Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Problema da Existência de uma Base Finita para algumas Variedades de Grupos

por

Evander Pereira de Rezende

Brasília
2006

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

O Problema da Existência de uma Base Finita para algumas Variedades de Grupos

por

Evander Pereira de Rezende*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 23 de fevereiro de 2006.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Alexei Krassilnikov - UnB (Orientador)

Prof. Dr. Pavel Shumyatsky - UnB

Profa. Dra. Shirlei Serconek - UFG

*O autor foi bolsista CNPq/CAPES durante a elaboração deste trabalho.

À minha mãe Maria Aparecida

Agradecimentos

Ao Deus de minha salvação, o único que é digno de toda honra, glória e louvor, pela capacitação que me foi concedida.

Aos meus pais, Maria Aparecida e Gumercino, que muito me apoiaram e me ajudaram em todos os projetos de minha vida, em especial nesta caminhada.

Aos meus irmãos, meu cunhado e minhas cunhadas, que sempre me apoiaram e me ajudaram das mais diversas formas possíveis.

Aos meus sobrinhos, que sempre me fazem sorrir nos momentos de tristeza.

À minha noiva, Mônica Cristina, por compreender minha ausência e me apoiar sempre.

A todos os meus verdadeiros amigos, pelos momentos de alegria, companheirismo e trocas de conhecimento.

Ao meu orientador professor Dr. Alexei Krassilnikov, pela escolha do tema, pela ajuda na construção do meu conhecimento.

À professora Dra. Shirlei Serconek, por ter me inspirado a gostar de álgebra e por participar da comissão examinadora desta dissertação.

Ao professor Dr. Pavel Shumyatsky, por participar da comissão examinadora desta dissertação e pelas suas contribuições.

Aos professores e funcionários dos Departamentos de Matemática da UnB e da UFG, pela prestatividade e paciência que sempre demonstraram.

Ao CNPq e a Capes, pelo suporte financeiro.

If I have seen further, it is by standing on the shoulders of giants.

— ISAAC NEWTON

Resumo

Seja F um grupo livre, com base $X = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Seja $u = u(x_1, \ldots, x_n) \in F$. Dizemos que $u \equiv 1$ é uma *identidade* em um grupo G, se $u(g_1, \ldots, g_n) = 1$, para todos $g_1, \ldots, g_n \in G$. A *variedade de grupos* $\mathbf{V}$ definida pelo conjunto de identidades $\{v_i \equiv 1 \mid i \in I\}$ é a classe de todos os grupos que satisfazem a cada uma das identidades deste conjunto, chamado de uma *base* de identidades de $\mathbf{V}$. Por exemplo, a identidade $[x_1, x_2] \equiv 1$, define a variedade $\mathbf{A}$ de todos os grupos abelianos.

Nesta dissertação, faremos um estudo de duas variedades de grupos que não possuem nenhuma base finita, ou seja, não podem ser definidas por nenhum conjunto finito de identidades. A primeira variedade, consiste de todos os grupos que são extensões de um grupo de expoente 4 por um grupo de expoente 2. A segunda variedade é uma variedade de grupos centro-por-abeliano-por-nilpotente. Esta dissertação foi baseada nos trabalhos de Bryant [5], Kleiman [11] e de Bryant e Krassilnikov [4], e também no capítulo 7 do livro de Bahturin [2].

Palavras-chave: Identidades em grupos, variedades de grupos, propriedade da base finita.

Abstract

Let F be a free group with a basis $\{x_i \mid i = 1, 2, \dots\}$. Let $u = u(x_1, \dots, x_n) \in F$. We say that $u \equiv 1$ is an identity in a group G if $u(g_1, \dots, g_n) = 1$ for all $g_1, \dots, g_n \in G$. A *variety of groups* $\mathbf{V}$ defined by a set of identities $\{v_i \equiv 1 \mid i \in I\}$ is the class of all groups satisfying each identity of this set. The set $\{v_i \equiv 1 \mid i \in I\}$ is called a *basis* of identities of $\mathbf{V}$. For example, the identity $[x_1, x_2] \equiv 1$ defines the variety $\mathbf{A}$ of all abelian groups.

In this dissertation, we study two varieties of groups which are not finitely based, that is, they cannot be defined by a finite set of identities. The first variety consists of all the groups that are extensions of a group of exponent 4 by a group of exponent 2. The second variety is a variety of centre-by-abelian-by-nilpotent groups. The dissertation was based on the works of Bryant [5], Kleiman [11], Bryant and Krassilnikov [4] and also on the chapter 7 of the Bahturin's book [2].

Keywords: Identities in groups, varieties of groups, finite basis property.

Sumário

Introdução

Para falar sobre o Problema da existência de uma base finita para variedades de grupos, precisamos antes de algumas definições. Seja F um grupo livre, com base $X = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. A definição precisa de grupo livre será dada no capítulo 1. Seja $u = u(x_1, \ldots, x_n) \in F$. Dizemos que $u \equiv 1$ é uma *identidade* em um grupo G, se $u(g_1, \ldots, g_n) = 1$, para todos $g_1, \ldots, g_n \in G$. Assim, a *variedade de grupos* $\mathbf{V}$ definida pelo conjunto de identidades $\{v_i \equiv 1 \mid i \in I\}$ é a classe de todos os grupos que satisfazem a cada uma das identidades deste conjunto, chamado de uma *base* de identidades de $\mathbf{V}$. Podemos citar alguns exemplos de variedades de grupos, como a variedade $\mathbf{A}$ de todos os grupos abelianos, que é definida pela identidade $[x_1, x_2] \equiv 1$ e a variedade de Burnside $\mathbf{B}_n$ de expoente n, de todos os grupos de expoente divisor de n, definida pela identidade $x^n \equiv 1$.

Diremos que uma variedade de grupos $\mathbf{U}$ possui *base finita*, se $\mathbf{U}$ pode ser definida por algum conjunto finito de identidades. A questão sobre a existência de variedades de grupos que não possuam uma base finita, foi inicialmente feita por B. H. Neumann em 1937 [14]. Uma maneira de se enunciar esta questão é a seguinte:

Toda variedade de grupos pode ser definida por um conjunto finito de identidades?

Esta questão ficou sem resposta até 1970. Neste ano, Olshanskii [17] mostrou que existem variedades de grupos que não possuem nenhuma base finita. No mesmo ano, Adian [1] e Vaughan-Lee [20], exibiram exemplos de variedades de grupos sem nenhuma base finita. Mas outros problemas sobre a existência de base finita para várias variedades de grupos continuavam sem resposta. Por exemplo, o problema 11 do livro de H. Neumann [15], que foi enunciado da seguinte forma:

A variedade $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ *possui uma base finita de identidades?*

A variedade $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ é a variedade produto de $\mathbf{B}_4$ e $\mathbf{B}_2$, podendo ser definida como a variedade de todas as extensões de grupos de $\mathbf{B}_4$ por grupos de $\mathbf{B}_2$, ou seja, um grupo $G \in \mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ se existe $N \lhd G$ tal que $N \in \mathbf{B}_4$ e $G/N \in \mathbf{B}_2$. Este problema, que será o assunto principal do capítulo 2 desta dissertação foi resolvido de forma independente por R. M. Bryant [5] e Ju. G. Kleiman [11] em 1973.

Outro problema que ficou sem resposta por muitos anos é o seguinte:

Existe uma variedade satisfazendo a identidade

$$[[x_1,x_2,x_3],[x_4,x_5,x_6],x_7] \equiv 1, \tag{1}$$

que não possui uma base finita?

Um grupo G satisfazendo a identidade acima é chamado centro-por-abeliano-por-nilpotente (de classe no máximo 2), isto é, $G/Z(G)$ é uma extensão de um grupo abeliano por um nilpotente de classe no máximo 2. Em 1995, C. K. Gupta e A. N. Krassilnikov [6], mostraram que a variedade definida pela identidade (1) e pelas identidades

$$u_n = [x^8,[x_1,x_2],\ldots,[x_{4n-3},x_{4n-2}],x^8] \equiv 1,\, n \geq 1,$$

não possui nenhuma base finita. Na verdade eles mostraram um fato ainda mais forte, que a variedade definida pela identidade (1), por $x^{128} \equiv 1$ e pelas identidades u_n, $n \geq 1$, não possui base finita.

Alguns anos depois, em 2000, R. M. Bryant e A. N. Krassilnikov [4] mostraram que a variedade definida pela identidade (1) e pelas identidades

$$v_n(x,x_1,\ldots,x_{2n}) = [(x^8)^{[x_1,x_2][x_3,x_4]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}]},x^8] \equiv 1$$

não possui base finita. Este resultado será o assunto principal do capítulo 3 desta dissertação. Mais tarde em 2003, A. N. Krassilnikov [12] construiu uma variedade de grupos sem base finita satisfazendo a identidade (1) e $x^8 \equiv 1$.

Outros resultados e problemas que ainda estão em aberto nesta área, podem ser encontrados no livro de Bahturin e Olshanskii [3] e no artigo de Gupta e Krassilnikov [7].

Depois destas considerações históricas sobre o problema da existência de bases finitas, mostraremos os objetivos e a forma em que foi estruturado o trabalho.

O objetivo principal desta dissertação é realizar um estudo sobre variedades sem base finita.

Nos basearemos nos trabalhos de Bryant [5] e Kleiman [11] e no capítulo 7 do livro de Bahturin [2], para mostrar que $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ não possui uma base finita de identidades. O trabalho de Bryant e Krassilnikov [4] será a base de nosso último capítulo, no qual construiremos uma variedade centro-por-abeliano-por-nilpotente sem base finita.

No primeiro capítulo, introduziremos conceitos básicos em teoria de grupos, como por exemplo grupos nilpotentes e grupos livres. Faremos um estudo mais detalhado, sobre variedades de grupos, subgrupos verbais, grupos relativamente livres e definiremos o produto de variedades de grupos. Esta parte sobre variedades de grupos tem como base o livro de Hanna Neumann [15].

No capítulo 2 mostraremos que a variedade de grupos $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ não possui nenhuma base finita. Para isto, construiremos uma família de grupos que satisfaz algumas das identidades que definem $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$, mas não satisfaz as demais. Com base nesta construção demonstraremos o teorema 2.2 que é o principal resultado do capítulo.

O último capítulo, será dedicado à construção de uma variedade $\mathbf{V}$, de grupos centro-por-abeliano-por-nilpotente sem base finita, ou seja uma variedade que satisfaz a identidade (1). Esta demonstração, como no capítulo anterior, necessita primeiro da construção de uma família de grupos que satisfaz algumas das identidades que definem a variedade $\mathbf{V}$, mas não a todas. A construção desta família de grupos é mais complicada que a do capítulo 2. Concluímos o capítulo com a demonstração de que a variedade $\mathbf{V}$ não possui base finita.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Grupos e Apresentações de Grupos

Nesta seção apresentaremos alguns resultados conhecidos da teoria de grupos. Iniciaremos falando sobre grupos abelianos livres e nilpotentes. No final da seção falaremos sobre grupos livres e apresentações de grupos, isto nos possibilitará desenvolver a teoria sobre variedades de grupos. Os resultados desta seção serão em sua maioria apresentados sem demonstração, faremos apenas referência a livros em que o leitor poderá consultar as demonstrações.

Grupos Abelianos e Nilpotentes

Definição 1.1. Um grupo A é chamado *abeliano livre* se ele for a soma direta de grupos cíclicos infinitos. Em outras palavras, A é abeliano livre, se existe um subconjunto $X \subset A$ de elementos de ordem infinita, chamado uma *base* de A, tal que $A = \sum\limits_{x \in X} \langle x \rangle$, ou seja $A \cong \sum\limits_{x \in X} \mathbb{Z}$. A cardinalidade do conjunto X será chamada *posto* de A.

Proposição 1.2. *Todo grupo abeliano é um quociente de um grupo abeliano livre.*

Demonstração: Ver [19, p. 313]. □

Proposição 1.3. *Todo subgrupo de um grupo abeliano livre também é abeliano livre.*

Demonstração: Ver [9, p. 52] e [19, p. 316]. □

Definição 1.4. Seja G um grupo. O menor inteiro positivo n tal que $g^n = 1$, para todo $g \in G$, se existir, é chamado de *expoente* de G.

Definição 1.5. Seja p um número primo. Então um *p-grupo abeliano elementar* G é um grupo abeliano de expoente p.

Observamos, que se G é um p-grupo abeliano elementar então $G \cong \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_p$, onde I é uma família de índices.

Definição 1.6. Um grupo G é chamado *nilpotente* se possui uma série de subgrupos

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_c = G,$$

tal que $G_{i-1} \lhd G$, $G_i/G_{i-1} \subset Z(G/G_{i-1})$, para todo $i = 1, \ldots, c$. Tal série de subgrupos é chamada *série central* de G. O menor de todos os comprimentos das séries centrais de G é chamado de *classe de nilpotência* do grupo G.

Seja G um grupo. Sejam $x_1, x_2, \ldots \in G$. Relembramos que o *comutador* de x_1 e x_2 é:

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 = x_1^{-1} x_1^{x_2},$$

onde $x_1^{x_2}$ é o conjugado de x_1 por x_2. Definiremos um *comutador simples* de peso $n \geq 2$, de forma recursiva por:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Por convenção, teremos: $[x_1] = x_1$.

A proposição abaixo mostra algumas propriedades básicas de comutadores de demonstração direta.

Proposição 1.7. *Sejam G um grupo e $x, y, z \in G$. Então:*

1. $xy = yx[x, y]$;
2. $[x, y] = [y, x]^{-1}$;
3. $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$ *e* $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$.

Sejam $X_1, X_2, \ldots$ subconjuntos não-vazios de um grupo G. Definiremos o subgrupo comutador de X_1 e X_2 por:

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1,\, x_2 \in X_2 \rangle.$$

Mais geralmente, temos que:

$$[X_1, X_2, \ldots, X_n] = [[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}], X_n].$$

Pelo ítem 2 da proposição acima, temos que $[X_1, X_2] = [X_2, X_1]$.

Daremos agora algumas caracterizações alternativas de nilpotência. Estas caracterizações serão através de duas séries centrais bastante conhecidas.

Definiremos uma nova série de subgrupos, por:

$$\begin{aligned} \gamma_1(G) &= G, \\ \gamma_k(G) &= [\gamma_{k-1}(G), G]. \end{aligned}$$

Esta série é chamada de *série central inferior* de G. É fácil verificar que $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) \subset Z(G/\gamma_{i+1}(G))$ e que $\gamma_i(G)$ é subgrupo completamente invariante de G.

Definiremos também a *série central superior*, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Z_0(G) &= 1, \\ Z_1(G) &= Z(G), \\ Z_i(G)/Z_{i-1}(G) &= Z(G/Z_{i-1}(G)). \end{aligned}$$

Proposição 1.8. *Seja $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$ uma série central em um grupo nilpotente G. Então:*

1. $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$, *para todo i, e assim $\gamma_{n+1}(G) = 1$;*

2. $G_i \leq Z_i(G)$, *para todo i, e assim $Z_n(G) = G$;*

3. *A classe de nilpotência c de G é igual ao comprimento da série central inferior, que também é igual ao comprimento da série central superior.*

Demonstração: Ver [18, p. 125]. □

Proposição 1.9. *Todo subgrupo e todo quociente de um grupo nilpotente de classe c é nilpotente de classe menor ou igual a c.*

Demonstração: Ver [19, p. 115]. □

Proposição 1.10. *Seja G um grupo arbitrário. Seja M um conjunto gerador de G. Então $\gamma_i(G)$ é gerado por $\gamma_{i+1}(G)$ e todos os comutadores simples de peso i, $[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_i}]$, com $x_{j_k} \in M$.*

Demonstração: Ver [8, p. 152] e [9, p. 118]. □

Proposição 1.11. *Seja G um grupo. Seja M um conjunto gerador de G. Então G é nilpotente de classe no máximo c se, e somente se, $[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] = 1$, para todos $x_1, x_2, \ldots, x_{c+1} \in M$.*

Demonstração: Ver [10, p. 39]. □

Grupos Livres e Apresentações de Grupos

Definição 1.12. Sejam F um grupo e X um sub-conjunto de F. Diremos que F é um *grupo livre* com *base* X, se para todo grupo G e toda função $f : X \longrightarrow G$, existe um único homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$ que estende f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Notação: $F = F(X)$.

A construção e a prova da existência de grupos livres, podem ser encontradas em [18, p. 45] e [19, p. 343].

Teorema 1.13 (Nielsen-Schreier). *Todo subgrupo H de um grupo livre F também é livre.*

Demonstração: Ver [18, p. 159] e [19, p. 383]. □

Proposição 1.14. *Seja G um grupo. Então G é um quociente de algum grupo livre F.*

Demonstração: Sejam $X = \{x_g \mid g \in G\}$ e $f : X \longrightarrow G$, uma aplicação tal que $f(x_g) = g$. Obviamente f é uma bijeção. Se F é livre com base X, então existe um homomorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$ que estende f. Temos que φ é sobrejetivo, pois f é sobrejetiva. Assim, segue que $G \cong F/\ker\varphi$.
□

Definição 1.15. Sejam F um grupo livre com base X e $\Delta \subset F$. Diremos que um grupo G tem *geradores* X e *relações* Δ se $G \cong F/R$, onde R é um subgrupo normal de F gerado (como um subgrupo normal) por Δ. O par ordenado $\langle X \mid \Delta \rangle$ chama-se uma *apresentação* do grupo G.

Geralmente, utilizaremos a notação: $\langle X \mid \delta = 1, \delta \in \Delta \rangle$.

Exemplo 1.16. O grupo cíclico de ordem n, C_n, possui gerador x e relação $x^n = 1$. Logo G pode ser apresentado como $G = \langle x \mid x^n \rangle$;

Exemplo 1.17. O grupo cíclico infinito C, possui gerador x e nenhuma relação. Desta forma, $G = \langle x \mid \rangle$, ou ainda $G = \langle x \mid \emptyset \rangle$;

Exemplo 1.18. O grupo $G = C \times C$, possui geradores x_1 e x_2, e relação $[x_1, x_2] = 1$. Assim, $G = \langle x_1, x_2 \mid [x_1, x_2] = 1 \rangle$.

O teorema de von Dyck abaixo, mostra que se um grupo H tem os mesmos geradores que um grupo G e satisfaz a todas as relações de G, então H é um quociente de G.

Teorema 1.19 (von Dyck). *Seja $G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid r_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), j \in J \rangle$. Suponhamos que H é um grupo gerado por $y_1, y_2, \ldots, y_n$ e $r_j(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 1$, para cada $j \in J$. Então existe um homomorfismo sobrejetivo $\mu : G \longrightarrow H$ tal que $\mu(x_i) = y_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, ou seja, H é um quociente de G.*

Demonstração: Seja F um grupo livre com base X, onde $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Seja R o subgrupo normal de F gerado por $r_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j \in J$. Assim temos que $G \cong F/R$. Definamos $\varphi : F \longrightarrow H$ um homomorfismo tal que $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Claramente temos que φ é sobrejetivo. Seja $N = \ker \varphi$. Temos $\varphi(R) = 1$, pois H satisfaz as relações r_j, $j \in J$. Logo $R \leq \ker \varphi = N$. Assim segue que:

$$H \cong F/N \cong (F/R)/(N/R) \cong G/(N/R).$$

Desta forma, obtemos o resultado. $\square$

1.2 Variedades de Grupos e Subgrupos Verbais

Utilizaremos nesta seção as ferramentas introduzidas na seção anterior. Assim, desenvolveremos alguns resultados importantes sobre variedades de grupos e grupos relativamente livres.

Definição 1.20. Seja $F(X)$ um grupo livre, com conjunto de geradores livres $X = \{x_i \mid i = 1,2,\ldots\}$. Um elemento u de $F(X)$ é uma *identidade* (ou *lei*) em um grupo G, se para qualquer homomorfismo $\varphi : F(X) \longrightarrow G$, temos $\varphi(u) = 1$. Usaremos u ou $u \equiv 1$ para denotar a identidade.

Observemos que se $u \in F(X)$, então $u = u(x_1,\ldots,x_n)$. Se $g_1,\ldots,g_n \in G$, então consideremos a aplicação $\alpha : x_i \longrightarrow g_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Pela definição de grupo livre existe um homomorfismo $\varphi : F(X) \longrightarrow G$, que estende α. Se $u \equiv 1$ é uma identidade no grupo G, então temos que:

$$\varphi(u) = \varphi(u(x_1,\ldots,x_n)) = u(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)) = u(g_1,\ldots,g_n) = 1,$$

para todos $g_1,g_2,\ldots,g_n \in G$. Assim $u \equiv 1$ é uma identidade em G, se $u(g_1,g_2,\ldots,g_n) = 1$, para todos $g_1,g_2,\ldots,g_n \in G$. Como conseqüência disto, temos a seguinte observação.

Observação 1.21. Um elemento $w = w(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de um grupo livre F é uma identidade em um grupo G se, e somente se, $w(G) = 1$, onde $w(G) = \{w(g_1,g_2,\ldots,g_n) \mid g_i \in G, i = 1,2,\ldots,n\}$.

Definição 1.22. A classe **U** de todos os grupos satisfazendo um dado conjunto de identidades será chamada uma *variedade de grupos.*

O conjunto V de todas as identidades em um grupo G, é um subgrupo de $F(X)$. Note que se $u,v \in F(X)$, são identidades em um grupo G, então temos que uv^{-1} também é identidade em G. De fato, sejam $g_{i_1},\ldots,g_{i_{k_1}},g_{j_1},\ldots,g_{j_{k_2}} \in G$. Como $u(g_{i_1},\ldots,g_{i_{k_1}}) = 1$ e $v(g_{j_1},\ldots,g_{j_{k_2}}) = 1$,

$$u(g_{i_1},\ldots,g_{i_{k_1}})v(g_{j_1},\ldots,g_{j_{k_2}})^{-1} = 1,$$

para todos $g_{i_1},\ldots,g_{i_{k_1}},g_{j_1},\ldots,g_{j_{k_2}} \in G$, e portanto uv^{-1} é uma identidade em G.

Além disso, V é um subgrupo completamente invariante, ou seja, V é invariante por endomorfismos de $F(X)$. Com efeito, seja $u = u(x_1,\ldots,x_k)$ uma identidade em um grupo G, e seja $\varphi : F(X) \longrightarrow F(X)$ um endomorfismo de $F(X)$, tal que $\varphi(x_i) = v_i$, $i = 1,2,\ldots$. Logo, temos que se $v_i = v_i(x_{i_1},\ldots,x_{i_{n_i}})$, então $v_i(g_{i_1},\ldots,g_{i_{n_i}}) = h_i \in G$, para todo $g_{i_j} \in G$ e assim,

$$\varphi(u(x_1,\ldots,x_n)) = u(v_1(x_{1_1},\ldots,x_{1_{n_1}}),\ldots,v_k(x_{k_1},\ldots,x_{k_{n_k}})).$$

Como $v_i(g_{i_1},\ldots,g_{i_{n_i}}) = h_i \in G$, para todo $g_{i_j} \in G$, temos que:

$$\varphi(u(g_1,\ldots,g_n)) = u(h_1,\ldots,h_n) = 1.$$

Logo $\varphi(u)$ também é identidade em G.

Definição 1.23. Seja $F = F(X)$ um grupo livre com base enumerável $X = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Se $u = x_{i_1}^{l_1} x_{i_2}^{l_2} \ldots x_{i_r}^{l_r} \in F$ e $g_1, g_2, \ldots, g_r$ são elementos de um grupo G, definimos o *valor* de u em $(g_1, \ldots, g_r)$ por $u(g_1, \ldots, g_r) = g_{i_1}^{l_1} g_{i_2}^{l_2} \ldots g_{i_r}^{l_r}$.

Definição 1.24. Sejam F um grupo livre com base enumerável X e G um grupo qualquer. Seja U um subconjunto não-vazio de F. O subgrupo $U(G)$ de G gerado por todos os valores em G de elementos de U é chamado *subgrupo verbal* de G determinado por U,

$$U(G) = \langle \{u(g_1, g_2, \ldots, g_{n_u}) \mid g_i \in G, u \in U\} \rangle.$$

Subgrupos verbais $U(F(X))$ de um grupo livre $F(X)$ serão denotados apenas por U. Devemos notar que o conjunto de todas as identidades U de um grupo G é um subgrupo verbal do grupo livre $F(X)$, pois U consiste de todos os valores em $F(X)$, de elementos em U.

Proposição 1.25. *Todo subgrupo verbal de um grupo é completamente invariante.*

A demonstração deste fato é imediata. A recíproca desta proposição em geral não é válida, mas vale o seguinte resultado.

Proposição 1.26. *Seja F um grupo livre. Seja U um subgrupo de F. Então U é um subgrupo verbal de F se, e somente se, U é um subgrupo completamente invariante de F.*

Demonstração: Se U é subgrupo verbal de F, pela proposição anterior, segue que U é completamente invariante. Inversamente, vamos supor que U é completamente invariante. Seja $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in U$, com $x_i \in X$, onde X é uma base de F. Sejam $f_1, \ldots, f_r \in F$. Assim, como F é livre, existe um homomorfismo $\alpha : F \longrightarrow F$, tal que $\alpha(x_i) = f_i$, então $\alpha(u) = u(f_1, \ldots, f_r) \in U$, pois U é completamente invariante. Assim, segue que U contém todos os valores de u em F, qualquer que seja $u \in U$. Portanto U é subgrupo verbal de F. $\square$

Proposição 1.27. *Seja $\mathbf{V}$ a variedade definida pelo conjunto de identidades V. Seja G um grupo. Então $G \in \mathbf{V}$ se, e somente se, $V(G) = 1$.*

Demonstração: Sejam $G \in \mathbf{V}$ e $v \in V$. Pela observação 1.21, temos que v é uma identidade em G se, e somente se, $v(G) = 1$. Assim, segue o resultado. $\square$

Proposição 1.28. *Seja $\mathbf{V}$ uma variedade de grupos. Um grupo G está em $\mathbf{V}$ se, e somente se, G é um quociente de $F/V(F)$, onde F é um grupo livre.*

Demonstração: Se G é um quociente de $F/V(F)$, claramente temos que G satisfaz todas as identidades de $\mathbf{V}$. Portanto, temos que $G \in \mathbf{V}$. Inversamente, vamos supor que $G \in \mathbf{V}$. Queremos mostrar que G é um quociente de $F/V(F)$. Seja M um conjunto gerador de G. Seja X um conjunto com a mesma cardinalidade que M. Seja $\alpha : X \longrightarrow M$ uma aplicação sobrejetiva. Como F é um grupo livre, então α pode ser estendida a um epimorfismo $\varphi : F \longrightarrow G$. Como $V(F)$ é completamente invariante, temos que $\varphi(V(F)) = V(\varphi(F)) = V(G) = 1$, pois $G \in \mathbf{V}$. Logo, obtemos que $V(F) \subset \ker\varphi$ se, e somente se, $V(G) = 1$. Portanto temos que:

$$G \cong F/\ker\varphi \cong (F/V(F))/(\ker\varphi/V(F)).$$

O que conclui nossa demonstração. $\square$

Proposição 1.29. *Existe uma correspondência* $1-1$ *entre as variedades* $\mathbf{V}$ *e os subgrupos completamente invariantes* V *do grupo livre* $F(X)$, *onde* $X = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$.

Demonstração: Ver [15, p. 12]. $\square$

Corolário 1.30. *Seja* F *um grupo livre de posto enumerável. Sejam* U *e* V *dois subgrupos verbais de* F. *Sejam* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *as variedades de grupo definidas pelo conjunto de identidades* U *e* V, *respectivamente. Então, se* $U \subset V$ *temos que* $\mathbf{U} \supset \mathbf{V}$.

Seja $\mathbf{V}$ uma variedade de grupos. Pela proposição 1.28 temos que todo grupo G de $\mathbf{V}$ é um quociente de $F/V(F)$, onde $V(F)$ é o conjunto de todas as identidades de $\mathbf{V}$. Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 1.31. O grupo $F/V(F)$ será chamado de *grupo livre* da variedade $\mathbf{V}$.

Grupos Relativamente Livres

Definição 1.32. Um grupo G é chamado *relativamente livre* se possui um conjunto de geradores tal que toda aplicação do conjunto de geradores no grupo G pode ser estendida a um endomorfismo.

Proposição 1.33. *Um grupo* G *é relativamente livre se, e somente se,* $G \cong F/R$, *onde* R *é um subgrupo verbal de um grupo livre* F.

Demonstração: Ver [15, p. 9]. $\square$

A proposição seguinte relacionará os grupos relativamente livres com os grupos livres de variedades.

Proposição 1.34. *Seja G um grupo. G é um grupo relativamente livre se, e somente se, G é o grupo livre de posto apropriado de alguma variedade* $\mathbf{V}$.

Demonstração: Vamos inicialmente supor que G é relativamente livre. Pela proposição 1.33 temos que $G \cong F/V$, onde $V = V(F)$ é um subgrupo verbal do grupo livre F. Agora, pela proposição 1.29 temos que $V(F)$ é o subgrupo verbal correspondente à variedade de grupos $\mathbf{V}$. Assim, $G \cong F/V(F)$ é o grupo livre da variedade $\mathbf{V}$.

Reciprocamente, se G é o grupo livre da variedade $\mathbf{V}$, temos por definição que $G \cong F/V(F)$, F é um grupo livre e $V(F)$ é o subgrupo verbal correspondente a $\mathbf{V}$. Assim, temos pela proposição 1.33 que G é relativamente livre. $\square$

Seja G um grupo abeliano. Diremos que G é *abeliano livre de expoente m*, se G for relativamente livre de expoente m.

Proposição 1.35. *Seja G um grupo abeliano livre de expoente m. Então G é produto direto de subgrupos cíclicos de ordem m.*

1.3 Produto de Variedades

Sejam $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ duas variedades de grupos. Sejam U e V o conjunto de todas as identidades de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ respectivamente, logo U e V são subgrupos verbais de um grupo livre $F = F(X)$, onde X é enumerável. Consideremos a classe $\mathbf{UV}$ de todos os grupos G tais que existe $N \lhd G, N \in \mathbf{U}$ e $G/N \in \mathbf{V}$. Mostraremos que $\mathbf{UV}$ é uma variedade de grupos, que definimos como sendo a *variedade produto* de $\mathbf{U}$ por $\mathbf{V}$.

Proposição 1.36. *Seja*

$$W = \{w \in F | w = u(v_1, v_2, \ldots, v_k),\ com\ u = u(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in U,\ e\ v_1, v_2, \ldots, v_k \in V\}.$$

Então $\mathbf{UV}$ *é a variedade de grupos definida pelo conjunto de identidades W.*

Demonstração: Seja $\mathbf{W}$ a variedade de grupos definida pelo conjunto de identidades W. Queremos mostrar que $\mathbf{UV} = \mathbf{W}$, ou seja, se G é um grupo, então $G \in \mathbf{W}$ se, e somente se, $G \in \mathbf{UV}$.

Vamos supor inicialmente que $G \in \mathbf{UV}$. Assim, por definição temos que existe $N \lhd G$ tal que, $N \in \mathbf{U}$ e $G/N \in \mathbf{V}$, e portanto $U(N) = \{1\}$ e $V(G/N) = \{1\}$. A segunda igualdade implica em $V(G) \subset N$, conseqüentemente $U(V(G)) \subset U(N) = \{1\}$. Logo $W(G) = U(V(G)) = \{1\}$, ou seja, $G \in \mathbf{W}$.

Inversamente, se $G \in \mathbf{W}$ então $U(V(G)) = \{1\}$. Observemos que se $N = V(G)$, temos que $U(N) = \{1\}$, isto é, $N \in \mathbf{U}$. Mas temos também que $N \lhd G$, e assim, $V(G/N) = V(G/V(G)) = \{1\}$, ou seja, $G/N \in \mathbf{V}$.

Assim, concluímos que $G \in \mathbf{UV}$. Desta forma, temos que $\mathbf{W} = \mathbf{UV}$, e portanto $\mathbf{UV}$ é a variedade de grupos definida pelo conjunto de identidades $W = U(V(F(X)))$. $\square$

1.4 O Problema da Existência de uma Base Finita

Definição 1.37. Sejam $u \equiv 1$ e $v \equiv 1$ duas identidades em um grupo G. Diremos que u é *conseqüência* de v, se sempre que v for satisfeita em um grupo G implicar que u é satisfeita em G. Diremos que u e v são *equivalentes* se u é conseqüência de v e v é conseqüência de u.

Definição 1.38. Sejam $\mathbf{U}$ uma variedade de grupos e β um conjunto de identidades de $\mathbf{U}$. Diremos que β é uma *base* de $\mathbf{U}$ se o conjunto de todas as identidades de $\mathbf{U}$ é conseqüência de β, ou seja, $\mathbf{U}$ pode ser definida por β.

Observemos que identidades obtidas uma da outra pelo renomeamento de variáveis são equivalentes.

Definição 1.39. Diremos que uma variedade $\mathbf{U}$ possui uma *base finita* se o conjunto de todas as identidades de $\mathbf{U}$ é conseqüência de um subconjunto finito de identidades de $\mathbf{U}$, ou seja, $\mathbf{U}$ pode ser definida por um conjunto finito de identidades.

O problema sobre a existência de uma base finita, foi proposto por B. H. Neumann em 1937 [14], sendo formulado da seguinte forma: *Toda variedade de grupos possui uma base finita?*

Alguns exemplos de variedades com a propriedade da base finita:

1. A variedade $\mathbf{A}$ de todos os grupos abelianos, definida pela identidade $[x,y] \equiv 1$;

2. A variedade $\mathbf{N}_c$ de todos os grupos nilpotentes de classe menor ou igual a c, definida pela identidade $[x_1, x_2, \ldots, x_{c+1}] \equiv 1$;

3. A variedade $\mathbf{B}_n$ de todos os grupos de expoente divisor de n, também chamada de *variedade de Burnside* de expoente n, definida pela identidade $x^n \equiv 1$.

Devemos ressaltar que as variedades vistas no ítens 1 e 2 além de possuírem base finita, tem a propriedade de toda sua subvariedade também ter base finita, conforme veremos abaixo. Isso em geral não ocorre, por exemplo, com variedades de Burnside, conforme veremos no capítulo 2.

Proposição 1.40. *Toda variedade* $\mathbf{V}$ *de grupos abelianos possui base finita.*

Demonstração: Sabemos que $[x,y] \equiv 1$ é identidade em $\mathbf{V}$. Seja m o menor inteiro positivo, se existir, tal que $x^m \equiv 1$ é identidade em $\mathbf{V}$. Seja $w = w(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1$ uma identidade qualquer de $\mathbf{V}$.

Caso m exista, mostraremos que qualquer identidade $w = w(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1$ de $\mathbf{V}$ é conseqüência das identidades $[x,y] \equiv 1$ e $x^m \equiv 1$. Como F/F' é abeliano, temos que $wF' = x_1^{s_1}x_2^{s_2}\dots x_n^{s_n}F'$ e portanto, $w = x_1^{s_1}x_2^{s_2}\dots x_n^{s_n}w'$, onde $w' \in F'$. Sejam $G \in \mathbf{V}$ e g um elemento qualquer de G. Fazendo $x_1 = g, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$ temos que $w' = 1$ e que $w(g,1,1,\dots,1) = g^{s_1} = 1$ para todo $g \in G$, assim $x_1^{s_1} \equiv 1$ é identidade em G, qualquer que seja $G \in \mathbf{V}$. Portanto a identidade $x_1^{s_1} \equiv 1$ é válida em $\mathbf{V}$. Como m é minimal, segue que $m \mid s_1$ e por raciocínio análogo segue que, $x_i^{s_i} \equiv 1$ é identidade em $\mathbf{V}$ e $m \mid s_i, i = 1,2,\dots,n$. Por outro lado, w' é produto de comutadores, e portanto $w' \equiv 1$ é conseqüência $[x,y] \equiv 1$. Logo, $w \equiv 1$ é conseqüência de $x^m \equiv 1$ e $[x,y] \equiv 1$, qualquer que seja w.

Note que se m não existe, temos que $s_i = 0$, para todo i. Portanto, $w = w'$ que é conseqüência de $[x,y] \equiv 1$. Assim, $w \equiv 1$ é conseqüência de $[x,y] \equiv 1$, qualquer que seja w. Logo $\mathbf{V}$ é a variedade de todos os grupos abelianos.

Assim, concluímos que a variedade de grupos abelianos $\mathbf{V}$ possui uma base finita. □

Proposição 1.41. *Toda variedade* $\mathbf{V}$ *de grupos nilpotentes de classe no máximo c possui base finita.*

Demonstração: Ver [15, p. 89]. □

Proposição 1.42. *Seja* $\mathbf{U}$ *uma variedade de grupos. Então* $\mathbf{U}$ *possui uma base finita de identidades* $u_1 \equiv 1, u_2 \equiv 1, \dots, u_k \equiv 1$ *se, e somente se, toda base* β *de* $\mathbf{U}$ *possuir um subconjunto finito equivalente a* β*.*

Demonstração: Observemos que se toda base β de **U** é equivalente a um subconjunto finito de β então **U** possui uma base finita.

Inversamente, seja $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ uma base finita de **U**. Seja $\beta = \{v_j \mid j = 1, 2, \ldots\}$ uma base qualquer de **U**. Notemos que cada u_i, pertence a um subgrupo gerado por um número finito de elementos $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{l_i}}$, para algum $l_i \geq 1$. Assim, temos que cada $u_i \equiv 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$ é conseqüência de um número finito de identidades $v_{i_1} \equiv 1, v_{i_2} \equiv 1, \ldots, v_{i_{l_i}} \equiv 1$, para algum $l_i \geq 1$. Assim, a base finita é conseqüência de um número finito de identidades v_j, $j = 1, 2, \ldots, s$ e também qualquer outra identidade em **U**. Logo, a base de identidades $\beta = \{v_1, v_2, \ldots\}$ é conseqüência de seu subconjunto finito $\{v_j \mid j = 1, 2, \ldots, s\}$ e portanto são equivalentes. $\square$

Capítulo 2

Uma Variedade sem Base Finita

Seja $\mathbf{B}_n$, $n \geq 2$ a variedade de grupos que é definida pela identidade $x^n \equiv 1$. Esta variedade de grupos, também chamada de variedade de Burnside de expoente n, contém todos os grupos de expoente divisor de n. Consideremos a variedade $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$, de todas as extensões de grupos de $\mathbf{B}_4$, por grupos de $\mathbf{B}_2$. O conjunto de identidades de $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ é $V_4(V_2(F(X)))$, onde V_4 e V_2 são os subgrupos verbais correspondentes a $\mathbf{B}_4$ e $\mathbf{B}_2$, respectivamente.

Observemos que $u_n = (x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2)^4 \equiv 1$, é uma identidade de $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$, qualquer que seja $n \geq 1$.

Proposição 2.1. *O conjunto de identidades:*

$$u_1 \equiv 1, u_2 \equiv 1, \ldots, u_n \equiv 1, \ldots \tag{2.1}$$

é uma base para $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$.

Demonstração: Seja $\mathbf{U}$ a variedade de grupos definida pelas identidades (2.1). Como $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ satisfaz todas as identidades (2.1), temos que $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2 \subset \mathbf{U}$. Vamos mostrar que $\mathbf{U} \subset \mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$, portanto $\mathbf{U} = \mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$.

Seja $G \in \mathbf{U}$ um grupo satisfazendo $u_n(G) = \{1\}$, para todo $n = 1, 2, \ldots$. Seja $N = \langle g^2 \mid g \in G \rangle$. Claramente $N \lhd G$. De fato, sejam $f \in N$ e $g \in G$. Assim, temos que $f = g_1^2 g_2^2 \ldots g_k^2$, com $g_i \in G, i = 1, 2, \ldots k$, para algum $k \geq 1$. Portanto $f^g = (g_1^g)^2 (g_2^g)^2 \ldots (g_k^g)^2 \in N$. Observemos que $f^4 = 1$, pois $u_k(G) = \{1\}$. Assim, N satisfaz $x^4 \equiv 1$ e portanto $N \in \mathbf{B}_4$.

Consideremos agora G/N, e seja $gN \in G/N$. Temos que $(gN)^2 = g^2 N = N$. Logo, $x_1^2 \equiv 1$ é identidade em G/N e portanto, $G/N \in \mathbf{B}_2$. Como existe $N \lhd G$ tal que $N \in \mathbf{B}_4$ e além disso

$G/N \in \mathbf{B}_2$, segue que $G \in \mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$. Concluímos assim que $\mathbf{U} \subset \mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$, portanto $\mathbf{U} = \mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$. Em outras palavras, as identidades (2.1) definem $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$, sendo desta forma uma base para $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$. $\square$

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte teorema de Bryant [5] e Kleiman [11]:

Teorema 2.2. *A variedade de grupos* $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ *não possui nenhuma base finita.*

Como visto na proposição 1.42, é suficiente mostrar que uma base qualquer não é conseqüência de nenhum subconjunto finito desta base. Assim, mostraremos que o conjunto de identidades (2.1) não é conseqüência de nenhum subconjunto finito $u_{i_1} \equiv 1, u_{i_2} \equiv 1, \ldots, u_{i_k} \equiv 1$, de identidades. Temos que $u_m \equiv 1$ é conseqüência de $u_n \equiv 1$, para qualquer $n \geq m$, e por isso, o subconjunto $u_{i_1} \equiv 1, u_{i_2} \equiv 1, \ldots, u_{i_k} \equiv 1$, é equivalente a uma única identidade $u_n \equiv 1$, onde $n = \max\{i_1, \ldots, i_k\}$. Assim, para mostrar que $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ não possui base finita, é suficiente mostrar que para todo $n \geq 1$ o sistema (2.1) não é conseqüência da identidade $u_n \equiv 1$, ou seja, existe $l > n$ tal que a identidade $u_l \equiv 1$ não é conseqüência da identidade $u_n \equiv 1$.

Para demonstrar o teorema 2.2, construiremos para todo $n \geq 1$ um grupo C_m, onde $m = m(n)$ tal que $u_n \equiv 1$ é identidade em C_m, mas C_m não satisfaz a identidades $u_l \equiv 1$, para algum $l > n$. O grupo C_m será definido como um produto semi-direto de dois grupos A_m e B_m, que construiremos nas próximas seções.

2.1 Construção do grupo A_m

Seja A_m um grupo, definido por geradores e relações, da seguinte forma:

$$A_m = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{2m} \mid a_i^2 = 1, [a_i, a_j, a_k] = 1, i, j, k = 1, 2, \ldots, 2m \rangle.$$

Inicialmente faremos a realização de A_m, para em seguida demonstrarmos algumas propriedades importantes sobre a estrutura de A_m. Seja R o anel de polinômios não-comutativo nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ sobre $\mathbb{Z}_2$. Seja

$$I = \{ f \in R \mid f = \sum_{i=1}^{2m} \mu_i x_i^2 + f_1,\ \mu_i \in \mathbb{Z}_2,\ f_1 \text{ não contém monônios de grau menor que } 3 \}.$$

É fácil verificar que I é um ideal de R.

Consideraremos agora o anel quociente R/I. Observemos que cada elemento R/I contém exatamente um polinômio na forma $f = \alpha + \sum_i \beta_i x_i + \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} x_i x_j$. De fato, suponhamos que exista $g \in f + I$ tal que $g = \alpha' + \sum_i \beta_i' x_i + \sum_{i \neq j} \gamma_{ij}' x_i x_j$. Como $g \in f + I$ então $g = f + \sum_i \mu_i x_i^2 + f_1$, ou seja, $g - f = \sum_i \mu_i x_i^2 + f_1$ e portanto $g = f$ caso contrário g possui monômios da forma x_i^2 ou monômios de grau maior que 2, uma contradição.

Seja $\mathscr{U}(R/I)$ o grupo multiplicativo de R/I. Seja $f \in R$; escreveremos $\overline{f} = f + I \in R/I$. Temos claramente que $1 + \overline{x_i} \in \mathscr{U}(R/I)$, onde $1 + \overline{x_i} = (1 + x_i) + I$. De fato,

$$(1 + \overline{x_i})(1 + \overline{x_i}) = 1 + 2\overline{x_i} + \overline{x_i}^2 = 1,$$

portanto $1 + \overline{x_i}$ é inversível. Seja $G_m = \langle h_i \mid h_i = 1 + \overline{x_i},\, i = 1, \ldots, 2m \rangle$.

Proposição 2.3. *Sejam G_m e A_m como descritos acima. Então G_m satisfaz as relações que definem A_m.*

Demonstração: Sejam $h_i, h_j, h_k \in G_m$; $i, j, k = 1, \ldots, 2m$. Então:

$$\begin{aligned}
h_i^2 &= (1 + \overline{x_i})(1 + \overline{x_i}) = 1 + 2\overline{x_i} + \overline{x_i}^2 = 1 \\
\\
[h_i, h_j] &= (1 + \overline{x_i})(1 + \overline{x_j})(1 + \overline{x_i})(1 + \overline{x_j}) \\
&= (1 + \overline{x_i} + \overline{x_j} + \overline{x_i x_j})^2 \\
&= 1 + \overline{x_i} + \overline{x_j} + \overline{x_i x_j} + \overline{x_i} + \overline{x_i}^2 + \overline{x_i x_j} + \overline{x_i}^2 \overline{x_j} + \overline{x_j} + \overline{x_j x_i} + \overline{x_j}^2 + \overline{x_j x_i x_j} \\
&= 1 + \overline{x_i x_j} + \overline{x_j x_i}.
\end{aligned}$$

Notemos que $[h_i, h_j]^2 = (1 + \overline{x_i x_j} + \overline{x_j x_i})^2 = 1$ e portanto, $[h_i, h_j]^{-1} = [h_i, h_j]$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
[h_i, h_j, h_k] &= [[h_i, h_j], h_k] \\
&= (1 + \overline{x_i x_j} + \overline{x_j x_i})(1 + \overline{x_k})(1 + \overline{x_i x_j} + \overline{x_j x_i})(1 + \overline{x_k}) \\
&= (1 + \overline{x_k} + \overline{x_i x_j} + \overline{x_j x_i})^2 \\
&= 1 + \overline{x_k} + \overline{x_i x_j} + \overline{x_j x_i} + \overline{x_k} + \overline{x_i x_j} + \overline{x_j x_i} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Desta forma, mostramos que G_m satisfaz as relações de A_m. $\square$

Observemos que $A_m \cong G_m$. De fato, como G_m satisfaz as relações de A_m, temos pelo teorema de von Dyck que G_m é isomorfo a um quociente de A_m por algum subgrupo normal M.

Mostraremos que $M = \{1\}$ e portanto $A_m \cong G_m$. Seja $g \in A_m$, $g \neq 1$. Como A_m/A'_m é abeliano, podemos escrever g da seguinte forma:

$$g = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}[a_{j_1},a_{j_2}][a_{j_3},a_{j_4}]\ldots[a_{j_{2l-1}},a_{j_{2l}}],$$

onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, e como cada comutador tem ordem 2, podemos escolhe-los da seguinte forma: $j_{2r-1} < j_{2r}$ e $(j_{2r-1}, j_{2r}) \neq (j_{2s-1}, j_{2s})$. Vamos supor que $g \in M$. Seja ψ o homomorfismo tal que $\psi : A_m \longrightarrow G_m$, onde $\psi(a_i) = h_i$, com $\ker\psi = M$. Como $\psi(g) = 1$, segue que:

$$\begin{aligned}
\psi(g) &= \psi(a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}[a_{j_1},a_{j_2}][a_{j_3},a_{j_4}]\ldots[a_{j_{2l-1}},a_{j_{2l}}]) \\
&= h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k}[h_{j_1},h_{j_2}][h_{j_3},h_{j_4}]\ldots[h_{j_{2l-1}},h_{j_{2l}}] \\
&= \prod_{r=1}^{k}(1+\overline{x_{i_r}})\prod_{r=1}^{l}(1+\overline{x_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}}}+\overline{x_{j_{2r}}x_{j_{2r-1}}}).
\end{aligned}$$

Devemos observar que:

$$\prod_{r=1}^{k}(1+\overline{x_{i_r}}) = 1+\sum_{r=1}^{k}\overline{x_{i_r}}+\sum_{1\leq r<s\leq k}\overline{x_{i_r}x_{i_s}},$$

e além disso, temos,

$$\prod_{r=1}^{l}(1+\overline{x_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}}}+\overline{x_{j_{2r}}x_{j_{2r-1}}}) = 1+\sum_{r=1}^{l}(\overline{x_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}}}+\overline{x_{j_{2r}}x_{j_{2r-1}}}).$$

Desta forma, obtemos:

$$\begin{aligned}
\psi(g) &= \left(1+\sum_{r=1}^{k}\overline{x_{i_r}}+\sum_{1\leq r<s\leq k}\overline{x_{i_r}x_{i_s}}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{l}(\overline{x_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}}}+\overline{x_{j_{2r}}x_{j_{2r-1}}})\right) \\
&= \left(1+\sum_{r=1}^{k}\overline{x_{i_r}}+\sum_{1\leq r<s\leq k}\overline{x_{i_r}x_{i_s}}+\sum_{r=1}^{l}(\overline{x_{j_{2r-1}}x_{j_{2r}}}+\overline{x_{j_{2r}}x_{j_{2r-1}}})\right).
\end{aligned}$$

Agora, como os geradores $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}$ na expressão de g são distintos e os comutadores $[a_{j_1},a_{j_2}],\ldots,[a_{j_{2l-1}},a_{j_{2l}}]$ também são distintos, o mesmo ocorre com $\psi(g)$. Assim, temos que $\psi(g) \neq 1$, qualquer que seja $g \in A_m$, $g \neq 1$. Logo, $M = \{1\}$ e portanto, $A_m \cong G_m$.

Como $A_m \cong G_m$, identificaremos os geradores a_i de A_m, com os geradores h_i de G_m.

Proposição 2.4. *A'_m é um 2-grupo abeliano elementar com base:*

$$\beta = \{[a_i,a_j] \mid i < j,\ \textit{para todos}\ i,j = 1,2,\ldots,2m\},$$

ou seja, $A'_m \cong \mathbb{Z}_2^{m(2m-1)}$, *onde* $\mathbb{Z}_2^{m(2m-1)} = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{m(2m-1) \text{ vezes}}$.

Demonstração: Como A_m é nilpotente de classe 2, temos que $[A_m, A'_m]$ é trivial. Portanto, $[A'_m, A'_m]$ também é trivial, ou seja, A'_m é abeliano. Pela proposição 1.10, $\gamma_2(A_m) = A'_m$ é gerado pelos comutadores simples de peso 2, $[a_i, a_j]$, para todos $i, j = 1, 2, \ldots, 2m$ e por $\gamma_3(A_m)$. Como A'_m é nilpotente de classe 2, $\gamma_3(A_m)$ é trivial. Logo,

$$A'_m = \langle [a_i, a_j] \mid i, j = 1, 2, \ldots, 2m \rangle,$$

mas $[a_i, a_j]^{-1} = 1 + \overline{x_i x_j} + \overline{x_j x_i} = [a_i, a_j]$, portanto todo gerador de A'_m tem ordem 2. Logo A'_m é um 2-grupo abeliano elementar. Resta determinar a base de A_m. Como $[a_i, a_j] = [a_j, a_i]$, podemos considerar que $A'_m = \langle [a_i, a_j], 1 \leq i < j \leq 2m \rangle$. O conjunto β acima gera A'_m, restando apenas verificar que β é um conjunto linearmente independente. De fato,

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 2m} [a_i, a_j]^{c_i} = 1, \, c_i \in \{0, 1\}$$

se, e somente se,

$$1 + \sum_{1 \leq i < j \leq 2m} c_i (\overline{x_i x_j} + \overline{x_j x_i}) = 1,$$

o que implica que $c_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, 2m$. Observemos que o conjunto β possui $\binom{2m}{2} = m(2m-1)$ elementos, mostrando assim que $A'_m \cong \mathbb{Z}_2^{m(2m-1)}$. □

Proposição 2.5. $A_m / A'_m \cong \mathbb{Z}_2^{2m}$, *onde* $\mathbb{Z}_2^{2m} = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{2m \text{ vezes}}$.

Demonstração: Uma apresentação de A_m / A'_m, pode ser obtida da apresentação de A_m pela adição das relações $[a_i, a_j] = 1$, para todos $i, j = 1, 2, \ldots, 2m$. Ou seja,

$$A_m / A'_m = \langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_{2m}} \mid \overline{a_i}^2 = 1, [\overline{a_i}, \overline{a_j}] = 1, i, j = 1, 2, \ldots, 2m \rangle.$$

Logo, $A_m / A'_m \cong \mathbb{Z}_2^{2m}$. □

Proposição 2.6. $A'_m = Z(A_m) = A_m^2$, *onde* $A_m^2 = \langle a^2 \mid a \in A_m \rangle$.

Demonstração: Mostraremos primeiro que $A'_m = Z(A_m)$. Como $A'_m = \langle [a_i, a_j] \mid i, j = 1, \ldots, 2m \rangle$ e $[a_i, a_j, a_k] = 1$, temos que $[a_i, a_j] \in Z(A_m)$. Logo, $A'_m \leq Z(A_m)$. Para verificar que $Z(A_m) \subset A'_m$, mostraremos que se $f \notin A'_m$ então $f \notin Z(A_m)$. Seja $f \in A_m$ tal que $f \notin A'_m$, logo $f A'_m \neq A'_m$.

Por outro lado, como $A_m/A'_m \cong \mathbb{Z}_2^{2m} = \langle a_1A'_m\rangle \times \langle a_2A'_m\rangle \times \cdots \times \langle a_{2m}A'_m\rangle$, temos que: $fA'_m = a_{l_1}a_{l_2}\dots a_{l_s}A'_m, s \geq 1$, ou melhor, $f = a_{l_1}a_{l_2}\dots a_{l_s}c, c \in A'_m$. Para $k \neq l_1$, consideremos

$$\begin{aligned}[f,a_k] &= [a_{l_1}a_{l_2}\dots a_{l_s}c,a_k]\\ &= [a_{l_1},a_k][a_{l_2},a_k]\dots[a_{l_s},a_k].\end{aligned}$$

Note que usamos conseqüências do fato de A_m ser nilpotente de classe 2, ou seja, $[ab,c] = [a,c][b,c]$, e $[a_i,a_j] = [a_j,a_i]$. Como $[a_{l_1},a_k] \neq 1$, pois $l_1 \neq k$, e o conjunto dos comutadores não-triviais do produto $[a_{l_1},a_k][a_{l_2},a_k]\dots[a_{l_s},a_k]$ é linearmente independente, $[f,a_k] \neq 1$. Portanto, $f \notin Z(A_m)$. Assim, temos que $Z(A_m) \leq A'_m$, concluindo a prova da primeira parte da proposição.

Resta mostrar que $A'_m = A_m^2$. É fácil ver que $A'_m \leq A_m^2$. De fato, para um grupo G qualquer temos que $G' \leq G^2$, pois G/G^2 é um grupo abeliano. Logo, $A'_m \leq A_m^2$. Pela proposição 2.5, temos que A_m/A'_m é de expoente 2, portanto $g^2A'_m = A'_m$, para cada $g \in A_m$. Logo, $g^2 \in A'_m$, para todo $g \in A_m$, ou seja, $A_m^2 \leq A'_m$. Isto conclui o restante do proposição. □

2.2 Construção do grupo B_m

Recordemos que:

$$A_m = \langle a_1,a_2,\dots,a_{2m} \mid a_i^2 = 1, [a_i,a_j,a_k] = 1, \text{ para todo } i,j,k = 1,2,\dots,2m\rangle.$$

Fixemos $a \in A'_m$, $a \neq 1$ e definamos $\rho : A'_m \longrightarrow \{0,1\}$, da seguinte forma:

$$\rho(g) = \begin{cases} 1, & \text{se } g = a \\ 0, & \text{se } g \neq a. \end{cases}$$

Para $g \in A_m$, denotaremos $\overline{g} = gA'_m$. Definamos B_m como sendo o grupo gerado pelos símbolos b^g, c^k , onde $g \in A_m$, $k \in A_m/A'_m$, com as seguintes relações:

$$(b^g)^2 = (c^k)^2 = 1, \text{ para todo } g \in A_m, k \in A_m/A'_m; \tag{2.2}$$

$$[b^{g_1},b^{g_2}] = 1, \text{ se } \overline{g_1} \neq \overline{g_2}; \tag{2.3}$$

$$[b^{g_1},b^{g_2}] = (c^{\overline{g_1}})^{\rho(g_1g_2^{-1})}, \text{ se } \overline{g_1} = \overline{g_2}; \tag{2.4}$$

$$[c^k,b^g] = 1, \text{ onde } g \in A_m, k \in A_m/A'_m. \tag{2.5}$$

Investigaremos agora a estrutura do grupo B_m. Antes disso, temos por (2.4) que B_m pode ser gerado apenas pelos elementos b^g, $g \in A_m$. Além disso, (2.3) e (2.4), implicam que B'_m é gerado pelos elementos c^k, $k \in A_m/A'_m$.

Seja $A_m = \{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$. Note que podemos introduzir uma ordem linear $<$ nos elementos de A_m. Consideremos agora o anel de polinômios não-comutativo R nas variáveis y_{g_i} sobre $\mathbb{Z}_2$, onde $g_i \in A_m$. Estabeleceremos a seguinte notação:

$$y_{g_i} = y_i.$$

Considere agora o ideal I de R definido por:

$$I = \{f \in R \mid f = \sum_i \mu_i y_i^2 + f_1, \, \mu_i \in \mathbb{Z}_2, \text{ onde } f_1 \text{ não contém termos de grau menor que } 3\}.$$

Assim, $R/I = \{(\alpha_0 + \sum_i \beta_i y_i + \sum_{i,j} \gamma_{i,j} y_i y_j) + I, \text{ para todo } \alpha_0, \beta_i, \gamma_{i,j} \in \mathbb{Z}_2\}$. Tomemos o subgrupo D de R/I tal que $D = \langle 1 + \overline{y_i} \mid \text{ para todo } g_i \in A_m \rangle$, onde $1 + \overline{y_i} = (1 + y_i) + I$. Denotaremos:

$$1 + \overline{y_i} = d_i,$$

lembrando que d_i depende do elemento g_i de A_m.

Proposição 2.7. *D satisfaz as relações $d_i^2 = 1$ e $[d_i, d_j, d_k] = 1$, para todos $g_i, g_j, g_k \in A_m$.*

Demonstração: De fato, $d_i^2 = (1 + \overline{y_i})^2 = 1 + 2\overline{y_i} + \overline{y_i}^2 = 1$. Observemos que:

$$\begin{aligned}
[d_i, d_j] &= [1 + \overline{y_i}, 1 + \overline{y_j}] \\
&= (1 + \overline{y_i})^{-1}(1 + \overline{y_j})^{-1}(1 + \overline{y_i})(1 + \overline{y_i}), (1 + \overline{y_k}) \\
&= (1 + \overline{y_i})(1 + \overline{y_j})(1 + \overline{y_i})(1 + \overline{y_j}) = (1 + \overline{y_i} + \overline{y_j})^2 \\
&= 1 + \overline{y_i y_j} + \overline{y_j y_i}.
\end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}
[d_i, d_j, d_k] &= [1 + \overline{y_i y_j} + \overline{y_j y_i}, (1 + \overline{y_k})] \\
&= (1 + \overline{y_i y_j} + \overline{y_j y_i})(1 + \overline{y_k})(1 + \overline{y_i y_j} + \overline{y_j y_i})(1 + \overline{y_k}) \\
&= (1 + \overline{y_k} + \overline{y_i y_j} + \overline{y_j y_i})^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Observemos que D possui as mesmas propriedades que A_m, diferindo apenas no número de geradores, mas podemos encontrar m' tal que $D \cong A_{m'}$. Portanto, os mesmos resultados válidos para A_m valem também para D.

Agora introduziremos em D a relação $[d_i, d_j] = 1$, se $\overline{g_i} \neq \overline{g_j}$. Sabemos que D' é 2-grupo abeliano elementar com base $\{[d_i, d_j], i \leq j\}$.

Seja $N \leq D$ tal que $N = \langle [d_i, d_j] \mid \overline{g_i} \neq \overline{g_j} \rangle$. Temos que $N \lhd D$, pois $N \leq D' = Z(D)$.

Proposição 2.8. *D'/N é 2-grupo abeliano elementar com base $\{[d_i, d_j]N \mid \overline{g_i} = \overline{g_j}, i < j\}$.*

Demonstração: Como D' é 2-grupo abeliano elementar, segue que D'/N também é um 2-grupo abeliano elementar. Observemos que $[d_i, d_j]N = N$, se $\overline{g_i} \neq \overline{g_i}$ e assim $\{[d_i, d_j]N \mid \overline{g_i} = \overline{g_j},\ i < j\}$ gera D'/N. Resta então verificar que $\{[d_i, d_j]N \mid \overline{g_i} = \overline{g_j},\ i < j\}$ é linearmente independente. Se $g \in D'/N$, então $g = \prod_{i<j}[d_i, d_j]^{l_i}N$, $l_i \in \{0, 1\}$; mas os termos $\{[d_i, d_j]N \mid \overline{g_i} \neq \overline{g_j}\}$ são triviais, assim $g = \prod_{\substack{i<j \\ \overline{g_i}=\overline{g_j}}} [d_i, d_j]^{l_i}N$, $l_i \in \{0, 1\}$. Suponhamos que:

$$\prod_{\substack{i<j \\ \overline{g_i}=\overline{g_j}}} [d_i, d_j]^{l_i}N = N,\ l_i \in \{0, 1\}.$$

Assim, devemos ter necessariamente:

$$\prod_{\substack{i<j \\ \overline{g_i}=\overline{g_j}}} [d_i, d_j]^{l_i} \in N.$$

Portanto,

$$\prod_{\substack{i<j \\ \overline{g_i}=\overline{g_j}}} [d_i, d_j]^{l_i} = \prod_{\substack{i<j \\ \overline{g_i}\neq\overline{g_j}}} [d_i, d_j]^{n_i}.$$

Logo,

$$\prod_{\substack{i<j \\ \overline{g_i}=\overline{g_j}}} [d_i, d_j]^{l_i} \prod_{\substack{i<j \\ \overline{g_i}\neq\overline{g_j}}} [d_i, d_j]^{n_i} = 1$$

e como $[d_i, d_j]$, $i < j$ é uma base de D', isto implica que $l_i = n_i = 0$, para todo i. E assim, concluímos que $\{[d_i, d_j]N \mid \overline{g_i} = \overline{g_j},\ i < j\}$ é linearmente independente. $\square$

Consideremos agora $C = \langle c^k \mid k \in A_m/A_m' \rangle$, um 2-grupo abeliano elementar com base $\{c^k \mid$

$k \in A_m/A'_m\}$. Seja $D \times C$ o produto direto de D e C. Observemos que $Z(D \times C) = Z(D) \times Z(C) = D' \times C$, pois $Z(D) = D'$ e C é abeliano.

Seja N_1 o subgrupo de $D \times C$, gerado por N e por $\{[d_i, d_j](c^{\overline{g_i}})^{\rho(g_i g_j^{-1})}\}$. Observemos que $N_1 \lhd D \times C$, pois o conjunto de geradores de N_1 está contido em $D' \times C = Z(D \times C)$, por isso, $N_1 \leq Z(D \times C)$.

Proposição 2.9. *O quociente $D'N_1/N_1$ tem base:*

$$\beta = \{c^k \mid k \in A_m/A'_m\}.$$

Demonstração: Como D' e N_1 são são subgrupos de $D' \times C$, que é um 2-grupo abeliano elementar, temos que $D'N_1$ e seus quocientes são 2-grupos abelianos elementares. Observemos que N_1 possui base:

$$\{[d_i, d_j] \mid \overline{g_i} \neq \overline{g_j},\, i < j\} \cup \{[d_i, d_j](c^{\overline{g_i}})^{\rho(g_i g_j^{-1})} \mid \overline{g_i} = \overline{g_j},\, i < j\}.$$

Temos que $[d_i, d_j] \in N_1$, com $i < j, \overline{g_i} = \overline{g_j}$, $g_i g_j^{-1} \neq a$, pois $\rho(g_i g_j^{-1}) = 0$. Como $[d_i, d_j]c^{g_i} \in N_1$, se $g_i g_j^{-1} = a$, segue que $[d_i, d_j]c^{\overline{g_i}}N_1 = N_1$, ou seja, $[d_i, d_j]N_1 = c^{\overline{g_i}}N_1$.

Sejam $d \in D'N_1$, $d = d'n$, $d' \in D'$, $n \in N_1$. Como $nN_1 = N_1$, temos que:

$$\begin{aligned}
dN_1 = d'N_1 &= \prod_{\substack{i<j,\overline{g_i}=\overline{g_j} \\ g_i g_j^{-1}=a}} [d_i, d_j]^{e_i} N_1 \prod_{\substack{i<j,\overline{g_i}=\overline{g_j} \\ g_i g_j^{-1}\neq a}} [d_i, d_j]^{f_i} N_1 \\
&= \prod_{\substack{i<j,\overline{g_i}=\overline{g_j} \\ g_i g_j^{-1}=a}} [d_i, d_j]^{e_i} N_1 \\
&= \prod_{k \in A_m/A'_m} (c^k)^{l_k} N_1,
\end{aligned}$$

onde $e_i, f_i, l_k \in \{0, 1\}$.

Como $c^k N_1$, $k \in A_m/A'_m$ geram $D'N_1/N_1$, resta mostrar que o conjunto $\{c^k N_1, k \in A_m/A'_m\}$ é linearmente independente. De fato, vamos supor que:

$$\prod_{k \in A_m/A'_m} (c^k)^{l_i} N_1 = N_1.$$

Isto ocorre se, e somente se,

$$\prod_{k\in A_m/A'_m}(c^k)^{l_i}\in N_1$$

se, e somente se,

$$\prod_{k\in A_m/A'_m}(c^k)^{l_i}=\prod_{\substack{\overline{g_i}\neq\overline{g_j}\\ i<j}}[d_i,d_j]^{n_i}\prod_{\substack{\overline{g_i}=\overline{g_j}\\ i<j}}([d_i,d_j](c^{\overline{g_i}})^{\rho(g_ig_j^{-1})})^{s_i}.$$

Podemos assim, concluir que $n_i=0$, para todo i. Portanto, temos que:

$$\prod_{k\in A_m/A'_m}(c^k)^{l_i}\prod_{\substack{\overline{g_i}=\overline{g_j}\\ i<j}}([d_i,d_j](c^{\overline{g_i}})^{\rho(g_ig_j^{-1})})^{s_i}=1.$$

Como

$$\prod_{\substack{\overline{g_i}=\overline{g_j}\\ i<j}}([d_i,d_j](c^{\overline{g_i}})^{\rho(g_ig_j^{-1})})^{s_i}=\prod_{\substack{i<j,\overline{g_i}=\overline{g_j}\\ g_ig_j^{-1}=a}}([d_i,d_j](c^{\overline{g_i}}))^{s'_i}\prod_{\substack{i<j,\overline{g_i}=\overline{g_j}\\ g_ig_j^{-1}\neq a}}[d_i,d_j]^{s''_i},$$

temos que $s''_i=0$, para todo i. Logo,

$$\prod_{k\in A_m/A'_m}(c^k)^{l_k}\prod_{\substack{i<j,\overline{g_i}=\overline{g_j}\\ g_ig_j^{-1}=a}}([d_i,d_j](c^{\overline{g_i}}))^{s'_i}=1.$$

Assim, temos que $s'_i=0$, para todo i. Como $\{c^k, k\in A_{m/A'_m}\}$ é uma base de C, devemos ter necessariamente $l_k=0$, para todo k. Logo, temos que β é uma base para $D'N_1/N_1$. $\square$

Como nosso objetivo é construir B_m, consideremos o grupo DN_1/N_1, que é gerado pelos elementos d_iN_1, onde $d_i=1+\overline{y_i}$, com $y_i=y_{g_i}$, indexado pelos elementos $g_i\in A_m$. Identificaremos b^{g_i}, com d_iN_1, e os elementos $c^k, k\in A_m/A'_m$, com os elementos c^kN_1 de DN_1/N_1. Assim temos que os elementos de DN_1/N_1 satisfazem as relações (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), que definem B_m. Então, pelo teorema de von Dyck, temos que DN_1/N_1 é isomorfo a um quociente de B_m, por algum subgrupo nomal N. Por raciocínio análogo ao feito na seção anterior, concluimos que $N=1$. E assim, temos que $DN_1/N_1\cong B_m$.

2.3 Construção do grupo C_m

Seja G é um grupo qualquer. Sejam $N \lhd G$ e α um endomorfismo de G. Observemos que se $\alpha(N) \subset N$ então α induz um endomorfismo $\overline{\alpha} : G/N \longrightarrow G/N$ tal que $\overline{\alpha}(gN) = \alpha(g)N$.

Consideremos agora F um grupo livre, com geradores livres b^{g_i}, $g_i \in A_m$ e c^k, $k \in A_m/A'_m$. Seja $g \in A_m$. Seja α_g a aplicação do conjunto de geradores livres de F, tal que: $\alpha_g(b^{g_1}) = b^{g_1 g}$, $g_i \in A_m$ e $\alpha_g(c^{\overline{g_i}}) = c^{\overline{g_i g}}$. Observemos que α_g define um endomorfismo de F. Notemos que $B_m \cong F/R$, onde R é gerado como subgrupo normal de F pelos conjuntos:

$$\{(b^g)^2, g \in A_m\},$$

$$\{(c^k)^2 \mid k \in A_m/A'_m\},$$

$$\{[b^{g_1}, b^{g_2}] \mid \overline{g_1} \neq \overline{g_2}\},$$

$$\{[b^{g_1}, b^{g_2}](c^{\overline{g_1}})^{\rho(g_1 g_2^{-1})} \mid \overline{g_1} = \overline{g_2}\}$$

$$\{[c^k, b^g] \mid g \in A_m, k \in A_m/A'_m\}.$$

Podemos facilmente ver que $\alpha_g(N) \subset N$. Portanto, temos que α_g induz um endomorfismo $\overline{\alpha_g}$ de $F/R \cong B_m$. Denotaremos, a partir de agora, $\overline{\alpha_g}$ por α_g. Usaremos α_g, como sendo endomorfismo de B_m. Devemos observar que α_g é sobrejetivo, pois todo gerador b^{g_i} de B_m é imagem de $b^{g_i g^{-1}} \in B_m$. Como B_m é finito e o endomomorfismo α_g é sobrejetivo, segue que α_g é um automorfismo.

Consideremos agora a função do produto cartesiano de conjuntos $B_m \times A_m$ em B_m, definida por:

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & B_m \times A_m & \longrightarrow & B_m \\ & (x, g) & \longmapsto & \alpha_g(x) = x^g. \end{array}$$

Observemos que

$$\varphi(b^{g_i}, g_1 g_2) = b^{g_i(g_1 g_2)} = b^{(g_i g_1) g_2} = \varphi(b^{g_i g_1}, g_2).$$

Portanto,

$$\varphi(x, g_1 g_2) = \varphi(\varphi(x, g_1), g_2),$$

qualquer que seja $x \in B_m$. Além disso, $\varphi(b^{g_i}, 1) = b^{g_i}$. Logo $\varphi(x, 1) = x$, para todo $x \in B_m$. Assim, φ define uma ação de A_m em B_m.

Definamos $C_m = A_m \ltimes B_m$ como sendo o produto semi-direto de A_m e B_m, segundo a ação φ. Se $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in C_m$ então o produto é definido da seguinte forma $(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2,\alpha_{a_2}(b_1)b_2)$. Usaremos a notação $(a,b) = ab$ e o produto como $a_1b_1a_2b_2 = a_1a_2b_1^{a_2}b_2$. Como $A_m \cong H_1 \leq C_m, B_m \cong H_2 \lhd C_m$, consideraremos que $A_m \leq C_m, B_m \lhd C_m$.

Sejam $D_m = A'_mB_m$ e $d \in D_m$. Então $d = gb^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n}$, onde $g \in A'_m$, $g_i \in A_m$, $i = 1,2,\dots,n$.

Lema 2.10. *Sejam D_m e B_m, definidos anteriormente. Então $D_m^4 \subset B'_m$, onde $D_m^4 = \langle d^4 \mid d \in D_m\rangle$.*

Demonstração: Seja $d = gb^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n}$, $g \in A'_m$, $g_i \in A_m$, $i = 1,2,\dots,n$. Assim temos que:

$$\begin{aligned} d^2 &= (gb^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n})(gb^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n}) \\ &= g^2(b^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n})^g(b^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n}) \\ &= b^{g_1g}b^{g_2g}\dots b^{g_ng}b^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned} d^4B'_m &= (b^{g_1g}b^{g_2g}\dots b^{g_ng}b^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n})(b^{g_1g}b^{g_2g}\dots b^{g_ng}b^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n})B'_m \\ &= (b^{g_1g})^2(b^{g_2g})^2\dots(b^{g_ng})^2(b^{g_1})^2(b^{g_2})^2\dots(b^{g_n})^2B'_m \\ &= B'_m. \end{aligned}$$

Portanto, $d^4 \in B'_m$, que conclui a demonstração do lema. □

Lema 2.11. *A relação $d^4 = 1$ é válida se, e somente se, $\rho(g) = 0$ ou se para cada $k \in A_m/A'_m$ o número de elementos g_i tal que $\overline{g_i} = k$ na expressão de d é par.*

Demonstração: Do lema anterior temos que $d^4 = c^{k_1}c^{k_2}\dots c^{k_r}$, para $k_1,k_2,\dots,k_r \in A_m/A'_m$. Como B'_m é um 2-grupo abeliano elementar, os elementos c^k's são independentes e obtidos por comutadores $[b^{g'},b^{g''}]$, onde $\overline{g'} = \overline{g''} = k$. Além disso, se $\overline{g'} \neq \overline{g''}$ então $[b^{g'},b^{g''}] = 1$. Por isso, é suficiente considerar apenas o caso em que $d = gb^{g_1}b^{g_2}\dots b^{g_n}$, com $\overline{g_1} = \overline{g_2} = \dots = \overline{g_n} = k$. Notemos que $[b^{g_i}b^{g_ig},b^{g_j}b^{g_jg}] = 1$, para todo $i \neq j$. De fato,

$$\begin{aligned} [b^{g_i}b^{g_ig},b^{g_j}b^{g_jg}] &= [b^{g_i},b^{g_j}b^{g_jg}][b^{g_ig},b^{g_j}b^{g_jg}] \\ &= [b^{g_i},b^{g_j}][b^{g_i},b^{g_jg}][b^{g_ig},b^{g_j}][b^{g_ig},b^{g_jg}] \\ &= (c^k)^{\rho(g_ig_j^{-1})}(c^k)^{\rho(g_igg_j^{-1})}(c^k)^{\rho(g_igg_j^{-1})}(c^k)^{\rho(g_igg^{-1}g_j^{-1})},\ (g = g^{-1} \text{ pois } g \in A'_m) \\ &= (c^k)^{2\rho(g_ig_j^{-1})}(c^k)^{2\rho(g_igg_j^{-1})} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por (2.6), temos que $d^2 = b^{g_1g} \dots b^{g_ng} b^{g_1} \dots b^{g_n} = b^{g_1} b^{g_1g} \dots b^{g_n} b^{g_ng} c$, onde c é produto de comutadores em B'_m. Como $c \in Z(B_m)$ e $c^2 = 1$, segue que:

$$\begin{aligned} d^4 &= (b^{g_1} b^{g_1g} \dots b^{g_n} b^{g_ng} c)(b^{g_1} b^{g_1g} \dots b^{g_n} b^{g_ng} c) \\ &= b^{g_1} b^{g_1g} \dots b^{g_n} b^{g_ng} b^{g_1} b^{g_1g} \dots b^{g_n} b^{g_ng}. \end{aligned}$$

Usando a igualdade (2.7), obtemos que:

$$d^4 = (b^{g_1} b^{g_1g})^2 \dots (b^{g_n} b^{g_ng})^2.$$

Por outro lado, temos que $(b^{g'})^2 = 1$, qualquer que seja $g' \in A_m$. Assim, segue que:

$$\begin{aligned} d^4 &= (b^{g_1})^{-1} (b^{g_1g})^{-1} b^{g_1} b^{g_1g} \dots (b^{g_n})^{-1} (b^{g_ng})^{-1} b^{g_n} b^{g_ng} \\ &= [b^{g_1}, b^{g_1g}] \dots [b^{g_n}, b^{g_ng}] \\ &= (c^k)^{\rho(g_1gg_1^{-1})} \dots (c^k)^{\rho(g_ngg_n^{-1})}. \end{aligned}$$

Como $g \in A'_m = Z(A_m)$, temos que $d^4 = (c^k)^{\rho(g)} \dots (c^k)^{\rho(g)} = (c^k)^{n\rho(g)}$. Desta forma, temos que $d^4 = 1$ se, e somente se, n é par ou $\rho(g) = 0$. Ficando assim concluída a demonstração do lema. $\square$

Lema 2.12. *$u_n \equiv 1$ é uma identidade em C_m se, e somente se, o elemento fixado $a \in A'_m$ não é representável na forma $a = g_1^2 g_2^2 \dots g_n^2$, com $g_1, g_2, \dots, g_n \in A_m$.*

Demonstração: Vamos inicialmente supor que a não pode ser escrito na forma $g_1^2 g_2^2 \dots g_n^2$ para todos $g_1, g_2, \dots, g_n \in A_m$. Sejam $g_1, g_2, \dots, g_n \in A_m$ e $b_1, b_2, \dots, b_n \in B_m$. Então

$$u_n(g_1b_1, g_2b_2, \dots, g_nb_n) = ((g_1b_1)^2 (g_2b_2)^2 \dots (g_nb_n)^2)^4 = (g_1^2 g_2^2 \dots g_n^2 \tilde{b})^4,$$

onde $\tilde{b} \in B_m$. Pelo lema 2.11, obtemos

$$u_n(g_1b_1, g_2b_2, \dots, g_nb_n) = 1,$$

uma vez que $\rho(g_1^2 g_2^2 \dots g_n^2) = 0$, pois a não é representável na forma $g_1^2 g_2^2 \dots g_n^2$. Assim, como $u_n(g_1b_1, g_2b_2, \dots, g_nb_n) = 1$, para todo $g_i \in A_m$, $b_i \in B_m$, $i = 1, 2, \dots, n$, concluímos que $u_n \equiv 1$ é uma identidade em C_m.

Inversamente, se $u_n \equiv 1$ é identidade em C_m, queremos mostrar que $a \neq g_1^2 g_2^2 \dots g_n^2$, para todo $g_i \in A_m$, $i = 1, 2, \dots, n$. Vamos supor por absurdo que existem $g_1, g_2, \dots, g_n \in A_m$ tais que $a = g_1^2 g_2^2 \dots g_n^2$. Nestas condições, g_i não pertence a A'_m, para algum i. De fato, se $g_i \in A'_m$, para todo $i = 1, 2, \ldots, 2m$, teríamos $g_i^2 = 1$ e portanto $a = 1$, um absurdo. Sem perda de generalidade vamos supor que $g_n \notin A'_m$. Assim, $u_n(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g_n b^1) = (g_1^2 g_2^2 \ldots g_{n-1}^2 (g_n b^1)^2)^4 = (g_1^2 g_2^2 \ldots g_{n-1}^2 g_n^2 b^{g_n} b^1)^4$. Temos que $a = g_1^2 g_2^2 \ldots g_n^2$, e $\rho(a) = 1$. Além disso, sabemos que $\overline{g_n} \neq \overline{1}$, pois $g_n \notin A'_m$. Logo, pelo lema 2.11, segue que:

$$u_n(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g_n b^1) = (ab^{g_n} b^1)^4 \neq 1,$$

um absurdo, pois, por hipótese, temos que $u_n \equiv 1$ é identidade em C_m. Concluímos então que a não é representável na forma $g_1^2 g_2^2 \ldots g_n^2$, para todo $g_i \in A_m$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

2.4 Demonstração do Teorema 2.2

Como foi visto no início do capítulo, é suficiente mostrar que para todo n, existe um grupo C_m, onde $m = m(n)$ tal que $u_n(C_m) \equiv \{1\}$, e portanto $u_k(C_m) \equiv \{1\}$, para todo $k \leq n$, mas C_m não satisfaz a identidade $u_l \equiv 1$, para algum $l > n$.

Seja $n \geq 1$. Tomemos $m = m(n) = n + 1$, para $n \geq 1$, arbitrário. Primeiramente mostraremos que existe $a \in A'_m$ tal que a não é representável na forma $g_1^2 g_2^2 \ldots g_n^2$, com $g_i \in A_m$, onde $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $A'_m \cong \mathbb{Z}_2^{m(2m-1)}$, temos que A'_m possui $2^{m(2m-1)} = 2^{(n+1)(2(n+1)-1)} = 2^{2n^2+3n+1}$ elementos. Seja $g = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r} \in A_m$. Para o cálculo de g^2, basta considerar apenas os a_i's distintos, pois podemos escrever $g = a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_{2m}^{l_{2m}}.c$, onde $c \in A'_m = Z(A_m)$, e $l_i \in \{0, 1\}$, e assim $g^2 = (a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_{2m}^{l_{2m}}.c)^2 = (a_1^{l_1} a_2^{l_2} \ldots a_{2m}^{l_{2m}})^2$. Temos também que se $\sigma \in S_r$, então $g^2 = (a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r})^2 = (a_{i_{\sigma(1)}} a_{i_{\sigma(2)}} \ldots a_{i_{\sigma(r)}}.\tilde{c})^2$, onde $\tilde{c} \in A'_m = Z(A_m)$. Logo, $g^2 = (a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r})^2 = (a_{i_{\sigma(1)}} a_{i_{\sigma(2)}} \ldots a_{i_{\sigma(r)}})^2$, qualquer que seja σ em S_r. Desta forma, para determinar o número de elementos da forma g^2, basta determinar o número de subconjuntos do conjunto de geradores $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2m}\}$, uma vez que a ordem em que aparecem os geradores na expressão de g não altera o quadrado. Os geradores que aparecem um número par de vezes em g podem ser desconsiderados e os que aparecem um número ímpar de vezes podem ser contados apenas uma única vez. Assim, o número de quadrados distintos em A_m é menor que $2^{2m} = 2^{2(n+1)} = 2^{2n+2}$ (é menor, pois os quadrados dos geradores são triviais). Portanto, o número de possíveis elementos na forma $g_1^2 g_2^2 \ldots g_n^2$ é menor que $(2^{2n+2})^n = 2^{2n^2+2n}$. Notemos que o número de elementos na forma $g_1^2 g_2^2 \ldots g_n^2$ é menor que o número de elementos de $A'_m = A_m^2$, isto é, $2^{2n^2+n} < 2^{2n^2+3n+1}$. Assim é possível escolher $a \in A'_m$ tal que a não é da forma $g_1^2 g_2^2 \ldots g_n^2$.

Agora, pelo lema 2.12, temos que para este a escolhido, o grupo C_m correspondente satisfaz a identidade $u_n \equiv 1$.

Finalmente mostraremos que C_m não satisfaz a identidade $u_l \equiv 1$, para algum $l > n$. De fato, seja $a \neq 1$ escolhido na primeira parte da demonstração. Observemos que $a \in A'_m = A_m^2$, então existe l tal que $a = g_1^2 g_2^2 \ldots g_l^2$, com $g_i \in A_m$, para todo $i = 1, 2, \ldots, l$. Agora pelo lema 2.12, temos que $u_l \equiv 1$ não é identidade em C_m. Assim, concluímos que $\mathbf{B}_4\mathbf{B}_2$ não possui a propriedade da base finita.

Capítulo 3

Uma Variedade Centro-por-abeliano-por-nilpotente

Seja F um grupo livre com base $X = \{x\} \cup \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Seja n um inteiro positivo arbitrário. Definamos:

$$u_n = u_n(x, x_1, \ldots, x_{2n}) = [(x^8)^{[x_1,x_2][x_3,x_4]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}]}, x^8] \equiv 1$$

e

$$[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6], x_7] \equiv 1. \tag{3.1}$$

Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que a variedade definida pelas identidades $u_n \equiv 1$, $n = 1, 2, \ldots$ e (3.1) não possui base finita. Para todo n, construiremos uma família de grupos G_n, tal que G_n satisfaz as identidades (3.1) e $u_n \equiv 1$, mas não satisfaz $u_{n+1} \equiv 1$.

3.1 Construção do grupo G_n

Seja A o grupo definido da seguinte forma:

$$A = \langle y_1, y_2, \ldots \mid y_i^8 = [y_i, y_j]^4 = [y_i, y_j, y_k] = 1, \text{ para todo } i, j, k = 1, 2, \ldots \rangle.$$

Observemos que A é nilpotente de classe 2.

Observação 3.1. Sejam $a, a_1, a_2 \in A$. Então $a^8 = [a_1, a_2]^4 = [a_1^2, a_2^2] = [a_1^4, a_2] = 1$.

De fato, suponhamos que $a = y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_r}$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= (y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_r})^2 \\ &= y_{i_1}^2 y_{i_2}^2 \ldots y_{i_r}^2 \prod_{\substack{l,k=1,\ldots,r \\ l<k}} [y_{i_l}, y_{i_k}], \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} a^4 &= \left(y_{i_1}^2 y_{i_2}^2 \ldots y_{i_r}^2 \prod_{\substack{l,k=1,\ldots,r \\ l<k}} [y_{i_l}, y_{i_k}] \right)^2 \\ &= y_{i_1}^4 y_{i_2}^4 \ldots y_{i_r}^4 \prod_{\substack{l,k=1,\ldots,r \\ l<k}} [y_{i_l}^2, y_{i_k}^2][y_{i_l}, y_{i_k}]^2 \\ &= y_{i_1}^4 y_{i_2}^4 \ldots y_{i_r}^4 \prod_{\substack{l,k=1,\ldots,r \\ l<k}} [y_{i_l}, y_{i_k}]^4 [y_{i_l}, y_{i_k}]^2 \\ &= y_{i_1}^4 y_{i_2}^4 \ldots y_{i_r}^4 \prod_{\substack{l,k=1,\ldots,r \\ l<k}} [y_{i_l}, y_{i_k}]^2. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\begin{aligned} a^8 &= \left(y_{i_1}^4 y_{i_2}^4 \ldots y_{i_r}^4 \prod_{\substack{l,k=1,\ldots,r \\ l<k}} [y_{i_l}, y_{i_k}]^2 \right)^2 \\ &= y_{i_1}^8 y_{i_2}^8 \ldots y_{i_r}^8 \prod_{\substack{l,k=1,\ldots,r \\ l<k}} [y_{i_l}^4, y_{i_k}^4][y_{i_l}, y_{i_k}]^4 \\ &= \prod_{\substack{l,k=1,\ldots,r \\ l<k}} [y_{i_l}, y_{i_k}]^{20} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora, sejam $a_1 = y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_{s_1}}$ e $a_2 = y_{j_1}y_{j_2}\ldots y_{j_{s_2}}$. Como A é nilpotente de classe 2, temos que:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] &= [y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_{s_1}}, y_{j_1}y_{j_2}\ldots y_{j_{s_2}}] \\ &= \prod_{\substack{1\le l\le s_1 \\ 1\le k\le s_2}} [a_{i_l}, a_{j_k}]. \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos:

$$\begin{aligned}
[a_1,a_2]^4 &= \left(\prod_{\substack{1\le l\le s_1\\1\le k\le s_2}} [a_{i_l},a_{j_k}]\right)^4\\
&= \prod_{\substack{1\le l\le s_1\\1\le k\le s_2}} ([a_{i_l},a_{j_k}])^4\\
&= 1. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Também, temos que $[a_1^2,a_2^2]=[a_1,a_2^2]^2=[a_1,a_2]^4=1$ e que $[a_1^4,a_2]=[a_1,a_2]^4=1$.

Lema 3.2. *O grupo A é relativamente livre e A/A' é abeliano livre de expoente* 8.

Demonstração: Seja $Y=\{y_i \mid i=1,2,\ldots\}$. Como A possui a apresentação:

$$A=\langle y_1,y_2,\ldots \mid y_i^8=[y_i,y_j]^4=[y_i,y_j,y_k]=1, i,j,k=1,2,\ldots\rangle,$$

então $A=F(Y)/R$, onde R é gerado como subgrupo normal de $F(Y)$ pelo conjunto:

$$\{y_i^8,[y_i,y_j]^4,[y_i,y_j,y_k] \mid i,j,k=1,2,\ldots\}.$$

Queremos mostrar inicialmente que A é relativamente livre. Pela proposição 1.33, é suficiente mostrar que R é subgrupo verbal de $F(Y)$, ou seja, R é invariante por endomorfismos de $F(Y)$. Seja $\alpha : F(Y)\longrightarrow F(Y)$ um endomorfismo, tal que $\alpha(y_i)=a_i$, para todo $i=1,2,\ldots$. É suficiente verificar que α aplicada nos elementos do conjunto gerador $\{y_i^8,[y_i,y_j]^4,[y_i,y_j,y_k] \mid i,j,k=1,2,\ldots\}$ de R pertence a R. Observemos que $\alpha(y_i^8)=a_i^8$. Pela observação 3.1 temos que $a_i^8R=(a_iR)^8=R$, e assim $a_i^8\in R$. Temos também pela observação 3.1 que $\alpha([y_i,y_j]^4)R=[a_i,a_j]^4R=([a_i,a_j]R)^4=R$, e portanto $[a_i,a_j]^4\in R$. Além disso, como $[y_i,y_j,y_k]R=R$, para todo $i=1,2,\ldots$, segue da proposição 1.11 que $F(Y)/R$ é nilpotente de classe 2 e portanto $[a_i,a_j,a_k]R=R$, para todos $a_i,a_j,a_k\in F$. Logo, temos que $\alpha([y_i,y_j,y_k])R=[a_i,a_j,a_k]R=R$. Desta forma, $\alpha(R)\subset R$ e assim, R é subgrupo verbal de $F(Y)$. Portanto, A é relativamente livre.

Resta mostrar que A/A' é abeliano livre de expoente 8. Sabemos que A é de expoente 8, portanto A/A' também é de expoente 8, gerado por $x_i=y_iA'$, $i=1,2,\ldots$. Assim,

$$A/A'=\langle x_1,x_2,\ldots \mid x_i^8=[x_i,x_j]=1, \text{ para todo } i,j=1,2,\ldots\rangle,$$

e por raciocínio semelhante ao anterior, segue que A/A' é relativamente livre. Portanto, A/A' é abeliano livre de expoente 8, com geradores livres $\{y_iA', i = 1, 2, \dots\}$. $\square$

Lema 3.3. *A' é um grupo abeliano livre de expoente* 4, *com conjunto de geradores livres* $\{[y_i, y_j] \mid i > j\}$.

Demonstração: Consideremos o grupo H definido da seguinte forma:

$$H = \langle h_1, h_2, \dots \mid [h_i, h_j]^4 = [h_i, h_j, h_k] = 1, \text{ para todo } i, j, k = 1, 2, \dots \rangle.$$

Seja $\mu : H \longrightarrow A$ o homomorfismo tal que $\mu(h_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots$. Observemos que H' é um grupo abeliano livre de expoente 4, com geradores livres $\{[h_i, h_j] \mid i > j\}$. Isto pode ser verificado, fazendo a realização do grupo $F/\gamma_3(F)$, como no capítulo anterior para o grupo A_m, onde F é o grupo livre com base $x_1, x_2, \dots$. Basta para isto, considerar o anel R de polinômios não-comutativo sobre $\mathbb{Z}$ nas variáveis $\delta_1, \delta_2, \dots$ e o ideal J de R gerado por todos o monômios de grau maior ou igual a 3. Assim, conseguimos mostrar que $F/\gamma_3(F)$ é isomorfo a um subgrupo de $\mathscr{U}(R/J)$, onde $\mathscr{U}(R/J)$ é o subgrupo multiplicativo de R/J. Assim, podemos mostrar também que $F'/\gamma_3(F)$ é abeliano livre com base $\{[\overline{x_i}, \overline{x_j}] \mid i < j\}$, onde $\overline{x_i} = x_i\gamma_3(F)$. Portanto, temos que $F'/\gamma_3(F)/(F'/\gamma_3(F))^4$ é abeliano livre de expoente 4, com base $\{[\overline{x_i}, \overline{x_j}](F'/\gamma_3(F))^4 \mid i < j\}$. Assim, com auxílio do teorema de von Dyck, mostramos que:

$$F'/\gamma_3(F)/(F'/\gamma_3(F))^4 \cong H'.$$

Portanto, H' é abeliano livre de expoente 4, com geradores livres $\{[h_i, h_j] \mid i > j\}$.

Seja $K = \langle h_i^4 \mid i = 1, 2, \dots \rangle$. Notemos que $K \subset Z(H)$. De fato, se $h \in H$, então $[h_i^4, h] = [h_i, h]^4 = 1$, para todo i. Seja $g \neq 1, g \in K$. Então $g = h_{i_1}^{4n_1} h_{i_2}^{4n_2} \dots h_{i_s}^{4n_s}$, onde n_j é um inteiro não-nulo e $1 \leq i_1 < \dots < i_s$. Agora, se φ é o homomorfismo canônico de H em H/H', então

$$\varphi(g) = h_{i_1}^{4n_1} h_{i_2}^{4n_2} \dots h_{i_s}^{4n_s} H' \neq H',$$

pois $g \neq 1$. Assim, temos que $K \cap H' = \{1\}$. Seja $a \in H \backslash \{1\}$. Se $a \in \ker\mu$ então $a \in K$, pois $\mu(a) = \mu(h_{i_1}^{l_1} h_{i_2}^{l_2} \dots h_{i_r}^{l_r}) = y_{i_1}^{l_1} y_{i_2}^{l_2} \dots y_{i_r}^{l_r} = 1$. Portanto, $l_j = 8k_j$, $j = 1, 2, \dots, r$, e assim, $a = h_{i_1}^{8k_1} h_{i_1}^{8k_2} \dots h_{i_1}^{8k_r}$. Logo, $a \in K$ e portanto, $\ker\mu \subset K$. Agora, como $K \cap H' = \{1\}$ e $\ker\mu \subset K$, temos que $\ker\mu \cap H' = \{1\}$. Logo, obtemos $H/\ker\mu \cong A$ e portanto $(H' \ker\mu)/\ker\mu \cong A'$. Por outro lado, $(H' \ker\mu)/\ker\mu \cong H'/(H' \cap \ker\mu) \cong H'$, pois $\ker\mu \cap H' = \{1\}$. Portanto $A' \cong H'$. Como H' é abeliano livre de expoente 4 com geradores livres $\{[h_i, h_j] \mid i > j\}$, segue o resultado. $\square$

Seja B o grupo com a seguinte apresentação:

$$B = \langle z^g, g \in A \mid (z^g)^{16} = [z^{g_1}, z^{g_2}, z^{g_3}] = 1, g, g_1, g_2 \in A\rangle.$$

Observemos que B é nilpotente de classe 2. A seguir mostraremos alguns fatos sobre a estrutura de B. Utilizaremos a notação $z = z^1$.

Lema 3.4. *B' é abeliano livre de expoente 16, com base:*

$$\{[z^{g_1}, z^{g_2}] \mid g_1 > g_2, g_1, g_2 \in A\}.$$

Demonstração: Como B é nilpotente de classe 2, temos que B' é abeliano. Além disso, temos $[b^{g_1}, b^{g_2}]^{16} = [(b^{g_1})^{16}, b^{g_2}] = 1$, onde $g_1, g_2 \in A$. Logo, B' é abeliano de expoente divisor de 16. Consideremos agora, o grupo L definido com a seguinte apresentação:

$$L = \langle h_{g_1}, h_{g_2}, \dots \mid [h_{g_i}, h_{g_j}]^{16} = [h_{g_i}, h_{g_j}, h_{g_k}] = 1, \text{ para todo } g_i, g_j, g_k \in A\rangle.$$

Notemos que L' é um grupo abeliano livre de expoente 16, com geradores livres $\{[h_{g_i}, h_{g_j}] \mid g_i > g_j\}$. Este fato pode ser verificado de maneira semelhante ao feito para o grupo H' no lema 3.3. Definamos o homomorfismo $\varphi : L \longrightarrow B$ por $\varphi(h_{g_i}) = z^{g_i}$. Consideremos $J = \langle h_{g_i}^{16} \mid g_i \in A\rangle$. Claramente, $J \subset Z(L)$, pois se $h \in L$ então $[h_{g_i}^{16}, h] = [h_i, h]^{16} = 1$, para todo $g_i \in A$. Seja $f \in J$, $f \neq 1$. Então $f = h_{g_{i_1}}^{16n_1} h_{g_{i_2}}^{16n_2} \dots h_{g_{i_s}}^{16n_s}$, onde $g_{i_1} < g_{i_2} < \cdots < g_{i_s}$, para algum s. Assim, $fL' = h_{g_{i_1}}^{16n_1} h_{g_{i_2}}^{16n_2} \dots h_{g_{i_s}}^{16n_s} L' \neq L'$, se $f \neq 1$. Logo $J \cap L' = \{1\}$. Seja $a \in L$, $a \neq 1$. Suponhamos que $a \in \ker\varphi$. Então $\varphi(a) = \varphi(h_{g_{i_1}}^{l_1} h_{g_{i_2}}^{l_2} \dots h_{g_{i_r}}^{l_r}) = (z^{g_{i_1}})^{l_1} (z^{g_{i_2}})^{l_2} (z^{g_{i_r}})^{l_r} = 1$. Portanto $16 \mid l_i$, o que implica que $a \in J$. Assim, $\ker\varphi \subset J$. Como $J \cap L' = \{1\}$, segue que $\ker\varphi \cap L' = \{1\}$. Desta forma, temos que $L/\ker\varphi \cong B$ e conseqüentemente $(L' \ker\varphi)/\ker\varphi \cong B'$. Por outro lado, $(L' \ker\varphi)/\ker\varphi \cong L'/(\ker\varphi \cap L') \cong L'$. Logo $L' \cong B'$, o que conclui a demonstração. □

Lema 3.5. *B tem expoente 32.*

Demonstração: Seja $b \in B$. Então, $b = z^{g_1} z^{g_2} \dots z^{g_s}$, com $g_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, s$, para algum s e

$$b^2 = (z^{g_1})^2 (z^{g_2})^2 \dots (z^{g_s})^2 \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s \\ i<j}} [z^{g_i}, z^{g_j}].$$

Elevando-se novamente ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} b^4 &= (z^{g_1})^4(z^{g_2})^4\dots(z^{g_s})^4 \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [(z^{g_i})^2,(z^{g_j})^2][z^{g_i},z^{g_j}]^2 \\ &= (z^{g_1})^4(z^{g_2})^4\dots(z^{g_s})^4 \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [z^{g_i},z^{g_j}]^4[z^{g_i},z^{g_j}]^2 \\ &= (z^{g_1})^4(z^{g_2})^4\dots(z^{g_s})^4 \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [z^{g_i},z^{g_j}]^6. \end{aligned}$$

Continuando o processo, temos:

$$\begin{aligned} b^8 &= (z^{g_1})^8(z^{g_2})^8\dots(z^{g_s})^8 \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [(z^{g_i})^4,(z^{g_j})^4][z^{g_i},z^{g_j}]^{12} \\ &= (z^{g_1})^8(z^{g_2})^8\dots(z^{g_s})^8 \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [z^{g_i},z^{g_j}]^{16}[z^{g_i},z^{g_j}]^{12} \\ &= (z^{g_1})^8(z^{g_2})^8\dots(z^{g_s})^8 \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [(z^{g_i})^{16},z^{g_j}][z^{g_i},z^{g_j}]^{12} \\ &= (z^{g_1})^8(z^{g_2})^8\dots(z^{g_s})^8 \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [z^{g_i},z^{g_j}]^{12}. \end{aligned}$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} b^{16} &= (z^{g_1})^{16}(z^{g_2})^{16}\dots(z^{g_s})^{16} \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [(z^{g_i})^8,(z^{g_j})^8][z^{g_i},z^{g_j}]^{24} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [z^{g_i},z^{g_j}]^{64}[z^{g_i},z^{g_j}]^{24} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [(z^{g_i})^{16},z^{g_j}]^4[z^{g_i},z^{g_j}]^{24} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [z^{g_i},z^{g_j}]^{16}[z^{g_i},z^{g_j}]^{8} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s\\ i<j}} [z^{g_i},z^{g_j}]^{8}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que:

$$\begin{aligned} b^{32} &= \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s \\ i<j}} [(z^{g_i})^8, (z^{g_j})^8][z^{g_i}, z^{g_j}]^{16} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s \\ i<j}} [z^{g_i}, z^{g_j}]^{64}[z^{g_i}, z^{g_j}]^{16} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1,\dots,s \\ i<j}} [(z^{g_i})^{16}, z^{g_j}]^4[(z^{g_i})^{16}, z^{g_j}] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, B tem expoente divisor de 32. Seja $b \in B$, $b = z^{g_1}z^{g_2}$, onde $g_1, g_2 \in A$ e $g_1 > g_2$. Pelo cálculo feito acima, temos que:

$$b^2 = (z^{g_1})^2(z^{g_2})^2[z^{g_1}, z^{g_2}] \neq 1.$$

Continuando o mesmo processo, obtemos que:

$$b^{16} = [z^{g_1}, z^{g_2}]^8 \neq 1,$$

pois B' é abeliano livre de expoente 16 e $[z^{g_1}, z^{g_2}]$ é um elemento da base de B', portanto tem ordem 16. Assim, segue que $o(b) = 32$ e B tem expoente 32. $\square$

Definamos a ação de A em B por $(z^g)^{g'} = z^{gg'}$, para todo $g, g' \in A$. Consideremos $W = B \rtimes A$, segundo a ação acima. A partir de agora, usaremos o fato que A é a união disjunta dos subconjuntos $A \backslash A'$, $A' \backslash (A')^2$ e $(A')^2$. Como A' tem expoente 4, podemos escolher $T \subset A' \backslash (A')^2$, tal que $T \cap T^{-1} = \emptyset$ e $T \cup T^{-1} = A' \backslash (A')^2$.

Seja $U_1 \leq B'$, tal que U_1 é gerado por:

$$\{[z^{g_1}, z^{g_2}], \text{ com } g_1, g_2 \in A, \text{ e } g_1 g_2^{-1} \in A \backslash A' \cup (A')^2\}.$$

Observemos que $U_1 \lhd W$. De fato, se $w = ab, a \in A, b \in B$ então $[z^{g_1}, z^{g_2}]^w = [z^{g_1}, z^{g_2}]^{ab} = [z^{g_1 a}, z^{g_2 a}]^b = b^{-1}[z^{g_1 a}, z^{g_2 a}]b \in U_1$.

Lema 3.6. *B'/U_1 é abeliano livre de expoente 16 com base:*

$$\{[z^t, z]^g U_1 \mid t \in T, g \in A\}.$$

Demonstração: Pelo lema 3.4, temos que B' é abeliano livre de expoente 16 com base

$$\{[z^{g_1}, z^{g_2}] \mid g_1 > g_2,\, g_1, g_2 \in A\}.$$

Também temos que $g_1g_2^{-1} \notin A'$ se, e somente se, $g_2g_1^{-1} \notin A'$ e $g_1g_2^{-1} \in (A')^2$ se, e somente se, $g_2g_1^{-1} \in (A')^2$, quaisquer que sejam $g_1, g_2 \in A$. Podemos então concluir que:

$$U_1 = \langle [z^{g_1}, z^{g_2}] \mid g_1, g_2 \in A,\, g_1g_2^{-1} \in (A \backslash A') \cup (A')^2, g_1 > g_2, \rangle.$$

Assim, B'/U_1 é um grupo abeliano livre de expoente 16, com base

$$\{[z^{g_1}, z^{g_2}]U_1 \mid g_1, g_2 \in A, g_1 > g_2, g_1g_2^{-1} \in A' \backslash (A')^2\}.$$

Notemos que se $g_1g_2^{-1} \in A' \backslash (A')^2$ então $g_1g_2^{-1} \in T$ ou $g_1g_2^{-1} \in T^{-1}$. Se $g_1g_2^{-1} \in T$ não temos nada a demonstrar. Agora, se $g_1g_2^{-1} \in T^{-1}$, então $g_2g_1^{-1} \in T$. Mas $[z^{g_1}, z^{g_2}] = [z^{g_2}, z^{g_1}]^{-1}$, e portanto $[z^{g_2}, z^{g_1}]U_1$ também é um elemento da base. Assim, temos que B'/U_1 possui base $\{[z^{g_1}, z^{g_2}]U_1 \mid g_1, g_2 \in A, g_1g_2^{-1} \in T\}$. Agora, fazendo $t = g_1g_2^{-1}$ e $g = g_2$, segue que:

$$\begin{aligned} B'/U_1 &= \langle [z^{g_1}, z^{g_2}]U_1 \mid g_1, g_2 \in A, g_1g_2^{-1} \in T\rangle \\ &= \langle [z^{g_1g_2^{-1}}, z]^{g_2}U_1 \mid g_1, g_2 \in A, g_1g_2^{-1} \in T\rangle \\ &= \langle [z^t, z]^g U_1 \mid g \in A, t \in T\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, temos que B'/U_1 é um grupo abeliano de expoente 16, com base:

$$\{[z^t, z]^g U_1 \mid g \in A,\, t \in T\}.$$

□

Seja $U_2 \leq B'$, U_2 gerado por:

$$U_1 \cup \{[z^{g_1}, z^{g_2}]^g [z^{g_1}, z^{g_2}]^{-1},\ \text{onde } g, g_1, g_2 \in A\}.$$

Seja $w \in W$, $w = ab, a \in A, b \in B$. Então:

$$\begin{aligned} ([z^{g_1}, z^{g_2}]^g [z^{g_1}, z^{g_2}]^{-1})^w &= ([(z^{g_1})^a, (z^{g_2})^a]^g [(z^{g_1})^a, (z^{g_2})^a]^{-1})^b \\ &= [(z^{g_1a}), (z^{g_2a})]^g [(z^{g_1a}), (z^{g_2a})]^{-1} \in U_2, \end{aligned}$$

o que significa que $U_2 \lhd W$.

Observações:

1. $[z^{g_1}, z^{g_2}]^g U_2 = [z^{g_1}, z^{g_2}] U_2$, quaisquer que sejam g, g_1, g_2 em A;
2. $[z^{g_1}, z^{g_2}] U_2 = [z^t, z]^g U_2$, para algum $t \in T$, $g \in A$.

Lema 3.7. *B'/U_2 é abeliano livre de expoente* 16, *com base:*

$$\{[z^t, z] U_2 \mid t \in T\}.$$

Demonstração: Primeiramente, notemos que

$$U_2/U_1 = \langle [z^t, z]^g [z^t, z]^{-1} U_1 \mid t \in T, g \in A \rangle.$$

Além disto,

$$B'/U_2 = \langle [z^{g_1}, z^{g_2}] U_2 \mid g_1, g_2 \in G, g_1 g_2^{-1} \in T, \rangle.$$

Assim, usando as observações anteriores, segue que B'/U_2 é abeliano livre com base:

$$\{[z^t, z] U_2 \mid t \in T\}.$$

$\square$

Lema 3.8. *B'/U_2 é subgrupo de $Z(W/U_2)$. Além disso, W/U_2 satisfaz* (3.1).

Demonstração: Para a primeira afirmação, basta verificar que cada gerador de B'/U_2 pertence ao centro de W/U_2. De fato, seja $[z^t, z] U_2, t \in T$ um gerador de B'/U_2 e seja $w \in W, w = ab$, $a \in A, b \in B$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
[[z^t, z] U_2, w U_2] &= [[z^t, z], ab] U_2 \\
&= [z^t, z]^{-1} b^{-1} a^{-1} [z^t, z] ab U_2 \\
&= [z^t, z]^{-1} b^{-1} [z^t, z]^a b U_2 \\
&= [z^t, z]^{-1} [z^t, z]^a U_2 \\
&= [z^t, z]^{-1} [z^t, z] U_2 \\
&= U_2
\end{aligned}$$

e portanto $B'/U_2 \subset W/U_2$.

Resta agora mostrar que W/U_2 satisfaz (3.1). Notemos que é suficiente verificar que

$$[x_1,x_2,x_3]U_2 \in B/U_2, \text{ para todo } x_i \in W,\ i=1,2,3,$$

pois assim, $[[x_1,x_2,x_3],[x_3,x_4,x_5]]U_2 \in B'/U_2$ que está contido no centro de W/U_2. Sejam $x_1 = a_1b_1$, $x_2 = a_2b_2$, $x_3 = a_3b_3$, $a_i \in A$, $b_i \in B$. Então

$$\begin{aligned}
[x_1,x_2] &= b_1^{-1}(a_1^{-1}b_2^{-1})a_2^{-1}a_1(b_1a_2)b_2 \\
&= b_1^{-1}(b_2^{-1}a_1^{-1}[a_1^{-1},b_2^{-1}])a_2^{-1}a_1(a_2b_1[b_1,a_2])b_2 \\
&= b_1^{-1}b_2^{-1}a_1^{-1}([a_1^{-1},b_2^{-1}]a_2^{-1}a_1a_2)b_1[b_1,a_2]b_2 \\
&= b_1^{-1}b_2^{-1}a_1^{-1}(a_2^{-1}a_1a_2[a_1^{-1},b_2^{-1}][[a_1^{-1},b_2^{-1}],a_2^{-1}a_1a_2])b_1[b_1,a_2]b_2 \\
&= b_1^{-1}b_2^{-1}[a_1,a_2][a_1^{-1},b_2^{-1}][[a_1^{-1},b_2^{-1}],a_2^{-1}a_1a_2]b_1[b_1,a_2]b_2.
\end{aligned}$$

Como $B \lhd W$, $[a_1^{-1},b_2^{-1}]$, $[[a_1^{-1},b_2^{-1}],a_2^{-1}a_1a_2]$ e $[b_1,a_2]$ são elementos de B e portanto, $[[a_1^{-1},b_2^{-1}],a_2^{-1}a_1a_2]b_1[b_1,a_2]b_2 = b \in B$. Assim $[x_1,x_2] = b_1^{-1}b_2^{-1}[a_1,a_2]b$. Agora:

$$\begin{aligned}
[x_1,x_2,x_3] &= [b_1^{-1}b_2^{-1}[a_1,a_2]b, a_3b_3] \\
&= b^{-1}([a_1,a_2]^{-1}b_2b_1b_3^{-1})a_3^{-1}(b_1^{-1}b_2^{-1}[a_1,a_2])ba_3b_3, \text{ fazendo } b_2b_1b_3^{-1} = b' \\
&= b^{-1}b'[a_1,a_2]^{-1}[[a_1,a_2]^{-1},b']a_3^{-1}[a_1,a_2]b_1^{-1}b_2^{-1}[b_1^{-1}b_2^{-1},[a_1,a_2]]ba_3b_3.
\end{aligned}$$

Como $B \lhd W$, temos que $[[a_1,a_2]^{-1},b'] = b'' \in B$ e $b_1^{-1}b_2^{-1}[b_1^{-1}b_2^{-1},[a_1,a_2]]b = b''' \in B$. Assim,

$$\begin{aligned}
[x_1,x_2,x_3] &= b^{-1}b'[a_1,a_2]^{-1}b''a_3^{-1}[a_1,a_2](b'''a_3)b_3 \\
&= b^{-1}b'[a_1,a_2]^{-1}b''a_3^{-1}[a_1,a_2]a_3b'''[b''',a_3]b_3 \\
&= b^{-1}b'[a_1,a_2]^{-1}b''[a_1,a_2]b'''[b''',a_3]b_3 \\
&= b^{-1}b'[a_1,a_2]^{-1}b''[a_1,a_2]b'''[b''',a_3]b_3 \in B.
\end{aligned}$$

Devemos notar que $[a_1,a_2]^{-1}b''[a_1,a_2] = \tilde{b} \in B$, pois $B \lhd W$. Assim, concluímos que:

$$[x_1,x_2,x_3] = b^{-1}b'b'''[b''',a_3]b_3 \in B.$$

Consequentemente, $[x_1,x_2,x_3]U_2 \in B/U_2$. Portanto,

$$[[x_1,x_2,x_3],[x_4,x_5,x_6]]U_2 \in B'/U_2 \subset Z(W/U_2).$$

Daí, concluímos que (3.1) é satisfeita em W/U_2. $\square$

Consideremos agora, $U_3 \lhd B'$, tal que U_3 é gerado por:

$$U_2 \cup \{[z^{gd}, z]^8 [z^g, z]^8 \mid g \in A, d \in (A')^2\}. \tag{3.3}$$

Sejam $g \in A$, e $c_1, c_2 \in A'$ tais que $\overline{c_1} = \overline{c_2}$, ou ainda, $c_1 = c_2.d$, $d \in (A')^2$. Assim,

$$[z^{gc_1}, z]^8 U_3 = [z^{gc_2d}, z]^8 U_3 = [z^{gc_2}, z]^8 U_3.$$

Portanto, $[z^{g\overline{c}}, z]^8 U_3$, $\overline{c} \in A' \backslash (A')^2$ é um elemento bem definido de B'/U_3. Logo se z_1, z_2 são elementos quaisquer de B, então $[z_1^{\overline{c}}, z_2]^8 U_3$, onde $\overline{c} \in A'/(A')^2$, também é um elemento bem definido de B'/U_3.

Lema 3.9. *$(B')^8 U_3/U_3$ é um 2-grupo abeliano elementar com base:*

$$\{[z^{\overline{c}}, z]^8 U_3 \mid \overline{c} \in A' \backslash (A')^2, \overline{c} \neq 1\}.$$

Demonstração: Sejam $g \in A$ e $d \in (A')^2$. Temos dois casos a considerar: o primeiro se $g \notin A'$ ou $g \in (A')^2$, e o segundo, se $g \in A' \backslash (A')^2$.

Se $g \notin A'$ ou $g \in (A')^2$, temos que $gd \notin A'$ ou $gd \notin (A')^2$. Logo, $[z^{gd}, z]$ e $[z^g, z]$ são elementos de U_1. Portanto, $[z^{gd}, z]^8 [z^g, z]^8$ também pertence a U_1, sendo assim, trivial módulo U_3.

Se $g \in A' \backslash (A')^2$, então temos que:

$$\begin{array}{rcl} [z^{gd}, z]^8 U_2 & = & ([z, z^{(gd)^{-1}}]^{gd})^8 U_2 \\ & = & ([z, z^{(gd)^{-1}}])^8 U_2 \\ & = & ([z^{(gd)^{-1}}, z]^{-1})^8 U_2 \\ & = & [z^{(gd)^{-1}}, z]^8 U_2. \end{array}$$

Desta forma, $[z^g, z]^8 U_2 = [z^{g^{-1}}, z]^8 U_2$. Portanto é suficiente considerarmos $g \in T$. Diante disto, segue que U_3/U_2 é gerado por:

$$\{[z^{t_1}, z]^8 [z^{t_2}, z]^8 U_2\},$$

com $t_1, t_2 \in T$, $t_1 t_2^{-1} \in (A')^2$, e portanto $t_1 (A')^2 = t_2 (A')^2$. Pelo lema 3.7, temos que $B'U_2/U_2$ é abeliano livre de expoente 16, com base $\{[z^t, z]U_2 \mid t \in T\}$. Portanto, $(B')^8 U_2/U_2$ é 2-grupo abeliano elementar com base $\{[z^t, z]^8 U_2 \mid t \in T\}$. Observemos que:

$$\{t(A')^2 \mid t \in T\} = \{\overline{c} \in A'/(A')^2 \mid \overline{c} \neq 1\}.$$

Agora, $(B')^8U_2/U_3$ é um 2-grupo abeliano elementar com base:

$$\{[z^{\overline{c}},z]^8U_3 \mid \overline{c} \in A'/(A')^2, \overline{c} \neq 1\}.$$

Resta observar que $(B')^8U_2 = (B')^8U_3$. De fato, é fácil ver que $(B')^8U_2 \subset (B')^8U_3$, e se $g \in (B')^8U_3$, então $g = b^8u$, onde $b \in B'$ e $u \in U_3$. Mas $u = x^8.u'$, onde $x \in B'$ e $u' \in U_2$, portanto, $g = (b^8x^8)u' \in (B')^8U_2$. Logo $(B')^8U_2 = (B')^8U_3$. Assim, temos que $(B')^8U_3/U_3$ é um 2-grupo abeliano elementar com base $\{[z^{\overline{c}},z]^8U_3 \mid \overline{c} \in A'/(A')^2, \overline{c} \neq 1\}$. □

Lema 3.10. *Sejam* $z_1, z_2 \in B$, $a \in A$, $\overline{c} \in A'/(A')^2$. *Então*

$$[((z_1z_2)^{a^7}\dots(z_1z_2)^a(z_1z_2))^{\overline{c}}, z_1z_2]^8U_3 = [(z_1^{a^7}\dots z_1^a z_1)^{\overline{c}}, z_1]^8[(z_2^{a^7}\dots z_2^a z_2)^{\overline{c}}, z_2]^8U_3.$$

Demonstração: Primeiramente mostraremos que para todo $k = 1,2,\dots 7$, temos que $[z_2^{a^k\overline{c}}, z_1]^8U_3 = [z_1^{a^{-k}\overline{c}}, z_2]^8U_3$. De fato, se $z_1 = z^{h_1}z^{h_2}\dots z^{h_s}$ e $z_2 = z^{g_1}z^{g_2}\dots z^{g_r}$, onde r e s são inteiros positivos. Então

$$\begin{aligned}
[z_2^{a^k\overline{c}}, z_1]^8U_3 &= [(z^{g_1}z^{g_2}\dots z^{g_r})^{a^k\overline{c}}, z^{h_1}z^{h_2}\dots z^{h_s}]^8U_3 \\
&= \prod_{i,j}[z^{g_i a^k\overline{c}}, z^{h_j}]^8U_3 \\
&= \prod_{i,j}([z^{g_i}, z^{h_j(a^k\overline{c})^{-1}}]^{a^k\overline{c}})^8U_3, \text{ mas } \overline{c} = \overline{c}^{-1} \\
&= \prod_{i,j}[z^{g_i}, z^{h_j a^{-k}\overline{c}}]^8U_3 \\
&= \prod_{i,j}[z^{h_j a^{-k}\overline{c}}, z^{g_i}]^8U_3 \\
&= [(z^{h_1}z^{h_2}\dots z^{h_s})^{a^{-k}\overline{c}}, z^{g_1}z^{g_2}\dots z^{g_r}]^8U_3 \\
&= [z_1^{a^{-k}\overline{c}}, z_2]^8U_3.
\end{aligned}$$

Agora, temos que:

$$\begin{aligned}
[((z_1z_2)^{a^7}\dots(z_1z_2)^a(z_1z_2))^{\overline{c}}, z_1z_2]^8U_3 &= [(z_1^{a^7}z_2^{a^7}\dots z_1^a z_2^a z_1 z_2)^{\overline{c}}, z_1z_2]^8U_3 \\
&= [(z_1^{a^7\overline{c}}z_2^{a^7\overline{c}}\dots z_1^{a\overline{c}}z_2^{a\overline{c}}z_1^{\overline{c}}z_2^{\overline{c}}, z_1z_2]^8U_3 \\
&= \prod_{i=1}^{7}[z_1^{a^i\overline{c}}, z_1]^8[z_1^{a^i\overline{c}}, z_2]^8[z_2^{a^i\overline{c}}, z_1]^8[z_2^{a^i\overline{c}}, z_2]^8U_3.
\end{aligned}$$

Observamos que $[z_2^{a^i\bar{c}}, z_1]^8 = [z_1^{a^{-i}\bar{c}}, z_2]^8$. Assim,

$$\begin{aligned}
[((z_1z_2)^{a^7}\dots(z_1z_2)^a(z_1z_2))^{\bar{c}}, z_1z_2]^8U_3 &= \prod_{i=1}^{7}[z_1^{a^i\bar{c}}, z_1]^8[z_1^{a^i\bar{c}}, z_2]^8[z_1^{a^{-i}\bar{c}}, z_2]^8[z_2^{a^i\bar{c}}, z_2]^8U_3 \\
&= \prod_{i=1}^{7}[z_1^{a^i\bar{c}}, z_1]^8[z_2^{a^i\bar{c}}, z_2]^8U_3 \\
&= [(z_1^{a^7}\dots z_1^a z_1)^{\bar{c}}, z_1]^8[(z_2^{a^7}\dots z_2^a z_2)^{\bar{c}}, z_2]^8U_3.
\end{aligned}$$

□

Agora, terminaremos a construção do grupo G_n, para todo $n > 1$. Isto nos possibilitará a demonstração do teorema principal deste capítulo.

Seja n um inteiro positivo. Consideremos C_n o subconjunto de $A'/(A')^2$ consistindo de produtos de no máximo n comutadores. Seja D_n o subgrupo de B' contendo U_3, definido anteriormente, tal que D_n/U_3 é gerado pelo conjunto $\{[z^{\bar{c}}, z]^8U_3 \mid \bar{c} \in C_n\}$. Agora, definamos $G_n = W/D_n$.

3.2 O Teorema Principal

Nesta seção, mostraremos que a variedade centro-por-abeliano-por-nilpotente definida abaixo, não possui nenhuma base finita. Para isso, usaremos os fatos que foram demonstrados na seção anterior. O teorema a seguir, que é nosso principal resultado deste capítulo, foi demonstrado por Bryant e Krassilnikov [4] em 2000.

Sejam $u_n = u_n(x, x_1, \dots, x_{2n}) = [(x^8)^{[x_1,x_2][x_3,x_4]\dots[x_{2n-1},x_{2n}]}, x^8] \equiv 1$, $n = 1, 2, \dots$.

Teorema 3.11. *A variedade definida pelas identidades $u_n \equiv 1$, $n = 1, 2, \dots$ e pela identidade* (3.1)*, não possui base finita.*

Demonstração: Convém notar que $u_m \equiv 1$ é conseqüência de $u_n \equiv 1$, para qualquer $n \geq m$. Assim, por raciocínio análogo ao feito no capítulo anterior, para mostrar que o conjunto de identidades $\{v\} \cup \{u_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ não é conseqüência de nenhum subconjunto finito de identidades, é suficiente mostrar que $v \equiv 1$ e $u_n \equiv 1$ são identidades em G_n, mas $u_{n+1} \equiv 1$ não é identidade em G_n, para todo n inteiro positivo.

Seja n um inteiro positivo. Devemos observar que G_n satisfaz a identidade (3.1). De fato, como a identidade $[[x_1,x_2,x_3],[x_4,x_5,x_6],x_7] \equiv 1$ é satisfeita em W/U_2, temos que:

$$[[g_1,g_2,g_3],[g_4,g_5,g_6],g_7] \in U_2 \subset D_n,$$

para todo $g_i \in W$, $i = 1,2,\ldots,7$. Portanto G_n também satisfaz a identidade (3.1).

Agora, mostraremos que $u_n(G_n) = \{1\}$. Sejam $w, w_1, w_2, \ldots w_{2n} \in W$, onde $w = ab$, $w_i = a_ib_i$, $a_i \in A, b_i \in B$, $i = 1,2,\ldots 2n$. Temos que $w^8 = b^{a^7}b^{a^6}\ldots b^ab$. De fato,

$$w^2 = (ab)^2abab = a^2b^ab,$$

e portanto,

$$w^4 = (a^2b^ab)^2 = a^4(b^ab)^{a^2}b^ab = a^4b^{a^3}b^{a^2}b^ab.$$

Finalmente, temos que:

$$w^8 = a^8(b^{a^3}b^{a^2}b^ab)^{a^4}b^{a^3}b^{a^2}b^ab.$$

Como A tem expoente 8,

$$w^8 = b^{a^7}b^{a^6}\ldots b^ab.$$

Observemos que:

$$[w_i,w_{i+1}] = [a_ib_i,a_{i+1}b_{i+1}] = b_i^{-1}a_i^{-1}b_{i+1}^{-1}a_{i+1}^{-1}a_ib_ia_{i+1}b_{i+1} = [a_i,a_{i+1}]b,$$

onde $b \in B$. Logo,

$$[w_1,w_2][w_3,w_4]\ldots[w_{2n-1},w_{2n}] = [a_1,a_2][a_3,a_4]\ldots[a_{2n-1},a_{2n}]\tilde{b} = c\tilde{b},$$

com $\tilde{b} \in B$ e $c = [a_1,a_2][a_3,a_4]\ldots[a_{2n-1},a_{2n}]$. Agora, calculando $u_n(w,w_1,\ldots,w_{2n})$, obtemos:

$$\begin{aligned}
u_n(w,w_1,\ldots,w_{2n}) &= [(w^8)^{[w_1,w_2][w_3,w_4]\ldots[w_{2n-1},w_{2n}]},w^8] \\
&= [(b^{a^7}\ldots b^ab)^{[a_1,a_2][a_3,a_4]\ldots[a_{2n-1},a_{2n}]\tilde{b}},b^{a^7}\ldots b^ab] \\
&= [(b^{a^7}\ldots b^ab)^{c\tilde{b}},b^{a^7}\ldots b^ab] \\
&= [((b^{a^7}\ldots b^ab)^c)^{\tilde{b}},b^{a^7}\ldots b^ab] \\
&= [\tilde{b}^{-1}(b^{a^7}\ldots b^ab)^c\tilde{b},b^{a^7}\ldots b^ab] \\
&= [(b^{a^7}\ldots b^ab)^c[(b^{a^7}\ldots b^ab)^c,\tilde{b}],b^{a^7}\ldots b^ab] \\
&= [(b^{a^7}\ldots b^ab)^c,b^{a^7}\ldots b^ab][[(b^{a^7}\ldots b^ab)^c,\tilde{b}],b^{a^7}\ldots b^ab].
\end{aligned}$$

Como B é nilpotente de classe 2, o segundo termo do produto acima é trivial e consequentemente,

$$u_n(w,w_1,\ldots,w_{2n}) = [(b^{a^7}\ldots b^a b)^c, b^{a^7}\ldots b^a b].$$

Por outro lado, para cada $k = 1,2,\ldots 7$, temos

$$\begin{aligned}
[(b^{a^7}\ldots b^a b)^c, b^{a^k}]U_2 &= [(b^{a^7}\ldots b^a b)^c, b^{a^k}]^{a^{-k}}U_2\\
&= [(b^{a^7}\ldots b^a b)^{a^{-k}c}, b]U_2\\
&= [(b^{a^{7-k}}\ldots b^{a^{1-k}} b^{a^{-k}})^c, b]U_2\\
&= [(b^{a^7}\ldots b^a b)^c, b]U_2.
\end{aligned}$$

Diante disto,

$$\begin{aligned}
u_n(w,w_1,\ldots,w_{2n})D_n &= [(b^{a^7}\ldots b^a b)^{\overline{c}}, b^{a^7}\ldots b^a b]D_n\\
&= [(b^{a^7}\ldots b^a b)^{\overline{c}}, b^{a^7}]\ldots[(b^{a^7}\ldots b^a b)^{\overline{c}}, b^a][(b^{a^7}\ldots b^a b)^{\overline{c}}, b]D_n\\
&= [(b^{a^7}\ldots b^a b)^{\overline{c}}, b]^8 D_n,
\end{aligned}$$

onde $\overline{c} = c(A')^2$. Convém lembrar que se $b \in B$, então bD_n é um produto de elementos na forma $z^g D_n$, com $g \in A$. Mas pelo lema 3.10, temos que $[(b^{a^7}\ldots b^a b)^{\overline{c}}, b]^8 D_n$ é um produto de elementos na forma $[(z^{ga^7}\ldots z^{ga} z^g)^{\overline{c}}, z^g]^8 D_n$, com $g \in A$. Seja $a' = gag^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}
[(z^{ga^7}\ldots z^{ga} z^g)^{\overline{c}}, z^g]^8 D_n &= ([(z^{ga^7}\ldots z^{ga} z^g)^{\overline{c}}, z^g]^8)^{g^{-1}} D_n\\
&= [(z^{ga^7g^{-1}}\ldots z^{gag^{-1}} z^{gg^{-1}})^{\overline{c}}, z^{gg^{-1}}]^8 D_n\\
&= [(z^{(a')^7}\ldots z^{a'} z)^{\overline{c}}, z]^8 D_n.
\end{aligned}$$

Vamos separar nosso cálculo em dois casos:

1. Se $(a')^4 = 1$ então temos que:

$$\begin{aligned}
[(z^{(a')^7}\ldots z^{a'} z)^{\overline{c}}, z]^8 D_n &= [(z^{(a')^7} z^{(a')^6} z^{(a')^5} z^{(a')^4})^{\overline{c}}, z]^8 [(z^{(a')^3} z^{(a')^2} z^{a'} z)^{\overline{c}}, z]^8 D_n\\
&= [(z^{(a')^3} z^{(a')^2} z^{a'} z)^{\overline{c}}, z]^8 [(z^{(a')^3} z^{(a')^2} z^{a'} z)^{\overline{c}}, z]^8 D_n\\
&= [(z^{(a')^3} z^{(a')^2} z^{a'} z)^{\overline{c}}, z]^{16} D_n\\
&= D_n,
\end{aligned}$$

   pois B' tem expoente 16.

2. Caso contrário, se $(a')^4 \neq 1$, então $a' \notin A'$, pois A' tem expoente 4. Logo $(a')^k \notin A'$, $k = 1,2,\ldots,7$. Portanto, segue que $[z^{(a')^k c}, z] \in U_1$. De fato, $(a')^k \in A \backslash (A')$ e $c \in A'$, o que

implica que $(a')^k c \in A \backslash (A')$. Diante disso, temos que:

$$\begin{aligned}
[(z^{(a')^7} \dots z^{a'} z)^{\overline{c}}, z]^8 D_n &= [(z^{(a')^7} \dots z^{a'} z)^{\overline{c}}, z]^8 D_n \\
&= [z^{(a')^7 \overline{c}}, z]^8 \dots [z^{a' \overline{c}}, z]^8 [z^{\overline{c}}, z]^8 D_n.
\end{aligned}$$

Como $[z^{(a')^7 \overline{c}}, z]^8, \dots, [z^{a' \overline{c}}, z]^8, [z^{\overline{c}}, z]^8 \in U_1$, segue que:

$$[(z^{(a')^7} \dots z^{a'} z)^{\overline{c}}, z]^8 D_n = D_n.$$

Dos ítens 1 e 2, segue que $u_n(w, w_1, \dots, w_{2n}) D_n = D_n$, para todo $w, w_i \in W$, $i = 1, 2, \dots, 2n$, ou seja, $u_n \equiv 1$ é identidade em $W/D_n = G_n$, concluindo a primeira parte da demonstração do teorema.

Mostraremos agora que G_n não satisfaz a identidade $u_{n+1} \equiv 1$. Primeiramente, verificaremos que para todo m inteiro positivo, existe um elemento de $A'/(A')^2$ que não pode ser escrito como um produto de um número menor ou igual a m de comutadores em $A/(A')^2$. Para mostrar este fato, utilizaremos um argumento de contagem, como em [16]. Seja $A_k < A$, tal que $A_k = \langle y_1, y_2, \dots, y_k \rangle$. Assim, $A'_k/(A'_k)^2$ é um 2-grupo abeliano elementar com base $\{[y_i, y_j](A'_k)^2 \mid i > j\}$, que possui $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ elementos, logo $\mid A'_k/(A'_k)^2 \mid = 2^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Agora, se $g_i = g'_i \mod A^2$, então

$$[g_1, g_2] \dots [g_{2m-1}, g_{2m}](A')^2 = [g'_1, g'_2] \dots [g'_{2m-1}, g'_{2m}](A')^2.$$

De fato, temos que:

$$[g'_1, g'_2] \dots [g'_{2m-1}, g'_{2m}](A')^2 = [g_1 \delta_1, g_2 \delta_2] \dots [g_{2m-1} \delta_{2m-1}, g_{2m} \delta_{2m}](A')^2, \ \delta_i \in A^2.$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
[g'_i, g'_{i+1}](A')^2 &= [g_i \delta_i, g_{i+1} \delta_{i+1}](A')^2 \\
&= [g_i, g_{i+1}][\delta_i, g_{i+1}][g_i, \delta_{i+1}][\delta_i, \delta_{i+1}](A')^2 \\
&= [g_i, g_{i+1}](A')^2,
\end{aligned}$$

pois $[\delta_i, g_{i+1}]$, $[g_i, \delta_{i+1}]$, $[\delta_i, \delta_{i+1}] \in (A')^2$. Portanto,

$$[g'_1, g'_2] \dots [g'_{2m-1}, g'_{2m}](A')^2 = [g_1, g_2] \dots [g_{2m-1}, g_{2m}](A')^2.$$

Assim, o número de produtos na forma $[g_1, g_2] \dots [g_{2m-1}, g_{2m}](A')^2$ em $A_k/(A'_k)^2$ é menor ou igual a $\underbrace{2^k 2^k \dots 2^k}_{2m \text{ vezes}} = 2^{mk}$. Por outro lado, $\mid A'_k/(A'_k)^2 \mid = 2^{\frac{k(k-1)}{2}}$ e existem no máximo 2^{mk} elementos que podem ser escritos como produto de m comutadores. Assim, existe k_0, tal que para todo

$k > k_0$, $\frac{k(k-1)}{2} > mk$. Logo existe um elemento de $A'/(A')^2$ que não pode ser escrito como um produto de um número menor ou igual a m de comutadores em $A/(A')^2$.

Agora, mostraremos que $[y_1,y_2]\dots[y_{2n+1},y_{2n+2}](A')^2 \in A/(A')^2$, não pode ser escrito como um produto de um número menor ou igual a n de comutadores em $A/(A')^2$. Vamos supor por contradição que

$$[y_1,y_2]\dots[y_{2n+1},y_{2n+2}](A')^2 = [f_1,f_2]\dots[f_{2s-1},f_{2s}](A')^2,$$

com $s \leq n$. Como $A/(A')^2$ é relativamente livre com geradores livres $y_1(A')^2, y_2(A')^2, \dots$, temos que toda aplicação do conjunto de geradores $\{y_i(A')^2 \mid i = 1,2,\dots\}$ em $A/(A')^2$ pode ser estendida a um endomorfismo de $A/(A')^2$. Seja ψ uma aplicação do conjunto de geradores em $A/(A')^2$, tal que $\psi(y_i) = d_i, d_i$. Assim, temos que:

$$\psi([y_1,y_2]\dots[y_{2n+1},y_{2n+2}](A')^2) = \psi([f_1,f_2]\dots[f_{2s-1},f_{2s}](A')^2),$$

e portanto,

$$[d_1,d_2]\dots[d_{2n+1},d_{2n+2}])(A')^2 = [\psi(f_1),\psi(f_2)]\dots[\psi(f_{2s-1}),\psi(f_{2s})](A')^2.$$

Então, todo elemento de $A'/(A')^2$ que é escrito como produto de $n+1$ comutadores pode ser escrito como produto de no máximo n comutadores em $A/(A')^2$. Por indução, segue que todo elemento de $A'/(A')^2$ pode ser escrito em no máximo n comutadores em $A/(A')^2$. Um absurdo, pois mostramos que para todo m inteiro positivo, existe um elemento de $A'/(A')^2$ que não pode ser escrito como um produto de um número menor ou igual a m de comutadores em $A/(A')^2$. Desta forma, concluímos que $[y_1,y_2]\dots[y_{2n+1},y_{2n+2}](A')^2 \in A/(A')^2$, não pode ser escrito como produto de um número menor ou igual a n de comutadores em $A/(A')^2$, ou seja, $[y_1,y_2]\dots[y_{2n+1},y_{2n+2}](A')^2 \notin C_n$.

Vamos calcular $u_{n+1}(y_1z,y_1,y_2,\dots,y_{2n+2})$ em G_n. Recordemos que:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(y_1z,y_1,y_2,\dots,y_{2n+2}) &= [((y_1z)^8)^{[y_1,y_2]\dots[y_{2n+1},y_{2n+2}]},(y_1z)^8] \\ &= [(z^{y_1^7}\dots z^{y_1}z)^{[y_1,y_2]\dots[y_{2n+1},y_{2n+2}]}, z^{y_1^7}\dots z^{y_1}z] \\ &= \prod_{i,j=1}^{7} [z^{y_1^i[y_1,y_2]\dots[y_{2n+1},y_{2n+2}]}, z^{y_1^j}]. \end{aligned}$$

Notemos que se $i \neq j$, como $y_1 \notin A'$,

$$y_1^i [y_1, y_2] \dots [y_{2n+1}, y_{2n+2}] y_1^{-j} = y_1^{i-j} [y_1, y_2] \dots [y_{2n+1}, y_{2n+2}] \notin A'.$$

Portanto, $[z^{y_1^i [y_1, y_2] \dots [y_{2n+1}, y_{2n+2}]}, z^{y_1^j}] \in U_1$. Assim, segue que:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(y_1 z, y_1, y_2, \dots, y_{2n+2}) D_n &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^{7} [z^{y_1^i [y_1, y_2] \dots [y_{2n+1}, y_{2n+2}]}, z^{y_1^j}] D_n \\ &= [z^{[y_1, y_2] \dots [y_{2n+1}, y_{2n+2}]}, z]^8 D_n. \end{aligned}$$

Pelo que vimos acima, $[y_1, y_2] \dots [y_{2n+1}, y_{2n+2}] (A')^2 \notin C_n$. Logo, pelo lema 3.9 temos:

$$[z^{[y_1, y_2] \dots [y_{2n+1}, y_{2n+2}]}, z]^8 \notin D_n,$$

isto é, a identidade u_{n+1} não é satisfeita em G_n. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] S. I. Adian, *Infinite irreducible systems of group identities*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **190** (1970), 499–501.

[2] Y. A. Bahturin, *Basic structures of modern algebra*, Mathematics and its Applications, vol. 265, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[3] Y. A. Bahturin and A. Ju. Olshanskii, *Identities*, Translated in Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Algebra II, vol. 18, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991, 107-221.

[4] R. M. Bryant and A. N. Krasilnikov, *On certain non-finitely based varieties of groups*, Algebra (Moscow, 1998), de Gruyter, Berlin, 2000, 77–84.

[5] R. M. Bryant, *Some infinitely based varieties of groups*, J. Austral. Math. Soc. **16** (1973), 29–32, Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann. I.

[6] C. K. Gupta and A. N. Krasilnikov, *Some non-finitely based varieties of groups and group representations*, Internat. J. Algebra Comput. **5** (1995), no. 3, 343–365.

[7] ______, *The finite basis question for varieties of groups—some recent results*, Illinois J. Math. **47** (2003), no. 1-2, 273–283, Special issue in honor of Reinhold Baer (1902–1979).

[8] M. Hall Jr., *The theory of groups*, Chelsea Publishing Co., New York, 1976, Reprinting of the 1968 edition.

[9] M. I. Kargapolov and Ju. I. Merzljakov, *Fundamentals of the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 62, Springer-Verlag, New York, 1979, Translated from the second Russian edition by Robert G. Burns.

[10] E. I. Khukhro, *p-automorphisms of finite p-groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 246, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[11] Ju. G. Kleiman, *The basis of a product variety of groups. I, II*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **37** (1973), 95–97; ibid. **38** (1974), 475–483.

[12] A. N. Krasilnikov, *A non-finitely based variety of centre-by-abelian-by-nilpotent groups of exponent 8*, J. London Math. Soc. (2) **68** (2003), no. 2, 371–382.

[13] A. G. Kurosh, *Lectures in general algebra*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 70, Pergamon Press, Oxford, 1965.

[14] B. H. Neumann, *Identical relations in groups. I*, Math. Ann. **114** (1937), no. 1, 506–525.

[15] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[16] M. F. Newman, *Just non-finitely-based varieties of groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **4** (1971), 343–348.

[17] A. Ju. Olshanskii, *The finite basis problem for identities in groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970), 376–384.

[18] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 80, Springer-Verlag, New York, 1996.

[19] J. J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, fourth ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995.

[20] M. R. Vaughan-Lee, *Uncountably many varieties of groups*, Bull. London Math. Soc. **2** (1970), 280–286.