

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Formas automórficas e as $L$ -funções de Hecke-Maass e Rankin-Selberg

por  
Theo Allan Darn Zapata

Brasília  
2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

*Aos meus pais.*

# Agradecimentos

Quando se quer agradecer a muitos, corre-se o risco de esquecer alguém. Gostaria portanto, que as pessoas que não estão explicitamente presentes neste agradecimento, não se sintam esquecidas, porque o nome delas também está grafado no meu coração.

A minha família pelo apoio e incentivo, ilimitados e incomensuráveis.

Ao meu orientador Professor Nigel Pitt, por ter compartilhado de suas idéias comigo, desde quando cheguei por aqui. Por seu interesse e atenção dados a mim. Finalmente, por ter “batido duro” (como ele diz usualmente) em pontos cruciais, os quais me tornaram mestre em Matemática.

As agências fomentadoras à pesquisa CAPES e CNPq, quanto às bolsas concedidas.

Aos professores do Departamento de Matemática da UnB que me ensinaram algo; em especial ao professor Pavel Zaleskii por ter me mostrado um pouco da matemática que eu buscava quando vim para cá. Ao professor Elves A. B. Silva, sem dúvida.

Aos funcionários do MAT que colaboraram durante esta jornada; com destaque à Tania, a melhor.

Aqueles que moraram comigo: Jeovani (desde o início), Kellcião, Nelvião, Ivan, Robertinho, Claudião, Magnão (e Miguelito), Karise e Carminha.

Aquela que ainda mora e há de morar: Flávia<sup>♡</sup>. Por seu amor, carinho e companheirismo. M C L E A T. Não há palavras.

Aos nobres amigos e colegas do MAT: de Anderson a Zhou, (seria muito difícil listar todos), que contribuíram de alguma forma para realização deste trabalho.

Aos queridos amigos distantes: Mauro, Evaneide e Wallyson, Xicoida (hoje talvez Rodrigo), Allyson, Urso, Kid, Ewerson.

Aos funcionários da COPP que abriram as portas do MAT a 00:02, as 02:17, as 05:13 ou a qualquer hora: Edson e Raymundo.

*“a vida é a arte do encontro,  
embora haja tanto desencontro pela vida”.*

Vinicius de Moraes.

# Resumo

Neste trabalho estabelecemos propriedades analíticas e aritméticas de duas  $L$ -funções automórficas para o grupo modular, as de Hecke-Maass e Rankin-Selberg. A partir das quais, obtemos limitantes superiores para somas de coeficientes de formas automórficas cuspidais.

**Palavras chaves:**  $L$ -funções, Hecke-Maass, Rankin-Selberg.

# Abstract

In this work we establish analytical and arithmetical properties of two automorphic  $L$ -functions for the modular group, those of Hecke-Maass and Rankin-Selberg. From these, we obtain upper bounds for sums of the coefficients of automorphic cusp forms.

**Key words:**  $L$ -functions, Hecke-Maass, Rankin-Selberg.



# Notação

Neste trabalho, faremos uso da seguinte notação:

$z = x + iy$  será sempre um número complexo, com  $x, y$  reais.

$s = \sigma + it$  também denotará um número complexo, com partes reais e imaginárias  $\sigma$  e  $t$  respectivamente.

$e(z)$  denota a função exponencial  $e^{2\pi iz}$ .

$\Gamma$  será um grupo fuchsiano ou a função de Euler; sempre será clara, no contexto, a distinção entre um grupo e a função.

$K_\nu(z)$  e  $I_\nu(z)$  denotam as funções de Bessel.

$O$  e  $\ll$  são os símbolos de Bachmann–Landau e Vinogradov, respectivamente, com seus significados usuais. Isto é,  $f = O(g)$  ou  $f \ll g$  (quando  $x \rightarrow x_0$ ) se e somente se existe  $C > 0$  tal que  $|f(x)| \leq C|g(x)|$  para qualquer  $x$  em alguma vizinhança de  $x_0$ .

$\ll_{\varepsilon, K, y}$  significa que vale  $\ll$  para  $\varepsilon, K$  e  $y$  fixados.

$\int_{(a)} = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$  a integral de contorno sobre a reta vertical  $\operatorname{Re}(s) = a$ .

$[a, b]$  o segmento de reta orientado do ponto  $a \in \mathbb{C}$  ao ponto  $b \in \mathbb{C}$ .

# Introdução

Para qualquer número complexo  $s = \sigma + it$  com  $\sigma > 1$ , a  $\zeta$ -função de Riemann é definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} .$$

Historicamente foi um dos primeiros exemplos em uma classe de funções hoje em dia chamadas  $\zeta$ -funções ou  $L$ -funções. Dentre as propriedades de  $\zeta(s)$ , ressaltamos as três mais importantes: ela admite uma expansão em produto de Euler,

$$\zeta(s) = \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

para  $\sigma > 1$ ; pode ser continuada analiticamente ao plano complexo com um polo de ordem 1 em  $s = 1$ ; e esta continuação obedece uma equação funcional, a saber,

$$\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) .$$

Estas propriedades juntas, implicam muitas aplicações à Teoria dos Números, sendo o exemplo mais evidente o Teorema do Número Primo

$$\sum_{\substack{p \leq X \\ p \text{ primo}}} 1 \sim \frac{X}{\log X} .$$

Ademais, tais propriedades levaram Riemann a conjecturar sua famosa hipótese, a qual pode ser vista como uma forma forte desta última afirmação.

Estas idéias se estendem a outras situações. Definindo

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$$

para alguma seqüência  $a(n)$  de números complexos, podemos perguntar se propriedades análogas às anteriormente mencionadas para  $\zeta(s)$  se verificam para  $L(s)$ , e quais conseqüências seguem para os coeficientes  $a(n)$ . A existência de um produto de Euler acaba sendo equivalente a  $a(n)$  ser uma função multiplicativa; assim, torna-se uma propriedade puramente aritmética. Já a continuação analítica, contudo, costuma ser mais complicada e requer mais trabalho.

Nesta dissertação discutimos dois exemplos de  $L$ -funções e investigamos estas questões. Iniciamos estabelecendo os fundamentos de grupos fuchsianos agindo no plano hiperbólico, para então apresentamos as formas automórficas introduzidas por H. Maass em [Maa49]. Funções estas, que são invariantes com relação a um tal grupo e admitem expansão em série de Fourier da forma

$$y^{\frac{1}{2}} \sum_{n \neq 0} \varrho(n) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) e(nx).$$

Nossas  $L$ -funções surgirão ao considerarmos as seqüências  $a(n) = \varrho(n)$  (Hecke-Maass) e  $a(n) = |\varrho(n)|^2$  (Rankin-Selberg). Em seguida, interpostos os operadores de Hecke, os quais nos dão a natureza multiplicativa de  $a(n)$ . Logo após, mostramos que de fato nossas  $L$ -funções admitem um produto de Euler, podem ser continuadas analiticamente e possuem equação funcional. A partir dessas e outras propriedades analíticas, encerramos os dois últimos capítulos culminando com cotas superiores para soma dos coeficientes  $a(n)$ .

# Sumário

Notação	vii
Introdução	viii
Lista de Figuras	xii
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Transformações de Möbius e Grupos de Matrizes . . . . .	1
1.2 Plano Hiperbólico . . . . .	2
1.3 Grupos Fuchsianos e domínios fundamentais . . . . .	4
<b>2 Formas Automórficas</b>	<b>8</b>
2.1 Funções automórficas . . . . .	8
2.2 O Laplaciano e sua ação em $L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ . . . . .	9
2.3 Formas de Maass . . . . .	13
2.4 A continuação analítica da série de Eisenstein . . . . .	20
<b>3 Operadores de Hecke</b>	<b>23</b>
3.1 Propriedades Algébricas . . . . .	23
3.2 Autovalores dos operadores de Hecke . . . . .	29
<b>4 A <math>L</math>-função de Hecke-Maass</b>	<b>32</b>
4.1 O produto de Euler . . . . .	34
4.2 A continuação analítica e equação funcional . . . . .	36
4.3 Aplicação . . . . .	40
<b>5 O método de Rankin-Selberg</b>	<b>47</b>
5.1 A $L$ -função de Rankin-Selberg e seu produto de Euler . . . . .	48

5.2	A continuação analítica e equação funcional . . . . .	50
5.3	Aplicação . . . . .	54
	<b>Apêndice</b>	<b>59</b>
	<b>A Cálculos</b>	<b>59</b>
A.1	Integrais envolvendo $K_\nu$ . . . . .	59
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Lista de Figuras

1.1	Um domínio fundamental $F$ para $SL_2(\mathbb{Z})$ em $\mathcal{H}$ . . . . .	5
1.2	Um domínio fundamental $F$ para $\Gamma_0(5)$ . . . . .	7
1.3	Identificação dos lados de $F$ para $SL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	7
2.1	Domínio fundamental truncado $F_Y$ . . . . .	12
4.1	Gráfico da função $g(x)$ . . . . .	40
4.2	Contorno de integração $\mathcal{C}_T$ . . . . .	41
4.3	Contorno de integração $\mathcal{D}_V$ . . . . .	44
5.1	Desdobramentos de $F$ para $PSL_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	48
5.2	Gráficos das funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$ . . . . .	57

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Transformações de Möbius e Grupos de Matrizes

Seja  $\hat{\mathbb{C}}$  a esfera de Riemann  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  isto é a compactificação de  $\mathbb{C}$  adicionando um ponto no infinito. Na topologia de  $\hat{\mathbb{C}}$ , um conjunto  $U$  é aberto se: for subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$ , ou se  $\infty \in U$  e  $\hat{\mathbb{C}} - U$  for compacto em  $\mathbb{C}$ . Seja  $GL_2^+(\mathbb{R})$ , o grupo das matrizes  $2 \times 2$  com entradas reais e determinante positivo. Consideremos a ação deste grupo em  $\hat{\mathbb{C}}$  dada pelas transformações de Möbius

$$(g, z) \mapsto gz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

onde interpretamos  $g(-d/c)$  como sendo  $\infty$ , e  $g(\infty)$  como sendo  $a/c$ . Observamos que

$$\frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)} = \frac{az + b}{cz + d},$$

para quaisquer  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , portanto qualquer transformação de Möbius pode ser realizada por um elemento de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Além do mais, uma transformação de Möbius

$$gz = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

determina a matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  a menos de sinal, e o grupo  $SL_2(\mathbb{R})$  contém os elementos  $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  os quais atuam trivialmente. Assim, para que esta ação

seja fiel, ou em outras palavras, para que uma tal transformação de Möbius seja unicamente determinada por um elemento, devemos passar ao grupo quociente

$$PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}.$$

## 1.2 Plano Hiperbólico

Seja  $\mathcal{H}$  o semiplano superior

$$\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}.$$

Escrevendo

$$z' = x' + iy' = \frac{az + b}{cz + d}$$

temos que

$$x' = \frac{ac(x^2 + y^2) + x(ad + bc) + bd}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \quad y' = \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \quad (1.1)$$

e daí  $\mathcal{H}$  é estável pela ação de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Além do mais, esta ação é transitiva, isto é, para quaisquer  $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$  existe  $g \in SL_2(\mathbb{R})$  tal que  $gz_1 = z_2$ . De fato,

$$\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & xy^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} : i \mapsto x + iy$$

logo, todo elemento de  $\mathcal{H}$  está na órbita de  $i$ . Além disso, o estabilizador de  $i$  é

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

**Proposição 1.2.1** *A métrica e medida definidas por*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{4dzd\bar{z}}{y^2}, \quad d\mu z = \frac{dxdy}{y^2} = \frac{1}{4i} \frac{dz^2 - d\bar{z}^2}{y^2} \quad (1.2)$$

*respectivamente, são invariantes pela ação de  $SL_2(\mathbb{R})$ .*

*Demonstração:* Temos

$$dz' = \frac{(ad - bc) dz}{(cz + d)^2}, \quad dz' d\bar{z}' = \frac{(ad - bc)^2 dz d\bar{z}}{|cz + d|^4},$$



onde  $dz = dx + idy$ , logo

$$ds'^2 = \frac{4dz'd\bar{z}'}{y'^2} = \frac{4dzd\bar{z}}{|cz+d|^4} \left( \frac{y}{|cz+d|^2} \right)^{-2} = \frac{4dzd\bar{z}}{y^2} = ds^2.$$

Agora, observando que

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = \frac{(bc - ad)^2}{((cx + d)^2 + (cy)^2)^2},$$

de (1.1) segue o resultado para a medida. *QED*

Com esta métrica  $\mathcal{H}$  pode ser visto como um modelo do plano hiperbólico. A geodésica ligando dois pontos  $z_1 = iy_1$ ,  $z_2 = iy_2$  é o segmento de reta que os liga, pois se  $\beta(t) = x(t) + iy(t)$  for uma curva ligando  $z_1$  a  $z_2$ , seu comprimento será

$$L(\beta) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_{y_1}^{y_2} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \log \left( \frac{y_2}{y_1} \right). \quad (1.3)$$

Em geral, a geodésica que liga  $z'_1$ ,  $z'_2$  pode ser levada à situação anterior; mais precisamente, existe  $g \in PSL_2(\mathbb{R})$  (uma isometria de  $\mathcal{H}$ ) tal que  $g(z'_1)$  e  $g(z'_2)$  pertencem a uma reta vertical, donde a geodésica é um arco de circunferência ortogonal ou segmentos de retas ortogonais a  $\mathbb{R}$ .

Definindo a distância  $\rho$  entre dois pontos  $z'_1, z'_2 \in \mathcal{H}$  como sendo o ínfimo dos comprimentos das curvas que ligam  $z'_1$  a  $z'_2$ , temos de (1.3) que se  $\rho = \rho(z_1, z_2)$ ,

$$\cosh(\rho) = \frac{1}{2} \left( \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2} \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{|z_1 - z_2|^2}{\operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)}.$$

Por outro lado,

$$1 + \frac{1}{2} \frac{|z'_1 - z'_2|^2}{\operatorname{Im}(z'_1) \operatorname{Im}(z'_2)} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{|g(z'_1) - g(z'_2)|^2}{\operatorname{Im}(g(z'_1)) \operatorname{Im}(g(z'_2))} \right) = \cosh(\rho).$$

Das identidades elementares  $\cosh(\rho) = 1 + 2 \sinh^2(\rho/2)$ ,  $\cosh(\rho) = 2 \cosh^2(\rho/2) - 1$  e  $\tanh(\rho/2) = \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1}$  segue a fórmula explícita para a distância (métrica)

$$\rho(z'_1, z'_2) = \log \left( \frac{|z'_1 - \bar{z}'_2| + |z'_1 - z'_2|}{|z'_1 - z'_2| - |z'_1 - \bar{z}'_2|} \right). \quad (1.4)$$

### 1.3 Grupos Fuchsianos e domínios fundamentais

Dizemos que um subgrupo  $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{R})$  age descontinuamente em  $\mathcal{H}$  se para qualquer subconjunto compacto  $K$  de  $\mathcal{H}$  o conjunto  $\{g \in \Gamma \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$  for finito. Vamos chamar tais grupos de Fuchsiano. Observamos que os elementos de um grupo Fuchsiano não são matrizes, e que correspondem a transformações de Möbius. Devido a Poincaré, segundo [EGM98], sabemos que esta definição coincide com o conceito de grupo discreto quando considerado como um subgrupo de  $SL_2(\mathbb{R})$ , isto é, tal que a topologia induzida de  $SL_2(\mathbb{R})$  coincide com a topologia discreta.

Um ponto  $\mathfrak{a} \in \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é dito um ponto cuspidal com respeito a  $\Gamma$ , se existe alguma transformação  $\tau \in \Gamma$  com único ponto fixo em  $\hat{\mathbb{R}}$  tal que  $\tau(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ . Neste caso, o subgrupo de isotropia (o estabilizador de  $\mathfrak{a}$ )  $\Gamma_{\mathfrak{a}}$  será um grupo cíclico infinito, digamos com gerador  $\gamma_{\mathfrak{a}}$ . Para qualquer ponto cuspidal  $\mathfrak{a}$ , existe uma matriz de escalonamento  $\sigma_{\mathfrak{a}} \in SL_2(\mathbb{R})$  tal que

$$\begin{cases} \sigma_{\mathfrak{a}}\infty = \mathfrak{a} \\ \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\gamma_{\mathfrak{a}}\sigma_{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.5)$$

ou seja,  $\sigma_{\mathfrak{a}}$  é usada para reduzir todas as noções sobre pontos cuspidais para o caso  $\mathfrak{a} = \infty$ .

**Definição 1.3.1** *Seja  $\Gamma$  Fuchsiano. Um subconjunto  $F$  de  $\mathcal{H}$  é dito um domínio fundamental de  $\Gamma$  se  $F$  for aberto, se pontos distintos em  $F$  não são  $\Gamma$ -equivalentes, e se qualquer ponto em  $\mathcal{H}$  é equivalente com algum ponto do fecho  $\overline{F}$ ; onde, dois pontos  $z, w \in \mathcal{H}$  são ditos  $\Gamma$ -equivalentes se existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $w = \gamma z$ .*

Na prática a inclusão ou não de pontos da fronteira de  $F$  não afeta muito os cálculos. Por isto em alguns textos, esta definição é ligeiramente diferente: não é necessário  $F$  ser aberto; e por outro lado, na última condição é exigido que qualquer órbita de  $\Gamma$  contenha um ponto de  $F$ . Ver [Bea83] nesse contexto.

Por exemplo, como domínios fundamentais para  $SL_2(\mathbb{Z})$  podemos ter algo como

$$F : \begin{cases} |x| < \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad F : \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 \geq 1 & , \text{ se } x \leq 0 \\ x^2 + y^2 > 1 & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Neste exemplo, a fórmula de Gauss-Bonnet ou uma simples integração mostra que o volume (hiperbólico) de  $F$  é finito e igual a  $\frac{\pi}{3}$

$$\text{vol}(F) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dx dy}{y^2} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3}.$$

Além disso notamos que, como  $in \in F$  para qualquer  $n > 1$ , a região  $F$  não é compacta.

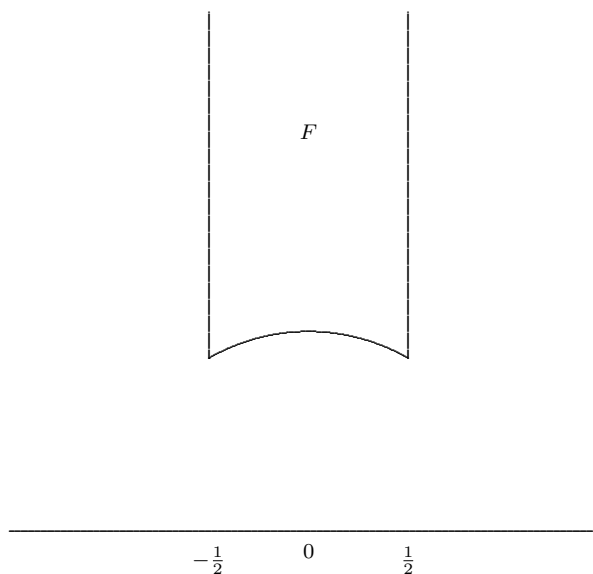


Figura 1.1: Um domínio fundamental  $F$  para  $SL_2(\mathbb{Z})$  em  $\mathcal{H}$ .

Por outro lado, é usualmente conveniente impor certas condições sobre  $F$ , tais como ser simplesmente conexo, ou ser limitado por curvas de uma forma prescrita. Nesta direção temos o seguinte resultado.

**Proposição 1.3.2** *Seja  $F$  um domínio fundamental para um subgrupo  $\Gamma$  de  $PSL_2(\mathbb{Z})$ , que contenha (exatamente) um ponto de cada órbita  $\Gamma z$ . Suponha que  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ,*

onde os conjuntos  $F_n$  são dois-a-dois disjuntos. Se  $\gamma_n \in \Gamma$  para  $n \geq 1$ , então a reunião  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n F_n$  também é um domínio fundamental para  $\Gamma$ , que contém (exatamente) um ponto de cada órbita  $\Gamma z$ .

Consideraremos agora  $\Gamma' \subset \Gamma$  um subgrupo de índice finito de um grupo Fuchsiano. Para qualquer conjunto  $\{\gamma_j\}$  (finito) de representantes de  $\Gamma' \backslash \Gamma$  (i.e.  $\Gamma = \bigcup_j \Gamma' \gamma_j$ ), o conjunto  $\bigcup_j \gamma_j F$  possui as propriedades de um domínio fundamental para  $\Gamma'$ , embora não necessariamente conexo.

Um exemplo, no grupo das matrizes, é o grupo de congruência principal de nível  $q$ , definido por

$$\Gamma(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{q} \right\},$$

onde a congruência é entendida entrada-a-entrada. Este é um subgrupo normal do grupo modular  $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ . Qualquer subgrupo do grupo modular que contenha  $\Gamma(q)$  é dito um subgrupo de congruência de nível  $q$ . Um exemplo, muito encontrado em aritmética, é o chamado grupo de congruência de Hecke

$$\Gamma_0(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{q} \right\}$$

notamos que ele não é um subgrupo normal de  $\Gamma_0(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ . Sendo

$$\left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ u & v \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : v|q \text{ e } u \pmod{\frac{q}{v}} \right\}$$

um conjunto de representantes de  $\Gamma_0(q)$  módulo  $\Gamma_0(1)$ , tal subgrupo é de índice finito em  $\Gamma_0(1)$ ,

$$[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(q)] = q \prod_{p|q} (1 + p^{-1}).$$

Sobre tais afirmações sugerimos consultar [Iwa97].

Assim, podemos construir um domínio fundamental para  $\Gamma_0(q)$  usando o domínio fundamental usual de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Tal região tem uma quantidade finita de pontos cuspidais (as imagens de  $\infty$  pelos  $\gamma_j$ ) e volume finito

$$\text{Vol}(\Gamma_0(q) \backslash \mathcal{H}) = \frac{\pi}{3} [SL_2(\mathbb{R}) : \Gamma_0(q)].$$

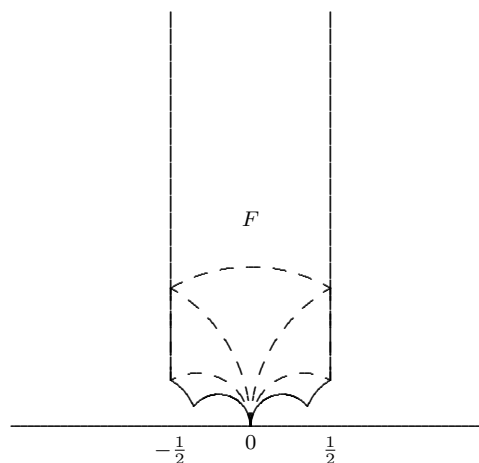


Figura 1.2: Um domínio fundamental  $F$  para  $\Gamma_0(5)$ .

Cada grupo Fuchsiano  $\Gamma$  possui uma superfície de Riemann associada a ele, a qual é obtida da seguinte maneira. O conjunto das órbitas  $\Gamma z$  é denotado por  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  e, quando munido da topologia quociente induzida pela congruência módulo  $\Gamma$ , torna-se um espaço de Hausdorff conexo, o qual é de fato uma superfície de Riemann. Seus pontos estão em correspondência bijetiva com os pontos de uma região fundamental  $F$  para  $\Gamma$ . É conveniente considerar  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  como sendo construída a partir de  $F$  ao se identificar pares de lados congruentes. Por exemplo, para o grupo modular temos

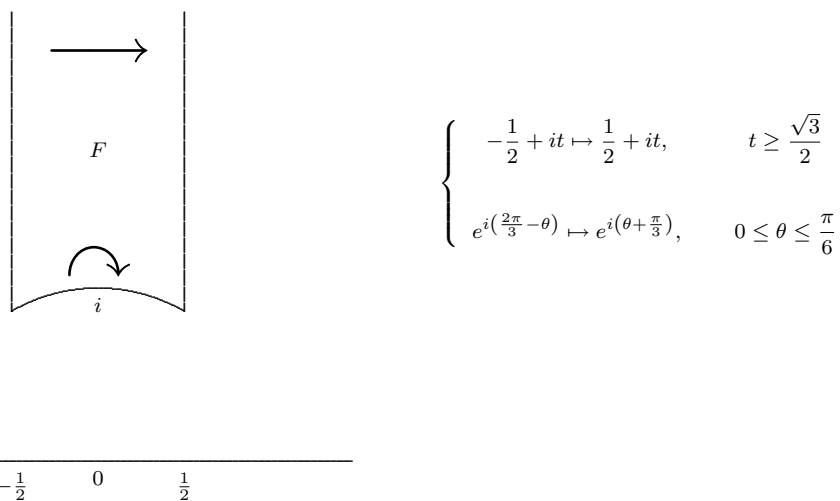


Figura 1.3: Identificação dos lados de  $F$  para  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

# Capítulo 2

## Formas Automórficas

### 2.1 Funções automórficas

**Definição 2.1.1** Dizemos que uma função  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  é automórfica com respeito a  $\Gamma$ , se  $f$  for invariante com respeito ao grupo  $\Gamma$ , ou seja, satisfizer

$$f(\gamma z) = f(z), \tag{2.1}$$

para qualquer  $\gamma \in \Gamma$ .

Por exemplo, para  $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ , as únicas funções polinomiais que são automórficas são as constantes. De fato, supondo  $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ , como  $\Gamma$  contém  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $f(z+1) = f(z)$ . Comparando os coeficientes de  $z^{n-1}$  temos  $na_n = 0$ ; donde  $n = 0$  e  $f$  é constante.

Podemos pensar em funções automórficas de classe  $C^\infty$  como funções na superfície  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ ; e assim, denotamos o espaço de tais funções por  $C^\infty(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ . Ou, podemos pensá-las como funções definidas em uma região fundamental  $F$  que satisfaça certas condições de compatibilidade nos pontos da fronteira, incluindo

$$f(z) = f(z') \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial n}(z) = -\frac{\partial f}{\partial n}(z'),$$

para quaisquer pares de pontos  $z$  e  $z'$  da fronteira que foram identificados entre si, onde  $\frac{\partial f}{\partial n}$  denota a derivada de  $f$  com respeito à normal exterior  $n$ . Ademais, se  $\gamma \in \Gamma$

for dada por  $\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma z) ((cz + d)^{-2} + (c\bar{z} + d)^{-2}) - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma z) ((cz + d)^{-2} - (c\bar{z} + d)^{-2}). \\ \frac{\partial f}{\partial y}(z) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma z) ((cz + d)^{-2} + (c\bar{z} + d)^{-2}) + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma z) ((cz + d)^{-2} - (c\bar{z} + d)^{-2}). \end{aligned}$$

Para duas funções  $f$  e  $g$  automórficas com respeito a  $\Gamma$ , definamos

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} d\mu z. \quad (2.2)$$

Notamos que  $f(z)\overline{g(z)}$  e  $d\mu z$  são invariantes sob  $\Gamma$ , referindo-nos à Proposição 1.2.1. Portanto, a integral está bem definida se for convergente. Isto posto, definamos o conjunto das funções quadrado-integráveis com respeito a  $\Gamma$  escrevendo

$$L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H}) = \{f \mid \langle f, f \rangle < \infty\}. \quad (2.3)$$

Observamos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é dito o produto interno de Petersson.

## 2.2 O Laplaciano e sua ação em $L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$

O operador Laplaciano  $\Delta$  agindo em funções de classe  $C^2$  em  $\mathcal{H}$  pode ser definido por

$$\Delta = y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = -(z - \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

um operador diferencial de segunda ordem, onde

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

**Proposição 2.2.1** *O operador  $\Delta$  comuta com a ação de qualquer  $g \in SL_2(\mathbb{R})$  em  $\mathcal{H}$ , isto é, se  $\Delta(f) = F$ , temos  $\Delta(f \circ g) = F \circ g$ ,  $\forall f \in C^2(\mathcal{H})$*

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\Delta} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ f \circ g & \xrightarrow{\Delta} & F \circ g \end{array}$$

*Demonstração:* Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
(\Delta f \circ g)(z) &= -(z - \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} (f \circ g)(z) \\
&= -(z - \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(gz) \frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(gz) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(z) \right) \\
&= -(z - \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(gz) \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} + 0 \right) \\
&= -\frac{(z - \bar{z})^2}{(cz + d)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z}(gz).
\end{aligned}$$

Aplicando o Laplaciano na transformação  $g(z)$ , temos

$$\begin{aligned}
(\Delta f)(gz) &= -(gz - \overline{gz})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}'} \frac{\partial}{\partial z'} f(gz) \\
&= -\left( \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right)^2 (c\bar{z} + d)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} f(gz) \\
&= -\left( \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{|cz + d|^2} \right)^2 (c\bar{z} + d)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} f(gz) \\
&= -\frac{(z - \bar{z})^2}{(cz + d)^2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z}(gz).
\end{aligned}$$

*QED*

Consideremos  $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $x + iy \mapsto -x + iy$ . Analiticamente,  $\iota$  é uma involução anti-holomorfa; geometricamente, é a reflexão em torno do eixo imaginário. Sendo também uma involução  $\mathbb{C}$ -linear, seus autovalores são  $\pm 1$ .

**Proposição 2.2.2** *O operador  $\Delta$  comuta com a ação de  $\iota$  em  $\mathcal{H}$ , isto é,  $\Delta(f \circ \iota) = (\Delta f) \circ \iota$ . Em particular, se  $f$  for uma autofunção de  $-\Delta$  então  $f \circ \iota$  também é uma autofunção com o mesmo autovalor.*

*Demonstração:* Analogamente à demonstração anterior temos

$$\begin{aligned}
(\Delta f \circ \iota)(z) &= -(z - \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} (f \circ \iota)(z) \\
&= -(z - \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial f}{\partial z}(-\bar{z}) \frac{\partial \iota}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(-\bar{z}) \frac{\partial \bar{\iota}}{\partial z}(z) \right) \\
&= -(z - \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( 0 + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(-\bar{z})(-1) \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= (z - \bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial z}(-\bar{z}) \\
&= -(-\bar{z} - \overline{(-\bar{z})})^2 \frac{\partial}{\partial(-z)} \frac{\partial}{\partial(-z)} f(-\bar{z}) \\
&= (\Delta f)(-\bar{z}).
\end{aligned}$$

*QED*

Notamos que o operador linear  $\Delta$  não é limitado. Seja  $BC^\infty(\Gamma \backslash \mathcal{H})$  o espaço das funções automórficas em  $\mathcal{H}$  com respeito a  $\Gamma$  de classe  $C^\infty$  que são limitadas. Consideramos então, o espaço  $D(-\Delta)$  das funções  $f \in BC^\infty(\Gamma \backslash \mathcal{H})$  tais que  $-\Delta f \in BC^\infty(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ . Observamos que, por argumentos clássicos  $D(-\Delta)$  é denso em  $L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$  (ver [Lan93]).

**Proposição 2.2.3** *O operador  $-\Delta$  é simétrico e não-negativo. Em particular, os autovalores de  $-\Delta$  são reais e não-negativos.*

*Demonstração:* É suficiente mostrarmos que para quaisquer  $f, g \in D(-\Delta)$  temos

$$\langle -\Delta f, g \rangle = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} y^2 (f_x \bar{g}_x + f_y \bar{g}_y) d\mu z. \tag{2.4}$$

Pois assim,  $\langle -\Delta f, g \rangle = \langle f, -\Delta g \rangle$  e  $\langle -\Delta f, f \rangle \geq 0$ , ou seja,  $-\Delta$  é um operador simétrico e não-negativo. De fato, é suficiente supor também que  $f$  e  $g$  são de suporte compacto, pois essa classe de funções é densa em  $D(-\Delta)$ . Faremos apenas o caso  $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ . Consideremos a região  $F_Y$ , um truncamento a uma altura  $Y$  da região fundamental usual  $F$  de  $PSL_2(\mathbb{Z})$ , como mostra a figura a seguir:

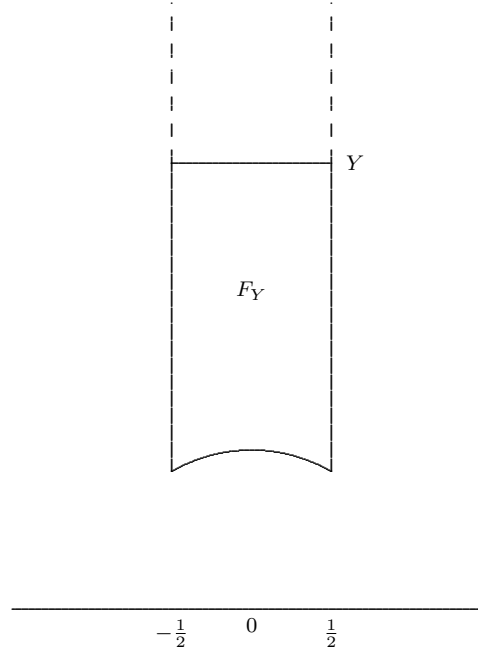


Figura 2.1: Domínio fundamental truncado  $F_Y$ .

Do Teorema de Green, temos

$$\int_{F_Y} (f_{xx} \bar{g} + f_{yy} \bar{g}) dx dy = \int_{\partial F_Y} -f_y \bar{g} dx + f_x \bar{g} dy - \int_{F_Y} (f_x \bar{g}_x + f_y \bar{g}_y) dx dy$$

e das condições sobre pontos identificados nos lados de  $F$ , temos um cancelamento na integral de linha, nos dando

$$- \int_{F_Y} (f_{xx} \bar{g} + f_{yy} \bar{g}) dx dy = \int_{F_Y} (f_x \bar{g}_x + f_y \bar{g}_y) dx dy - \int_{L_Y} -f_y \bar{g} dx + f_x \bar{g} dy ,$$

onde  $L_Y$  denota o segmento de reta  $[-\frac{1}{2} + iY, \frac{1}{2} + iY]$ . Fazendo  $Y \rightarrow \infty$  segue então (2.4). O que conclui a demonstração.  $QED$

Observamos que como consequência desta proposição,  $-\Delta$  pode ser estendido a um operador auto-adjunto definido em  $L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$  pelo método de extensão de Friedrichs (ver [Wei80] - pg. 123); o qual também será denotado por  $-\Delta$ .

## 2.3 Formas de Maass

**Definição 2.3.1** Uma função  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , de classe  $C^\infty$ , automórfica com respeito a  $\Gamma$  é dita uma forma automórfica, se existir  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\Delta f + \lambda f = 0$ .

Em geral, é conveniente escrever o autovalor de  $-\Delta$  como  $\lambda = s(1-s)$  (logo, dois valores de  $s$  existem para um dado  $\lambda$ , exceto para  $\lambda = \frac{1}{4}$ ; ou ainda,  $s \mapsto s(1-s)$  é recobrimento duplo de  $\mathbb{C}$  exceto para  $s = \frac{1}{2}$ ), e escrevemos  $s = \frac{1}{2} + ir$ ,  $r \in \mathbb{C}$ . Observamos que, para  $\lambda > 0$  devemos ter  $s \in (0, 1)$  (se  $\lambda \leq \frac{1}{4}$ ) ou  $s = \frac{1}{2} + ir$  com  $r \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.3.2** A série de Eisenstein  $E(z, s)$  com respeito a  $\Gamma$  para  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(s) > 1$  e  $z \in \mathcal{H}$  é definida por

$$E(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\text{Im } \gamma z)^s, \quad (2.5)$$

onde  $\Gamma_\infty = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \infty = \infty\}$  é o estabilizador de  $\infty$ .

Observamos que, como

$$\text{Im}(\tau z) = \text{Im}(z) \quad \forall \tau \in \Gamma_\infty, z \in \mathcal{H},$$

a soma independe da escolha de um conjunto de representantes para  $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$ , o que mostra que  $E(z, s)$  está bem-definida. Além disso, esta mesma equação diz que é necessário passarmos ao quociente  $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$ , para a convergência da série.

Por outro lado, notamos que

$$(\Delta + s(1-s)) E(z, s) = 0. \quad (2.6)$$

Isto pois:  $\Delta$  comuta com ação de  $SL_2(\mathbb{R})$  em  $\mathcal{H}$ ; a função potência  $(\text{Im } z)^s$  claramente satisfaz (2.6); e a série de Eisenstein é constituída de  $(\text{Im } \gamma z)^s$ .

**Definição 2.3.3** *Seja  $f$  uma forma automórfica com respeito a  $\Gamma$ . Dizemos que  $f$  é uma forma de Maass, se  $f$  for de crescimento moderado em todos os pontos cuspidais  $\mathfrak{a}$  (isto é,  $f(\sigma_{\mathfrak{a}}z) \ll y^C$  para  $C > 1$  quando  $y \rightarrow \infty$ , onde  $\sigma_{\mathfrak{a}}$  é a matriz de escalamento de  $\mathfrak{a}$ , definida em (1.5)). Se além disso, o termo constante da expansão de Fourier da função 1-periódica  $f(\sigma_{\mathfrak{a}}z)$  for identicamente nulo, dizemos que  $f$  é uma forma de Maass cuspidal em  $\mathfrak{a}$ .*

**Proposição 2.3.4** *Seja  $f(z)$  uma forma de Maass para o grupo  $\Gamma$  com autovalor  $\lambda = s(1-s) \neq \frac{1}{4}$  de  $-\Delta$ . Então  $f$  tem a seguinte expansão de Fourier*

$$f(\sigma_{\mathfrak{a}}z) = a(0)y^s + b(0)y^{1-s} + y^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a(n)K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)e(nx), \quad (2.7)$$

onde  $a(n), b(0) \in \mathbb{C}$  e  $K_{\nu}$  é a função de Bessel

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)}{2 \operatorname{sen}(\nu\pi)}, \quad I_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad (2.8)$$

(solução de  $z^2u'' + zu' - (z^2 + \nu^2)u = 0$ ). Além disso,  $f$  é cuspidal se, e somente se,  $a(0) = b(0) = 0$ .

*Demonstração:* Fazemos apenas o caso  $\mathfrak{a} = \infty$ . Então  $f(z+1) = f(z)$  e  $f$  pode ser expandida em série de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(y)e^{2\pi inx},$$

onde

$$c_n(y) = \int_0^1 f(x+iy)e(nx) dx.$$

Derivando sob o sinal de integração, pois  $f$  é de classe  $C^1$  em  $y$ , temos que  $c_n(y)$  satisfaz a equação diferencial

$$u'' + \left( \frac{s(1-s)}{y^2} - 4\pi^2n^2 \right) u = 0, \quad (2.9)$$

que é do tipo de Bessel. Se  $n = 0$ , a equação se reduz a  $u'' + s(1-s)y^{-2}u = 0$  admitindo as soluções linearmente independentes  $y^s$  e  $y^{1-s}$  se  $s \neq \frac{1}{2}$ , e  $y^{\frac{1}{2}}$  e  $y^{\frac{1}{2}}\log(y)$  se  $s = \frac{1}{2}$ . Logo, como  $\lambda \neq \frac{1}{4}$ , o termo constante na expansão de Fourier é uma combinação linear de  $y^s$  e  $y^{1-s}$ , ou seja,

$$c_0(y) = a(0)y^s + b(0)y^{1-s}.$$

Se  $n \neq 0$ , duas soluções linearmente independentes de (2.9) são

$$u_1(y) = y^{\frac{1}{2}}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) \quad \text{e} \quad u_2(y) = y^{\frac{1}{2}}I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y).$$

Portanto,

$$c_n(y) = a(n)y^{\frac{1}{2}}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) + b(n)y^{\frac{1}{2}}I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y).$$

O comportamento assintótico de  $K_\nu$  e  $I_\nu$  são bem diferentes:

$$K_\nu(Y) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2Y}}e^{-Y} \quad \text{e} \quad I_\nu(Y) \sim \frac{e^Y}{\sqrt{2\pi Y}}, \quad (2.10)$$

ou seja,  $K_\nu$  tem decaimento rápido quando  $y \rightarrow \infty$ , enquanto que  $I_\nu$  cresce exponencialmente, ver [Leb72]. Por outro lado, o crescimento moderado de uma forma de Maass  $f(z) \ll y^C$  nos diz que  $c_n(y) \ll y^C$  e daí, que os termos  $I_\nu$  não podem aparecer para  $n \neq 0$ . *QED*

Observamos que da definição de forma de Maass segue que

$$f(z) \ll y^C + y^{-C},$$

para todo  $y$ ; donde

$$a(n)y^{\frac{1}{2}}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) \ll \int_0^1 |f(z)e(nx)|dx \ll y^C + y^{-C},$$

e escolhendo  $y = M|n|^{-1}$ , onde  $M > 0$  é uma constante absoluta tal que  $K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi M) \neq 0$ , temos

$$a(n) \ll |n|^{C+\frac{1}{2}}.$$

Assim, se  $f$  for uma forma de Maass cuspidal para o grupo modular, da sua série de Fourier e do comportamento assintótico de  $K_{s-\frac{1}{2}}(Y)$ , quando  $Y \rightarrow \infty$ , temos

$$f(z) \ll \sum_{n \neq 0} |n|^{C+\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2(2\pi|n|y)}} e^{-2\pi ny} \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^C e^{-2\pi ny} \ll e^{-2\pi y} \quad (2.11)$$

quando  $y \rightarrow \infty$ . Segue então, que  $f$  deve ser limitada em  $\mathcal{H}$ . Assim,  $f \in L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$  pois  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  possui volume finito. Além disso, pelo Teste M de Weierstrass, a série de Fouier de  $f$  converge uniformemente na região fundamental usual de  $\Gamma$ .

Doravante, denotaremos especificamente por  $\varphi$  (ao invés de  $f$ ) uma forma de Maass cuspidal para  $PSL_2(\mathbb{Z})$ , e escreveremos

$$\varphi(z) = y^{\frac{1}{2}} \sum_{n \neq 0} \varrho(n) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) e(nx). \quad (2.12)$$

Como mencionado anteriormente podemos escrever  $s - \frac{1}{2} = ir$  com  $r \in \mathbb{C}$ . Na verdade, para o grupo modular, sempre temos  $r \in \mathbb{R}$ . Sendo  $F$  a região fundamental usual de  $PSL_2(\mathbb{Z})$  e  $S$  a transformação de Möbius dada por  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  temos

$$2\lambda \iint_F |\varphi|^2 d\mu z \stackrel{(2.4)}{=} \iint_{F \cup S(F)} |\varphi_x|^2 + |\varphi_y|^2 dx dy \geq \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\varphi_x|^2 dx dy. \quad (2.13)$$

Daí, escrevendo  $\varphi(z) = \sum c_n(y) e(nx)$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\varphi_x|^2 dx dy &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} \sum_{n \neq 0} 4\pi^2 n^2 |c_n(y)|^2 dy \\ &\geq 4\pi^2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} \sum_{n \neq 0} n^2 |c_n(y)|^2 \frac{dy}{y^2} \\ &= 3\pi^2 \sum_{n \neq 0} n^2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} |c_n(y)|^2 \frac{dy}{y^2} \\ &\geq 3\pi^2 \sum_{n \neq 0} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} |c_n(y)|^2 \frac{dy}{y^2} \\ &= 3\pi^2 \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\infty} \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\varphi(x+iy)|^2 dx \right) \frac{dy}{y^2} \\ &\geq 3\pi^2 \iint_F |\varphi|^2 d\mu z \end{aligned}$$

Portanto,  $\lambda \geq \frac{3}{2}\pi^2$ . Assim, um autovalor para uma autofunção  $\varphi$  não-constante é sempre maior do que  $\frac{1}{4}$ . O que mostra que  $r$  é real.

**Proposição 2.3.5** *Sejam  $\varrho(n)$  os coeficientes na expansão de Fourier de uma forma  $\varphi(z)$ . Temos que  $\sum_{n \leq X} |\varrho(n)|^2 \ll X$ , e como consequência,  $\varrho(n) \ll n^{\frac{1}{2}}$ .*

*Demonstração:* Suponhamos  $y = \text{Im}(z)$  fixado e  $X > 1$ . Da convergência uniforme da série de Fourier de  $\varphi(z)$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\varphi(z)|^2 dx &= \int_0^1 y \sum_{m \neq 0} \sum_{n \neq 0} \varrho(m) \overline{\varrho(n)} K_{ir}(2\pi|m|y) \overline{K_{ir}(2\pi|n|y)} e(mx) \overline{e(nx)} dx \\ &= y \sum_{m \neq 0} \sum_{n \neq 0} \varrho(m) \overline{\varrho(n)} K_{ir}(2\pi|m|y) \overline{K_{ir}(2\pi|n|y)} \int_0^1 e((m-n)x) dx \\ &= y \sum_{n \neq 0} |\varrho(n)|^2 |K_{ir}(2\pi|n|y)|^2 \\ &\geq y \sum_{n \leq X} |\varrho(n)|^2 |K_{ir}(2\pi ny)|^2 \end{aligned}$$

Agora, como  $K_{ir}(x)$  é monótona decrescente e positiva para  $x > r$  (ver [Leb72]), temos para  $y > \frac{r}{2\pi}$  que

$$y \sum_{n \leq X} |\varrho(n)|^2 |K_{ir}(2\pi ny)|^2 > y |K_{ir}(2\pi X y)|^2 \sum_{n \leq X} |\varrho(n)|^2.$$

Sendo  $\varphi$  limitada em  $\mathcal{H}$ , temos

$$\int_0^1 |\varphi(z)|^2 dx \ll 1.$$

Tomando  $y = C \frac{r}{X}$ , onde  $C$  é uma constante tal que  $K_{ir}(2\pi Cr) \neq 0$ , o resultado segue.

*QED*

Agora, qualquer forma de Maass  $\varphi(z)$  pode se decompor em suas partes par ou ímpar com respeito a aplicação  $z \mapsto -\bar{z}$ :

$$\varphi(z) = \frac{\varphi(z) + \varphi(-\bar{z})}{2} + \frac{\varphi(z) - \varphi(-\bar{z})}{2}.$$

Sendo  $\varphi(z)$  automórfica, as parcelas também o são, pois

$$\varphi\left(-\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix} \overline{(-z)}\right) = \varphi(-\bar{z}).$$

Além disso, pela Proposição 2.2.2,  $\varphi \circ \iota$  também é uma autofunção de  $-\Delta$  com o mesmo autovalor. Com isso, daqui por diante, vamos supor que  $\varphi(x + iy)$  seja par ou ímpar em  $x$ , isto é,  $\varphi(-\bar{z}) = \delta\varphi(z)$ ,  $\delta = 1, -1$  respectivamente. Diagonalizando assim as formas de Maass cuspidais.

Se  $\varphi$  for par,  $\varrho(n) = \varrho(-n)$  para todo  $n$ , e sua série de Fourier se escreve como

$$\varphi(z) = 2y^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) K_{ir}(2\pi ny) \cosh(2\pi inx),$$

e se  $\varphi$  for ímpar,  $\varrho(n) = -\varrho(-n)$  para todo  $n$  e

$$\varphi(z) = 2y^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) K_{ir}(2\pi ny) \sinh(2\pi inx).$$

Encerrando esta seção, temos que  $E(z, s)$  não é uma forma cuspidal para  $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ . Escolhendo representantes de  $\Gamma$  módulo  $\Gamma_{\infty}$ , temos para  $\text{Re}(s) > 1$  que

$$E(z, s) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d) \in A} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}} = \frac{y^s}{\zeta(2s)} \sum_{(m,n) \in B} \frac{1}{|mz + n|^{2s}}, \quad (2.14)$$

onde  $A = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \text{mdc}(c, d) = 1\}$ ,  $B = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m^2 + n^2 > 0\}$  e  $\zeta(s)$  é a função zeta de Riemann. Daí

$$a_r(y, s) = \int_0^1 E(z, s) e(-rx) dx = \frac{1}{2} \frac{y^s}{\zeta(2s)} \int_0^1 \sum_{\substack{(m,n) \in B \\ m \geq 0}} \frac{1}{|mz + n|^{2s}} e(-rx) dx,$$

já que  $(m, n)$  e  $(-m, -n)$  contribuem o mesmo para a soma. Da convergência uniforme da série de Eisenstein, comutamos a soma com a integral

$$a_r(y, s) = y^s \int_0^1 e(-rx) dx + \frac{y^s}{\zeta(2s)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{e(-rx)}{|mz + n|^{2s}} dx,$$

onde o primeiro termo vem da contribuição de  $m = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Daí,

$$a_r(y, s) = y^s \int_0^1 e(-rx) dx + \frac{y^s}{\zeta(2s)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{e(-rx)}{((mx + n)^2 + m^2 y^2)^s} dx.$$



Fazendo  $n = mk + l$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq l < m$ ,

$$a_r(y, s) = y^s \int_0^1 e(-rx) dx + \frac{y^s}{\zeta(2s)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{e(-rx)}{((m(x+k)+l)^2 + m^2 y^2)^s} dx.$$

Por mudanças de variável, obtemos

$$a_r(y, s) = y^s \int_0^1 e(-rx) dx + \frac{y^s}{\zeta(2s)} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2s} \sum_{l=0}^{m-1} e^{2\pi i r \frac{l}{m}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e(-r\xi)}{(\xi^2 + y^2)^s} d\xi.$$

Da soma geométrica

$$\sum_{l=0}^{m-1} e^{2\pi i r \frac{l}{m}} = \begin{cases} m, & \text{se } m \mid r \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

temos

$$a_r(y, s) = y^s \int_0^1 e(-rx) dx + \frac{y^s}{\zeta(2s)} \sum_{\substack{m \mid r \\ m > 0}} m^{1-2s} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi^2 + y^2)^{-s} e(-r\xi) d\xi.$$

Agora,

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)^{-s} e(-rx) dx = \begin{cases} \pi^{s+\frac{1}{2}} \Gamma(s - \frac{1}{2}) y^{1-s}, & \text{se } r = 0 \\ 2|r|^{s-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y), & \text{se } r \neq 0 \end{cases}.$$

(ver Cálculo A.1.4 no Apêndice A). Portanto, se  $r = 0$  temos

$$a_0(y, s) = y^s + \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2}) \zeta(2s - 1)}{\Gamma(s) \zeta(2s)} y^{1-s}.$$

Se  $r \neq 0$  temos

$$a_r(y, s) = 2 \frac{\pi^s y^{\frac{1}{2}} |r|^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma(s) \zeta(2s)} \sigma_{1-2s}(|r|) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y).$$

O que mostra o seguinte resultado.

**Proposição 2.3.6** *A expansão em Série de Fourier de  $E(z, s)$  é dada por*

$$E(z, s) = y^s + \phi(s) y^{1-s} + \frac{4\sqrt{y}}{\xi(2s)} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{s-\frac{1}{2}}(n) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi n y) \cos(2\pi n x), \quad (2.15)$$

onde  $\tau_{\alpha}(n) = \sum_{ad=n} a^{\alpha} d^{-\alpha} = n^{-\alpha} \sigma_{2\alpha}(n)$  é a soma dos divisores generalizada, e  $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$  é a função zeta completada. A função de espalhamento  $\phi(s)$  pode ser expressa em termos de  $\xi(s)$ :

$$\phi(s) = \frac{\xi(2s - 1)}{\xi(2s)}. \quad (2.16)$$

## 2.4 A continuação analítica da série de Eisenstein

Recordamos que: a função  $\Gamma(s)$  não possui zeros em  $\mathbb{C}$  e que possui pólos de ordem 1 em  $s = 0, -1, -2, \dots$  com resíduo  $\text{Res}_{s=-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$ ; e a função  $\zeta(s)$  não possui zeros no semiplano  $\text{Re}(s) \geq 1$ , e que possui um único pólo de ordem 1 em  $s = 1$  com resíduo  $\text{Res}_{s=1} \zeta(s) = 1$ . Assim,  $\xi(2s)^{-1}$  e  $\phi(s)$  são meromorfas em  $\mathbb{C}$ .

**Proposição 2.4.1** *A série de Eisenstein pode ser continuada analiticamente a uma função meromorfa sobre o  $s$ -plano complexo, e satisfaz a equação funcional*

$$E(z, s) = \phi(s)E(z, 1 - s). \quad (2.17)$$

No semiplano  $\text{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$  a série de Eisenstein  $E(z, s)$  é holomorfa exceto por um pólo de ordem 1 em  $s = 1$  com

$$\text{Res}_{s=1} E(z, s) = \frac{3}{\pi} = \frac{1}{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathcal{H})}.$$

*Demonstração:* Basta mostrarmos que para  $z$  na região fundamental usual de  $PSL_2(\mathbb{Z})$  a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_{s-\frac{1}{2}}(n) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi ny) \cos(2\pi nx)$$

é uma função inteira de  $s$ , pois assim, a continuação analítica de  $E(z, s)$  é definida pelas propriedades de  $\xi(2s)^{-1}$  e  $\phi(s)$ . Para isto, é suficiente que tal série seja uma série de funções inteiras de  $s$  uniformemente convergente em subconjuntos compactos do  $s$ -plano. Primeiramente,  $K_{s-\frac{1}{2}}(z)$  é inteira (ver [Leb72]), e evidentemente  $\tau_{s-\frac{1}{2}}(n)$  também o é. Logo, cada termo da série é uma função inteira. Além disso, como  $y > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{2}{\pi}$ , pelo Cálculo A.1.2, em um subconjunto compacto  $K$  do  $s$ -plano temos

$$\begin{aligned} |\tau_{s-\frac{1}{2}}(n) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi ny) \cos(2\pi nx)| &\leq |n^{\frac{1}{2}-s}| |\sigma_{2s-1}(n)| e^{-\pi ny} K_{\sigma-\frac{1}{2}}(2) \\ &\leq n^{\frac{1}{2}-\sigma} \sigma_0(n) |n^{2s-1}| e^{-\pi ny} K_{\sigma-\frac{1}{2}}(2) \\ &\leq n^{\frac{1}{2}-\sigma} n n^{2\sigma-1} K_{\sigma-\frac{1}{2}}(2) e^{-\pi ny} \\ &\ll_{n,K} e^{-\pi ny} \end{aligned}$$

onde a constante implícita depende de  $n$  e do compacto  $K$ . O que mostra a primeira asserção da proposição.

Agora, se  $r = 0$ , graças à equação funcional de  $\zeta(s)$ ,  $\xi(s) = \xi(1 - s)$ , temos

$$\begin{aligned}\xi(2s)a_0(y, s) &= \xi(2s)y^s + \xi(2s - 1)y^{1-s} \\ &= \xi(2s - 1)\frac{\xi(2s)}{\xi(2s - 1)}y^s + \xi(2s - 1)y^{1-s} \\ &= \xi(2s - 1)\frac{\xi(1 - 2s)}{\xi(2 - 2s)}y^s + \xi(2s - 1)y^{1-s} \\ &= \xi(2s - 1)a_0(y, 1 - s)\end{aligned}$$

Se  $r \neq 0$ , observamos que de (2.8) temos

$$K_\nu(y) = K_{-\nu}(y),$$

e que a trocamos os papéis de  $a$  e  $d$ ,

$$\tau_{s-\frac{1}{2}}(n) = \sum_{ad=n} \left(\frac{a}{d}\right)^{s-\frac{1}{2}} = \sum_{ad=n} \left(\frac{d}{a}\right)^{\frac{1}{2}-s} = \tau_{\frac{1}{2}-s}(n).$$

Daí, usando novamente a equação funcional de  $\zeta(s)$ ,

$$\xi(2s)a_r(y, s) = 2y^{\frac{1}{2}}\tau_{s-\frac{1}{2}}(|r|)K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y) \frac{\xi(2-2s)}{\xi(2-2s)} = \xi(2s-1)a_r(y, 1-s)$$

Assim, para todo  $r \in \mathbb{Z}$  temos a equação funcional

$$\xi(2s)a_r(y, s) = \xi(2s-1)a_r(y, 1-s),$$

ou equivalentemente, a equação desejada (2.17).

Quanto a afirmação sobre as singularidades, como no semiplano  $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$  a única singularidade provém de  $a_0(y, s)$ , de fato  $\phi(s)$ , temos

$$\operatorname{Res}_{s=1} E(z, s) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} \frac{1}{\zeta(2s)} \operatorname{Res}_{s=1} \zeta(2s-1) = \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{1} \frac{6}{\pi^2} \frac{\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s)}{2} = \frac{3}{\pi}.$$

*QED*

Observamos que, para  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , se  $y = \operatorname{Im}(z)$  for suficientemente grande o termo constante predomina, pois nos outros coeficientes da expansão de Fourier a

---

função de Bessel  $K_{s-\frac{1}{2}}$  tem decaimento rápido quando  $y \rightarrow \infty$ . Logo, assintoticamente, o comportamento de  $E(z, s)$  é o mesmo do termo constante,

$$E(z, s) = y^s + \phi(s)y^{1-s} + O(e^{-2\pi y}).$$

Assim, da equação funcional (2.17) e por convexidade,

$$E(z, s) \ll y^C. \tag{2.18}$$

para todo  $s$  onde  $E(z, s)$  pode ser continuada analiticamente.

# Capítulo 3

## Operadores de Hecke

Na década de 30 (ver [Hec37]), Hecke introduziu uma família de operadores  $\{T_1, T_2, \dots\}$  agindo em formas modulares. Ele projetou estes operadores para que se

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} a(m) e^{2\pi i m z}$$

fosse uma autoforma de todos tais operadores com  $a(1) = 1$ , então o coeficiente  $a(m)$  seria igual ao autovalor  $\lambda(m)$  de  $f$  com respeito a  $T_m$ ; portanto, sendo os operadores comutativos entre si,  $\lambda(n)$  seria uma função multiplicativa e a  $L$ -função correspondente admitiria um produto de Euler.

Observamos que os operadores de Hecke podem ser definidos de várias maneiras (ver [Shi71] e [Ser73], por exemplo); nossa escolha aqui é feita pela praticidade em nossas aplicações.

### 3.1 Propriedades Algébricas

Seja  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ . Para um inteiro  $n \geq 1$  consideremos o conjunto

$$\Gamma_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = n \right\}.$$

Em particular,  $\Gamma_1$  é o grupo modular. Além disso,  $\Gamma$  age em  $\Gamma_n$  em ambos os lados, ou seja,  $\Gamma \Gamma_n = \Gamma_n = \Gamma_n \Gamma$ , e assim podemos decompor em órbitas  $\Gamma_n = \bigcup_{\rho \in \Gamma \backslash \Gamma_n} \Gamma \rho$ .

**Definição 3.1.1** O operador de Hecke  $T_n$  para  $\Gamma$  é definido por sua ação

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\rho \in \Gamma \backslash \Gamma_n} f(\rho z). \quad (3.1)$$

em funções  $f$  automórficas com respeito a  $\Gamma$ .

Notamos que o somando só depende da órbita  $\Gamma\rho$  e não do representante escolhido, o que justifica a notação. Pois, se  $\rho$  e  $\rho'$  forem representantes da mesma órbita, existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\rho' = \gamma\rho$ , e  $f(\rho'z) = f(\gamma\rho z) = f(\rho z)$  por  $f$  ser automórfica.

**Proposição 3.1.2** O conjunto

$$\Delta_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : ad = n, 0 \leq b < d \right\}$$

forma um conjunto completo de representantes de órbitas de  $\Gamma \backslash \Gamma_n$ . Em particular, temos a partição

$$\Gamma_n = \bigcup_{\rho \in \Delta_n} \Gamma\rho.$$

*Demonstração:* Seja  $\rho = \begin{pmatrix} a & * \\ c & * \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ . Tomando  $\gamma = \begin{pmatrix} c & \\ & (a,c) \end{pmatrix}$  e  $\delta = -\frac{a}{(a,c)}$  temos  $(\gamma, \delta) = 1$  e  $\gamma a + \delta c = 0$ . Ou seja, existe  $\tau = \begin{pmatrix} * & * \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$  tal que  $\tau\rho \in \Gamma_n$  seja triangular superior. Trocando o sinal de  $\tau$  se necessário, temos  $\tau\rho = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & w \end{pmatrix}$  com  $xw = n$  e  $w > 0$ . Agora, multiplicando à esquerda por  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , encontramos  $\sigma\tau\rho = \begin{pmatrix} * & y' \\ 0 & * \end{pmatrix}$  com  $y' = y - \frac{\epsilon}{(a,c)}$ . Assim, escolhendo  $\epsilon \in \mathbb{Z}$  convenientemente,  $0 \leq y' < d$ . Finalmente, se  $\rho$  percorre  $\Delta_n$ , as órbitas são disjuntas, pois

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

implica  $\gamma = 0$ , donde  $\alpha\delta = 1$ . Trocando  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  por  $-\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  se necessário, temos  $\alpha = \delta = 1$ . Considerando as desigualdades para  $b$  e  $b'$ , devemos ter  $\beta = 0$ .  $\quad QED$

Como resultado da proposição anterior, observamos ainda que o número de termos na soma é

$$[\Gamma_n : \Gamma] = \sum_{d|n} d = \sigma(n),$$

e podemos escrever

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n} \sum_{0 \leq b < d} f\left(\frac{az+b}{d}\right). \quad (3.2)$$

**Proposição 3.1.3** *A função  $T_n f$  é automórfica com respeito a  $\Gamma$ .*

*Demonstração:* Para  $\tau \in \Gamma$  fixado, temos sobre uma partição das órbitas

$$\Gamma_n = \tau \Gamma_n \tau^{-1} = \tau \left( \bigcup_{\rho \in \Gamma \setminus \Gamma_n} \Gamma \rho \right) \tau^{-1} = \bigcup_{\rho \in \Gamma \setminus \Gamma_n} \tau \Gamma \tau^{-1} \tau \rho \tau^{-1} = \bigcup_{\rho \in \Gamma \setminus \Gamma_n} \Gamma \tau \rho \tau^{-1}.$$

Assim,

$$(T_n f)(\tau z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\rho \in \Gamma \setminus \Gamma_n} f(\tau \rho \tau^{-1}(\tau z)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\rho \in \Gamma \setminus \Gamma_n} f(\tau \rho z) = (T_n f)(z).$$

*QED*

**Proposição 3.1.4** *Se  $f$  for quadrado-integrável então  $T_n f$  também o será, ou seja,*

$$T_n : L^2(\Gamma \setminus \mathcal{H}) \rightarrow L^2(\Gamma \setminus \mathcal{H}).$$

*Demonstração:* Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} |(T_n f)(z)|^2 d\mu z &= \int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} n^{-1} \left| \sum_{\tau \in \Gamma \setminus \Gamma_n} f(\tau z) \right|^2 d\mu z \\ &\leq n^{-1} \int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} \sigma(n) \sum_{\tau \in \Gamma \setminus \Gamma_n} |f(\tau z)|^2 d\mu z \\ &= \frac{\sigma(n)}{n} \sum_{\tau \in \Gamma \setminus \Gamma_n} \int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} |f(\tau z)|^2 d\mu z \\ &= \frac{\sigma(n)}{n} \sum_{\tau \in \Gamma \setminus \Gamma_n} \int_{\tau(\Gamma \setminus \mathcal{H})} |f(z)|^2 d\mu \tau^{-1} z. \end{aligned}$$

Agora, como  $\tau \in \Gamma \setminus \Gamma_n$ , um vértice de  $\tau(\Gamma \setminus \mathcal{H})$  é  $\infty$  e os outros dois não tocam o eixo real. Assim, sendo a soma sobre  $\tau$  finita, podemos cobrir todos os triângulos

$\tau(\Gamma \backslash \mathcal{H})$  por um número finito de imagens por  $\Gamma$  da região fundamental usual  $F$  de  $\Gamma$ . Portanto,

$$\int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} |(T_n f)(z)|^2 d\mu z \leq M \frac{\sigma(n)}{n} \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} |f(z)|^2 d\mu z,$$

o que mostra a proposição. QED

**Proposição 3.1.5** *Para quaisquer  $m, n \geq 1$  temos*

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} T_{\frac{mn}{d^2}}. \quad (3.3)$$

*Em particular, temos que  $T_m$  e  $T_n$  comutam.*

*Demonstração:* Por definição,

$$T_m(T_n f)(z) = T_m \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau \in \Gamma \backslash \Gamma_n} f(\tau z) \right) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{\rho \in \Gamma \backslash \Gamma_m} \sum_{\tau \in \Gamma \backslash \Gamma_n} f(\rho \tau z).$$

Escolhendo os representantes  $\Delta_n$

$$\begin{aligned} T_m(T_n f)(z) &= \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{\substack{a_1 d_1 = m \\ a_2 d_2 = n}} \sum_{\substack{b_1 \pmod{d_1} \\ b_2 \pmod{d_2}}} f \left( \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} z \right) \\ &= T_m(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{\substack{a_1 d_1 = m \\ a_2 d_2 = n}} \sum_{\substack{b_1 \pmod{d_1} \\ b_2 \pmod{d_2}}} f \left( \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + d_1 d_2 \\ 0 & d_1 d_2 \end{pmatrix} z \right). \end{aligned}$$

Tomando  $a_1 = (a_1, d_2) a'_1$  e  $d_2 = (a_1, d_2) d'_2$  temos

$$T_m(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{\delta|(m,n)} \sum_{\substack{a'_1 d_1 = \frac{m}{\delta} \\ a_2 d'_2 = \frac{n}{\delta}}} \sum_{\substack{b_1 \pmod{d_1} \\ b_2 \pmod{\delta d'_2}}} f \left( \begin{pmatrix} a'_1 a_2 & a'_1 b_2 + d_1 d'_2 \\ 0 & d_1 d'_2 \end{pmatrix} z \right).$$

Dados  $a'_1, d_1, a_2, d'_2$  como anteriormente a entrada superior à direita  $a'_1 b_2 + b_1 d'_2$  percorre um conjunto de classes de resíduos completo módulo  $d_1 d'_2$  com multiplicidade  $\delta$ , isto é,  $\delta$  vezes. Assim,

$$T_m(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{\delta|(m,n)} \delta \sum_{\substack{a'_1 d_1 = \frac{m}{\delta} \\ a_2 d'_2 = \frac{n}{\delta}}} \sum_{b \pmod{d_1 d'_2}} f \left( \begin{pmatrix} a'_1 a_2 & b \\ 0 & d_1 d'_2 \end{pmatrix} z \right).$$



Agora, fazendo  $a = a_1a_2$ ,  $d = d_1d_2$  temos  $ad = mn\delta^{-2}$ . Reciprocamente, dada uma fatoração  $ad = mn\delta^{-2}$  podemos encontrar únicos  $a_1, a_2, d_1, d_2$  tais que  $a = a_1a_2$ ,  $d = d_1d_2$ ,  $a_1d_1 = m\delta^{-1}$ ,  $a_2d_2 = n\delta^{-1}$  e  $(a_1, d_2) = 1$ , a saber

$$a_1 = \frac{m}{(m, \delta d)}, \quad a_2 = \frac{a}{a_1}, \quad d_2 = \frac{\delta d}{(m, \delta d)}, \quad d_1 = \frac{d}{d_2}.$$

O que mostra que

$$T_m(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{\delta|(m,n)} \sum_{ad=\frac{mn}{\delta^2}} \sum_{b(\bmod d)} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} z\right) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{\delta|(m,n)} (T_{\frac{mn}{\delta^2}} f)(z).$$

*QED*

Além disso, observamos que  $T_n$  e o Laplaciano  $\Delta$  também comutam, pois  $\Delta$  comuta com a ação de  $SL_2(\mathbb{R})$ .

Segue ainda da proposição anterior que a álgebra comutativa dos operadores de Hecke  $T_n$  é gerada por  $T_p$  onde  $p$  percorre os números primos, pois

$$T_{p^{k+1}} = T_p T_{p^k} - T_{p^{k-1}}, \quad k \geq 1. \quad (3.4)$$

**Proposição 3.1.6** *Os operadores  $T_n$  são auto-adjuntos em  $L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ , isto é,*

$$\langle T_n f, g \rangle = \langle f, T_n g \rangle \quad (3.5)$$

para todo  $f, g \in L^2(\Gamma \backslash \mathcal{H})$ .

*Demonstração:* É suficiente mostrarmos a proposição no caso  $n = p$  primo. Agora, escolhendo os representantes  $\Delta_n$ ,

$$\sqrt{p} (T_p f)(z) = \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} z\right) + f\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z\right).$$

Como  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  contém a involução  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  temos

$$\sqrt{p} (T_p f)(z) = \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} z\right) + f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z\right).$$

e

$$\sqrt{p} (T_p f)(z) = \sum_{j=0}^{p-1} f \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} z \right) + f \left( \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right).$$

Tomando  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_j = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix}$  para  $0 \leq j < p$  e  $\alpha_p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  temos

$$\sqrt{p} (T_p f)(z) = \sum_{j=0}^p f(\alpha \alpha_j z)$$

E, tomando  $\beta = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & j \end{pmatrix}$  para  $0 \leq j < p$  e  $\beta_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  temos

$$\sqrt{p} (T_p f)(z) = \sum_{j=0}^p f(\beta \beta_j z)$$

Observando que  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são elementos do grupo modular, e que

$$\beta_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_j$$

para  $0 \leq j \leq p$ , obtemos

$$\sqrt{p} \langle T_p f, g \rangle = \sum_{j=0}^p \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} f(\alpha \alpha_j z) \bar{g}(z) d\mu z.$$

Denotando por  $A$  o conjunto  $\bigcup_{j=0}^p \alpha \alpha_j F$ , onde  $F$  é uma região fundamental de  $\Gamma$ , temos

$$\sqrt{p} \langle T_p f, g \rangle = \int_A f(z) \bar{g}(\alpha^{-1} z) d\mu z = \int_A f(z) \bar{g}(pz) d\mu z.$$

Analogamente, pelas relações sobre  $\beta_j$ , temos

$$\begin{aligned} \sqrt{p} \langle T_p f, g \rangle &= \sum_{j=0}^p \int_F f(z) \bar{g}(\beta \beta_j z) d\mu z \\ &= \int_B f(z) \bar{g}(\beta z) d\mu z \\ &= \int_B f(z) \bar{g}(pz) d\mu z \end{aligned}$$

onde  $B = \bigcup_{j=0}^p \beta_j F$ . Notamos que  $f(z) \bar{g}(pz)$  é invariante pela ação do subgrupo de congruência de Hecke  $\Gamma_0(p)$ . De fato,  $f(z)$  é claramente invariante, e como

$$p \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = p \frac{az + b}{cz + d} = \begin{pmatrix} a & bp \\ c & d \end{pmatrix} pz,$$

$g(pz)$  também o é. Logo, basta mostrarmos que  $A$  e  $B$  são regiões fundamentais de  $\Gamma_0(p)$ . Agora, da decomposição como reunião disjunta

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^p \Gamma_0(p)\beta_j,$$

segue que  $B$  é uma região fundamental. Quanto a  $A$ , temos

$$A = \bigcup_{j=0}^p \alpha_j F = \alpha \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \bigcup_{j=0}^p \beta_j F = \alpha \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) B = \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ p & 0 \end{array} \right) B.$$

Como

$$\left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ p & 0 \end{array} \right) \Gamma_0(p) = \Gamma_0(p) \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ p & 0 \end{array} \right),$$

segue que quaisquer dois pontos distintos de  $A$  não são  $\Gamma_0(p)$ -equivalentes; e que

$$\Gamma_0(p)A = \Gamma_0(p) \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ p & 0 \end{array} \right) B = \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ p & 0 \end{array} \right) \Gamma_0(p)B = \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ p & 0 \end{array} \right) \mathcal{H} = \mathcal{H},$$

logo  $A$  é uma região fundamental de  $\Gamma_0(p)$ . *QED*

## 3.2 Autovalores dos operadores de Hecke

Notamos que se uma função automórfica  $f(z)$  for uma autofunção de todos os operadores de Hecke, então a Proposição 3.1.5 implica em

$$\lambda(m)\lambda(n) = \sum_{d|(m,n)} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right). \quad (3.6)$$

Em particular,  $\lambda$  é uma função multiplicativa, i.e.  $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$  se  $(m, n) = 1$ .

Por exemplo,  $E(z, s)$  é autofunção de todos os operadores de Hecke com autovalor  $\tau_s(n)$ , i.e., para  $n \geq 1$ , temos

$$(T_n E(\cdot, s))(z) = \tau_s(n)E(z, s),$$

onde  $\tau_\alpha(n) = \sum_{ad=n} a^\alpha d^{-\alpha}$ . Pois,

$$T_n y^s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n} \sum_{b \pmod{d}} \left(\frac{ay}{d}\right)^s = \sum_{ad=n} \frac{d}{\sqrt{ad}} \left(\frac{ay}{d}\right)^s = \tau_{s-\frac{1}{2}}(n)y^s.$$

Agora,  $T_n$  age nos coeficientes de Fourier de uma forma de Maass  $f(z)$  da seguinte maneira:

**Proposição 3.2.1** *Seja  $\varphi(z)$  uma forma de Maass cuspidal para  $PSL_2(\mathbb{Z})$  que seja autofunção de todos os operadores de Hecke. Então*

$$\lambda(n)\varrho(m) = \sum_{d|(m,n)} \varrho\left(\frac{mn}{d^2}\right) \quad (3.7)$$

e além disso,

$$\varrho(n) = \lambda(|n|)\varrho\left(\frac{n}{|n|}\right). \quad (3.8)$$

*Demonstração:* Suponhamos, mais geralmente, que  $f(z)$  seja uma forma de Maass para o grupo modular com série de Fourier

$$a(0)y^s + b(0)y^{1-s} + y^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} a(m)K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)e(mx),$$

mostraremos que a série de Fourier de  $(T_n f)(z)$  é dada por

$$\alpha_n(0)y^s + \beta_n(0)y^{1-s} + y^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \alpha_n(m)K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)e(mx) \quad (3.9)$$

cujos coeficientes são  $\alpha_n(0) = \tau_{s-\frac{1}{2}}(n)a(0)$ ,  $\beta_n(0) = \tau_{\frac{1}{2}-s}(n)\beta(0)$  e

$$\alpha_n(m) = \sum_{d|(m,n)} a\left(\frac{mn}{d^2}\right), \quad (3.10)$$

donde o resultado da proposição segue claramente. Como  $\operatorname{Re}\left(\frac{az+b}{d}\right) = \frac{ax+b}{d}$  e  $\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{d}\right) = \frac{ny}{d^2}$ , temos

$$\begin{aligned} (T_n f)(z) &= n^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=n} \sum_{b=0}^{d-1} a(0)(nyd^{-s})^s + b(0)(nyd^{-2})^{1-s} + \\ &+ n^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=n} \sum_{b=0}^{d-1} (nyd^{-2}) \sum_{m \neq 0} a(m)K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|nyd^{-2})e\left(m\frac{ax+b}{d}\right). \end{aligned}$$

Agora, a primeira soma é igual a

$$y^s a(0)n^{s-\frac{1}{2}} \sum_{0 < d|n} d^{1-2s} + y^{1-s} b(0)n^{\frac{1}{2}-s} \sum_{0 < d|n} d^{2s-1}$$

que é o desejado. Quanto a segunda parcela, temos

$$\begin{aligned} & n^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=n} \sum_{0 \leq b < d} \sum_{m \neq 0} a(m) \left(\frac{a}{d}y\right)^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}} \left(2\pi|m|\frac{a}{d}y\right) e\left(m\frac{ax+b}{d}\right) \\ &= y^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \sum_{ad=n} a(m) K_{s-\frac{1}{2}} \left(2\pi|m|\frac{a}{d}y\right) e\left(m\frac{ax}{d}\right) \frac{1}{d} \sum_{0 \leq b < d} e\left(m\frac{b}{d}\right). \end{aligned}$$

Como a soma sobre  $b$  é uma soma geométrica a qual é igual a  $d$  se  $d|m$ , e 0 caso contrário, temos

$$\begin{aligned} & y^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \sum_{ad=n} a(m) K_{s-\frac{1}{2}} \left(2\pi|m|\frac{a}{d}y\right) e\left(m\frac{ax}{d}\right) \frac{1}{d} \sum_{0 \leq b < d} e\left(m\frac{b}{d}\right) \\ &= y^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \sum_{\substack{ad=n \\ d|m}} a(m) K_{s-\frac{1}{2}} \left(2\pi|m|\frac{a}{d}y\right) e\left(m\frac{ax}{d}\right) \\ &= y^{\frac{1}{2}} \sum_{l \neq 0} \sum_{ad=n} a(ld) K_{s-\frac{1}{2}} (2\pi|l|ay) e(ax) \\ &= y^{\frac{1}{2}} \sum_{m \neq 0} \left( \sum_{\substack{ad=n \\ al=m}} a(ld) \right) K_{s-\frac{1}{2}} (2\pi|m|y) e(mx). \end{aligned}$$

*QED*

## Capítulo 4

### A $L$ -função de Hecke-Maass

Consideremos os operadores de Hecke  $T_n$ , o operador  $-\Delta$  e a simetria  $T_{-1}\varphi(z) = \varphi(-\bar{z})$ , temos que  $\{T_{-1}\} \cup \{T_n\} \cup \{-\Delta\}$  é uma família comutativa de operadores auto-adjuntos. Assim, podemos diagonalizar o espaço vetorial das formas de Maass cuspidais, no sentido de escolher uma base  $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$  ortonormal ( $L^2$ -normalizada), de modo a satisfazer

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\varphi_j = \lambda_j\varphi_j \\ T_n\varphi_j = \lambda_j(n)\varphi_j, \quad n \geq 1 \\ T_{-1}\varphi_j = \delta\varphi_j, \quad \delta = \pm 1 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

e chamamos uma tal  $\varphi_j$  de forma de Hecke-Maass.

A  $L$ -série associada a uma forma de Hecke-Maass  $\varphi$  é:

$$L(s, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n)n^{-s}, \quad (4.2)$$

onde  $\varrho(n)$  são os coeficientes de Fourier de  $\varphi$ , como em (2.12). Alternativamente, poderíamos ter considerado

$$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)n^{-s},$$

de modo que  $L(s, \varphi) = \varrho(1)H(s)$ , pois  $\varrho(n) = \lambda(n)\varrho(1)$ .

**Proposição 4.0.2** Para  $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0 > 1$ , a série em (4.2) converge uniformemente e absolutamente.

*Demonstração:* Com efeito, para qualquer  $N$ ,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n)n^{-s} - \sum_{n \leq N} \varrho(n)n^{-s} \right| = \left| \sum_{n > N} \varrho(n)n^{-s} \right| \leq \sum_{n > N} |\varrho(n)| n^{-\sigma_0}.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que para  $M > N$

$$\sum_{n=N+1}^M |\varrho(n)| n^{-\sigma_0} = \sum_{n=N+1}^M \left( |\varrho(n)| n^{-\frac{\sigma_0}{2}} \right) n^{-\frac{\sigma_0}{2}} \leq \left( \sum_{n=N+1}^M |\varrho(n)|^2 n^{-\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n \leq N} n^{-\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vendo as duas somas do lado direito como integrais de Riemann-Stieltjes:

$$\sum_{n=N+1}^M n^{-\sigma_0} = \int_N^M t^{-\sigma_0} d \left( \sum_{n \leq t} 1 \right), \quad \sum_{n=N+1}^M |\varrho(n)|^2 n^{-\sigma_0} = \int_N^M t^{-\sigma_0} d \left( \sum_{n \leq t} |\varrho(n)|^2 \right),$$

podemos integrar por partes, a obter

$$\begin{aligned} \int_N^M t^{-\sigma_0} d \left( \sum_{n \leq t} 1 \right) &= M^{-\sigma_0} [M] - N^{-\sigma_0} [N] + \sigma_0 \int_N^M [t] t^{-\sigma_0-1} dt \\ &\leq M^{1-\sigma_0} - N^{1-\sigma_0} + \sigma_0 \int_N^M t^{-\sigma_0} dt \\ &= \frac{N^{1-\sigma_0} - M^{1-\sigma_0}}{\sigma_0 - 1} \end{aligned}$$

onde  $[x]$  denota o maior inteiro menor do que ou igual a  $x$ . Da Proposição 2.3.5 segue analogamente que

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^M |\varrho(n)|^2 n^{-\sigma_0} &= t^{-\sigma_0} \left( \sum_{n \leq t} |\varrho(n)|^2 \right) \Big|_{t=N}^{t=M} + \sigma_0 \int_N^M \left( \sum_{n \leq t} |\varrho(n)|^2 \right) t^{-\sigma_0-1} dt \\ &\ll M^{1-\sigma_0} - N^{1-\sigma_0} + \sigma_0 \int_N^M t^{-\sigma_0} dt \\ &= \frac{N^{1-\sigma_0} - M^{1-\sigma_0}}{\sigma_0 - 1}. \end{aligned}$$

Donde, como  $\sigma_0 > 1$ , fazendo  $M \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n)n^{-s} - \sum_{n \leq N} \varrho(n)n^{-s} \right| \ll \frac{N^{1-\sigma_0}}{\sigma_0 - 1},$$

o que mostra a convergência uniforme e absoluta da  $L$ -série.  $QED$

Observamos que cada termo em (4.2) é uma função holomorfa em  $s$ , donde, sendo a série uniformemente convergente, a função  $L(s, \varphi)$  é holomorfa para  $\text{Re}(s) > 1$ .

## 4.1 O produto de Euler

**Proposição 4.1.1** *Para  $\text{Re}(s) > 1$  a  $L$ -função de Hecke–Maass admite a fatoração*

$$L(s, \varphi) = \varrho(1) \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} (1 - \lambda(p)p^{-s} + p^{-2s})^{-1}, \quad (4.3)$$

chamada de o produto de Euler da  $L$ -função.

*Demonstração:* Consideremos o produto

$$P(x) = \prod_{\substack{p \leq x \\ \text{primo}}} \left( 1 + \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{\lambda(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right),$$

sobre todos os primos menores do que ou iguais a  $x$ . Um produto infinito da forma  $\prod(1 + z_n)$  converge absolutamente sempre que a série  $\sum z_n$  converge absolutamente. Dito isto, observamos que

$$\sum_{p \leq x} \left| \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{\lambda(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right| \leq \sum_{p \leq x} \left| \frac{\lambda(p)}{p^s} \right| + \left| \frac{\lambda(p^2)}{p^{2s}} \right| + \dots \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\lambda(n)}{n^s} \right|,$$

donde as somas parciais da série  $\sum_{p \leq x} \left| \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{\lambda(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right|$  são limitadas se  $\text{Re}(s) > 1$  e portanto tal série converge. Logo, temos a convergência de modo absoluto do produto  $\prod_p (1 + \lambda(p)p^{-s} + \lambda(p^2)p^{-2s} + \dots)$ .

Como  $P(x)$  é um produto finito de séries absolutamente convergente, podemos multiplicar as séries e rearranjar os termos do modo que desejarmos sem alterar o valor da soma. Um termo típico é da forma

$$\frac{\lambda(p_1^{a_1}) \cdots \lambda(p_k^{a_k})}{p_1^{a_1 s} \cdots p_k^{a_k s}} = \frac{\lambda(p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k})}{(p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k})^s},$$



pois  $\lambda(n)$  é multiplicativa, isto é,  $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$  se  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, se  $A$  for o conjunto dos números naturais  $n$  tais que todos os fatores primos de  $n$  são menores do que ou iguais a  $x$ , então  $P(x) = \sum_{n \in A} \lambda(n)n^{-s}$ . Daí, se  $B$  for o conjunto dos  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $n$  tem pelo menos um fator primo maior do que  $x$ ,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} - P(x) \right| = \left| \sum_{n \in B} \frac{\lambda(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n \in B} \left| \frac{\lambda(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n > x} \left| \frac{\lambda(n)}{n^s} \right|.$$

Quando  $x$  tende a  $\infty$ , para  $\text{Re}(s) > 1$  esta última soma tende a zero, pois a série  $\sum |\lambda(n)|n^{-\sigma}$  é convergente em tal região; donde  $P(x)$  tende à  $L$ -série  $\sum \lambda(n)n^{-s}$ , quando  $x \rightarrow \infty$ . Logo,

$$L(s, \varphi) = \varrho(1) \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(p^k)p^{-ks} \right)$$

para  $\text{Re}(s) > 1$ . Finalmente, lembramos que

$$\lambda(p^{k+1}) = \lambda(p^k)\lambda(p) - \lambda(p^{k-1}) \quad (4.4)$$

para cada primo  $p$ , e disto temos formalmente que

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(p^k)Z^k \right) (1 - \lambda(p)Z + Z^2) \\ &= 1 - \lambda(p)Z + Z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(p^k)Z^k - \lambda(p)Z \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(p^k)Z^k + Z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(p^k)Z^k \\ &= 1 + (\lambda(p) - \lambda(p))Z + (1 + \lambda(p^2) - \lambda(p)\lambda(p))Z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda(p^{k+2}) - \lambda(p)\lambda(p^{k+1}) + \lambda(p^k))Z^{k+2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tomando  $Z = p^{-s}$ , o resultado segue. *QED*

Para referência posterior, é interessante notarmos que ao se fatorar

$$1 - \lambda(p)p^{-s} + p^{-2s} = (1 - \alpha(p)p^{-s})(1 - \beta(p)p^{-s})$$

então  $\alpha(p) + \beta(p) = \lambda(p)$  e  $\alpha(p)\beta(p) = 1$ . E por (4.4),

$$\lambda(p^k) = \frac{\alpha(p)^{k+1} - \beta(p)^{k+1}}{\alpha(p) - \beta(p)} = \sum_{j=0}^k \alpha(p)^{k-j} \beta(p)^j. \quad (4.5)$$

Neste contexto o produto de Euler tem a forma

$$L(s, \varphi) = \varrho(1) \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} (1 - \alpha(p)p^{-s})^{-1} (1 - \beta(p)p^{-s})^{-1}.$$

É uma conjectura famosa que  $\alpha(p)$  e  $\beta(p)$  devem ser conjugados complexos; ou seja, que  $|\alpha(p)| = |\beta(p)| = 1$ , ou ainda  $|\lambda(p)| \leq 2$ . Tal conjectura é análoga à conjectura de Ramanujan–Petersson para formas modulares, ver [Ser73].

## 4.2 A continuação analítica e equação funcional

**Proposição 4.2.1** *A  $L$ -função  $L(s, \varphi)$  pode ser continuada analiticamente a uma função inteira e satisfaz uma das equações funcionais*

$$\Theta \left( \frac{1-\delta}{2} + s \right) L(s, \varphi) = (-1)^{\frac{1-\delta}{2}} \Theta \left( \frac{1-\delta}{2} + 1 - s \right) L(1-s, \varphi), \quad (4.6)$$

onde

$$\Theta(s) = \pi^{-s} \Gamma \left( \frac{s+ir}{2} \right) \Gamma \left( \frac{s-ir}{2} \right), \quad (4.7)$$

e  $\delta = \pm 1$  quando  $\varphi$  for par ou ímpar com relação a  $x$  respectivamente.

*Demonstração:* Suponhamos, primeiramente,  $\varphi(z)$  par com relação a  $x$ . Como  $\Gamma$  contém a involução  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi(iy) = \varphi(iy^{-1})$ . E daí,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(iy) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} &= \int_0^1 \varphi(iy) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} + \int_1^\infty \varphi(iy) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} \\ &= \int_1^\infty \varphi(i\eta) \eta^{-(s-\frac{1}{2})} \frac{d\eta}{\eta} + \int_1^\infty \varphi(iy) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} \\ &= \int_1^\infty \varphi(iy) (y^{s+\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}-s}) \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Notamos que, como  $\varphi(x+iy) \ll e^{-2\pi y}$  quando  $y \rightarrow \infty$ , (2.11), segue que essas integrais impróprias convergem absolutamente e uniformemente em todo  $s$ -plano.

Por conseguinte, temos uma função inteira de  $s$ .

Por outro lado, temos

$$\int_0^{\infty} \varphi(iy) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} = 2 \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) K_{ir}(2\pi ny) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dy}{y}.$$

Como a série de Fourier de  $\varphi$  converge uniformemente,  $y^{s-1}$  é contínua em  $0 < y < \infty$  e  $\int_0^{\infty} |y^{s-1}| \sum_{n=1}^{\infty} |\varrho(n) K_{ir}(2\pi ny)| dy$  é convergente, podemos comutar a série com a integral. Assim,

$$2 \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) K_{ir}(2\pi ny) y^{s-\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) \int_0^{\infty} K_{ir}(2\pi ny) y^s \frac{dy}{y}.$$

Fazendo a mudança de variáveis  $\xi = 2\pi ny$ ,

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) \int_0^{\infty} K_{ir}(2\pi ny) y^s \frac{dy}{y} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) (2\pi n)^{-s} \int_0^{\infty} K_{ir}(\xi) \xi^s \frac{d\xi}{\xi}.$$

Da integral

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(y) y^{s-1} dy = 2^{s-2} \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right),$$

absolutamente convergente para  $\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(\nu)|$  (ver Cálculo A.1.3), segue que para  $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) (2\pi n)^{-s} \int_0^{\infty} K_{ir}(\xi) \xi^s \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2} L(s, \varphi) \Theta(s).$$

Portanto, temos a representação integral

$$\Theta(s) L(s, \varphi) = 2 \int_1^{\infty} \left( y^{s-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}-s} \right) \varphi(iy) \frac{dy}{y}. \quad (4.8)$$

Tal relação foi mostrada sob a suposição de  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ; todavia, o lado direito de (4.8) é uma função holomorfa para todo  $s$ , ou seja, esta fórmula nos dá a continuação analítica de  $L(s, \varphi)$ . Finalmente, é fácil ver que o lado direito de (4.8) é invariante pela transformação  $s \rightarrow 1 - s$ ; logo temos também a equação funcional de  $L(s, \varphi)$ .

Agora, se  $\varphi$  for ímpar, tomamos  $\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z)$ . Assim,

$$\psi(iy) = 2y^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n \varrho(n) K_{ir}(2\pi ny)$$

e como  $\Gamma$  contém  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$\psi(iy) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left( \frac{-1}{iy} \right) \cdot \left( \frac{-1}{y^2} \right) = -\frac{1}{y^2} \psi \left( \frac{i}{y} \right).$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi(iy) y^{s+\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} &= \int_0^1 \psi(iy) y^{s+\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} + \int_1^\infty \psi(iy) y^{s+\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} \\ &= \int_1^\infty -\eta^2 \psi(i\eta) \eta^{-(s+\frac{1}{2})} \frac{d\eta}{\eta} + \int_1^\infty \psi(iy) y^{s+\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} \\ &= \int_1^\infty \psi(iy) (y^{s+\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}-s}) \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

e, para  $\text{Re}(s) > 1$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi(iy) y^{s+\frac{1}{2}} \frac{dy}{y} &= 2 \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty n \varrho(n) K_{ir}(2\pi n y) y^{s+1} \frac{dy}{y} \\ &= 2 \sum_{n=1}^\infty n \varrho(n) (2\pi n)^{-(s+1)} \int_0^\infty K_{ir}(\xi) \xi^{s+1} \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^\infty \varrho(n) n^{-s} \right) \pi^{-(s+1)} \Gamma \left( \frac{s+1+ir}{2} \right) \Gamma \left( \frac{s+1-ir}{2} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\Theta(s+1)L(s, \varphi) = 2 \int_1^\infty \psi(iy) (y^{s-\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}-s}) dy, \quad (4.9)$$

o que nos dá tanto a continuação analítica quanto a equação funcional de  $L(s, \varphi)$ .

*QED*

Fazendo-nos utilizar de propriedades básicas da função  $\Gamma(z)$ , especificamente:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi z)},$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z);$$

e de identidades trigonométricas elementares, podemos simplificar um pouco tal equação funcional. De fato, ela pode ser dada por

$$L(s, \varphi) = \Psi(s)L(1-s, \varphi),$$

ou equivalentemente,

$$L(1-s, \varphi) = \Psi(1-s)L(s, \varphi), \quad (4.10)$$

onde

$$\Psi(1-s) = 2^{1-2s}\pi^{-2s}\Gamma(s+ir)\Gamma(s-ir)(\cos(\pi s) + \delta \cosh(\pi r)). \quad (4.11)$$

Em muitas aplicações, é importante sabermos a ordem de crescimento de  $|L(\sigma + it, \varphi)|$  quando  $|t| \rightarrow \infty$ . Se  $\sigma > 1$ , então  $|L(\sigma + it, \varphi)|$  é obviamente limitada por uma constante. Se  $\sigma < 0$ , observamos que para  $\sigma$  fixo,  $\Psi(1 - \sigma - it)$  cresce no máximo como um polinômio em  $t$ : pois, pela fórmula de Stirling:

$$\Gamma(\sigma + it) = t^{\sigma+it-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\pi t - it + \frac{1}{2}i\pi(\sigma-\frac{1}{2})} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(t^{-1})\} \quad (4.12)$$

válida para  $t \rightarrow +\infty$  (ver [Tit51]), segue que para  $t > r$

$$\Psi(1 - \sigma - it) = 2 \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{2\sigma-1} \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{2it} e^{i\pi(\sigma-\frac{1}{2})} (1 + O(t^{-1})). \quad (4.13)$$

Por outro lado, temos da fórmula de Stirling (4.12) a familiar consequência

$$\Gamma(\sigma + it) \ll (|t| + 1)^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|},$$

válida para  $t \rightarrow +\infty$  e também para  $t \rightarrow -\infty$  (por conjugação complexa) em qualquer faixa  $a \leq \sigma \leq b$  com  $0 < a < b$ , e portanto

$$\begin{aligned} \Gamma(s+ir)\Gamma(s-ir) &\ll ((|t+r|+1)(|t-r|+1))^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}(|t+r|+|t-r|)} \\ &\ll (|t|+1)^{2\sigma-1} e^{-\pi|t|}. \end{aligned}$$

Além disso,  $|\cos(\pi s)| \leq \frac{1}{2}(e^{\pi|t|} + e^{-\pi|t|}) \ll e^{\pi|t|}$ , donde

$$\Psi(1 - \sigma - it) \ll (2\pi)^{-2\sigma} (|t| + 1)^{2\sigma-1}. \quad (4.14)$$

Pelo Princípio de Phragmén-Lindelöf (ver [Tit32]), podemos agora estimar para  $0 < \sigma < 1$ , e portanto temos

$$L(\sigma + it, \varphi) \ll \begin{cases} 1 & , \text{ se } \sigma > 1 \\ |t|^{1-\sigma} & , \text{ se } 0 < \sigma < 1 \\ |t|^{1-2\sigma} & , \text{ se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

uniformemente.

### 4.3 Aplicação

Nesta seção estudamos a soma

$$\sum_{n \leq X} \varrho(n).$$

Introduzimos uma função suavizante  $g(x)$  de classe  $C^\infty$  em  $[0, \infty)$ , que seja identicamente 1 em  $[X/2, X]$ , que se anule fora do intervalo  $[X/2 - Y, X + Y]$ , onde  $Y < X/2$  será escolhido otimizadamente a posteriori, e que possua derivada de todas as ordens satisfazendo

$$g^{(\nu)}(x) \ll Y^{-\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Observamos que as derivadas  $g^{(\nu)}(x)$  para  $\nu \geq 1$  se anulam fora de dois intervalos de comprimento  $Y$ .

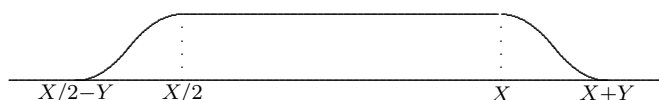


Figura 4.1: Gráfico da função  $g(x)$ .

Pela Fórmula de Inversão de Mellin, temos para  $a > 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n)g(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{M}_g(s)n^{-s} ds \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(a)} \mathcal{M}_g(s)\varrho(n)n^{-s} ds, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \mathcal{M}_g(s)L(s, \varphi) ds, \end{aligned}$$

onde denotamos por

$$\mathcal{M}_g(s) = \int_0^{\infty} g(x)x^{s-1}dx$$

a transformada de Mellin de  $g(x)$ , e onde a troca de ordem da integral com o somatório é justificada pois a série  $\sum \varrho(n)n^{-s}$  converge uniformemente quando

$\operatorname{Re}(s) \geq a > 1$ . Observamos que para  $s \neq 0, -1, \dots, (1 - A)$ ,

$$\mathcal{M}_g(s) \ll \frac{(-1)^A}{|s| \cdots |s + A - 1|} \int_0^\infty |g^{(A)}(x)| |x^{s+A-1}| dx, \quad (4.16)$$

integrando por partes  $A \geq 1$  vezes.

Sendo  $\mathcal{M}_g(s)$  e  $L(s, \varphi)$  funções inteiras, temos pelo Teorema de Cauchy que

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_T} \mathcal{M}_g(s) L(s, \varphi) ds,$$

onde  $\mathcal{C}_T$  é o contorno poligonal definido pela reunião dos segmentos de reta  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_5$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : (a - i\infty, a - iT], & \quad \mathcal{C}_2 : [a - iT, 1 - b - iT], & \quad \mathcal{C}_3 : [1 - b - iT, 1 - b + iT], \\ \mathcal{C}_4 : [1 - b + iT, a + iT] & \quad \mathcal{C}_5 : [a + iT, a + i\infty]. \end{aligned}$$

com  $b, T > 1$ .

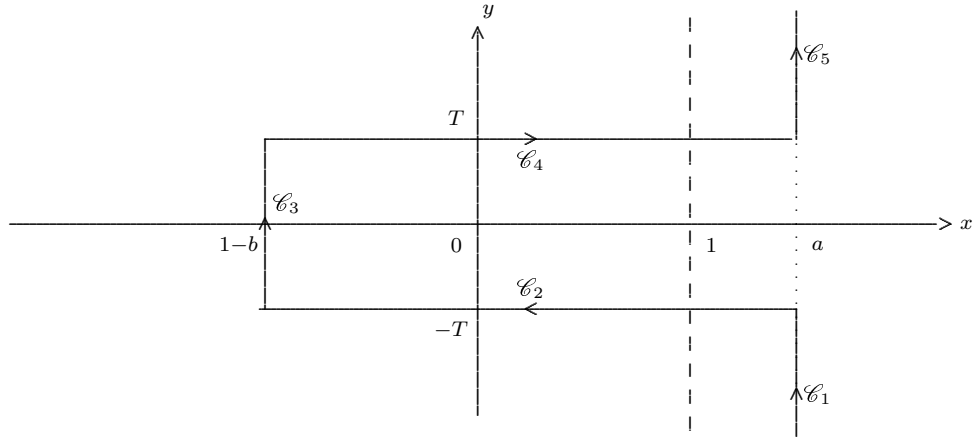


Figura 4.2: Contorno de integração  $\mathcal{C}_T$ .

Em  $\mathcal{C}_5$ , aplicando (4.16) e (4.15) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_5} \mathcal{M}_g(s) L(s, \varphi) ds &= i \int_T^\infty \mathcal{M}_g(a + it) L(a + it, \varphi) dt \\ &\ll \int_T^\infty \left( \int_0^\infty |g^{(A)}(x)| x^{A-1+a} dx \right) \frac{|L(a + it, \varphi)|}{|a + it| \cdots |A - 1 + a + it|} dt \\ &\ll \left( \frac{X}{Y} \right)^{A-1} X^a \int_T^\infty t^{-A} dt = \left( \frac{X}{TY} \right)^{A-1} X^a. \end{aligned}$$

Em  $\mathcal{C}_4$ , por (4.15) e (4.16), (observemos o uso de Phragmén–Lindelöf) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_4} \mathcal{M}_g(s)L(s, \varphi) ds &= \int_{1-b}^a \mathcal{M}_g(\sigma + iT)L(\sigma + iT, \varphi) d\sigma \\
&\ll \int_{1-b}^a \left( \int_0^\infty |g'(x)| x^{A-1+\sigma} dx \right) \frac{|L(\sigma + iT, \varphi)|}{|\sigma + iT| \dots |A - 1 + \sigma + iT|} d\sigma \\
&\ll \left( \frac{X}{Y} \right)^{A-1} T^{-A} T^{\frac{(2b-1)a}{a+b-1}} \int_{1-b}^a X^\sigma T^{\frac{(2b-1)(-\sigma)}{a+b-1}} d\sigma \\
&\ll X^B T^C \left( \frac{X}{TY} \right)^{A-1},
\end{aligned}$$

onde  $B, C$ , são constantes (que dependem de  $a$  e  $b$  e independem de  $Y, X$  ou  $T$ ). Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}_1} \mathcal{M}_g(s)L(s, \varphi) ds &\ll \left( \frac{X}{TY} \right)^{A-1} X^a, \\
\int_{\mathcal{C}_2} \mathcal{M}_g(s)L(s, \varphi) ds &\ll X^{B'} T^{C'} \left( \frac{X}{TY} \right)^{A-1}.
\end{aligned}$$

Escolhendo  $T = X^{1+\varepsilon}Y^{-1}$  e  $A$  suficientemente grande, as integrais  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4$  e  $\mathcal{C}_5$  são bem pequenas, digamos  $O(X^{-100})$ ; logo

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-b-iT}^{1-b+iT} \mathcal{M}_g(s)L(s, \varphi) ds + O(X^{-100}).$$

Daí, ao fazermos a mudança  $s \mapsto 1 - s$ , e aplicarmos a equação funcional (4.10), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s)L(1-s, \varphi) ds + O(X^{-100}). \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s)\Psi(1-s)L(s, \varphi) ds + O(X^{-100}).
\end{aligned}$$

Como  $b > 1$ , estamos na região de convergência de  $\sum \varrho(n)n^{-s}$ , e então

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + O(X^{-100}), \tag{4.17}$$



onde

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \leq N} \varrho(n) \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s) \Psi(1-s) n^{-s} ds$$

e,

$$\mathcal{S}_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n > N} \varrho(n) \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s) \Psi(1-s) n^{-s} ds$$

para  $N$  a ser escolhido a seguir.

Consideremos agora  $\mathcal{S}_2$ . Temos

$$\begin{aligned} & \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s) \Psi(1-s) n^{-s} ds \\ &= i \int_{-T}^T \left( \int_0^\infty |g'(x)| x^{1-b} dx \right) \frac{|\Psi(1-b-it)|}{|1-b-it|} n^{-b} dt \\ &\ll X (Xn)^{-b} \int_{-T}^T (|t|+1)^{2b-2} dt \\ &\ll \left( \frac{X}{T} \right) \left( \frac{T^2}{XN} \right)^b \end{aligned} \tag{4.18}$$

desde que  $b > 2$ .

Recordamos que na Proposição 2.3.5, obtivemos a estimativa  $\varrho(n) \ll n^{\frac{1}{2}}$ . Vamos daqui em diante, supor que

$$\varrho(n) \ll n^{\delta+\varepsilon}, \tag{4.19}$$

para algum  $\delta \geq 0$ . De fato, existem estimativas demonstradas para  $\delta < \frac{1}{2}$  por exemplo:  $\delta = \frac{1}{4}$  por Proskurin em [Pro79],  $\delta = \frac{1}{5}$  por Shahidi em [Sha88] e Luo-Rudnick-Sarnak em [LRS99],  $\delta = \frac{1}{9}$  por Kim-Shahidi em [KS02], e o recorde atual  $\delta = \frac{7}{64}$  por Kim-Sarnak [Kim03].

Com isso, tomando  $N = X^{1+3\varepsilon} Y^{-2}$  e  $b$  suficientemente grande, temos de (4.18) que  $\mathcal{S}_2 \ll X^{-100}$ , e conseqüentemente,

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \leq N} \varrho(n) \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s) \Psi(1-s) n^{-s} ds + O(X^{-100}). \tag{4.20}$$

Consideremos, agora, o contorno poligonal  $\mathcal{D}_V$  definido pela reunião dos segmentos de reta  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_7$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 : [b - iT, 1/2 - iT], \quad \mathcal{D}_2 : [1/2 - iT, 1/2 - iV], \quad \mathcal{D}_3 : [1/2 - iV, 1 + \varepsilon - iV] \\ \mathcal{D}_4 : [1 + \varepsilon - iV, 1 + \varepsilon + iV], \quad \mathcal{D}_5 : [1 + \varepsilon + iV, 1/2 + iV], \quad \mathcal{D}_6 : [1/2 + iV, 1/2 + iT], \\ \mathcal{D}_7 : [1/2 + iT, b + iT]. \end{aligned}$$

onde  $1 < V < T$ .

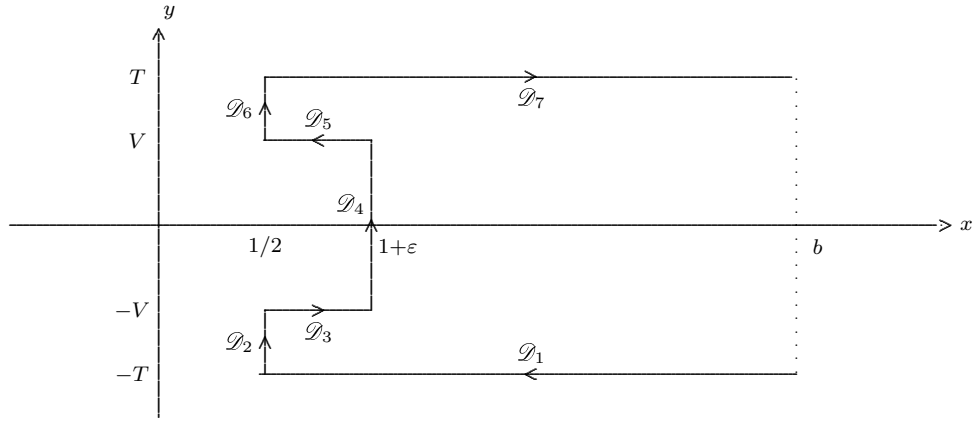


Figura 4.3: Contorno de integração  $\mathcal{D}_V$ .

Podemos, pelo Teorema de Cauchy, mudar a linha de integração para  $\mathcal{D}_V$ , a obter

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \leq N} \varrho(n) \int_{\mathcal{D}_V} \mathcal{M}_g(1-s) \Psi(1-s) n^{-s} ds + O(X^{-100}).$$

Quanto a contribuição de  $\mathcal{D}_7$ , utilizando (4.16) e (4.14), a obter

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}_7} \mathcal{M}_g(1-s) \Psi(1-s) n^{-s} ds \\ &= (-1)^A \int_0^\infty g^{(A)}(x) x^A \int_{\frac{1}{2}}^b \frac{\Psi(1-\sigma-it)}{(1-\sigma-it) \dots (A-\sigma-it)} (xn)^{-\sigma-it} d\sigma \\ &\ll Y \left( \frac{X}{TY} \right)^A \left( \frac{Xn}{T^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pois  $b$  é suficientemente grande. De modo análogo, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_1} \mathcal{M}_g(1-s)\Psi(1-s)n^{-s} ds &\ll Y \left(\frac{X}{TY}\right)^A \left(\frac{Xn}{T^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \int_{\mathcal{D}_3} \mathcal{M}_g(1-s)\Psi(1-s)n^{-s} ds &\ll Y \left(\frac{X}{TY}\right)^A \left(\frac{Xn}{T^2}\right)^{-V}, \\ \int_{\mathcal{D}_5} \mathcal{M}_g(1-s)\Psi(1-s)n^{-s} ds &\ll Y \left(\frac{X}{TY}\right)^A \left(\frac{Xn}{T^2}\right)^{-V}. \end{aligned}$$

Sobre  $\mathcal{D}_4$  integramos apenas uma vez por partes e obtemos

$$\int_{\mathcal{D}_4} \mathcal{M}_g(1-s)\Psi(1-s)n^{-s} ds \ll \left(\frac{V}{nX}\right)^{1+\varepsilon} V^\varepsilon.$$

Finalmente, as contribuições de  $\mathcal{D}_2$  e  $\mathcal{D}_6$  são de fato as principais. Com efeito, ao integrarmos apenas uma vez por partes e utilizarmos a expansão de  $\Psi(1-s)$  por Stirling, (4.13), obtemos integrais oscilatórias.

$$\begin{aligned} &\int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s)\Psi(1-s)n^{-s} ds \\ &= - \int_0^\infty g'(x)x^{\frac{1}{2}} \left( \int_V^T 2e^{-2it+2it \log(t/2\pi\sqrt{xn})} \frac{dt}{\frac{1}{2}-it} + O(V^{-1}) \right) dx. \end{aligned}$$

Para estimarmos este tipo de integral procedemos como em [Tit51, Lemma 4.6] por técnicas familiares, e fazendo integração por partes. Desse modo obtemos

$$\int_V^T e^{-2it+2it \log(t/2\pi\sqrt{xn})} \frac{dt}{\frac{1}{2}-it} \ll (xn)^{\frac{1}{4}}(xn)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{V}.$$

e o mesmo se aplica para a integral sobre  $\mathcal{D}_2$ . Portanto, tomando  $V = T^{\frac{1}{2}}$  temos de (4.19) que

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= O\left(\sum_{n \leq N} \frac{|\varrho(n)|}{n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty |g'(x)| x^{\frac{1}{2}} (xn)^{-\frac{1}{4}} dx\right) + O(X^{-100}) \\ &= O\left(X^{\frac{1}{4}} \sum_{n \leq N} \frac{|\varrho(n)|}{n^{\frac{3}{4}}}\right) + O(X^{-100}) = O\left(X^{\frac{1}{4}} \sum_{n \leq N} n^{\delta - \frac{3}{4} + \varepsilon}\right) + O(X^{-100}) \end{aligned}$$

$$= O\left(X^{\frac{1}{4}}N^{\frac{1}{4}+\delta+\varepsilon}\right) + O(X^{-100}) \ll \left(\frac{X}{Y}\right)^{\frac{1}{2}+\delta} \left(\frac{X^{3(\frac{1}{4}+\delta)}}{Y^2}\right)^{\varepsilon}. \quad (4.21)$$

Por outro lado, da definição de  $g(x)$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho(n)g(n) = \sum_{X/2-Y < n \leq X/2} \varrho(n)g(n) + \sum_{X/2 < n \leq X} \varrho(n) + \sum_{X < n \leq X+Y} \varrho(n)g(n) \quad (4.22)$$

E podemos trivialmente obter a contribuição das caudas  $X/2 - Y < n \leq X/2$  e  $X < n \leq X + Y$

$$\sum_{X/2-Y < n \leq X/2} \varrho(n)g(n) \leq \sum_{X/2-Y < n \leq X/2} |\varrho(n)| \ll YX^{\delta+\varepsilon}$$

e,

$$\sum_{X < n \leq X+Y} \varrho(n)g(n) \leq \sum_{X < n \leq X+Y} |\varrho(n)| \ll YX^{\delta+\varepsilon}.$$

Ao otimizarmos a escolha de  $Y$  fazendo  $Y = X^{1/(3+2\delta)}$ , temos de (4.21) e (4.22)

$$\sum_{X/2 < n \leq X} \varrho(n) \ll X^{\frac{(\delta+1)(2\delta+1)}{3+2\delta}+\varepsilon}. \quad (4.23)$$

Agora, somando as contribuições de  $X/2, X/4, X/8, \dots$  temos o seguinte resultado.

**Proposição 4.3.1** *Dado  $\varepsilon > 0$  suponhamos que  $\varrho(n) \ll n^{\delta+\varepsilon}$ . Então*

$$\sum_{n \leq X} \varrho(n) \ll X^{\frac{(\delta+1)(2\delta+1)}{3+2\delta}+\varepsilon}. \quad (4.24)$$

Utilizando as estimativas  $\delta = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}$  ou  $\frac{7}{64}$  obtemos respectivamente os expoentes  $\frac{15}{28} \simeq 0.5357$ ,  $\frac{42}{85} \simeq 0.4941$ ,  $\frac{110}{261} \simeq 0.4215$  ou  $\frac{2769}{6592} \simeq 0.4201$ . Observamos ainda que, a conjectura de Ramanujan para formas de Maass ( $\varrho(n) \ll n^{\varepsilon}$ ) implica

$$\sum_{n \leq X} \varrho(n) \ll X^{\frac{1}{3}+\varepsilon}.$$

# Capítulo 5

## O método de Rankin-Selberg

O método de Rankin-Selberg foi originalmente introduzido por R. A. Rankin (em [Ran39]) e A. Selberg (em [Sel40]) independentemente, com a motivação de encontrar estimativas para o tamanho em média dos coeficientes de Fourier  $a(n)$  de uma forma modular.

Tal método usa uma representação integral da  $L$ -função  $\sum |a(n)|^2 n^{-s}$  que envolve a série de Eisenstein, de modo que a  $L$ -função herda a continuação analítica e equação funcional de  $E(z, s)$ . O cálculo da representação integral utiliza a seguinte idéia. Suponhamos que  $f$  seja uma função integrável,  $\Gamma_\infty$ -invariante em  $\mathcal{H}$ . Temos o seguinte tipo de mudança de variável:

$$\int_{\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H}} f(z) d\mu z = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma(\Gamma \backslash \mathcal{H})} \int f(\gamma^{-1} \gamma z) d\mu \gamma^{-1} z = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} f(\gamma z) d\mu z.$$

Podemos encarar esta equação do seguinte modo: a união de desdobramentos de uma região fundamental  $F$  de  $\Gamma$  em  $\mathcal{H}$  resultando numa região fundamental  $D$  de  $\Gamma_\infty$  em  $\mathcal{H}$ .

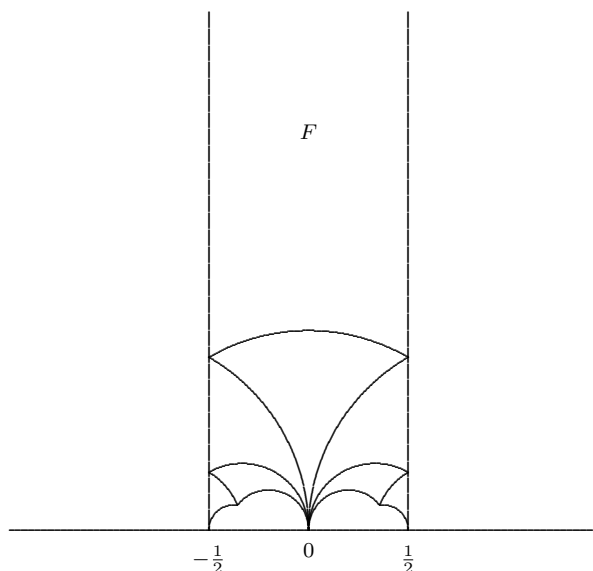


Figura 5.1: Desdobramentos de  $F$  para  $PSL_2(\mathbb{Z})$ .

Por contradição, é simples mostrar que desse modo realmente produzimos uma região fundamental para  $\Gamma_\infty$ .

## 5.1 A $L$ -função de Rankin-Selberg e seu produto de Euler

Sejam  $\varphi_1(z)$  e  $\varphi_2(z)$  duas formas cuspidais quaisquer de Hecke-Maass para o grupo modular, conforme (4.1). A convolução de Rankin-Selberg associada a duas tais formas de Hecke-Maass é a  $L$ -série

$$L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} n^{-s}. \quad (5.1)$$

**Proposição 5.1.1** *Para  $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0 > 1$ , a série em (5.1) converge uniformemente e absolutamente.*

*Demonstração:* Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=N+1}^M |\varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} n^{-s}| \leq \sum_{n=N+1}^M |\varrho_1(n)| |\varrho_2(n)| n^{-\sigma_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=N+1}^M \left( |\varrho_1(n)| n^{-\frac{\sigma_0}{2}} \right) \left( |\varrho_2(n)| n^{-\frac{\sigma_0}{2}} \right) \\
&\leq \left( \sum_{n=N+1}^M |\varrho_1(n)|^2 n^{-\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=N+1}^M |\varrho_2(n)|^2 n^{-\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Para cada soma parcial, a Proposição 2.3.5 nos garante que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^M |\varrho_j(n)|^2 n^{-\sigma_0} &= \int_N^M t^{-\sigma_0} d \left( \sum_{n \leq t} |\varrho_j(n)|^2 \right) \\
&\leq t^{-\sigma_0} \left( \sum_{n \leq t} |\varrho_j(n)|^2 \right) \Big|_{t=N}^{t=M} + \sigma_0 \int_N^M \left( \sum_{n \leq t} |\varrho_j(n)|^2 \right) t^{-\sigma_0-1} dt \\
&\ll M^{1-\sigma_0} - N^{1-\sigma_0} + \sigma_0 \int_N^M t^{-\sigma_0} dt \\
&= \frac{N^{1-\sigma_0} - M^{1-\sigma_0}}{\sigma_0 - 1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} n^{-s} - \sum_{n \leq N} \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} n^{-s} \right| \ll \frac{N^{1-\sigma_0}}{\sigma_0 - 1},$$

o que mostra a convergência uniforme e absoluta da  $L$ -série.  $\mathcal{QED}$

Observamos que cada termo em (5.1) é uma função holomorfa em  $s$ , donde, sendo a série uniformemente convergente, a função  $L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2})$  é holomorfa para  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

**Proposição 5.1.2** *Para  $\operatorname{Re}(s) > 1$  a  $L$ -função  $L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2})$  admite o produto de Euler*

$$L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}) = \varrho_1(1) \overline{\varrho_2(1)} \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} (1 - p^{-2s}) P(p^{-s})^{-1} \quad (5.2)$$

onde  $P(Z)$  é o polinômio

$$(1 - \alpha_1(p) \alpha_2(p) Z) (1 - \alpha_1(p) \beta_2(p) Z) (1 - \beta_1(p) \alpha_2(p) Z) (1 - \beta_1(p) \beta_2(p) Z)$$

para  $\alpha_1(p)$ ,  $\beta_1(p)$ ,  $\alpha_2(p)$  e  $\beta_2(p)$  dados por

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1(p) p^{-s} + p^{-2s} = (1 - \alpha_1(p) p^{-s}) (1 - \beta_1(p) p^{-s}) \\ 1 - \lambda_2(p) p^{-s} + p^{-2s} = (1 - \alpha_2(p) p^{-s}) (1 - \beta_2(p) p^{-s}) \end{cases}.$$

*Demonstração:* Segue da demonstração do produto de Euler para a  $L$ -função de Hecke-Maass, Proposição 4.1.1, que para qualquer função multiplicativa  $f(n)$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} \left( \sum_{l=1}^{\infty} f(p^l)p^{-ls} \right), \quad (5.3)$$

na região onde a série  $\sum f(n)n^{-s}$  converge absolutamente. Daí, temos de (4.5) que para  $\text{Re}(s) > 1$

$$L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}) = \varrho_1(1)\overline{\varrho_2(1)} \prod_{\substack{p \\ \text{primo}}} \sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l \frac{\alpha_1(p)^{l+1} - \beta_1(p)^{l+1}}{\alpha_1(p) - \beta_1(p)} \frac{\alpha_2(p)^{l+1} - \beta_2(p)^{l+1}}{\alpha_2(p) - \beta_2(p)},$$

pois como  $\lambda_j(n)$  é real não temos o conjugado complexo. Para cada  $p$  fixo, a soma interna sobre  $l$  possui 4 séries geométricas. Por simplicidade notacional, tomamos  $Z = p^{-s}$  e omitimos todos os  $p$ 's, a obter

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} Z^l \frac{\alpha_1^{l+1} - \beta_1^{l+1}}{\alpha_1 - \beta_1} \frac{\alpha_2^{l+1} - \beta_2^{l+1}}{\alpha_2 - \beta_2} &= \\ &= \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} \left( \frac{\alpha_1\alpha_2}{1 - \alpha_1\alpha_2Z} - \frac{\alpha_1\beta_2}{1 - \alpha_1\beta_2Z} - \frac{\beta_1\alpha_2}{1 - \beta_1\alpha_2Z} + \frac{\beta_1\beta_2}{1 - \beta_1\beta_2Z} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} \left( \frac{\alpha_1}{(1 - \alpha_1\alpha_2Z)(1 - \alpha_1\beta_2Z)} - \frac{\beta_1}{(1 - \beta_1\alpha_2Z)(1 - \beta_1\beta_2Z)} \right) \\ &= \frac{1 - \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2Z^2}{(1 - \alpha_1\alpha_2Z)(1 - \alpha_1\beta_2Z)(1 - \beta_1\alpha_2Z)(1 - \beta_1\beta_2Z)}, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. *QED*

## 5.2 A continuação analítica e equação funcional

Por simplicidade, nesta seção vamos considerar o caso que  $\varphi_1(z)$  e  $\varphi_2(z)$  sejam pares, ou seja,  $\varphi_j(z) = \varphi_j(-\bar{z})$ .

Para  $\text{Re}(s) > 1$  consideremos a integral

$$\int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} \varphi_1(z)\overline{\varphi_2(z)}E(z, s)d\mu z.$$



Agora, esta integral converge absolutamente para qualquer  $s \in \mathbb{C}$  a menos dos pólos de  $E(z, s)$ , pois  $E(z, s)$  tem crescimento moderado, (2.18), e as formas cuspidais decrescem rapidamente, (2.11). Além disso, da convergência uniforme em partes compactas das séries de Fourier de  $\varphi(z)$  e  $E(z, s)$ , podemos inverter a ordem da integral com a soma, e daí

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} \varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)} E(z, s) d\mu z &= \int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} \varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \text{Im}(\gamma z)^s d\mu z \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \int_{\gamma(\Gamma \setminus \mathcal{H})} \varphi_1(\gamma^{-1} z) \overline{\varphi_2(\gamma^{-1} z)} \text{Im}(z)^s d\mu \gamma^{-1} z \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \int_{\gamma(\Gamma \setminus \mathcal{H})} \varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)} \text{Im}(z)^s d\mu z \\
&= \int_{\Gamma_\infty \setminus \mathcal{H}} \varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)} \text{Im}(z)^s d\mu z \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 y^s \varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)} \frac{dx dy}{y^2}
\end{aligned}$$

pela condição de automorfia de  $\varphi_j$ , invariância de  $d\mu$  e identificando  $\Gamma_\infty \setminus \mathcal{H}$  com a região  $0 \leq x < 1$  de  $\mathcal{H}$ . Da expansão em série de Fourier de  $\varphi_j(z)$  (que converge uniformemente),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)} dx &= y \int_0^1 \sum_{m, n \neq 0} \varrho_1(m) \overline{\varrho_2(n)} K_{ir_1}(2\pi|m|y) \overline{K_{ir_2}(2\pi|n|y)} e^{2\pi i(m-n)x} dx \\
&= y \sum_{m, n \neq 0} \varrho_1(m) \overline{\varrho_2(n)} K_{ir_1}(2\pi|m|y) \overline{K_{ir_2}(2\pi|n|y)} \int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x} dx \\
&= y \sum_{n \neq 0} \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} K_{ir_1}(2\pi|n|y) \overline{K_{ir_2}(2\pi|n|y)} \\
&= y \sum_{n=1}^{\infty} (\varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} + \varrho_1(-n) \overline{\varrho_2(-n)}) K_{ir_1}(2\pi n y) \overline{K_{ir_2}(2\pi n y)} \\
&= 2y \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} K_{ir_1}(2\pi n y) \overline{K_{ir_2}(2\pi n y)},
\end{aligned}$$

pois  $\varrho_j(-n) = \varrho_j(n)$  ( $\varphi_j$  é par), e  $K_{ir}(y)$  real para qualquer  $r$  real (ver [Leb72]).

Pelo Teorema de Fubini, temos

$$\int_0^\infty \int_0^1 y^s \varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)} \frac{dx dy}{y^2} = 2 \int_0^\infty y^{s-1} \left( \sum_{n=1}^\infty \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} K_{ir_1}(2\pi n y) K_{ir_2}(2\pi n y) \right) dy.$$

Do comportamento assintótico de  $K_\nu(Y)$ , (2.10), segue pelo critério majorante de Weierstrass que a série  $\sum \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} K_{ir_1}(2\pi n y) K_{ir_2}(2\pi n y)$  é uniformemente convergente em qualquer intervalo da forma  $0 \leq y \leq b$ , e podemos então inverter a ordem do somatório com a integral, a qual, ao fazermos a mudança de variável  $\xi = 2\pi n y$  resulta em

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^\infty \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} \int_0^\infty K_{ir_1}(2\pi n y) K_{ir_2}(2\pi n y) y^{s-1} dy &= \\ &= 2(2\pi)^{-s} \sum_{n=1}^\infty \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)} n^{-s} \int_0^\infty K_{ir_1}(\xi) K_{ir_2}(\xi) \xi^{s-1} d\xi. \end{aligned}$$

Da integral

$$\int_0^\infty K_\mu(y) K_\nu(y) y^{s-1} dy = 2^{s-3} \Gamma(s)^{-1} \prod \Gamma\left(\frac{s \pm \mu \pm \nu}{2}\right),$$

que converge para  $\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(\mu)| + |\operatorname{Re}(\nu)|$  (ver Cálculo A.1.5), escrevendo

$$\Theta(s) = \pi^{-s} \Gamma(s)^{-1} \prod \Gamma\left(\frac{s \pm ir_1 \pm ir_2}{2}\right) \quad (5.4)$$

temos portanto que para  $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\int_{\Gamma \setminus \mathcal{H}} \varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)} E(z, s) d\mu z = \frac{1}{4} L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}) \Theta(s). \quad (5.5)$$

Observando que esta integral define uma função meromorfa em  $s$ , resulta da equação funcional da série de Eisenstein, (2.17), o seguinte resultado.

**Proposição 5.2.1** *A L-função  $L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2})$  possui continuação meromorfa para o  $s$ -plano e equação funcional*

$$\Theta(s) L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}) = \phi(s) \Theta(1-s) L(1-s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}), \quad (5.6)$$

onde  $\phi(s)$  é a função de espalhamento de  $E(z, s)$ . Além disso,

$$\operatorname{Res}_{s=1} L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}) = 2 \frac{\cosh(\pi r_1) + \cosh(\pi r_2)}{\pi} \frac{\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle}{\operatorname{vol}(\Gamma \setminus \mathcal{H})}, \quad (5.7)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno de Petersson definido em (2.2).

Devido à presença de  $\zeta(2s)$  no denominador de  $\phi(s)$ , a equação (5.6) não tem simetria completa. Para contornarmos isso, ao invés de considerarmos a  $L$ -função  $L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2})$ , consideraremos a função

$$F(s) = F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) := \zeta(2s)L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}). \quad (5.8)$$

Observamos que

$$F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \quad \text{com} \quad a(n) = \sum_{kl^2=n} \varrho_1(k)\overline{\varrho_2(k)}, \quad (5.9)$$

para  $\text{Re}(s) > 1$ ; e que por Cauchy-Schwarz temos

$$\sum_{n \leq x} a(n) \leq \sum_{l \leq x^{\frac{1}{2}}} \left( \sum_{k \leq \frac{x}{l^2}} |\varrho_1(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k \leq \frac{x}{l^2}} |\varrho_2(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll \sum_{l \leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{x}{l^2} \ll x. \quad (5.10)$$

Notamos que a equação funcional de  $F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2})$  segue diretamente das respectivas de  $L(s, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2})$  e  $\zeta(s)$ ,

$$\Theta(s)F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) = \Theta(1-s)F(1-s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}). \quad (5.11)$$

Ademais, podemos reescrever a equação (5.11) como

$$F(1-s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) = \vartheta(1-s)F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) \quad (5.12)$$

onde

$$\vartheta(1-s) = 16^{1-s}\pi^{-2} \prod \Gamma(s \pm ir_1 \pm ir_2) \prod \cos\left(\frac{\pi}{2}(s \pm ir_1 \pm ir_2)\right). \quad (5.13)$$

Da fórmula de Stirling, (4.12), segue que para  $t > r_1 + r_2$

$$\vartheta(1-\sigma-it) = 16\pi^2 \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{4\sigma-2} \left(\frac{t}{2e}\right)^{4it} e^{2i\pi(\sigma-\frac{1}{2})} (1 + O(t^{-1})). \quad (5.14)$$

Por outro lado, temos como consequência da fórmula de Stirling, que para  $\sigma < 0$  e  $|t| > r_1 + r_2 + 1$  temos

$$\prod \Gamma(s \pm ir_1 \pm ir_2) \ll \prod (|t \pm r_1 \pm r_2| + 1)^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t \pm r_1 \pm r_2|}$$

$$\ll (|t| + 1)^{4\sigma-2} e^{-2\pi|t|};$$

além disso, para  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \prod \cos\left(\frac{\pi}{2}(s \pm ir_1 \pm ir_2)\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \prod (e^{\frac{\pi}{2}t} e^{-\frac{\pi}{2}i(\sigma \pm ir_1 \pm ir_2)} + O(e^{-\frac{\pi}{2}t})) \\ &= \frac{1}{16} (e^{2\pi t} e^{-2\pi i\sigma} + O(e^{\pi t})) \end{aligned}$$

donde

$$\vartheta(1 - \sigma - it) \ll_{\sigma} (|t| + 1)^{4\sigma-2}. \quad (5.15)$$

Portanto, assim como no Capítulo 4, segue do Princípio de Phragmén-Lindelöf que

$$F(\sigma + it, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) \ll \begin{cases} 1 & , \text{ se } \sigma > 1 \\ |t|^{2-2\sigma} & , \text{ se } 0 < \sigma < 1 \\ |t|^{2-4\sigma} & , \text{ se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

uniformemente, para  $\sigma$  fixo. Observamos que o resíduo de  $F(\sigma + it, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2})$  em  $s = 1$  segue trivialmente de (5.7),

$$\operatorname{Res}_{s=1} F(\sigma + it, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) = (\cosh(\pi r_1) + \cosh(\pi r_2)) \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle. \quad (5.17)$$

### 5.3 Aplicação

Nesta seção estudamos a soma

$$\sum_{n \leq X} \varrho_1(n) \overline{\varrho_2(n)}.$$

O modo de lidarmos com tal soma será o mesmo do capítulo anterior; os contornos de integração  $\mathcal{C}_T$  e  $\mathcal{D}_V$  utilizados a seguir serão os mesmos, inclusive.

Introduzimos uma função suavizante  $g(x)$  de classe  $C^\infty$  em  $[0, \infty)$ , que seja identicamente 1 em  $[X_1, X_2]$ , que se anule fora do intervalo  $[X_1 - Y, X_2 + Y]$ , onde  $X/4 < X_1 < X_2 < 4X$  e  $Y < X/2$  será escolhido otimizadamente a posteriori, e que possua derivada de todas as ordens satisfazendo

$$g^{(\nu)}(x) \ll Y^{-\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Pela Fórmula de Inversão de Mellin, temos para  $a > 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \sum_{n=1}^{\infty} a(n)g(n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1(a)}^{\infty} \int \mathcal{M}_g(s)a(n)n^{-s} ds, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \mathcal{M}_g(s)F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) ds, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{M}_g(s)$  é a transformada de Mellin de  $g(x)$ , e onde a troca de ordem da integral com o somatório é justificada pois a série  $\sum a(n)n^{-s}$  converge uniformemente em  $\text{Re}(s) \geq a > 1$ .

Sendo  $\mathcal{M}_g(s)$  uma função inteira e  $F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2})$  meromorfa, temos pelo Teorema dos Resíduos que

$$\mathcal{S} = \mathcal{M}_g(1)R + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_T} \mathcal{M}_g(s)F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) ds,$$

onde  $R$  é o resíduo de  $F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2})$  em  $s = 1$  conforme (5.17), e  $\mathcal{C}_T$  é o mesmo contorno poligonal definido no capítulo anterior: a reunião dos segmentos de reta  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_5$ , ver figura 4.2.

Fazendo integração por partes, como na seção 4.3, e utilizando (5.16) temos que as integrais sobre  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4$  e  $\mathcal{C}_5$  são bem pequenas, donde

$$\mathcal{S} = \mathcal{M}_g(1)R + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-b-iT}^{1-b+iT} \mathcal{M}_g(s)F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) ds + O(X^{-100}).$$

Daí, ao fazermos a mudança  $s \mapsto 1 - s$ , e aplicarmos a equação funcional (5.12), temos

$$\mathcal{S} = \mathcal{M}_g(1)R + \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s)\vartheta(1-s)F(s, \varphi_1 \times \overline{\varphi_2}) ds + O(X^{-100}).$$

Como  $b > 1$ , estamos na região de convergência de  $\sum a(n)n^{-s}$ , e então

$$\mathcal{S} = \mathcal{M}_g(1)R + \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + O(X^{-100}), \quad (5.18)$$

onde

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \leq N} a(n) \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s)\vartheta(1-s)n^{-s} ds$$

e,

$$\mathcal{S}_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n>N} a(n) \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s) \vartheta(1-s) n^{-s} ds.$$

Notamos que a contribuição de  $\mathcal{S}_2$  pode ser bem pequena por uma escolha conveniente de  $N$ , assim como na seção 4.3. Por (5.15) e (5.10), se tomarmos  $N = X^{3+\varepsilon} Y^{-4}$  e  $b$  suficientemente grande, temos  $\mathcal{S}_2 \ll X^{-100}$ ; conseqüentemente

$$\mathcal{S} = \mathcal{M}_g(1)R + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \leq N} a(n) \int_{b-iT}^{b+iT} \mathcal{M}_g(1-s) \vartheta(1-s) n^{-s} ds + O(X^{-100}). \quad (5.19)$$

Consideremos, agora, o contorno poligonal  $\mathcal{D}_V$  definido pela reunião dos segmentos de reta  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_7$ , ver figura 4.3. Podemos, pelo Teorema de Cauchy, mudar a linha de integração em cada um dos termos de  $\mathcal{S}_1$  para  $\mathcal{D}_V$  a obter

$$\mathcal{S} = \mathcal{M}_g(1)R + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \leq N} a(n) \int_{\mathcal{D}_V} \mathcal{M}_g(1-s) \vartheta(1-s) n^{-s} ds + O(X^{-100}).$$

Como no capítulo anterior, a contribuição principal desta integral provém de  $\mathcal{D}_2$  e  $\mathcal{D}_4$ . Usando (5.14) e novamente o método em [Tit51] para estimarmos tais integrais oscilatórias, obtemos

$$\int_V^T \vartheta\left(\frac{1}{2} - it\right) \frac{(xn)^{-it}}{\frac{1}{2} - it} dt = 16\pi^2 \int_V^T e^{-4it+4it \log(t/2\sqrt[4]{xn})} \frac{dt}{\frac{1}{2} - it} + O(V^{-1}) \ll (xn)^{-\frac{1}{8}}$$

ao tomarmos  $V = T^{\frac{1}{2}}$ . Portanto, temos

$$\mathcal{S}_1 \ll \sum_{n \leq N} \frac{|a(n)|}{n^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty |g'(x)| x^{\frac{1}{2}} (xn)^{-\frac{1}{8}} dx \ll X^{\frac{3}{8}} \sum_{n \leq N} \frac{|a(n)|}{n^{\frac{5}{8}}}$$

e por integração por partes, de (5.10) temos

$$\sum_{n \leq N} \frac{|a(n)|}{n^{\frac{5}{8}}} = \int_{\frac{1}{2}}^N t^{-\frac{5}{8}} d\left(\sum_{n \leq t} |a(n)|\right) \ll N^{\frac{3}{8}}.$$

Assim,

$$\mathcal{S} = \mathcal{M}_g(1)R + O\left(\left(\frac{X}{Y}\right)^{\frac{3}{2}} X^\varepsilon\right). \quad (5.20)$$

Daqui para frente consideraremos apenas o caso que  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ . Então  $a(n) = \sum_{kl^2=n} |\varrho(k)|^2$  é não-negativa, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)g_1(n) \leq \sum_{X/2 < n \leq X} a(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a(n)g_2(n),$$

para  $g_1(x)$  com  $X_1 = X/2 + Y$  e  $X_2 = X - Y$ , e  $g_2(x)$  com  $X_1 = X/2$  e  $X_2 = X$ .

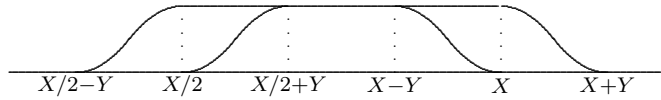


Figura 5.2: Gráficos das funções  $g_1(x)$  e  $g_2(x)$ .

Notando que para tais escolhas de  $g(x)$ , temos

$$\mathcal{M}_g(1) = \frac{X}{2} + O(Y), \quad (5.21)$$

e ao otimizarmos a escolha de  $Y$  balanceando as equações (5.20) e (5.21), tomando  $Y = X^{\frac{3}{5}}$  temos

$$\sum_{X/2 < n \leq X} a(n) = R \frac{X}{2} + O(X^{\frac{3}{5} + \varepsilon}).$$

Logo, somando as contribuições de  $X/2, X/4, X/8, \dots$  temos a estimativa

$$\sum_{n \leq X} a(n) = RX + O(X^{\frac{3}{5} + \varepsilon}). \quad (5.22)$$

Pela Fórmula de Inversão de Möbius, podemos inverter a equação (5.9), a obter

$$|\varrho(n)|^2 = \sum_{kl^2=n} a(k)\mu(l),$$

e assim, por (5.22) temos

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} |\varrho(n)|^2 &= \sum_{l \leq \sqrt{X}} \mu(l) \sum_{k \leq X/l^2} a(k) \\ &= \sum_{l \leq \sqrt{X}} \mu(l) \left( R \left( \frac{X}{l^2} \right) + O \left( \left( \frac{X}{l^2} \right)^{\frac{3}{5} + \varepsilon} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= RX \sum_{l \leq \sqrt{X}} \frac{\mu(l)}{l^2} + O\left(X^{\frac{3}{5}+\varepsilon}\right) \\
&= RX \left( \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right) \right) + O\left(X^{\frac{3}{5}+\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

onde  $\mu$  denota a função de Möbius. Logo, culminamos no seguinte resultado.

**Proposição 5.3.1** *Temos*

$$\sum_{n \leq X} |\varrho(n)|^2 = cX + O\left(X^{\frac{3}{5}+\varepsilon}\right), \tag{5.23}$$

onde  $c$  é a constante

$$\operatorname{Res}_{s=1} L(s, \varphi \otimes \bar{\varphi}) = \frac{12 \cosh(\pi r)}{\pi} \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}} |\varphi|^2 d\mu z.$$

Notamos que não precisamos em momento algum usarmos estimativas para os coeficientes individuais da forma  $\varrho(n) \ll n^{\delta+\varepsilon}$ .



# Apêndice A

## Cálculos

### A.1 Integrais envolvendo $K_\nu$

Assumiremos a representação integral

$$K_\nu(y) = \int_0^\infty e^{-y \cosh(u)} \cosh(\nu u) du,$$

ver [Leb72].

**Cálculo A.1.1** *Seja  $\nu \in \mathbb{C}$ . Temos*

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{y(t+t^{-1})}{2}} t^\nu dt$$

Fazendo a mudança de variáveis  $t = e^u$ ,

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-x \frac{t+t^{-1}}{2}} t^\nu \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-x \frac{t+t^{-1}}{2}} t^{-\nu} \frac{dt}{t},$$

e agora  $\eta = t^{-1}$ ,

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-x \frac{t+t^{-1}}{2}} t^\nu \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x \frac{\eta^{-1}+\eta}{2}} \eta^\nu \frac{d\eta}{\eta},$$

donde o resultado segue.

**Cálculo A.1.2** *Para  $y > 4$ , temos*

$$|K_\nu(y)| \leq e^{-\frac{y}{2}} K_{\operatorname{Re}(s)}(2).$$

Notamos que se  $a, b > 2$  então  $ab > a + b$ , logo  $e^{-ab} < e^{-a}e^{-b}$ . Tomemos  $a = \frac{y}{2}$  e  $b = t + t^{-1}$ . Integrando com respeito a  $t$ , a representação integral do cálculo anterior nos dá o desejado.

**Cálculo A.1.3** *Seja  $\nu \in \mathbb{C}$ . Para  $\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(\nu)|$ ,*

$$\int_0^\infty K_\nu(y)y^{s-1}dy = 2^{s-2}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)$$

*é absolutamente convergente.*

De fato, sendo  $K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{(t+t^{-1})y}{2}} t^{\nu-1} dt$ ,

$$\int_0^\infty K_\nu(y)y^{s-1}dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{(t+t^{-1})y}{2}} t^{\nu-1} y^{s-1} dy dt$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$u = \frac{1}{2}ty, \quad \nu = \frac{1}{2}t^{-1}y, \quad \frac{du}{u} \frac{d\nu}{\nu} = 2 \frac{dt}{t} \frac{dy}{y},$$

temos

$$K_\nu(y) = 2^{s-2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-\nu} u^{\frac{s+\nu}{2}} \nu^{\frac{s-\nu}{2}} \frac{du}{u} \frac{d\nu}{\nu}$$

esta integral é absolutamente convergente em  $\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(\nu)|$ , e se divide em duas integrais de Gama, de onde segue o resultado.

**Cálculo A.1.4** *Seja  $r \in \mathbb{R}$ . Para  $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ ,*

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{-\infty}^\infty (x^2 + y^2)^{-s} e(rx) dx = \begin{cases} \pi^{s+\frac{1}{2}} \Gamma(s - \frac{1}{2}) y^{1-s}, & \text{se } r = 0; \\ 2|r|^{s-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y), & \text{se } r \neq 0. \end{cases}$$

*a integral à esquerda convergindo absolutamente.*

---

**Cálculo A.1.5** *Sejam  $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ . Se  $\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(\mu)| + |\operatorname{Re}(\nu)|$ , temos*

$$\int_0^\infty K_\mu(y)K_\nu(y)y^{s-1}dy = 2^{s-3}\Gamma(s)^{-1} \prod \Gamma\left(\frac{s \pm \mu \pm \nu}{2}\right).$$

Equivalentemente, temos

$$\Gamma(s) \int_0^\infty K_\mu(y)K_\nu(y)y^{s-1}dy = 2^{s-3} \prod \Gamma\left(\frac{s \pm \mu \pm \nu}{2}\right).$$

Usando a representação integral do Cálculo A.1.1, podemos obter esta identidade procedendo como no Cálculo A.1.3.

# Referências Bibliográficas

- [Bea83] A. F. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [EGM98] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke, *Groups acting on hyperbolic space*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Harmonic analysis and number theory.
- [Hec37] E. Hecke, *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I*, Math. Ann. **114** (1937), no. 1, 1–28.
- [Iwa97] H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 17, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [Kim03] H. H. Kim, *Functoriality for the exterior square of  $GL_4$  and the symmetric fourth of  $GL_2$* , J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 139–183 (electronic), With appendix 1 by D. Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and P. Sarnak.
- [KS02] H. H. Kim and F. Shahidi, *Cuspidality of symmetric powers with applications*, Duke Math. J. **112** (2002), no. 1, 177–197.
- [Lan93] S. Lang, *Real and functional analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 142, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Leb72] N. N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Dover Publications Inc., New York, 1972.
- [LRS99] W. Luo, Z. Rudnick, and P. Sarnak, *On the generalized Ramanujan conjecture for  $GL(n)$* , Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 66, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 301–310.
- [Maa49] H. Maass, *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **121** (1949), 141–183.
- [Pro79] N. V. Proskurin, *Estimates of the eigenvalues of Hecke operators in the space of cusp forms of weight 0*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **82** (1979), 136–143, 167, Studies in number theory, 5.

- 
- [Ran39] R. A. Rankin, *Contributions to the theory of Ramanujan's function  $\tau(n)$  and similar arithmetical functions. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **35** (1939), 357–372.
- [Sel40] A. Selberg, *Bemerkungen über eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist*, Arch. Math. Naturvid. **43** (1940), 47–50.
- [Ser73] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Springer-Verlag, New York, 1973, Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.
- [Sha88] F. Shahidi, *On the Ramanujan conjecture and finiteness of poles for certain  $L$ -functions*, Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 3, 547–584.
- [Shi71] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1971, Kanô Memorial Lectures, No. 1.
- [Tit32] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford, at the Clarendon Press, 1932.
- [Tit51] ———, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford, at the Clarendon Press, 1951.
- [Wei80] J. Weidmann, *Linear operators in Hilbert spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1980.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)