Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Propriedades Assintóticas de Somas Ponderadas de Variáveis Aleatórias com Aplicação à Teoria da Ruína

por

Fabiana Tristão de Santana

Brasília

2006

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por esta oportunidade. Também aos meus pais, Artur e Angela, e aos meus irmãos, Alex e Fernanda, que mesmo longe sempre apoiaram e deram sustento emocional para que eu continuasse por este caminho.

À minha orientadora, **Professora** Cátia Gonçalves, pela orientação, dedicação e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho. Também, por suas excelentes aulas.

Aos professores, Chang Dorea e André Gustavo, pelas correções, sugestões e por terem aceitado participar da banca.

Ao Fágner, que foi um pouco meu orientador não apenas no decorrer deste trabalho, mas em todas as disciplinas que estudei com ele.

Aos colegas, Cira e Ary, pela ajuda em alguns cálculos deste trabalho.

Às amigas, Adriana, Débora e Marina, pelo carinho e conselhos com minha apresentação.

Aos meus amigos e professores (Élida, Porfírio, Carlos Alberto, André, Márcio, Marta, Gecy ...) que me incentivaram.

Aos professores José Alfredo, Hemar, Pedro, Raderson ... e aos funcionários do departamento de Matemática da UnB, Tânia, Manoel, Sandra, Isabel, José Pereira...

E aos grandes amigos da UnB, Walter, Thiago, Evander, Bianka, Edna, Jander, Sandrinha, Aline, Raquel, Jhone, Fernando, Daniel Guimarães, Daniel Ventura, Letícia, Willian, Zhou, Luverci, Jhames, Luciene, Augusto, Euro, Anderson, Juliana, Eliene, Hélio...

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Dedico esta dissertação aos meus pais,
meus irmãos,
meu namorado Fágner.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as propriedades assintóticas das caudas de somas de variáveis aleatórias, independentes e com função de distribuição comum subexponencial, ponderadas aleatoriamente. Além disso, apresentamos uma aplicação ao problema da probabilidade de ruína no tempo finito de um modelo de risco a tempo discreto.

Palavras Chave: Relações assintóticas, subexponencial, cauda pesada, soma ponderada, processo de risco, probabilidade da ruína.

Abstract

In this work we study asymptotic properties of the tail probability of the randomly weighted sums of independent random variables with common subexponential distribution function. Moreover, an application to the finite time ruin probabilit problem in a discret time risk model is presented.

Key-Words: Asymptotic relations, subexponential, heavy-tailed, weighted sums, risk process, ruin probabilities.

Introdução

Somas de variáveis aleatórias ponderadas aleatoriamente têm um importante papel em vários problemas teóricos e aplicados. No campo da teoria de filas, por exemplo, somas ponderadas podem ser usadas para representar a produção total de um usuário servido por um determinado número de máquinas. Em estatística, na análise de séries temporais, os processos lineares, incluindo os processos de média móvel, são somas ponderadas de variáveis aleatórias. Em atuária, particularmente na teoria de risco, somas de variáveis aleatórias ponderadas são utilizadas na modelagem do superávit de uma empresa de seguros.

Assim, o estudo de diversos modelos encontrados na literatura baseia-se nas propriedades de somas parciais do tipo

$$S_m^\theta = \sum_{k=1}^{m} \theta_k X_k, \; m = 1, 2, \cdots, n, \tag{1}$$

onde X_k, $1 \leq k \leq n$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), θ_k, $1 \leq k \leq n$ são variáveis aleatórias positivas e as sequências $\{X_k\}$ e $\{\theta_k\}$ são mutuamente independentes.

O comportamento limite de S_m^θ quando $m \longrightarrow \infty$, incluindo a sequência normalizada, tem sido amplamente investigado na literatura (vide por exemplo, Taylor et al (1984), Rosalsky e Sreehari (1998) e Hu et al (2001), dentre muitos outros). No entanto, o comportamento assintótico da cauda da distribuição da soma S_m^θ ainda necessita ser devidamente estudado.

O caso particular em que as variáveis X_k têm distribuição de cauda pesada é de grande interesse. Em problemas práticos, nas mais variadas áreas de aplicação, em particular em modelos de seguros, observa-se a presença de dados ajustados por distribuições de cauda pesada, ou seja, distribuições cujas caudas (à direita) decaem a zero mais lentamente do que qualquer exponencial $e^{-\varepsilon x},\ \varepsilon > 0$.

Dentre a classe de distribuições de cauda pesada, as distribuições subexponenciais, merecem destaque. Precisamente, uma função de distribuição F, concentrada em $[0, \infty)$, é subexponencial se sua cauda $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ satisfizer

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n,\ \forall\ n \geq 2, \tag{2}$$

onde $F^{*n} = F * \cdots * F$ denota a n-ésima convolução de F. A classe de distribuições subexponenciais inclui a grande maioria das distribuições de cauda pesada utilizadas na literatura, tais como: Pareto, Loggamma, Weibull com parâmetros $0 < r < 1$ e $c > 0$, entre outros.

Uma interpretação para a relação (2) pode ser dada considerando-se uma amostra aleatória $(X_1, \cdots, X_n)$ da distribuição F e definindo-se $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $M_n = max\{X_1, \cdots, X_n\}$. Desta forma, a relação (2) indica que a cauda das distribuições de S_n e M_n são assintoticamente da mesma ordem, ou seja,

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \tag{3}$$

Em modelos de risco, por exemplo, podemos interpretar $X_1, \cdots, X_n$ como as respectivas quantias de indenizações pagas em n períodos sucessivos de tempo, a soma parcial S_n representa a quantia total das indenizações pagas e M_n o maior valor pago nos n períodos considerados. Assim, a relação (3) indica uma forte influência da maior indenização paga sobre a quantia total das indenizações.

Nosso interesse neste trabalho, baseados em Tang e Tsisiashivili (2003), refere-se ao comportamento assintótico da cauda das distribuições das somas S_m^{θ} quando as variáveis X_k têm distribuição subexponencial.

Assim, no Capítulo 1 apresentamos inicialmente uma caracterização das distribuições de cauda pesada como sendo aquelas cujas funções geradoras de momentos são infinitas em todo ponto. Definimos as principais classes de distribuições de cauda pesada e demonstramos as relações de inclusão entre elas. Finalizamos o capítulo apresentando algumas propriedades assintóticas envolvendo caudas de distribuições subexponenciais que serão úteis para o desenvolvimento do restante do trabalho.

Basicamente no Capítulo 2 apresentamos os resultados de Yang e Tsitsiashvili (2003) sobre o comportamento assintótico de caudas de somas de variáveis aleatórias subexponenciais ponderadas aleatoriamente. Inicialmente, demonstramos dois resultados preliminares, envolvendo somas e máximos de variáveis aleatórias ponderadas. A seguir, demonstramos, no Teorema 2.1, o resultado principal que estabelece as seguintes relações assintóticas

$$P(\max_{1\leq m\leq n} S_m^\theta > x) \sim P(S_n^\theta > x) \sim P(\max_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x), \tag{4}$$

quando $x \longrightarrow \infty$ e sob a hipótese que as X_k têm distribuição subexponencial e as variáveis $\{\theta_k, 1 \leq k \leq n\}$ satisfazem $P(a \leq \theta_k \leq b) = 1$ para alguns $0 < a \leq b < \infty$. No entanto, nenhuma hipótese quanto à estrutura de dependência da sequência $\{\theta_k, 1 \leq k \leq n\}$ é assumida. Note que a relação (4) indica que a relação de definição (3) de variáveis subexponenciais também é mantida na situação em que as variáveis são ponderadas aleatoriamente. Casos especiais, envolvendo subclasses das distribuições subexponenciais como as de variação regular, também são apresentados.

Finalmente, apresentamos uma aplicação de (4) à teoria da ruína. Mais precisamente, consideramos o modelo de risco a tempo discreto

$$R_0 = x,\ R_n = R_0 \prod_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=k+1}^{n} \xi_i,\ n = 1, 2, \cdots \tag{5}$$

onde, $R_0 = x$ é o capital inicial de uma companhia de seguros, R_n representa a reserva de capital de risco da seguradora no final do período de tempo n, $X_k = Z_k - W_k$, $k \geq 1$ com Z_k e W_k denotando, respectivamente, as quantias totais de prêmios recebidos e indenizações pagas pela empresa no k-ésimo período considerado e ξ_k denota o coeficiente relativo ao retorno estocástico do investimento financeiro realizado no período $(k-1,k)$, denominado coeficiente de inflação.

As hipóteses básicas do modelo são que os pares $(W_k, Z_k),\ k \geq 1$ são i.i.d., $\xi_k,\ k \geq 1$ são v.a.'s positivas e as sequências $\{\xi_k,\ k \geq 1\}$ e $\{(W_k, Z_k),\ k \geq 1\}$ são mutuamente independentes.

Consideramos a probabilidade de ruína num horizonte finito $n \geq 1$ definida por

$$\Psi(x,n) = P\big(\min_{1\leq m\leq n} R_m < 0 \ \big|\ R_0 = x\big),$$

que consiste na probabilidade de que a reserva de capital da seguradora atinja um valor negativo em algum dentre os n primeiros períodos de tempo considerados.

Sob a hipótese de que a distribuição das quantias agregadas $X_k = Z_k - W_k$ é subexponencial e o coeficiente de inflação é limitado obtemos a seguinte aproximação para a probabilidade de ruína $\Psi(x,n)$ quando o capital inicial x torna-se suficientemente grande

$$\Psi(x,n) \sim \sum_{k=1}^{n} P\big(X_k \prod_{i=1}^{k} \xi_i^{-1} > x\big).$$

Outros casos particulares também são considerados.

No caso especial em que $\xi_k = 1 + I_k$, onde $I_k > 0$ representa a taxa de juro referente ao k-ésimo período e as variáveis X_k têm distribuição regularmente variante no infinito com expoente α obtém-se como consequência do Teorema 2.1 que

$$\psi(x,n) \sim P(X_1 > x) \sum_{k=1}^{k} E \prod_{j=1}^{k} (1 + I_j)^{-\alpha}.$$

Este resultado estende os resultados obtidos por Cai e Dickson (2004), que consideraram as taxas de juros $\{I_j,\ j \geq 1\}$ como uma cadeia de Markov. Nos resultados apresentados neste trabalho considera-se uma estrutura de dependência arbitrária da sequência $\{\xi_n,\ n \geq 1\}$.

Capítulo 1

Distribuições Subexponenciais

1.1 Introdução

Em problemas práticos nas mais diversas áreas, como atuária, finanças, física, entre outras, as distribuições com cauda pesada são as que melhor ajustam os dados observados. Em modelos de risco, por exemplo, na prática, os dados relativos às quantias de indenizações pagas são na sua grande maioria modelados por distribuições de caudas pesada como Pareto, loggamma, lognormal ou Weibull (de cauda pesada).

Dentre as distribuições de cauda pesada, destaca-se a classe das distribuições subexponenciais, que engloba grande parte das distribuições utilizadas por modelos nas mais diferentes áreas de aplicação, em especial nos modelos de seguros e finanças.

Nosso interesse especial neste capítulo refere-se ao comportamento assintótico da cauda de distribuições subexponenciais.

Assim, na Seção 1.2 caracterizamos formalmente o conceito de cauda pesada e definimos as classes mais importantes de distribuições de cauda pesada encontradas na literatura. As relações entre estas classes de distribuições são apresentadas na Seção 1.3.

Finalmente, na Seção 1.4 apresentamos propriedades assintóticas das caudas de distribuições subexponenciais que são relevantes para o estudo de somas ponderadas de variáveis aleatórias a ser tratado no capítulo seguinte.

1.2 Distribuições de Caudas Pesadas

Nesta seção apresentamos o conceito de distribuição de cauda pesada (à direita) e definimos as principais subclasses de distribuições deste tipo que aparecem na literatura (vide por exemplo, Embrechts et al (1997), Asmussen (2001) e Embrechts e Goldie (1980)).

Primeiramente, vamos apresentar alguns conceitos e notações que usaremos com freqüência:

Definição 1.1. *(a) Dadas duas funções positivas $A(x)$ e $B(x)$ se*

$$\limsup_{x\longrightarrow\infty}\frac{A(x)}{B(x)}\leq 1,\ \textit{então escrevemos}\ A(x)\lesssim B(x)$$

e se

$$\limsup_{x\longrightarrow\infty}\frac{B(x)}{A(x)}\leq 1,\ \textit{então escrevemos}\ B(x)\lesssim A(x).$$

(b) Dizemos que $A(x)$ e $B(x)$ são assintoticamente iguais se $A(x)\lesssim B(x)$ e $B(x)\lesssim A(x)$, então escrevemos $A(x)\sim B(x)$.

(c) $a(x)=O(b(x))$ com $x\to x_0$, quando $\limsup_{x\to x_0}|a(x)/b(x)|<\infty$
e $a(x)=o(b(x))$ com $x\to x_0$, quando $\lim_{x\to x_0}a(x)/b(x)=0$.

Podemos classificar a cauda (à direita) de uma função de distribuição comparando a velocidade do seu decaimento a zero com o da cauda da distribuição exponencial, que tem um decaimento rápido.

Definição 1.2. *Dizemos que uma função de distribuição (f.d.) F tem cauda leve à direita se para algum $\varepsilon>0$ temos $\overline{F}(x)=O(e^{-\varepsilon x})$, ou seja,*

$$\limsup_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F}(x)}{e^{-\varepsilon x}}<\infty. \tag{1.1}$$

Caso contrário, se $\lim \sup_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\overline{F}(x)}{e^{-\varepsilon x}} = +\infty, \ \forall\ \varepsilon > 0$*, dizemos que* F *tem cauda pesada à direita.*

Como todo o nosso estudo baseia-se no comportamento à direita das caudas das distribuições, diremos simplesmente cauda pesada ou cauda leve.

Note que uma condição necessária para que F tenha cauda pesada é que $\overline{F}(x) > 0$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

O comportamento da cauda de uma função de distribuição está relacionado com a existência da função geradora de momentos

$$\widehat{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) = Ee^{sX}, \tag{1.2}$$

ou equivalentemente, com a transformada de Laplace $\widehat{F}(-s)$. É o que mostramos na proposição a seguir.

Proposição 1.1. *Seja* F *uma função de distribuição com função geradora de momentos associada* $\widehat{F}(s)$*. Então* $\overline{F}(x) = O(e^{-\varepsilon x})$ *para algum* $\varepsilon > 0$*, se e somente se,* $\widehat{F}(s)$ *é finita para algum* $s > 0$*.*

Demonstração: Primeiramente suponha que $\overline{F}(x) = O(e^{-\varepsilon x})$ para algum $\varepsilon > 0$, então existe $M > 0$ e $x_0 > 0$ tal que $\forall\ x \geq x_0$, $\left|\overline{F}(x)\right| \leq Me^{-\varepsilon x}$.

Assim, para $0 < s < \varepsilon$ temos

$$
\begin{aligned}
\widehat{F}(s) &= \int_0^{\infty} P(e^{sx} > y)dy \\
&= \int_0^{e^{sx_0}} \overline{F}(\frac{lny}{s})dy + \int_{e^{sx_0}}^{\infty} \overline{F}(\frac{lny}{s})dy \\
&\leq e^{sx_0} + \int_{e^{sx_0}}^{\infty} Me^{-\frac{\varepsilon}{s}lny}dy \\
&\leq e^{\varepsilon x_0} + \int_{e^{sx_0}}^{\infty} My^{\frac{-\varepsilon}{s}}dy \\
&= e^{\varepsilon x_0} + M\frac{s}{\varepsilon - s}e^{(-\varepsilon+s)x_0}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\widehat{F}(s) < +\infty$ para $0 < s < \varepsilon$.

Por outro lado, suponha que $\widehat{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{sx}dF(x)$ é finita para algum $s > 0$.

Então da desigualdade de Chebyschev podemos obter

$$
\begin{aligned}
\overline{F}(x) &= P(X > x) \\
&= P(e^{sX} > e^{sx}) \\
&\leq \frac{E(e^{sX})}{e^{sx}} \\
&= \frac{\widehat{F}(s)}{e^{sx}}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-sx}} \leq \widehat{F}(s) < \infty$. Logo $\overline{F}(x) = O(e^{-sx})$.

■

Como conseqüência da proposição anterior, temos a seguinte definição alternativa:

Definição 1.3. *Uma f.d. F tem cauda leve à direita se $\widehat{F}(s) < +\infty$ para algum $s > 0$. Caso contrário, se $\widehat{F}(s) = +\infty$, $\forall\ s > 0$ dizemos que F tem cauda pesada à direita.*

Exemplos de distribuições de cauda leve são:

(a) Distribuição Exponencial cuja densidade é definida por $f(x) = \delta e^{-\delta x}$ para $x > 0$ e $f(x) = 0$, caso contrário.

(b) Distribuição Gamma de parâmetros p, $\delta > 0$ com densidade $f(x) = \dfrac{\delta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\delta x}$, $x > 0$.

(c) Distribuição Hyperexponencial definida como composição finita de distribuições exponenciais, isto é, $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_i e^{-\delta_i x}$, $x > 0$ onde $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ i = 1, \cdots, p$.

Exemplos de distribuições de cauda pesada:

(a) Distribuição Weibull que originou-se na teoria da confiabilidade, onde $\overline{F}(x) = e^{-cx^r}$, $x > 0$ com $0 < r < 1$ e $c > 0$.

(b) Distribuição Lognormal, cuja densidade é $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\delta x} e^{-\dfrac{(lnx - \mu)^2}{2\delta^2}}$, $x > 0$ com $\mu \in \mathbb{R},\ \delta > 0$

(c) Distribuição Benktander - tipo I, cuja cauda é $\overline{F}(x) = e^{-\beta(\ln x)^2} - (\alpha + 1) \ln x$, $x > 1$, onde $\alpha,\ \beta > 0$.

(d) Distribuição Benktander - tipo II, cuja cauda é $\overline{F}(x) = e^{\dfrac{\alpha}{\beta}} x^{-(1-\beta)} e^{\dfrac{-\alpha x^{\beta}}{\beta}}$, $x > 1$, onde $\alpha > 0,\ 0 < \beta < 1$.

(e) Distribuição Loggamma, cuja densidade é $f(x) = \dfrac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \big(lnx\big)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$, $x > 1$, com $\alpha,\ \beta > 0$.

(f) Distribuição Burr, cuja cauda é $\overline{F}(x) = \left(\dfrac{k}{k + x^r}\right)$, $x > 0$, onde $\alpha,\ k,\ r > 0$.

(g) Distribuição Pareto, cuja cauda é $\overline{F}(x) = \left(\dfrac{k}{k + x}\right)^{\alpha}$, $x > 0$ com $\alpha,\ k > 0$.

Podemos encontrar mais exemplos destas classes de distribuições em Asmussen (2001) e Embrechts et al (1997).

Denote por $\mathcal{K}$ o conjunto das distribuições de cauda pesada.

Questões envolvendo o comportamento da cauda de funções de distribuição aparecem, por exemplo, na análise da ocorrência de eventos extremos. Para entender eventos desta natureza, surge a necessidade de se construir modelos matemáticos apropriados para explicar eventos que, embora tenham uma probabilidade de ocorrência relativamente pequena influenciam significativamente o comportamento do modelo todo. Uma discussão mais detalhada sobre o assunto pode ser encontrada em Embrechts et al (1997).

É o caso, por exemplo, dos modelos de reserva de capital de risco de uma empresa seguradora. Uma questão relevante é estabelecer a inter-relação entre os valores individuais das indenizações pagas e a quantia total paga ao final do período de tempo considerado. Em particular, surge o interesse em estabelecer hipóteses sob as quais o valor da maior indenização determina o valor total das indenizações pagas.

Neste contexto, podemos interpretar $X_1, X_2, \cdots, X_n$ como variáveis aleatórias (v.a.'s) independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com f.d. F, representando as respectivas quantias das indenizações pagas em cada um de n períodos de tempos (por exemplo, anos); a soma parcial $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ representa a quantia total das indenizações pagas e $M_n = max\{X_1, \cdots, X_n\}$ o maior valor pago nos n períodos considerados.

Assim, procuramos funções de distribuição F para as quais as caudas das distribuições da soma S_n e do máximo M_n sejam assintoticamente da mesma ordem, ou seja,

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty, \tag{1.3}$$

o que indicaria a forte influência da maior indenização paga sobre a quantia total de indenizações.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} P(M_n > x) &= 1 - F^n(x) \\ &= \big(1 - F(x)\big)\big(F^{n-1}(x) + \cdots + 1\big) \\ &= \overline{F}(x)\sum_{k=0}^{n-1} F^k(x). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Então, se $0 < F(x) < 1$ segue, para qualquer $n \geq 2$,

$$P(M_n > x) \sim n\overline{F}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \tag{1.5}$$

Mas, por outro lado, $P(S_n > x) = \overline{F^{*n}}(x)$, onde F^{*n} é a n-ésima convolução de F, ou seja, $F^{*}(x) = F$ e $F^{*n}(x) = F^{*(n-1)} * F = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F^{*(n-1)}(x-t)dF(t)$.

Logo (1.5) é equivalente a

$$\overline{F^{*n}}(x) \sim n\overline{F}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \tag{1.6}$$

A discussão acima motiva a seguinte subclasse de distribuições de cauda pesada.

Definição 1.4. *Uma função de distribuição F concentrada em $[0,\infty)$ pertence à classe subexponencial, denotada por $\mathcal{S}$, se*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n, \; \forall\; n \geq 2, \tag{1.7}$$

onde $F^{*n} = F * \cdots * F$ denota a n-ésima convolução de F. Se F estiver concentrada em $(-\infty,\infty)$ diremos que F pertence a $\mathcal{S}$ se sua parte positiva $F^{+}(x) = F(x)I_{(0\leq x<\infty)}$ é subexponencial. É possível mostrar que se F^{+} é subexponencial então temos (1.7).

Na próxima seção mostraremos que de fato as distribuições subexponenciais são de cauda pesada, ou seja, suas caudas decaem a zero mais lentamente do que qualquer exponencial $e^{-\varepsilon x}$, para $\varepsilon > 0$, o que justifica o nome subexponencial. Além disso, veremos que a condição (1.6) é na verdade equivalente a,

$$\overline{F * F}(x) \sim 2\overline{F}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \tag{1.8}$$

Exemplos de distribuições subexponenciais são: Pareto, Burr, Loggamma, Weibull, Benktander tipos I e II e Lognormal, entre outros.

Uma subfamília importante de distribuições subexponenciais é a das distribuições cujas caudas são de variação regular, ou seja, assintoticamente comportam-se como funções potências $x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

Definição 1.5. *Uma função de distribuição F sobre $[0, \infty)$ tem cauda de variação regular, se $\exists\ 0 \leq \alpha < \infty$ tal que*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha} \text{ para todo } y > 0. \tag{1.9}$$

Denote por $\mathcal{R}$ o conjunto das distribuições com caudas de variação regular.

São exemplos de distribuições deste tipo: lognormal, Benktander - tipo I, Benktander - tipo II, Weibull.

Note que, se $\overline{F}$ satisfaz (1.9) denotamos $\overline{F} \in R_{-\alpha}$ e dizemos que $\overline{F}$ é de variação regular com expoente α, ou α-variante no infinito. Em particular, se $\alpha = 0$ dizemos que $\overline{F}$ é lentamente variante.

O caso especial $\alpha = +\infty$ no limite (1.9) é tratado em separado e dá origem as distribuições com caudas rapidamente variante, conforme definimos abaixo.

Definição 1.6. *Uma função de distribuição tem cauda de variação rápida, se*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 0, \text{ para todo } y > 1.$$

Denote por $\mathcal{R}_{-\infty}$ o conjunto das distribuições com cauda de variação rápida.

Mais detalhes sobre as propriedades e aplicações das funções de variação regular e variação rápida podem ser encontradas em Bingham et al (1987).

Duas outras subfamílias de distribuições de caudas pesadas, relacionadas com as distribuições subexponenciais, merecem destaque e são definidas a seguir.

Definição 1.7. *Dizemos que uma função de distribuição F concentrada em $[0,\infty)$ é de cauda longa, se*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}=1,\ \textit{para todo}\ y>0. \tag{1.10}$$

Denote por $\mathcal{L}$ o conjunto das distribuições com cauda longa.

É possível mostrar que basta verificar a relação (1.10) para algum $y>0$ (vide Chistyakov (1964)).

Note que o limite (1.10) é também equivalente a $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1$, para cada $y>0$.

Definição 1.8. *Uma função F é de variação dominada, se*

$$\limsup_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}<\infty,\ \textit{para todo}\ 0<y<1,$$

ou equivalentemente para algum $0<y<1$.

Denote por $\mathcal{D}$ o conjunto das distribuições de variação dominada.

1.3 Relações entre as Subclasses de Cauda Pesada

Nesta seção, apresentamos as relações de inclusão entre as classes de distribuições definidas na seção anterior, a saber, a classe das distribuições de cauda pesada:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{\text{F: F é f.d. e } \widehat{F}(\varepsilon)=\infty,\ \forall\ \varepsilon>0\}\\ &= \{\text{F: F é f.d. e } \limsup_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F}(x)}{e^{-\varepsilon x}}=\infty\ \forall\ \varepsilon>0\};\end{aligned}$$

as distribuições subexponenciais:

$$\mathcal{S}=\{\text{F f.d. sobre } (0,\infty)\text{: } \overline{F^{*n}}(x)\sim n\overline{F}(x) \text{ quando } x\longrightarrow\infty\};$$

as distribuições com cauda de variação regular:

$$\mathcal{R}=\{F \text{ f.d. sobre } [0,\infty) \text{ e } \overline{F}\in R_{-\alpha} \text{ para algum } 0\le\alpha<\infty\}$$

onde $\overline{F} \in R_{-\alpha}$ se $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha}$, $\forall\ y > 0$;

as distribuições de cauda longa:

$$\mathcal{L} = \{F\text{: f.d. sobre } [0, \infty)\text{: } \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1,\ \forall\ y > 0\};$$

e as distribuições de variação dominada:

$$\mathcal{D} = \{F\text{: f.d. sobre } [0, +\infty)\text{: } \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty,\ \forall\ 0 < y < 1\}.$$

Para mais detalhes sobre as classes de distribuições de cauda pesada e como elas se relacionam, o leitor poderá consultar Embrechts et al (1997) que foi nossa principal fonte de pesquisa para esta seção.

Assumiremos que $F(0) = 0$ e $F(x) < 1$, $\forall\ x \geq 0$.

Primeiramente, vamos mostrar algumas propriedades das distribuições subexponenciais. Iniciamos com a relação entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{L}$.

Proposição 1.2. *Se $F \in \mathcal{S}$, então*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1,\ \ \forall\ y > 0.$$

Mais ainda, o limite acima é uniforme sobre todo compacto em $(0, \infty)$.

Antes de demonstrar o teorema vamos enunciar um resultado auxiliar com o qual garantiremos a convergência uniforme do limite acima. Sua prova será omitida e pode ser encontrada em Bingham et al (1987) (Teorema 1.2.1, pag 6).

Lema 1.1. *Se a função positiva $h \in R_0$, ou seja, h é lentamente variante, então temos*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1,$$

uniformemente em $t \in [a, b]$, com $0 < a \leq b < \infty$.

Demonstração da Proposição 1.2:

Primeiramente, observemos que

$$\frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{1 - F^{*(n+1)}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{F(x) - F^{*(n+1)}(x)}{\overline{F}(x)}.$$

Mas,

$$F^{*(n+1)}(x) = (F^{*n} * F)(x) = \int_0^\infty F^{*n}(x-y)dF(y) = \int_0^x F^{*n}(x-y)dF(y).$$

Assim,

$$\frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{F(x)}{\overline{F}(x)} - \frac{F^{*(n+1)}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1}{\overline{F}(x)}dF(z) - \int_0^x \frac{F^{*n}(x-z)}{\overline{F}(x)}dF(z).$$

Logo,

$$\frac{\overline{F^{*(n+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_0^x \frac{1 - F^{*n}(x-z)}{\overline{F}(x)}dF(z). \tag{1.11}$$

Agora, seja $y > 0$ fixo. Então para $x > y$ obtemos de (1.11)

$$\begin{aligned}\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)}dF(z) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)}dF(z)\\ &\geq 1 + \int_0^y dF(z) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}dF(z),\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do fato de F ser não-decrescente. Como $F(0) = 0$ temos

$$\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)).$$

Mas, como $F(y) < 1$, $\forall\ y$ e $F(+\infty) = 1$, então podemos considerar x suficientemente grande, tal que, $F(x) > F(y)$ e daí obtemos

$$\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y)\right][F(x) - F(y)]^{-1}.$$

Logo, da hipótese que $F \in \mathcal{S}$, temos $\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\overline{F}(x)$, quando $x \longrightarrow \infty$ e daí segue

$$\limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \frac{2-1-F(y)}{1-F(y)} = 1.$$

Por outro lado, como $y > 0$ e $\overline{F}$ é não-crescente, temos $\dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \geq 1$, $\forall\, x$, concluindo que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1$, para cada $y > 0$.

Mas, $\dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = \dfrac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}((x+y)-y)}$. Portanto, do limite acima, $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1$, para cada $y > 0$.

Para mostrar a uniformidade do limite, considerando $t > 0$, temos

$$1 = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(\ln x + \ln t)}{\overline{F}(\ln x)} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(\ln xt)}{\overline{F}(x)},$$

ou seja, $\overline{F} \circ \ln \in R_o$ e pelo lema acima concluímos a demonstração do teorema.

$\blacksquare$

Usando o resultado anterior, podemos mostrar que basta verificar a relação (1.7) da definição de subexponencialidade para $n = 2$, ou seja, temos a seguinte caracterização de distribuições subexponenciais.

Proposição 1.3. *$F \in \mathcal{S}$ se, e somente se*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F * F}(x)}{\overline{F}(x)} = 2. \tag{1.12}$$

Demonstração: Se $F \in \mathcal{S}$ temos a relação de definição (1.7) , em particular, para $n = 2$.

Por outro lado, se $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F * F}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$, mostraremos por indução que F satisfaz (1.7) para todo $n > 2$.

Suponha $\dfrac{\overline{F^{*m}}(x)}{\overline{F}(x)} \to m$ com $x \to \infty$, para algum inteiro $m \geq 2$. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher y de tal forma que $\left| \dfrac{\overline{F^{*m}}(x)}{\overline{F}(x)} - m \right| \leq \varepsilon$, para $x \geq y$.

De (1.11), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{*(m+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \, \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= 1 + \int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \, \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) + \\
&+ \int_{x-y}^x \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \, \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_{x-y}^x \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \, \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) &\leq \int_{x-y}^x \sup_{v \geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \, \frac{1}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= \sup_{v \geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \int_{(x-y)}^x \frac{dF(z)}{\overline{F}(x)} \\
&= \sup_{v \geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \, \frac{F(x) - F(x-y)}{\overline{F}(x)} \\
&= \sup_{v \geq 0} \frac{\overline{F^{*m}}(v)}{\overline{F}(v)} \left[-1 + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \right] \to 0
\end{aligned}$$

quando $x \longrightarrow \infty$.

Também, pela hipótese de indução e (1.11), temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) &= (m+o(\varepsilon)) \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \\
&= (m+o(\varepsilon)) \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x) - \overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} - \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \right] \\
&= (m+o(\varepsilon)) \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - \int_{x-y}^{x} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \right] \\
&\geq (m+o(\varepsilon)) \left[\frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - \int_{x-y}^{x} \frac{dF(z)}{\overline{F}(x)} \right].
\end{aligned}$$

Então,

$$\int_0^{x-y} \frac{\overline{F^{*m}}(x-z)}{\overline{F}(x-z)} \frac{\overline{F}(x-z)}{\overline{F}(x)} dF(z) \to (m+o(\varepsilon))[2-1] = (m+o(\varepsilon)),$$

quando $x \longrightarrow \infty$.

Substituindo os resultados acima em (1.13), imediatamente obtemos

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*(m+1)}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + m + o(\varepsilon).$$

Pela arbitrariedade de ε a demonstração está concluída .

■

A seguir, mostraremos que distribuições cujas caudas são assintoticamente equivalentes à caudas de distribuições subexponenciais também são subexponenciais.

Proposição 1.4. *Suponha F e G funções de distribuição sobre $[0,\infty)$. Se $F \in \mathcal{S}$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c$, onde $c \in (0,\infty)$, então $G \in \mathcal{S}$.*

Demonstração: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com função de distribuições G.

Para $v > 0$ fixo e $x > 2v$ temos

$$
\begin{aligned}
\{X+Y>x\} &= \{X \le v, X+Y>x\} \cup \{Y \le v, X+Y>x\} \cup \\
&\cup \{v < X \le x-v, X+Y>x\} \cup \{Y>v, X>x-v\}
\end{aligned}
$$

onde os eventos acima são disjuntos. Logo, podemos obter

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\overline{G}(x)} &= \frac{P(X+Y>x)}{\overline{G}(x)} \\
&= (\overline{G}(x))^{-1}\int_0^v \overline{G}(x-y)dG(y) + (\overline{G}(x))^{-1}\int_0^v \overline{G}(x-y)dG(y) + \\
&+ (\overline{G}(x))^{-1}\int_v^{x-v} \overline{G}(x-y)dG(y) + (\overline{G}(x))^{-1}\overline{G}(v)\overline{G}(x-v) \\
&= 2\int_0^v \frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{G}(x)}dG(y) + \int_v^{x-v} \frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{G}(x)}dG(y) + \frac{\overline{G}(v)\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)} \\
&= I_1(x,v) + I_2(x,v) + I_3(x,v). \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

Como $F \in \mathcal{S}$, da Proposição 1.2 segue que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\overline{F}(x-v)}{\overline{f}(x)} = 1,\ \forall\ v > 0$ e como por hipótese $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c > 0$ temos

$$
\frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)} = \frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{F}(x-v)}\frac{\overline{F}(x-v)}{\overline{F}(x)}\frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} \overset{x\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} c.1.\frac{1}{c} = 1.
$$

Logo, podemos obter

$$
2G(v) \le I_1(x,v) = 2\int_0^v \frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{G}(x)}dG(y) \le 2\frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)}\int_0^v dG(y) \overset{x\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 2G(v)
$$

ou seja,

$$
I_1(x,v) \overset{x\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 2G(v) \qquad (1.15)
$$

e também

$$
I_3(x,v) \to \overline{G}(v), \text{com } x \to \infty. \qquad (1.16)
$$

Por outro lado, por hipótese segue que dado $\varepsilon > 0$ existe x_0 dependendo de ε, tal que, para todo $x \geq x_0$ vale o seguinte:

$$c - \varepsilon \leq \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} \leq c + \varepsilon. \tag{1.17}$$

Conseqüêntemente, para v suficientemente grande

$$\begin{aligned} I_2(x,v) &= \int_v^{x-v} \frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{G}(x)} dG(y) \\ &= \int_v^{x-v} \frac{\overline{G}(x-y)}{\overline{F}(x-y)} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dG(y) \\ &\leq \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon} \int_v^{x-v} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dG(y). \end{aligned}$$

Agora, usando integração por partes, para integrais de Riemann-Stieltjes, obtemos

$$\begin{aligned} I_2(x,v) &\leq \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon} \frac{1}{\overline{F}(x)} \left[\overline{G}(v)\overline{F}(x-v) - \overline{G}(x-v)\overline{F}(v) + \int_v^{x-v} \overline{G}(x-t) dF(t) \right] \\ &= \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon} \left[\frac{\overline{F}(x-v)}{\overline{F}(x)} \overline{G}(v) - \overline{F}(v) \frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} + \int_v^{x-v} \frac{\overline{G}(x-t)}{\overline{F}(x-t)} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \right]. \end{aligned}$$

Logo, por (1.17) segue que para v suficientemente grande e $x > 2v$

$$\begin{aligned} I_2(x,v) &\leq \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon} \Big[\frac{\overline{F}(x-v)}{\overline{F}(x)} \overline{G}(v) - \overline{F}(v) \frac{\overline{G}(x-v)}{\overline{G}(x)} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} + \\ &+ (c+\varepsilon) \int_v^{x-v} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \Big] \end{aligned}$$

Usando a hipótese $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\overline{G}(x)}{\overline{F}(x)} = c$, a Proposição 1.2 e também o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned} \limsup_{x > \infty} I_2(x,v) &\leq \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon} \left[\overline{G}(v) - \overline{F}(v)c + (c+\varepsilon) \int_v^{\infty} \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \right] \\ &= \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon} \left[\overline{G}(v) - \overline{F}(v)c + (c+\varepsilon)\overline{F}(v) \right]. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Logo, de (1.15), (1.16) e (1.18) podemos concluir que:

$$\limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{G^{*2}}(x)}{\overline{G}(x)} \leq 2G(v) - \frac{c+\varepsilon}{c-\varepsilon}\left[cF(v) - \overline{G}(v) - (c+\varepsilon)\overline{F}(v)\right] + \overline{G}(v) \longrightarrow 2.$$

Portanto, $G \in \mathcal{S}$ concluindo a demonstração.

$\blacksquare$

Finalmente, provaremos as relações de inclusão entre as subclasses de distribuições citadas acima.

Teorema 1.1. *As seguintes relações são válidas:*

(a) $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ *e* $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$

(b) $\mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$

(c) $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$ *e* $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$

(d) $\mathcal{S} \neq \mathcal{L}$.

Para a demonstração do teorema necessitaremos ainda do seguinte lema, cuja demonstração será omitida e pode ser encontrada em Embrechts (1997).

Lema 1.2. *Se* F_1 *e* F_2 *são duas funções de distribuição com cauda de variação regular, tais que* $\overline{F}_i(x) = x^{-\alpha}L_i(x)$ *para* $\alpha \geq 0$ *e* $L_i \in \mathcal{R}_0$, $i = 1, 2$, *então a convolução* $G = F_1 * F_2$ *possui cauda de variação regular, onde* $\overline{G}(x) \sim x^{-\alpha}(L_1(x) + L_2(x))$ *para* $x \longrightarrow \infty$.

Demonstração do Teorema 1.1:

(a)

(i) Segue imediatamente da Proposição 1.2. que $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$.

(ii) Para verificar que $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$, tome $F \in \mathcal{R}$, então $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha}$, ou seja $\overline{F} \in R_\alpha$ para algum α. Note que o limite acima é sempre finito para algum α, concluindo-se que $F \in \mathcal{D}$.

(iii) Para mostrar que $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, considere $F \in \mathcal{L}$. Devemos mostrar que $e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) \longrightarrow \infty$ quando $x \longrightarrow \infty$.

Da definição de $F \in \mathcal{L}$, $\forall\ t > 0$, temos que

$$1 = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\overline{F}(\ln x + \ln t)}{\overline{F}(\ln x)} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\overline{F}(\ln xt)}{\overline{F}(\ln x)},$$

ou seja, $\overline{F} o \ln \in R_0$. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$ segue que $x^{\varepsilon}\overline{F}(lnx) \in R_{\varepsilon}$.

Agora, é possível mostrar que se uma função real positiva G é tal que $G \in R_{\varepsilon}$, onde $\varepsilon > 0$, então $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} G(x) = \infty$ (vide Proposição 1.5.1 em Bingham et al (1987)).

Logo, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} x^{\varepsilon}\overline{F}(lnx) = \infty$ e conseqüentemente, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) = \infty$.

(iv) $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$.

Seja $F \in \mathcal{R}$ então $F \in R_{-\alpha}$ para algum α, ou seja, existe $L \in R_0$ tal que $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$ (vide Teorema de Karamata em Binghamm et al (1987)). Assim, por indução sobre n segue do Lema 1.2.

$$\overline{F^{*n}}(x) \sim x^{-\alpha}[L(x) + \cdots + L(x)] = x^{-\alpha}nL(x) = nx^{-\alpha}L(x).$$

Logo, $\overline{F^{*n}}(x) \sim n\overline{F}(x)$, o que implica $F \in \mathcal{S}$.

Então, com os resultados acima, (a) está demonstrado.

(b) Seja $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$. Queremos mostrar que $F \in \mathcal{S}$.

Usando o mesmo raciocínio para a obtenção de (1.14) (com $v = \frac{x}{2}$) na demonstração da Proposição 1.4. podemos obter, para $x \geq 0$

$$\frac{F^{*2}(x)}{\overline{F}(x)} = 2\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}dF(y) + \overline{F}(\frac{x}{2})\frac{\overline{F}(\frac{x}{2})}{\overline{F}(x)}.$$

Então, como $F \in \mathcal{D}$, temos $\limsup\limits_{x\longrightarrow\infty} \frac{\overline{F}(\frac{x}{2})}{\overline{F}(x)} < \infty$ e como $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \overline{F}(\frac{x}{2}) = 0$ segue que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \overline{F}(\frac{x}{2})\frac{\overline{F}(\frac{x}{2})}{\overline{F}(x)} = 0$.

Assim podemos escrever $\dfrac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2\displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}} \dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} dF(y) \ + \ o(1)$.

Agora, para todo $0 \leq y \leq \dfrac{x}{2}$ então $\dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \leq \dfrac{\overline{F}(\frac{x}{2})}{\overline{F}(x)}$.

Como $F \in \mathcal{D}$, segue que existe $M > 0$ tal que $\left| \dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} . I_{[0,\frac{x}{2}]}(y) \right| \leq M$ para todo x suficientemente grande, $\forall \ y \geq 0$.

Agora, como $F \in \mathcal{L}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(y)} . I_{[0,\frac{x}{2}]}(y) = 1, \ \forall y > 0$, então segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2$$

concluindo a demonstração de *(b)*.

(c) Omitiremos os cálculos, porém para maiores detalhes o leitor poderá consultar as referências que citaremos a seguir. Para mostrar que $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$ Goldie (1978) exibe um exemplo cujo problema básico consiste no famoso paradoxo de St. Petersburg. Considere um jogo onde o primeiro jogador (Pedro) lança uma moeda honesta até que o primeiro tempo termine. Em seguida ele recebe do segundo jogador (Paulo) 2^k pedras, onde k é arbitrário. A f.d. obtida pelo jogador no lançamento da moeda é dada por $F(x) = \displaystyle\sum_{\{k:2^k \leq x\}} 2^{-k}$, $x \geq 0$, mais conhecida por distribuição de 'Peter and Paul'.

Com esta distribuição Goldie mostra que $\dfrac{\overline{F}(2^k - 1)}{\overline{F}(2^k)} = 2$ e, pela definição de $\mathcal{L}$, conclui que $F \notin \mathcal{L}$, conseqüêntemente $F \notin \mathcal{S}$. Por outro lado, mostra-se também que

$$\left\{ \frac{\overline{F}(\frac{x}{2})}{\overline{F}(x)} = 2 \ \forall \ x \geq 2, \right.$$

deduzindo que $F \in \mathcal{D}$.

Para mostrar que $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$ Goldie (1978), (utilizando resultados de Tegels (1975)), considera a f.d. $F(x) = 1 - e^{-\sqrt{x}}$, $x > 0$ para mostrar que $F \in \mathcal{S}$ e para mostrar que $F \notin \mathcal{D}$ utiliza-se da própria definição.

(d) Como verificamos que $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, basta mostrar que $\mathcal{L} \neq \mathcal{S}$. Para isto considere $\{a_n\}$

uma seqüência de números positivos satisfazendo $a_n \longrightarrow \infty$, $a_n < \frac{1}{2}(n+1)!$. Defina a cauda de F como sendo

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} 1, \ -\infty < x \leq 2; \\ \frac{1}{(n+1)!}, \ (n+1)! + na_n \leq x \leq (n+2)!, \ n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Podemos verificar que $F \in \mathcal{L}$ mas $F \notin \mathcal{S}$. Os detalhes dos cálculos serão omitidos e podem ser encontrados em Embrechts e Goldie (1979), seção 3.

■

1.4 Relações Assintóticas com Distribuições Subexponenciais

Nesta seção, estabelecemos algumas propriedades assintóticas envolvendo caudas de distribuições subexponenciais que serão importantes para o desenvolvimento do próximo capítulo. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto, vide Embrechts e Goldie (1980).

Por toda esta seção vamos considerar funções de distribuição sobre $[0, +\infty)$.

Primeiramente, da Definição 1.4 e Proposição 1.3 temos que uma f.d. é subexponencial, se e só se,

$$\overline{F * F}(x) \sim \overline{F}(x) + \overline{F}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \tag{1.19}$$

Isto equivale a dizer que se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias i.i.d. com f.d. $F \in \mathcal{S}$ então

$$P(X_1 + X_2 > x) \sim P(max\{X_1, X_2\} > x)\text{quando } x \longrightarrow \infty. \tag{1.20}$$

X_1 e X_2 são independentes com f.d. F_1 e F_2 respectivamente, então, usando um raciocínio análogo ao utilizado para obter (1.3) e (1.5) (seção 1.2), podemos mostrar que, quando $x \longrightarrow \infty$,

$$\overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x) - \overline{F_1}(x)\overline{F_2}(x) = P(max\{X_1, X_2\} > x).$$

Assim, neste caso a relação (1.20) é equivalente a

$$\overline{F_1 * F_2}(x) \sim \overline{F_1}(x) + \overline{F_2}(x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty. \tag{1.21}$$

Funções de distribuição F_1 e F_2 que satisfazem a relação (1.21) também são chamadas distribuições *max-soma-equivalentes* e denota-se $F_1 \sim_M F_2$. Em particular, vemos que $F \in \mathcal{S}$ se, e só se, $F \sim_M F$.

Uma questão importante sobre o espaço $\mathcal{S}$ das funções de distribuição subexponenciais é se ele é fechado sob convoluções, ou seja, se F_1, $F_2 \in \mathcal{S}$ temos $F_1 * F_2 \in \mathcal{S}$. Mais ainda, sob quais condições sobre as f.d.'s F_1 e F_2 temos a relação (1.21).

Na proposição a seguir apresentamos condições suficientes para que estas relações sejam satisfeitas. A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Cline (1986) (ou sob condições mais restritas em Embrechts e Goldie (1980)).

Proposição 1.5. *Sejam F_1 e F_2 funções de distribuição concentradas em $[0, +\infty)$. Se $F_1 \in \mathcal{S}$, $F_2 \in \mathcal{L}$ e $\overline{F_2}(x) = O(\overline{F_1}(x))$, então $F_1 * F_2 \in \mathcal{S}$ e $F_1 \sim_M F_2$, ou seja,* (1.21) *é satisfeita.*

Em particular, note que, como $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, então se $F_1, F_2 \in \mathcal{S}$ temos $F_1 * F_2 \in \mathcal{S}$.

Recentemente, Tang e Tsitsashvili (2003) obtiveram um resultado um pouco mais forte, que será demonstrado a seguir. Este resultado foi utilizado pelos autores para a obtenção de propriedades assintóticas de somas ponderadas aleatoriamente de v.a.'s subexponenciais e que apresentaremos no capítulo seguinte.

Proposição 1.6. *Sejam X_1 e X_2 duas v.a.'s independentes com distribuição F_1 e F_2, respectivamente, concentradas em $[0, \infty)$. Se $F_1 \in \mathcal{S}$ e $F_2 \in \mathcal{L}$, onde $\overline{F}_2(x) = O(\overline{F}_1(x))$, então, para $0 < a \leq 1$ fixado, a relação assintótica*

$$P(X_1 + cX_2 > x) \sim \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(\frac{x}{c}) \tag{1.22}$$

vale uniformemente para $c \in [a, 1]$ e a uniformidade é entendida como

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \sup_{c \in [a,1]} \left| \frac{P(X_1 + cX_2 > x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(\frac{x}{c})} - 1 \right| = 0. \tag{1.23}$$

Demonstração: Primeiramente, observe que para $A > 0$ arbitrário e $x \geq A$, temos

$$\begin{aligned}\int_A^x \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) - \int_{-\infty}^{A} \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) \\ &- \int_{x}^{\infty} \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) \qquad (1.24)\end{aligned}$$

Agora, como $F_1 \in \mathcal{S}$ segue, diretamente da definição,

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F_1^{*2}}_{(}x)}{\overline{F}_1(x)} = 2. \qquad (1.25)$$

Como $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, temos $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} = 1$ para $t \neq 0$, como $\overline{F}_1$ é não-crescente segue que $\liminf\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} \geq 1$.

Assim, pelo Lema de Fatou obtemos

$$\liminf_{x \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{A} \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) \geq \int_{-\infty}^{A} dF_1(t) = F_1(A). \qquad (1.26)$$

Por outro lado, podemos escrever

$$\int_x^{\infty} \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) = 1 - \frac{1}{\overline{F}_1(x)} \int_x^{\infty} F_1(x-t) dF_1(t)$$

e usando a Fórmula de integração por partes para integrais de Rieman-Stieltjes temos

$$\begin{aligned}\int_x^{\infty} \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) &= 1 + \frac{F_1(0)F_1(x)}{\overline{F}_1(x)} - \int_{-\infty}^{0} \frac{F_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) \\ &= 1 - \frac{F_1(0)}{\overline{F}_1(x)} + \frac{F_1(0)F_1(x)}{\overline{F}_1(x)} + \int_{-\infty}^{0} \frac{F_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) \\ &= \overline{F}_1(0) + \int_{-\infty}^{0} \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t)\end{aligned}$$

Mas, para $t < 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} = 1$ e $\dfrac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} \leq 1$. Então pelo Teorema da Convergência Dominada segue

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \int_x^{\infty} \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} dF_1(t) = 0. \qquad (1.27)$$

Assim, substituindo (1.25), (1.26) e (1.27) em (1.24) obtemos

$$\limsup_{x\longrightarrow\infty}\int_A^x \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)}dF_1(t) \leq 2 - F_1(A) - 1 = 1 - F_1(A),$$

e como $A > 0$ é arbitrário segue que

$$\limsup_{A\longrightarrow\infty}\limsup_{x\longrightarrow\infty}\int_A^x \frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)}dF_1(t) \leq 0. \tag{1.28}$$

Logo de (1.28) e como $\lim\limits_{A\longrightarrow\infty}\dfrac{F_1(A)-F_1(0)}{\overline{F}_1(0)} = 1$, dado $\varepsilon > 0$ fixado arbitrariamente podemos escolher $A_1 > 0$ suficientemente grande tal que

$$F_1(A_1) - F_1(0) \geq (1-\varepsilon)\overline{F}_1(0) \tag{1.29}$$

e simultaneamente,

$$\int_{A_1}^x \overline{F}_1(x-t)dF_1(t) \leq \varepsilon\overline{F}_1(x). \tag{1.30}$$

Agora, considerando este $A_1 > 0$ convenientemente escolhido acima, podemos escrever

$$\begin{aligned}
P(X_1 + cX_2 > x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\overline{F}_2(\frac{x-t}{c})dF_1(t)\\
&= \int_{\infty}^{0}\overline{F}_2(\frac{x-t}{c})dF_1(t) + \int_0^{A_1}\overline{F}_2(\frac{x-t}{c})dF_1(t)\\
&+ \int_{A_1}^{x}\overline{F}_2(\frac{x-t}{c})dF_1(t) + \int_x^{\infty}\overline{F}_2(\frac{x-t}{c})dF_1(t)\\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Vamos estimar cada uma das integrais que aparecem como parcelas da soma anterior. Por hipótese, seja $0 < a < 1$ fixo.

(i) Comecemos com J_1. Primeiramente, como $F_2 \in \mathcal{L}$, então para todo $t < 0$ $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\overline{F}_2(x-ta^{-1})}{\overline{F}_2(x)} = 1$ e como F_2 é não-crescente $\dfrac{\overline{F}_2(x-ta^{-1})}{\overline{F}_2(x)} \leq 1$, para $t < 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Logo, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada, obtendo

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{\overline{F}_2(x - ta^{-1})}{\overline{F}_2(x)} dF_1(t) = \int_{-\infty}^{0} \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}_2(x - ta^{-1})}{\overline{F}_2(x)} dF_1(t) = F_1(0).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ fixado acima, existe $A_2 > 0$ tal que $\forall\ x \geq A_2$ e $c \in [a, 1]$, temos

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\infty}^{0} \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{t}{c}\Big)\ dF_1(t) \\
&\geq \int_{-\infty}^{0} \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{t}{a}\Big) dF_1(t) \\
&= \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big) \int_{-\infty}^{0} \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{t}{a}\Big) \big[\overline{F}_2(\frac{x}{c})\big]^{-1} dF_1(t) \\
&\geq \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)(1 - \varepsilon) F_1(0).
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $t < 0$ temos

$$J_1 = \int_{-\infty}^{0} F_2\Big(\frac{x - t}{c}\Big) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{0} F_2\Big(\frac{x}{c}\Big) dF_1(t) = \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big) F_1(0).$$

Logo, para todo $x \geq A_3$, vale as desigualdades abaixo:

$$(1 - \varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big) F_1(0)\ \leq\ J_1\ \leq\ \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big) F_1(0). \tag{1.32}$$

(ii) Para limitar J_2 observe que por (1.29) segue que

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{0}^{A_1} \overline{F}_2\Big(\frac{x - t}{c}\Big) dF_1(t) \\
&\geq \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big) \int_{0}^{A_1} dF_1(t) \\
&= \overline{F_2}\Big(\frac{x}{c}\Big)[F_1(A_1) - F_1(0)] \\
&\geq (1 - \varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)\overline{F}_1(0).
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Por outro lado, para todo $c \in [a,1]$ temos

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^{A_2} \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{t}{c}\Big) dF_1(t) \\
&\leq \int_0^{A_2} \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a}\Big) dF_1(t) \\
&\leq \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a}\Big) \int_0^{\infty} dF_1(t) \\
&= \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a}\Big) \overline{F}_1(0). \qquad (1.34)
\end{aligned}
$$

Mas, como por hipótese $\overline{F}_2(x) = O(\overline{F}_1(x))$, ou seja, $\limsup_{x \longrightarrow \infty} \big|\frac{\overline{F}_2(x)}{\overline{F}_1(x)}\big| \leq M$, com $0 < M < \infty$, então

$$
\begin{aligned}
\limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a}\Big)}{\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)} &= \limsup_{x \longrightarrow \infty} \Big[\frac{\overline{F}_2(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a})}{\overline{F}_1(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a})} \frac{\overline{F}_1(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a})}{\overline{F}_1(\frac{x}{c})} \frac{\overline{F}_1(\frac{x}{c})}{\overline{F}_2(\frac{x}{c})}\Big] \\
&\leq \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1\Big(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a}\Big)}{\overline{F}_1\Big(\frac{x}{c}\Big)}.
\end{aligned}
$$

Agora, temos $F_1 \in \mathcal{S}$ então pela Proposição 1.2, temos $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}_1\Big(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a}\Big)}{\overline{F}_1\Big(\frac{x}{c}\Big)} = 1$.

Como $\frac{\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a}\Big)}{\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)} \geq 1$, segue que $\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a}\Big) \sim \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)$. Logo existe $A_3 > 0$ tal que para $x \geq A_3$

$$\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c} - \frac{A_2}{a}\Big) \leq (1+\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)$$

e voltando em (1.34) temos para todo $x \geq A_3$ e $c \in [a,1]$

$$J_2 \leq (1+\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)\overline{F}_1(0). \qquad (1.35)$$

Logo, de (1.33) e (1.35) concluímos que, para $x \geq max\{A_2, A_3\}$

$$(1-\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)\overline{F}_1(0) \leq J_2 \leq (1+\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)\overline{F}_1(0). \tag{1.36}$$

(iii) Agora para limitar J_3, como $\overline{F}_2(x) = O(\overline{F}_1(x))$, seja $D = \sup_{x \geq 0} \dfrac{\overline{F_2}(x)}{\overline{F_1}(x)} < \infty$.

Logo, $\forall\ x \geq A_1$ e $c \in [a, 1]$, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq J_3 &= \int_{A_1}^{x} \overline{F}_2\big(\frac{x-t}{c}\big)dF_1(t) \\ &\leq \int_{A_1}^{x} \frac{\overline{F}_2(x-t)}{\overline{F}_1(x-t)}\ \overline{F}_1(x-t)dF_1(t) \\ &\leq D\int_{A_1}^{x} \overline{F}_1(x-t)dF_1(t). \end{aligned}$$

Assim, de (1.30) segue que

$$\text{Portanto, } 0 \leq J_3 \leq D\varepsilon\overline{F}_1(x). \tag{1.37}$$

(iv) Para limitar J_4 primeiramente observe que

$$J_4 = \int_x^{\infty} \overline{F}_2\Big(\frac{x-t}{c}\Big)dF_1(t) \leq \int_x^{\infty} dF_1(t) = \overline{F}_1(x).$$

Por outro lado, utilizando a Fórmula de Integração por Partes para integrais de Riemann Stieltjes, obtemos

$$\begin{aligned} J_4 &= 1 - \int_x^{\infty} F_2\Big(\frac{x-t}{c}\Big)dF_1(t) \\ &= \overline{F}_2(0)\overline{F}_1(x) + \int_{-\infty}^{0} \overline{F}_1(x-ct)dF_2(t) \\ &\geq \overline{F}_2(0)\overline{F}_1(x) + \int_{-\infty}^{0} \overline{F}_1(x-t)dF_2(t). \end{aligned}$$

Como fizemos anteriormente para provar (1.32), temos para $t < 0$, que $\dfrac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} \leq 1$ e $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)} = 1$, pois $F_1 \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\Big(\overline{F}_2(0)\overline{F}_1(x)+\int_{-\infty}^{0}\overline{F}_1(x-t)dF_2(t)\Big) = \overline{F}_2(0)+\int_{-\infty}^{0}\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\overline{F}_1(x-t)}{\overline{F}_1(x)}\overline{F}_1(x)dF_2(t)$$

$$= \overline{F_2}(0)+\int_{-\infty}^{0}dF_2(t)=0.$$

Deste modo, existe um $A_5>0$, suficientemente grande, tal que para $x\geq A_5$ e $c\in[a,1]$

$$0\leq J_4\leq \overline{F}_1(x). \tag{1.38}$$

Finalmente, seja $M=max\{A_2,A_3,A_4,A_5\}$, então para $\forall\ x\geq B$ e $c\in[a,1]$, substituindo (1.32), (1.36), (1.37) e (1.38) em (1.31), obtemos:

$$\begin{aligned}
P(X_1+cX_2>x) &\geq (1-\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)F_1(0)+(1-\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)\overline{F}_1(0)+(1-\varepsilon)\overline{F}_1(x)\\
&= (1-\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)[1-\overline{F}_1(0)]+(1-\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)\overline{F}_1(0)+(1-\varepsilon)\overline{F}_1(x)\\
&= (1-\varepsilon)\Big(\overline{F}_1(x)+\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P(X_1+cX_2>x) &\leq \overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)F_1(0)+(1+\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)\overline{F}_1(0)+\varepsilon D\overline{F}_1(x)+\overline{F}_1(x)\\
&= (1+D\varepsilon)\overline{F}_1(x)+\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)(1+\overline{F}_1(0))+(1+\varepsilon)\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big)\overline{F}_1(0)\\
&= (1+D\varepsilon)\overline{F}_1(x)+[1+\varepsilon\overline{F}_1(0)]\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big).
\end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, combinando as desigualdades acima e fazendo $\varepsilon\longrightarrow 0$, obtemos

$$P(X_1+cX_2>x)\sim\overline{F}_1(x)+\overline{F}_2\Big(\frac{x}{c}\Big),$$

como queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

A seguir apresentaremos dois resultados que são conseqüências direta da proposição anterior.

Corolário 1.1. *Sejam X_1 e X_2 v.a.'s independentes distribuídas por $F_1 \in \mathcal{S}$ e $F_2 \in \mathcal{L}$, respectivamente. Para $0 < a \leq b < \infty$ fixados, se $\overline{F}_2\big(\frac{x}{b}\big) = O(\overline{F}_1(x))$ então a relação*

$$P(X_1 + cX_2 > x) \sim \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2\big(\frac{x}{c}\big) \tag{1.39}$$

é válida uniformemente para $c \in [a, b]$.

Demonstração: Sejam $0 < a \leq b < \infty$ fixos. Basta considerarmos

$$X_1' = \frac{X_1}{b}$$
$$c' = \frac{c}{b}$$
$$x' = \frac{x}{b}.$$

Neste caso teremos $F_2(x^{'}) = O(F_1^{'}(x^{'}))$, onde $F_1^{'}$ é a f.d. de $X_1{}^{'}$ e $P(X_1 + cX_2 > x) = P(X_1' + c'X_2 > x')$.

Assim, da Proposição 1.6 segue que

$$\begin{aligned} P(X_1' + c'X_2 > x') \sim \overline{F}_1(x') + \overline{F}_2(\frac{x'}{c'}) &= P\big(\frac{X_1}{b} > \frac{x}{b}\big) + P\big(X_2 > \frac{x}{b}\,\frac{b}{c}\big) \\ &= P(X_1 > x) + P(X_2 > \frac{x}{c}), \end{aligned}$$

uniformemente para $c' \in [\frac{a}{b}, 1]$.

Portanto, (1.39) vale uniformemente para $c \in [a, b]$.

$\blacksquare$

No próximo resultado, assume-se que as funções de distribuição F_1 e F_2 possuem caudas assintoticamente equivalentes à cauda de uma distribuição subexponencial e como conseqüência da Proposição 1.6 obtém-se a relação do Corolário anterior.

Corolário 1.2. *Sejam X_1 e X_2 v.a.'s independentes distribuídas por F_1 e F_2, respectivamente. Se existir uma f.d. $F \in \mathcal{S}$ tal que $\overline{F}_i(x) \sim l_i\overline{F}(x)$, para algum $l_i > 0,\ i = 1, 2$. Então, para $0 < a \leq b < \infty$ fixados a relação (1.39) é válida uniformemente para $c \in [a, b]$.*

Demonstração: Por hipótese, $F \in \mathcal{S}$ e $\overline{F}_i(x) \sim l_i\overline{F}(x)$, ou seja $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\overline{F}_i(x)}{\overline{F}(x)} = l_i \in (0, \infty)$. Então, pela Proposição 1.4, podemos garantir que $F_i \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, para $i = 1, 2$.

Além disso, segue imediatamente que $\overline{F}_2(x) = O(\overline{F}_1(x))$.

(i) Se $b \leq 1$, pela Proposição 1.6 temos que $P(X_1 + cX_2 > x) \sim \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(\dfrac{x}{c})$, uniformemente para $c \in [a, 1]$ e o resultado está demonstrado.

(ii) Suponha agora que $a \leq 1 < b$.

Queremos mostrar que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \sup_{c\in[a,b]} \Big|\frac{P(X_1 + cX_2 > x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(\frac{x}{c})} - 1\Big| = 0. \tag{1.40}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
& \sup_{c\in[a,b]} \Big|\frac{P(X_1 + cX_2 > x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(\frac{x}{c})} - 1\Big| \\
\leq\ & \Big[\sup_{c\in[a,1]} + \sup_{c\in(1,b]}\Big]\Big|\frac{P(X_1 + cX_2 > x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(\frac{x}{c})} - 1\Big| \\
=\ & K_1 + K_2.
\end{aligned}$$

Por (1.23) da Proposição 1.6, segue que dado $\varepsilon > 0$ e $x > 0$, suficientemente grande, obtemos $K_1 \leq \varepsilon$.

Por outro lado, se considerarmos $c^{'} = \dfrac{1}{c}$ e $x^{'} = \dfrac{x}{c}$ então podemos escrever

$$\begin{aligned}
K_2 &= \sup_{c'\in[\frac{1}{b},1)} \Big|\frac{P(X_1 + \frac{1}{c'}X_2 > \frac{x'}{c'})}{\overline{F}_1(\frac{x'}{c'}) + \overline{F}_2(x')} - 1\Big| \\
&= \sup_{c'\in[\frac{1}{b},1)} \Big|\frac{P(c'X_1 + X_2 > x^{'})}{\overline{F}_1(\frac{x'}{c'}) + \overline{F}_2(x')} - 1\Big|.
\end{aligned}$$

Logo, aplicando novamente a Proposição 1.6, obtemos para $x' > 0$, suficientemente grande, $K_2 \leq \varepsilon$. Como $x' = \dfrac{x}{c}$, temos o mesmo resultado para $x > 0$ suficientemente grande.

Assim, para $x > 0$ suficientemente grande obtemos

$$\sup_{c \in [a,b]} \left| \frac{P(X_1 + cX_2 > x)}{\overline{F}_1(x)\overline{F}_2(\frac{x}{c})} - 1 \right| \leq 2\varepsilon,$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrário. Portanto, segue (1.39).

■

Capítulo 2

Relações Assintóticas de Somas Ponderadas Aleatoriamente

2.1 Introdução

A modelagem de muitos problemas práticos e teóricos em vários campos de estudo baseia-se em somas ponderadas de variáveis aleatórias. Especificamente, considere uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ independentes e identicamente distribuídas e a cada variável X_k, associe uma variável aleatória positiva $\{\theta_k, 1 \leq k \leq n\}$ onde as sequências $\{X_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ e $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ são independentes uma da outra. Estamos interessados nas propriedades das somas parciais

$$S_m^\theta = \sum_{k=1}^{m} \theta_k X_k. \tag{2.1}$$

Existe uma ampla literatura dedicada ao estudo de propriedades relacionadas à este tipo de somas, em especial, o comportamento limite de S_m^θ, bem como da sequência normalizada, quando $m \longrightarrow \infty$ tem sido sistematicamente investigado por um grande número de autores, dentre eles citamos Taylor et al (1984), Rosalsky e Sreehari (1998) e Hu et al (2001).

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos por Tang e Tsitsiashvili (2003) sobre o comportamento assintótico da cauda das somas S_m^θ, $m = 1, \cdots, n$ e de seus respectivos máximos

$$M_n^\theta = max\{S_m^\theta,\ 1 \leq m \leq n\}, \tag{2.2}$$

sob a hipótese das variáveis $\{X_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ terem distribuição comum subexponencial. Como citamos anteriormente, distribuições de cauda pesada, como as subexponenciais, são de grande interesse na modelagem de problemas aplicados às mais diferentes áreas.

Assim, na Seção 2.2 apresentamos alguns resultados auxiliares envolvendo somas e máximos de variáveis aleatórias ponderadas.

O resultado principal é apresentado na Seção 2.3 e estabelece as relações assintóticas

$$P(M_n^\theta > x) \sim P(S_n^\theta > x) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x), \text{ quando } x \longrightarrow \infty, \tag{2.3}$$

assumindo que as variáveis X_k têm distribuição subexponencial e os pesos aleatórios $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ satisfazem $P(a \leq \theta_k \leq b) = 1$, para alguns $0 < a \leq b < \infty$, $\forall\ k = 1, \cdots, n$. Além disso, alguns casos especiais da relação (2.3) também são apresentados.

Para finalizar, apresentamos na Seção 2.3 uma aplicação de (2.3) para a obtenção de uma aproximação da probabilidade de ruína, num horizonte finito, para um modelo de risco a tempo discreto.

2.2 Resultados Auxiliares

Os resultados apresentados nesta seção nos auxiliarão para a obtenção das propriedades assintóticas de caudas de somas ponderadas aleatoriamente apresentadas na próxima seção.

Usamos com freqüência alguns tipos de limitações que listamos na seguinte definição.

Definição 2.1. *Dada a seqüência de v.a.'s* $\Theta = \{\theta_k, 1 \leq k \leq n\}$ *dizemos que* *(i) Θ é limitada do tipo I se $P(a \leq \theta_k \leq b) = 1$, para $0 < a \leq b < \infty$;*

(ii) Θ é limitada do tipo II se $P(0 < \theta_k \leq b) = 1$, para $0 < b < \infty$;

(iii) Θ é limitada do tipo III se $P(a \leq \theta_k < \infty) = 1$, para $0 < a < \infty$;

onde $1 \leq k \leq n$.

O primeiro resultado é um caso mais geral da Proposição 1.6 visto no capítulo anterior e estabelece, basicamente que a cauda de somas de v.a.'s subexponenciais ponderadas por constantes é assintoticamente igual à soma das caudas de cada distribuição das v.a.'s ponderadas.

Proposição 2.1. *Sejam X_k, $1 \leq k \leq n$ v.a.'s i.i.d. com função de distribuição comum $F \in \mathcal{S}$. Então, para $0 < a \leq b \leq \infty$ fixados temos*

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k X_k > x\Big) \sim \sum_{k=1}^{n} \overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big) \tag{2.4}$$

uniformemente para $\underline{c_n} \in [a,b]^n$, onde $\underline{c_n} = (c_1, \cdots, c_n)$.

Demonstração: A demonstração da proposição será feita por indução.

(i) para $n = 1$ o resultado segue imediatamente, pois $c_1 > 0$ e $P(c_1 X_1 > x) = P\Big(X_1 > \dfrac{x}{c_1}\Big) = \overline{F}\Big(\dfrac{x}{c_1}\Big)$.

(ii) Suponha que (2.4) é verdadeira para algum inteiro $n = m > 0$.

(iii) Vamos mostrar que

$$P\Big(\sum_{k=1}^{m+1} c_k X_k > x\Big) \sim \sum_{k=1}^{m+1} \overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big), \tag{2.5}$$

uniformemente para $\underline{c_{m+1}} \in [a,b]^{m+1}$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir $c_{m+1} = 1$. Caso contrário basta considerar $c_k^{'} = \dfrac{c_k}{c_{m+1}}$, $1 \leq k \leq m$ e $x^{'} = \dfrac{x}{c_{m+1}}$. Neste caso, como $c_k \in [a,b]$, $k = 1, \cdots, m+1$, então $0 \leq \dfrac{a}{b} \leq c'_k \leq \dfrac{b}{a} < \infty$ para todo $1 \leq k \leq m$ e a relação (2.5) torna-se

$$P\Big(\sum_{k=1}^{m} c'_k X_k + X_{m+1} > x'\Big) \sim \sum_{k=1}^{m} P\big(X_k > \frac{x'}{c'_k}\big) + P\big(X_{m+1} > x'\big).$$

Assim, nosso trabalho se resume em provar a seguinte relação assintótica:

$$P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k + X_{m+1} > x\Big) \sim \sum_{k=1}^{m} \overline{F}\big(\frac{x}{c_k}\big) + \overline{F}(x). \tag{2.6}$$

Como, $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k X_k$ e X_{m+1} são independentes, então

$$P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k + X_{m+1} > x\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k > x - t\Big) dF(t). \tag{2.7}$$

Mas, pela hipótese de indução, temos

$$P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k > x - t\Big) \sim \sum_{k=1}^{m} \overline{F}\Big(\frac{x-t}{c_k}\Big) = \sum_{k=1}^{m} P\Big(c_k X_k > x - t\Big)$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $B_1 > 0$ tal que

$$1 - \varepsilon < \frac{P\Big(\sum\limits_{k=1}^{m} c_k X_k > x - t\Big)}{\sum\limits_{k=1}^{m} P\Big(X_k > \dfrac{x-t}{c_k}\Big)} < 1 + \varepsilon \tag{2.8}$$

uniformemente para $c_m \in [a,b]^m$ e $x \geq B_1$.

Agora para $B_1 > 0$, suficientemente grande, escolhido acima por (2.7), podemos escrever

$$\begin{aligned} P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k + X_{m+1} > x\Big) &= \int_{-\infty}^{x-B_1} P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k > x - t\Big) dF(t) + \\ &+ \int_{x-B_1}^{\infty} P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k > x - t\Big) dF(t) \\ &= L_1 + L_2. \end{aligned}$$

Primeiramente vamos analisar L_1.

Por (2.8) temos

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_{-\infty}^{x-B_1} P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k > x-t\Big) dF(t) \\ &\leq (1+\varepsilon)\int_{-\infty}^{x-B_1} \sum_{k=1}^{m} P\big(c_k X_k > x-t\big) dF(t) \\ &= (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} \int_{-\infty}^{x-B_1} P\big(c_k X_k^+ > x-t\big) dF(t) \end{aligned}$$

Agora, pela independência das variáveis $\{X_k\}$ segue

$$\begin{aligned} L_1 &\leq (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} P\big(c_k X_k^+ + X_{m+1} > x, X_{m+1} < x - B_1\big) \\ &= (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} P(c_k X_k^+ + X_{m+1} > x, X_{m+1} \leq x) \\ &= (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} \Big(P(c_k X_k^+ + X_{m+1} > x) - P(c_k X_k^+ + X_{m+1} > x, X_{m+1} > x)\Big) \\ &= (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} \Big(P(c_k X_k^+ + X_{m+1} > x) - P(X_{m+1} > x)\Big) \\ &= (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m} P(c_k X_k^+ + X_{m+1} > x) - (1+\varepsilon) m \overline{F}(x). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por outro lado, analogamente, por simetria, segue de (2.8) e da independência das variáveis $\{X_k\}$ que

$$\begin{aligned}
L_1 &\geq (1-\varepsilon)\int_{-\infty}^{x-B_1}\sum_{k=1}^{m}P(c_kX_k > x-t)dF(t)\\
&= (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{m}P(c_kX_k^+ + X_{m+1} > x, X_{m+1}\leq x-B_1)\\
&\geq (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{m}\big[P(c_kX_k^+ + X_{m+1} > x) - P(X_{m+1} > x-B_1)\big]\\
&= (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{m}P(c_kX_k^+ + X_{m+1} > x) - (1-\varepsilon)m\overline{F}(x-B_1). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Agora, para $x > 0$, temos $\overline{F}_1(x) = P(c_kX_k^+ > x) = P(c_kX_k > x) = \overline{F}\Big(\dfrac{x}{c_k}\Big)$. Assim, $\overline{F}_1(x) \sim \overline{F}(x)$.

Como $F \in \mathcal{S}$ e $\overline{F}_1(x) \sim \overline{F}(x)$, aplicando o Corolário 1.2, com $X_1 = X_m$ e $X_2 = c_kX_k$, obtemos

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{P(c_kX_k^+ + X_{m+1} > x)}{P(c_kX_k^+ > x) + P(X_{m+1} > x)} = 1,$$

uniformemente em $c_k \in [a,b]$.
Além disso, como $F \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ então $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\overline{F}(x-B_1)}{\overline{F}(x)} = 1.$

Logo, existe $B_2 > 0$, suficientemente grande, tal que

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\big[\overline{F}v(\frac{x}{c_k}\Big) + \overline{F}(x)\big] &\leq P(c_kX_k^+ + X_{m+1} > x) \leq\\
&\leq (1+\varepsilon)\ \Big[\overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}) + \overline{F}(x)\Big], \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

e

$$(1-\varepsilon)\overline{F}(x) \leq \overline{F}(x-B_1) \leq (1+\varepsilon)\overline{F}(x) \qquad (2.12)$$

uniformemente para $c_k \in [a,b]^m$ e $x \geq B_2$.

Tomando $x \geq max\{B_1, B_2\}$ e substituindo (2.11) em (**??**), obtemos

$$L_1 \geq (1-\varepsilon)^2\sum_{k=1}^{m}\overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big) - (\varepsilon-\varepsilon^2)m\overline{F}(x) \qquad (2.13)$$

e substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10) segue

$$L_1 \geq (1-\varepsilon)^2 \sum_{k=1}^{m} F\Big(\frac{x}{c_k}\Big) - (\varepsilon - \varepsilon^2) m \overline{F}(x). \tag{2.14}$$

Agora, vamos analisar L_2. Por um lado temos

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_{x-B_1}^{\infty} P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k X_k > x - t\Big) dF(t) \\ &\leq \int_{x-B_1}^{\infty} dF(t) \\ &= \overline{F}(x - B_1) \end{aligned}$$

Por (2.12), segue que para $x \geq B_2$

$$L_2 \leq (1+\varepsilon)\overline{F}(x). \tag{2.15}$$

Por outro lado, como $X_k \geq min\{X_k, 0\} \leq 0$ e $c_k \in [a,b],\ k = 1, \cdots, m$ temos

$$L_2 \geq \int_{x-B_1}^{\infty} P\big(b \sum_{k=1}^{m} min\{X_k, 0\} > x - t\big) dF(t) \tag{2.16}$$

Agora, podemos escolher $C > 0$ suficientemente grande tal que

$$P\Big(\sum_{k=1}^{m} min\{X_k, 0\} > -C\Big) \geq (1-\varepsilon). \tag{2.17}$$

Como $F \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $B_3 > 0$, de tal forma que para todo $x \geq B_3$

$$\overline{F}(x + C) \geq (1-\varepsilon)\overline{F}(x). \tag{2.18}$$

Logo, para $C > 0$ e $B_3 > 0$, ambos escolhidos acima, segue de (2.16), (2.17) e (2.18) que para $x \geq B_3$

$$\begin{aligned} L_2 &\geq \int_{x+C}^{\infty} P\Big(b\sum_{k=1}^{m} min\{X_k, 0\} > x - t\Big)dF(t) \\ &\geq \int_{x+C}^{\infty} P\Big(b\sum_{k=1}^{m} min\{X_k, 0\} > -C\Big)dF(t) \\ &= P\Big(b\sum_{k=1}^{m} min\{X_k, 0\} > -C\Big)\overline{F}(x+C) \\ &\geq (1-\varepsilon)^2\overline{F}(x), \end{aligned} \tag{2.19}$$

uniformemente para $\underline{c_m} \in [a, b]^m$.

Então, tomando $x \geq max\{B_3, B_4\}$, obtemos, por (2.15) e (2.19),

$$(1-\varepsilon)^2\overline{F}(x) \leq L_2 \leq (1+\varepsilon)\overline{F}(x), \tag{2.20}$$

uniformemente para $c_m \in [a, b]^m$.

Para concluir, seja $B = max\{B_2, B_3, B_4\}$, então combinando (2.13), (2.14) e (2.20) com (2.7), segue que

$$\begin{aligned} P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_kX_k + X_{m+1} > x\Big) &\geq (1-\varepsilon)^2\sum_{k=1}^{m}\overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big) - (\varepsilon-\varepsilon^2)m\overline{F}(x) + (1-\varepsilon)\overline{F}(x) \\ &= (1-\varepsilon)^2\sum_{k=1}^{m}\overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big) - \big[\varepsilon m - \varepsilon^2 m - (1-\varepsilon)^2\big]\overline{F}(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_kX_k + X_{m+1} > x\Big) &\leq (1-\varepsilon)^2\sum_{k=1}^{m}\overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big) + (\varepsilon+\varepsilon^2)m\overline{F}(x) + (1+\varepsilon)\overline{F}(x) \\ &= (1-\varepsilon)^2\sum_{k=1}^{m}\overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big) + \Big[m\varepsilon + m\varepsilon^2 + \varepsilon + 1\Big]\overline{F}(x), \end{aligned}$$

valendo uniformemente para $\underline{c_m} \in [a, b]^m$ e $x \geq B$. Como tomamos $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos concluir que

$$P\Big(\sum_{k=1}^{m} c_kX_k + X_{m+1} > x\Big) \sim \sum_{k=1}^{m}\overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big) + \overline{F}(x).$$

$\blacksquare$

O segundo resultado abaixo apresenta uma propriedade assintótica da cauda da distribuição do máximo de variáveis aleatórias ponderadas aleatoriamente.

Proposição 2.2. *Sejam $X_k, 1 \leq k \leq n$ v.a.'s independentes com $P(X_k > x) > 0$ para todo $x > 0$ e $1 \leq k \leq n$ e $\theta_k, 1 \leq k \leq n$ outras n v.a.'s que são limitadas do tipo II e independentes de $\{X_k, 1 \leq k \leq n\}$. Então,*

$$P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x\Big) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x).$$

Demonstração: Queremos mostrar que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{P\Big(\max\limits_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x\Big)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x)} = 1.$

Temos para cada $x > 0$,

$$P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x\Big) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} (\theta_k X_k > x)\Big). \tag{2.21}$$

Então, por um lado, é claro que

$$P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x\Big) \;\; \leq \;\; \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x). \tag{2.22}$$

Por outro lado, considere a desigualdade de Bonferroni para n eventos quaisquer $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \;\; \geq \;\; \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\leq k\neq l\leq n} P(A_k \cap A_l).$$

Então, aplicando esta desigualdade em (2.21) segue, para cada $x > 0$, que

$$P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x\Big) \geq \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) - \sum_{1\leq k\neq l\leq n} P(\theta_k X_k > x, \theta_l X_l > x).$$

Mas, por hipótese $\theta_k, 1 \leq k \leq n$ são limitadas do tipo II, então existe $0 < b < \infty$ tal que, para $0 < \theta_k \leq b$ com probabilidade um, segue que

$$
\begin{aligned}
P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x\Big) &\geq \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) - \sum_{1\leq k\neq l\leq n} P(\theta_k X_k > x, bX_l > x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) - \sum_{1\leq k\neq l\leq n} P(\theta_k X_k > x)P(bX_l > x) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x)\big(1 - \sum_{l=1, l\neq k}^{n} P(bX_1 > x)\big).
\end{aligned}
$$

Mas, $\sum_{l=1,l\neq k}^{n} P(bX_l > x) \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow \infty$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ tal que $\forall\ x \geq x_0$,

$$
P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x\Big) \geq (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x). \tag{2.23}
$$

Portanto de (2.22) e (2.23) segue o resultado.

■

2.3 Comportamento Caudal Assintótico de Somas Ponderadas de v.a.'s

Seja $\{X_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ uma seqüência de v.a.'s i.i.d. com função de distribuição comum F e assuma que a cada variável X_k está associada uma variável aleatória positiva θ_k, $k = 1, \cdots, n$, onde as seqüências $\{X_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ e $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ são mutuamente independentes. Considere as somas parciais S_m^θ, $m = 1, \cdots, n$ e seus respectivos máximos M_n^θ definidos em (2.1) e (2.2) respectivamente.

Utilizando os resultados preliminares obtidos nas Proposições 2.1 e 2.2 demonstraremos a seguir as relações assintóticas envolvendo a cauda das somas ponderadas S_m^θ e a cauda do máximo M_n^θ. Em especial, estabelecemos que a relação de definição de variáveis aleatórias subexponenciais é mantida na situação em que as variáveis são ponderadas aleatoriamente.

Teorema 2.1. *Se $F \in \mathcal{S}$ e as variáveis $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ são limitadas do tipo I, então*

$$P(M_n^\theta > x) \sim P(S_n^\theta > x) \sim P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x\Big) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x). \tag{2.24}$$

Demonstração: Note que, limitação do tipo I implica em limitação do tipo II, então a relação $P\Big(\max\limits_{1\leq k\leq n} \theta_k X_k > x\Big) \sim \sum\limits_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x)$ é imediata da Proposição 2.2. Assim, basta mostrar

$$P(S_n^\theta > x) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) \tag{2.25}$$

e

$$P(M_n^\theta > x) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x). \tag{2.26}$$

Para mostrar (2.25), como as variáveis $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ são limitadas do tipo I e são independentes de $\{X_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ segue que

$$\begin{aligned} P(S_n^\theta > x) &= \int_{[a,b]^n} P\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k X_k > x \Big| \theta_1 = c_1, \cdots, \theta_n = c_n\Big) dG_\theta(c_1, \cdots, c_n) \\ &= \int_{[a,b]^n} P\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k X_k > x\Big) dG_\theta(c_1, \cdots, c_n) \end{aligned}$$

onde $G_\theta(c_1, \cdots, c_n)$ é a função de distribuição conjunta de $\theta_1, \cdots, \theta_n$.

Agora, como $P\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k X_k > x\Big) \leq 1$, $\forall\ k = 1, \cdots, n$ e pela Proposição 2.1, $P\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k X_k > x\Big) \sim \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F}\Big(\dfrac{x}{c_k}\Big)$ uniformemente para $\underline{c_n} = (c_1, \cdots, c_n) \in [a,b]^n$, segue do Teorema da Convergência Dominada que dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 > 0$ tal que para $x \geq x_0$

$$(1-\varepsilon) \int_{[a,b]^n} \sum_{k=1}^{n} \overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big) dG_\theta(c_1, ..., c_n) \leq P(S_n^\theta > x) \leq (1+\varepsilon) \int_{[a,b]^n} \sum_{k=1}^{n} \overline{F}\Big(\frac{x}{c_k}\Big) dG_\theta(c_1, \cdots, c_n)$$

ou seja, para $x \geq x_0$

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) \leq P(S_n^\theta > x) \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x)$$

e (2.25) está provada.

Por outro lado, como $X_k \leq X_k^+$ e as v.a.'s $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ são não negativas, segue que

$$\begin{aligned} M_n^\theta &\leq \max_{1\leq m\leq n} \sum_{n=1}^{m} \theta_k X_k^+ \\ &= \sum_{k=1}^{n} \theta_k X_k^+. \end{aligned}$$

e como $S_n^\theta \leq M_n^\theta$, segue

$$S_n^\theta \leq M_n^\theta \leq \sum_{k=1}^{n} \theta_k X_k^+. \tag{2.27}$$

Imediatamente da desigualdade acima, temos

$$P(S_n^\theta > x) \leq P(M_n^\theta > x) \leq P\Big(\sum_{k=1}^{n} \theta_k X_k^+ > x\Big). \tag{2.28}$$

Note, que de maneira análoga à prova de (2.25), podemos mostrar que quando $x \longrightarrow \infty$

$$P(\sum_{k=1}^{n} \theta_k X_k^+ > x) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k^+ > x) = \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x).$$

Portanto, (2.26) segue de (2.25) e (2.28).

■

Alguns casos especiais do Teorema 2.1 são apresentados a seguir.

Corolário 2.1. *Se $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ e $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ é limitada do tipo II, então o resultado do Teorema 2.1. ainda vale.*

Demonstração: A relação

$$P\Big(\max_{1\le k\le n}\theta_k X_k > x\Big) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) \tag{2.29}$$

segue imediatamente da Proposição 2.2.

Como $\{\theta_k,\ 1 \le k \le n\}$ é limitada do tipo II existe $b \in \mathbb{R}$ com $0 < b < \infty$, tal que $P(0 < \theta_k \le b) = 1$. Podemos então escolher $\delta_0 \in (0, b]$ tal que para qualquer $0 < \delta < \delta_0$, temos $P(\theta_k > \delta) > 0$, $\forall\ k = 1, \cdots, n$.

Seja então $0 < \delta < \delta_0$ arbitrariamente fixo, então podemos escrever:

$$\begin{aligned} P(S_n^\theta > x) &= P\Big(S_n^\theta > x, \bigcup_{k=1}^{n}(0 < \theta_k < \delta)\Big) + P\Big(S_n^\theta > x, \bigcup_{k=1}^{n}(\delta \le \theta_k \le b)\Big) \\ &= I_1(\delta) + I_2(\delta). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Mas, como as v.a.'s θ_k são não-negativas e $X_k \le X_k^+$ então

$$\begin{aligned} I_1(\delta) &= P\Big[\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k > x, \bigcup_{k=1}^{n}(0 < \theta_k < \delta)\Big] \le P\Big[\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k^+ > x, \bigcup_{k=1}^{n}(0 < \theta_k < \delta)\Big] \\ &\le P\Big[\sum_{k=1}^{n} b X_k^+ > x, \bigcup_{k=1}^{n}(0 < \theta_k < \delta)\Big] = P\Big(\sum_{k=1}^{n} b X_k^+ > x\Big) P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(0 < \theta_k < \delta\Big), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da independência das variáveis $\{X_k\}$ e $\{\theta_k\}$.

Para $c_k = b$, segue da Proposição 2.1

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n} b X_k > x\Big) \sim \sum_{k=1}^{n}\overline{F}\Big(\frac{x}{b}\Big) = n\overline{F}\Big(\frac{x}{b}\Big).$$

Agora, se $b \le 1$ então $\overline{F}\Big(\dfrac{x}{b}\Big) \le \overline{F}(x)$. Caso contrário, se $b > 1$, como $F \in \mathcal{D}$, temos $\limsup\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{n\overline{F}(\frac{x}{b})}{\overline{F}(x)} < \infty$. Logo, $n\overline{F}\Big(\dfrac{x}{b}\Big) = O(\overline{F}(x))$.

Daí, obtemos

$$\limsup_{x\longrightarrow\infty}\frac{I_1(\delta)}{\overline{F}(x)} \le MP\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(0 < \theta_k < \delta)\Big).$$

Como $0 < \delta < \delta_0$ é arbitrário, segue que

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\limsup_{x\longrightarrow\infty}\frac{I_1(\delta)}{\overline{F}(x)} = 0. \tag{2.31}$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.1 $\mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$. Logo, imediatamente do Teorema 2.1, segue

$$\begin{aligned} I_2(\delta) &\sim \sum_{k=1}^{n} P\Big(\theta_k X_k > x, \bigcap_{k=1}^{n} (\delta \leq \theta_k \leq b)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) - \sum_{k=1}^{n} P\Big(\theta_k X_k > x, \bigcup_{k=1}^{n} (\delta \leq \theta_k \leq b)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) - I_3(\delta). \end{aligned} \tag{2.32}$$

De maneira análoga ao que fizemos para I_1, podemos obter

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{I_3(\delta)}{\overline{F}(x)} = 0. \tag{2.33}$$

Assim, como $I_3(\delta) \geq 0$, segue

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{I_2(\delta)}{\sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x)} = 1. \tag{2.34}$$

Portanto de (2.30), (2.31) e (2.34) obtemos

$$P(S_n^\theta > x) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x). \tag{2.35}$$

Finalmente, da relação (2.31) e (2.35) segue que

$$P(M_n^\theta > x) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x),$$

concluindo a demonstração do corolário.

■

Seja X uma v.a. com função de distribuição $F \in \mathcal{D}$. Vamos definir as seguintes funções auxiliares

$$f_*(y) = \lim \inf_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \quad e \quad f^*(y) = \lim \sup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}, \text{ para } y > 0. \tag{2.36}$$

Seja θ outra v.a. independente de X, satisfazendo

$$P(0 < \theta \leq b) = 1, \text{ para } 0 < b \leq \infty.$$

É possível mostrar (vide Cline e Samorodnitsky (1994)) que

$$0 < E[f_*(\theta^{-1})] \leq \lim \inf_{x \longrightarrow \infty} \frac{P(\theta X > x)}{P(X > x)} \leq \lim \sup_{x \longrightarrow \infty} \frac{P(\theta X > x)}{P(X > x)} \leq E[f^*(\theta^{-1})] < \infty \quad (2.37)$$

Esta equação nos auxiliará na demonstração dos próximos resultados que são conseqüências do Teorema 2.1.

Corolário 2.2. *Suponha que as variáveis $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ são limitadas do tipo II.*
(i) Se $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, então

$$\overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} Ef_*(\theta_k^{-1}) \widetilde{<} P(M_n^\theta > x) \sim P(S_n^\theta > x) \widetilde{<} \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} Ef^*(\theta_k^{-1}). \quad (2.38)$$

(ii) Se $F \in \mathcal{R}$, ou seja, $F \in R_{-\alpha}$, para $0 \leq \alpha < \infty$, então

$$P(M_n^\theta > x) \sim P(S_n^\theta > x) \sim \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E\theta_k^\alpha. \quad (2.39)$$

Demonstração: *(i)* Como $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ e $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ são limitadas do tipo II, pelo Corolário 2.1, temos

$$P(M_n^\theta > x) \sim P(S_n^\theta > x). \quad (2.40)$$

Por outro lado, por (2.37) temos

$$\liminf_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x)}{\overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(f_*(\theta_k^{-1}))} \geq 1 \text{ e } \limsup_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x)}{\overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(f^*(\theta_k^{-1}))} \leq 1. \quad (2.41)$$

Então, para $\varepsilon > 0$ e x suficientemente grande segue

$$\overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(f_*(\theta_k^{-1}))(1 - \varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) \leq \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(f^*(\theta_k^{-1}))(1 + \varepsilon). \quad (2.42)$$

Portanto, por (2.42) obtemos (2.38).

(ii) Agora $F \in \mathcal{R}$, então $\overline{F} \in R_{-\alpha}$ para algum α, ou seja,

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\overline{F}(\frac{x}{\theta_k})}{\overline{F}(x)} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{P(\theta_k X_k > x)}{P(X_k > x)} = E\theta_k^{\alpha}.$$

Logo, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) \sim \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E\theta_k^{\alpha}$.

Assim, como, pelo Teorema 1.1, $\mathcal{R} \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, (2.39) segue do Corolário 2.1.

■

Para finalizar, consideremos o caso de variação rápida.

Para isto, denote por $\overline{\theta}$ o ponto extremo superior da v.a. θ, ou seja,

$$\overline{\theta} = sup\{y : P(\theta \leq y) < 1\} < \infty.$$

Temos então a seguinte conseqüência do Teorema 2.1.

Corolário 2.3. *Suponha que $F \in \mathcal{S} \cap \mathcal{R}_{-\infty}$ e que $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ é uma seqüência de v.a.'s limitadas do tipo I. Se $P(\theta_k = \overline{\theta}_k) = p_k > 0$, para $1 \leq k \leq n$, então temos*

$$P(M_n^{\theta} > x) \sim P(S_n^{\theta} > x) \sim \sum_{k=1}^{n} p_k \overline{F}\Big(\frac{x}{\overline{\theta}_k}\Big) \sim \overline{F}\Big(\frac{x}{\widehat{\theta}}\Big) \sum_{k=1}^{n} p_k I_{(\overline{\theta}_k = \widehat{\theta})},$$

onde $\widehat{\theta} = max\{\overline{\theta}_k : 1 \leq k \leq n\}$.

Demonstração: Como $F \in \mathcal{S}$ e $\{\theta_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ é limitada do tipo I, do Teorema 2.1 segue que

$$P(M_n^{\theta} > x) \sim P(S_n^{\theta} > x) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x). \tag{2.43}$$

Mas, como por hipótese $P(\theta_k = \overline{\theta}) = p_k > 0$ e $\{X_k\}$ e $\{\theta_k\}$ são independentes podemos escrever

$$\frac{P(\theta_k X_k > x)}{\overline{F}(\frac{x}{\overline{\theta}_k})} = \int_{(0,\overline{\theta}_k)} \frac{\overline{F}(\frac{x}{y})}{\overline{F}(\frac{x}{\overline{\theta}_k})} dG_k(y) + p_k,$$

onde G_k é a f.d. de θ_k. Note que $G_k(y) = 1$, $\forall\ y \geq \overline{\theta}_k$.

Assim, como $F \in \mathcal{R}_{-\infty}$ temos por (1.9) que para todo $0 < y < \overline{\theta}_k$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\overline{F}(\frac{x}{y})}{\overline{F}(\frac{x}{\overline{\theta}_k})} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\overline{F}(\frac{x}{\overline{\theta}_k}\frac{\overline{\theta}_k}{y})}{\overline{F}(\frac{x}{\overline{\theta}_k})} = 0$$

e como $\overline{F}\Big(\dfrac{x}{y}\Big) \leq \overline{F}\Big(\dfrac{x}{\overline{\theta}_k}\Big)$, $\forall\ 0 < y < \overline{\theta}_k$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{P(\theta_k X_k > x)}{\overline{F}(\frac{x}{\overline{\theta}_k})} = p_k.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} P(\theta_k X_k > x) \sim \sum_{k=1}^{n} p_k \overline{F}\Big(\frac{x}{\overline{\theta}_k}\Big). \tag{2.44}$$

Por outro lado, podemos escrever

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k \overline{F}\Big(\frac{x}{\overline{\theta}_k}\Big)}{\overline{F}\Big(\dfrac{x}{\widehat{\theta}}\Big)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k I_{(\overline{\theta}_k = \widehat{\theta})}} = 1 + \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k \overline{F}\Big(\frac{x}{\overline{\theta}_k}\Big) I_{(\overline{\theta}_k < \widehat{\theta})}}{\overline{F}\Big(\dfrac{x}{\widehat{\theta}_k}\Big)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k I_{(\overline{\theta}_k = \widehat{\theta})}}. \tag{2.45}$$

Mas, novamente, como $F \in R_{-\infty}$, para todo k, tal que $\overline{\theta}_k < \widehat{\theta}$, segue $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\overline{F}\Big(\dfrac{x}{\overline{\theta}_k}\Big)}{\overline{F}\Big(\dfrac{x}{\widehat{\theta}}\Big)} = 0.$

Logo, de (2.45) obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \overline{F}\Big(\frac{x}{\overline{\theta}}\Big) \sim \overline{F}\Big(\frac{x}{\widehat{\theta}}\Big) \sum_{k=1}^{n} p_k I_{(\widehat{\theta} = \overline{\theta})}. \tag{2.46}$$

Portanto, de (2.43), (2.44) e (2.46) o corolário está demonstrado.

■

2.4 Uma Aplicação à Teoria da Ruína

Considere a movimentação financeira de uma empresa seguradora em sucessivos períodos de tempo $n = 1, 2, \cdots$

Sejam W_n e Z_n as quantias totais de prêmios recebidos e indenizações pagas, respectivamente, pela empresa durante o n-ésimo período considerado. Suponha que as indenizações são pagas no final de cada período n e os prêmios são recebidos no início de cada período.

Suponha que a empresa, em cada período de tempo, investe seu capital corrente em uma certa aplicação financeira. Denote por ξ_n o coeficiente estocástico relativo ao retorno do investimento realizado no período $(n-1, n)$, que será denominado coeficiente de inflação. Assume-se que $P(\xi_n > 0) = 1, \ \forall \ n \geq 1$.

Assumiremos que os pares (W_n, Z_n), $n \geq 1$ são i.i.d. e que as seqüências $\{\xi_n, n \geq 1\}$ e $\{(W_n, Z_n), n \geq 1\}$ são mutuamente independentes.

O valor do capital da empresa no final do período n será denotado por R_n. Assumindo que a empresa possui um capital inicial $x \geq 0$, então a reserva de capital de risco da companhia de seguros ao final do período n satisfaz a seguinte equação recursiva

$$\begin{cases} R_0 &= x \\ R_n &= \xi_n R_{n-1} + (W_n - Z_n), \ n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{2.47}$$

Em particular, para $\xi_n = 1, \ \forall \ n \geq 1$, o modelo (2.47) é o conhecido modelo de risco de renovação ou modelo de Sparre-Andersen a tempo discreto (vide por exemplo, Asmussen (2000)).

O problema principal da teoria da ruína, consiste em obter estimativas para a probabilidade da ruína da empresa, ou seja, a probabilidade de que o capital da seguradora torna-se negativo em algum instante de tempo.

Assim, para o modelo de risco (2.47) definimos a probabilidade de ruína horizonte finito $n \geq 1$ por

$$\Psi(x, n) = P(\min_{0 \leq m \leq n} R_m < 0 \big| R_0 = x), \tag{2.48}$$

ou seja, a probabilidade de que a ruína ocorra em algum dentre os n primeiros períodos de tempo.

A probabilidade da ruína num horizonte infinito é definida por

$$\Psi(x) = P\big(\min_{m\geq 0} R_m < 0 \;\big|\; R_0 = x\big).$$

Note que, $\Psi(x, n) \leq \Psi(x, n + 1)$, $\forall\ n \geq 1$ e $\lim_{n\longrightarrow\infty} \Psi(x, n) = \Psi(x)$.

O modelo (2.47) tem sido estudado por muitos autores. Sob a hipótese que $\{\xi_n, n \geq 1\}$ é uma seqüência de v.a.'s i.i.d, Nyrkinen (1999 e 2001) e Tang e Tsitsiashvili (2003), por exemplo, investigaram o comportamento assintótico das probabilidades da ruína num horizonte finito e infinito. Já Cai (2002) considerou o caso em que $\{\xi_n, n \geq 1\}$ apresenta uma estrutura autoregressiva e estabeleceu limites exponenciais (tipo Lundberg) para a probabilidade de ruína num horizonte finito, na presença de distribuições de indenizações de cauda leve. Resultados semelhantes foram recentemente obtidos por Cai e Dickson (2004) sob a hipótese que $\{\xi_n, n \geq 1\}$ é uma cadeia de Markov.

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos por Tang e Tsitsiashvili (2003) que obtiveram estimativas para a probabilidade da ruína num horizonte finito, sob uma estrutura de dependência arbitrária da seqüência $\{\xi_n, n \geq 1\}$, como uma aplicação dos resultados apresentados na seção anterior.

Para isto, denote $X_n = Z_n - W_n,\ n \geq 1$, que sob as hipóteses anteriores, são v.a.'s i.i.d e seja F sua distribuição comum. Assim, desenvolvendo a equação recursiva (2.47) obtemos

$$R_0 = x,\ R_n = R_0 \prod_{i=1}^{n} \xi_i - \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=k+1}^{n} \xi_i,\ n = 1, 2, \cdots \tag{2.49}$$

Agora, considerando $Y_n = \xi_n^{-1},\ n \geq 1$ como sendo o fator de desconto do período $n-1$ à n então os valores descontados de R_n são dados por

$$\widetilde{R}_0 = x$$

e para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_n &= R_n \prod_{i=1}^{n} Y_i \\ &= x - \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=1}^{k} \xi_i. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Assim, como $\widetilde{R}_n < 0$ se, e só se, $R_n < 0$, então de (2.50) obtemos

$$\begin{aligned}\Psi(x,n) &= P(\min_{0\leq m\leq n} \widetilde{R}_m < 0 \mid \widetilde{R}_0 = x) \\ &= P(\widetilde{R}_m < 0, \text{ para algum } m = 0, 1, \cdots, n \big| \widetilde{R}_0 = x) \\ &= P(\sum_{k=1}^{m} X_k \prod_{i=1}^{k} Y_i > x, \text{ para algum } m = 0, 1, \cdots, n \big| \widetilde{R}_0 = x).\end{aligned}$$

Logo,

$$\Psi(x,n) = P(\max_{1\leq m\leq n} \sum_{k=1}^{m} X_k \prod_{i=1}^{k} Y_i > x). \tag{2.51}$$

Observe que, considerando $\theta_k = \prod_{i=1}^{k} Y_i,\ 1 \leq k \leq n$, então a probabilidade da ruína acima reduz-se à cauda da distribuição do máximo de somas ponderadas aleatoriamente, ou seja,

$$\Psi(x,n) = P(\max_{1\leq m\leq n} \sum_{k=1}^{m} X_k \theta_k > x).$$

Portanto, como uma aplicação direta do Teorema 2.1 e corolários, podemos obter as seguintes aproximações para $\Psi(x,n)$, quando o capital inicial x tende ao infinito.

Corolário 2.4. *Considere o modelo de risco descrito em (2.47) e $n \geq 1$.*

(a) Se $F \in \mathcal{S}$ e $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ é limitada do tipo I, então

$$\Psi(x,n) \sim \sum_{k=1}^{n} P\big(X_k \prod_{i=1}^{k} Y_i > x\big). \tag{2.52}$$

(b) Se $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ para algum $0 \leq \alpha < \infty$ e $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ é limitada do tipo III, então

$$\Psi(x,n) \sim \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E \prod_{i=1}^{k} Y_i^{\alpha}. \tag{2.53}$$

(c) Se $F \in \mathcal{S} \cap \mathcal{R}_{-\infty}$, $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ é limitada do tipo I e $P(\Theta_k = \overline{\Theta}_k) = p_k > 0$ para $1 \leq k \leq n$, então

$$\Psi(x,n) \sim \overline{F}\big(\frac{x}{\widehat{\Theta}}\big) \sum_{k=1}^{n} p_k I_{(\overline{\Theta}_k = \widehat{\Theta})}. \tag{2.54}$$

onde $\overline{\Theta}_k = \sup\{y : P(\Theta \leq y) < 1\} < \infty$ *e* $\widehat{\Theta} = \max\{\overline{\Theta}_k,\ 1 \leq k \leq n\}$.

Demonstração: Basta observar que se $\{\xi_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ são limitadas do tipo I/II então as variáveis $\Theta_k,\ k = 1, \cdots, n$ são limitadas do tipo I/II então as variáveis $\theta_k;\ k = \{1, \cdots, n\}$ são limitadas do tipo I/II.

Assim, (a) segue imediatamente do Teorema 2.1, (b) segue do Corolário 2.2 e (c) é conseqüência do Corolário 2.3.

■

Note que, por (2.53) temos que a probabilidade da ruína num horizonte finito é assintoticamente determinada pela distribuição F, quando esta possui cauda regularmente variante.

Em particular, considere o modelo (2.49) com coeficiente de inflação $\xi_k = 1 + I_k$, onde $I_k > 0$ representa a taxa de juro referente ao k- ésimo período e $\{I_k,\ k \geq 0\}$ são v.a.'s não negativas .

Como $\xi_k = 1 + I_k \geq 1,\ \forall\ k = 1, \cdots, n$ então $\xi_k,\ 1 \leq k \leq n$ são limitadas do tipo III. Logo, pelo Corolário 2.4(b), se $F \in R_{-\alpha}$ segue que

$$\Psi(x,n) \sim \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E \prod_{j=1}^{k} (1 + I_j)^{-\alpha}.$$

Este resultado é uma extensão do resultado obtido por Cai e Dickson (2004) (Cololário 2.1), onde foi assumido que a seqüência de taxas de juros $\{I_k,\ k \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov. No nosso caso, nenhuma hipótese quanto à estrutura de dependência de $\{I_k,\ k \geq 0\}$ é assumida.

Sumário

Referências Bibliográficas

[1] Asmussen, S.Ruin Prbabilities, World Sicientific, Singapura, 2000.

[2] Bingham, N.H., Goldie, C.M. e Teugels, J.L., Regular Variation, Cambridge University Press, 1987.

[3] Campus, M. A., Loureiro, J. A. e Pedrosa, D. C., Distribuições de Caudas Pesadas e Aplicação em Redes de Computadores, Centro de informática - UFPE (2001).

[4] Cline, D. B. H., Convolution tails, product tails and domains of attraction, Probab, Theory Relat Fields 72(4), 529-557, (1986).

[5] Cline, D.B.H., Convolutions of Distributions With Exponential and Subexponential Tails, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 43 (1987), 347-365.

[6] Cline, D.B.H. and Samorodnitsky, G., Subexponentiality of the product of independent random variables, Stochastic Process. Appl.49(1), 75-98,(1994).

[7] Embrechts, P. and Goldie, C. M., On closure and factorization properties of subexponential and related distributions, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 2d9(2), 243-256, (1980).

[8] Embrechts, P., Kliippelberg C., Mikosch T., Modeling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlang, Berlim, 1997.

[9] Goldie, C. M., Subexponential distributions and dominated-variation tails, J. Appl. Probability 15(2), 440-442, (1978).

[10] Hu, T., Ordóñez Cabrera, M., and Volodin, A. I., Convergence of randomly Weighted sums of Banach space valued random elements and uniform integrability concerning the random weights, Statist. Probab. Lett. 51(2), 155-167]4, (2001).

[11] Ng, K. W., Tang, Q., and Yang, H., Maxima of sums of heavy-tailed random variables, Astin Bull. 32(1), 43-55; (2002).

[12] Rosalsky, A. and Sreehari, M., On the limiting behavior of randomly weighted partial sums, Statist. Probab. Lett. 40(4), 403-410, (1998).

[13] Tang, Q. and Tsitsiashvili, G., Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks, Stochastic Process. Appl. 108(2), 299-325, (2003).

[14] Tang, Q. and Tsitsiashvili, G., Randomly weighted Sums of Subexponential Random Variables With Application to Ruin Theory, Extremes 6, 171-188, 2003.

[15] Taylor, R.L., Raina, C.C. and Daffer, P.Z., Stochastic conergence of randomly weighted sums of random elements, Stochastic Anal. Appl., 2, 299-321.

[16] Teugels, J. L., The class of subexponential distributions, Ann. Prob. 3, 1000-1011, (1975).