Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos existência e regularidade de soluções fracas do problema de contorno, com condição de fronteira multivalente

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0 u & = & g(u) + f, & \text{em } \Omega, \\ au + b\dfrac{\partial u}{\partial \nu_a} & \in & \beta(u), & \text{em } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{0.1}$$

onde

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ é um domínio limitado,

$a, b \in \mathbb{R}$,

$a_{ij}, a_0, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis,

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua,

$\beta : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ é um operador multivalente

e

$\dfrac{\partial u}{\partial \nu_a}$ designa a derivada co-normal associada a $\mathcal{A}$, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_a} := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i),$$

onde ν é campo normal unitário exterior a $\partial\Omega$ e $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{A}u := -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + a_0 u. \tag{0.2}$$

Em nosso trabalho vamos supor que $\mathcal{A}$ é uniformemente fortemente elíptico, ou seja, existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2, \quad x \in \Omega,\ \xi_i \in \mathbb{R}. \tag{0.3}$$

No capítulo 2, faremos $a = 0$, $b = 0$ e $\beta(r) = \{r\}$ para $r \in \mathbb{R}$ de modo que a condição de fronteira em (0.1) possa ser escrita como $0 \in \beta(u)$ em $\partial\Omega$, isto é, $u = 0$ em $\partial\Omega$. Neste caso, (0.1) fica

$$\begin{cases} \mathcal{A}u &=& g(u) + f & \text{em } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.4}$$

Sob as condições

$$a_{ij},\ a_0 \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \tag{0.5}$$

consideramos a forma bilinear associada a $\mathcal{A}$, dada por

$$B[u,\phi] = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j} dx + \int_\Omega a_0 u \phi dx, \quad u,\ \phi \in H_0^1 := H_0^1(\Omega). \tag{0.6}$$

Mostra-se (cf. Lema B.1) que $B : H_0^1 \times H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ é bilinear e limitada.

Uma solução fraca de (0.4) é por definição uma função $u \in H_0^1$ tal que

$$B[u,\phi] = \int_\Omega (g(u) + f)\phi dx, \qquad \phi \in H_0^1. \tag{0.7}$$

Um autovalor de $\mathcal{A}$ é um número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \mathcal{A}u &=& \mu u & \text{em } \Omega, \\ u &=& 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.8}$$

para algum $u \in H_0^1$, $u \neq 0$ no sentido fraco como em (0.7).

O núcleo de $\mathcal{A}$, denotado por $Ker(\mathcal{A})$, é

$$Ker(\mathcal{A}) = \{v \in H_0^1; B[v, \phi] = 0, \phi \in H_0^1\}. \tag{0.9}$$

Vamos supor que existe $\omega \in H_0^1$, $\omega \neq 0$, tal que

$$Ker(\mathcal{A}) = <\omega> . \tag{0.10}$$

Daí,

$$\text{para cada } v \in Ker(\mathcal{A}), \text{ tem-se } v = \lambda\omega, \quad \text{para algúm } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Façamos:

$$\begin{aligned} \Omega_+ &:= \{x \in \Omega \ ; \ \ \omega(x) > 0\}, \\ \Omega_- &:= \{x \in \Omega \ ; \ \ \omega(x) < 0\}, \\ \Omega_0 &:= \{x \in \Omega \ ; \ \ \omega(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Prova-se que (cf. Mizohata[16, p 368]) ω tem a propriedade da continuação única. Daí, $med(\Omega_0) = 0$.

Apresentamos no capítulo 2 uma demonstração, devido a Hess [?], do seguinte resultado de Landesman & Lazer [?] bem como alguns exemplos e observações.

Teorema A. *Suponha (0.3), (0.5), (0.10) e $g \in C(\mathbb{R})$. Então, uma condição necessária e suficiente para a existência da solução fraca de (0.4) é*

$$g_- \int_{\Omega_-} |\omega| dx - g_+ \int_{\Omega_+} |\omega| dx < \int_\Omega f\omega dx < g_+ \int_{\Omega_-} |\omega| dx - g_- \int_{\Omega_+} |\omega| dx, \tag{0.11}$$

onde

$$g_+ := \lim_{x \to +\infty} g(s) \in \mathbb{R}, \quad g_- := \lim_{x \to -\infty} g(s) \in \mathbb{R} \ \ e \ \ g_- < g(s) < g_+, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Se $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $a_0, f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $\partial\Omega \in C^2$, então,

$$u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

No capítulo 3 faremos $a = 0$, $b = -1$, $a_0 = 0$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $g = 0$ de modo que (0.1) fica

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{A}u & = & f & em\ \Omega, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu_a} & \in & \beta(u) & em\ \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{0.12}$$

Para $t \in \mathbb{R}$, definamos $\beta^0(t) \in \mathbb{R}$ como sendo o elemento de $\beta(t)$ com menor valor absoluto. No caso $\beta(t) = \emptyset$, definamos

$$\beta^0(t) = +\infty \quad \text{quando } t > 0,$$

$$\beta^0(t) = -\infty \quad \text{quando } t < 0.$$

Definamos também:

$$\beta_+ := \lim_{t \to +\infty} \beta^0(t), \qquad \beta_- := \lim_{t \to -\infty} \beta^o(t).$$

Considere o operador

$$A: \quad Dom(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

dado por

$$Au := \mathcal{A}u, \qquad u \in Dom(A),$$

onde

$$Dom(A) = \{u \in H^2(\Omega): \ -\frac{\partial u}{\partial \nu_a} \in \beta(u), \ q.t.p. \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Com estas condições, apresentamos uma demonstração no capítulo 3, devida a Gupta & Hess [?], do seguinte resultado segundo a Schatzman [?].

Teorema B. *Suponha (0.3), $f \in L^2(\Omega)$ e β maximal monotônico. Se*

$$\beta_- < \frac{1}{med(\partial\Omega)} \int_\Omega f dx < \beta_+, \tag{0.13}$$

então $f \in int(R(A))$. Se, adicionalmente, a_{ij}, a_0, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\partial\Omega \in C^\infty(\Omega)$, então $u \in C^\infty(\Omega)$. Se $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < N$, então $u \in C^{0.\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha = 2 - \frac{N}{p}$, se $\frac{N}{2} < p < N$.

Ainda no capítulo 3, faremos $a = 0$, $b = -1$, $a_0 = 0$, $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, e consideremos uma função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no problema (0.1) que se apresenta, na forma

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{A}u & = & g(u) + f & \text{em } \Omega, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu_a} & \in & \beta(u) & \text{em } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{0.14}$$

onde g satisfaz as hipóteses:

$$\text{existem } a,\ b > 0 \text{ tais que } \ |g(t)| < a + b|t|, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{0.15}$$

$$\text{existe } T \geq 0 \text{ tal que } \ tg(t) \leq 0, \quad |t| \geq T. \tag{0.16}$$

E ainda, definimos:

$$g_- := \lim_{t \to -\infty} inf\ g(t), \tag{0.17}$$

$$g_+ := \lim_{t \to +\infty} sup\ g(t). \tag{0.18}$$

Apresentamos, no capítulo 3 uma demonstração, devida a Gupta & Hess [**?**], do seguinte resultado.

Teorema C. *Suponha (0.3), (0.15), (0.16),* $0 \in \beta(0)$ *e* $f \in L^2(\Omega)$*. Se*

$$\beta_- med(\partial\Omega) - g_- med(\Omega) < \int_\Omega f dx < \beta_+ med(\partial\Omega) - g_+ med(\Omega), \tag{0.19}$$

então (0.14) tem uma solução $u \in Dom(A)$*.*

Capítulo 1

Notações e Resultados Auxiliares

1.1 O Operador de Nemytskii

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Usaremos a notação $L^p := L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Uma função $\gamma : \ \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Caratheodory se

$$\begin{array}{cccl} x & \overset{\text{mensurável}}{\longmapsto} & \gamma(x,s) & \text{para cada } s \in \mathbb{R}, \\ s & \overset{\text{contínua}}{\longmapsto} & \gamma(x,s) & \text{para cada } x \in \Omega. \end{array}$$

O operador de Nemytskii associado a γ

$$u \longmapsto \gamma(u)$$

é definido por

$$\gamma(u)(x) := \gamma(x, u(x)) \quad x \in \Omega.$$

Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, mostra-se (cf. Krasnosel'skii [11, p 21]) que $\gamma(u)$ é mensurável.

Valem os seguintes resultados:

Teorema 1.1. *(cf. Krasnosel'skii[11, p 22]). Suponha que o operador γ transforma cada função de L^{p_1} em uma função de L^{p_2} $(p_1,\ p_2 \geq 1)$. Então o operador γ é contínuo.*

Teorema 1.2. *(cf. Krasnosel'skii[11, p 26]). Suponha que o operador γ transforma cada função de L^{p_1} em uma função de L^{p_2} $(p_1,\ p_2 \geq 1)$. Então o operador γ é limitado.*

1.2 Problemas Elípticos Lineares

Lema 1.1. *Seja $n \geq 1$ inteiro, $f \in L^2$. Considere o problema*

$$\begin{cases} \mathcal{A}u - \dfrac{1}{n}u &= f \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Então existe $n_0 > 1$ tal que para $n \geq n_0$, (1.1) tem uma única solução $u^n \in H_0^1$.

Demonstração: Tome $M > 0$ tal que $a_0 - \dfrac{1}{n} + M \geq 0$ considere o problema

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + (a_0 - \frac{1}{n} + M)u &= f \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

observando que

$$a_0 - \frac{1}{n} + M \geq 0 \quad \text{e supondo} \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{1.3}$$

Segue (cf. Teorema B.1) que existe uma única $u \in H_0^1$ satisfazendo (1.2)

Usando B.2 fica definido o operador linear (operador solução associado à (1.2))

$$\begin{array}{ccc} L^2 & \xrightarrow{S_{n,M}} & H_0^1 \\ f & \longmapsto & S_{n,M}f := u. \end{array}$$

Lembramos (cf. Lema B.2) que $S_{n,M}$ é compacto.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + (a_0 - \frac{1}{n} + M)u &= Mu + f \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.4}$$

que é equivelente à

$$u = S_{n,M}[Mu + f], \qquad u \in L^2, \tag{1.5}$$

isto é,

$$u - S_{n,M}(Mu) = S_{n,M}(f).$$

Agora

$$u - S_{n,M}(Mu) = 0,$$

é equivalente à

$$u = S_{n,M}(Mu),$$

ou seja

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + (a_0 - \frac{1}{n})u + Mu &= Mu \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

que por sua vez é equivalente à

$$\begin{cases} \mathcal{A}u &= \dfrac{1}{n}u \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Mas $\mu = 0$ é autovalor isolado de

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0 u &= 0 \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo existe $n_0 > 1$ tal que $\frac{1}{n}$ para $n \geq n_0$ não é autovalor.
Portanto a uníca solução de $u - S_{n,M}(Mu) = 0$ é $u = 0$. Pela Alternativa de Fredhelm (1.4) tem uníca solução $u^n \in H_0^1$.

1.3 Operadores Monotônicos

Sejam X um espaço de Banach real reflexivo e X* o espaço dual de X. Um operador $\beta: X \longrightarrow 2^{X^*}$ é dito operador multivalente.

Utilizamos as seguintes notações:

$$Dom(\beta) := \{u \in X; \;\; \beta(u) \neq \phi\};$$

$$R(\beta) := \cup\{\beta(u); \;\; u \in Dom(\beta)\};$$

$$Graf(\beta) := \{(u, \mu); \;\; u \in Dom(\beta), \; \mu \in \beta(u)\}.$$

Definição 1.1. *β é monotônico se $Graf(\beta) \subset X \times X^*$ é monotônico no seguinte sentido*

$$< \mu_1 - \mu_2,\ u_1 - u_2 > \geq 0, \qquad (u_i, \mu_i) \in Graf(\beta),\ i = 1, 2. \tag{1.6}$$

Definição 1.2. *β é maximal monotônico se dado $S \subset X \times X^*$ monotônico tal que $Graf(\beta) \subset S$, então*

$$S = Graf(\beta). \tag{1.7}$$

Exemplo 1.1. *Considere $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$*

$$\beta(r) = \begin{cases} \{-1\}, & se \quad r < 0, \\ \{0\}, & se \quad r = 0, \\ \{1\}, & se \quad r > 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

β é maximal monotônico.

Exemplo 1.2. *Considere $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$*

$$\beta(r) = \begin{cases} \{-1\}, & r < 0, \\ [-1, 1], & r = 0, \\ \{1\}, & r > 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

β é maximal monotônico.

Exemplo 1.3. *Considere $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$*

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathbb{R} & \longrightarrow & 2^{\mathbb{R}} \\ \beta(r) & = & \{r\} \quad \forall\, r \in \mathbb{R}, \end{array} \tag{1.10}$$

β é maximal monotônico.

Apresentamos, agora, algumas definições importantes:
•$\beta : X \longrightarrow 2^{X^*}$ é 3-monotônico se $< \mu_1,\ u_1 - u_2 > + < \mu_2,\ u_2 - u_3 > + < \mu_3,\ u_3 - u_1 > \geq 0$ para $u_i \in Dom(\beta),\ \mu_i \in \beta(u_i),\ i = 1, 2, 3.$

•$T : X \longrightarrow X^*$ é limitado se $T(B) \subset X^*$ é limitado para cada $B \subset X$ limitado.

•$T : X \longrightarrow X^*$ é compacto se $\overline{T(B)} \subset X^*$ é compacto para cada $B \subset X$ limitado.

•$T : X \longrightarrow X^*$ é demicontínuo se $T : (X, \tau_{\|.\|}) \longrightarrow (X^*, \sigma(X^*, X))$ é contínua, onde $\tau_{\|.\|}$ é a topologia da norma e $\sigma(X^*, X)$ é a topologia fraca de X^*.

•$T : X \longrightarrow X^*$ é hemicontínuo, se dado segumento de reta $s \subset X$, tem-se $T : (s, \tau_{\|.\|}) \longrightarrow (X^*, \sigma(X^*, X))$ é contínua.

•$\beta : X \longrightarrow 2^{X^*}$ é dito limitado-inverso-compacto (LIC) se dado $G \subset X,\ G^* \subset X^*$ limitados, tem-se que $G \bigcap \beta^{-1}(G^*)$ é relativamente compacto.

Exemplo 1.4. *Considere* $K : X^* \longrightarrow X$ *compacto, então* $K^{-1} : X \longrightarrow 2^{X^*}$ *é LIC.*

Observação 1.1. *Usando um resultado, devido a Asplundo [20], podemos supor o espaço de Banach reflexivo* X *munido com a norma* $\|.\|$, *tal que* X *e* X^* *são estritamente convexos.*

Observação 1.2. *Como conseqüência, prova-se que [6] a aplicação dualidade* J, *dada por*

$$Ju := \{\mu \in X^*; \ < \mu, \ u >= \|u\|^2, \quad \|\mu\| = \|u\|\}, \quad u \in X$$

satisfaz,

$$Dom(J) = X, \quad J \ \textit{ univalente, limitada e demicontínua.}$$

Usamos o seguite resultado devido a Brezis:

Teorema 1.3. *Seja* X *um espaço de Banach real reflexivo e considere os operadores*

$$A : X \longrightarrow 2^{X^*} \textit{monotônico,}$$

$$B_1 : X \longrightarrow 2^{X^*} \textit{trimonotônico.}$$

Suponha que

$$(i) \qquad Dom(A) \subset Dom(B_1), \tag{1.11}$$

$$(ii) \qquad 0 \in (A + B_1)(0) \ e, \tag{1.12}$$

$$(iii) \quad A + B_1 : X \longrightarrow 2^{X^*} \ \textit{maximal monotônico e LIC.} \tag{1.13}$$

Suponha ainda que
$B_2 : X \longrightarrow X^*$ *demicontínua e satisfaz*

$$< B_2u, \ u >\geq k\|B_2u\| - c(k) \quad u \in X, \tag{1.14}$$

para cada $k \geq 0$ *e para algum* $c(k) \in \mathbb{R}$.
Então

$$Int(R(A) + R(B_1)) \subset IntR(A + B_1 + B_2).$$

Observação 1.3. *Segue de (*1.14*) que* B_2 *é limitado.*

Antes da demonstração do Teorema 1.3,formulamos e demonstramos alguns resultados auxiliares.

Lema 1.2. *(cf. de Figueiredo[6, p 21]). Sejam $T : X \longrightarrow X^*$ um operador univalente monotônico, hemicontínuo. Então T é maximal monotônico.*

Demonstração: Tome $(y, \vartheta) \in X \times X^*$ tal que

$$< \vartheta - Tx, y - x > \geq 0, \;\; x \in X. \tag{1.15}$$

É suficiente mostrar que $(y, \vartheta) \in Graf(T)$, ie $\vartheta = Ty$.

Sejam $z \in X$ vetor unitário e $t > 0$. Fazendo $x = y - tz$ em (1.15) temos

$$< \vartheta - T(y - tz), tz > \geq 0,$$

donde

$$< \vartheta - T(y - tz), z > \geq 0.$$

Fazendo $t \longrightarrow 0^+$ e usando o fato T é hemicontínuo temos

$$< \vartheta - Ty, z > \geq 0, \;\; z \in X.$$

Daí,

$$\vartheta = Ty.$$

■

Lema 1.3. *(cf. de Figueiredo[6, p 40]). Seja X um espaço de Banach reflexivo e $T : X \longrightarrow 2^{X^*}$ um operador maximal monotônico. Sejam $(u_n, \mu_n) \in Graf(T)$ e $\mu \in X^*$, $u \in X$. Suponhamos*

$$u_n \rightharpoonup u$$

$$\mu_n \rightharpoonup \mu$$

e

$$\overline{lim} < \mu_n, u_n - u > \leq 0. \tag{1.16}$$

Então

$$(u, \mu) \in Graf(T) \;\; e \;\; < \mu_n, u_n > \longrightarrow < \mu, u > .$$

Demonstração: Seja $(v, \vartheta) \in Graf(T)$. Como T é maximal monotônico, temos que

$$< \mu_n - \vartheta, u_n - v > \geq 0. \tag{1.17}$$

Segue que

$$< \mu_n - \vartheta, u_n - u > + < \mu_n - \vartheta, u - v > \geq 0,$$

donde

$$\underline{lim}[< \mu_n - \vartheta, u_n - u > + < \mu_n - \vartheta, u - v >] \geq 0.$$

Logo

$$\overline{lim} < \mu_n - \vartheta, u_n - u > + lim < \mu_n - \vartheta, u - v > \geq 0.$$

Assim

$$\overline{lim} < \mu_n, u_n - u > - lim < \vartheta, u_n - u > + lim < \mu_n, u - v > - lim < \vartheta, u - v > \geq 0.$$

Portanto

$$< \mu, u - v > - < \vartheta, u - v > \geq 0,$$

ou seja,

$$< \mu - \vartheta, u - v > \geq 0.$$

Como T é maximal monotônico então,

$$(u, \mu) \in Graf(T).$$

Fazendo

$$v = u \text{ e } \vartheta = \mu \text{ em } (1.17),$$

temos,

$$< \mu_n, u_n > \geq < \mu_n, u > + < \mu, u_n > - < \mu, u > .$$

Daí

$$\underline{lim} < \mu_n, u_n > \geq < \mu, u > .$$

Por outro lado, de (1.16)

$$\overline{lim} < \mu_n, u_n > \leq < \mu, u >,$$

consequentemente temos,

$$< \mu_n, u_n > \longrightarrow < \mu, u > .$$

$\blacksquare$

Teorema 1.4. *(cf. de Figueiredo [19, p 61]). Sejam B uma bola fechada de raio r, centrada na origem de um espaço de Banach X e $T : B \longrightarrow X$ um operador compacto tal que,*

$$Tx \neq \lambda x, \ \forall \ \|x\|_X = r, \ \forall \lambda > 1.$$

Então T tem um ponto fixo.

Teorema 1.5. *Seja X espaço de Banach real. Suponhamos que*

$$K : X^* \longrightarrow X \text{ completamente contínua, monotônica e } K(0) = 0,$$
$$F : X \longrightarrow X^* \text{ limitada e demicontínua e}$$

existe $\rho > 0$ tal que $< Fu, u >> 0, \ u \in X, \ \|u\|_X = \rho$.
Então existe $u \in X$ tal que,

$$\|u\|_X < \rho \text{ e } u - K(-Fu) = 0.$$

Demonstração: Usaremos Teorema 1.4. Faça,

$$Tu := K(-Fu), \ u \in X.$$

Afirmação 1: $T : X \longrightarrow X$ é contínuo.

De fato, seja $u_n \xrightarrow{X} u$, donde $Fu_n \stackrel{X^*}{\rightharpoonup} Fu$, donde $K(-Fu_n) \xrightarrow{X} K(-Fu)$.

Afirmação 2: $\overline{TB}$ é compacto, se B é limitado.

De fato,

$$TB = K(-F)B = K(-FB).$$

Daí,

$$\overline{TB} = \overline{K(-FB)} \text{ é compacto.}$$

Afirmação 3: $Tu \neq \lambda u \ \forall \|u\|_X = \rho, \ u \in X, \ \lambda > 1$.

De fato, suponha por contradição que existe $u \in X, \ \|u\|_X = \rho$ e $\lambda > 1$ tal que

$$Tu = \lambda u.$$

Daí,

$$0 \leq < K(-Fu), -Fu >=< \lambda u, -Fu >,$$

pois $0 \in K(0)$ e K é monotônico, impossível.
Agora pelo Teorema 1.4, existe $u \in X, \ \|u\|_X \leq \rho$, tal que,

$$u = K(-Fu).$$

Afirmação 4: $\|u\|_X < \rho$.

Caso contrário, temos,

$$< K(-Fu), -Fu >=< u, -Fu >< 0,$$

absurdo.

$\blacksquare$

Teorema 1.6. *Seja X um espaço de Banach real reflexivo. Suponha que*

$$T : X \longrightarrow 2^{X^*} \text{ maximal monotônico, } LIC \text{ e } 0 \in T(0). \tag{1.18}$$

$B : X \longrightarrow X^*$ limitada e demicontínua tal que existem $c, d > 0$ satisfazendo,

$$< Bu, u >\geq -c\|u\|_X - d, \ u \in X. \tag{1.19}$$

Então

$$T + B + \epsilon J : X \longrightarrow 2^{X^*} \text{ é sobrejetora para cada } \epsilon > 0.$$

Demonstração: Pelo Teorema II (cf. de Figueiredo [6, p 29]), $R(T + \frac{\epsilon}{2}J) = X^*$, pelo Lema II4 (cf. de Figueiredo [6, p 33]) $(T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1} : X^* \longrightarrow X$ é monotônico.
Afirmamos que

$$(T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1} \text{ é limitado.}$$

De fato, $(T + \frac{\epsilon}{2}J)$ é coecivo pois,

$$< (T + \frac{\epsilon}{2}J)u, u >=< Tu, u > + \frac{\epsilon}{2} < Ju, u >\geq \frac{\epsilon}{2}\|u\|_X^2.$$

Afirmamos ainda que

$$K := (T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1} \text{ é completamente contínuo.}$$

De fato, seja $\{\mu_n\} \subset X^*$ tal que $\mu_n \overset{X^*}{\rightharpoonup} \mu$. Queremos mostrar que $K\mu_n \xrightarrow{X} K\mu$. Tome $\{\mu_{n_i}\} \subset \{\mu_n\}$. É suficiente mostrar existe $\{\mu_{n_{i_j}}\}$ tal que

$$(T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1}\mu_{n_{i_j}} \xrightarrow{X} (T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1}\mu.$$

Faça $u_n = (T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1}\mu_n$, donde $\mu_n \in (T + \frac{\epsilon}{2}J)u_n$.

Existe $\omega_n \in Tu_n$ tal que $\mu_n = \omega_n + \frac{\epsilon}{2}Ju_n$, donde

$$\mu_{n_i} = \omega_{n_i} + \frac{\epsilon}{2}Ju_{n_i}.$$

Como μ_{n_i} e u_{n_i} são limitados, então ω_{n_i} é limitado. Como T é LIC, então existe $u_{n_{i_j}} \longrightarrow u$.
Agora,

$$u_{n_{i_j}} = (T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1}\mu_{n_{i_j}} \longrightarrow u,$$

$$\omega_{n_{i_j}} \rightharpoonup \mu - \frac{\epsilon}{2}Ju,$$

$$lim < \omega_{n_{i_j}}, u_{n_{i_j}} - u >= 0.$$

Pelo Lema1.3, temos $\mu - \frac{\epsilon}{2}Ju \in Tu$, isto é,

$$\mu \in Tu + \frac{\epsilon}{2}Ju.$$

Portanto

$$u = (T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1}\mu.$$

Mostrando que $(T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1}$ é completamente contínua.

Tome $\omega \in X^*$. Afirmamos que existe $u \in X$ tal que $\omega \in Tu + Bu + \epsilon Ju$.

De fato, isto é equivalente à

$$\omega - (Bu + \frac{\epsilon}{2}Ju) \in Tu + \frac{\epsilon}{2}Ju.$$

que é equivalente à

$$u = (T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1}[\omega - (B + \frac{\epsilon}{2}J)u].$$

Fazendo

$$K\mu = (T + \frac{\epsilon}{2}J)^{-1}\mu \text{ e,}$$

$$Fu = (B + \frac{\epsilon}{2}J)u - \omega.$$

Temos,

$$u = K(-Fu). \tag{1.20}$$

Agora note que F é limitada e demicontínua.

$$
\begin{aligned}
< Fu, u > &= < (B + \frac{\epsilon}{2}J)u - \omega, u > \\
&= < Bu, u > + < \frac{\epsilon}{2}Ju, u > - < \omega, u > \\
&\geq -c\|u\|_X - d + \frac{\epsilon}{2}\|u\|_X^2 - \|\omega\|_{X^*}\|u\|_X.
\end{aligned}
$$

logo existe $\rho > 0$ satisfazem $< Fu, u >> 0,\ \|u\|_X = \rho,\ u \in X$. Como K é completamente contínua, monotônica e $K(0) = 0$, segue do Teorema 1.5, (1.20) tem uma solução.

Ficou provado o Teorema.

■

Demonstração: (do Teorema1.3). Seja $w \in Int(R(A) + R(B_1))$
Faça

$$T := A + B_1,\ B := B_2.$$

Tome $\epsilon > 0$, pelo Teorema 1.6, existe $u_\epsilon \in X$ tal que,

$$\omega \in Au_\epsilon + B_1u_\epsilon + B_2u_\epsilon + \epsilon Ju_\epsilon.$$

Segue que, existem $\xi_\epsilon \in Au_\epsilon$ *e* $\eta_\epsilon \in B_1u_\epsilon$ tais que,

$$\omega = (\xi_\epsilon + \eta_\epsilon) + B_2u_\epsilon + \epsilon Ju_\epsilon,$$

consequentemente

$$< \omega, u_\epsilon >=< (\xi_\epsilon + \eta_\epsilon), u_\epsilon > + < B_2u_\epsilon, u_\epsilon > +\epsilon < Ju_\epsilon, u_\epsilon > .$$

Assim por (1.14) e pela definição de J,

$$\|\omega\|_{X^*}\|u_\epsilon\|_X \geq< (\xi_\epsilon + \eta_\epsilon), u_\epsilon > +k\|B_2u_\epsilon\|_{X^*} - c(k) + \epsilon\|u_\epsilon\|_X^2,$$

ainda por (1.12) obtemos,

$$\|\omega\|_{X^*}\|u_\epsilon\|_X \geq -c(k) + \epsilon\|u_\epsilon\|_X^2,$$

donde

$$\epsilon\|u_\epsilon\|_X^2 \leq c(k) + \|\omega\|_{X^*}\|u_\epsilon\|_X.$$

Daí

$$\epsilon\|u_\epsilon\|_X \leq c, \tag{1.21}$$

para alguma constante $c > 0$.

Agora, existe $\rho > 0$ tal que,

$$\omega - h \in R(A) + R(B_1), \quad h \in X^*, \ \|h\|_{X^*} \leq \rho.$$

Afirmamos que

$$< h, u_\epsilon > \geq -c_h, \tag{1.22}$$

para alguma constante $c_h > 0$ e $\epsilon > 0$.

De fato, sejam $\xi_\epsilon \in Au_\epsilon$ e $\eta_\epsilon \in B_1 u_\epsilon$ tais que,

$$\omega = \xi_\epsilon + \eta_\epsilon + B_2 u_\epsilon + \epsilon J u_\epsilon. \tag{1.23}$$

Sejam $y \in Dom(A)$ e $z \in Dom(B_1)$ tais que,

$$\omega - h = \xi + \eta, \ \xi \in Ay, \ \eta \in B_1 z. \tag{1.24}$$

Subtraindo (1.24) de (1.23) obtemos,

$$h = \xi_\epsilon - \xi + \eta_\epsilon - \eta + B_2 u_\epsilon + \epsilon J u_\epsilon.$$

Assim

$$< h, u_\epsilon - y > = < \xi_\epsilon - \xi, u_\epsilon - y > + < \eta_\epsilon - \eta, u_\epsilon - y > + < B_2 u_\epsilon + \epsilon J u_\epsilon, u_\epsilon - y > .$$

Como A é monotônico,

$$\begin{aligned} < h, u_\epsilon - y > &\geq < \eta_\epsilon - \eta, u_\epsilon - y > + < B_2 u_\epsilon + \epsilon J u_\epsilon, u_\epsilon - y > \\ &\geq < \eta_\epsilon - \eta, u_\epsilon - y > + < B_2 u_\epsilon, u_\epsilon > - < B_2 u_\epsilon, y > + \epsilon < J u_\epsilon, u_\epsilon > - \epsilon < J u_\epsilon, y > . \end{aligned}$$

Usando a definição de J,

$$\begin{aligned} < h, u_\epsilon - y > &\geq < \eta_\epsilon - \eta, u_\epsilon - y > + < B_2 u_\epsilon, u_\epsilon > - \|B_2 u_\epsilon\|_{X^*} \|y\|_X - \epsilon \|u_\epsilon\|_X \|y\|_X \\ &\geq < \eta_\epsilon - \eta, u_\epsilon - y > + k \|B_2 u_\epsilon\|_{X^*} - c(k) - \|B_2 u_\epsilon\|_{X^*} \|y\|_X - \epsilon \|u_\epsilon\|_X \|y\|_X \\ &\geq < \eta_\epsilon - \eta, u_\epsilon - y > + (k - \|y\|_X) \|B_2 u_\epsilon\|_{X^*} - c \|y\|_X - c(k). \end{aligned}$$

Tomando $k > \|y\|_X$ temos,

$$< h, u_\epsilon - y > \geq < \eta_\epsilon - \eta, u_\epsilon - y > - c, \tag{1.25}$$

onde c é uma constante positiva que depende de h.
Tomando $\zeta \in B_1 y$ e observando que $Dom(A) \subset Dom(B_1)$ temos,

$$\begin{aligned}
< \eta_\epsilon - \eta, u_\epsilon - y > &= < \eta_\epsilon, u_\epsilon - y > - < \eta, u_\epsilon - y > \\
&= < \eta_\epsilon, u_\epsilon - y > + < \zeta, y - z > + < \eta, z - u_\epsilon > \\
&\quad - < \eta, u_\epsilon - y > - < \zeta, y - z > - < \eta, z - u_\epsilon > \\
&\geq - < \eta, u_\epsilon - y > - < \zeta, y - z > - < \eta, z - u_\epsilon > \\
&= - < \eta, z - y > + < \zeta, z - y > \\
&= < \zeta - \eta, z - y > \\
&\geq -\|\zeta - \eta\|_{X^*} \|z - y\|_X \\
&= -c,
\end{aligned}$$

onde c é uma constante não negativa.
Por (1.25)

$$< h, u_\epsilon - y > \geq -c.$$

Fica provado (1.22).

Defina:

$$F_\epsilon : X^* \longrightarrow R \text{ por}$$

$$< F_\epsilon, h > = < -h, u_\epsilon > .$$

Temos que,

$$F_\epsilon \in (X^*)^*.$$

$$\begin{aligned}
\|F_\epsilon\|_{\mathcal{L}(X^*,X)} &= \sup_{\|h\|_{X^*} \leq 1} < F_\epsilon, h > \\
&= \sup_{\|h\|_{X^*} \leq 1} < -h, u_\epsilon > \\
&= \|u_\epsilon\|_X.
\end{aligned}$$

Por (1.22), usando Princípio de limitação uniforme, obtemos,

$$\|u_\epsilon\|_X \leq M.$$

De

$$\omega = \xi_\epsilon + \eta_\epsilon + B_2 u_\epsilon + \epsilon J u_\epsilon,$$

temos,

$$\|\xi_\epsilon + \eta_\epsilon + B_2 u_\epsilon - \omega\|_{X^*} = \epsilon \|u_\epsilon\|_X \leq \epsilon M.$$

Assim,

$$\xi_\epsilon + \eta_\epsilon + B_2 u_\epsilon \longrightarrow \omega, \quad \text{quando} \ \ \epsilon \longrightarrow 0.$$

Usando (1.14) e o fato que $\|u_\epsilon\|_X \leq M$, obtemos que

$$(k - M)\|B_2 u_\epsilon\|_{X^*} \leq c(k).$$

Tomando $k \geq M$ temos,

$$\|B_2 u_\epsilon\|_{X^*} \leq \frac{c(k)}{k - M}.$$

Portanto

$$\{\xi_\epsilon + \eta_\epsilon\}_{\epsilon > 0} \text{ é limitado.}$$

Faça $G = \{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, como $A + B_1$ é LIC e $\{\xi_\epsilon + \eta_\epsilon\} \in (A + B_1)(u_\epsilon)$ temos que,

$$G \cap (A + B_1)^{-1}(G^*) \text{ é relativamente compacto,}$$

onde $G^* = \{\xi_\epsilon + \eta_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, ou seja

$$\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0} \cap (A + B_1)^{-1}\{\xi_\epsilon + \eta_\epsilon\}_{\epsilon>0} \text{ é relativamente compacto.}$$

Logo, existe $\epsilon_n \longrightarrow 0$ tal que $u_{\epsilon_n} \longrightarrow u \in X$.
Assim

$$B_2 u_\epsilon \overset{X^*}{\rightharpoonup} B_2 u.$$

Portanto

$$\xi_{\epsilon_n} + \eta_{\epsilon_n} \overset{X^*}{\rightharpoonup} \omega - B_2 u.$$

Como $A + B_1$ é maximal monotônico e $\overline{lim} < \omega - B_2 u_{\epsilon_n}, u_{\epsilon_n} - u >= 0$, segue pelo lema 1.3, que $\omega - B_2 u \in (A + B_1)u$, isto é

$$\omega \in (A + B_1 + B_2)u.$$

O que mostra que

$$Int(R(A) + R(B_1)) \subset IntR(A + B_1 + B_2).$$

Fica então provado o Teorema 1.3.

∎

Capítulo 2

Ressonância: Um Teorema de Landesman & Lazer por P. Hess

O princípal objetivo deste capítulo é apresentar uma demonstração devida à P. Hess do Teorema de Landesman & Lazer sobre problemas ressonântes.

Os princípais passos dessa demonstração consistem em

•Estudar via método de penalização e Teorema do ponto fixo do Schauder. Uma família de problemas associados à (0.4)(seção 2.3),

•Mostrar que a seqüência de soluções encontradas no item anteior são limitadas em H_0^1,

•Passar ao limite na seqüência de problemas penalizados.

Inicialmente discutiremos exemplos do problema (0.4) e a condição de Landesman & Lazer.

Denote por $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ a seqüência de autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Lembramos que

•$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$,

•$\lambda_k \longrightarrow +\infty$,

•$dimKer(-\Delta - \lambda_k) < \infty$.

O problema abaixo é do tipo (0.4)

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\triangle u - \lambda_k u & = & g(u) + f & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

onde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, $g_+ := \lim\limits_{s\to+\infty} g(s) \in \mathbb{R}$, $\quad g_- := \lim\limits_{s\to-\infty} g(s) \in \mathbb{R}$, $f \in L^2$.

2.1 Ressonância no Primeiro Autovalor do Laplaciano

Quando $k = 1$, temos

$$dimKer(-\Delta - \lambda_1) = 1.$$

Faça

$$Ker(-\Delta - \lambda_1) =< \varphi_1 >,$$

onde $\varphi_1 > 0$ e $\int_\Omega \varphi_1^2 dx = 1$. Neste caso (2.1) fica

$$\begin{cases} -\triangle u - \lambda_1 u &= g(u) + f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

e a condição (0.11) se reduz a

$$-g_+ \int_\Omega \varphi_1 dx < \int_\Omega f\varphi_1 dx < -g_- \int_\Omega \varphi_1 dx. \tag{2.3}$$

Seja

$$f = h + t\varphi_1,$$

onde $\int_\Omega h\varphi_1 dx = 0$ e $\int_\Omega \varphi_1^2 dx = 1$.
Daí obtemos

$$-g_+ \int_\Omega \varphi_1 dx < t < -g_- \int_\Omega \varphi_1 dx,$$

isto é

$$g_- \int_\Omega \varphi_1 dx < -t < g_+ \int_\Omega \varphi_1 dx. \tag{2.4}$$

Tomando $g(s) = arctg(s)$ em (2.1) temos

$$g_+ = \frac{\pi}{2}, \qquad g_- = -\frac{\pi}{2}.$$

Então a condição (2.4) fica

$$|t| < \frac{\pi}{2} \int_\Omega \varphi_1 dx.$$

2.2 Ressonância em um Autovalor Qualquer de $\dfrac{d^2}{dx^2}$

Seja $\Omega = (0, \pi)$, de forma que $\Delta u := u''$.

Os autovalores e autofunções de $(-u'', H_0^1((0,\pi)))$ são dados por

$$\lambda_k = k^2 \text{ e } \varphi_k(x) = sen(kx).$$

O problema (2.1) fica

$$\left\{ \begin{array}{lllll} -u'' & - & k^2 u & = & g(u) + f \qquad \text{em } (0,\ \pi), \\ u(0) & = & u(\pi) & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Neste caso, a condição (0.11) fica

$$g_- \int_{\Omega_-} |sen(kx)|dx - g_+ \int_{\Omega_+} |sen(kx)|dx < \int_\Omega f sen(kx)dx < g_+ \int_{\Omega_-} |sen(kx)|dx - g_- \int_{\Omega_+} |sen(kx)|dx.$$

Se $k = 1$, $\ g(s) = arctg(s)$ temos o problema

$$\left\{ \begin{array}{lllll} -u'' & - & u & = & arctg(u) + f \qquad \text{em } (0,\ \pi), \\ u(0) & = & u(\pi) & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

daí (0.11) fica

$$-\frac{\pi}{2} \int_0^\pi sen(x)dx < \int_0^\pi f sen(x)dx < \frac{\pi}{2} \int_0^\pi sen(x)dx.$$

como $f = h + t\text{sen}(x)$, onde $\int_0^1 h\text{sen}(x)dx = 0$, obtemos $|t| < \pi$. Pelo teorema A, (2.6) tem solução se $|t| < \pi$.

Para provar o Teorema A, usaremos argumento de penaliazção. Fórmulamos a seguir alguns resultados auxiliares.

2.3 Penalização, Teorema de Schauder e um Problema de Dirichlet

Para cada inteiro $n \geq 1$, considere o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{A}u - \dfrac{1}{n}u & = & g(u) + f & \qquad \Omega, \\ u & = & 0 & \qquad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

O resultado abaixo garante existência de solução de (2.7) para n suficientemente grande.

Teorema do ponto fixo de Schauder. (cf. Gilbarg & Trudinger [8, p 279]). Seja X um espaço de Banach real e $\mathcal{C} \subset X$ limitado, convexo e fechado. Se $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ contínuo e $\overline{T(\mathcal{C})}$ compacto, então T tem ponto fixo $x \in \mathcal{C}$.

Lema 2.1. *Sob as hipóteses do Teorema A, existe $n_0 > 0$ tal que o problema (2.7) adimite uma solução fraca $u_n \in H_0^1$ para cada $n \geq n_0$.*

Demonstração: (cf. Lema (1.1) Cap 1). Considere o operador $S_n : L^2 \longrightarrow L^2$ associado ao problema

$$\begin{cases} \mathcal{A}u - \dfrac{1}{n}u = f & \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega. \end{cases}$$

e lembre que

$$S_n : \quad L^2 \longrightarrow L^2 \ \text{ linear compacto.}$$

$$S_n(L^2) \subseteq H_0^1,$$

$$\|S_n f\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2}.$$

Por 1.1, o operador de Nemytskii associado à g, isto é

$$\begin{aligned} g : \ L^2 &\longrightarrow L^2, \\ u &\longmapsto g(u) \\ g(u)(x) := (gu)(x), &\quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

é contínuo e limitado.
Agora, observe que (2.7) é equivalente a:

$$u = S_n[g(u) + f], \qquad u \in H_0^1,$$

Considere o operador não-linear:

$$T_n(u) := S_n[g(u) + f], \quad u \in H_0^1.$$

Note que

$$T_n : \ H_0^1 \longrightarrow H_0^1$$

é compacto, pois S_n é compacto e g é limitada e contínua.
Daí

$$\overline{T_n(B_R)} \subset \overline{B_{R'}},$$

onde $\overline{B_{R'}} \subset H_0^1$ é a bola fechada de raio R'.
Pelo Teorema do ponto fixo de Schauder, existe $u_n \in B_R$ tal que

$$T_n(u_n) = u_n,$$

isto é, u_n satisfaz (2.7).

■

2.4 Estimativas na Seqüência de Soluções do Problema Penalizado

Na seção anterior, obtivemos uma seqüência $\{u_n\} \subseteq H_0^1$ de soluções de (2.7). Mostraremos no resultado abaixo que essa seqüência é limitada em H_0^1.

Lema 2.2. *Sob hipóteses do Teorema A, temos*

$$sup\|u_n\|_{H_0^1} < \infty.$$

Demonstração: Suponha por contradição que $\|u_n\|_{H_0^1} \longrightarrow +\infty$, para alguma subseqüência u_n (mantemos a mesma notação). Seja

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1}}.$$

De (2.7) temos, para $\phi \in H_0^1$

$$B[u_n,\ \phi] - \frac{1}{n}\int_\Omega u_n\phi dx = \int_\Omega (g(u_n) + f)\phi dx.$$

Daí

$$B[v_n,\ \phi] - \frac{1}{n}\int_\Omega v_n\phi dx = \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1}}\int_\Omega (g(u_n) + f)\phi dx, \tag{2.8}$$

como H_0^1 é reflexivo, temos passando eventualmente a uma subseqüência que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em } H_0^1,$$

como g é limitada, temos

$$\frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1}}\left|\int_\Omega (g(u_n)+f)\phi dx\right| \leq \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1}}\int_\Omega (c+|f|)|\phi|dx \leq \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1}}|c+|f||_{L^2}\|\phi\|_{L^2}.$$

Logo,

$$\frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1}}\int_\Omega (g(u_n)+f)\phi dx \longrightarrow 0. \tag{2.9}$$

Por outro lado,

$$B[v_n,\ \phi] \longrightarrow B[v,\ \phi] \tag{2.10}$$

e,

$$\int_\Omega v_n\phi dx \longrightarrow \int_\Omega v\phi dx, \tag{2.11}$$

passando o limite em (2.8) e usando (2.9), (2.10) e (2.11) obtemos

$$B[v,\ \phi] = 0. \tag{2.12}$$

Daí,

$$v \in Ker(\mathcal{A}) \quad \text{donde } v = \lambda\omega, \qquad \text{onde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Agora,

$$B[v_n - v,\ v_n - v] = B[v_n,\ v_n - v] - B[v,\ v_n - v] \tag{2.13}$$

e,

$$B[v,\ v_n - v] = 0, \quad pois \ \ v \in Ker(\mathcal{A}). \tag{2.14}$$

Ainda, substituindo ϕ por $v_n - v$ em (2.8) temos,

$$B[v_n,\ v_n - v] = \frac{1}{n}\int_\Omega v_n(v_n - v)dx + \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1}}\int_\Omega (g(u_n)+f)(v_n - v)dx.$$

Então,

$$B[v_n,\ v_n - v] \longrightarrow 0. \tag{2.15}$$

Usando (2.14) e (2.15) em (2.13) obtemos

$$B[v_n - v,\ v_n - v] \longrightarrow 0. \tag{2.16}$$

Pela desigualdade de Gärding (cf. Apêndice Teorema A.6) temos

$$B[v_n - v,\ v_n - v] \geq c_0\|v_n - v\|^2_{H_0^1} - c_1\|v_n - v\|^2_{L^2}.$$

Usando a compacidade da imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ e (2.16) temos

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{em } H_0^1.$$

Como $\|v_n\|_{H_0^1} = 1$ temos $\|v\|_{H_0^1} = 1$ e, $\quad \lambda \neq 0.$
Fazendo $\phi = v$ em (2.8) temos que

$$-\frac{1}{n}\int_\Omega v_n v dx = \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1}}\int_\Omega (g(u_n)+f)v dx,$$

e para n suficiente grande,

$$\frac{1}{n}\int_\Omega v_n v dx > 0,$$

daí,

$$\int_\Omega (g(u_n)+f)v dx < 0,$$

$$\int_\Omega f v dx < -\int_\Omega g(u_n) v dx. \tag{2.17}$$

Agora,

$$u_n(x) \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{se} \quad v(x) > 0, \\ -\infty. & \text{se} \quad v(x) < 0. \end{cases}$$

Lembrando que

$$med(\{x \in \Omega;\quad v(x) = 0\}) = 0.$$

Segue de (2.17) que

$$\int_\Omega f v dx < -\int_{v>0} g(u_n) v dx - \int_{v<o} g(u_n) v dx.$$

Passanda ao limite, obtemos

$$\int_\Omega f v dx \leq -\int_{v>0} g_+ v dx - \int_{v<0} g_- v dx,$$

se $\lambda > 0$

$$\{x \in \Omega;\ v(x) > 0\} = \Omega_+,$$
$$\{x \in \Omega;\ v(x) < 0\} = \Omega_-,$$

se $\lambda < 0$

$$\{x \in \Omega;\ v(x) > 0\} = \Omega_-,$$
$$\{x \in \Omega;\ v(x) < 0\} = \Omega_+.$$

Daí,

$$\int_\Omega f\omega dx \leq -\int_{\Omega_+} g_+|\omega| dx + \int_{\Omega_-} g_-|\omega| dx \quad \text{se} \quad \lambda > 0$$

e,

$$\int_\Omega f\omega dx \geq \int_{\Omega_-} g_+|\omega| dx - \int_{\Omega_+} g_-|\omega| dx \quad \text{se} \quad \lambda < 0,$$

mas, isto contradiz (0.11) na introdução. Fica provado Lema 2.2.

■

2.5 Demonstração do Teorema A

Em primeiro lugar, pelo lema 2.2 $\|u_n\|_{H_0^1}$ é limitada. Passando a uma subseqüência, obtemos

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{em} \quad H_0^1.$$

De (2.7) temos

$$B[u_n,\ \phi] - \frac{1}{n}\int_\Omega u_n\phi dx = \int_\Omega (g(u_n) + f)\phi dx.$$

Agora,

$$\int_\Omega u_n\phi dx \longrightarrow \int_\Omega u\phi dx$$

e usando a imersão compacta $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ e teorema de Lebesgue

$$\int_\Omega (g(u_n) + f)\phi dx \longrightarrow \int_\Omega (g(u) + f)\phi dx,$$

Daí,

$$B[u_n,\ \phi] \longrightarrow \int_\Omega (g(u) + f)\phi dx.$$

Como $\quad u_n \rightharpoonup u$, então $\quad B[u_n,\ \phi] \longrightarrow B[u,\ \phi] = \int_\Omega (g(u) + f)\phi dx$

A seguir, tratamos da regularidade de u.
Faça

$$h(x) := g(u(x)) + f(x) \quad x \in \Omega,$$

onde $h \in L^\infty(\Omega)$. Considere o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{A}u &=& h & \Omega \\ u &=& 0 & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.18}$$

Temos $\partial\Omega \in C^{1,1},\ a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}),\ h \in L^p,\ 1 < p < \infty$.
Pelo teorema B.4, o problema acima tem única solução forte $u \in W_0^{1,p} \bigcap W^{2,p}$, isto é

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathcal{A}u &=& g(u(x)) + f(x) & \Omega \\ u &=& 0 & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.19}$$

Pelo Teorema A.4(v), temos

$$W^{2,p} \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad 0 < \alpha < 1,$$

onde $\quad u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Como $g \in C^1(\mathbb{R})$, temos

$$g(u) \in C^1(\overline{\Omega}) \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \ \ 0 < \alpha < 1.$$

Considere, agora, o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + (a_0 + M)u & = & h(x) + Mu := H(x) & \quad \Omega \\ u & = & 0 & \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2.20}$$

onde

$$h(x) = g(u(x)) + f(x),$$
$$M \geq a_0(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Como $\ f \in C^{0,2}(\overline{\Omega})$, pelo Teorema A.2 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Capítulo 3

Problemas Elípticos com Condições de Fronteira Multivalentes

Dados um domínio limitado Ω com fronteira regular $\partial\Omega$ e $f \in L^{\infty}(\Omega)$. Considere o problema de fronteira livre

$$\begin{cases} -\triangle u(x) & = & f(x), & \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) & = & -1, & u(x) < 0, x \in \partial\Omega, \\ -1 \leq & \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) & \leq 1, & u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) & = & 1, & u(x) > 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde ν é a normal exterior à $\partial\Omega$.

Considere o operador maximal monotônico dado por Exemplo 1.2 (cf. Cap 1 p 9). Neste caso, $\beta^0(r) = -1,\ r < 0;\ \beta^0(r) = 1,\ r > 0;$ e $\beta^0(0) = 0$. Mostra-se que se uma função $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$ satisfaz (3.1) no sentido clássico, então u também satisfaz

$$\begin{cases} -\triangle u & = & f(x) & \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} & \in & \beta(u) & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Agora, considere o problema de evolução que aparece em fenômenos de transmissão de calor(cf. Lions [10, p 19 – 23]).

$$\begin{cases} u_t - \triangle u & = & f(x) & (0,\infty) \times \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(t,.) & \in & \beta(u) & \partial\Omega,\ t \geq 0, \\ u(0,x) & = & g(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

onde f e g são funções dadas e $u := u(t,x)$.

No estado estacionário, isto é, quando u não depende mais de t, escrevemos $u(t,x) := u(x)$ e o problema (3.3) se reduz a (3.2) e equivalentemente à (3.1).

3.1 Um problema de Contorno com Condição de Fronteira Multivalente

Em primeiro lugar, observamos que se $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}),\ a_0 \geq \delta > 0$,

$$B[u,\phi] = \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_\Omega a_{ij} u_{x_i} \phi_{x_j} dx + \int_\Omega a_0 u \phi dx,\ u,\phi \in H^1(\Omega)$$

é bilinear, contínuo e coercivo.

Considere o subespaço de $H^2(\Omega)$ dado por

$$H := \{u \in H^2(\Omega); au + b\frac{\partial u}{\partial \nu_a} \in \beta(u)\ q.t.p. \text{ em } \partial\Omega\}$$

e o operador linear

$$\begin{aligned} A: \quad H &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto Au \end{aligned}$$

definido por

$$Au(x) = \mathcal{A}u(x),\ x \in \Omega.$$

faça

$$H := Dom(A).$$

Com estas notações (0.1) fica

$$Au = g(u) + f,\ u \in H,$$

onde g é um operador Nimytskii (cf. 1.1).

Usaremos nesta seção os seguintes resultados devidos à Brézis.

Teorema 3.1. *(cf. Brézis [22, Teorema I.7]). Suponha $B : H^1 \times H^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ é coecivo. Então para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe uma uníca $u \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$B[u,\phi] = \int_\Omega f\phi dx,\ \phi \in H^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Teorema 3.2. *(cf. Brézis [22, Teorema I.10]). Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$ a solução de (3.4), então*

$$(i) u \in H^2(\Omega), \quad (ii) -\frac{\partial u}{\partial \nu_a} \in \beta(u) \ q.t.p. \ em \ \ \partial\Omega,$$

onde $u|_{\partial\Omega}$, $-\dfrac{\partial u}{\partial \nu_\alpha}|_{\partial\Omega}$ são entedidas no sentido traço.

Teorema 3.3. *(cf. Brézis [22, Teorema I.11]). Sejam $f \in L^p(\Omega), 2 \leq p < N$ e $u \in H^2(\Omega)$ a solução de equação*

$$Au = f, \quad u \in H,$$

então $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha = 2 - \frac{N}{p}$, se $\frac{N}{2} < p < N$.

3.2 Um Teorema de Schatzman por Gupta & Hess

Observamos inicialmente que (0.12) se escreve com

$$\mathcal{A}u = f, \quad u \in H. \tag{3.5}$$

Na demonstração de Teorema B, usaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.4. *(Fórmula de Green generalizada). Se $\partial\Omega \in C^1, a_0 = 0$ e $u, v \in H^2(\Omega)$, então*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_\Omega \mathcal{A}uv dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_\alpha} v d\sigma,$$

onde na última integral $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_\alpha} = \dfrac{\partial u}{\partial \nu_\alpha}|_{\partial\Omega}$ e $v = v|_{\partial\Omega}$ no sentido traço.

Faremos a demonstração deste Teorema no final desta seção.
Demonstração: (do Teorema B). Como $f \in L^2(\Omega)$, segue pelo Teorema 3.1 e Teorema 3.2 que existe $u_n \in H$ tal que

$$Au_n + \frac{1}{n} u_n = f, \tag{3.6}$$

onde $n \geq 1$ inteiro.
Afirmação:

$$\|u_n\|_{L^2} \text{ é limitado.} \tag{3.7}$$

De fato, suponha por contradição $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$.
Faça

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}}, \text{ e } b_n = -\frac{\partial u_n}{\partial \nu_a}.$$

Tomando produto interno com u_n em (3.6) temos

$$< Au_n + \frac{1}{n}u_n, u_n >=< f, u_n >,$$

isto é

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i})u_n dx + \frac{1}{n}\int_{\Omega}u_n^2 dx = \int_{\Omega} f u_n dx.$$

Pelo Fórmula de Green generalizada (cf. Teorema 3.4)

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}dx + \int_{\partial\Omega}b_n u_n d\sigma + \frac{1}{n}\int_{\Omega}u_n^2 dx = \int_{\Omega} f u_n dx.$$

Dividindo por $\|u_n\|_{L^2}^2$, temos

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}a_{ij}\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\frac{\partial v_n}{\partial x_j}dx + \frac{1}{n}\|v_n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\|u_n\|_{L^2}}\{\int_{\partial\Omega}b_n v_n d\sigma - < f, v_n >\} = 0. \tag{3.8}$$

Temos que $b_n \in \beta(u_n), 0 \in \beta(0)$. Como β é monotônico, então

$$b_n v_n \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \partial\Omega. \tag{3.9}$$

Daí,

$$\int_{\partial\Omega} b_n v_n d\sigma \geq 0.$$

Usando a elipticidade uniforme de $\mathcal{A}$ temos

$$c_0\| \bigtriangledown v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{n}\|v_n\|_{L^2}^2 - \frac{1}{\|u_n\|_{L^2}} < f, v_n > \leq 0.$$

Daí,

$$\bigtriangledown v_n \longrightarrow 0, \text{ em } (L^2(\Omega))^N.$$

Daí,

$$v_n \longrightarrow v, \text{ em } H^1(\Omega),$$

e note que

$$v \text{ é constante e } v \neq 0.$$

<u>Caso 1</u> $v > 0$.

Por (3.8)

$$\int_{\partial\Omega} b_n v_n d\sigma \leq < f, v_n > .$$

Daí

$$\lim inf \int_{\partial\Omega} b_n v_n d\sigma \leq < f, v > . \tag{3.10}$$

Afirmamos que

$$b_n v_n \geq \beta^0(u_n)v_n. \tag{3.11}$$

De fato, por (3.9)

$$b_n v_n \geq 0 \ q.t.p. \text{ em } \partial\Omega.$$

Se $v_n \geq 0$, donde $b_n \geq 0$.
Daí,

$$\beta^0(u_n) \leq b_n,$$

donde $b_n v_n \geq \beta^0(u_n)v_n$.

Se $v_n < 0$, temos $b_n \leq 0$.
Agora,

$$\text{se } \beta^0(u_n) > 0, \text{ então } b_n v_n \geq \beta^0(u_n)v_n;$$
$$\text{se } \beta^0(u_n) < 0, \text{ então } b_n \leq \beta^0(u_n), \text{ donde } b_n v_n \geq \beta^0(u_n)v_n.$$

Fica provado a afirmação.

Agora, note que

$$u_n \longrightarrow +\infty, q.t.p. \text{ em } \partial\Omega,$$

pois,

$$u_n = v_n \|u_n\|_{L^2},$$
$$v_n \longrightarrow v,$$
$$\|u_n\|_{L^2} \longrightarrow +\infty.$$

Como $b_n v_n \geq 0$, aplicando o lema de Fatou e (3.10) temos

$$\int_{\partial\Omega} \lim inf \ b_n v_n \leq < f, v > .$$

Usando (3.11) temos

$$\int_{\partial\Omega} \lim inf \ \beta^0(u_n)v_n d\sigma \leq < f, v > .$$

Daí,

$$\int_{\partial\Omega} \beta_+ v d\sigma \leq < f, v >,$$

donde

$$\beta_+ v \text{med}(\partial\Omega) \leq v \int_\Omega f dx.$$

Uma contradição (0.13).
Caso 2 $v < 0$.

Note que

$$u_n \longrightarrow -\infty, \quad q.t.p. \text{ em } \partial\Omega.$$

Analogamente,

$$\int_{\partial\Omega} \beta_- v d\sigma \leq < f, v >,$$

Daí,

$$\beta_- \text{med}(\partial\Omega) \geq \int_{\Omega} f dx.$$

Uma contradição (0.13). Concluimos que $\|u_n\|_{L^2} \leq C$.

De (3.6) temos

$$Au_n = f - \frac{1}{n} u_n \longrightarrow f,$$

como $u_n \rightharpoonup u$, e A é maximal monotônico, segue lema 1.3 $f \in R(A)$.

Fixe $f \in L^2(\Omega)$ satisfazendo (0.13), pelo argumento anterior $f \in R(A)$. Agora, tome $g = f + \delta h$, onde $\delta > 0, \|h\| = 1$.
Tomando δ suficiente pequeno, temos que

$$\beta_- < \frac{1}{med(\partial\Omega)} \int_{\Omega} (f + \epsilon h) dx < \beta_+,$$

se $\epsilon \in (0, \delta)$. Portanto $f + \epsilon h \in R(A)$.
Daí,

$$f \in int(R(A)).$$

Temos que $a_{ij}, f \in C^{\infty}(\Omega)$, como $u \in H$, segue pelo Proposição B.1, $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

Finalmente, se $f \in L^p(\Omega)$, com $2 \leq p < N, u \in H$ solução de (0.12). Segue pelo Teorema 3.3 que $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha = 2 - \frac{N}{p}$, se $\frac{N}{2} < p < N$.

■

Demonstração: (do Teorema 3.4). Como $\partial\Omega \in C^2$, temos $H^2(\Omega) = \overline{C^2(\overline{\Omega})}$, onde o fecho se refere a norma sobolev H^2 (cf. Evans[7, p 252]).
Existem seqüência $u^n, v^n \in C^2(\overline{\Omega})$ tais que

$$u^n \xrightarrow{H^2} u, \; v^n \xrightarrow{H^2} v.$$

Considere um campo vetorial, $F \in C^2(\overline{\Omega})$ dado por

$$F(x) = (0, \cdots, 0, \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u^n}{\partial x_i} v^n}_{j}, 0, \cdots, 0).$$

Pelo Teorema do divergente

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N a_{ij}\frac{\partial u^n}{\partial x_i}\frac{\partial v^n}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_{i=1}^N a_{ij}\frac{\partial u^n}{\partial x_i})v^n dx + \int_{\partial\Omega}(\sum_{i=1}^N a_{ij}\frac{\partial u^n}{\partial x_i}v^n)\nu_j d\sigma.$$

Fazendo $n \longrightarrow +\infty$ e usando Teorema de Lebesgue,

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_{i=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i})v dx + \int_{\partial\Omega}(\sum_{i=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}v)\nu_j d\sigma,$$

donde

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i})v dx + \int_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j v d\sigma,$$

e portanto

$$\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx = \int_\Omega \mathcal{A}uv dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu_\alpha}v d\sigma.$$

3.3 Um Teorema de Gupta & Hess

Observamos inicialmente que (0.12) se escreve como

$$Au = g(u) + f \quad u \in H. \tag{3.12}$$

Em primeiro lugar, de acordo com seção 3.1

$$A: \ H \subset L^2 \longrightarrow 2^{L^2}$$

dado por

$$Au(x) := \mathcal{A}u(x) \ x \in H$$

é um operador maximal monotônico.

Antes de demonstrar o teorema C, formulamos um lema, cuja a demonstração será feita no final desta seção.

Lema 3.1. *Suponha $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, e satisfaz*
(i) para $a, b \in \mathbb{R}$ constantes

$$|h| \leq a + b|t|, \ t \in \mathbb{R},$$

(ii) existe $T \geq 0$ tal que

$$th(t) \geq 0, \textit{para todo } t \in \mathbb{R} \textit{ e } |t| \geq T,$$

e sejam

$$h_+ := \lim_{t\to+\infty} inf\ h(t), \quad h_- := \lim_{t\to-\infty} sup\ h(t).$$

Então existem funções $h_1, h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínuas tais que*

$$(i)\ h_1 \text{ é monotona crescente, } (ii)\ h_1(0) = 0; \tag{3.13}$$

$$(i)\ h_1(t) \overset{t\longrightarrow\pm\infty}{\longrightarrow} h_\pm, \quad (ii)\ th_2(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e } |t| \geq T; \tag{3.14}$$

$$|h_j(t)| \leq a + b|t|, \ j = 1, 2, \ t \in \mathbb{R}; \tag{3.15}$$

$$h = h_1 + h_2. \tag{3.16}$$

Demontração de teorema C: Tome $h = -g$, seja $A : L^2(\Omega) \longrightarrow 2^{L^2(\Omega)}$ um operador maximal monotônico.

Escreve h como $h = h_1 + h_2$, onde h_j satisfaz as condições no lema 3.1, considere

$$\begin{aligned} B_j :\ L^2(\Omega) \longrightarrow \quad & L^2(\Omega), \\ (B_j u)(x) \ &:= h_j(u(x)), \ x \in \Omega, \ u \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Afirmação 1

(i) B_1 é contínuo,

(ii) B_1 é maximal monotônico,

(iii) B_1 é 3-monotônico.

De fato. (i) Por (3.15), $B_1 u \in L^2(\Omega)$ para cada $u \in L^2(\Omega)$ e pelo teorema 1.1, segue $B_1 : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é contínuo.

(ii) Note que

$$< B_1 u - B_1 v, u - v >= \int_\Omega (h_1(u) - h_1(v))(u - v)dx, \ u, v \in L^2(\Omega),$$

como h_1 é não descrecente, segue que B_1 é monotônico. Como B_1 é contínuo, segue lema 1.2, que B_1 é maximal monotônico.

(iii) Considere

$$H_1(t) = \int_0^t h_1(s)ds, \ t \in \mathbb{R},$$

temos

$$H_1(t_1) - H_1(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} h_1(s)ds \geq (t_1 - t_2)h_1(t_2).$$

Definindo

$$j(u) = \int_\Omega H_1(u(x)), \ u \in L^2(\Omega),$$

temos

$$\begin{aligned} j(u) - j(v) &= \int_\Omega (H_1(u(x)) - H_1(v(x)))dx \\ &\geq \int_\Omega (u(x) - v(x))h_1(v(x))dx \\ &= < u - v, h_1(v) > . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Analogamente,

$$j(v) - j(w) \geq < v - w, h_1(w) >, \tag{3.18}$$

$$j(w) - j(u) \geq < w - u, h_1(u) > . \tag{3.19}$$

Somando as desigualdade em (3.17), (3.18), (3.19) temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq < u - v, h_1(v) > + < v - w, h_1(w) > + < w - u, h_1(u) > \\ &= < u - v, B_1(v) > + < v - w, B_1(w) > + < w - u, B_1(u) > . \end{aligned}$$

Monstrando que B_1 é 3-monotônico.

<u>Afirmação 2</u> $A + B_1$ é maximal monotônico.

De fato, $A + B_1$ é monotônico pois A, B_1 o são.
Seja $(u, \mu) \in X \times X^*$ onde $X := L^2$ tal que

$$< \mu - (A + B_1)x, u - x > \geq 0, \ x \in X.$$

Tomando

$$x = u - tz, \ t > 0, \ z \in X,$$

temos

$$< \mu - (A + B_1)(u - tz), tz > \geq 0,$$

donde

$$< \mu - (A + B_1)(u - tz), z > \geq 0.$$

Como $A + B_1$ é contínuo, temos

$$0 \leq \lim_{t \to +0} < \mu - (A + B_1)(u - tz), z > = < \mu - (A + B_1)u, z > .$$

Mostrando que $(u, \mu) \in Graf(A + B_1)$, portanto $A + B_1$ é maximal monotônico.

<u>Afirmação 3</u> $B_2 : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ satisfaz (1.14).

De fato, tome $u \in L^2(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned} < B_2 u, u > &= \int_\Omega h_2(u)udx \\ &= \int_{\{x:|u(x)| \leq T\}} h_2(u)udx + \int_{\{x:|u(x)| > T\}} h_2(u)udx. \end{aligned}$$

Faça

$$I_1 := \int_{\{x:|u(x)|\leq T\}} h_2(u)udx,\ I_2 := \int_{\{x:|u(x)|>T\}} h_2(u)udx.$$

Usando (3.15) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_{\{x:|u(x)|\leq T\}} |h_2(u)||u|dx \\
&\leq \left(\int_{\{x:|u(x)|\leq T\}} |h_2(u)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\{x:|u(x)|\leq T\}} u^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_{T,\Omega}, \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

onde $C_{T,\Omega} > 0$ é uma constante.

Por outro lado, usando (3.15) temos

$$|u| \geq \frac{1}{b}[h_2(u) - a],$$

donde

$$|h_2(u)||u| \geq \frac{1}{b}[|h_2(u)|^2 - a|h_2(u)|]. \qquad (3.21)$$

Agora, usando (3.21) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\{x:|u(x)|>T\}} |h_2(u)||u|dx \\
&\geq \frac{1}{b}\int_{\{x:|u(x)|>T\}} [|h_2(u)|^2 - a|h_2(u)|]dx \\
&= \frac{1}{b}\int_{\{x:|u(x)|>T\}} |h_2(u)|^2dx - \frac{a}{b}\int_{\{x:|u(x)|>T\}} |h_2(u)|dx \\
&\geq \frac{1}{b}\int_{\Omega} |h_2(u)|^2dx - \frac{a}{b}\int_{\Omega} |h_2(u)|dx - \frac{1}{b}\int_{\{x:|u(x)|\leq T\}} |h_2(u)|^2dx \\
&\geq \frac{1}{b}\|B_2u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{a}{b}(med(\Omega))^{\frac{1}{2}}\|B_2u\|_{L^2(\Omega)} - C_{T,\Omega}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\text{dado } \delta > 0, \text{existe } C_\delta > 0 \text{ tal que}$$
$$\delta p^2 + C_\delta \geq p,\ p \in \mathbb{R}. \qquad (3.23)$$

Fazendo

$$p = \|B_2u\|_{L^2(\Omega)},$$

temos, por (3.23)

$$\delta\|B_2u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \|B_2u\|_{L^2(\Omega)} - C_\delta. \qquad (3.24)$$

Daí, usando (3.22) temos

$$
\begin{aligned}
I_2 &\geq \frac{1}{b\delta}(\|B_2u\|_{L^2(\Omega)} - C_\delta) - \frac{a}{b}(med(\Omega))^{\frac{1}{2}}\|B_2u\|_{L^2(\Omega)} - C_{T,\Omega} \\
&= (-\frac{a}{b}(med(\Omega))^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b\delta})\|B_2u\|_{L^2(\Omega)} - (C_{T,\Omega} + \frac{C_\delta}{b\delta}).
\end{aligned}
$$

Faça

$$K = -\frac{a}{b}(med(\Omega))^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b\delta},$$

com δ tal que $K > 0$.
Daí,

$$I_2 \geq K\|B_2u\|_{L^2(\Omega)} - C_{T,K,\Omega}. \tag{3.25}$$

De (3.20), (3.25)temos

$$< B_2u, u > \geq K\|B_2u\|_{L^2(\Omega)} - C_{T,K,\Omega} - C_{T,\Omega}.$$

Mostrando a afirmação 3.

<u>Afirmação 4</u> $A + B_1 : L^2(\Omega) \longrightarrow 2^{L^2(\Omega)}$ é LIC.

De fato, (Lembremos que $A + B_1$ é univalente.) seja $\{u_n\} \subseteq L^2(\Omega)$ limitada e $\omega = (A + B_1)u_n$ tal que $\{\omega_n\}$ é limitada.

É suficiente provar: existem uma subseqüência $\{u_{n'}\} \subseteq \{u_n\}$ tal que

$$u_{n'} \longrightarrow u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Temos

$$
\begin{aligned}
< \omega_n, u_n > &= < Au_n, u_n > + < B_1u_n, u_n > \\
&\geq \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}dx \\
&\geq C_0\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\frac{\partial u_n}{\partial x_i}|^2 dx, \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

temos

$$< \omega_n, u_n > \text{ é limitada.}$$

De (3.26) e do fato u_n é limitado em $L^2(\Omega)$, temos que u_n é limitada em H^1. Daí, existe uma subseqüência u_n tal que

$$u_{n'} \longrightarrow u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Fica provada a afirmação 4.

Para concluir a demonstração do teorema C, é suficiente mostrar que $f \in (A + B_1 + B_2)u$. Pelo teorema 1.3 basta provar $f \in int(R(A) + R(B_1))$.

Vamos considerar dois casos.

<u>Caso 1</u> $\beta_- < \beta_+$.

Por (0.19) existem $\lambda \in (\beta_-, \beta_+)$, $\mu \in (h_-, h_+)$ tais que

$$\int_\Omega f dx = \lambda med(\partial\Omega) + \mu med(\Omega).$$

Daí,

$$\int_\Omega (f - \mu) dx = \lambda med(\partial\Omega),$$

donde vale (0.13), pelo teorema B

$$f - \mu \in int(R(A)),$$

temos

$$(f - \mu) + tz \in R(A),$$

onde $t > 0$ pequeno, $z \in L^2(\Omega)$, $|z| = 1$.

Como $\mu \in R(B_1)$, temos

$$(f - \mu) + tz + \mu \in R(A) + R(B_1),$$

donde

$$f + tz \in R(A) + R(B_1),$$

donde

$$f \in int(R(A) + R(B_1)).$$

<u>Caso 2</u> $\beta_- = \beta_+ (= 0)$.

Neste caso (0.19) fica

$$h_- < \frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega f dx < h_+.$$

Faça

$$k_f = \frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega f dx,$$

considere o problema de Neuman

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = \psi \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_a} = 0 \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.27}$$

pela teoria elíptica linear (cf. Treves [23 p 359]) para cada $\psi \in L^2(\Omega)$, (3.27) tem uma solução $u \in H^1(\Omega)$.

Daí,

$$\psi = f - k_f \in R(A),$$

como

$$k_f \in int(R(B_1)).$$

Daí,

$$f \in int(R(A) + R(B_1)).$$

Demonstração do Lema 3.1 Seja

$$S := \{t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\} \subset [T, +\infty)$$

o conjunto de todos os pontos de minimo local de h ordenados na forma

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n \cdots .$$

Considere

$$\xi_n := \inf_{\substack{t \geq t_n \\ t \in S}} h(t), \ n = 1, 2 \cdots$$

e note que

$$\lim_{n \to +\infty} \xi_n = \lim_{t \to +\infty} inf \ h(t).$$

Considere

$$h_1(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq T, \\ \dfrac{t - t_1}{t_1 - T}\xi_1 + \xi_1, & T \leq t \leq t_1, \\ \dfrac{\xi_{n+1} - \xi_n}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n) + \xi_n, & t_n \leq t \leq t_{n+1}, \end{cases}$$

e,

$$h_2(t) = h(t) - h_1(t).$$

Fazemos uma contrução semelhante para $t < 0$.

É imediato ver que h_1, h_2 satisfazem as propriedades do lema 3.1.

Apêndice A

Espaços de Schauder e de Sobolev

A.1 Espaços de Schauder

$\Omega \subset R^N$ domínio, $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega$.

$u : \Omega \longrightarrow R$.

$x \mapsto u(x) = u(x_1, \cdots, x_N)$.

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N), \alpha_i \geq 0$ inteiro, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

$u \in C^m(\Omega) \Longleftrightarrow u : \Omega \longrightarrow R$ satisfaz $D^\alpha u$ contínua $\forall \alpha, |\alpha| \leq m, m$ é inteiro e $m \geq 0$.

$u : \Omega \longrightarrow R$ é uma função Hölder contínua com expoente $\nu \in (0,1]$ se

$$u \text{ é limitado e } sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ i \neq j}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\nu} < \infty.$$

$C^m(\overline{\Omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C^m(\Omega); u, D^\alpha u$ limitado, uniformemente contínua em $\Omega\}$.

$C^{m,\nu}(\overline{\Omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C^m(\overline{\Omega}); sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ i \neq j}} \dfrac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} < \infty, |\alpha| < m\}$ é espaço de

Schauder.

Teorema A.1. *(cf. Adams [1, p 11]). Seja $m \geq 0$ inteiro e sejam $0 < \nu < \lambda \leq 1$. Então vale as seguinte imersões:*

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \tag{A.1}$$

$$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}), \tag{A.2}$$

$$C^{m.\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,\nu}(\overline{\Omega}). \tag{A.3}$$

Se Ω é limitado, então (A2) e (A3) são imersões compactas. Se Ω é convexo, temos também,

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{m,1}(\overline{\Omega}), \tag{A.4}$$

$$C^{m+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow c^{m,\nu}(\overline{\Omega}). \tag{A.5}$$

Se Ω é convexo e limitado, então (A1) e (A5) são imersões compactas.

Teorema A.2. *(cf. de Figueiredo[19, p 9]). Considere o problema*

$$\begin{cases} \mathcal{A}u &= h \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha $a_{i,j} \in C^{1,2}(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $a_0, h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $a_0 \geq 0$. Então o problema acima tem uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

A.2 Espaços de Sobolev

$\Omega \subset R^N$ aberto, $m \geq 0$ inteiro, $1 \leq p \leq \infty$,

$D(\Omega) \overset{\text{def}}{=} C_0^\infty(\Omega)$,

$W^{m,p}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{u \in L^p(\Omega); \exists\ v_\alpha \in L^p(\Omega)$ satisfaz $\int_\Omega v_\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \phi dx,\ |\alpha| \leq m,\ \phi \in D(\Omega)\}$.

Teorema A.3. *(cf. de Figueiredo e Adams[19, p 102 e 1, p 95]). Seja Ω um domínio satisfazendo a propriedade de cone, $m \geq 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, então para qualquer $j \geq 0$ as imersões abaixo são contínuas:*

(i) se $m < \dfrac{N}{p}$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow W^{j,q}$ onde $p \leq q \leq \dfrac{Np}{N-mp}$,

(ii) se $m = \dfrac{N}{p}$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow W^{j,q}$ onde $p \leq q < \infty$,

(iii) se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$ *e* Ω *tem a propriedade de Lipschitz local* $W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$, *onde* $0 < \lambda \leq m - \frac{N}{p}$.

Teorema A.4. *(cf. de Figueiredo e Adams[19, p 103 e 1, p 96]). Sejam* Ω *um domínio limitado satisfazendo a propriedade de cone,* $j \geq 0$, $m \geq 1$, *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então para qualquer* $j \geq 0$ *as imersões abaixo são compactas:*

(i) se $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow W^{j,q}$, *onde* $1 \leq q < \frac{Np}{N - mp}$,

(ii) se $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow W^{j,q}$, *onde* $1 \leq q < \infty$,

(iii) se $m > \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow W^{j,q}$, *onde* $1 \leq q < \infty$,

(iv) se $m > \frac{N}{p}$ *e se* Ω *tem a propriedade de Lipschitz local* $W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j}(\overline{\Omega})$,

(v) se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$ *e se* Ω *tem a propriedade de Lipschitz local* $W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$ *onde* $0 < \lambda < m - \frac{N}{p}$.

A.3 Desigualdades de Poincaré e de Gärding

Teorema A.5. *(cf. Renardy e Rogers [17, p 218]).* $\Omega \subset R^N$ *domínio limitado. Então existe* $C > 0$ *tal que* $\int_\Omega u^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \ \forall u \in H_0^1$, *onde* C *depende de* Ω.

Teorema A.6. *(Desigualdade de Gärding; cf. Agmon [9, Theorem P78]). Sob hipótese acima vale a desigualdade*

$$B[u,u] \geq C_1 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C_2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

onde C_1 *e* C_2 *são constantes positivas.*

Apêndice B

O Problema de Dirichlet Linear

Considere o problema de Dirichilet

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0 u & = & f & \Omega, \\ u & = & 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.1}$$

onde $\Omega \subset R^N,\ a_{ij},\ a_0$ e f são como na introdução .

Suponha que o operador dado em (0.2) é uniformemente fortemente elíptico (cf(0.3)).

B.1 Existência de Soluções

Considere B dado em (0.7) e se $f \in L^2(\Omega)$ defina

$$< F, \phi >:= \int_\Omega f\phi dx. \tag{B.2}$$

Lema B.1. *Suponha $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$. Então:*

(1) *$B : H_0^1 \times H_0^1 \longrightarrow R$ está bem definido e vale:*

- $(1)_1$ *B é bilinear contínua;*
- $(1)_2$ *se $a_0 \geq 0$, então B é coecivo;*
- $(1)_3$ *se $a_{ij} = a_{ji}$, então B é simétrica, isto é,*

$$B[u, \phi] = B[\phi, u] \quad u, \phi \in H_0^1.$$

(2) *$F : H_0^1 \longrightarrow R$ está bem definida e vale:*

$(2)_1$ $F \in H^{-1}$.

Demonstração: (1) B está bem definido. De fato, usando $a_{ij}, a_0 \in L^\infty$,

$$\begin{aligned} |B[u,\phi]| &= |\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0 u \phi dx| && \text{(B.3)} \\ &\leq |\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx| + |\int_\Omega a_0 u \phi dx| && \text{(B.4)} \\ &\leq C_1 |\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx| + C_1 \int_\Omega |u\phi| dx && \text{(B.5)} \end{aligned}$$

onde $C_1 = max\{\|a_{ij}\|_{L^\infty},\ \|a_0\|_{L^\infty}\}$.
Usando Hölder em (B.5) obtemos

$$|B[u,\phi]| \leq C_1 \sum_{i,j=1}^{N} \|u_{x_i}\|_{L^2} \|\phi_{x_j}\|_{L^2} + C_1 \|u\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2},$$

mostrando que B está bem definido.

$(1)_1$ É fácil ver que B é bilinear.
B é contínua, pois por (B.5) temos

$$\begin{aligned} |B[u,\phi]| &\leq C_1 \left(\sum_{i,j=1}^{N} \|u_{x_i}\|_{L^2} \|\phi_{x_j}\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} \right) \\ &\leq C_2 \|u\|_{H_0^1} \|\phi\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

mostrando B é contínuo.

$(1)_2$ se $a_0, \geq 0$ usando (0.7) temos

$$\begin{aligned} B[u,u] &= \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_\Omega a_0 u^2 dx \\ &\geq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \\ &\geq C_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Usando desigualdade de Poincaré obtemos

$$B[u,u] \geq C\|u\|^2_{H^1_0}.$$

$(1)_3$

$$\begin{aligned}
B[\phi,u] &= \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx + \int_\Omega a_0\phi u dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{ji}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 u\phi dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}dx + \int_\Omega a_0 u\phi dx \\
&= B[u,\phi].
\end{aligned}$$

Então B é simétrica.
(2) F está bem definido, pois usando Hölder

$$\begin{aligned}
| < F,\phi > | = |\int_\Omega f\phi dx| &\leq \int_\Omega |f\phi| dx && \text{(B.6)} \\
&\leq \|f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2}. && \text{(B.7)}
\end{aligned}$$

$(2)_1$ F é linear. De fato, $\forall \phi_1,\phi_2 \in H^1_0, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
< F,\phi_1+\lambda\phi_2 > &= \int_\Omega f(\phi_1+\lambda\phi_2)dx \\
&= \int_\Omega f\phi_1 dx + \lambda\int_\Omega f\phi_2 dx \\
&= < F,\phi_1 > +\lambda < F,\phi_2 > .
\end{aligned}$$

F é contínua. De fato, por (B.7) obtemos

$$| < F,\phi > | \leq C\|f\|_{L^2}\|\phi\|_{H^1_0},$$

como $f \in L^2$, então F é contínua.

■

Uma solução fraca de (B.1) é um elemento $u \in H^1_0$ tal que

$$B[u,\phi] = \int_\Omega f\phi dx, \quad \forall\phi \in H^1_0.$$

Teorema B.1. *Suponha* (0.6)*,* (0.7) *e (B.2). Se além disso*

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ e } a_0 \geq 0,$$

então para cada $f \in L^2$ existe uma única solução fraca $u \in H_0^1$ de (B.1).

Denmonstração: Como H_0^1 é espaço Hilbert, $B : H_0^1 \times H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ é bilinear, contínua, coecivo e $F \in H^{-1}$, pelo lema de Lax-Milgram(cf. Renardy & Rogers[17, p 290]), existe uma única $u \in H_0^1$ tal que $B[u, \phi] =< f, \phi > \ \ \forall \ \phi \in H_0^1$, isto é,

$$B[u, \phi] = \int_\Omega f\phi dx, \ \ \phi \in H_0^1.$$

Então para cada $f \in L^2$, existe uma única solução fraca $u \in H_0^1$ de (B.1).

B.2 Operador Solução Associado a um Problema de Dirichlet

Considere o operador

$$S : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

definido por

$$Sf := u$$

onde para cada $f \in L^2, u \in H_0^1$ é a única solução de (B.1) dada pelo Teorema B.1.

Lema B.2. *Valem as seguintes propriedades:*
(i) S é linear,
(ii) S é contínuo, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|Sf\|_{H_0^1} \leq C\|f\|_{L^2}, \ \ f \in L^2,$$

(iii) $S : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é compacto,
(iv) se $a_{ij} = a_{ji}$, então S é L^2-simétrica.

Demonstração: (i), (ii) são imediatos.
(iii) Como Ω é limitado, basta usar a imersão compacta,

$$H_0^1(\Omega) \overset{compacta}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

(iv) Vamos mostrar que

$$\int_\Omega (Sf)g dx = \int_\Omega f(Sg) dx.$$

De fato, $Sf := u,\ Sg := v$,
onde u, v são soluções únicas de (B.1) associadas f e g, respectivamente.

$$B[u,\phi] = \int_\Omega f\phi dx \Longrightarrow B[Sf,\phi] = \int_\Omega f\phi dx \Longrightarrow B[Sf,Sg] = \int_\Omega f(Sg)dx,$$

$$B[v,\phi] = \int_\Omega g\phi dx \Longrightarrow B[Sg,\phi] = \int_\Omega g\phi dx \Longrightarrow B[Sg,Sf] = \int_\Omega g(Sf)dx.$$

Como $a_{ij} = a_{ji}$, temos $B[Sf,Sg] = B[Sg,Sf]$.
Então $\int_\Omega f(Sg)dx = \int_\Omega (Sf)gdx$.

B.3 Regularidade em L^2

Teorema B.2. *(cf. Gilbarg & Trudinger[8, Theorem 8.8, 8.10, p 186]). Suponha $a_0 \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ quando $k = 0$ e $a_0 \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ quando $k \geq 1$. $a_{ij} \in C^{k,1}(\overline{\Omega})$, $f \in W^{k,2}(\Omega)$ onde $k \geq 0$ inteiro, $u \in H^1$ satisfaz $\mathcal{A}u = f$ em Ω no sentido das distribuições, isto é,*

$$\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}dx + \int_\Omega a_0 u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx,\ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Se $\Omega' \subset \Omega$ é um domínio com $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, então vale

$$u \in H^{k+2}(\Omega'),$$

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{H^k(\Omega)})$$

e

$$-\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0 u = f \ q.t.p \ em \ \Omega,$$

onde

$$C := C(N, C_0, K, D', k),\ K := max\{\|a_{ij}\|_{C^{k,1}(\overline{\Omega})}, \|a_0\|_{C^{k-1,1}(\overline{\Omega})}\},\ d' = dis(\Omega', \partial\Omega).$$

Teorema B.3. *(cf. Gilbarg & Trudinger[8, Theorema 8.12, 8.13, p 187]). Suponha $a_0 \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ quando $k = 0$ e $a_0 \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$ quando $k \geq 1, a_{ij} \in C^{k,1}(\overline{\Omega}), f \in H^k(\Omega)$, onde $k \geq 0$ inteiro. Se além disso $\partial\Omega \in C^{k+2}$ e $u \in H_0^1$ é uma solução fraca de (B.1), então*

$$u \in H^{k+2}(\Omega),$$

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^k(\Omega)}) \ e$$

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0 u = f \quad q.t.p. \ em \ \Omega,$$

onde $C := C(N, C_0, K, \partial\Omega)$.

Proposição B.1. *(1) Suponha* $a_{ij}, a_0, f \in C^\infty(\Omega)$, *se* $u \in H^1(\Omega)$ *é solução fraca de (B.1), então* $u \in C^\infty(\Omega)$.
(2) Suponha $a_{ij}, a_0, f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^\infty$, *e* Ω *limitado. Se* $u \in H_0^1$ *é solução fraca de (B.1), então* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: (1) Tome uma bola B tal que $\overline{B} \subset \Omega$ donde $a_{ij},\ a_0,\ f \in C^\infty(\overline{B})$.
Daí,

$$a_0 \in C^{k-1,1}(\overline{B}),\ a_{ij} \in C^{k,1}(\overline{B}),\ f \in H^k(B)\ \ \forall\ k \geq 1.$$

Pelo Teorema B.2, $u \in H^{k+2}(B')$, onde $\overline{B'} \subset B,\ \forall\ k \geq 1$.
Agora, se $m > j + \frac{N}{2}$, então

$$H^m(B') \hookrightarrow C^j(\overline{B'}).$$

Daí,

$$u \in C^\infty(\overline{B'}).$$

Portanto $u \in C^\infty(\Omega)$.
(2) Temos $a_0 \in C^{k-1,1}(\overline{\Omega}),\ a_{ij} \in C^{k,1}(\Omega),\ f \in H^k(\Omega),\ \partial\Omega \in C^{k+2}$, pelo teorema B.3, $u \in H^{k+2}(\Omega),\ \forall k \geq 1$.
Agora, se $m > j + \frac{N}{2}$

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}).$$

Daí,

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

■

Proposição B.2. *Suponha* $a_{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega}),\ a_0 \in L^\infty(\Omega),\ Ker(\mathcal{A}) = \{0\}$. *Se além disso* $\partial\Omega \in C^1$, *então*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\mathcal{A}u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{B.8}$$

$\forall\ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Demonstração: Suponha por contradição que (B.8) não vale.
Dado $n > 1$ inteiro, existe $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tal que

$$\|u_n\|_{H^2(\Omega)} \geq n\|\mathcal{A}u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Faça

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^2(\Omega)}} \quad \text{donde } \|\mathcal{A}v_n\|_{L^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Pelo Teorema B.3, temos

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|_{H^2(\Omega)} &\leq C(\|v_n - v_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{A}v_n - \mathcal{A}v_m\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq C(\|v_n - v_m\|_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{n}). \end{aligned}$$

Agora,

$$H^2(\Omega) \overset{compacta}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \text{ e } \|v_n\|_{H^2(\Omega)} = 1.$$

Daí,

$$v_n \longrightarrow v \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{donde } \|v_n - v_m\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Portanto

$$\|v_n - v_m\|_{H^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{donde } v_n \longrightarrow v \text{ em } H^2(\Omega).$$

Agora,

$$\mathcal{A}v_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{donde } \mathcal{A}v = 0 \quad \text{donde } v = 0.$$

Chegamos em um absurdo.

B.4 Regularidade em L^p

Teorema B.4. *(cf. Gilbarg & Trudinger[8, Theorem 9.15 p 241]). Suponha $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ com $a_0 \geq 0$, $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Se além disso $\partial\Omega \in C^{1,1}$, então existe uma única $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ solução de (B.1). Aliás u é solução forte.*

Proposição B.3. *(cf. Gilbarg & Trudinger[8, Lema 9.17 p 242]). Suponha $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ com $a_0 \geq 0$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|\mathcal{A}u\|_{L^2(\Omega)}, \ 1 < p < \infty,$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$.

Teorema B.5. *(cf. Gilbarg & Trudinger[8, Teorema 9.19 p 243]). Suponha a_{ij}, $a_0 \in C^{k-1,1}(\Omega)$ onde $k \geq 1$ é inteiro, $f \in W_{Loc}^{k,q}(\Omega)$ onde $1 < q < \infty$ e $u \in W_{Loc}^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$*

é solução de

$$\mathcal{A}u = f \quad \text{em } \Omega \text{ no sentido das distribuições},$$

então $u \in W^{k+2,q}_{Loc}(\Omega)$.

Teorema B.6. *(cf. Gilbarg & Trudinger[8, Theorem 9.19 p 243]). Se* $a_{ij},\ a_0 \in C^{k-1,1}(\Omega),\ \partial\Omega \in C^{k+1,1}$ *e* $f \in W^{k,q}(\Omega), 1 < q < \infty$. *Se* $u \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega), 1 < p < \infty$, *é solução de*

$$\begin{cases} \mathcal{A}u &= f \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido das distribuições. Então $u \in W^{k+2,q}(\Omega)$.