

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Sobre o Número de Dilworth e p -Grupos
Metabelianos Delgados

por

Leonardo de Amorim e Silva

Brasília
2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Resumo

Neste trabalho abordamos questões relacionadas à largura do reticulado dos subgrupos de um grupo e estudamos p -grupos metabelianos delgados. Tais grupos, dentre os quais se inserem os p -grupos de classe maximal, são assim denominados pelo fato de apresentarem largura normal $p+1$.

Abstract

In this work we approached subjects related to the width of the lattices of the subgroups of a group and we studied metabelian thin p -groups. Such groups, among which insert the maximal class p -groups, are denominated like this by the fact of they present width normal $p+1$.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados Preliminares	3
1.1 Comutadores, Subgrupo Comutador e Séries Centrais	3
1.2 Grupos Nilpotentes, Subgrupo de Frattini e alguns resultados sobre p -Grupos	6
1.3 Reticulados	9
1.4 Módulos	11
1.5 Grupos Metabelianos	11
1.6 Grupos Metabelianos a dois Geradores	12
2 Grupos de Classe Maximal	20
2.1 Grupos de Classe Maximal	20
2.2 Grau de Comutatividade	22
2.3 Elementos Uniformes	24
3 O Número de Dilworth	29
4 p-Grupos Metabelianos Delgados	37
4.1 p -Grupos Delgados	38

4.2	Séries Centrais e Centralizadores	39
4.3	p -Grupos Metabelianos Delgados	43
	Referências Bibliográficas	48

Neste trabalho fazemos um estudo sobre p -grupos metabelianos delgados, que são grupos que possuem largura normal $p + 1$. Nosso estudo tem como base os artigos de Brandl, Caranti e Scoppola “*Metabelian thin p -groups*”, Szekeres “*Metabelian groups with two generators*” e Brandl “*The Dilworth number of subgroup lattices*”.

No capítulo 1, exibimos alguns resultados sobre teoria de p -grupos finitos e grupos metabelianos 2-gerados. O estudo a respeito desses grupos metabelianos 2-gerados tem como referência o artigo de Szekeres, o qual trata este assunto usando técnicas de anéis. Um exemplo de como usar tais técnicas para a construção de p -grupos metabelianos 2-gerados também é discutido neste capítulo.

Iniciamos o nosso objetivo, o de estudar os grupos delgados, com um estudo sobre os grupos de classe maximal. Blackburn estudou esses grupos em detalhes no artigo “*On a Special Class of p -Groups*”, razão pela qual neste trabalho não consideramos os grupos de classe maximal como grupos delgados.

No capítulo 3, onde falamos do número de Dilworth, temos alguns resultados que falam sobre a largura e largura normal de um grupo. Tais resultados ajudam a entender a estrutura dos reticulados dos subgrupos normais de um grupo de largura normal $p + 1$, ou seja, dos grupos delgados. E mostramos, no final deste capítulo, um exemplo de um grupo de largura normal $p + 1$ que não é de classe maximal, mostrando assim que tais grupos existem.

No capítulo 4, apresentamos o estudo sobre grupos metabelianos delgados. Em particular mostramos que a série central superior e inferior de um p -grupo delgado coincidem. No capítulo 2, onde foi feito o estudo dos grupos de classe maximal, observamos que estes grupos são caracterizados por possuírem um elemento cujo centralizador tem ordem p^2 . Como veremos, uma tentativa de caracterizar os p -grupos delgados como p -grupos contendo um elemento de ordem p^3 falha. Mas mostramos que, se o grupo é tal que para cada $g \in \mathbf{G} - \mathbf{G}'$, o centralizador $C_{\mathbf{G}}(g)$ tem ordem p^3 , então \mathbf{G} é delgado. A recíproca está provada para p -grupos metabelianos delgados. Mostramos também que a ordem de um p -grupo metabeliano delgado \mathbf{G} satisfaz $p^5 \leq |\mathbf{G}| \leq p^{2p}$.

Um exemplo do diagrama do reticulado $\mathfrak{N}(\mathbf{G})$ de todos os subgrupos normais de um grupo de classe maximal e de um grupo delgado, é dado respectivamente logo a seguir, o que justifica o nome delgado:



Podemos observar que no reticulado de um grupo de classe maximal ocorre um diamante no topo, formado por seus $p + 1$ subgrupos maximais, seguido por uma cadeia formada pelos termos da série central inferior. E no caso de um grupo delgado a ocorrência de diamantes não é muito bem controlada. Onde por um diamante nós estamos querendo dizer um reticulado que tem um mínimo, um máximo e $p + 1$ outros elementos intermediários.

Já no caso de um grupo metabeliano delgado, esse reticulado fica mais determinado, por uma consequência do Corolário 4.13, que fala que os fatores centrais de um p -grupo metabeliano delgado têm ordem p^2 , exceto $\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_3(\mathbf{G})$ e possivelmente $\gamma_{cl(\mathbf{G})}(\mathbf{G})$. A técnica de Zsekeres também é utilizada como um método para a construção de p -grupos metabelianos delgados, que é descrito em [15]. Mas devido ao pouco tempo, essa técnica será estudada em outra ocasião.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo relacionamos alguns resultados que serão usados com frequência nos capítulos subsequentes.

1.1 Comutadores, Subgrupo Comutador e Séries Centrais

Seja \mathbf{G} um grupo, definimos o comutador de $a, b \in \mathbf{G}$ como sendo $a^{-1}b^{-1}ab$ e denotaremos por $[a, b]$. O comutador $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ será definido recursivamente como sendo $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = [[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}], a_n]$. Logo abaixo listamos algumas identidades básicas envolvendo comutadores:

- (i) $[a, b] = [b, a]^{-1}$.
- (ii) $[ab, c] = [a, c]^b[b, c] = [a, c][a, c, b][b, c]$.
- (iii) $[a, bc] = [a, c][a, b]^c = [a, c][a, b][a, b, c]$.
- (iv) $[a, b^{-1}, c]^b[b, c^{-1}, a]^c[c, a^{-1}, b]^a = 1$ (Identidade de Witt).

Sejam \mathbf{G} um grupo e X um subconjunto de \mathbf{G} . A interseção $\langle X \rangle$ de todos os subgrupos de \mathbf{G} contendo X é chamada o *subgrupo de \mathbf{G} gerado* pelo conjunto X . Seja X um subconjunto contido em \mathbf{G} tal que $\mathbf{G} = \langle X \rangle$, dizemos que \mathbf{G} é gerado por X . Se X for finito dizemos que \mathbf{G} é finitamente gerado.

Definição 1.1. Seja \mathbf{G} um grupo. O subgrupo de \mathbf{G} gerado por todos os comutadores, ou seja, $[a, b]$ para todo $a, b \in \mathbf{G}$ é chamado *subgrupo comutador* ou *grupo derivado* de \mathbf{G}

e será denotado por \mathbf{G}' . Podemos também definir o comutador $[L, M]$, onde L e M são subconjuntos de \mathbf{G} , como sendo

$$[L, M] = \langle [a, b] \mid a \in L, b \in M \rangle.$$

A série de um grupo \mathbf{G} , dada por

$$\mathbf{G} = \gamma_1(\mathbf{G}) \geq \gamma_2(\mathbf{G}) \geq \dots \geq \gamma_i(\mathbf{G}) \dots \geq \dots$$

é definida recursivamente como sendo:

$$\begin{cases} \gamma_1(\mathbf{G}) &= \mathbf{G} \\ \gamma_{i+1}(\mathbf{G}) &= [\gamma_i(\mathbf{G}), \mathbf{G}], \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Esta série é chamada *série central inferior* do grupo \mathbf{G} onde cada termo $\gamma_i(\mathbf{G})$ é totalmente invariante em \mathbf{G} , [[14] pág. 142], ou seja, é invariante por qualquer endomorfismo de \mathbf{G} . Além disso, tomando o quociente por $\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ na igualdade de $\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) = [\gamma_i(\mathbf{G}), \mathbf{G}]$, obtém-se $[\gamma_i(\mathbf{G})/\gamma_{i+1}(\mathbf{G}), \mathbf{G}/\gamma_{i+1}(\mathbf{G})] = 1$, o que mostra que cada fator $\gamma_i(\mathbf{G})/\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ é um fator central.

A *série central superior* de um grupo \mathbf{G}

$$1 = \mathbf{Z}_0 \leq \mathbf{Z}_1(\mathbf{G}) \leq \mathbf{Z}_2(\mathbf{G}) \leq \dots \mathbf{Z}_i(\mathbf{G}) \leq \dots$$

é definida recursivamente como sendo:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_0(\mathbf{G}) &= 1 \\ \mathbf{Z}_{i+1}(\mathbf{G})/\mathbf{Z}_i(\mathbf{G}) &= \mathbf{Z}(\mathbf{G}/\mathbf{Z}_i), \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

A proposição abaixo estabelece algumas propriedades da série central inferior e superior de um grupo.

Proposição 1.2. *Sejam \mathbf{G} um grupo e i, j inteiros positivos.*

- (i) $[\gamma_i(\mathbf{G}), \gamma_j(\mathbf{G})] \leq \gamma_{i+j}(\mathbf{G})$
 - (ii) $\gamma_i(\gamma_j(\mathbf{G})) \leq \gamma_{ij}(\mathbf{G})$
 - (iii) $[\gamma_i(\mathbf{G}), \mathbf{Z}_j(\mathbf{G})] \leq \mathbf{Z}_{j-i}(\mathbf{G})$ se $j \geq i$.
- Em particular, $[\gamma_i(\mathbf{G}), \mathbf{Z}_i(\mathbf{G})] = 1$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [[14] pág. 144].

Proposição 1.3. *Seja \mathbf{G} um grupo gerado por um conjunto X . Então*

- (i) $\gamma_i(\mathbf{G}) = \langle [x_1, \dots, x_i]^g \mid x_j \in X, j = 1, \dots, i, g \in \mathbf{G} \rangle$.
- (ii) $\gamma_i(\mathbf{G}) = \langle [x_1, \dots, x_i], \gamma_{i+1}(\mathbf{G}) \mid x_j \in X, j = 1, \dots, i \rangle$.
- (iii) *Se $X = \{x, y\}$ então $\gamma_2(\mathbf{G}) = \langle [x, y], \gamma_3(\mathbf{G}) \rangle$ e assim $\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_3(\mathbf{G})$ é cíclico.*
- (iv) *Se $X = \{x, y\}$ então $\mathbf{G}'' := \gamma_2(\mathbf{G}') \leq \gamma_5(\mathbf{G})$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [[14] pág. 146].

Consideremos agora a seguinte lei de comutadores

$$[[x_1, \dots, x_m], [x_{m+1}, \dots, x_{m+n}]] = 1,$$

a qual denotaremos abreviadamente por $[m, n] = 1$.

Se o grupo satisfaz a lei

$$[x_1, x_2, x_3, \dots, x_k] = [x_1, x_2, x_{\varphi(3)}, \dots, x_{\varphi(k)}],$$

onde φ é uma permutação de $\{3, \dots, k\}$, diremos que \mathbf{G} satisfaz $C(k, \varphi)$, e se \mathbf{G} satisfaz $C(k, \varphi)$ para toda permutação φ de $\{3, \dots, k\}$, diremos que \mathbf{G} satisfaz $C(k)$ (cf. F. Levin [10]).

Agora apenas citaremos alguns resultados de Levin [10] que são utilizados nos capítulos seguintes.

Lema 1.4. [10] *\mathbf{G} satisfaz $C(n+2)$, $n \geq 2$ se, e somente se, \mathbf{G} satisfaz $[n-k, 2+k] = 1$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$.*

Teorema 1.5. [10] *Se \mathbf{G} satisfaz*

$$[n, 2] = [n-1, 3] = \dots = [n-k, 2+k] = 1,$$

para algum $k < s$, onde $2s = n-2$ se n é par e $2s = n-3$ se n é ímpar, então \mathbf{G} satisfaz $C(2n-2k-1)$.

Em particular, para $k = 0$ temos o seguinte resultado:

Corolário 1.6. *Se \mathbf{G} satisfaz $[n, 2] = 1$, $n > 3$, então \mathbf{G} satisfaz $C(2n-1)$.*

Podemos observar que \mathbf{G} satisfaz $[n, m] = 1$ se, e somente se, \mathbf{G} satisfaz $[m, n] = 1$.

1.2 Grupos Nilpotentes, Subgrupo de Frattini e alguns resultados sobre p -Grupos

Definição 1.7. Um grupo \mathbf{G} é dito *nilpotente* se \mathbf{G} possui uma *série central* finita, isto é, uma série $1 = \mathbf{G}_0 < \mathbf{G}_1 < \dots < \mathbf{G}_n = \mathbf{G}$ tal que:

- (i) $\mathbf{G}_i \trianglelefteq \mathbf{G}, i = 0, \dots, n$ (a série é normal)
- (ii) $\mathbf{G}_{i+1}/\mathbf{G}_i \leq \mathbf{Z}(\mathbf{G}/\mathbf{G}_i)$ ($\mathbf{G}_{i+1}/\mathbf{G}_i$ é um fator central de \mathbf{G}).

Proposição 1.8. *Seja \mathbf{G} um grupo nilpotente e $1 = \mathbf{G}_0 < \mathbf{G}_1 < \dots < \mathbf{G}_n = \mathbf{G}$ uma série central em \mathbf{G} . Então:*

- (i) $\gamma_i(\mathbf{G}) \leq \mathbf{G}_{n+1-i}$, para $i = 1, \dots, n + 1$;
- (ii) $\mathbf{G}_i \leq \mathbf{Z}_i(\mathbf{G})$ para $i = 0, \dots, n$;
- (iii) *As séries centrais inferior e superior têm o mesmo comprimento.*

Demonstração. (i) Para $i = 1$ temos $\gamma_1(\mathbf{G}) = \mathbf{G}_n = \mathbf{G}$. Para $i \geq 1$ observemos que $\mathbf{G}_{n+1-i}/\mathbf{G}_{n-i} \leq \mathbf{Z}(\mathbf{G}/\mathbf{G}_{n-i})$ fornece $[\mathbf{G}_{n+1-i}, \mathbf{G}] \leq \mathbf{G}_{n-i}$. Assim, admitindo por indução sobre i que $\gamma_i(\mathbf{G}) \leq \mathbf{G}_{n+1-i}$, obtemos

$$\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) = [\gamma_i(\mathbf{G}), \mathbf{G}] \leq [\mathbf{G}_{n+1-i}, \mathbf{G}] \leq \mathbf{G}_{n-i}.$$

(ii) Demonstra-se de modo análogo ao anterior.

(iii) Se \mathbf{G} tem classe c então existe uma série central $1 = \mathbf{G}_0 < \mathbf{G}_1 < \dots < \mathbf{G}_c = \mathbf{G}$ e qualquer outra série central de 1 a \mathbf{G} tem comprimento maior ou igual a c . Por (i) temos $\gamma_{c+1}(\mathbf{G}) = 1$, assim a série central inferior tem comprimento c , e por (ii) temos que $\mathbf{Z}_c(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$. Logo a série central superior também tem comprimento c . ■

Num grupo nilpotente, o comprimento das séries centrais superior e inferior são iguais, como foi provado acima. Este número é a classe de nilpotência de \mathbf{G} .

Teorema 1.9. *Todo subgrupo de um grupo nilpotente é subnormal. Mais precisamente, se \mathbf{G} é nilpotente de classe c então, para qualquer subgrupo H , a série de normalizadores começando com H alcança \mathbf{G} depois de no máximo c passos.*

Demonstração. Sejam

$$Z_i = Z_i(\mathbf{G}), H_0 = H, H_{j+i} = N_{\mathbf{G}}(H_j).$$

Para provar o teorema basta mostrar que $Z_i \leq H_i$. Para $i = 0$ isto é óbvio. Suponhamos então que o resultado seja válido para i e mostraremos que vale para $i + 1$. Uma vez que $[\mathbf{G}, Z_{i+1}] \leq Z_i \leq H_i$, temos que

$$H_i^{Z_{i+1}} \subseteq H_i[H_i Z_{i+1}] \leq H_i.$$

Então Z_{i+1} normaliza H_i , isto é, $Z_{i+1} \leq H_{i+1}$. ■

Teorema 1.10. *Num grupo nilpotente \mathbf{G} , todo subgrupo normal não trivial intercepta o centro de \mathbf{G} não trivialmente.*

Demonstração. Usaremos indução sobre a classe de nilpotência. Seja \mathbf{G} um grupo nilpotente e H um subgrupo normal não trivial. Suponhamos, por indução, que o teorema seja válido para grupos de classe menor que \mathbf{G} . Se $H \leq Z_1(\mathbf{G})$ temos a conclusão desejada trivialmente. Tome $H \not\leq Z_1(\mathbf{G})$. Então, por hipótese de indução para $\mathbf{G}/Z_1(\mathbf{G})$, a interseção $HZ_1(\mathbf{G}) \cap Z_2(\mathbf{G})$ contém um elemento $a \notin Z_1(\mathbf{G})$. Se $a = hz$ para algum $h \in H$, $z \in Z_1(\mathbf{G})$, então $h \in H \cap Z_2(\mathbf{G})$ e $h \notin Z_1(\mathbf{G})$. Seja $g \in \mathbf{G}$ um elemento tal que $[h, g] \neq e$. Então

$$[h, g] \in H \cap [Z_2(\mathbf{G}), \mathbf{G}] \leq H \cap Z_1(\mathbf{G}),$$

de modo que a interseção $H \cap Z_1(\mathbf{G})$ é não trivial, e o teorema está provado. ■

Teorema 1.11. *Todo p -grupo finito é nilpotente.*

Demonstração. Sabemos que o centro de um p -grupo finito é não trivial, ou seja, $Z(\mathbf{G}) \neq 1$. Se, para algum i , temos que $Z_i(\mathbf{G}) < \mathbf{G}$, então $Z(\mathbf{G}/Z_i(\mathbf{G})) \neq 1$ e assim $Z_i(\mathbf{G}) < Z_{i+1}(\mathbf{G})$. Uma vez que \mathbf{G} é finito, existirá um inteiro i com $Z_i(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$. Portanto \mathbf{G} é nilpotente. ■

Definição 1.12. Seja \mathbf{G} um grupo; definimos o seu *subgrupo de Frattini* $\Phi(\mathbf{G})$ como sendo a interseção de todos os subgrupos maximais de \mathbf{G} . Quando \mathbf{G} não possui subgrupo maximal, definimos $\Phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$.

Definição 1.13. Um elemento $x \in \mathbf{G}$ é dito um *não gerador* se ele pode ser omitido de todo conjunto gerador, isto é, se $\mathbf{G} = \langle x, Y \rangle$, então $\mathbf{G} = \langle Y \rangle$.

Teorema 1.14. *Para todo grupo \mathbf{G} , o subgrupo de Frattini $\Phi(\mathbf{G})$ é o conjunto de todos os elementos não geradores de \mathbf{G} .*

Demonstração. Sejam x um elemento não-gerador de \mathbf{G} e M um subgrupo maximal em \mathbf{G} . Se $x \notin M$, então $\mathbf{G} = \langle x, M \rangle$, uma contradição. Conseqüentemente $x \in M$ para todo subgrupo maximal M , e assim $x \in \Phi(\mathbf{G})$. Reciprocamente, se $z \in \Phi(\mathbf{G})$, assumamos que $\mathbf{G} = \langle z, Y \rangle$. Se $\langle Y \rangle \neq \mathbf{G}$, então existe um subgrupo maximal M com $\langle Y \rangle \leq M$. Mas $z \in M$, e assim $\mathbf{G} = \langle z, Y \rangle \leq M$, uma contradição. Portanto z não é um gerador. ■

Teorema 1.15. *Seja \mathbf{G} um grupo nilpotente. Se A é um subgrupo de \mathbf{G} tal que $A[\mathbf{G}, \mathbf{G}] = \mathbf{G}$, então $A = \mathbf{G}$. Portanto*

$$[\mathbf{G}, \mathbf{G}] \leq \Phi(\mathbf{G}). \quad (1.1)$$

Demonstração. Suponha que $A \neq \mathbf{G}$. Seja $A_i = AZ_i(\mathbf{G})$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Temos que $A_i \triangleleft A_{i+1}$. Suponha que existe um n tal que $A_n < \mathbf{G}$, $A_{n+1} = \mathbf{G}$. Uma vez que o quociente A_{n+1}/A_n é abeliano temos que $[\mathbf{G}, \mathbf{G}] \leq A_n$, donde

$$A[\mathbf{G}, \mathbf{G}] \leq A_n < \mathbf{G},$$

uma contradição. A afirmação (1.1) segue diretamente da descrição dos elementos de $\Phi(\mathbf{G})$ como o conjunto dos não geradores de \mathbf{G} . ■

Teorema 1.16. *Seja \mathbf{G} um grupo finito.*

(i) $\Phi(\mathbf{G})$ é nilpotente.

(ii) Se \mathbf{G} é um p -grupo finito, então $\Phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}'\mathbf{G}^p$, onde \mathbf{G}^p é o subgrupo de \mathbf{G} gerado por todas as potências p -ésimas de elementos de \mathbf{G} .

(iii) Se \mathbf{G} é p -grupo finito, então $\mathbf{G}/\Phi(\mathbf{G})$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p .

Demonstração. (i) Seja P um p -subgrupo de Sylow de $\Phi(\mathbf{G})$ para algum p . Uma vez que $\Phi(\mathbf{G}) \triangleleft \mathbf{G}$, o argumento de Frattini nos fornece que $\mathbf{G} = \Phi(\mathbf{G})N_{\mathbf{G}}(P)$. Mas $\Phi(\mathbf{G})$ consiste de elementos não geradores, portanto $\mathbf{G} = N_{\mathbf{G}}(P)$, isto é, $P \triangleleft \mathbf{G}$, e assim $P \triangleleft \Phi(\mathbf{G})$. Portanto $\Phi(\mathbf{G})$ é o produto direto de seus subgrupos de Sylow, e assim, por [Teorema 5.39 [8]], $\Phi(\mathbf{G})$ é nilpotente.

(ii) Se M é um subgrupo maximal de \mathbf{G} , onde \mathbf{G} é um p -grupo, então temos que $M \triangleleft \mathbf{G}$ e $[\mathbf{G} : M] = p$. Assim \mathbf{G}/M é abeliano, de modo que $\mathbf{G}' \leq M$. Além disso \mathbf{G}/M tem expoente p , de modo que $x^p \in M$ para todo $x \in \mathbf{G}$. Portanto $\mathbf{G}'\mathbf{G}^p \leq \Phi(\mathbf{G})$.

Para mostrar a outra inclusão, observe que $\mathbf{G}/\mathbf{G}'\mathbf{G}^p$ é um subgrupo abeliano de expoente p , assim abeliano elementar, e portanto um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p . Claramente

$\Phi(\mathbf{G}/\mathbf{G}'\mathbf{G}^p) = 1$. Se $H \triangleleft \mathbf{G}$ e $H \leq \Phi(\mathbf{G})$, então $\Phi(\mathbf{G})$ é a imagem inversa (do homomorfismo canônico) de $\Phi(\mathbf{G}/H)$ (para subgrupos maximais correspondentes). Segue assim que $\Phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}'\mathbf{G}^p$.

(iii) Uma vez que $\mathbf{G}'\mathbf{G}^p = \Phi(\mathbf{G})$, o grupo quociente $\mathbf{G}/\Phi(\mathbf{G})$ é um grupo abeliano de expoente p , de modo que é espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p .

Definição 1.17. Um p -grupo \mathbf{G} é dito ser *especial* se \mathbf{G} é abeliano elementar ou \mathbf{G} é de classe 2 e $\mathbf{G}' = Z(\mathbf{G}) = \Phi(\mathbf{G})$ é abeliano elementar.

Proposição 1.18. *Seja \mathbf{G} um p -grupo, tal que para cada subgrupo abeliano H , $H/Z(\mathbf{G})$ é cíclico. Então $\mathbf{G}/Z(\mathbf{G})$ é abeliano elementar, diedral ou não abeliano de ordem p^3 e expoente p .*

Demonstração. Pode ser encontrada em [2].

Lema 1.19. (*Lei Modular*). *Sejam H , K e L subgrupos de um grupo \mathbf{G} e assumamos que $K \subseteq L$. Então $(HK) \cap L = (H \cap L)K$.*

Demonstração. Temos que $(H \cap L)K \subseteq HK$ e $(H \cap L) \subseteq LK = L$, assim $(H \cap L)K \subseteq (HK) \cap L$. Reciprocamente seja $x \in (HK) \cap L$ e escreva $x = hk$, $h \in H, k \in K$. Então $h = xk^{-1} \in LK = L$, de modo que $h \in H \cap L$. Portanto temos que $x \in (H \cap L)K$. ■

Teorema 1.20. (*Teorema da Base de Burnside*). *Seja \mathbf{G} um p -grupo finito e $\Phi(\mathbf{G})$ o subgrupo de Frattini. O grupo $A = \mathbf{G}/\Phi(\mathbf{G})$ é abeliano elementar. Se A tem ordem p^r , então todo conjunto $\{z_1, z_2, \dots, z_s\}$ de elementos que geram \mathbf{G} contém um subconjunto de r elementos $\{x_1, \dots, x_r\}$ o qual gera \mathbf{G} . Na aplicação $\mathbf{G} \rightarrow A$, os elementos x_1, \dots, x_r são aplicados numa base $\{a_1, \dots, a_r\}$ de A . Reciprocamente, qualquer conjunto de r elementos de A , os quais são aplicados numa base de \mathbf{G} , geram \mathbf{G} .*

Demonstração. Pode ser encontrada em [[11] pág. 176].

1.3 Reticulados

Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto P junto com uma relação binária “ \leq ” tal que as seguintes condições são satisfeitas, para todo $x, y, z \in P$:

(1) $x \leq x$ (Reflexiva);

- (2) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ (Antisimétrica);
 (3) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (Transitiva).

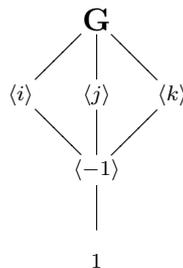
Um elemento x de um conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) é dito uma *cota inferior* para o subconjunto S de P se $x \leq s$ para todo $s \in S$. O elemento x é o *ínfimo* de S se x é uma cota inferior de S e $y \leq x$ para qualquer cota inferior y de S . Por (2), da definição anterior, tal ínfimo de S , se existir, será único e será denotado por $\cap S$. Analogamente as definições e observações aplicar-se-ão para as *cotas superiores* e *supremo*, e este será denotado por $\cup S$.

Definição 1.21. Um *reticulado* é um conjunto parcialmente ordenado no qual todo par de elementos tem um supremo e um ínfimo.

Exemplo 1.22. Se \mathbf{G} é um grupo qualquer, o conjunto $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$, de todos os subgrupos de \mathbf{G} , é um conjunto parcialmente ordenado com respeito à operação de inclusão, onde o supremo entre dois subgrupos desse reticulado é o subgrupo gerado pela união, e o ínfimo é a interseção desses subgrupos.

Dois elementos x e y num conjunto parcialmente ordenado são ditos *comparáveis* se $x \leq y$ ou $y \leq x$. Um subconjunto S de P é uma *cadeia* se quaisquer dois elementos em S são comparáveis; dizemos que S é uma *anti-cadeia* se quaisquer dois elementos de S não são comparáveis. O comprimento de uma cadeia finita S é, por definição, $|S| - 1$. Um conjunto parcialmente ordenado P tem *comprimento* n , onde n é um número natural, se existe uma cadeia finita em P de comprimento n e todas as cadeias em P são de comprimento no máximo n . Um conjunto parcialmente ordenado P é de *comprimento finito* se ele é de comprimento n para algum $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, P é de *largura* n se existe uma anti-cadeia com n elementos em P e todas as anti-cadeias em P têm no máximo n elementos.

Exemplo 1.23. Seja \mathbf{G} o grupo dos quatérnios de ordem 8 e seja $\mathfrak{N}(\mathbf{G})$ o reticulado dos subgrupos de \mathbf{G} . O diagrama desse reticulado é dado por:



Alguns exemplos de cadeias em $\mathfrak{N}(\mathbf{G})$ são: $\{\{1\}, \langle -1 \rangle, \langle i \rangle, \mathbf{G}\}$, $\{\{1\}, \langle -1 \rangle, \langle j \rangle, \mathbf{G}\}$, $\{\{1\}, \langle -1 \rangle, \langle k \rangle, \mathbf{G}\}$, $\{\{1\}, \langle -1 \rangle, \langle i \rangle\}$, etc. E suas anti-cadeias são: $\{\langle i \rangle, \langle j \rangle, \langle k \rangle\}$, $\{\langle i \rangle, \langle j \rangle\}$, $\{\langle i \rangle, \langle k \rangle\}$, $\{\langle j \rangle, \langle k \rangle\}$.

1.4 Módulos

Definição 1.24. Um R -Módulo à esquerda sobre o anel R consiste de um grupo abeliano $(\mathbf{G}, +)$ e uma operação $R \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ (chamada multiplicação por escalar, usualmente escrita por justaposição, isto é, como rx , $r \in R$ e $x \in \mathbf{G}$) tal que para todos $r, s \in R$, $x, y \in \mathbf{G}$, temos:

1. $r(x + y) = rx + ry$, $r \in R$; $x, y \in \mathbf{G}$
2. $(r + s)x = rx + sx$
3. $(rs)x = r(sx)$
4. $1x = x$

Exemplo 1.25. Todo grupo abeliano \mathbf{G} pode ser visto como um \mathbb{Z} -módulo, pois para $n > 0$ temos que $nx = x + x + \dots + x$ (n vezes), $0x = 0$ e $(-n)x = -(nx)$.

Definição 1.26. Um R -módulo M é chamado *cíclico* se $\mathbf{G} = Rx$ para algum $x \in \mathbf{G}$.

Exemplo 1.27. Todo grupo cíclico é um \mathbb{Z} -módulo cíclico.

Definição 1.28. Um módulo \mathbf{G} *fiel* é um módulo onde a ação de cada $r \neq 0$ em R sobre \mathbf{G} é não trivial (isto é, $rx \neq 0$ para algum x em \mathbf{G}).

1.5 Grupos Metabelianos

Definição 1.29. Um grupo \mathbf{G} é *metabeliano* se existe um subgrupo normal $N \trianglelefteq \mathbf{G}$ tal que N e \mathbf{G}/N sejam ambos abelianos.

Exemplo 1.30. Todo grupo abeliano é metabeliano.

Teorema 1.31. \mathbf{G} é metabeliano se, e somente se, $\mathbf{G}'' = 1$.

Demonstração. Suponha que \mathbf{G} seja metabeliano. Uma vez que \mathbf{G}/N é abeliano temos que $\mathbf{G}' \subseteq N$. E como N é abeliano, $\mathbf{G}'' = 1$.

Se $\mathbf{G}'' = 1$, mostraremos que \mathbf{G} é metabeliano. Para isto provaremos a existência de um subgrupo normal abeliano em \mathbf{G} e então mostraremos que o quociente de \mathbf{G} por esse subgrupo também é abeliano. Se \mathbf{G} é abeliano nada temos a se fazer, portanto podemos considerar o caso em que \mathbf{G} é não abeliano, e portanto $\mathbf{G}' \neq 1$.

Sejam $x, y \in \mathbf{G}'$. Uma vez que $\mathbf{G}'' = 1$, temos que $x^{-1}y^{-1}xy = 1$ e portanto $xy = yx$. Assim, quaisquer elementos de \mathbf{G}' comutam e como $\mathbf{G}' \neq 1$, temos que \mathbf{G}' é um subgrupo abeliano de \mathbf{G} . Como \mathbf{G}' é um subgrupo normal de \mathbf{G} , estabelecemos a existência de um subgrupo normal de \mathbf{G} e sabemos que \mathbf{G}/\mathbf{G}' é abeliano, portanto \mathbf{G} é metabeliano. ■

Teorema 1.32. *Se H é um subgrupo de um grupo metabeliano \mathbf{G} , então H é metabeliano.*

Demonstração. Seja H um subgrupo do grupo metabeliano \mathbf{G} . Uma vez que \mathbf{G} é metabeliano, pelo teorema 1.31, $\mathbf{G}'' = 1$. Como H é um subgrupo de \mathbf{G} , temos que H'' é subgrupo de \mathbf{G}'' e portanto $H'' = 1$. Então, pelo Teorema 1.31, H é metabeliano. ■

Teorema 1.33. *Se \mathbf{G} é um grupo metabeliano e $\varphi : \mathbf{G} \rightarrow K$ é um homomorfismo, então $\varphi(\mathbf{G})$ é metabeliano.*

Demonstração. Seja \mathbf{G} um grupo metabeliano e φ como acima. Sabemos que $\varphi(H)' = \varphi(H')$. Assim $\varphi(\mathbf{G})'' = \varphi(\mathbf{G}')' = \varphi(\mathbf{G}'')$. Uma vez que \mathbf{G} é metabeliano temos que $\mathbf{G}'' = 1$, e portanto $\varphi(\mathbf{G})'' = \varphi(\mathbf{G}'') = \varphi(1) = 1$. Assim, pelo Teorema 1.31, $\varphi(\mathbf{G})$ é metabeliano. ■

1.6 Grupos Metabelianos a dois Geradores

Discutiremos nesta seção, em linhas gerais, uma técnica para construir grupos metabelianos com dois geradores cujo subgrupo comutador é finito. Esta técnica está apresentada no artigo de Szekeres [4], a qual é desenvolvida usando técnicas de anéis. Aqui trataremos somente os grupos metabelianos a dois geradores. Maiores detalhes podem ser encontrados em [4].

Sejam a, b geradores do grupo metabeliano \mathbf{G} e $K = \mathbf{G}'$ abeliano e finito. Temos que aK, bK são geradores de \mathbf{G}/K , de ordens r e s respectivamente.

Sejam α, β os automorfismos internos induzidos por a e b em K ,

$$d^\alpha = a^{-1}da \quad d^\beta = b^{-1}db, \quad \forall d \in K. \quad (1.2)$$

Claramente α, β são independentes dos representantes a, b de aK, bK e

$$\alpha^r = \epsilon, \quad \beta^s = \epsilon \quad (1.3)$$

onde ϵ indica o automorfismo identidade de K . Seja

$$R = \mathbb{Z}[\alpha, \beta] = \left\{ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} \alpha^i \beta^j; \quad m \geq 0, \quad n \geq 0, \quad c_{i,j} \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (1.4)$$

onde $\alpha^0 = \beta^0 = \epsilon$. K é um R -grupo pela definição usual

$$d^{\rho\sigma} = (d^\rho)^\sigma, \quad d^{(\rho+\sigma)} = d^\rho d^\sigma, \quad d^c = d \quad \text{para } d \in K, \quad \rho, \sigma \in R, \quad (1.5)$$

e

$$d^{m\rho} = (d^\rho)^m \quad \text{para } m \in \mathbb{Z}. \quad (1.6)$$

Para conveniência de notação escreveremos K aditivamente. Defina um monomorfismo ψ de K no R -módulo $A = K^\psi$ tal que

$$d_1^\psi + d_2^\psi = (d_1 d_2)^\psi, \quad (1.7)$$

$$\rho d^\psi = (d^\rho)^\psi, \quad (1.8)$$

para todo $d_1, d_2, d \in K, \rho \in R$. Assim

$$(\rho\sigma)d^\psi = (d^{\rho\sigma})^\psi = \sigma(\rho d^\psi),$$

$$(\rho + \sigma)d^\psi = (d^{\rho+\sigma})^\psi = (d^\rho d^\sigma)^\psi = \rho d^\psi + \sigma d^\psi,$$

de modo que o R -módulo A carrega uma anti-representação de R . E também, é claro, uma representação direta já que R é comutativo.

Lema 1.34. *A é monogênico e é gerado por c^ψ onde*

$$c = a^{-1}b^{-1}ab. \quad (1.9)$$

Demonstração. Seja B o R -módulo gerado por c^ψ , $H = B^{\psi^*}$ onde $\psi\psi^* = \epsilon$. Uma vez que B admite α e β , $H^\alpha = H$, $H^\beta = H$, portanto $a^{-1}Ha = H$, $b^{-1}Hb = H$, além disso

$c \in H$. Então \mathbf{G}/H é abeliano, gerado por aH, bH , portanto $H \supseteq K$; mas $H \subseteq K$, assim $K = H$. ■

Seja $\varphi : \mathbb{Z}[x, y] \rightarrow R$ o homomorfismo

$$F(x, y)^\varphi = F(\alpha, \beta).$$

A estrutura de A é completamente determinada pelo ideal N de todo $F \in \mathbb{Z}[x, y]$ tal que F^φ age trivialmente sobre A , isto é,

$$F(\alpha, \beta) \cdot c^\psi = 0. \quad (1.10)$$

Uma vez que K é finito, N deve conter uma constante não nula h ; além disso

$$x^r - 1 \in N, \quad y^s - 1 \in N. \quad (1.11)$$

De fato,

$$\begin{aligned} F(x, y) = x^r - 1 &\Rightarrow F(x, y)^\varphi = \alpha^r - 1 \text{ (por 1.3, } \alpha^r = \epsilon) \\ &\Rightarrow (\alpha^r - 1)(c^\psi) = \alpha^r(c^\psi) - c^\psi = c^\psi - c^\psi = 0. \end{aligned}$$

A descrição completa de \mathbf{G} requer, assim,

- (a) uma especificação de $N \in \zeta_p[x, y]$ (onde $\zeta_p[x, y]$ representa os ideais p -primários de $\mathbb{Z}[x, y]$) e
- (b) uma especificação dos elementos $a^r, b^s \in K$.

A parte (a) da afirmação acima está demonstrada na seção 4 de [4].

A respeito da parte (b), seja

$$(a^r)^\psi = \rho c^\psi \quad e \quad (b^s)^\psi = -\sigma c^\psi, \quad (1.12)$$

onde $\rho = \varphi(\alpha, \beta)$ e $\sigma = \eta(\alpha, \beta)$ são elementos convenientes de $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$.

Uma vez que a comuta com a^r , devemos ter $\alpha\rho = \rho$, isto é,

$$(x - 1)\varphi(x, y) \in N_p \quad (1.13)$$

para cada p , onde N_p é a componente p -primária de N . Além disso, como $b^{-1}ab = ac$ por (1.9), temos para $r > 0$,

$$b^{-1}a^r b = (ac)^r = aca^{-1}a^2ca^{-2}\dots a^rca^{-r}a^r,$$

assim por (1.12), $\beta\rho c^\psi = (b^{-1}a^r b)^\psi = (1 + \alpha + \dots + \alpha^{r-1} + \rho)c^\psi$,

$$(y - 1)\varphi(x, y) - (1 + x + \dots + x^{r-1}) \in N_p. \quad (1.14)$$

Analogamente mostramos para $\eta(x, y)$,

$$(y - 1)\eta(x, y) \in N_p, \quad (1.15)$$

$$(x - 1)\eta(x, y) - (1 + y + \dots + y^{s-1}) \in N_p, \quad (1.16)$$

se $s > 0$.

Cada componente p -primária de a^r e b^s é representada por polinômios $\varphi(x, y)$, $\eta(x, y) \pmod{N_p}$, os quais satisfazem as condições acima. Se $r = 0$ então $\varphi(x, y) \equiv 0 \pmod{N_p}$ para cada p e, similarmente, se $s = 0$ então $\eta(x, y) \equiv 0 \pmod{N_p}$.

Temos que φ e η são independentes dos representantes a, b das classes laterais aK, bK . Se substituirmos a por ad , $d \in K$ onde $d^\psi = \Lambda(\alpha, \beta)c^\psi$, então fazendo cálculos mostra-se que c^ψ é substituído por $(c^\psi)^* = (1 + (\beta - 1)\Lambda(\alpha, \beta))c^\psi$, e $\varphi(x, y)$ por $\varphi^*(x, y)$, onde

$$\varphi(x, y) = \varphi^*(x, y) \{1 + (y - 1)\Lambda(x, y)\} - (1 + x + \dots + x^{r-1})\Lambda(x, y). \quad (1.17)$$

Mas $(y-1)\varphi^*(x, y) \equiv (1+x+\dots+x^{r-1}) \pmod{N_p}$, por 1.14, assim $\varphi(x, y) \equiv \varphi^*(x, y) \pmod{N_p}$.

As equações (1.13)-(1.16) nem sempre têm solução. Uma condição necessária (contudo não suficiente) para a existência de solução é

$$(1 + x + \dots + x^{r-1})(1 + y + \dots + y^{s-1}) \in N_p$$

para todo p , como vimos de (1.14) ou (1.16). Para a existência de um sistema desses é necessário (contudo não suficiente) que

$$1 + x + \dots + x^{r-1} \equiv 0, \quad 1 + y + \dots + y^{s-1} \equiv 0 \pmod{N_p}; \quad (1.18)$$

as condições são vazias se $r = 0$ ou $s = 0$. Pelo Teorema 2 [4] vemos que dado um $N \in \zeta_p[x, y]$ sempre existem valores $r = r_0, s = s_0$ para os quais (1.18) é satisfeito. Neste caso, ambos, φ e η estão no espaço vetorial determinado pelas equações

$$(x - 1)\varphi(x, y) \equiv 0, \quad (y - 1)\eta(x, y) \equiv 0 \pmod{N_p}.$$

O resultado final pode ser resumido como segue. Para obter um grupo metabeliano com dois geradores e subgrupo comutador finito:

- (a) Selecione um conjunto de ideais p -primários $N_p \in \zeta_p[x, y]$, um para cada p no conjunto finito P de números primos.
- (b) Determine o menor par de inteiros $r_0 \geq 0, s_0 > 0$ tal que $x^{r_0} - 1 \in N_p, y^{s_0} \in N_p$ para cada $p \in P$. Tais inteiros sempre existem pelo Teorema 2 [4]. Tome múltiplos adequados $r = mr_0, s = ns_0$ tais que, se $m > 0$, então $r|s$, e se $m = 0$ então $n = 0$. Além disso, $1 + x + \dots + x^{r-1} \in N_p$, se necessário.
- (c) Tome soluções $\varphi_p(x, y), \eta_p(x, y)$ das equações (1.13)-(1.16). Pelo menos uma solução ($\varphi_p = \eta_p = 0$) existe se (1.18) é satisfeito.

O grupo \mathbf{G} correspondente consiste dos elementos

$$a^m b^n \prod_{p \in P} c_p^{F_p(\alpha, \beta)}, \quad 0 \leq m < r, \quad 0 \leq n < s,$$

onde $F_p(x, y)$ é considerado módulo N_p gerando as relações seguintes:

$$c_p c_q = c_q c_p \text{ para todo } p, q \in P;$$

$$a^{-1} c_p a = c_p^\alpha, \quad b^{-1} c_p b = c_p^\beta;$$

$$a^{-1} b^{-1} a b = \prod_{p \in P} c_p;$$

$$a^r = \prod_{p \in P} c_p^{\varphi_p(\alpha, \beta)}, \quad b^r = \prod_{p \in P} c_p^{\eta_p(\alpha, \beta)},$$

\mathbf{G} é unicamente determinado por essas relações.

Agora faremos alguns comentários do que foi feito acima e daremos um exemplo de como esta técnica pode ser utilizada para construirmos p -grupos metabelianos 2-gerados.

Se $\mathbf{G} = \langle a, b \rangle$ é metabeliano 2-gerado, empregando as técnicas acima e tomando $c = [a, b]$, sejam x e y automorfismos do grupo abeliano \mathbf{G}' induzidos por a e b , respectivamente, e A o anel (comutativo) de endomorfismos de \mathbf{G}' gerado por x e y , temos que \mathbf{G}' é um A -módulo cíclico gerado por c . Seja também I o ideal de A gerado por $X = x - 1, Y = y - 1$. Desta forma

$$\gamma_i(\mathbf{G}) = cI^{i-2},$$

para $i \geq 2$, onde $I^0 = A$.

De fato, temos pelos resultados acima que

$$\gamma_2(\mathbf{G}) = \mathbf{G}' = c.A.$$

Para $i = 3$ temos, por definição, que

$$\gamma_3(\mathbf{G}) = [\gamma_2(\mathbf{G}), \mathbf{G}].$$

Com efeito, $\mathbf{G}' = c.A$. Temos que $\forall w \in \mathbf{G}'$ implica $w = c^\eta$, onde $\eta \in A$, e que $\mathbf{G} = \langle a, b \rangle$. Assim

$$[w, a] = [c^\eta, a] = c^{-\eta}c^{\eta a},$$

e lembrando que $c^{\eta a} = c^{\eta x} = c^{x\eta}$ obtemos que

$$[w, a] = c^{\eta(-1+x)} = c^{\eta(x-1)} = c^{\eta X},$$

e assim observamos que X age pegando um elemento de \mathbf{G}' e fazendo o comutador desse elemento com a . Analogamente temos que

$$[w, b] = c^{\eta(-1+y)} = c^{\eta(y-1)} = c^{\eta Y},$$

e portanto Y age pegando um elemento de \mathbf{G}' e fazendo o comutador desse elemento com b . Observamos também que $\eta X, \eta Y \in I$, e assim $[w, a], [w, b] \in cI$. Para o comutador abaixo temos que

$$[w, ab] = [c^\eta, ab] = [c^\eta, b][c^\eta, a]^b = c^{\eta Y} (c^{\eta X})^x = c^{\eta Y + \eta x X},$$

e novamente $\eta Y + \eta x X \in I$. Portanto $c^{\eta Y + \eta x X} \in cI$. Fazendo cálculos análogos aos que

foram feitos acima podemos deduzir que, para todos $w \in \gamma_2(\mathbf{G})$ e $g \in \mathbf{G}$, o comutador $[w, g] \in cI$. Logo $\gamma_3(\mathbf{G}) = cI$.

Supondo por indução que $\gamma_i(\mathbf{G}) = cI^{i-2}$, temos que

$$\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) = [\gamma_i(\mathbf{G}), \mathbf{G}] = [cI^{i-2}, \mathbf{G}].$$

Para quaisquer $w \in \gamma_i(\mathbf{G})$ temos que $w = c^\sigma$, com $\sigma \in I^{i-2}$. Assim

$$[w, a] = [c^\sigma, a] = c^{-\sigma} c^{\sigma a} = c^{-\sigma} c^{\sigma x} = c^{-\sigma + x\sigma} = c^{\sigma(x-1)} = c^{\sigma X},$$

onde $\sigma X \in I^{(i+1)-2}$. Conseqüentemente $c^{\sigma X} \in cI^{(i+1)-2}$. E seguindo o raciocínio acima, deduzimos que $[w, g] \in I^{(i+1)-2}$, $\forall \sigma \in I^{i-2}$ e $\forall g \in \mathbf{G}$. Donde concluímos que $\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) = cI^{(i+1)-2}$, como afirmamos.

Sejam agora $\varphi, \psi \in A$ tais que

$$\begin{cases} a^p = c\varphi, \\ b^p = c\psi. \end{cases}$$

Temos então, por resultados anteriores, que as seguintes relações valem:

$$X\varphi = 0, \quad Y\psi = 0, \quad -X\psi = N(y), \quad Y\varphi = N(x). \quad (1.19)$$

Aqui a norma $N(z)$ de um elemento z em A é definida como

$$N(z) = 1 + z + \dots + z^{p-1} = p + \binom{p}{2}(z-1) + \dots + \binom{p}{i}(z-1)^{i-1} + \dots + (z-1)^{p-1}.$$

Um exemplo de como construir grupos metabelianos 2-gerados especificando os dados acima e usando o método de extensão apresentado em [[7] pág. 130-133] é dado a seguir.

Exemplo 1.35. [15] Seja $p > 3$ um número primo e seja

$$M = \langle c_0, u_1, v_1, u_2, w_2, v_2 \rangle$$

um p -grupo abeliano elementar de ordem p^6 , escrito aditivamente. Observe que este é um caso particular do desenvolvimento acima, pois aqui estamos trabalhando num p -grupo.

Defina dois endomorfismos X, Y de M por

$$\begin{cases} c_0X = u_1, & c_0Y = v_1 \\ u_1X = u_2, & u_1Y = w_2 \\ v_1X = w_2, & v_1Y = v_2 \\ u_2X = w_2X = v_2X = 0 \\ u_2Y = w_2Y = v_2Y = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que X e Y comutam, e que $X^3 = Y^3 = 0$. Então $x = 1 + X$ e $y = 1 + Y$ são automorfismos comutando em M . Seja A o anel dos endomorfismos de M gerado por x e y , e I o ideal gerado por X e Y . Assim M é um A -módulo cíclico gerado por c_0 , e $pA = 0$, pois M é de expoente p .

Podemos agora construir um grupo metabeliano $F = \langle a, b \rangle$ como uma extensão de M por um grupo abeliano elementar de ordem p^2 , escolhendo $\varphi, \psi \in I^2$ e colocando

$$\begin{cases} [a, b] = c_0, \\ c_0^a = c_0x, & c_0^b = c_0y, \\ a^p = c_0\varphi, & b^p = c_0\psi, \end{cases}$$

de modo que as relações 1.19 são satisfeitas. Mas este de fato é o caso, pois

$$X\varphi, Y\psi, Y\varphi \in I^3 = 0,$$

e

$$N(x) = p + \binom{p}{2}X + \dots + \binom{p}{i}X^{i-1} + \dots + X^{p-1} = 0,$$

uma vez que $pA = 0$ e $X^{p-1} = 0$, pois $p > 3$, e analogamente para $N(y)$. Temos dessa forma construído F , acima mencionado.

Capítulo 2

Grupos de Classe Maximal

Neste capítulo damos a definição de grupos de classe maximal e estudamos algumas de suas propriedades. Tais grupos foram primeiramente estudados por Blackburn e tais resultados foram apresentados em [12].

2.1 Grupos de Classe Maximal

Definição 2.1. Seja \mathbf{G} um p -grupo de ordem p^n com $n \geq 2$. Uma vez que $|\mathbf{G}/\gamma_2(\mathbf{G})| \geq p^2$ então a classe $cl(\mathbf{G})$ de \mathbf{G} é no máximo $n - 1$. Dizemos que \mathbf{G} é um p -grupo de classe maximal se \mathbf{G} tem ordem p^n e classe $n - 1$.

A estrutura do reticulado dos subgrupos normais de um p -grupo de classe maximal fica totalmente determinada pelo lema a seguir.

Lema 2.2. *Seja \mathbf{G} um p -grupo de classe maximal de ordem p^n . Então:*

(i) *Temos que $|\mathbf{G}/\gamma_2(\mathbf{G})| = p^2$ e $|\gamma_i(\mathbf{G}) : \gamma_{i+1}(\mathbf{G})| = p$ para $2 \leq i \leq n - 1$. Assim $|\mathbf{G} : \gamma_i(\mathbf{G})| = p^i$ para $2 \leq i \leq n$.*

(ii) *A não ser que \mathbf{G} seja cíclico de ordem p^2 , temos que $\Phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}'$ e $d(\mathbf{G}) = 2$ (onde $d(\mathbf{G})$ é o número mínimo de geradores de \mathbf{G}).*

(iii) *Os únicos subgrupos normais de \mathbf{G} são os $\gamma_i(\mathbf{G})$ e os subgrupos maximais de \mathbf{G} . Mais precisamente, se N é um subgrupo normal de \mathbf{G} de índice $p^i \geq p^2$ então $N = \gamma_i(\mathbf{G})$.*

(iv) *Se N é um subgrupo normal de \mathbf{G} de índice $\geq p^2$ então \mathbf{G}/N também tem classe maximal.*

(v) $Z_i(\mathbf{G}) = \gamma_{n-i}(\mathbf{G})$ para $0 \leq i \leq n - 1$.

Demonstração. (i) Temos que

$$|\mathbf{G}| = |\mathbf{G} : \mathbf{G}'| \prod_{i=2}^{n-1} |\gamma_i(\mathbf{G}) : \gamma_{i+1}(\mathbf{G})|$$

Agora é suficiente observar que $|\mathbf{G}| = p^n$, e por outro lado, $|\mathbf{G} : \mathbf{G}'| \geq p^2$ e $|\gamma_i(\mathbf{G}) : \gamma_{i+1}(\mathbf{G})| \geq p$ para $2 \leq i \leq n - 1$.

(ii) Sabemos que $\mathbf{G}' \leq \Phi(\mathbf{G})$, por (i) temos que $|\mathbf{G} : \Phi(\mathbf{G})| \leq p^2$. Se $|\mathbf{G} : \Phi(\mathbf{G})| = p$ então $\mathbf{G}/\Phi(\mathbf{G})$ é cíclico e \mathbf{G} também é cíclico e de ordem p^2 . Caso contrário $|\mathbf{G} : \Phi(\mathbf{G})| = p^2$ e $d(\mathbf{G}) = 2$.

(iii) Seja N um subgrupo normal de \mathbf{G} tal que $|\mathbf{G} : N| = p^i$ com $0 \leq i \leq n$. Se $i = 0$ ou $i = 1$ então $N = \mathbf{G}$ ou N é maximal em \mathbf{G} respectivamente. Caso Contrário, se $i \geq 2$ temos que $\gamma_i(\mathbf{G}) \leq N$. Uma vez que $|\mathbf{G} : \gamma_i(\mathbf{G})| = p^i$, concluímos que $N = \gamma_i(\mathbf{G})$.

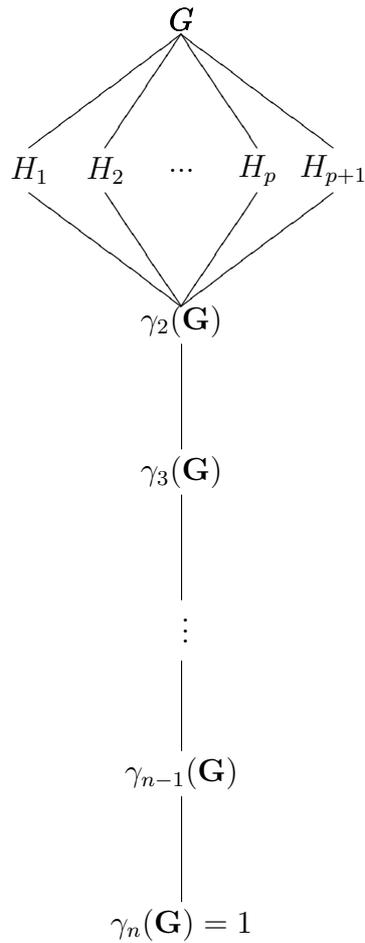
(iv) Isto é imediato de (iii) e (i), uma vez que a classe de $\mathbf{G}/\gamma_i(\mathbf{G})$ é $i - 1$ sempre que $i \leq n$.

(v) O resultado é óbvio para $n = 2$, podemos então assumir que $n \geq 3$. Então o grupo fator $\mathbf{G}/Z_{n-3}(\mathbf{G})$ não é abeliano e conseqüentemente o quociente deste grupo pelo centro não é cíclico. Assim $|\mathbf{G} : Z_{n-2}(\mathbf{G})| \geq p^2$. Uma vez que $|Z_{i+1}(\mathbf{G}) : Z_i(\mathbf{G})| \geq p$ para $0 \leq i \leq n - 3$ e

$$p^n = |\mathbf{G}| = |\mathbf{G} : Z_{n-2}(\mathbf{G})| \prod_{i=0}^{n-3} |Z_{i+1}(\mathbf{G}) : Z_i(\mathbf{G})|,$$

todas desigualdades acima, de fato, são igualdades. Segue que $|\mathbf{G} : Z_i(\mathbf{G})| = p^{n-i}$ para $0 \leq i \leq n - 2$ e pela parte (iii), $Z_i(\mathbf{G}) = \gamma_{n-i}(\mathbf{G})$. ■

Um diagrama do reticulado dos subgrupos normais $\mathfrak{N}(\mathbf{G})$ de um p -grupo \mathbf{G} de classe maximal de ordem p^n pode ser apresentado como segue, no qual podemos observar que \mathbf{G} tem exatamente $p + 1$ subgrupos maximais, H_1, H_2, \dots, H_{p+1} e o restante dos subgrupos normais são os $\gamma_i(\mathbf{G})$.



2.2 Grau de Comutatividade

Falaremos agora de um importante conceito que tem um papel fundamental no estudo de p -grupos de classe maximal.

No que segue, quando \mathbf{G} for um p -grupo de classe maximal, escreveremos $\mathbf{G}_i = \gamma_i(\mathbf{G})$ para $i \geq 2$ e $\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}$.

Definição 2.3. Seja \mathbf{G} um p -grupo de classe maximal de ordem p^n . Definimos $\mathbf{G}_1 = C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}_2/\mathbf{G}_4)$. Em outras palavras, \mathbf{G}_1 é composto pelos elementos $x \in \mathbf{G}$ tal que $[x, \mathbf{G}_2] \leq \mathbf{G}_4$.

Se N é um subgrupo normal de \mathbf{G} tal que $|\mathbf{G}/N| \geq p^4$, temos pela definição que $(\mathbf{G}/N)_1 = \mathbf{G}_1/N$.

Teorema 2.4. *Seja G um p -grupo de classe maximal. Então G_1 é um subgrupo maximal característico de G .*

Demonstração. Seja $\varphi \in \text{Aut}(G)$. Uma vez que G_2 e G_4 são subgrupos característicos de G , temos que

$$[\varphi(x), G_2] = [\varphi(x), \varphi(G_2)] = \varphi([x, G_2]) \leq G_4.$$

Isto mostra que G_1 é característico em G .

Por outro lado, temos que G/G_1 mergulha em $\text{Aut}(G_2/G_4)$. Mas $|G_2 : G_4| = p^2$, assim $G_2/G_4 \cong C_{p^2}$ ou $C_p \times C_p$. No primeiro caso, $|\text{Aut}(G_2/G_4)| = p.(p-1)$, no segundo caso $|\text{Aut}(G_2/G_4)| = |\text{GL}_2(p)| = (p^2 - p).(p^2 - 1)$. Em quaisquer casos, a maior potência de p que divide $|\text{Aut}(G_2/G_4)|$ é p , assim deduzimos que $|G : G_1| \leq p$. Se $G_1 = G$ então $G_3 = [G, G_2] = [G_1, G_2] \leq G_4$. Isso é possível somente se $G_3 = 1$, o que contradiz o fato que $|G| \geq p^4$. ■

Segue que, com a notação introduzida acima, $|G_i : G_{i+1}| = p$ para $0 \leq i \leq n-1$ e $G_i = 1$ para $i \geq n$.

Definimos agora o grau de comutatividade, esse invariante pode ser considerado como a chave para a análise da estrutura de um p -grupo de classe maximal, o qual mede o quanto os termos da série $\{G_i\}_{i \geq 1}$ comutam com cada outro.

Definição 2.5. *Seja G um p -grupo de classe maximal. Definimos o grau de comutatividade de G , o qual denotamos por $\ell(G)$ ou simplesmente por ℓ , como sendo*

$$\ell(G) = \max \{k \leq m - 2 \mid [G_i, G_j] \leq G_{i+j+k} \text{ para todo } i, j \geq 1\}.$$

Definição 2.6. *Um p -grupo de classe maximal será chamado excepcional se $\ell(G) = 0$.*

Lema 2.7. *Seja G um p -grupo de classe maximal com $|G| = p^n$ e $n \geq 4$. E suponha que G não é um grupo excepcional. Nós escolhemos elementos s e s_1 em G com*

$$G = \langle G_1, s \rangle \quad e \quad G_1 = \langle G_2, s_1 \rangle.$$

Definimos o elemento s_i ($i \geq 2$) de G recursivamente como $s_i = [s_{i-1}, s]$. Então temos que $G_i = \langle G_{i+1}, s_i \rangle$ para $2 \leq i \leq n-1$.

Demonstração. Temos que

$$\mathbf{G} = \langle \mathbf{G}_1, s \rangle = \langle \mathbf{G}_2, s_1, s \rangle.$$

Uma vez que $\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}' \leq \Phi(\mathbf{G})$ temos que $\mathbf{G} = \langle s_1, s \rangle$. Pela proposição (1.3) temos que

$$\mathbf{G}_2 = \gamma_2(\mathbf{G}) = \langle [s_1, s], \gamma_3(\mathbf{G}) \rangle = \langle s_2, \mathbf{G}_3 \rangle.$$

Suponha por indução que $\mathbf{G}_{i-1} = \langle \mathbf{G}_i, s_{i-1} \rangle$. Uma vez que $\mathbf{G} = \langle s, s_1 \rangle$ segue que

$$\mathbf{G}_i = [\mathbf{G}_{i-1}, \mathbf{G}] = \langle \mathbf{G}_{i+1}, [s_{i-1}, s], [s_{i-1}, s_1] \rangle.$$

Como \mathbf{G} não é excepcional, existe $i \leq n - 1$

$$[s_{i-1}, s_1] \in [\mathbf{G}_{i-1}, \mathbf{G}_1] \leq \mathbf{G}_{i+1}$$

Como $[s_{i-1}, s] = s_i$ temos que $\mathbf{G}_i = \langle \mathbf{G}_{i+1}, s_i \rangle$, o que mostra o resultado. ■

2.3 Elementos Uniformes

Seja \mathbf{G} um grupo de classe maximal de ordem p^n . Da mesma maneira que definimos o subgrupo $\mathbf{G}_1 = C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}_2/\mathbf{G}_4)$, podemos considerar, mais geralmente, os centralizadores de 2-passos $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+2})$ para $1 \leq i \leq n - 2$. Assim como \mathbf{G}_1 , todos esses subgrupos são característicos e maximais em \mathbf{G} . Uma vez que $[\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_1] = [\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2] \leq \mathbf{G}_4$, segue que $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}_1/\mathbf{G}_4) = \mathbf{G}_1$ e, conseqüentemente, é suficiente considerar os centralizadores de 2-passos para $2 \leq i \leq n - 2$.

Definição 2.8. Seja \mathbf{G} um p -grupo de classe maximal de ordem p^n . Dizemos que $s \in \mathbf{G}$ é um *elemento uniforme* se $s \notin \cup_{i=2}^{n-2} C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+2})$.

Podemos imediatamente nos perguntarmos se qualquer p -grupo de classe maximal possui elementos uniformes, isto é, se é verdade ou não que $\mathbf{G} \neq \cup_{i=2}^{n-2} C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+2})$. Blackburn mostrou juntamente com algumas propriedades sobre o grau de comutatividade que isso é sempre verdadeiro.

Teorema 2.9. (Blackburn). *Seja \mathbf{G} um p -grupo de classe maximal, de ordem p^n . Então valem as seguintes afirmações:*

- (i) Se $\ell(\mathbf{G}) = 0$ então $p \geq 5$, n é par e $6 \leq n \leq p + 1$.
- (ii) $\ell(\mathbf{G}/Z(\mathbf{G})) \geq 1$.
- (iii) \mathbf{G} tem elementos uniformes.

Demonstração. A demonstração está feita em detalhes em ([5], capítulo 4, 47-55)

As partes (i) e (ii) no Teorema 2.9 justifica o termo “grupo excepcional” que é usado para grupos de grau de comutatividade zero.

Lema 2.10. *Seja \mathbf{G} um p -grupo de classe maximal, de ordem p^n , e s um elemento uniforme de \mathbf{G} . Se $1 \leq i \leq n - 2$ e $x \in \mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{i+1}$, então $[s, x] \in \mathbf{G}_{i+1} - \mathbf{G}_{i+2}$.*

Demonstração. Como $x \in \mathbf{G}_i$, é óbvio que $[s, x] \in \mathbf{G}_{i+1}$ e temos somente então que mostrar que $[s, x] \notin \mathbf{G}_{i+2}$. Suponha por contradição que $[s, x] \in \mathbf{G}_{i+2}$. Escrevendo $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\mathbf{G}_{i+2}$, isto significa que \bar{s} e \bar{x} comutam em $\bar{\mathbf{G}}$. Temos também que $[s, \mathbf{G}_{i+1}] \leq \mathbf{G}_{i+2}$ ou seja, \bar{s} centraliza $\bar{\mathbf{G}}_{i+1}$. Uma vez que $\mathbf{G}_i = \langle x, \mathbf{G}_{i+1} \rangle$, segue que \bar{s} centraliza $\bar{\mathbf{G}}_i$. Então $[s, \mathbf{G}_i] \leq \mathbf{G}_{i+2}$ e $s \in C_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+2})$, o que contradiz o fato de s ser um elemento uniforme.

■

Teorema 2.11. *Seja \mathbf{G} um p -grupo de classe maximal de ordem p^n e s um elemento uniforme de \mathbf{G} . Então valem as seguintes propriedades:*

- (i) $C_{\mathbf{G}}(s) = \langle s \rangle Z(\mathbf{G})$.
- (ii) $s^p \in Z(\mathbf{G})$ e conseqüentemente $o(s) \leq p^2$ e $|C_{\mathbf{G}}(s)| = p^2$.
- (iii) Os conjugados de s são exatamente os elementos na classe lateral $s\mathbf{G}_2$.
- (iv) Para $0 \leq t \leq n - 4$, o subgrupo $H = \langle s, \mathbf{G}_{t+1} \rangle$ é um p -grupo de classe maximal de ordem p^{n-t} tal que $H_i = \mathbf{G}_{i+t}$ para $i \geq 1$. Assim temos que $\ell(H) = n - t - 2$ ou $\ell(H) \geq \ell(\mathbf{G}) + t$.

Demonstração. (i) Seja g um elemento qualquer de \mathbf{G} . Como $\mathbf{G} = \langle s \rangle \mathbf{G}_1$ podemos escrever $g = s^i x$, onde $i \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbf{G}_1$. Então $g \in C_{\mathbf{G}}(s)$ se, e somente se, $[s, x] = 1$. Mas, de acordo com Lema 2.10, se $x \in \mathbf{G}_i - \mathbf{G}_{i+1}$ com $1 \leq i \leq n - 2$ então $[s, x] \in \mathbf{G}_{i+1} - \mathbf{G}_{i+2}$ e, em particular, $[s, x] \neq 1$. Segue que $x \in \mathbf{G}_{n-1} = Z(\mathbf{G})$ (de acordo com 2.2). Conseqüentemente $C_{\mathbf{G}}(s) = \langle s \rangle Z(\mathbf{G})$.

(ii) Na prova de (i) vimos que $C_{\mathbf{G}_1}(s) = Z(\mathbf{G})$. Como $s^p \in \mathbf{G}_1$ comuta com s , segue que $s^p \in Z(\mathbf{G})$.

(iii) A cardinalidade da classe de conjugação de s em \mathbf{G} é $|\mathbf{G} : C_{\mathbf{G}}(s)| = p^{n-2} = |s\mathbf{G}_2|$.

Uma vez que qualquer conjugado de s pertence a $s\mathbf{G}_2$ ($s^g = s[s, g]$), deduzimos que os elementos na classe lateral $s\mathbf{G}_2$ são precisamente os conjugados de s .

(iv) Não a nada a se provar se $t = 0$, assim podemos assumir que $t \geq 1$. Está claro pela parte (ii) que $|H| = p|\mathbf{G}_{t+1}| = p^{n-t}$. Aplicando 2.10 repetidamente, para qualquer $x \in \mathbf{G}_{t+1} - \mathbf{G}_{t+2}$ temos que

$$[x, s, \overset{i-1}{\dots}, s] \in \mathbf{G}_{i+t} - \mathbf{G}_{i+t+1} \text{ para } 2 \leq i \leq n - t - 1.$$

Em particular, para $i = n - t - 1$ segue que $1 \neq [x, s, \overset{n-t-2}{\dots}, s] \in H_{n-t-1}$ e H têm classe maximal. Em ordem, para provar que $H_i = \mathbf{G}_{i+t}$, suporemos primeiro que $i \geq 2$. Por 2.3 temos que H_i tem um elemento em $\mathbf{G}_{i+t} - \mathbf{G}_{i+t+1}$. Usando esta propriedade não somente com H_i , mas também com qualquer H_j contido em H_i , deduzimos que H_i tem elementos em $\mathbf{G}_k - \mathbf{G}_{k+1}$ para $i + t \leq k \leq n - 1$. Conseqüentemente $\mathbf{G}_{i+t} \leq H_i$ e, uma vez que ambos os subgrupos têm a mesma ordem, segue a igualdade. Por outro lado, $[\mathbf{G}_{t+1}, H_2] = [\mathbf{G}_{t+1}, \mathbf{G}_{t+2}] \leq \mathbf{G}_{2t+3} \leq \mathbf{G}_{t+4} = H_4$ e obtemos que $H_1 = \mathbf{G}_{t+1}$. Finalmente, se $\ell = \ell(\mathbf{G})$ então $[H_i, H_j] = [\mathbf{G}_{i+t}, \mathbf{G}_{j+t}] \leq \mathbf{G}_{i+j+\ell+2t} = H_{i+j+\ell+t}$ para quaisquer $i, j \geq 1$ e conseqüentemente ou $\ell(H) = n - t - 2$ ou $\ell(H) \geq \ell(\mathbf{G}) + t$. ■

Para finalizar esta seção, vamos mostrar que p -grupo de classe maximal pode ser caracterizado como sendo um grupo que possui um elemento cujo centralizador tem ordem p^2 .

Lema 2.12. *Seja \mathbf{G} um p -grupo com $|\mathbf{G}| = p^n$, $n \geq 3$. Então \mathbf{G} é um p -grupo de classe maximal se, e somente se, existir um elemento g de \mathbf{G} tal que*

$$|\{g^h \mid h \in \mathbf{G}\}| = p^{n-2}.$$

(O lema também vale para $n = 2$)

Demonstração. (1) Seja $g \in \mathbf{G}$ tal que

$$|\{g^h \mid h \in \mathbf{G}\}| = p^{n-2} = |\mathbf{G} : \mathbf{C}_{\mathbf{G}}(g)|$$

Para $n=3$, como \mathbf{G} não é abeliano, \mathbf{G} tem classe 2. Provaremos para $n > 3$ por indução sobre n .

Como $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) \leq \mathbf{C}_G(g)$ e $g \notin \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ temos que $|\mathbf{Z}(\mathbf{G})| = p$. Seja $\mathbf{B} = \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ e $\mathbf{C}_{G/B}(gB) = L/B$ com

$$L = \{h \mid g^h = gz \text{ com } z = [g, h] \in \mathbf{B}\}.$$

Então a aplicação $h \rightarrow [g, h]$ é um homomorfismo de L em \mathbf{B} com núcleo $\mathbf{C}_G(g)$. Conseqüentemente segue que

$$|L| \leq p|\mathbf{C}_G(g)| = p^3.$$

Seja $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\mathbf{B}$ e $\bar{g} = g\mathbf{B}$, então

$$\left| \left\{ \bar{g}^{\bar{h}} \mid \bar{h} \in \bar{\mathbf{G}} \right\} \right| = |\bar{\mathbf{G}} : \mathbf{C}_{\bar{\mathbf{G}}}(\bar{g})| = |\mathbf{G} : L| \geq p^{n-3}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{g}^{\bar{h}} \mid \bar{h} \in \bar{\mathbf{G}} \right\} \subseteq \bar{g}\bar{\mathbf{G}}' \text{ pois } \bar{g}^{\bar{h}} &= \bar{h}^{-1}\bar{g}\bar{h} = h^{-1}Z(\mathbf{G})gZ(\mathbf{G})hZ(\mathbf{G}) = h^{-1}ghZ(\mathbf{G}) = \\ &= h^{-1}hg[g, h]Z(\mathbf{G}) = gZ(\mathbf{G})[g, h]Z(\mathbf{G}) \in \bar{g}\bar{\mathbf{G}}' \end{aligned}$$

e

$$\left| \left\{ \bar{g}^{\bar{h}} \mid \bar{h} \in \bar{\mathbf{G}} \right\} \right| \leq |\bar{\mathbf{G}}'| \leq p^{n-3},$$

temos então que

$$\left| \left\{ \bar{g}^{\bar{h}} \mid \bar{h} \in \bar{\mathbf{G}} \right\} \right| = p^{n-3}$$

e conseqüentemente pela nossa hipótese de indução

$$e \neq \gamma_{n-2}(\mathbf{G}/\mathbf{B}) = \gamma_{n-2}(\mathbf{G})\mathbf{B}/\mathbf{B}.$$

Logo $\gamma_{n-2}(\mathbf{G}) \not\subseteq \mathbf{B} = \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ e assim $\gamma_{n-1}(\mathbf{G}) \neq e$. Segue que \mathbf{G} é um p -grupo de classe maximal.

(2) Seja \mathbf{G} um p -grupo de classe maximal. Se $p > 2$, então pelo Teorema 2.11, existe um $g \in \mathbf{G}$ com $|\mathbf{C}_G(g)| = p^2$, então

$$|\{g^h \mid h \in \mathbf{G}\}| = |\mathbf{G} : \mathbf{C}_G(g)| = p^{n-2}.$$

Se $p = 2$, por [[3] III 11.9] $\mathbf{G} = \langle a, b \rangle$ com $a^{2^{n-1}} = e$ e $a^b = a^{-1+2^{n-2}}$ ou $a^b = a^{-1}$, então

$$|\{b^h \mid h \in \mathbf{G}\}| = |\{ba^{2^j} \mid j = 0, 1, 2, \dots\}| = 2^{n-2}.$$

Assim tomamos $g = b$. ■

Capítulo 3

O Número de Dilworth

O *número de Dilworth* $D(\mathfrak{A})$ de um conjunto parcialmente ordenado \mathfrak{A} é definido como a máxima cardinalidade possível de uma anti-cadeia em \mathfrak{A} .

Definição 3.1. Seja \mathbf{G} um grupo.

- a) A *largura* $w(\mathbf{G})$ é definida como o número de Dilworth do reticulado $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$, de todos os subgrupos de \mathbf{G} .
- b) A *largura normal* $w_n(\mathbf{G})$ é o $D(\mathfrak{N}(\mathbf{G}))$, onde $\mathfrak{N}(\mathbf{G})$ é o reticulado de todos subgrupos normais de \mathbf{G} .

Para melhor elucidar a definição de largura de um grupo, vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 3.2. Seja $\mathbf{G} = C_{3^3} \times C_{5^5}$. O diagrama dos seus subgrupos pode ser dado por

$j \leq p^a - 1$. Observe que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z^n = x^{in}y^{jn}, \text{ uma vez que } [x, y] = 1,$$

como queremos que a ordem do subgrupo seja p^b para $b \geq 2$, devemos ter então que $z^{p^b} = 1$ e $z^{p^{b-1}} \neq 1$. Se $i = 0$ então o único subgrupo obtido é o único subgrupo de \mathbb{Z}_{p^a} de ordem p^b . Os demais são obtidos compondo

$$x^i, 1 \leq i \leq p-1, \text{ com o } y^{p^{a-b}}, \text{ isto é, } z = x^i y^{p^{a-b}} \text{ pois } z^{p^b} = x^{ip^b} \cdot y^{p^a} = 1.$$

Portanto os subgrupos de ordem p^b são, precisamente, os gerados por $x^i \cdot y^{p^{a-b}}$.

Se b é menor que a , exatamente um desses subgrupos de ordem p^b está contido em \mathbf{G}^p , e seja $W_{b,1}, \dots, W_{b,p-1}$ os subgrupos restantes. Seja $W_{a,1}, \dots, W_{a,p}$ os subgrupos isomorfos com \mathbb{Z}_{p^a} e seja $W_{1,1}, \dots, W_{1,p}$ os subgrupos de ordem p de \mathbf{G} que não estão contidos em \mathbf{G}^p . Afirmamos que o conjunto de todos $W_{i,j}$ formam uma anti-cadeia em $\mathfrak{L}(\mathbf{G})$.

De fato, $W_{i,j}$ é cíclico de ordem p^i e conseqüentemente se $W_{i,j} \leq W_{k,\ell}$ implica $i < k$ e então $W_{i,j} \leq (W_{k,\ell})^p \leq \mathbf{G}^p$ contrariando a escolha de $W_{i,j}$.

$$\text{Isso mostra que } w(\mathbf{G}) \geq p + (a-2)(p-1) + p = a(p-1) + 2.$$

(c) Seja n dado. Temos que existe um c tal que

$$\begin{aligned} \frac{p^c-1}{p-1} &= 1 + p + p^2 + \dots + p^{c-1} > n \\ p^c - 1 &> n(p-1) \\ c &> \log_p n(p-1) + 1. \end{aligned}$$

Portanto se \mathbf{G} for um p -grupo abeliano elementar de posto c , tal que $c > \log_p n(p-1) + 1$, temos por (a) que $w(\mathbf{G}) > n$. Assim para que $w(\mathbf{G}) = n$ devemos escolher um c , onde $c < \log_p n(p-1) + 1$, o que nos da uma quantidade finita de possibilidades.

Se \mathbf{G} for um p -grupo abeliano finito não cíclico, que não é abeliano elementar, temos que

$$G = C_{p^\beta} \times C_{p^\alpha} \times \dots \times C_{p^\sigma}$$

então existe um subgrupo $N \leq \mathbf{G}$ tal que

$$\mathbf{G}/N \cong C_p \times C_{p^a}.$$

Portanto se tomarmos $a > \frac{n-2}{p-1}$ temos por (b) que $w(\mathbf{G}) > n$. Assim temos que tomar $a < \frac{n-2}{p-1}$, o que novamente nos dá um número finito de possibilidades.

Portanto temos um número finito de p -grupos abelianos finitos não cíclicos de largura n . ■

Proposição 3.5. *Sejam p um primo e \mathbf{G} um p -grupo não-cíclico finito.*

(a) *Temos que $w(\mathbf{G}) \geq p + 1$.*

(b) *Se $w(\mathbf{G}) = p + 1$ então ou \mathbf{G} é isomorfo ao grupo dos quatérnios de ordem 8 ou $\mathbf{G} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. (a) Como \mathbf{G} é não cíclico, por (1.20) $\mathbf{G}/\Phi(\mathbf{G}) = \langle g_1\Phi(\mathbf{G}) \rangle_p \times \langle g_2\Phi(\mathbf{G}) \rangle_p \times \dots \times \langle g_r\Phi(\mathbf{G}) \rangle_p$, com $r \geq 2$. Seja $N = \langle g_3\Phi(\mathbf{G}) \rangle_p \times \dots \times \langle g_r\Phi(\mathbf{G}) \rangle_p$. Então temos que $\Phi(\mathbf{G}) \leq N$ e sabemos também pelo teorema (1.15) que $\mathbf{G}' \leq \Phi(\mathbf{G})$ e portanto $\mathbf{G}' \leq N$. Tome $g \in \mathbf{G}$ e $n \in N$, temos que

$$gn g^{-1} = gg^{-1}n[n, g^{-1}] = nn_1 \in N$$

assim, $N \triangleleft \mathbf{G}$. Conseqüentemente, $\mathbf{G}/\Phi(\mathbf{G})/N/\Phi(\mathbf{G}) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. E pelo terceiro teorema de isomorfismo temos que

$$\mathbf{G}/\Phi(\mathbf{G})/N/\Phi(\mathbf{G}) \cong \mathbf{G}/N$$

e portanto $\mathbf{G}/N \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Portanto a afirmação segue do lema anterior.

(b) Se \mathbf{G} é um grupo quatérnio generalizado, então imediatamente obtemos $|\mathbf{G}| = 8$. Agora suponha que existe algum grupo ausente em nossa lista e seja \mathbf{G} uma cópia de menor ordem possível. Temos então que existe um subgrupo maximal M de \mathbf{G} contendo um subgrupo isomorfo com $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Por indução temos que $M \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ e assim \mathbf{G} é de ordem p^3 .

Então podemos observar que se $\exp(\mathbf{G}) = p$, então $w(\mathbf{G}) \geq p^2 + p + 1 > p + 1$. Agora, o Lema 3.4 (b) mostra que $w(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2}) \geq 2p$. Por fim, seja \mathbf{G} não abeliano e de expoente p^2 , um argumento análogo ao usado na prova do Lema 3.4 (b) mostra que $w(\mathbf{G}) \geq 2p$. ■

Observemos que para todo p -grupo finito não cíclico \mathbf{G} , temos $w_n(\mathbf{G}) \geq w(\mathbf{G}/\mathbf{G}') \geq p + 1$. A segunda desigualdade é dada por 3.5 (a) e a primeira desigualdade é observada pelo seguinte fato: sejam $\theta : \mathbf{G} \rightarrow \bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\mathbf{G}'$ (o homomorfismo canônico) e $\bar{M} \in \bar{\mathbf{G}}$, assim temos um subgrupo M em \mathbf{G} da seguinte forma: $M = \{g \in \mathbf{G} \mid \theta(g) \in \bar{M}\}$. Tome $m \in M$ e $g \in \mathbf{G}$, então $\theta(gmg^{-1}) = \theta(g)\theta(m)\theta(g)^{-1}$, como \bar{M} é normal em $\bar{\mathbf{G}}$ temos que

$\theta(g)\theta(m)\theta(g)^{-1} \in \bar{M}$, assim $gmg^{-1} \in M$ o que implica que M é normal em \mathbf{G} . Donde se verifica a primeira desigualdade.

Podemos observar que $w_n(\mathbf{G}) = p + 1$ se, e somente se, $\mathfrak{N}(\mathbf{G})$ consiste de um número de diamantes que são ligados por cadeias. E como já vimos, \mathbf{G} é de classe maximal se, e somente se, $\mathfrak{N}(\mathbf{G})$ consiste de exatamente um diamante no topo de uma cadeia.

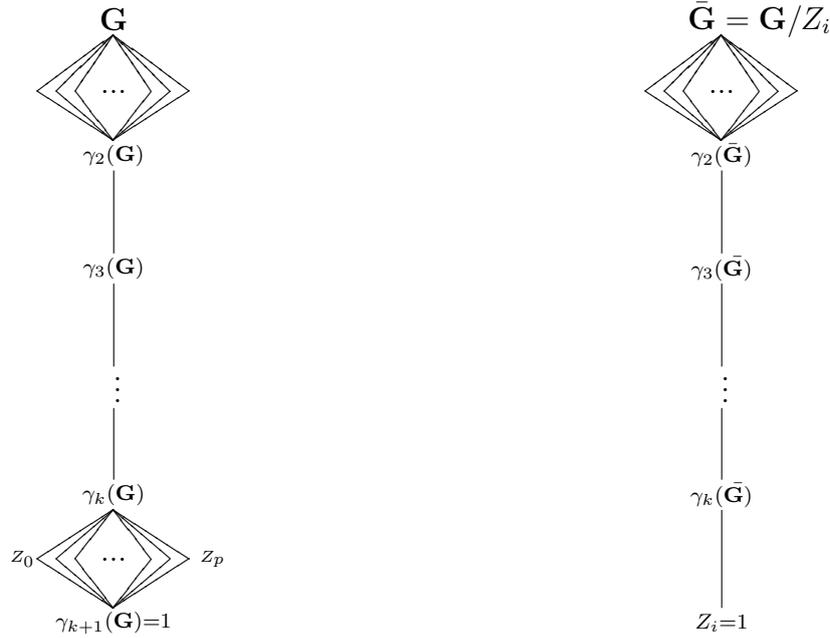
Proposição 3.6. *Seja \mathbf{G} um p -grupo finito de largura normal $p + 1$. Seja $k \geq 4$ um inteiro.*

- (a) *Se $p = 2$, então \mathbf{G} é de classe maximal.*
- (b) *Se $\mathbf{G}/\gamma_k(\mathbf{G})$ é de classe maximal e $k > p$, então \mathbf{G} é de classe maximal.*
- (c) *Se $\mathbf{G}/\gamma_k(\mathbf{G})$ é de classe maximal e k é par, então $\mathbf{G}/\gamma_{k+1}(\mathbf{G})$ é de classe maximal.*
- (d) *Se $\mathbf{G}/\gamma_k(\mathbf{G})$ é de classe maximal e se $[\gamma_2(\mathbf{G}), \gamma_{k-2}(\mathbf{G})] \leq \gamma_{k+1}(\mathbf{G})$ então $\mathbf{G}/\gamma_{k+1}(\mathbf{G})$ é de classe maximal.*
- (e) *Se $\mathbf{G}/\gamma_4(\mathbf{G})$ é de classe maximal e se \mathbf{G} é metabeliano, então \mathbf{G} é de classe maximal.*

Demonstração. Pela observação acima temos que $w_n(\mathbf{G}) \geq w(\mathbf{G}/\mathbf{G}') \geq p + 1$ e, por hipótese, $w_n(\mathbf{G}) = p + 1$, temos que $w(\mathbf{G}/\mathbf{G}') = p + 1$ e portanto, pela proposição 3.5, segue que $\mathbf{G}/\mathbf{G}' \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Assim todos os fatores centrais de \mathbf{G} são abelianos elementares de posto ≤ 2 . Em particular, $|\mathbf{G}'/\gamma_3(\mathbf{G})| \leq p$.

Para $p = 2$ temos que \mathbf{G} é de classe maximal [[3]; pág. 339], assim podemos assumir que p é ímpar. Se $|\mathbf{G}| \leq p^4$, então temos que \mathbf{G} é de classe maximal. De fato, se \mathbf{G} tem ordem p^2 , \mathbf{G} é abeliano e portanto de classe 1; se \mathbf{G} tem ordem p^3 e não é abeliano, então $cl(\mathbf{G}) > 1$, e como $|\mathbf{G}/\mathbf{G}'| = p^2$ e $\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_3(\mathbf{G})$ é cíclico de ordem p (pela proposição 1.3) temos que $cl(\mathbf{G}) = 2$; e se \mathbf{G} tem ordem p^4 , temos também que $|\mathbf{G}/\mathbf{G}'| = p^2$ e $|\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_3(\mathbf{G})| = p$, portanto se $cl(\mathbf{G}) = 2$ então temos que $|\mathbf{G}| = |\mathbf{G}/\mathbf{G}'| |\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_3(\mathbf{G})| = p^3$, uma contradição, assim temos que $cl(\mathbf{G}) = 3$. Assim para o restante da prova assumimos que $|\mathbf{G}| \geq p^5$.

Para provar (b) e (c), podemos admitir que $\gamma_{k+1}(\mathbf{G}) = 1$. Suponhamos, por contradição, que \mathbf{G} não é de classe maximal. Então $\gamma_k(\mathbf{G}) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, e sejam Z_0, \dots, Z_p seus subgrupos de ordem p . Claramente \mathbf{G}/Z_i é de classe maximal.



Por nossas hipóteses, temos que $|\mathbf{G}| = p^{k+2}$. Assim, $|\mathbf{G}/Z_i| = p^{k+1}$. Observemos que, se $k > p$ temos que $k + 1 > p + 1$, e pelo Teorema 2.9 \mathbf{G}/Z_i não é excepcional para nenhum $i = 0, \dots, p$. Agora, se k é par, $k + 1$ é ímpar, novamente pelo Teorema 2.9, temos que \mathbf{G}/Z_i não é excepcional. Portanto, seja $\mathbf{G}_1 = C_{\mathbf{G}}(\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_4(\mathbf{G}))$, e escolha $s \in \mathbf{G} \setminus \mathbf{G}_1$ e $s_1 \in \mathbf{G}_1 \setminus \gamma_2(\mathbf{G})$ e seja $t = [s_{1,k-1} s]$. Então o Lema 2.7 garante que $\gamma_k(\mathbf{G}) = \langle Z_i, t \rangle$ para todo $0 \leq i \leq p$. Mas $\gamma_k(\mathbf{G})$ é o conjunto união dos Z_i e chegamos em $\gamma_k(\mathbf{G}) = Z_i$ para ao menos um índice i , uma contradição.

Para provar (d), primeiro mostraremos que \mathbf{G} pode ser gerado por dois elementos x e y tal que $[x, y, y] \in \gamma_4(\mathbf{G})$. Seja $\mathbf{G} = \langle x, z \rangle$ com $x, z \in \mathbf{G}$. Assim

$$\gamma_3(\mathbf{G})/\gamma_4(\mathbf{G}) = \langle [x, z, x]\gamma_4(\mathbf{G}), [x, z, z]\gamma_4(\mathbf{G}) \rangle$$

Por hipótese, este grupo é cíclico, e assim podemos assumir sem perda de generalidade que

$$[x, z, x] \equiv [x, z, z]^a \text{ mod } \gamma_4(\mathbf{G}) \tag{3.1}$$

Módulo $\gamma_4(\mathbf{G})$ temos as seguintes congruências

$$[x, z^a, x] \equiv [x, z, x]^a = [x, z, z]^{a^2} \text{ por 3.1}$$

e

$$[x, z^a, z^a] \equiv [x, z, z]^{a^2}.$$

Após substituir z por z^a , temos $\mathbf{G} = \langle x, z \rangle$ e

$$[x, z, x] \equiv [x, z, z] \pmod{\gamma_4(\mathbf{G})}. \quad (3.2)$$

Seja $z = xy$ para algum $y \in \mathbf{G}$. Então $\mathbf{G} = \langle x, y \rangle$ e temos

$$[x, z, x] \equiv [x, y, x]$$

e

$$[x, z, z] \equiv [x, y, x][x, y, y]$$

Isso, junto com 3.2 nos dá que

$$[x, y, y] \in \gamma_4(\mathbf{G}) \quad (3.3)$$

Agora $\gamma_k(\mathbf{G})$ é gerado por todos os comutadores $c = [x, y, z_1, z_2, \dots, z_{k-2}]$ onde $z_i = x$ ou $z_i = y$. Pelas nossas hipóteses e corolário 1.6, podemos re-arranjar os z_i e escrever $c = [x, y, {}_t y, {}_{k-t-2} x]$ para qualquer inteiro t . Se $t \geq 1$, então por (3.3) temos que $c \in \gamma_{k+1}(\mathbf{G}) = 1$, e portanto $\gamma_k(\mathbf{G}) = \langle [x, y, {}_{k-2} x] \rangle$ é cíclico de ordem p , uma contradição.

Finalmente a parte (e) segue imediatamente de (d). ■

Para finalizar este capítulo exibiremos um exemplo de um p -grupo que tem largura normal $p + 1$ mas que não é de classe maximal.

Exemplo 3.7. [16] Seja p um primo, $p \geq 5$, e seja \mathbf{G} um grupo livre de expoente p e classe 3 nos geradores livres x e y . Então $\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_3(\mathbf{G}) = \langle [x, y]\gamma_3(\mathbf{G}) \rangle$ é cíclico de ordem p e $\gamma_3(\mathbf{G}) = \langle [x, y, x], [x, y, y] \rangle = Z(\mathbf{G})$ é abeliano elementar de ordem p^2 . Assim $|\mathbf{G}| = p^5$.

Agora determinaremos os subgrupos normais de \mathbf{G} . Seja $N \trianglelefteq \mathbf{G}$ com $|N| = p^a$. Se $a = 1$ então $N \leq Z(\mathbf{G})$ e assim existem $p + 1$ subgrupos N . Se $a = 3$ então $N = \mathbf{G}'$, com isso \mathbf{G} possui exatamente $p + 1$ subgrupos de índice p . Finalmente se $a = 2$, suponha por contradição que $N \neq \gamma_3(\mathbf{G})$. Temos $N \leq Z_2(\mathbf{G}) = \mathbf{G}'$ e assim $N\gamma_3(\mathbf{G})/\gamma_3(\mathbf{G}) = \mathbf{G}'/\gamma_3(\mathbf{G})$. Conseqüentemente $[x, y] = nz$ para algum $n \in N$ e $z \in \gamma_3(\mathbf{G})$. Isso implica

que $[x, y, x] = [nz, x] = [n, x] \in N$ e analogamente obtemos $[x, y, y] \in N$, uma contradição. Assim $\gamma_3(\mathbf{G})$ é o único subgrupo normal de ordem p^2 em \mathbf{G} . Isso mostra que $w_n(\mathbf{G}) = p+1$. Mas claramente, \mathbf{G} não é de classe maximal.

Os grupos que têm largura normal $p+1$, como no exemplo anterior, serão chamados de grupos delgados. Na próxima seção estabeleceremos alguns resultados para tais grupos.

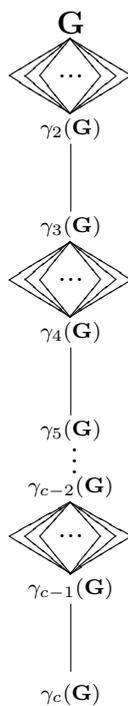
Capítulo 4

p -Grupos Metabelianos Delgados

Nessa seção trataremos os p -grupos delgados; daqui para frente, sempre que falarmos em um grupo \mathbf{G} , estaremos nos referindo a um p -grupo finito.

No capítulo 3 falamos sobre o número de Dilworth, aqui estaremos trabalhando os grupos onde toda anti-cadeia em $\mathfrak{N}(\mathbf{G})$ contém no máximo $p + 1$ elementos, ou seja, grupos que têm *largura normal* $p + 1$.

Um exemplo do diagrama do reticulado dos subgrupos normais de um p -grupo delgado é dado logo abaixo:



onde cada diamante no reticulado acima tem $p + 1$ elementos.

Ao longo desta seção mostraremos os seguintes resultados:

Teorema 4.1. *Seja G um p -grupo metabeliano delgado. Então*

- (a) $\gamma_{p+1}(G)$ é cíclico, e $\gamma_{p+2}(G) = 1$.
- (b) $\mathfrak{N}(G)$ consiste de um diamante no topo, seguido por uma cadeia de comprimento 1, no máximo $p - 2$ diamantes, mais um possível outra cadeia de comprimento 1.

O Teorema acima nos dá imediatamente que:

Corolário 4.2. *Para todo primo p , existe somente um quantidade finita de p -grupos metabelianos delgados.*

Teorema 4.3.

- (a) Um p -grupo metabeliano G é delgado se, e somente se, $G/\gamma_5(G)$ é delgado.
- (b) Um p -grupo metabeliano G com G/G' abeliano elementar de ordem p^2 o qual é de classe 4 e ordem p^7 (máxima possível) é delgado se, e somente se, os geradores a, b podem ser escolhidos tal que

$$[a, b, a, a] = [a, b, b, b]^k,$$

onde k não é um quadrado módulo p .

4.1 p -Grupos Delgados

Um grupo será considerado delgado quando toda anti-cadeia no reticulado dos subgrupos normais tiver no máximo $p + 1$ elementos. Observe que os grupos de classe maximal satisfazem isso, mas tais grupos já foram bem estudados, por exemplo em [[3] III]. Portanto definimos um grupo delgado excluindo a classe dos grupos de classe maximal.

Definição 4.4. Um p -grupo não cíclico G é *delgado* se as duas condições seguintes são satisfeitas:

- (i) toda anti-cadeia em $\mathfrak{N}(G)$ contém no máximo $p + 1$ elementos, e
- (ii) G não é de classe maximal.

Relembremos agora um conhecido resultado de Meier-Wunderli [6]:

Lema 4.5. *Um grupo 2-gerado metabeliano de expoente um primo p tem classe de nilpotência no máximo $p-1$. Em outras palavras, se \mathbf{G} é um p -grupo 2-gerado metabeliano, então $\mathbf{G}^p \geq \gamma_p(\mathbf{G})$.*

Lema 4.6. *Seja \mathbf{G} um p -grupo. Se $\mathbf{G}/\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ tem expoente p , para $1 \leq i \leq p-1$, então $\gamma_j(\mathbf{G})/\gamma_{j+i}(\mathbf{G})$ tem expoente p .*

Demonstração. Em [[3], 2.3(b)] mostra o caso $i = 1$; o caso $i = 2$ foi demonstrado em [1].

Usaremos indução sobre i , e então sobre j . Para $i = 1, 2$, sabemos que o resultado é verdadeiro. Suponha por contradição que $g \in \gamma_j(\mathbf{G})$ tal que $g^p \notin \gamma_{j+i}(\mathbf{G})$. Então g é um produto de comutadores de peso j e maior. Agora pelo processo de coleta de P. Hall mostramos, com nossa hipótese de indução sobre i , que nós podemos assumir que $g = [u, v]$ é ele mesmo um comutador de peso j . Aplicando novamente o processo, nos podemos escrever $[u, v]^p = [u^p, v]P_1P_2$, onde P_1 é o produto de p -ésimas potências de comutadores de peso maior que j , e P_2 é o produto de comutadores de peso no mínimo $j+i$. Assim, $P_2 \in \gamma_{j+i}(\mathbf{G})$, e novamente por nossa hipótese de indução sobre i , temos também que $P_1 \in \gamma_{j+i}(\mathbf{G})$. Finalmente, nossa hipótese de indução sobre j mostra que $[u^p, v] \in \gamma_{j+i}(\mathbf{G})$, a assim $g^p \in \gamma_{j+i}(\mathbf{G})$, uma contradição. ■

Lema 4.7. *Seja \mathbf{G} um p -grupo finito, com p primo.*

(i) *\mathbf{G} é delgado ou de classe maximal se, e somente se, o comprimento máximo de uma anti-cadeia no reticulado dos subgrupos normais é $p+1$.*

(ii) *Se \mathbf{G} é delgado e \mathbf{N} é um subgrupo normal de \mathbf{G} , então \mathbf{N} é um termo da série central inferior de \mathbf{G} se, e somente se, \mathbf{N} é o único subgrupo normal desta ordem.*

(iii) *Se \mathbf{G} é um grupo metabeliano delgado, então $\gamma_3(\mathbf{G})/\gamma_4(\mathbf{G})$ não é cíclico.*

(iv) *Se \mathbf{G} é delgado, então $|\mathbf{G}| \geq p^5$, $cl(\mathbf{G}) > 2$ e $\mathbf{G}/\gamma_3(\mathbf{G})$ tem expoente p .*

4.2 Séries Centrais e Centralizadores

Apresentaremos nesta seção alguns resultados sobre p -grupos delgados que como veremos são similares às propriedades dos p -grupos de classe maximal.

Lema 4.8. *Seja \mathbf{G} um p -grupo delgado. Seja $h \in \gamma_i(\mathbf{G}) - \gamma_{i+1}(\mathbf{G})$. Então $\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) = [h, \mathbf{G}]\gamma_{i+2}(\mathbf{G})$.*

Demonstração. Podemos assumir $\gamma_{i+2}(\mathbf{G}) = 1$. Temos que $[h, \mathbf{G}] \leq \gamma_{i+1}(\mathbf{G})$, pela definição de $\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$. Temos que mostrar agora que $\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) = [h, \mathbf{G}]$. Assuma por contradição que $H = [h, \mathbf{G}] < \gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ (com o símbolo $<$ queremos dizer que H está estritamente contido em $\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$). Temos que $H \trianglelefteq \mathbf{G}$, uma vez que $H \leq \gamma_{i+1}(\mathbf{G}) \leq Z(\mathbf{G})$.

Seja $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/H$. Tome $\bar{h} \in Z(\bar{\mathbf{G}})$ (onde \bar{h} é a classe lateral hH) e seja $g \in \gamma_{i+1}(\mathbf{G}) - H$; então temos que

$$\bar{g} \neq \bar{1} \text{ e } Z(\bar{\mathbf{G}}) \geq \langle \bar{g}, \bar{h} \rangle = \bar{K}.$$

Pelo Lema 4.7 (iv) temos que $\mathbf{G}/\gamma_3(\mathbf{G})$ tem expoente p e pelo Lema 4.6 fazendo $i = 2$ e $j = i$ obtemos que $\gamma_i(\mathbf{G})/\gamma_{i+2}(\mathbf{G})$ tem expoente p , mas $\gamma_{i+2}(\mathbf{G}) = 1$, portanto temos que $\gamma_i(\mathbf{G})$ tem expoente p . Como $h \in \gamma_i(\mathbf{G})$ e $g \in \gamma_{i+1}(\mathbf{G}) \leq \gamma_i(\mathbf{G})$, temos que h e g têm expoente p e portanto \bar{K} tem expoente p . Assim \bar{K} é abeliano elementar, $|\bar{K}| = p^2$ e todo subgrupo de \bar{K} de ordem p é normal em $\bar{\mathbf{G}}$. Assim temos $p + 1$ subgrupos normais em $\bar{\mathbf{G}}$ de ordem p . Como \mathbf{G} é delgado temos que $|\gamma_{i+1}(\mathbf{G})/\gamma_{i+2}(\mathbf{G})| \leq p^2$, e como $H \neq 1$ e por hipótese $H < \gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ temos que $|\gamma_{i+1}(\mathbf{G})| = p^2$. Sejam Z_0, Z_1, \dots, Z_p os subgrupos de $\bar{\mathbf{G}}$ de ordem p e θ o homomorfismo canônico de \mathbf{G} em $\bar{\mathbf{G}}$. Como Z_k tem ordem p , com $k = 0, 1, 2, \dots, p$ temos que $Z_k = \langle zH \rangle$, onde $z \notin H$, ou seja, $Z_k = \{H, zH, z^2H, \dots, z^{p-1}H\}$.

Afirmção: $\theta^{-1}(Z_k) = \langle z, h \rangle$, onde $z, h \in \mathbf{G}$, $H = \langle h \rangle$ e $Z_k = \langle zH \rangle$. E portanto $|\theta^{-1}(Z_k)| = |\langle z, h \rangle| = p^2$.

De fato, tome $g \in \theta^{-1}(Z_k)$, onde $\theta^{-1}(Z_k) = \{g \in \mathbf{G} \mid \theta(g) \in Z_k\}$, temos então que $\theta(g) = z^i H$ o que implica que $g = z^i h^j$, com $i = 0, 1, \dots, p - 1$ e $j = 0, 1, \dots, p - 1$ donde podemos concluir que $g \in \langle z, h \rangle$ e portanto $\theta^{-1}(Z_k) \subseteq \langle z, h \rangle$. Por outro lado, tome $w \in \langle z, h \rangle$, então temos que $w = z^i h^j$. Mas temos que $\theta(w) = wH = z^i h^j H = z^i H$ e portanto $\theta(w) \in Z_k$ o que implica que $w \in \theta^{-1}(Z_k)$, donde segue que $\langle z, h \rangle \subseteq \theta^{-1}(Z_k)$. Portanto $\theta^{-1}(Z_k) = \langle z, h \rangle$, donde segue que $|\theta^{-1}(Z_k)| = |\langle z, h \rangle| = p^2$.

Portanto as pré-imagens dos Z_k , $k = 1, 2, \dots, p - 1$, são $p + 1$ subgrupos de ordem $|\gamma_{i+1}(\mathbf{G})|$ em \mathbf{G} , o que é um absurdo pois contraria o fato de \mathbf{G} ser delgado e ter somente um subgrupo normal de ordem $|\gamma_{i+1}(\mathbf{G})|$, Lema 4.7(ii). ■

Corolário 4.9. *As séries centrais inferior e superior de um p -grupo delgado coincidem.*

Demonstração. Faremos indução sobre a classe c de \mathbf{G} . Assim, basta mostrar que $Z(\mathbf{G}) = \gamma_c(\mathbf{G})$. Como \mathbf{G} é delgado temos que $|\gamma_c(\mathbf{G})| \leq p^2$. Suponhamos primeiramente que $|\gamma_c(\mathbf{G})| = p^2$. Temos que $\gamma_c(\mathbf{G}) \leq Z(\mathbf{G})$, supondo $\gamma_c(\mathbf{G}) < Z(\mathbf{G})$ teríamos $|Z(\mathbf{G})| \geq p^3$, mas como todo subgrupo de $Z(\mathbf{G})$ é normal em \mathbf{G} , teríamos uma anti-cadeia com mais

de $p + 1$ elementos, contrariando o fato de que \mathbf{G} é delgado. Podemos assumir também $|\gamma_c(\mathbf{G})| = p$ e por contradição supor que $\gamma_c(\mathbf{G}) < Z(\mathbf{G})$.

Temos pelo Lema 4.7(ii) que $Z(\mathbf{G}) \leq \gamma_{c-1}(\mathbf{G})$. Então se $g \in Z(\mathbf{G}) - \gamma_c(\mathbf{G})$, tal que $g \in \gamma_{c-1}(\mathbf{G})$, pelo Lema 4.8 $\gamma_c(\mathbf{G}) = [g, \mathbf{G}] = 1$. Contradição. ■

Como vimos no capítulo 2, Lema 2.12, os p -grupos de classe maximal são caracterizados por possuírem um elemento cujo centralizador tem ordem p^2 . Uma tentativa parecida para caracterizar os p -grupos delgados como grupos que têm um elemento cujo centralizador tem ordem p^3 falha. Pois como veremos no exemplo a seguir, um grupo pode possuir um elemento cujo centralizador tem ordem p^3 sem necessariamente ser delgado.

Exemplo 4.10. Seja $\mathbf{G} = \langle a, b \mid a^5 = b^5 = [b, a, a, a] = 1, \gamma_5(\mathbf{G}) = 1 \rangle$.

Onde $Z(\mathbf{G}) = \gamma_4(\mathbf{G}) = \langle [b, a, a, b], [b, a, b, b] \rangle$, o centralizador de b é $\langle b, Z(\mathbf{G}) \rangle$ de ordem 5^3 , mais \mathbf{G} não é delgado, pois o subgrupo $\langle [b, a, a], [b, a, a, b] \rangle$ é normal de ordem 5^2 , mas ele é diferente de $\gamma_4(\mathbf{G})$, contrariando assim 4.7(ii).

Contudo, podemos caracterizar os p -grupos metabelianos delgados como grupos onde a ordem do centralizador de qualquer elemento $g \in \mathbf{G} - \mathbf{G}'$ é p^3 . O teorema a seguir mostra a primeira parte dessa caracterização sem a necessidade do grupo ser metabeliano, mas para provar sua recíproca precisamos adicionar a hipótese do grupo ser metabeliano.

Teorema 4.11. *Seja \mathbf{G} um p -grupo não-abeliano. Se $|C_{\mathbf{G}}(g)| = p^3$, para todo $g \in \mathbf{G} - \mathbf{G}'$. Então \mathbf{G} é delgado.*

Demonstração. Seja \mathbf{G} um contra-exemplo mínimo. Dividimos a demonstração em três passos.

Passo 1: $cl(\mathbf{G}) \geq 3$

Se \mathbf{G} tem classe 2, temos que $\mathbf{G}' \leq Z(\mathbf{G})$; se $z \in Z(\mathbf{G}) - \mathbf{G}'$, $C_{\mathbf{G}}(z) = \mathbf{G}$, e $|\mathbf{G}| = p^3$, e portanto teríamos $\mathbf{G} = Z(\mathbf{G})$, então \mathbf{G} é abeliano, contradição. De modo que $\mathbf{G}' = Z(\mathbf{G})$.

Usaremos agora um resultado de [1] ou [7]: se \mathbf{G} é um p -grupo de classe 2, tal que para todo $g \in \mathbf{G} - \mathbf{G}'$, temos $[g, \mathbf{G}] = \mathbf{G}'$, então \mathbf{G}/\mathbf{G}' é abeliano elementar de posto par. De fato nossas hipóteses dão que $|\mathbf{G}'| = p$ ou $|\mathbf{G}'| = p^2$, pois, como \mathbf{G} não é abeliano existe pelo menos um $g \in \mathbf{G}$ tal que $g \notin Z(\mathbf{G})$ e então temos que $Z(\mathbf{G}) < C_{\mathbf{G}}(g)$ e como $|C_{\mathbf{G}}(g)| = p^3$ então $|Z(\mathbf{G})| \leq p^2$. Se $|\mathbf{G}'| = p$, por $\mathbf{G}' = Z(\mathbf{G})$ podemos aplicar

o resultado acima, pois tomando $g \in \mathbf{G} - \mathbf{G}'$, $|[g, \mathbf{G}]| > 1$ e como $[g, \mathbf{G}] \leq \mathbf{G}'$ obtemos que $|[g, \mathbf{G}]| = p$; mas neste caso $[\mathbf{G} : C_{\mathbf{G}}(g)] = p$ para $g \in \mathbf{G} - \mathbf{G}'$ e $|\mathbf{G}| = p^4$, uma contradição.

Se $|\mathbf{G}'| = p^2$, por nossas hipóteses e Proposição 1.18, \mathbf{G} é um grupo especial. De fato, temos que \mathbf{G} não é abeliano, portanto para que ele seja especial ele deve ter classe 2 e $\mathbf{G}' = Z(\mathbf{G}) = \Phi(\mathbf{G})$ é abeliano elementar. Já temos que \mathbf{G} é de classe 2 e que $\mathbf{G}' = Z(\mathbf{G})$, falta mostrar que $\Phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}'$ e que é abeliano elementar. Observe que \mathbf{G} não pode conter um subgrupo abeliano de ordem maior ou igual a p^4 , pois caso contrário, poderíamos tomar um elemento g nesse subgrupo e fora de \mathbf{G}' e teríamos $|C_{\mathbf{G}}(g)| \geq p^4$, o que não pode acontecer. Assim se H é um subgrupo abeliano de \mathbf{G} , então $|H| \leq p^3$, e portanto $|H/Z(\mathbf{G})| \leq p$. Então pela Proposição 1.18 temos que $\mathbf{G}/Z(\mathbf{G})$ é abeliano elementar o que implica que $\forall g \in \mathbf{G}$, $g^p \in \mathbf{G}'$, assim pelo Teorema 1.16 temos que $\Phi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}'$. Agora para mostrar que $Z(\mathbf{G})$ é abeliano elementar basta mostrar que $\exp(Z(\mathbf{G})) = p$. Dado qualquer elemento $[x, y] \in \mathbf{G}'$ temos que $[x, y]^p = [x^p, y]$, pois $\text{cl}(\mathbf{G}) = 2$, e como já vimos que $x^p \in \mathbf{G}' = Z(\mathbf{G})$ temos que $[x, y]^p = [x^p, y] = 1$. Portanto $Z(\mathbf{G})$ é abeliano elementar. Observemos agora que $|\mathbf{G}/Z(\mathbf{G})| \geq p^2$, pois caso contrário teríamos que \mathbf{G} é abeliano, assim existem $x, y \in \mathbf{G} - \mathbf{G}'$, tal que $[g, x] \neq 1$ e $[g, y] \neq 1$, como $[g, x]$ e $[g, y] \in [g, \mathbf{G}]$ e cada um deles têm ordem p temos que $[g, \mathbf{G}] \geq p^2$ e $[g, \mathbf{G}] \subseteq \mathbf{G}'$ então $[g, \mathbf{G}] = \mathbf{G}'$. Portanto $p^2 = |[g, \mathbf{G}]| = |\mathbf{G} : C_{\mathbf{G}}(g)| = |\mathbf{G} : \langle g \rangle Z(\mathbf{G})|$, de modo que $|\mathbf{G}| \leq p^5$. Se $|\mathbf{G}| = p^5$ podemos aplicar novamente o resultado enunciado acima, obtendo uma contradição; se $|\mathbf{G}| = p^4$, então \mathbf{G} é 2-gerado e pela Proposição 1.3 $\mathbf{G}' = Z(\mathbf{G})$ é cíclico, novamente uma contradição. Assim \mathbf{G} deve ter classe no mínimo 3.

Passo 2: Se $M, N \trianglelefteq G$, $M \neq 1$, $|N| = p$, $N \leq \gamma_c(\mathbf{G})$ e $N \not\leq M$, então $|M| = p$; e tal M sempre existe.

Por indução \mathbf{G}/N é delgado ou de classe maximal, pois

$$|C_{\mathbf{G}/N}(gN)| \leq |C_{\mathbf{G}}(g)|$$

Para mostrar que $|M| = p$ procedemos por contradição, e podemos assumir que $|M| = p^2$. Uma vez que $M \cap Z(\mathbf{G}) \neq 1$, temos que $C_{\mathbf{G}}(M)$ é maximal. Pois caso contrário, se $C_{\mathbf{G}}(M)$ não é maximal, existe um subgrupo maximal H de \mathbf{G} tal que $C_{\mathbf{G}}(M) \leq H$. Assim tome $h \in H - \mathbf{G}'$. Temos que $|C_H(h)| = |M \cap Z(\mathbf{G})| |N| |\langle h \rangle| = p^3$. Mas H não é delgado pois $M \leq H$ e $N \leq H$ e assim existe uma anti-cadeia de largura maior do que $p + 1$, o que contrária a minimalidade de \mathbf{G} . Assim, seja $g \in C_{\mathbf{G}}(M) - \mathbf{G}'$; então

$MN \leq C_{\mathbf{G}}(g)$, pois $M \leq C_{\mathbf{G}}(g)$ e $N \leq Z(\mathbf{G})$. Temos $|MN| = p^3$, assim $MN = C_{\mathbf{G}}(g)$, conseqüentemente $g \in MN \leq Z_2(\mathbf{G})$ e $gN \in Z_2(\mathbf{G}/N)$. Como \mathbf{G}/N é ou delgado ou de classe maximal, temos $Z_2(\mathbf{G}/N) \leq \mathbf{G}'/N$ e $g \in \mathbf{G}'$, uma contradição. Uma vez que \mathbf{G} não é delgado, tal M deve existir.

Passo 3: Conclusão

Nós agora temos que $Z(\mathbf{G}) = MN$ e existe $h \in \gamma_{c-1}(\mathbf{G}) - (\gamma_{c-1}(\mathbf{G}) \cap Z(\mathbf{G}))$. Se $\gamma_c(\mathbf{G}) = N$, nós teríamos que $C_{\mathbf{G}}(h)$ é maximal, e $\langle h \rangle Z(\mathbf{G})$ centralizaria algum $g \in C_{\mathbf{G}}(h) - \mathbf{G}'$; uma vez que $|\langle h \rangle Z(\mathbf{G})| = p^3$, $\langle h \rangle Z(\mathbf{G}) \leq \gamma_{c-1}(\mathbf{G})Z(\mathbf{G})$, poderíamos encontrar uma contradição como no *Passo 2*. Assim $N < \gamma_c(\mathbf{G})$. Uma vez que $\gamma_c(\mathbf{G}) \leq Z(\mathbf{G})$ temos $\gamma_c(\mathbf{G}) = NM$. Portanto \mathbf{G} é delgado, uma contradição. ■

4.3 p -Grupos Metabelianos Delgados

Lema 4.12. *Seja \mathbf{G} um p -grupo metabeliano delgado. Assuma que $\gamma_i(\mathbf{G})/\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ é cíclico, para algum $i \geq 4$. Então $\gamma_i(\mathbf{G})$ é uma imagem epimórfica de \mathbf{G}' .*

Demonstração. Usando as técnicas de anéis apresentadas no capítulo 1, temos que \mathbf{G}' é um A -módulo cíclico fiel. Mostraremos que, com nossas hipóteses, $\gamma_i(\mathbf{G})$ é também um A -módulo cíclico, pois $\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ é seu único submódulo maximal. Como $\gamma_i(\mathbf{G})/\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ é cíclico, temos que $\gamma_i(\mathbf{G}) = \langle h, \gamma_{i+1}(\mathbf{G}) \rangle$, onde $\gamma_i(\mathbf{G})/\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) = \langle h\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) \rangle$.

Afirmção: Se um A -módulo M finitamente gerado contém um único submódulo maximal N então qualquer elemento de N pode ser retirado do conjunto gerador.

De fato, seja $C = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y\}$ um conjunto gerador de M onde $y \in N$. Suponha por contradição que $C' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ não gere M , então C' gera um submódulo próprio contido ou igual a N . Como $y \in N$ temos que C gera um submódulo próprio de M , o que é uma contradição. Portanto C' gera M como um A -módulo.

Portanto, qualquer elemento de $\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ pode ser omitido do conjunto gerador de $\gamma_i(\mathbf{G})$, e assim podemos concluir que $\gamma_i(\mathbf{G}) = \langle h \rangle$. Assim $\gamma_i(\mathbf{G})$ é uma imagem epimórfica de \mathbf{G}' (como um A -módulo). ■

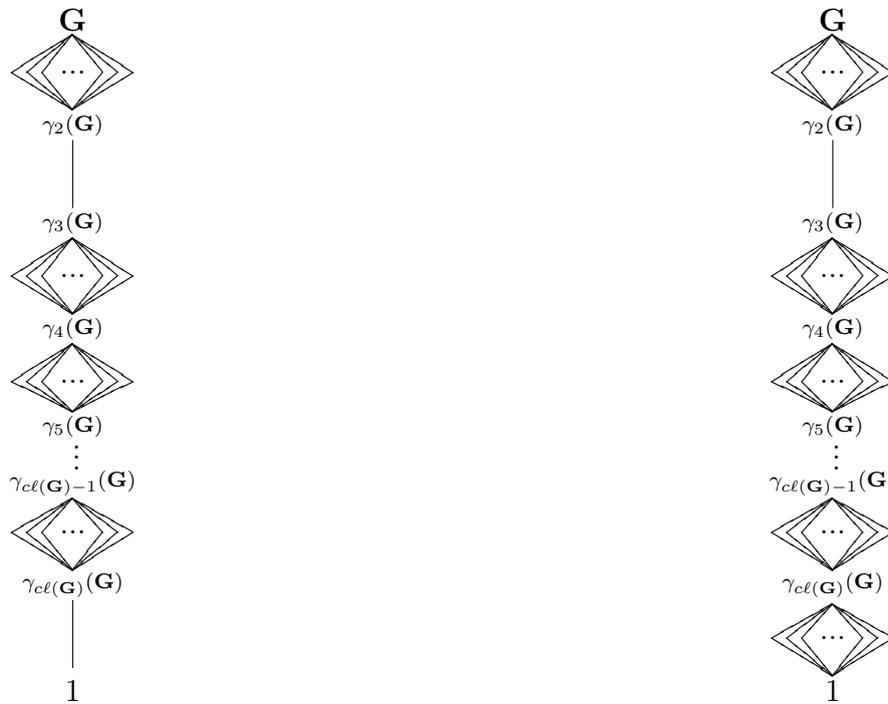
Uma conseqüência do Lema anterior é o seguinte Corolário:

Corolário 4.13. *Seja \mathbf{G} um p -grupo metabeliano delgado, e seja $\gamma_i(\mathbf{G})/\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ cíclico, para algum $i \geq 4$. Então $\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) = 1$, de modo que $cl(\mathbf{G}) \leq i$.*

Demonstração. Seja $N \trianglelefteq \mathbf{G}$ tal que $[N : \gamma_i(\mathbf{G})] = p$. Temos que N é um A -módulo cíclico, pois $\gamma_i(\mathbf{G})$ é seu único submódulo maximal. Portanto N é uma imagem epimórfica de \mathbf{G}' ; e uma vez que $\gamma_3(\mathbf{G})/\gamma_4(\mathbf{G})$ não é cíclico, temos que $\gamma_{i+1}(\mathbf{G}) = 1$. De fato, temos que existe um homomorfismo φ do A -módulo \mathbf{G}' sobre o A -módulo cíclico N . O núcleo desse homomorfismo é um A -submódulo de \mathbf{G}' , que é, um subgrupo normal de \mathbf{G} contido em \mathbf{G}' . Se este núcleo estiver contido em $\gamma_4(\mathbf{G})$, então os $p + 1$ subgrupos normais (A -submódulos) intermediários entre $\gamma_3(\mathbf{G})$ e $\gamma_4(\mathbf{G})$ são aplicados em $p + 1$ subgrupos normais (A -submódulos) com a mesma ordem de $\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$. Mas isso contraria o fato do grupo ser delgado (Lema 4.7 (ii)). De modo que o núcleo deve ser um dos subgrupos intermediários acima, e esta imagem (que é $\{1\}$) é $\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$. ■

Assim todos os fatores centrais inferiores (e superiores) de um p -grupo metabeliano delgado têm ordem p^2 , exceto possivelmente $\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_3(\mathbf{G})$ e $\gamma_{cl(\mathbf{G})}(\mathbf{G})$.

Então o reticulado dos subgrupos normais de um p -grupo metabeliano delgado seria dado por um dos seguintes tipos abaixo.



Lema 4.14. *Seja \mathbf{G} um p -grupo metabeliano delgado, e seja $g \in \mathbf{G} - \gamma_2(\mathbf{G})$. Assuma que $g^p \in \gamma_i(\mathbf{G}) - \gamma_{i+1}(\mathbf{G})$. Então $\gamma_{i+1}(\mathbf{G})$ é cíclico e $\text{cl}(\mathbf{G}) \leq i + 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.8, temos que $[g^p, \mathbf{G}]\gamma_{i+2}(\mathbf{G}) = \gamma_{i+1}(\mathbf{G})$. Trabalhando módulo $\gamma_{i+2}(\mathbf{G})$, temos que:

$$[g^p, \mathbf{G}] \equiv \langle [g^p, g], [g^p, h] \rangle \equiv \langle [g^p, h] \rangle$$

onde escolhemos $h \in \mathbf{G} - \gamma_i(\mathbf{G})$ tal que $\langle g, h \rangle = \mathbf{G}$. O limite sobre a classe é uma consequência imediata do Corolário 4.13. ■

Teorema 4.15. *Seja \mathbf{G} um p -grupo metabeliano delgado. Então $\text{cl}(\mathbf{G}) \leq p + 1$, $\mathbf{G}^{p^2} = 1$, $\gamma_2(\mathbf{G})^p \leq \gamma_{\text{cl}(\mathbf{G})}(\mathbf{G})$ e $\gamma_3(\mathbf{G})^p = 1$.*

Demonstração. Seja ℓ o maior inteiro tal que $\mathbf{G}^p \leq \gamma_\ell(\mathbf{G})$. Pelo Lema 4.7(iv), $\ell \geq 3$. Além disso, se $\mathbf{G}^p \leq \gamma_p(\mathbf{G})$, então pelo resultado de Meier-Wunderli (Lema 4.5) $\mathbf{G}^p = \gamma_p(\mathbf{G})$, de modo que $\ell \leq p$.

Como $\mathbf{G}/\gamma_\ell(\mathbf{G})$ tem expoente p , podemos aplicar o Lema 4.6 para obter que $\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_{\ell+1}(\mathbf{G})$ e $\gamma_3(\mathbf{G})/\gamma_{\ell+2}(\mathbf{G})$ têm expoente p , de modo que $\gamma_2(\mathbf{G})^p \leq \gamma_{\ell+1}(\mathbf{G})$ e $\gamma_3(\mathbf{G})^p \leq \gamma_{\ell+2}(\mathbf{G})$. Conseqüentemente existe um elemento $g \in \mathbf{G} - \gamma_2(\mathbf{G})$ com $g^p \in \gamma_\ell(\mathbf{G}) - \gamma_{\ell+1}(\mathbf{G})$. Pelo Lema 4.14, $\gamma_{\ell+2}(\mathbf{G}) = 1$, e a classe de \mathbf{G} ou é ℓ ou $\ell + 1$. ■

Agora podemos demonstrar a recíproca do Teorema 4.11 no caso de grupos metabelianos:

Teorema 4.16. *Seja \mathbf{G} um grupo metabeliano delgado e $g \in \mathbf{G} - \mathbf{G}'$. Então $|C_{\mathbf{G}}(g)| = p^3$.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbf{G} - \mathbf{G}'$, e escolha um elemento $b \in \mathbf{G}$ de modo que $\mathbf{G} = \langle a, b \rangle$. Temos que $C_{\mathbf{G}'}(a) = C_{\mathbf{G}}(a) \cap \mathbf{G}'$ e portanto $\langle a \rangle C_{\mathbf{G}'}(a) = \langle a \rangle (C_{\mathbf{G}}(a) \cap \mathbf{G}')$ e pela lei modular (Lema 1.19) temos $\langle a \rangle C_{\mathbf{G}'}(a) = C_{\mathbf{G}}(a) \cap \mathbf{G}' \langle a \rangle$. Mas podemos observar que $\mathbf{G}' \langle a \rangle$ é um subgrupo maximal contendo $\langle a \rangle$. E como \mathbf{G} é nilpotente temos que $C_{\mathbf{G}}(a)$ é subnormal, e portanto existe uma seqüência $C_{\mathbf{G}}(a) \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_m \triangleleft \mathbf{G}$. Mas como \mathbf{G}' não contém $\langle a \rangle$ e por outro lado $\langle a \rangle \subseteq C_{\mathbf{G}}(a)$ temos que a seqüência acima se reduz $C_{\mathbf{G}}(a) \triangleleft H_1 \triangleleft \mathbf{G}$, onde H_1 é um subgrupo maximal de \mathbf{G} . Mas $\mathbf{G}' \langle a \rangle$ é o único subgrupo maximal de \mathbf{G} contendo $\langle a \rangle$. Portanto temos que $C_{\mathbf{G}}(a) \subseteq \mathbf{G}' \langle a \rangle$. Assim obtemos $C_{\mathbf{G}}(a) = C_{\mathbf{G}'}(a) \langle a \rangle$. Além disso, $C_{\mathbf{G}'}(a)$ é normal em \mathbf{G} , pois as ações de a e b sobre \mathbf{G}' comutam por conjugação.

Agora, se $C_{\mathbf{G}'}(a) \leq Z(\mathbf{G})$, então $C_{\mathbf{G}'}(a) = Z(\mathbf{G})$. Se $|Z(\mathbf{G})| = p$, temos que:

$$|C_{\mathbf{G}}(a)| = |\langle a \rangle| |C_{\mathbf{G}'}(a)| = p^2$$

assim pelo Lema 2.12 temos que \mathbf{G} é de classe maximal. Contradição.

Por outro lado temos que, se $C_{\mathbf{G}'}(a)$ não está contido em $Z(\mathbf{G})$, então pelo Lema 4.8 $C_{\mathbf{G}'}(a) \leq Z_2(\mathbf{G})$ e $Z(\mathbf{G})$ é cíclico. De fato, suponha que $Z_2(\mathbf{G}) < C_{\mathbf{G}'}(a)$. Então existe $g \in C_{\mathbf{G}'}(a) - Z_2(\mathbf{G})$ e pelo Lema 4.8 temos que $Z_2(\mathbf{G}) = [g, \mathbf{G}]Z(\mathbf{G})$. Trabalhando módulo $Z(\mathbf{G})$ temos que

$$Z_2(\mathbf{G}) = [g, \mathbf{G}] = \langle [g, a], [g, b] \rangle = \langle [g, b] \rangle$$

e portanto $Z_2(\mathbf{G})/Z(\mathbf{G})$ é cíclico. Contradição, pois \mathbf{G} é delgado. Assim $C_{\mathbf{G}'}(a) \leq Z_2(\mathbf{G})$.

Portanto, tome $g \in C_{\mathbf{G}'}(a) - Z(\mathbf{G})$, novamente pelo Lema 4.8 temos que $Z(\mathbf{G}) = [g, \mathbf{G}] = \langle [g, b] \rangle$. Assim obtemos que $Z(\mathbf{G})$ é cíclico.

Assuma por contradição que $C_{\mathbf{G}'}(a) = Z_2(\mathbf{G})$ de ordem p^3 . Uma vez que $[Z_2(\mathbf{G}), b] \leq Z(\mathbf{G})$, e $|Z(\mathbf{G})| = p$, existe um elemento $u \in Z_2(\mathbf{G}) - Z(\mathbf{G})$ o qual é centralizado por b , de modo que $u \in Z(\mathbf{G})$, uma contradição. Portanto, $|C_{\mathbf{G}'}(a) = p^2|$ e cosequentemente $|C_{\mathbf{G}}(a)| = p^3$. ■

Podemos agora provar o Teorema 4.3. Primeiramente, se \mathbf{G} é delgado, seus grupos fatores ou são delgados ou de classe maximal.

Observamos também que em um p -grupo metabeliano delgado, nós temos, por resultados anteriores que

$$|\mathbf{G}| = |\mathbf{G}/\gamma_2(\mathbf{G})| \cdot |\gamma_2(\mathbf{G})/\gamma_3(\mathbf{G})| \cdot \left(\prod_{i=3}^p |\gamma_i(\mathbf{G})/\gamma_{i+1}(\mathbf{G})| \right) \cdot |\gamma_{p+1}(\mathbf{G})| \leq p^2 \cdot p \cdot (p^2)^{p-2} \cdot p = p^{2p}.$$

Seja agora um $\mathbf{G} = \langle a, b \rangle$ um p -grupo delgado de classe 4 e ordem p^7 . Todo grupo 2-gerado com $\mathbf{G}^P \leq \gamma_4(\mathbf{G})$ é um quociente de um grupo F com as mesmas propriedades, e $\gamma_4(F)/\gamma_5(F)$ abeliano elementar de posto 3, como construído no capítulo 1.

Usando a teoria de anéis descrita no capítulo 1, deve haver uma identidade não trivial da forma

$$\alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 = 0 \tag{4.1}$$

em A . Isso decorre do fato que $\gamma_4(\mathbf{G}) = cI^2$ e que $\gamma_4(\mathbf{G}) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Assim, como cX^2 , cXY e $cY^2 \in \gamma_4(\mathbf{G})$ e como vimos acima $\gamma_4(\mathbf{G})$ tem posto 2, existem α, β e γ tais que $\alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 = 0$. Mudando os geradores de \mathbf{G} de modo que a mudança de base sobre \mathbf{G}/\mathbf{G}' é dada por um elemento de $SL(2, p)$, o lado esquerdo de (4.1) é transformado correspondentemente como uma forma quadrática em X, Y . Conseqüentemente, se a forma tem um vetor isotrópico, podemos escolher geradores de modo que em (4.1) temos que $XY = 0$. Mas assim $\langle X, X^2 \rangle$ e $I^2 = \langle X^2, Y^2 \rangle$ são dois submódulos distintos de ordem igual a $|\gamma_4(\mathbf{G})|$, e portanto \mathbf{G} não é delgado.

Portanto, podemos admitir que a forma quadrática é anisotrópica. Logo, pode ser colocada na forma $X^2 - kY^2$, onde k não é um quadrado módulo p . Portanto, $cX^2 = ckY^2$ e assim, $[a, b, a, a] = [a, b, b, b]^k$.

Agora, se $\mathbf{G} = \langle a, b \rangle$ é um grupo metabeliano e no anel associado A a relação

$$X^2 - kY^2 \in I^3 \tag{4.2}$$

vale, onde k não é um quadrado módulo p , então \mathbf{G} é delgado. De fato, seja c a classe de \mathbf{G} , de modo que $I^{c-1} = 0$. Então claramente $I^{c-2} = \langle XY^{c-3}, Y^{c-2} \rangle \neq 0$ é de posto no máximo 2, pois, todas as potências pares de X pode ser reescritas em termos de Y de acordo com (4.2). Nós mostraremos que qualquer A -submódulo N de \mathbf{G}' ou contém, ou está contido em I^{c-2} . Indução sobre c dará que \mathbf{G} é delgado.

Portanto assuma que o submódulo N não está contido em I^{c-2} , de modo que em N existe um elemento congruente a $\alpha XY^{i-3} + \beta Y^{i-2}$ módulo I^{i-1} para algum $i < c$, onde α, β não são ambos zero. Multiplicando por XY^{c-i-1} e Y^{c-i} , temos que N contém

$$\alpha X^2 Y^{c-4} + \beta XY^{c-3} = \beta XY^{c-3} + k\alpha Y^{c-2} \quad \text{e} \quad \alpha XY^{c-3} + \beta Y^{c-2}.$$

Agora $\beta^2 - k\alpha^2$ desaparece somente para $\alpha = \beta = 0$, pois k não é um quadrado módulo p , de forma que estes dois elementos geram I^{c-2} , como queríamos. ■

Referências Bibliográficas

- [1] A. Mann, *Regular p -groups e groups of maximal class*, J. Algebra 42 (1976), 136-141.
- [2] A. Mann, *Groups with small abelian subgroups*, Arch. Math 50 (1988), 210-213.
- [3] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin Heidelberg New York (1967).
- [4] G. Szekeres, *Metabelian Groups with Two Generators*, Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Austral. Nat. Univ. Canberra, August 1965, 323-346 (1967).
- [5] Gustavo A. Fernández-Alcober, *An Introduction to Finite p -groups: Regular p -groups and Groups of Maximal Class*, XVI Escola de Algebra, Brasília, July 200.
- [6] H. Meier-Wunderli, *Metabelsche Gruppen*, Comment, Math. Helv. 25(1951).1-10.
- [7] H. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, 2º ed, Chelsea, New York, 1958.
- [8] J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4th edn., Speinger-Verlag, New York (1995).
- [9] J.S. Robinson, *A course in the Theory of Groups*, 2th edn., Springer (1995).
- [10] F. Levin, *On Some Varieties of Soluble Groups II*, Math. Zeitschr. 103, 103-162 (1968).
- [11] M. Hall Jr., *The Theory of Groups*, 2th edn., Macmillan, New York (1976).
- [12] N. Blackburn, *On a Special Class of p -Grupos*, Acta Math. 100(1958), 45-92.
- [13] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra: I. Basic Concepts*, Springer, New York (1951).
- [14] N. R. Rocco, *Métodos de Lie em Teoria dos Grupos*, Atas da IX Escola de Algebra (segundo volume), Brasília, Coleção Atas nº 17 (1986).

- [15] R. Brandl, A. Caranti e C. M. Scoppola, *Metabelian Thin p -Groups*, Quart. J. Oxford (2), 43 (1992), 157-173.
- [16] R. Brandl, *The Dilworth number of subgroupos lattices*, Arch. Math., vol 50, 502-510 (1988).
- [17] R. Schmidt, *Subgroup Lattices of Groups*, de Gruyter, Berlin (1994).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)