta}}\bar{\theta})\\
&= du_\theta\wedge\theta + u_\theta d\theta + du_{\bar{\theta}}\wedge\bar{\theta} + u_{\bar{\theta}}d\bar{\theta}\\
&= (-u_\theta\theta_c + u_\theta f^*\omega_c + u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta})\wedge\theta + u_\theta d\theta + u_{\bar{\theta}}d\bar{\theta} +\\
&\quad (-u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_c + u_{\bar{\theta}}f^*\omega_c + u_{\bar{\theta}\theta}\theta + u_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\bar{\theta})\wedge\bar{\theta}\\
&= u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}\wedge\theta + u_\theta f^*\omega_c\wedge\theta - u_\theta\theta_c\wedge\theta + u_\theta d\theta + u_{\bar{\theta}}d\bar{\theta} + u_{\bar{\theta}\theta}\theta\wedge\bar{\theta} +\\
&\quad + u_{\bar{\theta}}f^*\omega_c\wedge\bar{\theta} - u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_c\wedge\bar{\theta}\\
&= (u_{\theta\bar{\theta}} - u_{\bar{\theta}\theta})\bar{\theta}\wedge\theta + u_\theta f^*\omega_c\wedge\theta + u_{\bar{\theta}}f^*\omega_c\wedge\bar{\theta} + u_\theta d\theta + u_{\bar{\theta}}d\bar{\theta} -\\
&\quad - u_\theta\theta_c\wedge\theta - u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_c\wedge\bar{\theta},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

e por outro

$$\begin{aligned}
d(f^*\omega) &= f^*(d\omega)\\
&= f^*(\omega_c\wedge\omega)\\
&= f^*\omega_c\wedge f^*\omega\\
&= f^*\omega_c\wedge(u_\theta\theta + u_{\bar{\theta}}\bar{\theta})\\
&= u_\theta f^*\omega_c\wedge\theta + u_{\bar{\theta}}f^*\omega_c\wedge\bar{\theta}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

De (4.29) e (4.30) segue que

$$\begin{aligned}
0 &= (u_{\theta\bar{\theta}} - u_{\bar{\theta}\theta})\bar{\theta}\wedge\theta + u_\theta d\theta + u_{\bar{\theta}}d\bar{\theta} - u_\theta\theta_c\wedge\theta - u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_c\wedge\bar{\theta}\\
&= (u_{\theta\bar{\theta}} - u_{\bar{\theta}\theta})\bar{\theta}\wedge\theta + u_\theta\theta_c\wedge\theta + u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_c\wedge\bar{\theta} - u_\theta\theta_c\wedge\theta - u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_c\wedge\bar{\theta}\\
&= (u_{\theta\bar{\theta}} - u_{\bar{\theta}\theta})\bar{\theta}\wedge\theta,
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\overline{\theta_c} = -\theta_c$.Assim

$$u_{\theta\bar{\theta}} = u_{\bar{\theta}\theta}.$$

Definição 4.2.3. Uma aplicação u é dita harmônica se a seguinte equação é satisfeita, $u_{\bar{\theta}\theta} = 0$.

Dado um domínio $D \subset M$, a energia integral E da aplicação u sobre D é definida por

$$\begin{aligned}
E(u) &= \int_D \rho(u)(u_z\overline{u_{\bar{z}}} + \overline{u}_z + u_{\bar{z}})\frac{i}{2}dzd\bar{z} \\
&= \frac{1}{2}\int_D \rho(u(z))(u_x\overline{u}_x + u_y\overline{u}_y)dxdy.
\end{aligned}$$

Teorema 4.2.4. *Uma aplicação u é harmônica se, e somente se, é um ponto crítico do funcional energia*

$$E(u) = \textstyle\int_M e(u)dV_M,$$

onde dV_M denota o elemento de volume de M.

Demonstração: Vamos procurar pontos críticos de $E(u)$. Se u é tal ponto crítico, que é contínuo, então em coordenadas locais, uma variação u_t de u pode ser representada por $u + t\varphi$, onde $\varphi : M \to N$, com $\varphi \in C^1(M)$, de suporte compacto. Se u é um ponto crítico, precisamos ter

$$\frac{d}{dt}E(u+t\varphi)|_{t=0} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &= \{\frac{d}{dt}\int \rho^2(u+t\varphi)[(u+t\varphi)_z(\overline{u}+t\overline{\varphi})_{\bar{z}} + (\overline{u}+t\overline{\varphi})_z(u+t\varphi)_{\bar{z}}]idzd\bar{z}\}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\int \rho^2(u+t\varphi)[(u_z+t\varphi_z)(\overline{u_{\bar{z}}}+t\overline{\varphi_{\bar{z}}}) + (\overline{u}_z+\overline{\varphi}_z)(u_{\bar{z}}+t\varphi_{\bar{z}})]idzd\bar{z}|_{t=0} \\
&= \int \rho^2(u+t\varphi)[\varphi_z(\overline{u_{\bar{z}}}+t\overline{\varphi_{\bar{z}}}) + \overline{\varphi_{\bar{z}}}(u_z+t\varphi_z) + \overline{\varphi}_z(u_{\bar{z}}+t\varphi_{\bar{z}}) + \varphi_{\bar{z}}(\overline{u}_z+t\overline{\varphi}_z)] + \\
&\quad +2\rho(u+t\varphi)(\rho_u\varphi+\rho_{\bar{u}}\overline{\varphi})[(u+t\varphi)_z(\overline{u}+t\overline{\varphi})_{\bar{z}} + (\overline{u}+t\overline{\varphi})_z(u+t\varphi)_{\bar{z}}]idzd\bar{z}|_{t=0} \\
&= \int [\rho^2(u)(\varphi_z\overline{u_{\bar{z}}} + \overline{\varphi_{\bar{z}}}u_z + \varphi_{\bar{z}}\overline{u}_z + u_{\bar{z}}\overline{\varphi}_z) + \\
&\quad 2\rho(\rho_u\varphi+\rho_{\bar{u}}\overline{\varphi})(u_z\overline{u_{\bar{z}}} + \overline{u}_z u_{\bar{z}})]idzd\bar{z}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Se colocamos

$$\varphi = \frac{\psi}{\rho^2(u)},$$

onde $\psi \in C^1(M)$, de suporte compacto em $D \subset \mathbb{R}^n$, com fronteira regular, temos

$$\varphi_z = \frac{\psi_z \rho^2(u) - 2\psi\rho(\rho_u u_z + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_z)}{\rho^4(u)},$$

$$\varphi_{\bar{z}} = \frac{\psi_{\bar{z}} \rho^2(u) - 2\psi\rho(\rho_u u_{\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}})}{\rho^4(u)},$$

$$\bar{\varphi}_z = \frac{\bar{\psi}_z \rho^2(u) - 2\bar{\psi}\rho(\rho_u u_z + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_z)}{\rho^4(u)},$$

$$\bar{\varphi}_{\bar{z}} = \frac{\bar{\psi}_{\bar{z}} \rho^2(u) - 2\bar{\psi}\rho(\rho_u u_{\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}})}{\rho^4(u)}.$$

Observação 4.2.5. Como ρ é o fator conforme, ρ é real.

Substituindo os valores encontrados para $\varphi_z, \varphi_{\bar{z}}, \bar{\varphi}_z$ e $\bar{\varphi}_{\bar{z}}$ em (4.31) temos que,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int [2\rho(\rho_u \frac{\psi}{\rho^2} + \rho_{\bar{u}} \frac{\bar{\psi}}{\rho^2})(u_z \bar{u}_{\bar{z}} + u_{\bar{z}} \bar{u}_z) + \\
&\quad + u_z(\bar{\psi}_{\bar{z}} - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}(\rho_u u_{\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}})) \\
&\quad + \bar{u}_{\bar{z}}(\psi_z - 2\frac{\psi}{\rho}(\rho_u u_z + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_z)) \\
&\quad + \bar{u}_z(\psi_{\bar{z}} - 2\frac{\psi}{\rho}(\rho_u u_{\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}})) \\
&\quad + u_{\bar{z}}(\bar{\psi}_z - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}(\rho_u u_z + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_z))] i dz d\bar{z} \\
&= \int [\frac{2}{\rho}(\rho_u \psi u_z \bar{u}_{\bar{z}} + \rho_u \psi u_{\bar{z}} \bar{u}_z + \rho_{\bar{u}} \psi u_z \bar{u}_{\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} \bar{\psi} \bar{u}_z u_{\bar{z}}) + \\
&\quad + u_z(\bar{\psi}_{\bar{z}} - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}(\rho_u u_{\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}})) \\
&\quad + \bar{u}_{\bar{z}}(\psi_z - 2\frac{\psi}{\rho}(\rho_u u_z + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_z)) \\
&\quad + \bar{u}_z(\psi_{\bar{z}} - 2\frac{\psi}{\rho}(\rho_u u_{\bar{z}} + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}})) \\
&\quad + u_{\bar{z}}(\bar{\psi}_z - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}(\rho_u u_z + \rho_{\bar{u}} \bar{u}_z))] i dz d\bar{z} \\
&= \int [u_z \bar{\psi}_{\bar{z}} - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}\rho_u u_z u_{\bar{z}} + \bar{u}_{\bar{z}} - 2\frac{\psi}{\rho}\rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}} \bar{u}_z + \bar{u}_z \psi_{\bar{z}} - 2\frac{\psi}{\rho}\rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}} \bar{u}_z + u_{\bar{z}} \bar{\psi}_z - \\
&\quad - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}\rho_u u_z u_{\bar{z}}] i dz d\bar{z} \\
&= \int [(u_z \bar{\psi}_{\bar{z}} - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}\rho_u u_z u_{\bar{z}}) + (u_z \bar{\psi}_{\bar{z}} - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}\rho_u u_z u_{\bar{z}}) + \\
&\quad + (\bar{u}_z \psi_{\bar{z}} - 2\frac{\psi}{\rho}\rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}} \bar{u}_z) + (\bar{u}_z \psi_{\bar{z}} - 2\frac{\psi}{\rho}\rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}} \bar{u}_z)] i dz d\bar{z} \\
&= \int 2\mathrm{Re}(u_z \bar{\psi}_{\bar{z}} - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}\rho_u u_z u_{\bar{z}}) i dz d\bar{z} + \int 2\mathrm{Re} + (\bar{u}_z \psi_{\bar{z}} - 2\frac{\psi}{\rho}\rho_{\bar{u}} \bar{u}_{\bar{z}} \bar{u}_z) i dz d\bar{z}
\end{aligned}
$$

Como $u \in C^2$ podemos integrar por partes as integrais acima e usando o fato de que ψ é contínua de suporte compacto obtemos que,

$$\int u_z \bar{\psi}_{\bar{z}} d\bar{z} = -\int \bar{\psi} u_{z\bar{z}} d\bar{z},$$

e

$$\int \bar{u}_z \psi_{\bar{z}} d\bar{z} = -\int \psi \bar{u}_{z\bar{z}} d\bar{z}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \int 2\mathrm{Re}(u_z\bar{\psi}_{\bar{z}} - 2\frac{\bar{\psi}}{\rho}\rho_u u_z u_{\bar{z}})idzd\bar{z} + \int 2\mathrm{Re} + (\bar{u}_z\psi_{\bar{z}} - 2\frac{\psi}{\rho}\rho_{\bar{u}}\bar{u}_{\bar{z}}\bar{u}_z)idzd\bar{z} \\ &= 2\int \mathrm{Re}(u_{z\bar{z}} - 2\frac{\rho_u}{\rho}\rho_u u_z u_{\bar{z}})\bar{\psi}idzd\bar{z} \\ &= 2\int \mathrm{Re}(u_{z\bar{z}} - 2(\log\rho)_u\rho_u u_z u_{\bar{z}})\bar{\psi}idzd\bar{z}, \end{aligned}$$

o que mostra que a aplicação u é de fato um ponto crítico do funcional energia. □

Teorema 4.2.6. *A equação $u_{\bar{\theta}\theta} = 0$ pode ser explicitamente escrita como*

$$u_{z\bar{z}} + \frac{\partial log\rho(u(z))}{\partial u}u_z u_{\bar{z}} = 0. \tag{4.32}$$

Demonstração: De fato, como $f^*\omega = u_\theta\theta + u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}$ segue que

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d(f^*\sqrt{\rho}du) = \sqrt{\rho}d(f^*du) = \sqrt{\rho}(u_z dz + u_{\bar{z}}d\bar{z}) = u_\theta\theta + u_{\bar{\theta}}\bar{\theta} \\ &= u_\theta\sqrt{\sigma}dz + u_{\bar{\theta}}\sqrt{\sigma}d\bar{z}. \end{aligned}$$

Assim

$$u_\theta = \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_z \quad \text{e} \quad u_{\bar{\theta}} = \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_{\bar{z}}.$$

$$\begin{aligned} f^*(\omega_c) &= f^*(\frac{\partial\log\sqrt{\rho(u)}}{\partial\bar{u}}d\bar{u} - \frac{\partial\log\sqrt{\rho(u)}}{\partial u}du) \\ &= \frac{\partial\log\sqrt{\rho(u)}}{\partial\bar{u}}f^*(d\bar{u}) - \frac{\partial\log\sqrt{\rho(u)}}{\partial u}f^*(du) \\ &= \frac{\partial\log\sqrt{\rho(u)}}{\partial\bar{u}}(\bar{u}_z dz + \bar{u}_{\bar{z}}d\bar{z}) - \frac{\partial\log\sqrt{\rho(u)}}{\partial u}(u_z dz + u_{\bar{z}}d\bar{z}). \end{aligned}$$

$$du_\theta = (u_\theta)_z dz + (u_\theta)_{\bar{z}}d\bar{z}$$

Só precisamos calcular os coeficientes em $d\bar{z}$, pois estamos interessados em $u_{\theta\bar{\theta}}$, que é o coeficiente de $\bar{\theta}$, que por sua vez depende de $d\bar{z}$.

$$
\begin{aligned}
(u_\theta)_{\bar{z}} = (\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_z)_{\bar{z}} &= (\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}})_{\bar{z}}u_z + \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_{z\bar{z}} \\
&= \frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{z}}\sqrt{\sigma} - \sqrt{\rho}(\sqrt{\sigma})_{\bar{z}}}{\sigma}u_z + \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_{z\bar{z}} \\
&= [\frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{z}}}{\sqrt{\sigma}} - \frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{z}}}{\sqrt{\sigma}}(\log\sqrt{\sigma})_{\bar{z}}]u_z + \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_{z\bar{z}},
\end{aligned}
$$

logo a parte que depende de $d\bar{z}$ em du_θ é $[\frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{z}}}{\sqrt{\sigma}} - \frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{z}}}{\sqrt{\sigma}}(\log\sqrt{\sigma})_{\bar{z}}]u_z + \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_{z\bar{z}}$.

Pela definição da segunda derivada covariante de f temos que

$$
du_\theta + u_\theta\theta_c - u_\theta f^*\omega_c = u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}.
$$

Pelas expressões obtidas anteriormente vamos encontrar o coeficiente de $d\bar{z}$.

$$
\begin{aligned}
u_{\theta\bar{\theta}}\sqrt{\sigma} &= [\frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{z}}}{\sqrt{\sigma}} - \frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{z}}}{\sqrt{\sigma}}(\log\sqrt{\sigma})_{\bar{z}}]u_z + \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_{z\bar{z}} + \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_z\frac{\partial\log\sqrt{\sigma}}{\partial\bar{z}} - \\
&\quad - \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}u_z(\frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial\bar{u}}\bar{u}_{\bar{z}} - \frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial u}u_{\bar{z}}) \\
&= u_z\frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{z}}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\sigma}}(u_{z\bar{z}} + \frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial u}u_z u_{\bar{z}}) - \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial\bar{u}}\partial u u_z\bar{u}_{\bar{z}} \\
&= u_z\frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{z}}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\sigma}}(u_{z\bar{z}} + \frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial u}u_z u_{\bar{z}}) - \frac{(\sqrt{\rho})_{\bar{u}}}{\sqrt{\sigma}}u_z\bar{u}_{\bar{z}} \\
&= \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\sigma}}(u_{z\bar{z}} + \frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial u}u_z u_{\bar{z}}).
\end{aligned}
$$

No último passo usamos o fato de que $(\sqrt{\rho})_{\bar{z}} = (\sqrt{\rho})_{\bar{u}}\bar{u}_{\bar{z}}$. Assim $u_{\theta\bar{\theta}} = 0$ equivale a

$$
u_{z\bar{z}} + \frac{\partial\log\sqrt{\rho}}{\partial u}u_z u_{\bar{z}} = 0.
$$

$\square$

Observamos que do Teorema 4.2.6, segue que f ser harmônica depende somente da estrutura conforme de M. Agora calculamos o Laplaciano da função (bem definida) $|u_\theta|^2$ e $|\bar{u}_\theta|^2$ em M. Antes de fazer isso, precisamos definir as terceiras derivadas covariantes de f.

$$
du_{\theta\theta} + 2u_{\theta\theta}\theta_c - u_{\theta\theta}f^*\omega_c = u_{\theta\theta\theta}\theta + u_{\theta\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}, \tag{4.33}
$$

e

$$du_{\theta\bar{\theta}} - u_{\theta\bar{\theta}} f^*\omega_c = u_{\theta\bar{\theta}\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}\bar{\theta}. \tag{4.34}$$

De (4.27), segue que

$$d(du_\theta + u_\theta\theta_c - u_\theta f^*\omega_c) = d(u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}).$$

Como

$$\begin{aligned}
d(du_\theta + u_\theta\theta_c - u_\theta f^*\omega_c) &= du_\theta \wedge \theta_c + u_\theta d\theta_c - du_\theta \wedge f^*\omega_c - u_\theta d(f^*\omega_c) \\
&= (-u_\theta\theta_c + u_\theta f^*\omega_c + u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}) \wedge \theta_c - \frac{K}{2}u_\theta\theta \wedge \bar{\theta} + \\
&\quad +(-u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}_c + u_{\bar{\theta}} f^*\omega_c + u_{\bar{\theta}\theta}\theta + u_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\bar{\theta}) \wedge f^*\omega_c - u_\theta d(f^*\omega_c) \\
&= u_{\theta\theta}\theta \wedge \theta_c + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta} \wedge \theta_c - \frac{K}{2}u_\theta\theta \wedge \bar{\theta} - u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta} \wedge f^*\omega_c - \\
&\quad -u_{\theta\theta}\theta \wedge f^*\omega_c + u_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\bar{\theta} + \frac{K'}{2}u_\theta(f^*\omega) \wedge (f^*\bar{\omega}) \\
&= -\frac{K}{2}u_\theta\theta \wedge \bar{\theta} + \frac{K'}{2}u_\theta(f^*\omega) \wedge (f^*\bar{\omega}) - (u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}) \wedge f^*\omega_c + \\
&\quad +(u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}) \wedge \theta_c,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d(u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}) &= du_{\theta\theta} \wedge \theta + u_{\theta\theta}d\theta + du_{\theta\bar{\theta}} \wedge \bar{\theta} + u_{\theta\bar{\theta}}d\bar{\theta} \\
&= du_{\theta\theta} \wedge \theta + u_{\theta\theta}\theta_c \wedge \theta + du_{\theta\bar{\theta}} \wedge \bar{\theta} + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}_c \wedge \bar{\theta} \\
&= (du_{\theta\theta} + u_{\theta\theta}\theta_c) \wedge \theta + (du_{\theta\bar{\theta}} + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}_c) \wedge \bar{\theta}.
\end{aligned}$$

Usando os fatos de que $f^*\omega = u_\theta\theta + u_{\bar{\theta}}\bar{\theta}$ e $\bar{\theta}_c = -\theta_c$ conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
-\frac{K}{2}u_\theta\theta \wedge \bar{\theta} + \frac{K'}{2}u_\theta(f^*\omega) \wedge (f^*\bar{\omega}) &= (u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}) \wedge f^*\omega_c - (u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}) \wedge \theta_c + \\
&\quad +(du_{\theta\theta} + u_{\theta\theta}\theta_c) \wedge \theta + (du_{\theta\bar{\theta}} + u_{\theta\bar{\theta}}\theta_c) \wedge \bar{\theta} \\
&= \theta \wedge (du_{\theta\theta} + 2u_{\theta\theta}\theta_c - u_{\theta\theta\theta}\theta - u_{\theta\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}) + \\
&\quad +\bar{\theta} \wedge (du_{\theta\bar{\theta}} - u_{\theta\bar{\theta}\theta}\theta - u_{\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}\bar{\theta}) - (u_{\theta\theta}\theta + u_{\theta\bar{\theta}}\bar{\theta}) \wedge \theta_c + \\
&\quad (du_{\theta\theta} + u_{\theta\theta}\theta_c) \wedge \theta + (du_{\theta\bar{\theta}} + u_{\theta\bar{\theta}}\theta_c) \wedge \bar{\theta} \\
&= u_{\theta\bar{\theta}\theta}\theta \wedge \bar{\theta} - u_{\theta\theta\bar{\theta}}\theta \wedge \bar{\theta},
\end{aligned}$$

na segunda igualdade usamos as expressões de $u_{\theta\theta} f^*\omega_c$ e $u_{\theta\bar{\theta}} f^*\omega_c$ obtidas em (4.33) e (4.34) respectivamente.

Como

$$\begin{aligned} (f^*\omega)\wedge(f^*\bar{\omega}) &= (u_\theta\theta + u_{\bar{\theta}}\theta)\wedge(\bar{u}_\theta\theta + \bar{u}_{\bar{\theta}}\theta) \\ &= (u_\theta\bar{u}_{\bar{\theta}} - u_{\bar{\theta}}\bar{u}_\theta)\theta\wedge\bar{\theta} \\ &= J(f)\theta\wedge\bar{\theta}. \end{aligned}$$

Logo

$$-\frac{K}{2}u_\theta + \frac{K'}{2}u_\theta J(f) = u_{\theta\bar{\theta}\theta} - u_{\theta\theta\bar{\theta}}. \tag{4.35}$$

Suponhamos agora que Δ denote o Laplaciano em M e lembremos que para uma função χ em M temos que $\Delta\chi = 4\chi_{\theta\bar{\theta}}$, onde χ_θ e $\chi_{\bar{\theta}}$ são definidas por $d\chi = \chi_\theta\theta + \chi_{\bar{\theta}}\bar{\theta}$. Assumindo que f satisfaz a Definição 4.2.3, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta|u_\theta|^2 &= 4(u_\theta\bar{u}_{\bar{\theta}})_{\theta\bar{\theta}} \\ &= 4(u_{\theta\theta}\bar{u}_{\bar{\theta}} + u_\theta\bar{u}_{\theta\bar{\theta}})_{\bar{\theta}} \\ &= 4(u_{\theta\theta}\bar{u}_{\bar{\theta}})_{\bar{\theta}} \\ &= 4(u_{\theta\theta\bar{\theta}}\bar{u}_{\bar{\theta}} + |u_{\theta\theta}|^2). \end{aligned}$$

Substituindo (4.35) na equação acima segue que

$$\Delta|u_\theta|^2 = 4|u_{\theta\theta}|^2 + 4u_{\theta\bar{\theta}\theta} - 2|u_\theta|^2K'J(f) + 2|u_\theta|^2K.$$

Como $u_{\theta\bar{\theta}} = 0 \Rightarrow u_{\theta\bar{\theta}\theta} = 0$, assim

$$\Delta|u_\theta|^2 = 4|u_{\theta\theta}|^2 + 4|u_\theta|^2K'J(f) + 2|u_\theta|^2K.$$

Se $|u_\theta| \neq 0$ então a equação acima assume a seguinte forma

$$(\Delta|u_\theta|^2 - 4|u_{\theta\theta}|^2)\frac{1}{|u_\theta|^2} = -2K'J(f) + 2K.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\Delta \log|u_\theta|^2 &= 4(\log|u_\theta|^2)_{\theta\bar{\theta}} \\
&= 4(\frac{|u_\theta|^2_\theta}{|u_\theta|^2})_{\bar{\theta}} \\
&= 4(\frac{u_{\theta\theta}\overline{u_{\bar{\theta}}}}{|u_\theta|^2}) \\
&= 4(\frac{u_{\theta\theta\bar{\theta}}\overline{u_{\bar{\theta}}}|u_\theta|^2}{|u_\theta|^4}) \\
&= (-2K'J(f)\overline{u_{\bar{\theta}}} + 2u_\theta K\overline{u_{\bar{\theta}}})\frac{|u_\theta|^2}{|u_\theta|^4} \\
&= -2K'J(f) + 2K.
\end{aligned}$$

Analogamente, se $|\bar{u_\theta}|^2 \neq 0$ temos que

$$\log|\bar{u_\theta}|^2 = 2K'J(f) + 2K. \tag{4.36}$$

Observação 4.2.7. No nosso caso, g_k faz o papel da f, a saber

$$g_k : S \longrightarrow S_k(\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

com K' fazendo o papel da curvatura de $S_k(1/\sqrt{2})$ e $K = -\frac{2}{\lambda^2}(\log\lambda^2)_{\theta\bar{\theta}} = -\frac{1}{2\lambda^2}\tilde{\Delta}(\log\lambda^2)$. Lembramos que no início deste apêndice fizemos $\bar{u_\theta} = \sqrt{2}\frac{F_k}{\lambda}$. Assim, (4.36) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}
\log|\sqrt{2}\frac{F_k}{\lambda}|^2 &= 4J_k + 2K \\
\Delta(\log 2 + \log|F_k|^2 - \log|\lambda|^2) &= 4J_k - \frac{1}{\lambda^2}\tilde{\Delta}(\log\lambda^2) \\
\Delta\log|F_k|^2 &= 4J_k \\
\Delta\log|F_k| &= 2J_k,
\end{aligned}$$

usando o fato de que $\Delta = \tilde{\Delta}/\lambda^2$, pois as métricas diferem por um fator conforme, obtemos o resultado desejado.

Referências Bibliográficas

[1] Ahlfors, L. V. e Sario, L., *Riemann Surfaces*, Princeton, New Jersey, 1960.

[2] Chen, B. Y., *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[3] do Carmo, M. P., *Geometria diferencial de curvas e superfícies,* SBM, 2005.

[4] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana, Projeto Euclides,* Rio de Janeiro, 1988.

[5] Fischer-Colbrie, D. e Schoen, R., *The Structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature*, Comm. Pure Applied Math. 33 (1980), 199-211.

[6] Gauss, K. F., *Disquisitiones generales cerca superficies curvas*, Comm. Soc. Göttinger Bd 6, 1823-1827.

[7] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, - Reprint of the 1998 ed. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Singapore; Tokyo, Springer, 2001.

[8] Hoffman, D. A. e Osserman, R., *The Gauss map of surfaces in* $\mathbb{R}^n$, J. Diff. Geometry, 18 (1983), 733-754.

[9] Hoffman, D. A. e Osserman, R., *The Gauss map of surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$, Proc. London Math. Soc. (3), 50 (1985), 27-56.

[10] Hoffman, D. A. e Osserman, R., *The geometry of the generalized Gauss map*, Memoirs of the American Mathematical Society 236 (Providence, R.I., 1980).

[11] Hoffman, D. A., Osserman, R. e Schoen R., *On the Gauss map of complete surfaces of constant mean curvature in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$, Comment. Math. Helv. 57 (1982) 519-531.

[12] Hoffman, D. A., *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature*, J. Diff. Geometry 8 (1973), 161-176.

[13] Jost, J., *Compact Riemann surfaces, an introduction to contemporary mathematics*, Springer, 1997.

[14] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1992.

[15] Osserman, R., *A survey of minimal surfaces*, Stanford University, Dover Publications, Inc. New York 1986.

[16] Protter, M. H. e Weinberger, H. F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Englenwood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall 1967.

[17] Ruh, A. e Vilms, J., *Asymtotic behavior of non-parametric minimal hypersurfaces*, J Diff. Geom. 4 (1970), 509-513.

[18] Schoen, R. e Yau, S. T., *On univalent harmonic maps between surfaces*, Invent. Math. 44 (1978) 265-278.

[19] Spivak, M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 4, Publish or Perish, Boston 1975; 2nd Ed., Berkeley 1979.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo