Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Determinação de soluções invariantes para o problema termo-elástico

Ney Marcondes Portilho de Oliveira

Dezembro de 2005

Dissertação de Mestrado orientada pelo Prof. Guy Grebot

Dedico este trabalho a Deus e as mulheres da minha vida:
Luciana, Klaudia e Lúcia.

Agradecimentos:

Ao Professor Guy Grebot, que, pela dedicação e entusiasmo com o assunto, me mostrou um universo de conhecimento que vai além deste trabalho.

Aos professores do departamento de Matemática pelos ensinamentos que obtive ao longo do curso.

Aos colegas do departamento de Matemática pelos momentos de estudo em grupo, pelas discussões e momentos de descontração.

Ao amigo Marcos Kennedy, o pai que a vida me permitiu escolher, por seus conselhos, nos quais tenho muita gratidão.

Ao amigo Dilermano (Manim), que me apresentou ao mundo da Matemática, por tudo que já fez e tem feito por mim, sendo o amigo a quem posso recorrer a qualquer hora.

À família da minha esposa pelo acolhimento, apoio e incentivo.

Ao CNPq pelo suporte financeiro recebido por dois anos.

Sumário

Resumo. Nesta dissertação, apresentamos o método clássico para a determinação de soluções invariantes de um sistema de equações diferenciais. Este método é então aplicado ao problema termo-elástico para o qual várias soluções são encontradas. Para a determinação destas soluções invariantes, calculamos todos os geradores do grupo de simetrias de Lie do sistema e restringimos nossa busca a sub-álgebras de dimensão dois geradas por pares destes geradores.

Abstract. We present the classical Lie method for determining invariant solutions for systems of differential equations. The application of this method enables the determination of several invariant solutions for the thermo-elastic problem. In order to obtain these solutions, we compute the generators of the complete symmetry Lie algebra for this system and we restrict ourselves to 2-dimensional subalgebras generated by pairs of infinitesimal generators.

Capítulo 1

Introdução

A busca de soluções exatas de equações diferenciais advindas da modelagem de problemas práticos tem sido uma preocupação constante na comunidade científica. Mesmo quando estes problemas se apresentam sob forma de equações diferenciais lineares a determinação de soluções exatas continua sendo um problema difícil, apesar da grande quantidade de resultados formais quanto à integração deste tipo de sistema. Geralmente, a determinação de soluções de sistemas de equações parciais é feita a partir da busca de soluções de equações ordinárias obtidas do sistema inicial. Mas para conseguir fazer isso, devemos saber como escolher uma nova variável independente e as novas variáveis dependentes. Além disso, é preciso saber se este processo é factível.

Neste sentido, o matemático Marius Sophus Lie desenvolveu uma teoria geral que não só permite responder estas perguntas mas engloba todos os métodos conhecidos de soluções de equações diferenciais. De acordo com [5], Lie procurou montar uma teoria para equações diferenciais seguindo o caminho trilhado por Galois para as equações algébricas. Para tanto, Lie desenvolveu os chamados grupos de Lie, unificando um conceito algébrico (grupo) e um conceito geométrico (variedade) com o intuito de analisar as equações diferenciais a partir de transformações envolvendo variáveis dependentes e independentes. A idéia básica poderia ser formulada assim: se uma equação pode ser transformada em outra equação cuja solução geral é conhecida, então podemos determinar sua solução geral considerando a aplicação da transformação inversa à solução conhecida. No entanto, a teoria desenvolvida por Lie vai além deste tipo de problema e permite a determinação de soluções de um sistema de equações com base no conceito de simetrias deste sistema i.e. transformações que o deixam invariante. O objetivo não é a determinação direta destas transformações, pois este é geralmente um problema mais difícil do que a resolução da equação dada, mas sim dos seus geradores.

Assim, a grande vantagem do método de Lie está no fato de reduzir a busca de soluções de um sistema de equações à resolução de um sistema sobredeterminado de equações diferenciais parciais lineares para os geradores destas simetrias. O leitor poderia pensar que de nada isso adianta se o problema for encontrar as soluções de uma equação linear ou se tivermos que resolver uma equação ordinária. No entanto, a vantagem se apresenta pelo fato destes sistemas sobredeterminados poderem ser resolvidos de forma algorítmica. A determinação destes geradores de simetrias permite a construção de invariantes e de novas equações com um número reduzido de variáveis. Sob certas condições, este método pode ser aplicado até uma redução completa das variáveis independentes, levando assim à solução do sistema dado.

A partir dos anos 80, com o aparecimento dos manipuladores algébricos, surgiram vários pacotes computacionais para determinar algebricamente os geradores infinitesimais de simetrias. Dentre estes pacotes podemos citar o pacote SADE (Symmetry Analysis of Differential Equations), escrito no sistema de computação algébrica MAPLE e desenvolvido pelo grupo de Física Matemática do Instituto de Física da Universidade de Brasília. Com o uso destes pacotes algébricos, soluções novas de sistemas físicos famosos começaram a aparecer, acentuando ainda mais as vantagens do método de Lie e permitindo novos desenvolvimentos.

Em 2004, o Engenheiro Elysio Ruggeri (CTEC-FURNAS) apresentou ao MAT e, em seguida, ao grupo de Física Matemática do FIS/UnB, um problema: determinar soluções exatas para o problema termo-elástico

$$
\begin{cases}
\rho\mathbf{f} + \mathrm{div}(\sigma) = \rho\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u} \\[2ex]
\mathbf{E} = \dfrac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}\right) \\[2ex]
\sigma = {}^4G : \mathbf{E}.
\end{cases}
$$

Nestas equações, $\mathbf{u}$ representa o deslocamento , $\mathbf{f}$ representa a resultante das forças mássicas por unidade de massa, σ é o tensor das tensões, $\mathbf{E}$ é o tensor (simétrico) das deformações e ${}^4G$ é um tensor simétrico que permite relacionar σ e E.

O objetivo é determinar soluções exatas do problema nos vários casos de isotropia e anisotropia representados por ${}^4G$, para as variadas expressões de $\mathbf{f}$ e levando em conta as condições de contorno impostas em situações práticas.

A utilização do método de Lie para encontrar soluções invariantes para o problema termo-elástico surgiu naturalmente devido à generalidade do método. O programa SADE foi então aplicado a este sistema e várias soluções invariantes foram obtidas.

O objetivo desta dissertação é a determinação de soluções invariantes para o problema termo-elástico para o caso isotrópico e estático. Por motivos pedagógicos e para fins de comparação com os resultados dados pela aplicação do programa SADE, nenhum programa algébrico para cálculo de simetrias e determinação de soluções invariantes foi usado. O manipulador algébrico MAPLE foi utilizado de forma interativa e algumas rotinas foram desenvolvidas pelo autor. Apesar do método permitir o tratamento das condições de contorno, estas não foram consideradas por questão de tempo e espaço.

Esta dissertação se apresenta como segue: No capítulo 2 apresentamos os conceitos básicos através de definições e teoremas importantes. Introduzimos também o conceito de simetrias de equações diferenciais. Este conceito é usado no capítulo seguinte onde são apresentadas e calculadas as soluções invariantes do sistema de equações diferenciais da termo-elástica. Terminamos a dissertação com considerações finais.

Os cálculos desenvolvidos durante este estudo estão no CD anexo.

Capítulo 2

Grupo de Simetria de Equações Diferenciais

2.1 Conceitos Básicos

Definição 2.1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão m é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas* $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \to M$ *de abertos* $\mathbb{R}^m$ *em M tais que:*

1. $\displaystyle\bigcup_\alpha X_\alpha\big(U_\alpha\big) = M$.

2. *Para todo par* α, β *com* $X_\alpha\big(U_\alpha\big) \cap X_\beta\big(U_\beta\big) = W \neq \emptyset$, *os conjuntos* $X_\beta^{-1}\big(W\big)$ *e* $X_\alpha^{-1}\big(W\big)$ *são abertos em* $\mathbb{R}^m$ *e as aplicações* $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ *são diferenciáveis.*

3. *A família* $\Big\{\big(U_\alpha, X_\alpha\big)\Big\}$ *é máxima relativamente às condições 1. e 2.*

Definição 2.1.2 *Um grupo é um conjunto G munido de uma operação* $*$ *com as seguintes propriedades:*

1. *Para todo par* $g, h \in G$ *tem-se* $g * h \in G$;

2. *Se* $g, h, k \in G$ *então* $(g * h) * k = g * (h * k)$;

3. *Existe um elemento* $e \in G$ *tal que* $e * g = g * e = g$*, para todo* $g \in G$*;*

4. *Para cada* $g \in G$ *existe um elemento* $g^{-1} \in G$ *tal que*

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$$

Definição 2.1.3 *Um grupo de Lie a r parâmetros é um grupo G que também possui a estrutura de uma variedade diferenciável de dimensão r de modo que as duas operações do grupo*

$$m : G \times G \to G, \quad m(g, h) = g * h,$$

$$inv : G \to G, \quad inv(g) = g^{-1},$$

são funções suaves.

Definição 2.1.4 *Seja* M *uma variedade diferenciável. Um grupo local de transformações agindo em* M *é dado por um grupo de Lie* G*, um conjunto aberto* $\mathcal{U}$ *e uma aplicação* $\Psi : \mathcal{U} \to M$*, tais que* $\mathcal{U}$ *com*

$$\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M,$$

é o domínio de definição da ação do grupo, $\underline{e}$ *é a identidade de* G *e* Ψ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se* $(h, x) \in \mathcal{U}$*,* $(g, \Psi(h, x)) \in \mathcal{U}$ *e também* $(g * h, x) \in \mathcal{U}$*, então*

$$\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g * h, x).$$

2. *Para todo* $x \in M$*,*

$$\Psi(e, x) = x.$$

3. *Se* $(g, x) \in \mathcal{U}$ *e* $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in \mathcal{U}$*, então*

$$\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x.$$

A partir do conjunto $\mathcal{U}$ definido acima como o domínio da ação Ψ define-se os seguintes conjuntos:

$$G_x = \{g \in G : (g, x) \in \mathcal{U}\}$$

e

$$M_g = \{x \in M : (g, x) \in \mathcal{U}\}.$$

Definição 2.1.5 (Órbita) *Uma órbita de um grupo local de transformações é um subconjunto minimal, não vazio, da variedade M que é invariante sob a ação do grupo. Em outras palavras, $\mathcal{O} \subset M$ é uma órbita se forem satisfeitas as condições:*

1. *Se $x \in \mathcal{O}$, $g \in G$ e $g \cdot x$ está definido, então $g \cdot x \in \mathcal{O}$.*

2. *Se $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$, e $\tilde{\mathcal{O}}$ satisfaz a parte 1. então, $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ ou $\tilde{\mathcal{O}} = \emptyset$.*

Definição 2.1.6 *Seja X um campo de vetores definido sobre uma variedade M. O fluxo gerado por X e passando por p é a curva integral maximal parametrizada $\Psi(\varepsilon, p)$ tal que, para cada $p \in M$ e ε em algum intervalo I_p contendo 0, $\Psi(\varepsilon, p)$ seja um ponto da curva integral passando por $p \in M$. O fluxo de um campo de vetores tem as propriedades básicas:*

1. *$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, p)) = \Psi(\delta + \varepsilon, p)$, $p \in M$ para todo $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que ambos os lados da equação estão definidos;*

2. *$\Psi(0, p) = p$;*

3. *$\dfrac{d}{d\varepsilon}\Psi(\epsilon, p) = X(\Psi(\varepsilon, p))$ para todo ε definido.*

Observe que o fluxo de um campo de vetores é uma transformação de grupo, onde o grupo de Lie correspondente é o conjunto dos números reais com a operação de adição.

É comum usar-se a notação $exp(\varepsilon X)x$ para $\Psi(\varepsilon, x)$. Deste modo tem-se que a derivada de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ ao longo do fluxo de $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$

é calculada do seguinte modo:

$$\frac{d}{d\varepsilon} f\left(exp\left(\varepsilon X\right)x\right) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \left(exp\left(\varepsilon X\right)x\right) \frac{\partial f}{\partial x^i}\left(exp\left(\varepsilon X\right)x\right) \equiv X(f)[exp(\varepsilon X)x].$$

Em particular, em $\varepsilon = 0$,

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f(exp(\varepsilon X)x) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = X(f)(x).$$

Podemos desenvolver f em série de Taylor, obtendo

$$f(exp(\varepsilon X)x) = f(x) + \varepsilon X(f)(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}X^2(f)(x) + \cdots + \frac{\varepsilon^k}{k!}X^k(f)(x) + O(\varepsilon^{k+1}),$$

onde $X^{n+1}(f) = X^n\left(X(f)\right)$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Se assumirmos a convergência da série de Taylor em ε, então obtemos a série de Lie

$$f(exp(\varepsilon X)x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}X^k(f)(x)$$

para a ação do fluxo em f. O mesmo resultado ocorre para funções vetoriais $F : M \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (F^1(x), \cdots, F^n(x))$, onde nós deixamos X agir componente a componente sobre F: $X(F) = (X(F^1), \cdots, X(F^n))$.

Definição 2.1.7 *Sejam X e Y campos de vetores tangentes à variedade M.O colchete de Lie $[X,Y]$ é o único campo de vetores em M satisfazendo*

$$[X,Y](f) = X\left(Y(f)\right) - Y\left(X(f)\right),$$

para todas as funções suaves $f : M \to \mathbb{R}$.

Proposição 2.1.1 *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis, a e b números reais e φ e θ funções diferenciáveis, então o colchete de Lie possui as seguintes propriedades:*

1. *bilinearidade:*

$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z],$$

$$[X, aY + bZ] = a[X,Y] + b[X,Z];$$

2. Anti-simetria:

$$[X,Y] = -[Y,X];$$

3. Identidade de Jacobi:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0;$$

4. $[\theta X, \varphi Y] = \theta\varphi[X,Y] + \theta X(\varphi)Y - \varphi Y(\theta)X.$

Sendo G um grupo de Lie, para todo $g \in G$ define-se a função $R_g : G \to G$, de modo que $R_g(h) = h \cdot g$, conhecida como operação à direita.

Definição 2.1.8 *Seja G um grupo de Lie e X um campo de vetores sobre G. X será dito invariante à direita se $d(R_g)_h(X(h)) = X(hg)$ para todo $g, h \in G$.*

Lema 2.1.1 *Sejam X e Y campos invariantes à direita num grupo de Lie G. Então o colchete de Lie $[X,Y]$ é invariante à direita.*

Definição 2.1.9 *A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Lie G, é o espaço vetorial de todos os campos de vetores em G que são invariantes à direita (ou à esquerda dependendo da conveniência).*

Definição 2.1.10 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. O conjunto $Gl(V)$ é o conjunto dos operadores lineares invertíveis sobre V e é conhecido como grupo linear geral.*

Definição 2.1.11 *Seja $C_g : G \to G$ dado por $C_g(x) = gxg^{-1}$. A representação adjunta $Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$, de G em sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida por $Ad(g) = d(C_g)_e = d(L_g \circ R_{g^{-1}})_e = d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_e$.*

Definição 2.1.12 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Sua representação adjunta é a aplicação $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definida por*

$$ad(X)(Y) = [X,Y],$$

onde $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é a algebra de Lie do grupo de Lie $Gl(\mathfrak{g})$.

Proposição 2.1.2 *Seja G um grupo de Lie, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, em que o colchete é dado pelos campos invariantes à direita. Então, a representação infinitesimal associada à sua representação adjunta Ad é a representação adjunta ad de $\mathfrak{g}$. Em outras palavras, valem as fórmulas:*

1. $d(Ad)_e(X) = ad_r(X)$, $X \in \mathfrak{g}$,

2. $Ad(exp(X)) = exp(ad_r(X))$,

onde ad_r é a representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ dos campos invariantes à direita.

Da parte (2) da proposição 2.1.2 tem-se

$$\begin{aligned} Ad(exp(tX))(Y) &= exp(ad_r(X))(Y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(ad_r(X))^n(Y) \\ &= Y - t[X,Y] + \frac{t^2}{2}[X,[X,Y]] - \cdots . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definição 2.1.13 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ será uma sub-álgebra de Lie da álgebra $\mathfrak{g}$ se, para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$, tivermos $[X,Y] \in \mathfrak{h}$.*

2.2 Grupos e equações diferenciais

De modo geral, em um sistema de equações diferenciais $\mathscr{S}$, envolvendo p variáveis independentes $x = (x^1, \cdots, x^p)$ e q variáveis dependentes $u = (u^1, \cdots, u^q)$ as soluções serão da forma $u = f(x)$ ou, em componentes, $u^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots, x^p)$, $\alpha = 1, \cdots, q$. Seja $X = \mathbb{R}^p$, com coordenadas $x = (x^1, \cdots, x^p)$, o espaço representando as variáveis independentes e $U = \mathbb{R}^q$, com coordenadas $u = (u^1, \cdots, u^q)$, o espaço que representa as variáveis dependentes. Um grupo de simetria do sistema $\mathscr{S}$ será um grupo local de transformações , G, agindo em algum subconjunto aberto $M \subset X \times U$

tal que "G transforma soluções de $\mathscr{S}$ em outras soluções de $\mathscr{S}$". Note que nós estamos permitindo transformações não lineares arbitrárias de ambas as variáveis, independentes e dependentes, em nossa definição de simetria.

De modo mais rigoroso, temos que explicar como uma determinada transformação g, no grupo G, transforma uma função $u = f(x)$. Nós começamos por identificar a função $u = f(x)$ com seu gráfico

$$\Gamma_f = \big\{(x, f(x)) \in X \times U : x \in \Omega\big\},$$

onde $\Omega \subset X$ é o domínio de definição de f. Note que Γ_f é uma subvariedade de dimensão p de $X \times U$. Se $\Gamma_f \subset M_g$, é o domínio de definição da transformação g, então a transformação de Γ_f por g é apenas

$$g \cdot \Gamma_f = \big\{(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) : (x, u) \in \Gamma_f\big\}.$$

O conjunto $g \cdot \Gamma_f$ não é necessariamente o gráfico de outra função $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. No entanto, como G age suavemente e o elemento identidade de G deixa Γ_f inalterado, encolhendo adequadamente o domínio de definição Ω de f nós asseguramos que, para elementos g na vizinhança da identidade, a transformação $g \cdot \Gamma_f = \Gamma_{\tilde{f}}$ é o gráfico de alguma função suave $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Nós escrevemos $\tilde{f} = g \cdot f$ e chamamos a função $\tilde{f}$ de transformação de f por g.

2.3 Prolongamento

Para implementar um método de obtenção de simetrias de equações diferenciais, utilizaremos os métodos estudados para equações algébricas. Primeiro, precisamos substituir a noção de um "sistema de equações diferenciais" por um objeto geométrico concreto determinado pelo anulamento de certas funções. Para isto nós precisamos "prolongar" o espaço $X \times U$, representando as variáveis independentes e dependentes consideradas, para um espaço que também represente as várias derivadas parciais que ocorrem no sistema.

Dada uma função suave $f : X \to \mathbb{R}$ de p variáveis independentes, há $p_k = \binom{p+k-1}{k}$ possíveis derivadas parciais distintas de f com ordem k. Nós empregamos a notação de multi-índice $\partial_J f(x) = \dfrac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1}\partial x^{j_2}\cdots\partial x^{j_k}}$ para estas derivadas. Nesta notação, $J = (j_1, \cdots, j_k)$ é uma seqüência de k-termos inteiros não ordenados, com entradas $1 \leq j_\mu \leq p$ indicando quais derivadas estão sendo feitas. A ordem de tais multi-índices, que nós denotamos por $\#J \equiv k$, indica a ordem de derivação. De modo mais geral, se $f : X \to U$ é uma função suave, $u = f(x) = \big(f^1(x), \cdots, f^q(x)\big)$, há $q \cdot p_k$ números necessários para representar todas as diferentes derivadas $u^\alpha_J = \partial_J f^\alpha(x)$ de ordem k das componentes de f no ponto x. Definimos $U_k = \mathbb{R}^{q \cdot p_k}$ como sendo o espaço euclideano desta dimensão, dotado com coordenadas u^α_J correspondendo a $\alpha = 1, \cdots, q$ e todos os multi-índices $J = (j_1, \cdots, j_k)$ de ordem k. Além disso, definimos $U^{(n)} = U \times U_1 \times \cdots \times U_n$ como sendo o espaço produto cartesiano, em que as coordenadas representam todas as derivadas de funções $u = f(x)$ de todas as ordens de 0 a n. Note que $U^{(n)}$ é um espaço euclidiano de dimensão $q + qp_1 + \cdots + qp_n = q\binom{p+n}{n} \equiv qp^{(n)}$. Um ponto em $U^{(n)}$ será denotado por $u^{(n)}$. Assim, $u^{(n)}$ tem $q \cdot p^{(n)}$ diferentes componentes u^α_J onde $\alpha = 1, \cdots, q$ e J percorre todos os multi-índices não ordenados $J = (j_1, \cdots, j_k)$ com $1 \leq j_k \leq p$ e $0 \leq k \leq n$.

O espaço total $X \times U^{(n)}$, cujas coordenadas representam as variáveis independentes, variáveis dependentes e as derivadas das variáveis dependentes de ordem inferior ou igual à ordem n é chamado de *espaço de jato* de ordem n do espaço $X \times U$. Muitas vezes, não estamos interessados em equações diferenciais definidas em todo $X \times U$, mas somente em algum subconjunto aberto $M \subset X \times U$. Neste caso, nós definimos o espaço de jato de ordem n de M como sendo $M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times \cdots \times U_n$. Se $u = f(x)$ é uma função em que o gráfico está em M, então o n-ésimo prolongamento $pr^{(n)} f(x)$ é uma função cujo gráfico está no espaço de jato de ordem n, $M^{(n)}$.

Sistemas de Equações Diferenciais

Definição 2.3.1 *Um sistema de equações diferenciais $\mathscr{S}$ de ordem n com p variáveis independentes e q variáveis dependentes é dado por um sistema de* *equações*

$$\Delta_\nu\big(x, u^{(n)}\big) = 0, \qquad \nu = 1, \cdots, l,$$

onde as funções Δ_ν são todas suaves em seus argumentos.

Note que as equações diferenciais

$$\Delta\big(x, u^{(n)}\big) = \Big(\Delta_1\big(x, u^{(n)}\big), \cdots, \Delta_l\big(x, u^{(n)}\big)\Big) = 0$$

determinam uma subvariedade $\mathscr{S}_\Delta = \big\{\big(x, u^{(n)}\big) : \Delta\big(x, u^{(n)}\big) = 0\big\} \subset X \times U^{(n)}$ do espaço de jato total. Nós podemos identificar o sistema de equações diferenciais com sua correspondente subvariedade, realizando assim as relações "abstratas" entre as várias derivadas de u determinadas pelo sistema como algo concreto: o subconjunto geométrico $\mathscr{S}_\Delta$ do espaço de jato $X \times U^{(n)}$. Nós usaremos o mesmo símbolo "Δ" como taquigrafia para o sistema de equações diferenciais $\mathscr{S}_\Delta$ e a aplicação que o determina $\Delta : X \times U^{(n)} \to \mathbb{R}^l$.

Deste ponto de vista, uma solução suave do sistema dado de equações diferenciais é uma função suave $u = f(x)$ tal que

$$\Delta_\nu\big(x, pr^{(n)} f(x)\big) = 0, \quad \nu = 1, \cdots, l,$$

onde x está no domínio de f. Esta condição equivale a declarar que o gráfico do prolongamento $pr^{(n)} f(x)$ está inteiramente contido na subvariedade $\mathscr{S}_\Delta$ determinada pelo sistema:

$$\Gamma_f^{(n)} \equiv \big\{\big(x, pr^{(n)} f(x)\big)\big\} \subset \mathscr{S}_\Delta = \big\{\Delta\big(x, u^{(n)}\big) = 0\big\}.$$

Nós podemos assim considerar um sistema de equações diferenciais de ordem n como sendo uma subvariedade $\mathscr{S}_\Delta$ no espaço de jato de ordem n, $X \times U^{(n)}$, e uma solução como sendo uma função $u = f(x)$ tal que o gráfico de seu n-ésimo prolongamento, $pr^{(n)} f(x)$, estja contido na subvariedade.

Prolongamento da Ação do Grupo

Seja G um grupo local de transformações agindo em um subconjunto aberto $M \subset X \times U$ do espaço das variáveis independentes e dependentes.

Existe uma ação induzida de G no n-ésimo espaço de jato $M^{(n)}$, chamada de *n-ésimo prolongamento* da ação de G e denotada por $pr^{(n)}G$. Este prolongamento é definido para transformar as derivadas de funções $u = f(x)$ em correspondentes derivadas da função transformada $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$. Mais rigorosamente, suponha que $(x_0, u_0^{(n)})$ seja um ponto em $M^{(n)}$ e escolha qualquer função suave $u = f(x)$ definida em uma vizinhança de x_0, com gráfico em M, e que tenha as derivadas em x_0 dadas por $u_0^{(n)} = pr^{(n)}f(x_0)$.

Seja g um elemento de G suficientemente próximo da identidade de modo que, pela transformação $(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u)$, tenhamos $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ definida em uma vizinhança de $\tilde{x}_0$ $\big((\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = g \cdot (x_0, u_0)\big)$. Nós, então, determinamos a ação do grupo de transformação prolongado $pr^{(n)}g$ no ponto $(x_0, u_0^{(n)})$ pelo valor das derivadas da função transformada $\tilde{f} = g \cdot f$ em $\tilde{x}_0$. Explicitamente,

$$pr^{(n)}g \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}),$$

onde

$$\tilde{u}_0^{(n)} \equiv pr^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0).$$

Invariância de Equações Diferenciais

Teorema 2.3.1 *Seja M um subconjunto aberto de $X \times U$ e considere $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$, um sistema de equações diferenciais de ordem n sobre $M^{(n)}$, com correspondente subvariedade $\mathscr{S}_\Delta \subset M^{(n)}$. Seja G um grupo local de transformação agindo em M cujo prolongamento deixa $\mathscr{S}_\Delta$ invariante, i.e., sempre que $(x, u^{(n)}) \in \mathscr{S}_\Delta$, $pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathscr{S}_\Delta$ para todo $g \in G$ e $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$ tal que $pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)})$ esteja definido. Então G é um grupo de simetria do sistema de equações diferenciais.*

Prolongamento de Campos de Vetores

Definição 2.3.2 *Seja $M \subset X \times U$ um subconjunto aberto de $X \times U$ e V um campo de vetores em M, com correspondente grupo a 1-parâmetro $exp(\varepsilon V)$. O n-ésimo prolongamento de V, denotado por $pr^{(n)}V$, é o campo de vetores no n-ésimo espaço de jato $M^{(n)}$ definido como sendo o gerador infinitesimal do correspondente grupo a 1-parâmetro prolongado $pr^{(n)}\big(exp(\varepsilon V)\big)$. Em outras palavras,*

$$pr^{(n)}V\big|_{(x,u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} pr^{(n)}\Big(exp(\varepsilon V)\Big)(x, u^{(n)}),$$

para qualquer $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Invariância Infinitesimal

Definição 2.3.3 *Seja*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \cdots, l,$$

um sistema de equações diferenciais. O sistema é dito ser de posto maximal se a matriz Jacobiana

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_J^\alpha}\right)$$

de Δ com respeito a todas as variáveis $(x, u^{(n)})$, é de posto l onde $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$.

Teorema 2.3.2 *Suponha que*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \cdots, l,$$

seja um sistema de equações diferenciais de posto maximal definido sobre $M \subset X \times U$. Se G é um grupo local de transformação agindo em M, e

$$pr^{(n)}V\Big(\Delta_\nu(x, u^{(n)})\Big) = 0, \quad \nu = 1, \cdots, l, \quad onde\ \Delta(x, u^{(n)}) = 0,$$

para todo gerador infinitesimal V de G, então G é um grupo de simetria do sistema.

A Fórmula do Prolongamento

Definição 2.3.4 (Derivada Total) *Seja $P(x, u^{(n)})$ uma função suave de x, u e as derivadas de u até a ordem n, definida em um subconjunto aberto $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. A derivada total de P com relação a x^i é a única função suave $\big(D_i P\big)(x, u^{(n+1)})$ definida em $M^{(n+1)}$ e dependendo das derivadas de u até a ordem $n+1$, com a propriedade que, se $u = f(x)$ é uma função suave,*

$$D_i P(x, pr^{(n)} f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big\{P\big(x, pr^{(n)} f(x)\big)\Big\}.$$

Em outras palavras, $D_i P$ é obtido de P pela derivação de P com relação a x^i enquanto tratamos todas as u^α's e suas derivadas como funções de x.

Proposição 2.3.1 *Dada $P(x, u^{(n)})$, a i-ésima derivada total de P tem a forma geral*

$$D_i P = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} u^\alpha_{J,i} \frac{\partial P}{\partial u^\alpha_J}, \tag{2.2}$$

onde, para $J = (j_1, \cdots, j_k)$, $u^\alpha_{J,i} = \dfrac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^i} = \dfrac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} \cdots \partial x^{j_k}}$. No segundo somatório de (2.2), a soma segue sobre todos os J's de ordem $0 \leq \#J \leq n$, onde n é a maior ordem das derivadas que aparecem em P.

Esta proposição decorre da definição e do uso da regra da cadeia.

Teorema 2.3.3 *Seja*

$$V = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

um campo de vetores definido em um subconjunto aberto $M \subset X \times U$. O n-ésimo prolongamento de V é o campo de vetores

$$pr^{(n)} V = V + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \phi^J_\alpha(x, u^{(\#J)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} \tag{2.3}$$

definido no correspondente espaço de jato $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, o segundo somatório cobrindo todos os multi-índices $J = (j_1, \cdots, j_k)$, com $1 \leq j_k \leq p$,

$1 \leq k \leq n$. As funções coeficientes ϕ_α^J de $pr^{(n)}V$ são dadas pela seguinte fórmula:

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(\#J)}) = D_J\Big(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^\alpha\Big) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^\alpha, \tag{2.4}$$

onde $u_i^\alpha = \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$, *e* $u_{J,i}^\alpha = \dfrac{\partial u_J^\alpha}{\partial x^i}$.

Prova: Provaremos inicialmente a fórmula para $n = 1$.

Sendo $(\tilde{x}, \tilde{u}) = exp(\varepsilon V)(x, u)$ a transformação, temos que $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x, u, \varepsilon)$ e $\tilde{u}^\alpha = \tilde{u}^\alpha(x, u, \varepsilon)$ são dados pelos seus desenvolvimentos em série de Taylor por:

$$\tilde{x}^i(x, u, \varepsilon) = x^i + \varepsilon \xi^i(x, u) + O(\varepsilon^2) \tag{2.5}$$

$$\tilde{u}^\alpha(x, u, \varepsilon) = u^\alpha + \varepsilon \phi_\alpha(x, u) + O(\varepsilon^2) \tag{2.6}$$

Usando (2.5) e denotando a derivada total com relação à i-ésima variável independente por $\dfrac{d}{dx^i}$ encontramos que:

$$\frac{d\tilde{x}^i}{dx^j} = \delta_j^i + \varepsilon\left(\frac{\partial \xi^i(x, u)}{\partial x^j} + \sum_{\alpha=1}^{q} \frac{\partial \phi_\alpha(x, u)}{\partial u^\alpha} u_j^\alpha\right) + O(\varepsilon^2). \tag{2.7}$$

Como $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{d\tilde{x}^i}{dx^j}\left(\frac{dx^j}{d\tilde{x}^k}\right) = \delta_k^i$, com $i = 1, \cdots, p$ e $k = 1, \cdots, p$, resolvendo o sistema para $\dfrac{dx^j}{d\tilde{x}^k}$ e usando (2.7) teremos

$$\frac{dx^i}{d\tilde{x}^j} = \begin{cases} \dfrac{1 + \varepsilon \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \frac{d\xi^k(x, u)}{dx^k} + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{d\xi^k(x, u)}{dx^k} + O(\varepsilon^2)} & se \quad i = j \\[4ex] \dfrac{-\varepsilon \dfrac{d\xi^i(x, u)}{dx^j} + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{d\xi^k(x, u)}{dx^k} + O(\varepsilon^2)} & se \quad i \neq j. \end{cases}$$

Efetuando a divisão das séries e utilizando os termos até a primeira ordem em ε obtemos

$$\frac{dx^i}{d\tilde{x}^j} = \delta^i_j - \varepsilon\frac{d\xi^i}{dx^j} + O(\varepsilon^2).$$

Com estes resultados podemos calcular

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{u}^\alpha}{d\tilde{x}^j} &= \sum_{i=1}^{p} \frac{d\tilde{u}^\alpha}{dx^i}\frac{dx^i}{d\tilde{x}^j} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(u^\alpha_i + \varepsilon\frac{d\phi_\alpha(x,u)}{dx^i} + O(\varepsilon^2)\right)\left(\delta^i_j - \varepsilon\frac{d\xi^i(x,u)}{dx^j} + O(\varepsilon^2)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(u^\alpha_i\delta^i_j + \varepsilon\left(\delta^i_j\frac{d\phi_\alpha(x,u)}{dx^i} - u^\alpha_i\frac{d\xi^i(x,u)}{dx^j}\right) + O(\varepsilon^2)\right).
\end{aligned}$$

Como $pr^{(1)}V\Big|_{(x,u^{(1)})} = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} pr^{(1)}\Big(exp\big(\varepsilon V\big)\Big)(x,u^{(1)})$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi^{(j)}_\alpha(x,u^{(1)}) &= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\left(\frac{d\tilde{u}^\alpha}{d\tilde{x}^j}\right) \\
&= \frac{d\phi_\alpha(x,u)}{dx^j} - \sum_{i=1}^{p}\frac{d\xi^i(x,u)}{dx^j}u^\alpha_i \\
&= D_j\left(\phi_\alpha(x,u) - \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)u_i\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)u^\alpha_{ji},
\end{aligned}$$

onde $u^\alpha_{ji} = \dfrac{du^\alpha_i}{dx^j}$.

Para provar o teorema para n qualquer, procedemos por indução observando que $M^{(n+1)} \subset \big(M^{(n)}\big)^{(1)}$.

Com este ponto de vista, o procedimento para determinar $pr^{(n+1)}V$ de $pr^{(n)}V$ é o seguinte: nós consideramos $pr^{(n)}V$ como um campo de vetores em $M^{(n)}$ e pela nossa fórmula de prolongamento de primeira ordem, podemos prolongá-lo para $\big(M^{(n)}\big)^1$. Nós então restringimos o campo de vetores resultante para o subespaço $M^{(n+1)}$ determinando, assim, o $(n+1)$-ésimo prolongamento $pr^{(n+1)}V$. Agora, as novas coordenadas em $M^{(n+1)}$ são dadas por $u^\alpha_{J,k} = \dfrac{\partial u^\alpha_J}{\partial x^k}$, onde $J = (j_1, \cdots, j_n)$, $1 \leq k \leq p$ e $1 \leq \alpha \leq q$. De acordo com nossa fórmula do prolongamento, temos que o coeficiente de $\dfrac{\partial}{\partial u^\alpha_{J,k}}$ no primeiro prolongamento de $pr^{(n)}V$ é

$$\phi_\alpha^{J,k} = D_k\phi_\alpha^J - \sum_{i=1}^{p} D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha.$$

Agora, basta provar que a fórmula geral resolve a relação de recorrência anterior, ou seja:

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha^{J,k} &= D_k\left\{D_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{j,i}^\alpha\right\} - \sum_{i=1}^{p} D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha \\
&= D_kD_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p}\left(D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha + \xi^i u_{J,ik}^\alpha\right) - \sum_{i=1}^{p} D_k\xi^i \cdot u_{J,i}^\alpha \\
&= D_kD_J\left(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{p}\xi^i u_{J,ik}^\alpha,
\end{aligned}$$

onde $u_{J,ik}^\alpha = \dfrac{\partial^2 u_J^\alpha}{\partial x^i \partial x^k}$. Assim, $\phi_\alpha^{J,k}$ é da forma (2.4), o que conclui a demonstração por indução.

□

Propriedade de Campos de Vetores Prolongados

Teorema 2.3.4 *Sejam V e W campos de vetores suaves em $M \subset X \times U$. Então seus prolongamentos têm as propriedades*

$$pr^{(n)}(cV + c'W) = c \cdot pr^{(n)}V + c' \cdot pr^{(n)}W,$$

para c, c' constantes, e

$$pr^{(n)}[V, W] = [pr^{(n)}V, pr^{(n)}W].$$

As demonstrações seguem das fórmulas do prolongamento e do colchete de Lie.

Corolário 2.3.1 *Seja Δ um sistema de equações diferenciais de posto maximal definido sobre $M \subset X \times U$. O conjunto de todas as simetrias infinitesimais deste sistema forma uma álgebra de Lie de campos de vetores em M. Além disso, se esta álgebra de Lie é de dimensão finita, o grupo de simetria correspondente do sistema é um grupo local de transformações agindo em M.*

2.4 Cálculo do Grupo de Simetrias das Equações Básicas da Teoria Linear da Elasticidade

As equações da elasticidade

As equações da teoria linear da elasticidade são:

1. **A equação diferencial vetorial do movimento elástico**

$$\rho\mathbf{f} + \mathrm{div}(\sigma) = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u}, \tag{2.8}$$

onde $\mathbf{f}$ é a resultante das forças mássicas por unidade de massa, σ é o tensor das tensões e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ é o vetor deslocamento que depende da posição (x_1, x_2, x_3) e do tempo t. O elemento de coordenada j do vetor $\mathrm{div}(\sigma)$ é dado por $\big(\mathrm{div}(\sigma)\big)_j = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij}$.

2. **A equação tensorial das pequenas deformações**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\big(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}\big), \tag{2.9}$$

onde $\mathbf{E}$ é o tensor simétrico das deformações. Os elementos do tensor $\nabla\mathbf{u}$, em notação covariante, são dados por $\big(\nabla\mathbf{u}\big)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e $\nabla^T\mathbf{u}$ é seu transposto.

3. **A lei de Hooke generalizada**

$$\sigma = {}^4G : \mathbf{E}, \tag{2.10}$$

onde ${}^4G$ é o tensor de proporcionalidade entre σ e $\mathbf{E}$.

Consideraremos, nesta dissertação, o caso em que $\mathbf{f} = 0$ e $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$.

Para o meio homogêneo e isotrópico o tensor ${}^4G$ pode ser adaptado à forma:

$$
{}^4G = \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix},
$$

onde tal adaptação só é possível porque ${}^4G$ é simétrico para os dois primeiros índices e para os dois últimos de modo que $\left({}^4G\right)_{ij\ kl} = \left({}^4G\right)_{ji\ kl} = \left({}^4G\right)_{ij\ lk} = \left({}^4G\right)_{ji\ lk}$. Tal adaptação obedece a seguinte associação $\left({}^4G\right)_{ij\ kl} = \left({}^4G\right)_{\alpha\beta}$, onde identificamos os índices $ij \mapsto \alpha$ de acordo com: $11 \mapsto 1$, $22 \mapsto 2$, $33 \mapsto 3$, $23 \mapsto 4$, $13 \mapsto 5$ e $12 \mapsto 6$.

Resolvendo algebricamente tal sistema para $\mathbf{u}$ teremos o sistema de equações diferenciais abaixo:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 \equiv (\lambda + 2\,\mu)\,(u_1)_{xx} + (\lambda+\mu)\,(u_2)_{xy} + (\lambda+\mu)\,(u_3)_{xz} & \\
+\mu\,(u_1)_{yy} + \mu\,(u_1)_{zz} &= 0 \\
\Delta_2 \equiv (\lambda+\mu)\,(u_3)_{yz} + (\lambda+\mu)\,(u_1)_{xy} + (\lambda+2\,\mu)\,(u_2)_{yy} & \\
+\mu\,(u_2)_{xx} + \mu\,(u_2)_{zz} &= 0 \\
\Delta_3 \equiv (\lambda+\mu)\,(u_1)_{xz} + (\lambda+\mu)\,(u_2)_{yz} + (\lambda+2\,\mu)\,(u_3)_{zz} & \\
+\mu\,(u_3)_{yy} + \mu\,(u3)_{xx} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

onde $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $(u_i)_x = \dfrac{\partial u_i}{\partial x}$, $i = 1, 2, 3$ (podendo ter qualquer outra variável independente no lugar de x). O sistema (2.11) é linear e de ordem 2 e pode ser identificado com a subvariedade em $X \times U^{(2)}$ determinada por

$$
\Delta_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.
$$

O objetivo deste texto é encontrar soluções invariantes para o sistema (2.11). Uma função é uma solução invariante do sistema se for invariante sob a ação de um grupo de Lie de transformações.

A determinação de soluções invariantes para (2.11) passa por várias etapas que são divididas em:

- Determinação de um grupo de simetria para o sistema (2.11);
- Determinação de funções invariantes sob a ação do grupo;
- Determinação de um sistema reduzido de equações diferenciais associado ao sistema (2.11).

Para determinar um grupo de simetria de um sistema de equações basta determinar os geradores infinitesimais que formam sua álgebra de Lie.

A vantagem deste fato é que, além do procedimento ser algorítmico, somos levados a resolver um sistema sobredeterminado de equações diferenciais lineares para a determinação dos geradores de transformações não necessariamente lineares. Ilustramos a seguir este procedimento, aplicando-o ao sistema (2.11).

Queremos determinar todos os geradores infinitesimais de simetria

$$V = \sum_{i=1}^{3}\left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \phi_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right)$$

que correspondem a um grupo a 1-parâmetro $exp(\varepsilon V)$ que seja um grupo de simetria do sistema. De acordo com o teorema 2.3.2, nós precisamos conhecer o segundo prolongamento de V

$$\begin{aligned} prv^{(2)}V &= V + \sum_{\alpha=1}^{3}\Bigg(\phi_\alpha^{(x)}\frac{\partial}{\partial(u_\alpha)_x} + \phi_\alpha^{(y)}\frac{\partial}{\partial(u_\alpha)_y} + \phi_\alpha^{(z)}\frac{\partial}{\partial(u_\alpha)_z} + \phi_\alpha^{(xx)}\frac{\partial}{\partial(u_\alpha)_{xx}} \\ &+ \phi_\alpha^{(xy)}\frac{\partial}{\partial(u_\alpha)_{xy}} + \phi_\alpha^{(xz)}\frac{\partial}{\partial(u_\alpha)_{xz}} + \phi_\alpha^{(yy)}\frac{\partial}{\partial(u_\alpha)_{yy}} + \phi_\alpha^{(yz)}\frac{\partial}{\partial(u_\alpha)_{yz}} \\ &+ \phi_\alpha^{(zz)}\frac{\partial}{\partial(u_\alpha)_{zz}}\Bigg). \end{aligned}$$

Aplicando $pr^{(2)}V$ nas equações do sistema teremos:

$$\begin{aligned} pr^{(2)}V(\Delta_1) &= (\lambda+2\mu)\phi_1^{(xx)} + (\lambda+\mu)\phi_2^{(xy)} + (\lambda+\mu)\phi_3^{(xz)} + \mu\phi_1^{(yy)} + \mu\phi_1^{(zz)} \\ pr^{(2)}V(\Delta_2) &= (\mu+\lambda)\phi_1^{(xy)} + \mu\phi_2^{(xx)} + (\lambda+2\mu)\phi_2^{(yy)} + (\lambda+\mu)\phi_3^{(yz)} + \mu\phi_2^{(zz)} \\ prv^{(2)}V(\Delta_3) &= (\mu+\lambda)\phi_1^{(xz)} + \mu\phi_3^{(xx)} + (\mu+\lambda)\phi_2^{(yz)} + \mu\phi_3^{(yy)} + (\lambda+2\mu)\phi_3^{(zz)}. \end{aligned}$$

Cada função coeficiente, como $\phi_1^{(xx)}$, deve ser calculada de acordo com o teorema 2.3.3 e suas respectivas fórmulas devem ser substituídas nas expessões acima.

Como devemos ter $pr^{(2)}V(\Delta_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, nas soluções do sistema, escolhemos isolar $(u_1)_{zz}$, $(u_2)_{zz}$ e $(u_3)_{zz}$ nas equações Δ_i, $i = 1, 2, 3$, obtendo

$$
\begin{aligned}
(u_1)_{zz} &= \frac{-(\lambda+2\mu)(u_1)_{xx} - (\lambda+\mu)(u_2)_{xy} - (\lambda+\mu)(u_3)_{xz} - \mu(u_1)_{yy}}{\mu} \\
(u_2)_{zz} &= \frac{-(\lambda+\mu)(u_3)_{yz} - (\lambda+\mu)(u_1)_{xy} - (\lambda+2\mu)(u_2)_{yy} - \mu(u_2)_{xx}}{\mu} \\
(u_3)_{zz} &= \frac{-(\lambda+\mu)(u_1)_{xz} - \mu(u_3)_{xx} - (\lambda+\mu)(u_2)_{yz} - \mu(u_3)_{yy}}{\lambda+2\mu}.
\end{aligned}
$$

A substituição destes resultados (e suas conseqüências diferenciais se necessário) em $pr^{(2)}V(\Delta_i)$, nos permite obter ξ^i e ϕ_i.

Para tanto, igualamos a zero os vários coeficientes dos monômios das derivadas parciais de primeira e segunda ordens de u_i, $i = 1, 2, 3$, pois os coeficientes são funções que só dependem de (x, y, z, u_1, u_2, u_3), obtendo um sistema a ser resolvido, num total de 464 equações diferenciais. A resolução de um tal sistema é impraticável sem a utilização dos recursos da computação algébrica. Para efetuar o trabalho de resolução deste sistema criamos várias rotinas no manipulador algébrico Maple (Ver CD anexo).

A resolução do sistema fornece os seguintes geradores infinitesimais que formam uma álgebra de Lie de dimensão 8:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$V_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$V_3 = -\frac{\partial}{\partial z}$$

$$V_4 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u_2}$$

$$V_5 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} + u_3\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$V_6 = u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + u_3\frac{\partial}{\partial u_3}$$

$$V_7 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{(3\,\mu + \lambda)}{\lambda + \mu}\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + u_3\frac{\partial}{\partial u_3}\right)$$

$$V_8 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + u_3\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial u_3}.$$

No próximo capítulo desenvolveremos os procedimentos necessários à determinação de soluções invariantes. Utilizaremos os geradores infinitesimais encontrados acima para construir sub-álgebras de dimensão dois e encontrar seus respectivos invariantes diferenciais. Estes invariantes serão usados em seguida para a determinação das soluções desejadas.

Capítulo 3

Soluções Invariantes

Invariantes e Dependência Funcional

Definição 3.0.1 *Sejam $\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x)$ funções suaves definidas de uma variedade M em $\mathbb{R}$.*

1. *$\zeta^1, \cdots, \zeta^k$ são ditas funcionalmente dependentes se, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança U de x e uma função suave $F(z^1, \cdots, z^k)$ não identicamente nula em qualquer subconjunto aberto de $\mathbb{R}^k$, tal que*

$$F(\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x)) = 0$$

   para todo $x \in U$.

2. *$\zeta^1, \cdots, \zeta^k$ são funcionalmente independentes se elas não são funcionalmente dependentes quando restritas a qualquer subconjunto aberto $U \subset M$.*

Teorema 3.0.1 *Seja $\zeta = (\zeta^1, \cdots, \zeta^k)$ funções suaves de M em $\mathbb{R}^k$. Então $\zeta^1(x), \cdots, \zeta^k(x)$ são funcionalmente dependentes se, e somente se, $d\big(\zeta\big)_x$ tem posto estritamente menor que k para todo $x \in M$.*

Definição 3.0.2 *Seja G um grupo local de transformação agindo em M.*

1. *O grupo G age semi-regularmente se todas as órbitas $\mathcal{O}$ são de mesma dimensão, enquanto subvariedades de M.*

2. *O grupo G age* <u>regularmente</u> *se a ação é semi-regular e para cada ponto $x \in M$, existe uma pequena vizinhança arbitrária U de x com a propriedade de que cada órbita de G intersecta U em um subconjunto conexo por caminhos.*

Definição 3.0.3 *Seja G um grupo local de transformações agindo em uma variedade M. Uma função $F : M \to N$, onde N é outra variedade, é chamada função G-invariante se, para todo $x \in M$ e todo $g \in G$ tal que $g \cdot x$ esteja definido, $F(g \cdot x) = F(x)$. Se $N = \mathbb{R}$, então F será chamada simplesmente de invariante.*

Teorema 3.0.2 *Deixe G agir semi-regularmente em uma variedade M (de dimensão m) com órbitas de dimensão s. Se $x_0 \in M$, então existem precisamente $m - s$ funções $\zeta^1(x), \cdots, \zeta^{m-s}(x)$ localmente invariantes e funcionalmente independentes definidas em uma vizinhança de x_0. Além disso, qualquer outra função invariante pela ação do grupo definida na vizinhança de x_0 é da forma $\zeta(x) = F(\zeta^1(x), \cdots, \zeta^{m-s}(x))$ para alguma função suave F. Se a ação de G é regular, então as funções invariantes podem ser globalmente invariantes na vizinhança de x_0.*

Proposição 3.0.1 *Deixe G agir semi-regularmente em M e seja $\zeta^1(x), \cdots, \zeta^{m-s}(x)$ um conjunto completo de invariantes funcionalmente independentes definidos em um subconjunto aberto $W \subset M$. Se a subvariedade $\mathscr{S}_F = \{x \in M : F(x) = 0\}$ é G-invariante então, para cada solução $x_0 \in \mathscr{S}_F$, há uma vizinhança $\tilde{W} \subset W$ de x_0 e uma função G-invariante "equivalente" $\tilde{F}(x) = \tilde{F}(\zeta^1(x), \cdots, \zeta^{m-s}(x))$ em que o conjunto solução coincide com o de F em $\tilde{W}$:*

$$\mathscr{S}_F \cap \tilde{W} = \mathscr{S}_{\tilde{F}} \cap \tilde{W} = \{x \in \tilde{W} : \tilde{F}\big(\zeta^1(x), \cdots, \zeta^{m-s}(x)\big) = 0\}.$$

Métodos para Construção de Invariantes

Seja $V = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ um gerador infinitesimal de um grupo a 1-parâmetro G, que age em uma variedade M, dado em algum sistema de coordenadas. Um invariante local de G é uma solução da equação diferencial parcial homogênea de primeira ordem

$$V\big(\zeta\big)(x) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^i}(x) = 0. \tag{3.1}$$

O teorema 3.0.2 diz que se $V\big|_x \neq 0$, então existem $m-1$ invariantes funcionalmente independentes e, assim, $m-1$ soluções funcionalmente independentes da equação (3.1) na vizinhança de x_0.

A teoria clássica de tais equações (ver [4]) mostra que a solução geral de (3.1) pode ser encontrada integrando o correspondente sistema característico de equações diferenciais ordinárias, que é

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}. \tag{3.2}$$

As soluções de (3.2) têm a forma $\zeta^1(x^1, \ldots, x^m) = c_1, \cdots, \zeta^{m-1}(x^1, \cdots, x^m) = c_{m-1}$, em que $c_1, \cdots, c_{m-1}$ são as constantes de integração, e as $\zeta^i(x)$ são funções independentes dos c_j. É fácil ver que as funções $\zeta^1, \cdots, \zeta^{m-1}$ são soluções funcionalmente independentes de (3.1). Qualquer outra solução de (3.1) será necessariamente uma função de $\zeta^1, \cdots, \zeta^{m-1}$.

3.1 Construção das Soluções Invariantes

Definição 3.1.1 *Considere um sistema de equações diferenciais Δ definido sobre um subconjunto aberto $M \subset X \times U$ do espaço das variáveis independentes e dependentes. Seja G um grupo local de transformação agindo em M. Uma solução $u = f(x)$ do sistema é G-invariante se seu gráfico $\Gamma_f \equiv (x, f(x)) \subset M$ é um subconjuto localmente G-invariante de M.*

Se G é um grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais parciais Δ, então sob algumas hipóteses adicionais quanto à regularidade da ação de G, nós podemos encontrar todas as soluções G-invariantes para Δ através da solução de um sistema reduzido de equações diferenciais, denotado por Δ/G, que envolve um número menor de variáveis independentes que o sistema original.

Definição 3.1.2 *Seja G um grupo local de transformação agindo na variedade $M \subset X \times U$. Dizemos que G age projetavelmente em M se $(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Xi_g(x), \Phi_g(x, u))$, isto é, a mudança nas variáveis independentes não depende das variáveis dependentes.[5]*

Se um grupo é projetável, há uma ação induzida em um subconjunto aberto $\Omega \subset X$ tal que $\tilde{x} = g \cdot x = \Xi_g(x)$. Nós consideraremos hipóteses mais restritivas sobre a regularidade da ação de G em M e da ação induzida de G em Ω, exigindo que as órbitas de cada uma destas ações tenham dimensão igual a s, $s < p$, onde p é a dimensão do espaço das variáveis independentes. Sob estas hipóteses existem $p - s$ invariantes funcionalmente independentes $y^1 = \eta^1(x), \cdots, y^{p-s} = \eta^{p-s}(x)$ da ação induzida do grupo em $\Omega \subset X$. Cada uma destas funções é também um invariante da ação completa do grupo G em M. Assim precisamos encontrar somente mais q invariantes funcionalmente independentes da ação de G em M, da forma $v^1 = \zeta^1(x, u), \cdots, v^q = \zeta^q(x, u)$ para obter um conjunto completo de $(q + p - s)$ invariantes funcionalmente independentes para G em M. Nós escrevemos este conjunto completo de invariantes concisamente como

$$y = \eta(x), \qquad v = \zeta(x, u).$$

Na construção do sistema reduzido de equações diferenciais para determinar as soluções $G-$invariantes de Δ, as variáveis y farão o papel das novas variáveis independentes e as variáveis v, o papel das novas variáveis dependentes.

A idéia para se verificar que uma solução G-invariante é a solução do sistema reduzido vem de uma correspondência biunívoca entre soluções G-invariantes de Δ e soluções de Δ/G envolvendo as novas variáveis. Para explicar esta correspondência, nós começamos utilizando o *Teorema da Função Implícita* para resolver o sistema $y = \eta(x)$ para $p - s$ das variáveis independentes, digamos $\tilde{x} = (x^{i_1}, \cdots, x^{i_{p-s}})$, em termos das novas variáveis $y^1, \cdots, y^{p-s}$ e as s variáveis independentes restantes, denotadas como $\hat{x} = (x^{j_1}, \cdots, x^{j_s})$. Assim, nós temos a solução $\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y)$ para alguma função bem definida γ. As $p - s$ variáveis independentes antigas $\tilde{x}$ são chamadas de variáveis principais e as s variáveis restantes são chamadas de variáveis paramétricas. A escolha das variáveis paramétricas e principais depende da existência de uma matriz $(\partial\eta^j/\partial\tilde{x}^i)$ invertível do tipo $(p-s)\times(p-s)$ obtida da matriz completa $\partial\eta^j/\partial x$ de modo a aplicar o teorema da função implícita. Caso contrário, a escolha é inteiramente arbitrária. Nós precisamos levantar a hipótese de que o posto da matriz $(\partial\eta^i/\partial u^\beta, \partial\zeta^\alpha/\partial u^\beta)^T$ seja igual a q, para podermos resolver o outro sistema de invariantes $v = \zeta(x, u)$ para todas as variáveis dependentes $u^1, \cdots, u^q$ em termos de $x^1, \cdots, x^p$, $v^1, \cdots, v^q$, e daí em termos das novas variáveis y, v e as variáveis paramétricas $\hat{x}$:

$$u = \tilde{\delta}(x, v) = \tilde{\delta}\big(\hat{x}, \gamma(\hat{x}, y), v\big) \equiv \delta(\hat{x}, y, v)$$

na vizinhança de qualquer ponto $(x_0, u_0) \in M$.

Se $v = h(y)$ é qualquer função suave, então as expressões acima, juntamente com as que definem y e v, produzem uma função G-invariante correspondente em M, da forma

$$u = f(x) = \delta\Big(\hat{x}, \eta(x), h\big(\eta(x)\big)\Big). \tag{3.3}$$

Inversamente, se $u = f(x)$ é qualquer função G-invariante em M, então não é tão difícil ver que existe necessariamente uma função $v = h(y)$ tal que f e a correspondente função (3.3) sejam localmente iguais. Assim nós vimos como a G-invariância das funções serve para diminuir o número de variáveis dependentes (Ver seções 3.4 e 3.5 de [5]).

Exemplo: Para exemplificar o funcionamento do processo de diminuição da quantidade de variáveis, escolhemos os geradores infinitesimais $V_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ e $V_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$ para serem os geradores do grupo a dois parâmetros H_1.

Primeiro, procuramos um conjunto completo de invariantes (observando que a ação de H_1 é projetável) ou seja, procuramos funções funcionalmente independentes que satisfaçam $V_i(f)(x, y, z, u_1, u_2, u_3) = 0$, $i = 1, 2$. Vemos que $w = z$, $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$ e $v_3 = u_3$ formam um conjunto completo de invariantes. Deste modo, para encontrarmos as soluções H_1-invariantes para o sistema (2.11), teremos:

$$(u_i)_z = (v_i)_w, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$(u_i)_{zz} = (v_i)_{ww}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Como queremos encontrar soluções G-invariantes, as demais derivadas de u_i, $i = 1, 2, 3$ serão todas nulas devido à independência de w com relação às variáveis x, y.

Substituindo estes resultados no sistema (2.11) obtemos o sistema:

$$\mu(v_1)_{ww} = 0$$

$$\mu(v_2)_{ww} = 0$$

$$\lambda(v_3)_{ww} = 0$$

que possui solução

$$v_i = a_i w + b_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Voltando às variáveis originais, temos

$$u_i = a_i z + b_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

que é uma solução H_1-invariante do sistema.

O processo para encontrar as soluções invariantes sob um certo grupo é algorítmico e segue os passos:

1. Encontre todos os geradores infinitesimais V do grupo de simetria do sistema.

2. Decida-se sobre o "grau de simetria" s das soluções invariantes. Aqui $1 \leq s \leq p$ corresponderá à dimensão das órbitas de algum subgrupo do grupo completo de simetria. O sistema reduzido dependerá de $p-s$ variáveis independentes. Assim, para reduzir o sistema de equações diferenciais parciais a um sistema de equações diferenciais ordinárias, nós precisamos escolher $s = p - 1$.

3. Encontre todos os subgrupos G de dimensão s do grupo de simetria completo encontrado na parte 1. Isto é equivalente a encontrar todas as sub-álgebras de dimensão s da álgebra de Lie completa das simetrias infinitesimais V. Para cada tal subgrupo ou sub-álgebra haverá um conjunto de soluções invariantes pelo grupo refletindo as simetrias inerentes no próprio G.

4. Fixando o grupo de simetria G, nós encontramos um conjunto completo de invariantes funcionalmente independentes que nós dividimos em duas classes

$$y^1 = \eta^1(x,u), \cdots, y^{p-s} = \eta^{p-s}(x,u)$$

$$v^1 = \zeta^1(x,y), \cdots, v^q = \zeta^q(x,u),$$

correspondendo às novas variáveis independentes e dependentes, respectivamente. Se G age projetavelmente, a escolha das variáveis independentes e dependentes é determinada de modo preciso pelo fato dos η^i's serem independentes de u. No caso mais geral, há muita liberdade na escolha e escolhas diferentes conduzirão a sistemas reduzidos aparentemente diferentes, mas todos estão relacionados por alguma forma de transformação "hodográfica"[1].

Como nosso interesse está em resolver o sistema (2.11), que possui três variáveis independentes, queremos encontrar sub-álgebras de dimensão 2. A tabela abaixo irá auxiliar nesta pesquisa de sub-álgebras de dimensão 2.

[1]Transformação caracterizada pela mudança na ordem das variáveis

$[V_i, V_j]$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
V_1	0	0	0	V_2	0	0	V_1	V_3
V_2	0	0	0	$-V_1$	V_3	0	V_2	0
V_3	0	0	0	0	$-V_2$	0	V_3	$-V_1$
V_4	$-V_2$	V_1	0	0	V_8	0	0	$-V_5$
V_5	0	$-V_3$	V_2	$-V_8$	0	0	0	V_4
V_6	0	0	0	0	0	0	0	0
V_7	$-V_1$	$-V_2$	$-V_3$	0	0	0	0	0
V_8	$-V_3$	0	V_1	V_5	$-V_4$	0	0	0

3.2 Classificação de Soluções Invariantes

Proposição 3.2.1 *Seja G um grupo de simetria de um sistema de equações diferenciais Δ e seja H um subgrupo a s-parâmetros. Se $u = f(x)$ é uma solução H-invariante para Δ e $g \in G$ é qualquer outro elemento do grupo, então a função transformada $\tilde{u} = \tilde{f}(x) = g \cdot f(x)$ é uma solução $\tilde{H}$-invariante, onde $\tilde{H} = gHg^{-1}$ é o subgrupo conjugado a H sob g.*

Proposição 3.2.2 *Sejam H e $\tilde{H}$ subgrupos conexos de dimensão s do grupo de Lie G, com correspondentes sub-álgebras de Lie $\mathfrak{h}$ e $\tilde{\mathfrak{h}}$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Então $\tilde{H} = g \cdot H \cdot g^{-1}$ (H e $\tilde{H}$ são subgrupos conjugados) se, e somente se, $\tilde{\mathfrak{h}} = Ad(g)(\mathfrak{h})$ ($\tilde{\mathfrak{h}}$ e $\mathfrak{h}$ são sub-álgebras conjugadas).*

A demonstração segue diretamente da definição e da unicidade do subgrupo conexo dada a sub-álgebra correspondente.

Definição 3.2.1 *Seja G um grupo de Lie. Um sistema ótimo de subgrupos a s-parâmetros é uma lista de subgrupos a s-parâmetros não equivalentes por conjugação com a propriedade de que qualquer subgrupo a s-parâmetros é conjugado a, precisamente, um subgrupo nesta lista. Similarmente, uma lista de sub-álgebras de dimensão s forma um sistema ótimo se cada sub-álgebra de $\mathfrak{g}$ com dimensão s equivale a um único membro da lista sob algum elemento da representação adjunta: $\tilde{\mathfrak{h}} = Ad(g)\big(\mathfrak{h}\big)$, $g \in G$.*

De acordo com a proposição 3.2.2 a determinação de um sistema ótimo de subgrupos é equivalente à determinação de um sistema ótimo de sub-álgebras. Sendo assim, nos concentraremos agora nas sub-álgebras.

Definição 3.2.2 *Um sistema ótimo de soluções de um sistema de equações diferenciais, invariantes por subgrupos a s-parâmetros é uma coleção de soluções* $u = f(x)$ *com as seguintes propriedades:*

1. *Cada solução na lista é invariante sob algum subgrupo de simetria a s-parâmetros do sistema de equações diferenciais.*

2. *Se* $u = \tilde{f}(x)$ *é qualquer outra solução invariante sob um subgrupo de simetria a s-parâmetros, então há uma nova simetria* g *do sistema que leva* $\tilde{f}$ *em uma solução* $f = g \cdot \tilde{f}$ *na lista.*

Proposição 3.2.3 *Seja* G *o grupo completo de simetrias do sistema de equações diferenciais parciais* Δ*. Seja* $\{H_\alpha\}$ *um sistema ótimo de subgrupos a s-parâmetros do grupo* G*. Então, a coleção de todas as soluções* H_α*-invariantes, para* H_α *no sistema ótimo, forma um sistema ótimo de soluções do sistema* Δ *invariantes pelos subgrupos a s-parâmetros.*

A prova segue da proposição 3.2.1.

De acordo com estes resultados, vemos que para encontrar um sistema ótimo de soluções invariantes pelos subgrupos a 2-parâmetros para o sistema de equações (2.11), basta encontrar as soluções dadas pelo sistema ótimo de sub-álgebras de dimensão 2.

A tabela abaixo nos ajudará a verificar se uma álgebra de dimensão 2 é adjunta a outra. Esta tabela foi construida a partir da expressão (2.1)

$$Ad\big(exp(tX)\big)(Y) = Y - t[X,Y] + \frac{t^2}{2}[X,[X,Y]] - \cdots .$$

Ad	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	V_1	V_2	V_3	$V_4 - \varepsilon V_2$
V_2	V_1	V_2	V_3	$V_4 + \varepsilon V_1$
V_3	V_1	V_2	V_3	V_4
V_4	$cos(\varepsilon)V_1 + sen(\varepsilon)V_2$	$cos(\varepsilon)V_2 - sen(\varepsilon)V_1$	V_3	V_4
V_5	V_1	$cos(\varepsilon)V_2 + sen(\varepsilon)V_3$	$cos(\varepsilon)V_3 - sen(\varepsilon)V_2$	$cos(\varepsilon)V_4 + sen(\varepsilon)V_8$
V_6	V_1	V_2	V_3	V_4
V_7	$e^{\varepsilon}V_1$	$e^{\varepsilon}V_2$	$e^{\varepsilon}V_3$	V_4
V_8	$cos(\varepsilon)V_1 + sen(\varepsilon)V_3$	V_2	$cos(\varepsilon)V_3 - sen(\varepsilon)V_1$	$cos(\varepsilon)V_4 - sen(\varepsilon)V_5$

Ad	V_5	V_6	V_7	V_8
V_1	V_5	V_6	$V_7 - \varepsilon V_1$	$V_8 - \varepsilon V_3$
V_2	$V_5 - \varepsilon V_3$	V_6	$V_7 - \varepsilon V_2$	V_8
V_3	$V_5 + \varepsilon V_2$	V_6	$V_7 - \varepsilon V_3$	$V_8 + \varepsilon V_1$
V_4	$cos(\varepsilon)V_5 - sen(\varepsilon)V_8$	V_6	V_7	$cos(\varepsilon)V_8 + sen(\varepsilon)V_5$.
V_5	V_5	V_6	V_7	$cos(\varepsilon)V_8 - sen(\varepsilon)V_4$
V_6	V_5	V_6	V_7	V_8
V_7	V_5	V_6	V_7	V_8
V_8	$cos(\varepsilon)V_5 + sen(\varepsilon)V_4$	V_6	V_7	V_8

Na tabela anterior, cada elemento da linha ocupada pelo vetor V_i e coluna ocupada pelo vetor V_j é o resultado de $Ad\big(exp(\varepsilon V_i)\big)(V_j)$.

Como $Ad(g \cdot g') = Ad(g) \circ Ad(g')$ e todo elemento $g \in G$ é o produto de exponenciais dos múltiplos reais dos geradores infinitesimais, podemos usar a tabela acima para aplicar a representação adjunta do grupo G e descobrir quando uma álgebra é adjunta de outra.

Definimos a seguinte relação de equivalência entre sub-ágebras com dimensão 2 de $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{h}$ é equivalente $\tilde{\mathfrak{h}}$ se, e somente se, existe um $g \in G$ tal que $\tilde{\mathfrak{h}} = Ad(g)(\mathfrak{h})$. Deste modo, encontrar um sistema ótimo de sub-álgebras de dimensão 2 de $\mathfrak{g}$ se resume a encontrar o conjunto das classes de equivalência da relação anterior e usar um representante de cada classe para compor o sistema ótimo.

Nosso objetivo, inicialmente, era encontrar um sistema ótimo de soluções invariantes pelos subgrupos a 2-parâmetros. No entanto, por questão de tempo, não determinaremos um sistema ótimo de sub-álgebras com dimensão 2 e nos restringiremos a sub-álgebras de dimensão dois geradas apenas por pares de geradores.

O que será feito nesta dissertação pode ser ilustrado da seguinte maneira: no exemplo dado na seção 3.1, nós encontramos uma solução invariante pelo subgrupo formado pelos geradores infinitesimais V_1 e V_2. Como a sub-álgebra gerada por $\{V_1, V_3\}$ é adjunta da sub-álgebra gerada por $\{V_1, V_2\}$ não procuraremos soluções que sejam invariantes pelo subgrupo formado pelos geradores infinitesimais V_1 e V_3, pois se f é uma solução invariante pelo subgrupo formado por V_1 e V_2, então $exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot V_5\right) \cdot f$ é uma solução invariante pelo subgrupo formado por V_1 e V_3.

Se $\langle V_i, V_j \rangle$ é a sub-álgebra gerada por $\{V_i, V_j\}$, o conjunto

$$\mathscr{A} = \{\langle V_1; V_2\rangle, \langle V_1; V_5\rangle, \langle V_1; V_6\rangle, \langle V_1; \bar{V}_7\rangle, \langle V_5; \bar{V}_7\rangle, \langle V_6; \bar{V}_7\rangle, \langle V_6; V_8\rangle\},$$

onde $\bar{V}_7 = V_7 - \dfrac{3\mu + \lambda}{\lambda + \mu} V_6$, é tal que dois quaisquer de seus elementos não são conjugados um do outro[2]. Neste caso usaremos apenas as sub-álgebras pertencentes ao conjunto $\mathscr{A}$ para encontrarmos nossas soluções invariantes por subgrupos a 2 parâmetros.

[2]O conjunto $\mathscr{A}$ é um subconjunto do sistema ótimo de sub-álgebras de dimensão 2

3.2.1 Encontrando as Soluções Invariantes

1. **Soluções invariantes por** $\langle V_1; V_5\rangle$, $V_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ e $V_5 = z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z} + u_3\dfrac{\partial}{\partial u_2} - u_2\dfrac{\partial}{\partial u_3}$.

   Um conjunto completo de invariantes para V_1 e V_5 é formado por:

$$\begin{aligned} V &= u_1 \\ W &= -\frac{-u_2\, z + y u_3}{u_3\, z + u_2\, y} \\ R &= \sqrt{{u_2}^2 + {u_3}^2} \\ r &= \sqrt{y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

   Resolvendo este sistema para u_1, u_2 e u_3 em função dos invariantes, podendo deixar as variáveis y e z como variáveis paramétricas, teremos:

$$\begin{aligned} u_1 &= V \\ u_2 &= -\frac{R\,(Wz + y)}{\sqrt{r^2\,(1 + W^2)}} \\ u_3 &= \frac{R\,(Wy - z)}{\sqrt{r^2\,(1 + W^2)}}. \end{aligned}$$

   De acordo com a exposição teórica escolheremos como nova variável independente o invariante $r = r(y,z)$, ou seja, todos os invariantes devem ser função de r. Deste modo teremos $V = V(r)$, $W = W(r)$ e $R = R(r)$.

   Explicitando-se todas as relações de dependência funcional e substituindo u_1, u_2 e u_3 nas equações (2.11) e usando a expressão $r^2 = y^2 + z^2$ para algumas simplificações, o sistema se transformará em:

$$0 = \mu r^2 \frac{d}{dr}\big(rV_r\big)$$

$$
\begin{aligned}
0 &= r^2\,(\lambda+2\,\mu)\,(2\,RW^2 + r^2RWW_{rr} + 2\,r^2\,R_r\,WW_r + 2r^2\,R_r\,W^3W_r \\
&- 2\,r^2\,R_{rr}W^2 - rR_rW^4 - r^2R_{rr} + r^2RW_r{}^2 - rR_r + RW^4 + rRW^3W_r \\
&+ rRWW_r + r^2RW^3W_{rr} - 2r^2\,RW^2W_r{}^2 - 2\,r\,R_rW^2 - r^2R_{rr}W^4 + R\big)\,y \\
&- r^2\mu\,\big(Rr^2W_{rr}\,W^2 + 2r^2\,R_r\,W_r\,W^2 - 3r^2\,RWW_r{}^2 + r^2RW_{rr} + r^2R_{rr}W^5 \\
&+ 2\,r^2\,R_rW_r + 2\,r^2\,R_{rr}W^3 + r^2R_{rr}W + rRW_r\,W^2 + rR_r\,W^5 + rR_r\,W \\
&- RW^5 - 2\,RW^3 - RW + 2\,rR_r\,W^3 + rRW_r)\,z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= r^2\mu\,\big(r^2RW_{rr}\,W^2 + 2\,r^2\,R_rW_r\,W^2 - 3r^2\,RWW_r{}^2 + r^2RW_{rr} + r^2R_{rr}W^5 \\
&+ 2\,r^2\,R_rW_r + 2\,r^2\,R_{rr}W^3 + r^2R_{rr}W + rRW_r\,W^2 + rR_r\,W^5 + rR_r\,W \\
&- RW^5 - 2\,RW^3 - RW + 2\,rR_r\,W^3 + rRW_r)\,y + r^2\,(\lambda+2\,\mu)\,(2\,RW^2 \\
&+ RWW_{rr}\,r^2 + 2\,R_r\,WW_r\,r^2 + 2\,R_r\,W^3W_r\,r^2 - 2\,R_{rr}\,r^2W^2 - R_r\,rW^4 \\
&- R_{rr}\,r^2 + RW_r{}^2r^2 - R_r\,r + RW^4 + RW^3W_r\,r + RWW_r\,r + RW^3W_{rr}\,r^2 \\
&- 2\,RW^2W_r{}^2r^2 - 2\,R_r\,rW^2 - R_{rr}\,r^2W^4 + R\big)\,z
\end{aligned}
$$

onde R_r, W_r, R_{rr} e W_{rr} são as derivadas primeiras e segundas de R e W com relação a r.

Observamos que a primeira destas três equações é uma equação diferencial ordinária para $V(r)$. As outras duas equações são do tipo $0 = Ay - Bz$ e $0 = By + Az$, onde A e B são funções de W e R e de suas derivadas até a ordem dois. Ao eliminarmos as variáveis paramétricas (y e z) nas outras duas equações temos a formação do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para $W(r)$ e $R(r)$:

$$
\begin{aligned}
0 &= r^2\mu\,(r^2RW^2 + r^2R)\,W_{rr} + r^2\mu\,(2\,r^2W^3 + r^2W + r^2W^5)\,R_{rr} \\
&- 3\,r^4\mu\,RWW_r{}^2 + r^2\mu\,(2\,r^2 + 2\,r^2W^2)\,R_r\,W_r + r^2\mu\,(rRW^2 + rR)\,W_r \\
&+ r^2\mu\,(2\,rW^3 + rW + rW^5)\,R_r + r^2\mu\,(-RW - RW^5 - 2\,RW^3)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
0 &= (\lambda+2\,\mu)\,[r^2\,(r^2RW^3 + r^2RW)\,Wrr + r^2\,(-r^2W^4 - 2\,r^2W^2 - r^2)\,Rrr \\
&+ r^2\,(-2r^2\,RW^2 + r^2R)\,Wr^2 + r^2\,(2\,r^2W + 2\,r^2W^3)\,Rr\,Wr \\
&+ r^2\,(rRW^3 + RWr)\,Wr + r^2\,(-2\,rW^2 - r - rW^4)\,Rr + r^2\,(2\,RW^2 + RW^4 + R)]\,.
\end{aligned}
$$

Resolvendo a equação diferencial para $V(r)$ temos:

$$V(r) = C_1 ln(r) + C_2,$$

com C_1 e C_2 constantes reais.

Deste modo

$$u_1(x, y, z) = C_1 ln(\sqrt{z^2 + y^2}) + C_2$$

Para resolver o sistema para W e R pode-se isolar $\dfrac{R_r}{R}$ e $\dfrac{R_{rr}}{R}$ nas duas equações, de modo a obter:

$$\frac{R_r}{R} = \frac{-r\,(W^2+1)\,W_{rr} + 2r\,WW_r{}^2 + (-W^2-1)\,W_r}{2\,(W^2+1)\,Wr\,r} \tag{3.4}$$

e

$$\frac{R_{rr}}{R} = \frac{r\,(W^2+1)^2\,W_{rr} + 2r^2\,W_r{}^3 - 2\,rW\,(W^2+1)\,W_r{}^2 + 3\,(W^2+1)^2\,W_r}{2r^2\,(W^2+1)^2\,W_r}. \tag{3.5}$$

Derivando a equação (3.4) com relação a r, temos:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{R_r}{R}\right) = \frac{R_{rr}}{R} + \left(\frac{R_r}{R}\right)^2.$$

Substituindo, nesta última equação, as equações (3.4) e (3.5) e simplificando chega-se a:

$$3\,W_r{}^2 - 3\,r^2 W_{rr}{}^2 + 2\,r^2\,W_r W_{rrr} = 0.$$

Resolvendo a equação acima e desconsiderando soluções constantes obtemos:

$$W\,(r) = \frac{C_3 r^2 + C_4}{C_5 r^2 + C_6}, \quad \text{onde} \;\; C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R} \text{ e } C_6 = \frac{C_4 C_5}{C_3 - 8},$$

para o caso onde $C_3 \neq 8$ e,

$$W\,(r) = \frac{8r^2}{C_5 r^2 + C_6}, \text{ onde } \;\; C_5, C_6 \in \mathbb{R}^*,$$

para o caso onde $C_3 = 8$.

Levando-se em conta que $C_4 = 0$ para $C_3 = 8$, podemos escrever:

$$R(r) = \frac{C_7\sqrt{\left(C_3r^2 + C_4\right)^2 + \left(C_5r^2 + C_6\right)^2}}{r},$$

onde $C_7 \in \mathbb{R}$.

Substituindo estes resultados nas equações que definem u_2 e u_3 em função dos invariantes teremos:

$$\begin{aligned} u_2(x,y,z) &= -C_7\left(C_3z + C_5y + \frac{C_4z + C_6y}{z^2+y^2}\right) \\ u_3(x,y,z) &= C_7\left(C_3y - C_5z + \frac{C_4y - C_6z}{z^2+y^2}\right), \end{aligned}$$

nos dando assim uma solução particular para o sistema que é invariante pela álgebra $\langle V_1; V_5\rangle$, ou seja, estas soluções não se alteram (são invariantes) após translações com relação ao eixo Ox e rotações no plano yOz.

2. Soluções Invariantes por $\langle V_1; V_6\rangle$ (os grupos correspondentes são uma translação com relação ao eixo Ox, $V_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, e uma transformação de escala em todas as variáveis dependentes, $V_6 = u_1\dfrac{\partial}{\partial u_1} + u_2\dfrac{\partial}{\partial u_2} + u_3\dfrac{\partial}{\partial u_3}$). Apesar da ação ser projetável, de acordo com a definição 3.1.2, as órbitas da ação induzida não têm dimensão dois como queremos, pois $exp\big(\varepsilon V_6\big)\cdot(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \big(\mathbf{x}, \varepsilon\mathbf{u}\big)$, onde $\mathbf{x} = (x,y,z)$ e $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$. Um dos problemas que surge quando a órbita induzida não tem dimensão dois é a perda do critério de escolha para o invariante que será a variável independente.

   Para esta álgebra o conjunto completo de invariantes é formado por:

$$\eta_1 = y,$$

$$\eta_2 = z,$$

$$\eta_3 = \frac{u_2}{u_1}$$

e

$$\eta_4 = \frac{u_3}{u_1},$$

não existindo uma sub-matriz $\left(\partial\eta_{\alpha_i}/\partial u_i\right)$, com $i = 1, 2, 3$ e $\alpha_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, que tenha posto 3, o que torna impossível expressar u_i em função dos invariantes.

Por todos estes motivos não temos possibilidades de construir soluções invariantes por $\langle V_1; V_6 \rangle$.

Pelos mesmos motivos não temos soluções invariantes para $\left\langle V_6; \bar{V}_7 \right\rangle$ e $\langle V_6; V_8 \rangle$.

3. Soluções invariantes por $\left\langle V_1; \bar{V}_7 \right\rangle$: $\bar{V}_7 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ e $V_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$.
   Um conjunto completo de invariantes para V_1 e $\bar{V}_7$ é:

$$t = \frac{z}{y},$$

$$\eta_1 = u_1,$$

$$\eta_2 = u_2,$$

$$\eta_3 = u_3.$$

Ao resolvermos o sistema para u_1, u_2 e u_3 em termos dos invariantes teremos $u_i = \eta_i$, com $i = 1, 2, 3$. Escolhemos o invariante t como variável independente, levando a $\eta_i = \eta_i(t)$. Substituindo estes resultados nas equações (2.11) e simplificando obtemos o seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
0 &= (t^2+1)\frac{d^2}{dt^2}\eta_1(t) + 2t\,\frac{d}{dt}\eta_1(t)\\[2ex]
0 &= \big[(\lambda+2\mu)t^2+\mu\big]\frac{d^2}{dt^2}\eta_2(t) - (\lambda+\mu)t\frac{d^2}{dt^2}\eta_3(t) + 2(\lambda+2\mu)t\frac{d}{dt}\eta_2(t)\\
&- (\lambda+\mu)\frac{d}{dt}\eta_3(t)\\[2ex]
0 &= -(\lambda+\mu)t\frac{d^2}{dt^2}\eta_2(t) + \big(\mu t^2+\lambda+2\mu\big)\frac{d^2}{dt^2}\eta_3(t) - (\lambda+\mu)\frac{d}{dt}\eta_2(t)\\
&+ 2\mu t\frac{d}{dt}\eta_3(t).
\end{aligned}
$$

Pode-se notar que a primeira equação é uma equação diferencial desacoplada do sistema e pode ser resolvida de imediato nos dando:

$$\eta_1(t) = C_1 + \arctan(t)\,C_2,$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.
Resolvendo as outras duas equações para $\frac{d}{dt}\eta_3(t)$ e $\frac{d^2}{dt^2}\eta_3(t)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\eta_3(t) &= -\left(\frac{(\lambda\,\mu+2\,\mu^2)\,t^4+(4\,\mu^2+2\,\lambda\,\mu)\,t^2+\lambda\,\mu+2\,\mu^2}{(\mu^2+\lambda\,\mu)\,t^2-2\,\mu^2-\lambda^2-3\,\lambda\,\mu}\right)\frac{d^2}{dt^2}\eta_2(t)\\[2ex]
&-\left(\frac{(4\,\mu^2+2\,\lambda\,\mu)\,t^3+(\lambda^2+6\,\lambda\,\mu+7\,\mu^2)\,t}{(\mu^2+\lambda\,\mu)\,t^2-2\,\mu^2-\lambda^2-3\,\lambda\,\mu}\right)\frac{d}{dt}\eta_2(t)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\eta_3(t) &= \left(\frac{(4\,\mu^2+2\,\lambda\,\mu)\,t^3+(\mu^2-\lambda^2-2\,\lambda\,\mu)\,t}{(\mu^2+\lambda\,\mu)\,t^2-2\,\mu^2-\lambda^2-3\,\lambda\,\mu}\right)\frac{d^2}{dt^2}\eta_2(t)\\[2ex]
&+\left(\frac{(4\,\lambda\,\mu+8\,\mu^2)\,t^2-\lambda^2-2\,\lambda\,\mu-\mu^2}{(\mu^2+\lambda\,\mu)\,t^2-2\,\mu^2-\lambda^2-3\,\lambda\,\mu}\right)\frac{d}{dt}\eta_2(t)\,.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Derivando (3.6) e igualando com (3.7), chega-se à seguinte equação diferencial ordinária:

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big[(2\,\mu^2+\lambda\,\mu)\,t^6+(-2\,\lambda\,\mu-\lambda^2)\,t^4+(-2\,\lambda^2-7\,\lambda\,\mu-6\,\mu^2)\,t^2-4\,\lambda\,\mu \\
&- \lambda^2-4\,\mu^2\Big]\frac{d^3}{dt^3}\eta_2\,(t)+\Big[(6\,\lambda\,\mu+12\,\mu^2)\,t^5+(-8\,\lambda^2-28\,\lambda\,\mu-24\,\mu^2)\,t^3 \\
&+ (-36\,\mu^2-34\,\lambda\,\mu-8\,\lambda^2)\,t\Big]\frac{d^2}{dt^2}\eta_2\,(t)+\Big[(6\,\lambda\,\mu+12\,\mu^2)\,t^4+(-48\,\mu^2 \\
&- 48\,\lambda\,\mu-12\,\lambda^2)\,t^2-14\,\lambda\,\mu-12\,\mu^2-4\,\lambda^2\Big]\frac{d}{dt}\eta_2\,(t)
\end{aligned}
$$

que tem como solução

$$
\eta_2(t)=\frac{C_5(\lambda+\mu)}{2\mu}\left[\arctan(t)+\left(\frac{t}{t^2+1}\right)\right]-\frac{C_4}{2}\left(\frac{1}{t^2+1}\right)+C_3
$$

onde C_3, C_4 e C_5 são constantes reais.

Substituindo este resultado em (3.6), e resolvendo a equação diferencial para $\eta_3(t)$ vem

$$
\eta_3(t)=\frac{C_4}{2}\left[\frac{(3\,\mu+\lambda)}{(\mu+\lambda)}\arctan\,(t)-\left(\frac{t}{t^2+1}\right)\right]-\frac{C_5(\mu+\lambda)}{2\mu}\left(\frac{1}{t^2+1}\right)+C_6,
$$

onde C_6 é uma constante real.

Retomando as variáveis originais tem-se:

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= C_1+\arctan\left(\frac{z}{y}\right)C_2 \\
u_2(x,y,z) &= \frac{C_5(\lambda+\mu)}{2\mu}\left[\arctan\left(\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{zy}{z^2+y^2}\right)\right] \\
&- \frac{C_4}{2}\left(\frac{y^2}{z^2+y^2}\right)+C_3 \\
u_3(x,y,z) &= \frac{C_4}{2}\left[\frac{(3\,\mu+\lambda)}{2(\mu+\lambda)}\arctan\left(\frac{z}{y}\right)-\left(\frac{zy}{z^2+y^2}\right)\right] \\
&- \frac{C_5(\mu+\lambda)}{2\mu}\left(\frac{y^2}{z^2+y^2}\right)+C_6,
\end{aligned}
$$

que é uma solução para o sistema (2.11), invariante sob $\langle V_1, \bar{V}_7 \rangle$.

4. Soluções invariantes por $\langle V_5, \bar{V}_7 \rangle$:$V_5 = z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z} + u_3\dfrac{\partial}{\partial u_2} - u_2\dfrac{\partial}{\partial u_3}$ e $\bar{V}_7 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$.

   Para esta álgebra o conjunto completo de invariantes não é obtido diretamente como nos casos anteriores, de modo que temos que fazer uma construção criteriosa de todos os invariantes.

   Os cinco invariantes para $\bar{V}_7 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$ são dados por:

$$t_1 = \frac{x}{y},$$

$$t_2 = \frac{z}{y},$$

$$\bar{u}_1 = u_1,$$

$$\bar{u}_2 = u_2,$$

$$\bar{u}_3 = u_3.$$

   O vetor equivalente a $V_5 = z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z} + u_3\dfrac{\partial}{\partial u_2} - u_2\dfrac{\partial}{\partial u_3}$, mas definido no espaço invariante sob $\bar{V}_7$ é dado por

$$V_5 = V_5(t_1)\frac{\partial}{\partial t_1} + V_5(t_2)\frac{\partial}{\partial t_2} + V_5(\bar{u}_1)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} + V_5(\bar{u}_2)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_2} + V_5(\bar{u}_3)\frac{\partial}{\partial \bar{u}_3}.$$

   Efetuando as substituições e simplificações devidas tem-se que

$$V_5 = -t_1 t_2\frac{\partial}{\partial t_1} + \big(- t_2^2 - 1\big)\frac{\partial}{\partial t_2} + \bar{u}_3\frac{\partial}{\partial \bar{u}_2} - \bar{u}_2\frac{\partial}{\partial \bar{u}_3},$$

   que possui os seguintes invariantes:

$$t = \frac{t_1}{\sqrt{t_2^2 + 1}},$$

$$\eta_1 = \bar{u}_1,$$

$$\eta_2 = \sqrt{\bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2}$$

$$\eta_3 = -\frac{\bar{u}_2 + t_2\bar{u}_3}{\bar{u}_2 t_2 - \bar{u}_3}.$$

Deste modo, para se determinar todos os invariantes da álgebra $\langle V_5, \bar{V}_7 \rangle$, basta usar t e η_i, $i = 1, 2, 3$, nas variáveis originais, obtendo

$$t = \frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}},$$
$$\eta_1 = u_1,$$
$$\eta_2 = \sqrt{{u_2}^2 + {u_3}^2},$$
$$\eta_3 = -\frac{zu_3 + yu_2}{-yu_3 + zu_2}.$$

Resolvendo o sistema acima para u_1, u_2 e u_3 tem-se

$$u_1 = \eta_1,$$
$$u_2 = \frac{\eta_2 \left(\eta_3 \, y - z\right)}{\sqrt{\left(z^2 + y^2\right)\left(1 + \eta_3^2\right)}},$$
$$u_3 = \frac{\eta_2 \left(\eta_3 \, z + y\right)}{\sqrt{\left(z^2 + y^2\right)\left(1 + {\eta_3}^2\right)}}.$$

Deste modo pode-se expressar o sistema (2.11) em termos dos invariantes, lembrando que $\eta_i = \eta_i(t)$, de modo que tal sistema toma a forma:

$$\begin{aligned}
0 \;\; = & \;\; -\left(1 + \eta_3(t)^2\right)(\lambda + \mu)\, t\eta_2(t) \frac{d^2}{dt^2}\eta_3(t) + 3\,\eta_3(t)(\lambda + \mu)\, t\eta_2(t)\left(\frac{d}{dt}\eta_3(t)\right)^2 \\
- & \;\; 2\left(1 + \eta_3(t)^2\right)(\lambda + \mu)\, t\frac{d}{dt}\eta_2(t)\frac{d}{dt}\eta_3(t) - \eta_3(t)\left(1 + \eta_3(t)^2\right)^2(\lambda + \mu)\, t\frac{d^2}{dt^2}\eta_2(t) \\
+ & \;\; \left[\mu\left(1 + \eta_3(t)^2\right)^{5/2} t^2 + \left(1 + \eta_3(t)^2\right)^{5/2}(2\,\mu + \lambda)\right]\frac{d^2}{dt^2}\eta_1(t) \\
+ & \;\; \mu\left(1 + \eta_3(t)^2\right)^{5/2} t\frac{d}{dt}\eta_1(t)
\end{aligned} \qquad (i)$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\left(2\,\mu+\lambda\right)t^2+\mu\,\right)\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)\eta_2\left(t\right)\frac{d^2}{dt^2}\eta_3\left(t\right)\\
&+ \left(-3\,\left(2\,\mu+\lambda\right)t^2-3\,\mu\,\right)\eta_3\left(t\right)\eta_2\left(t\right)\left(\frac{d}{dt}\eta_3\left(t\right)\right)^2\\
&+ \left(2\,\left(2\,\mu+\lambda\right)t^2+2\,\mu\,\right)\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)\frac{d}{dt}\eta_2\left(t\right)\frac{d}{dt}\eta_3\left(t\right)\\
&+ \left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)\left(2\,\mu+\lambda\right)t\eta_2\left(t\right)\frac{d}{dt}\eta_3\left(t\right)\\
&+ \left(\left(2\,\mu+\lambda\right)t^2+\mu\,\right)\eta_3\left(t\right)\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)^2\frac{d^2}{dt^2}\eta_2\left(t\right)\\
&+ \eta_3\left(t\right)\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)^2\left(2\,\mu+\lambda\right)t\frac{d}{dt}\eta_2\left(t\right)\\
&- \left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)^{5/2}\left(\mu+\lambda\right)t\frac{d^2}{dt^2}\eta_1\left(t\right)\\
&- \left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)^{5/2}\left(\mu+\lambda\right)\frac{d}{dt}\eta_1\left(t\right)-\eta_3\left(t\right)\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)^2\left(2\,\mu+\lambda\right)\eta_2\left(t\right)
\end{aligned}
\qquad (ii)
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \mu\,\eta_3\left(t\right)\left(t^2+1\right)\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)\eta_2\left(t\right)\frac{d^2}{dt^2}\eta_3\left(t\right)\\
&- \mu\,\left(t^2+1\right)\left(-1+2\,\eta_3\left(t\right)^2\right)\eta_2\left(t\right)\left(\frac{d}{dt}\eta_3\left(t\right)\right)^2\\
&+ 2\,\mu\,\eta_3\left(t\right)\left(t^2+1\right)\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)\frac{d}{dt}\eta_2\left(t\right)\frac{d}{dt}\eta_3\left(t\right)\\
&+ \mu\,\eta_3\left(t\right)\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)t\eta_2\left(t\right)\frac{d}{dt}\eta_3\left(t\right)-\mu\,\left(t^2+1\right)\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)^2\frac{d^2}{dt^2}\eta_2\left(t\right)\\
&- \mu\,\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)^2t\frac{d}{dt}\eta_2\left(t\right)+\mu\,\left(1+\eta_3\left(t\right)^2\right)^2\eta_2\left(t\right).
\end{aligned}
\qquad (iii)
$$

A última equação pode ser reescrita na forma

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& -\mu\,\left(1+(\eta_3(t))^2\right)^{5/2} \\
&\left((1+t^2)\left(\frac{\frac{d^2}{dt^2}\eta_2(t)}{\sqrt{1+(\eta_3(t))^2}} - 2\,\frac{\left(\frac{d}{dt}\eta_2(t)\right)\eta_3(t)\,\frac{d}{dt}\eta_3(t)}{\left(1+(\eta_3(t))^2\right)^{3/2}}\right.\right. \\
+\;& 3\,\frac{\eta_2(t)\,(\eta_3(t))^2\left(\frac{d}{dt}\eta_3(t)\right)^2}{\left(1+(\eta_3(t))^2\right)^{5/2}} - \frac{\eta_2(t)\left(\frac{d}{dt}\eta_3(t)\right)^2}{\left(1+(\eta_3(t))^2\right)^{3/2}} - \left.\frac{\eta_2(t)\,\eta_3(t)\,\frac{d^2}{dt^2}\eta_3(t)}{\left(1+(\eta_3(t))^2\right)^{3/2}}\right) \\
+\;& t\left(\frac{\frac{d}{dt}\eta_2(t)}{\sqrt{1+(\eta_3(t))^2}} - \frac{\eta_2(t)\,\eta_3(t)\,\frac{d}{dt}\eta_3(t)}{\left(1+(\eta_3(t))^2\right)^{3/2}}\right) - \left.\frac{\eta_2(t)}{\sqrt{1+(\eta_3(t))^2}}\right),
\end{aligned}
$$

o que é equivalente a

$$
\mu\,\left(1+(\eta_3(t))^2\right)^{5/2}\left(\left(1+t^2\right)\frac{d^2}{dt^2}F(t) + t\frac{d}{dt}F(t) - F(t)\right) = 0,
$$

onde $F(t) = \dfrac{\eta_2(t)}{\sqrt{1+(\eta_3(t))^2}}$.

Levando em conta que $\mu\,\left(1+(\eta_3(t))^2\right)^{5/2} \neq 0$, chegamos à equação diferencial ordinária

$$
\left(1+t^2\right)\frac{d^2}{dt^2}F(t) + t\frac{d}{dt}F(t) - F(t) = 0,
$$

possuindo a seguinte solução

$$
F(t) = at + b\sqrt{(1+t^2)},
$$

ond a e b são constantes reais.

Para simplificar as equações (i) e (ii) usaremos a função auxiliar

$$
X(t) = \frac{\eta_2(t)\,\eta_3(t)}{\sqrt{1+(\eta_3(t))^2}}.
$$

Isolando $\eta_2(t)$ na equação acima e substituindo nas equações (i) e (ii) teremos

$$\begin{aligned} 0 &= -(\mu+\lambda)\left(t\frac{d^2}{dt^2}\eta_1(t)+\frac{d}{dt}\eta_1(t)\right)+\left(\mu+2\,t^2\mu+t^2\lambda\right)\frac{d^2}{dt^2}X(t) \\ &+ (\lambda+2\,\mu)\left(t\frac{d}{dt}X(t)-X(t)\right), \end{aligned}$$

$$0 = \left(t^2\mu+\lambda+2\,\mu\right)\frac{d^2}{dt^2}\eta_1(t)+t\mu\,\frac{d}{dt}\eta_1(t)-t\,(\mu+\lambda)\,\frac{d^2}{dt^2}X(t)\,.$$

Criando a função $Y(t) = t\frac{d}{dt}X(t) - X(t)$, isolando $\frac{d}{dt}X(t)$ e substituindo nas equações anteriores (bem como suas conseqüências diferenciais), teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-t^2\lambda-t^2\mu\right)\frac{d^2}{dt^2}\eta_1(t)+(-t\lambda-t\mu)\,\frac{d}{dt}\eta_1(t)+\left(\mu+2\,t^2\mu+t^2\lambda\right)\frac{d}{dt}Y(t) \\ &+ (t\lambda+2\,t\mu)\,Y(t) \end{aligned}$$

$$0 = \left(t^2\mu+\lambda+2\,\mu\right)\frac{d^2}{dt^2}\eta_1(t)+t\mu\,\frac{d}{dt}\eta_1(t)+(-\mu-\lambda)\,\frac{d}{dt}Y(t)\,.$$

Resolvendo algebricamente as duas equações anteriores para $\frac{d^2}{dt^2}\eta_1(t)$ e $\frac{d}{dt}Y(t)$ tem-se:

$$\frac{d^2}{dt^2}\eta_1(t) = \frac{-t\left(-\lambda+t^2\mu\right)\frac{d}{dt}\eta_1(t)-t\,(\mu+\lambda)\,Y(t)}{\mu\,\left(t^4+2\,t^2+1\right)} \qquad (*)$$

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \frac{t\,(\mu+\lambda)\,\frac{d}{dt}\eta_1(t)+\left(-t^2\mu-\lambda-2\,\mu\right)tY(t)}{\mu\,\left(t^4+2\,t^2+1\right)}. \qquad (**)$$

Isolando $Y(t)$ em $(*)$ e substituindo em $(**)$, chega-se à seguinte equação:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\left(t^5+2\,t^3+t\right)\mu\,\frac{d^3}{dt^3}\eta_1\left(t\right)-\left(-1+4\,t^2+5\,t^4\right)\mu\,\frac{d^2}{dt^2}\eta_1\left(t\right)\\
&- 3\,t^3\mu\,\frac{d}{dt}\eta_1\left(t\right).
\end{aligned}
$$

Encontrada $\eta_1(t)$ para a equação diferencial ordinária anterior, podemos agir recursivamente e encontrar as funções $\eta_2(t)$ e $\eta_3(t)$. Deste modo teremos as funções:

$$
\begin{aligned}
\eta_1\left(t\right) &= \frac{C_1\,t}{\sqrt{1+t^2}}+C_2\left(-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}+arcsenh\left(t\right)\right)+C_3\\
\eta_2\left(t\right) &= \sqrt{\left(at+b\sqrt{1+t^2}\right)^2+\left(X\left(t\right)\right)^2}\\
\eta_3\left(t\right) &= \frac{X\left(t\right)}{at+b\sqrt{1+t^2}},
\end{aligned}
$$

onde a função $X(t)$ é dada por

$$
X\left(t\right)=C_6t-\frac{\left[2(2\mu+\lambda)C_4-(3\mu+\lambda)C_5\right]t^2+(3\mu+\lambda)C_4-2\mu C_5}{\left(\mu+\lambda\right)\sqrt{1+t^2}}
$$

e C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6 são constantes reais. Retomando as variáveis originais encontraremos as seguintes soluções

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= \frac{C_1 x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{C_2 x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\
&+ C_2 arcsenh\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) + C_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(x,y,z) &= \frac{x\left(C_6 y + az\right)}{y^2+z^2} + \frac{\left[-2(2\mu+\lambda)C_4 + (3\mu+\lambda)C_5\right] yx^2}{(\mu+\lambda)\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(y^2+z^2\right)}}\\
&+ \frac{bz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{y^2+z^2} + \frac{y\left[-(3\mu+\lambda)C_4 + 2\mu C_5\right]}{(\mu+\lambda)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_3(x,y,z) &= \frac{\left[(3\mu+\lambda)C_4 - 2\mu C_5\right] z}{(\mu+\lambda)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{by\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{y^2+z^2}\\
&+ \frac{\left[(4\mu+2\lambda)C_4 - (3\mu+\lambda)C_5\right] xz}{(\mu+\lambda)\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2)}} + \frac{axy}{y^2+z^2} - \frac{C_6 zx}{y^2+z^2}.
\end{aligned}
$$

Recapitulando:

- soluções invariantes sob $\langle V_1; V_2\rangle$

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= C_1 z + C_2\\
u_2(x,y,z) &= C_3 z + C_4\\
u_3(x,y,z) &= C_5 z + C_6
\end{aligned}
$$

- soluções invariantes sob $\langle V_1; V_5\rangle$

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= C_1 ln(\sqrt{z^2+y^2}) + C_2\\
u_2\left(x,y,z\right) &= -\left(C_3 z + C_4 \frac{z}{z^2+y^2} + C_5 y + C_6 \frac{y}{z^2+y^2}\right)\\
u_3\left(x,y,z\right) &= \left(C_3 y + C_4 \frac{y}{z^2+y^2} - C_5 z - C_6 \frac{z}{z^2+y^2}\right);
\end{aligned}
$$

- soluções invariantes sob $\left\langle V_1; \bar{V}_7\right\rangle$

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= C_1 + \arctan\left(\frac{z}{y}\right) C_2\\
u_2(x,y,z) &= C_3 - C_4\left(\frac{y^2}{z^2+y^2}\right) + C_5\left[\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(arctan\left(\frac{z}{y}\right) + \frac{zy}{z^2+y^2}\right)\right]\\
u_3(x,y,z) &= C_4\left[\frac{3\mu+\lambda}{\mu+\lambda} arctan\left(\frac{z}{y}\right) - \frac{zy}{z^2+y^2}\right] - C_5\left[\frac{\mu+\lambda}{2\mu}\left(\frac{y^2}{z^2+y^2}\right)\right] + C_6,
\end{aligned}
$$

- soluções invariantes sob $\langle V_5; \bar{V}_7 \rangle$

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z) &= C_1 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \\
&+ C_2 \left[arcsenh \left(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right] + C_3 \\
u_2(x,y,z) &= C_4 \left[\frac{-2(2\mu+\lambda)yx^2}{(\mu+\lambda)\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2)}} + \frac{-(3\mu+\lambda)y}{(\mu+\lambda)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right] \\
&+ C_5 \left[\frac{(3\mu+\lambda)yx^2}{(\mu+\lambda)\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2)}} + \frac{2\mu y}{(\mu+\lambda)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right] \\
&+ C_6 \frac{xy}{y^2+z^2} + C_7 \frac{xz}{y^2+z^2} + C_8 \frac{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{y^2+z^2} \\
u_3(x,y,z) &= C_4 \left[\frac{(3\mu+\lambda)z}{(\mu+\lambda)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{(4\mu+2\lambda)xz}{(\mu+\lambda)\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2)}} \right] \\
&+ C_5 \left[\frac{-2\mu z}{(\mu+\lambda)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{-(3\mu+\lambda)xz}{(\mu+\lambda)\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2)}} \right] \\
&+ C_6 \left[\frac{-xz}{y^2+z^2} \right] + C_7 \left[\frac{xy}{y^2+z^2} \right] + C_8 \left[\frac{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{y^2+z^2} \right].
\end{aligned}
$$

Comparando estas soluções com as soluções encontradas pelo pacote SADE, mencionado na introdução, notamos que todas as soluções determinadas pelo SADE são contempladas, mas com uma ressalva: nas soluções do pacote SADE uma solução pode ser levada na outra por uma transformação de grupo, ou seja, tem-se soluções de uma mesma classe de equivalência, enquanto que nossas soluções não podem ser levadas uma na outra por uma transformação de grupo, ou seja, são soluções não equivalentes.

Capítulo 4

Considerações finais

Nesta dissertação, determinamos algumas soluções exatas para o sistema de equações diferenciais que modela o problema termo-elástico estático e isotrópico, através do uso de simetrias de Lie. As soluções encontradas são soluções invariantes sob certos subgrupos de simetrias do sistema de equações considerado, de modo que uma solução não pode ser levada na outra por uma transformação de grupo.

As soluções determinadas pelo pacote SADE diferem das soluções encontradas nesta dissertação apenas pelo fato de várias delas serem equivalentes sob transformações do grupo de simetrias.

Este mesmo método pode ser aplicado à resolução deste mesmo problema nos casos não-isotrópicos e não estáticos.

O método apresentado e utilizado nesta dissertação permite a incorporação das condições de contorno ao problema, apesar de não as termos considerado aqui (ver [7]).

Desta forma, a utilização deste método permite a resolução de um problema concreto. No caso do problema termo-elástico, como para outros problemas, a busca de soluções exatas é sempre relevante. Essas soluções, mesmo que em número limitado, permitem também calibrar programas numéricos específicos.

Assim, a determinação de soluções exatas de equações diferenciais tem suscitado o desenvolvimento de métodos mais gerais que o chamado método clássico aqui apresentado.

Uma generalização do método clássico foi desenvolvida por George W. Bluman e Julian D. Cole [7]. Este método, conhecido como método não-clássico, consiste em determinar as simetrias, não clássicas, do sistema de equações acrescentado da equação de superfície invariante. Para entender este método, tome um sistema $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0$. Pela teoria clássica o vetor $V = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha}$ é um gerador infinitesimal de simetria do sistema se $prV^{(n)}\big(\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})\big) = 0$, onde $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0$. Se $u_\alpha = f^\alpha(\mathbf{x})$ é uma solução invariante por V, então, $V\big(f^\alpha - u_\alpha\big) = 0$, ou seja $\xi^i \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - \phi^\alpha = 0$. O que Bluman e Cole fizeram foi inserir esta última equação, conhecida como equação de superfície invariante, para se determinar os geradores infinitesimais de simetrias não clássicas. Desta forma, exige-se que $prV^{(n)}\big(\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)})\big) = 0$, onde $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(n)}) = 0$ e $\xi^i \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - \phi^\alpha = 0$. Assim, é possível encontrar todas as simetrias clássicas e, na maioria dos casos, outras novas, com a ressalva de que as simetrias não clássicas não precisam formar uma álgebra de Lie.

O grande trunfo dos métodos clássico e não clássico é a transformação de um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Observando tal redução Peter A. Clarkson e Martin D. Kruskal apresentaram em [8] um meio para reduzir uma equação diferencial parcial a uma equação diferencial ordinária sem a utilização de geradores infinitesimais. O método apresentado é conhecido como método direto. A redução do método direto é feita impondo-se condições sobre o tipo de solução que se quer encontrar. De modo geral, para o sistema (2.11), se procura soluções do tipo

$$u_\alpha(x, y, z) = F^\alpha\Big(x, y, z, \eta_1\big(t(x, y, z)\big), \eta_2\big(t(x, y, z)\big), \eta_3\big(t(x, y, z)\big)\Big),$$

com $\alpha = 1, 2, 3$, tal que, quando substituidas no sistema (2.11), este se reduza a um sistema de equações diferenciais ordinárias nas funções $\eta_i(t)$ (As reduções seguem as regras da página 2203 de [8]).

Um método mais geral, introduzido por Olver e Rosenau em [9] , considera uma equação adicional que não precisa ser a condição de superfície invariante. Assim, dependendo da condição considerada, simetrias podem ser determinadas e soluções invariantes podem ser encontradas. No entanto, várias questões referentes a este método ainda são problemas em aberto, como por exemplo, a relação entre a condição adicional e a existência de simetrias.

Referências Bibliográficas

[1] Spivak, M.,*O cálculo em variedades*, Editora Ciência Moderna,Rio de Janeiro, 2003.

[2] Carmo, M.P.,*Geometria Riemaniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1988.

[3] Sotomayor,J.,*Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[4] Ince, E. L. *Ordinary differential equations*, Logans, Green and Co., London, 1926.

[5] Olver,Peter J., *Applications of Lie Groups to differential equations* (Graduate texts in mathematics; 107) springer-Verlag.

[6] Ruggeri, E.R.F. *A resolução completa do problema termoelástico linear e a unicidade da sua solução*, Revista Escola de Minas, Ouro Preto, 1989.

[7] G. W. Bluman and J. D. Cole, *The general similarity solution of the heat equation*, J. Math. Mech. 18, 1025-1042(1969).

[8] Clarkson, P. A. and Kruskal, M. D., *New similarity solutions of the Boussinesq equation*, J. Math. Phys. 30, 2201-2213 (1989).

[9] Olver, P. J. and Rosenau, P., *The Construction of Special Solutions to Partial Differential Equations*, J. Physics Letters 114A, 107-112 (1985).