

Universidade de Brasília - UnB  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Teorema de Hilbert

por  
Bianka Carneiro Leandro

Brasília  
2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Resumo

Nesta dissertação<sup>1</sup> apresentamos três demonstrações da não existência de uma superfície completa  $M$ , com curvatura Gaussiana constante negativa, isometricamente imersa em  $\mathbb{R}^3$ . Estes resultados foram publicados em artigos de D. Hilbert, M. E. Holmgren, J. D. Moore e T. K. Milnor, em livros de J. J. Stoker, M. P. do Carmo e M. Spivak. Também apresentamos uma demonstração da existência de superfície não analítica com curvatura Gaussiana constante negativa admitindo em cada ponto regular as derivadas de qualquer ordem. Este resultado foi publicado em artigo por M. E. Holmgren.

<sup>1</sup>Palavras-chave: superfície completa; curvatura Gaussiana constante negativa; imersão.

# Abstract

In this work<sup>1</sup> we show three proofs of the non existence of a complete surface, with constant negative Gaussian curvature, isometrically immersed in  $\mathbb{R}^3$ . These results were published in papers by D. Hilbert, M. E. Holmgren, J. D. Moore and T. K. Milnor, in books by J. J. Stoker , M. P. do Carmo and M. Spivak. We also show that there exists a non analytic surface with constant negative Gaussian curvature which in each regular points has all its derivatives. This result was published in a paper by M. E. Holmgren.

<sup>1</sup>Key-words: complete surface; constant negative Gaussian curvature; immersion.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Resultados gerais de Geometria Diferencial e Riemanniana . . . . .	4
<b>2 Primeira Demonstração</b>	<b>9</b>
2.1 Alguns Resultados Importantes . . . . .	10
2.2 Demonstração do Teorema de Hilbert . . . . .	12
<b>3 Segunda Demonstração</b>	<b>17</b>
3.1 Resultados gerais de Geometria Diferencial . . . . .	17
3.2 Resultados de Equações Diferenciais e Cálculo Tensorial . . . . .	18
3.3 Resultados gerais de Formas Diferenciais . . . . .	20
3.4 Demonstração do Teorema de Hilbert usando triedro móvel . . . . .	24
<b>4 Terceira Demonstração</b>	<b>31</b>
<b>5 Existência de imersão local <math>C^\infty</math> que não é Analítica</b>	<b>42</b>
5.1 Resultados gerais de Análise Real e Equações Diferenciais Ordinárias .	42
5.2 Demonstração da existência de imersão local $C^\infty$ que não é analítica . .	47
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Introdução

Durante o século *XIX*, os matemáticos tentaram encontrar variedades Riemannianas bidimensionais completas, com curvatura Gaussiana constante negativa isometricamente imersa no  $\mathbb{R}^3$ , para representar o plano de Lobachewsky inteiro (plano onde, dada uma reta e um ponto fora dela, pode-se encontrar infinitas retas distintas passando pelo ponto e que sejam paralelas à reta dada). Mas no início do século *XX*, em 1901, D. Hilbert pôs fim a tal busca, mostrando que uma variedade Riemanniana bidimensional completa com curvatura Gaussiana constante negativa não pode ser isometricamente imersa em  $\mathbb{R}^3$ , ver [6]. Este ficou conhecido como o *Teorema de Hilbert*.

Neste trabalho, procuramos catalogar as diferentes demonstrações do *Teorema de Hilbert*. Nesta procura, deparamos-nos com algumas demonstrações, sendo que essencialmente existem somente duas demonstrações diferentes, a de D. Hilbert, ver [6], e a de M. E. Holmgren, ver [7]. As demais encontradas, ver [16], [10], [4] e [3], pouco diferem das iniciais. Assim, apresentamos neste trabalho três destas, ver [10], [3], [4], sendo que duas destas, [10] e [3], representam as duas demonstrações originais, e a terceira, [4], se destaca por utilizar a teoria de formas diferenciais. Todas, apesar de utilizarem técnicas diferentes, fizeram uso do fato de se poder parametrizar a superfície completa  $M$ , com curvatura Gaussiana constante negativa, por curvas assintóticas, formando uma rede de Tschebyscheff. E também utilizaram a equação de *sine-Gordon*,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \sin f, \quad (1)$$

onde  $f(u, v)$  é uma função diferenciável que representa o ângulo entre as curvas assintóticas. Esta equação está diretamente relacionada com superfícies de curvatura Gaussiana constante negativa.

A equação de *sine-Gordon* (1) aparece também no estudo de diversos fenômenos físicos e pertence a uma classe de equações não lineares de grande importância atual. A importância dessas equações em física deve-se ao fato de que têm soluções que se propagam sem perder a forma e emergem de uma colisão com tais soluções mantendo forma e velocidade.

No Capítulo 1, faremos um resumo sobre alguns tópicos de geometria diferencial e Riemanniana relacionados com o nosso trabalho. Estes resultados serão utilizados na demonstração dos principais resultados dos Capítulos 2 a 4.

No Capítulo 2, apresentaremos uma demonstração do *Teorema de Hilbert* que foi originalmente feita por M. E. Holmgren em 1902, ver [7], cuja idéia básica foi utilizada por T. K. Milnor, em [10], ver também [15] e [16]. Esta demonstração se baseia no estabelecimento de dois fatos:

**(A)** Suponha que a superfície completa, com curvatura Gaussiana constante negativa,  $M$  pode ser imersa em  $\mathbb{R}^3$ . Então existe uma rede de Tschebyscheff global  $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , de todo o plano  $\mathbb{R}^2$  em  $M$ , e uma função  $\omega$ , definida em todo  $\mathbb{R}^2$ , que fornece o ângulo entre as curvas coordenadas, que são curvas assintóticas, satisfazendo

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} = \sin \omega, \quad 0 < \omega < \pi.$$

**(B)** Não existe função  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} = D \sin \omega, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (2)$$

onde  $D > 0$  é uma constante qualquer.

Em outras palavras, o *Teorema de Hilbert* é demonstrado, mostrando que existe uma singularidade que tem distância finita de algum ponto fixo na superfície.

---

No Capítulo 3, apresentaremos uma demonstração do *Teorema de Hilbert*, ver [4], cuja idéia foi extraída da tese de J. D. Moore, ver [11], que utiliza o método do triedro móvel. Esta demonstração se baseia na construção de uma parametrização para a superfície completa  $M$ , com curvatura Gaussiana constante negativa, imersa em  $\mathbb{R}^3$ , por curvas assintóticas, chegando, com isso, que a área da superfície é finita. E para concluir a demonstração utiliza-se o fato da aplicação exponencial, neste caso, ter a propriedade de “aumentar comprimento”, chegando que a área da superfície é infinita. Em toda esta argumentação utiliza-se formas diferenciais.

No Capítulo 4, iremos apresentar a demonstração do *Teorema de Hilbert* que pode ser encontrada no livro de M. P. do Carmo, ver [3], ou de J. J. Stoker, ver [16]. A parte local desta demonstração é essencialmente igual à do trabalho original de Hilbert, ver [6], mas a parte global no entanto, é substancialmente diferente. Esta demonstração trata da existência de uma parametrização da superfície completa  $M$ , com curvatura Gaussiana constante negativa, por curvas assintóticas. Também utiliza-se do fato da superfície em questão ser globalmente isométrica ao plano hiperbólico  $H^2$ , que tem área infinita. Contudo, com a possibilidade de se parametrizar a superfície por curvas assintóticas, obtemos que esta tem área finita. Nesta demonstração utilizamos elementos da teoria clássica de Geometria Diferencial.

No Capítulo 5, exibiremos uma demonstração da existência de superfícies não analíticas com curvatura Gaussiana constante negativa admitindo em cada ponto regular as derivadas de qualquer ordem, de autoria de M. E. Holmgren, ver [7]. Para isso mostraremos que a equação de derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \sin w,$$

admite solução local  $C^\infty$ , mas que não é analítica.



# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, faremos um resumo sobre alguns tópicos relacionados com o nosso trabalho. Utilizaremos os resultados abaixo enunciados na demonstração dos principais resultados dos capítulos 2 a 4. Os conceitos e propriedades aqui mencionados são bem conhecidos, podendo ser encontrados nos livros clássicos de Geometria Diferencial e Riemanniana, tais como [3], [5].

### 1.1 Resultados gerais de Geometria Diferencial e Riemanniana

**Definição 1.1.** Uma variedade Riemanniana  $M$ , é denominada *completa* se, para todo  $p \in M$ , a aplicação exponencial,  $exp_p : V \subset T_pM \rightarrow M$ , está definida para todo  $v \in T_pM$ , isto é, se as geodésicas  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , que partem de  $p$ , estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definição 1.2.** Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de uma variedade Riemanniana  $M$ , com métrica  $\langle, \rangle$ , é uma *imersão* se a diferencial  $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_p\mathbb{R}^3$  é

injetiva. Se, além disso,

$$\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = \langle v, w \rangle_p,$$

$\forall v, w \in T_p M$ ,  $\varphi$  é dita uma *imersão isométrica*.

**Definição 1.3.** Um campo de direções  $r$ , num conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in U$  uma reta  $r(p)$  em  $\mathbb{R}^2$  passando por  $p$ .

**Definição 1.4.** Uma curva regular conexa  $C \subset U$  é uma *curva integral* de um campo de direções  $r$ , definido em  $U \subset \mathbb{R}^2$ , se  $r(q)$  é a reta tangente a  $C$  em  $q$ ,  $\forall q \in C$ .

**Teorema 1.1.** Seja  $X$  um campo de vetores  $C^\infty$  em  $M$  uma variedade bidimensional, com  $X(p) \neq 0$ . Então existe um sistema de coordenadas  $Y : U \rightarrow M$ ,  $Y(u_1, u_2)$ , na vizinhança de  $p$ , tal que  $X = \frac{\partial}{\partial u_1}$ , em  $U$ .

**Demonstração.** Ver [14], Teorema 7, página 205. ■

**Teorema 1.2.** Sejam  $X_1, X_2$  campos de vetores linearmente independentes em uma vizinhança do ponto  $p$  em uma superfície  $M$ . Então existe um difeomorfismo

$$h : U \rightarrow M,$$

onde  $U \subset \mathbb{R}^2$  é um aberto e  $p \in h(U)$ , cuja  $i$ -ésima curva coordenada é uma curva integral de  $X_i$ .

**Demonstração.** Ver [15], Teorema 17, página 321. ■

**Corolário 1.1.** Seja  $p$  um ponto de uma superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Se a curvatura Gaussiana em  $p$  é  $K(p) < 0$ , então existe um difeomorfismo  $h : U \rightarrow M$ , com  $p \in h(U)$ , onde as curvas coordenadas são linhas assintóticas.

**Demonstração.** Ver [15], Corolário 18, página 322. ■

Dada uma parametrização  $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  de uma vizinhança  $Y(U)$  na superfície  $M$  temos que as funções

$$E(u, v) = \langle Y_u, Y_u \rangle_p, \quad F(u, v) = \langle Y_u, Y_v \rangle_p, \quad G(u, v) = \langle Y_v, Y_v \rangle_p,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é o produto interno no plano tangente  $T_p M$  induzido pelo produto interno natural do  $\mathbb{R}^3$ , são os *coeficientes da primeira forma fundamental na base*  $\{Y_u, Y_v\}$  de  $T_p M$ . Temos também que dada esta parametrização, podemos escolher, para cada ponto de  $Y(U)$ , um vetor normal unitário

$$N(q) = \frac{Y_u \times Y_v}{|Y_u \times Y_v|}(q), \quad q \in Y(U).$$

Desta forma obtemos as funções

$$e = \langle N, Y_{uu} \rangle, \quad f = \langle N, Y_{uv} \rangle, \quad g = \langle N, Y_{vv} \rangle,$$

que são chamadas de *coeficientes da segunda forma fundamental na base*  $\{Y_u, Y_v\}$ .

**Proposição 1.1.** *Se as curvas coordenadas são linhas assintóticas temos,  $e = g = 0$ , e as equações de Codazzi-Mainardi são dadas por*

$$f_s = \frac{[\frac{1}{2}(EG - F^2)_s + FE_t - EG_s]}{EG - F^2} f$$

$$f_t = \frac{[\frac{1}{2}(EG - F^2)_t + FG_s - GE_t]}{EG - F^2} f.$$

**Demonstração.** Ver [15], Lema C, página 323. ■

**Definição 1.5.** Para toda variedade Riemanniana bidimensional  $M$  (não necessariamente imersa em  $\mathbb{R}^3$ ), uma parametrização  $h : (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$  é dita uma *rede de Tschebyscheff* se todas as curvas coordenadas são parametrizadas pelo comprimento de arco.

**Proposição 1.2.** *Quando as curvas coordenadas constituem uma rede de Tschebyscheff é possível reparametrizá-las de tal forma que*

$$E = G = 1 \quad e \quad F = \cos\theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre as curvas coordenadas.

**Demonstração.** Ver [3], página 100. ■

**Teorema 1.3.** *A curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície  $M$  é invariante por isometria local.*

**Demonstração.** Ver [3], página 234. ■

Dada uma parametrização  $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  de uma vizinhança  $Y(U)$  na superfície  $M$  obtemos a seguinte relação para a curvatura Gaussiana

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_s - (\Gamma_{11}^2)_t + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2, \quad (1.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_s - 2FF_s + FE_t}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_t - FG_s}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_t - GG_s - FG_t}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_s - EE_t - FE_s}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_s - FG_t}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_t - 2FF_t + FG_s}{2(EG - F^2)}, \end{aligned}$$

são os símbolos de Christoffel, e  $E, F, G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental de  $Y$ . A equação (1.1) é dita equação de Gauss.

**Teorema 1.4.** *Quaisquer duas superfícies que têm curvatura Gaussiana constante são localmente isométricas. Mais precisamente, sejam  $M_1, M_2$  duas superfícies com curvatura Gaussiana constante  $K$ . Escolha pontos  $p_1 \in M_1, p_2 \in M_2$ , e bases ortogonais  $e_1, e_2 \in T_{p_1}M_1, f_1, f_2 \in T_{p_2}M_2$ . Então existem vizinhanças  $V_1$  de  $p_1, V_2$  de  $p_2$  e uma isometria  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  tal que  $d\psi(e_1) = f_1, d\psi(e_2) = f_2$ .*

**Demonstração.** Ver [3], Teorema *Minding*, página 288.

■

**Proposição 1.3.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa e seja  $f : M \rightarrow N$  um difeomorfismo local sobre uma variedade Riemanniana  $N$  que possui a seguinte propriedade: para todo  $p \in M$  e todo  $v \in T_pM$ , tem-se  $|df_p(v)| \geq |v|$ . Então  $f$  é uma aplicação de recobrimento.*

**Demonstração.** Ver [5], Lema 3.3, página 150.

■

# Capítulo 2

## Primeira Demonstração

Neste capítulo, apresentaremos uma demonstração do *Teorema de Hilbert* que foi originalmente feita por M. E. Holmgren em 1902, ver [7], cuja idéia básica foi utilizada por T. K. Milnor, em [10], ver também [15] e [16]. Esta demonstração se baseia no estabelecimento de dois fatos:

(A) Suponha que a superfície completa, com curvatura Gaussiana constante negativa,  $M$  pode ser imersa em  $\mathbb{R}^3$ . Então existe uma rede de Tschebyscheff global  $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , de todo o plano  $\mathbb{R}^2$  em  $M$ , e uma função  $\omega$ , definida em todo  $\mathbb{R}^2$ , que fornece o ângulo entre as curvas coordenadas, que são curvas assintóticas, satisfazendo

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} = \sin \omega, \quad 0 < \omega < \pi.$$

(B) Não existe função  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} = D \sin \omega, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (2.1)$$

onde  $D > 0$  é uma constante qualquer.

Em outras palavras, o *Teorema de Hilbert* é demonstrado, mostrando que existe uma singularidade que tem distância finita de algum ponto fixo na superfície.

## 2.1 Alguns Resultados Importantes

Nesta seção apresentaremos alguns resultados, com suas respectivas demonstrações, de suma importância para a demonstração do *Teorema de Hilbert* que será apresentada neste capítulo. Como por exemplo, a existência de uma rede de Tschebyscheff em uma superfície do  $\mathbb{R}^3$ , com curvatura Gaussiana constante negativa.

**Lema 2.1.** *Seja  $M$  uma superfície imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura Gaussiana constante  $K < 0$ . Então para cada  $p \in M$  existe um difeomorfismo  $h : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \in \mathbb{R}^3$ ,  $h(0, 0) = p$ , cujas curvas coordenadas são linhas assintóticas parametrizadas pelo comprimento de arco.*

**Demonstração.** Do Corolário 1.1 temos que para cada  $p \in M$  existe um difeomorfismo sobre a imagem,  $h : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , com  $h(0, 0) = p$ , tal que as curvas coordenadas são linhas assintóticas. Por uma reparametrização adequada obtemos duas curvas coordenadas passando por  $p = h(0, 0)$  que são parametrizadas pelo comprimento de arco. Assim temos

$$E(s, 0) = 1, G(0, t) = 1. \quad (2.2)$$

Agora vamos provar que todas as curvas coordenadas estão parametrizadas pelo comprimento de arco. De fato, temos pela Proposição 1.1 que as equações de Mainardi-Codazzi podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (f^2)_s &= 2 \frac{[\frac{1}{2}(EG - F^2)_s + FE_t - EG_s]}{EG - F^2} f^2, \\ (f^2)_t &= 2 \frac{[\frac{1}{2}(EG - F^2)_t + FG_s - GE_t]}{EG - F^2} f^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pela equação de Gauss temos que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-f^2}{EG - F^2},$$

logo  $f^2 = (-K)(EG - F^2)$ , onde  $K$  é uma constante. Substituindo  $f^2$  na primeira

equação de (2.3), obtemos

$$(-K)(EG - F^2)_s = 2(-K)\left[\frac{1}{2}(EG - F^2)_s + FE_t - EG_s\right],$$

que reduz-se a

$$EG_s - FE_t = 0.$$

Analogamente, substituindo  $f^2$  na segunda equação de (2.3), temos

$$-FG_s + GE_t = 0.$$

Como  $EG - F^2 \neq 0$  (determinante da matriz dos coeficientes da primeira forma fundamental), o sistema de equações lineares é satisfeito somente se  $E_t = 0$  e  $G_s = 0$ . Juntamente com (2.2), concluimos que  $E = 1$  e  $G = 1$ ,  $\forall p \in M$ . ■

O Lema 2.1 mostra que sempre existe uma rede de Tschebyscheff local em superfícies do  $\mathbb{R}^3$ , com curvatura Gaussiana constante negativa.

**Lema 2.2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana bidimensional e seja  $h : (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$  uma rede de Tschebyscheff. Defina uma aplicação diferenciável  $\omega : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada ponto  $(s_0, t_0)$  associa o único número  $\omega(s_0, t_0)$  tal que  $0 < \omega(s_0, t_0) < \pi$ , e  $\omega(s_0, t_0)$  é o ângulo entre*

$$\left. \frac{d}{ds} h(s, t_0) \right|_{s=s_0} \text{ e } \left. \frac{d}{dt} h(s_0, t) \right|_{t=t_0}.$$

Então  $\omega$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} = -K \sin \omega. \quad (2.4)$$

**Demonstração.** Temos pela Proposição 1.2 que podemos considerar  $E = G = 1$ ,  $F = \cos \omega$  e  $W = EG - F^2 = \sin^2 \omega$ . E temos que  $W \neq 0$ , pois a métrica é positiva definida. Usando a equação de Gauss (1.1) obtemos

$$-K = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{-\sin \omega \frac{\partial \omega}{\partial s}}{W} \right) + \left( \frac{-\sin \omega \frac{\partial \omega}{\partial s}}{W} \right) \left( \frac{-\sin \omega \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial t}}{W} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t}.$$



Assim

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} = -K \sin \omega.$$

■

A equação diferencial (2.4) é dita equação de *sine-Gordon*.

Uma *rede de Tschebyscheff assintótica* é uma rede de Tschebyscheff construída como no Lema 2.1, cujas curvas coordenadas são linhas assintóticas.

## 2.2 Demonstração do Teorema de Hilbert

Nesta seção apresentaremos a demonstração do *Teorema de Hilbert*.

**Teorema 2.1.** *Uma superfície completa  $M$ , com curvatura Gaussiana constante  $K < 0$ , não pode ser isometricamente imersa em  $\mathbb{R}^3$ .*

**Demonstração.** Sem perda de generalidade assumiremos que a curvatura Gaussiana  $K \equiv -1$ . Esta demonstração dependerá do estabelecimento de dois fatos:

(A) Suponha que  $M$  pode ser imersa em  $\mathbb{R}^3$ . Então existe uma rede de Tschebyscheff global  $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , de todo o plano  $\mathbb{R}^2$  em  $M$ , e uma função  $\omega$ , definida em todo  $\mathbb{R}^2$ , que fornece o ângulo entre as curvas coordenadas, que são curvas assintóticas, satisfazendo

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} = \sin \omega, \quad 0 < \omega < \pi.$$

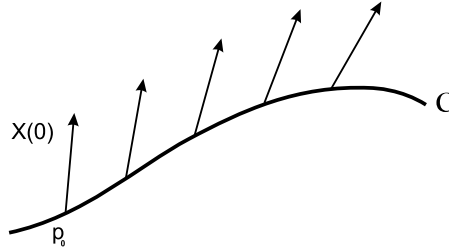
(B) Não existe função  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} = D \sin \omega, \quad 0 < \omega < \pi, \quad (2.5)$$

onde  $D > 0$  é uma constante qualquer.

**Prova de (A):** Escolha um ponto  $p_0 \in M$ . Considere  $C : \mathbb{R} \rightarrow M$  uma linha assintótica, parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , com  $C(0) = p_0$ . Esta pode ser realmente definida para todo  $\mathbb{R}$ , uma vez que  $C$  é uma curva integral de um campo

de vetores unitários e  $M$  é completa. Seja  $X(0)$  um vetor unitário assintótico em  $p_0$ , linearmente independente com  $C'(0)$ , e seja  $X(s)$  o campo contínuo de vetores  $X$  ao longo de  $C$ , tal que  $X(s) \in T_{C(s)}M$  é um vetor unitário assintótico linearmente independente com  $C'(s)$ .



Agora definimos  $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  tal que:

$$n(s, t) = \gamma_s(t),$$

onde  $\gamma_s$  é a única linha assintótica, parametrizada pelo comprimento de arco, com  $\gamma_s(0) = C(s)$  e  $\gamma'_s(0) = X(s)$ .

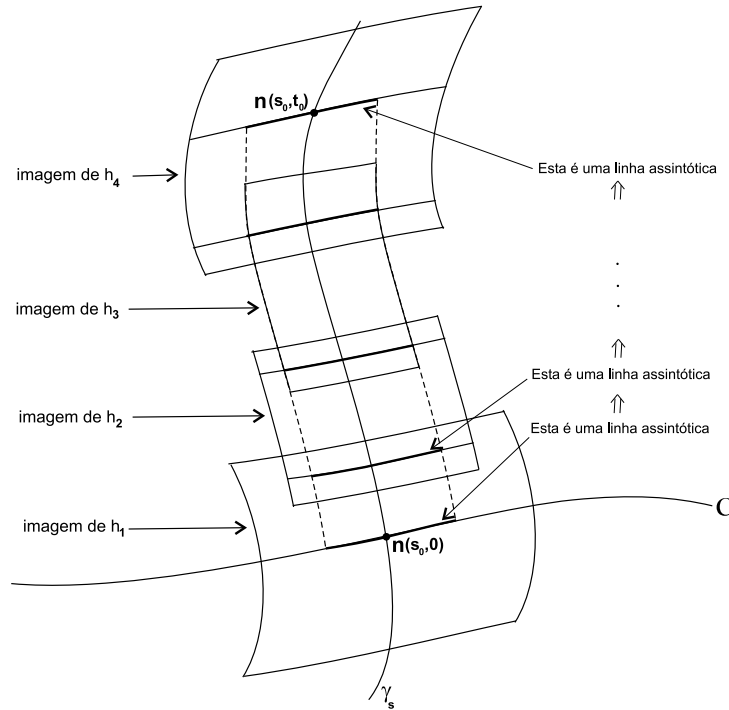
Temos que mostrar que cada curva  $s \mapsto n(s, t)$  é uma linha assintótica. Isto depende da existência, garantida pelo Lema 2.1, das redes de Tschebyscheff  $h : (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  na vizinhança de cada ponto.

Para cada  $(s_0, t_0)$  podemos encontrar um número finito de redes de Tschebyscheff assintóticas  $h_1, h_2, \dots, h_k$ , cujas imagens cobrem  $\{n(s_0, t); 0 \leq t \leq t_0\}$ . Organizando as funções  $h_i$  como na figura abaixo, essas imagens consecutivas se sobrepõem, notando que  $s \mapsto n(s, 0)$  é por definição uma linha assintótica, vemos que  $s \mapsto n(s, t_0)$  é uma linha assintótica para  $s$ , suficientemente próximo de  $s_0$ , que é o que necessitamos.

Nossa equação para  $\omega$  segue imediatamente do Lema 2.2.

**Prova de (B):** Suponha que uma função  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaça (2.5), para uma constante  $D > 0$ . Conseqüentemente

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial t} > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (2.6)$$



Isto implica que  $\frac{\partial \omega}{\partial s}$  é crescente com relação a  $t$ , isto é,

$$\frac{\partial}{\partial s} \omega(s, t) > \frac{\partial}{\partial s} \omega(s, 0), \quad \text{para } t > 0. \quad (2.7)$$

Conseqüentemente, para  $t > 0$  temos

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \omega(s, t) ds > \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \omega(s, 0) ds,$$

isto é,

$$\omega(b, t) - \omega(a, t) > \omega(b, 0) - \omega(a, 0), \quad (2.8)$$

para  $t > 0$  e  $a < b$ .

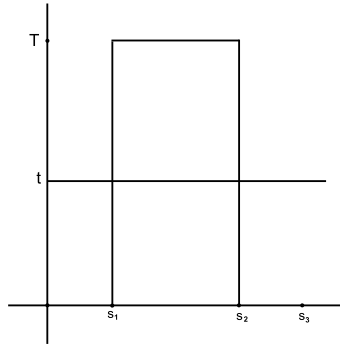
Como não podemos ter  $\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0$  em toda parte, podemos assumir (mudando nossas coordenadas por uma translação se necessário) que  $\frac{\partial \omega}{\partial s}(0, 0) \neq 0$ . Como a função  $(s, t) \mapsto \omega(-s, -t)$  também satisfaz (2.5), assumiremos que  $\frac{\partial \omega}{\partial s}(0, 0) > 0$ .

Escolha três números fixos

$$0 < s_1 < s_2 < s_3, \text{ tal que } \frac{\partial \omega}{\partial s}(s, 0) > 0, \text{ para } 0 \leq s \leq s_3, \quad (2.9)$$

e seja

$$\epsilon = \min\{\omega(s_3, 0) - \omega(s_2, 0), \omega(s_1, 0) - \omega(0, 0)\}.$$



Então para todo  $t > 0$  e todo  $s \in [0, s_3]$  temos as seguintes propriedades:

- de (2.7) e (2.9) temos que  $\omega(s, t)$  é crescente em  $s$ ;
- de (2.8) e da definição de  $\epsilon$  temos que  $\omega(s_1, t) - \omega(0, t) > \epsilon$  e  $\omega(s_3, t) - \omega(s_2, t) > \epsilon$ ;
- $0 < \omega(s, t) < \pi$ .

Dessas propriedades concluímos que

$$\epsilon \leq \omega(s, t) \leq \pi - \epsilon, \quad \text{para } s \in [s_1, s_2] \text{ e } t \geq 0.$$

Portanto

$$\sin \omega(s, t) \geq \sin \epsilon, \quad \text{para } s \in [s_1, s_2] \text{ e } t \geq 0. \quad (2.10)$$

Integrando (2.5) no retângulo  $[s_1, s_2] \times [0, T]$ , obtemos

$$\begin{aligned} D \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \sin \omega(s, t) ds dt &= \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \omega(s, t) ds dt \\ &= \omega(s_2, T) - \omega(s_1, T) - \omega(s_2, 0) + \omega(s_1, 0), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\omega(s_2, T) - \omega(s_1, T) &= \omega(s_2, 0) - \omega(s_1, 0) + D \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \sin \omega(s, t) ds dt \\ &\geq \omega(s_2, 0) - \omega(s_1, 0) + DT(s_2 - s_1) \sin \epsilon, \quad \text{por (2.10)}.\end{aligned}$$

Considerando  $T$  suficientemente grande, obtemos uma contradição, visto que o lado esquerdo é menor que  $\pi$  e o lado direito fica maior que  $\pi$ .

■

Observamos que esta demonstração do *Teorema de Hilbert* coincide essencialmente com a apresentada por M. E. Holmgren em 1902, ver [7].

# Capítulo 3

## Segunda Demonstração

Neste capítulo, apresentaremos uma demonstração do *Teorema de Hilbert*, ver [4], cuja idéia foi extraída da tese de J. D. Moore, ver [11], que utiliza o método do triedro móvel. Esta demonstração se baseia na construção de uma parametrização para a superfície completa  $M$ , com curvatura Gaussiana constante negativa, imersa em  $\mathbb{R}^3$ , por curvas assintóticas, chegando, com isso, que a área da superfície é finita. E para concluir a demonstração utiliza-se o fato da aplicação exponencial, neste caso, ter a propriedade de “aumentar comprimento”, chegando que a área da superfície é infinita. Em toda esta argumentação utiliza-se formas diferenciais.

### 3.1 Resultados gerais de Geometria Diferencial

Nesta seção enunciamos as definições de campo de Jacobi e pontos conjugados, e apresentamos um resultado sobre o conjunto dos pontos conjugados de uma superfície com curvatura Gaussiana  $K \leq 0$ . E também apresentamos o resultado de que a aplicação exponencial possui a propriedade de “aumentar comprimento”.

**Definição 3.1.** Seja  $g : [0, l] \rightarrow M$  uma geodésica parametrizada de  $M$ , e  $\nu : [0, l] \times (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma variação de  $g$ , tal que para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  a curva  $\nu_t(s) =$

$\nu(s, t)$ ,  $s \in [0, l]$ , é uma geodésica parametrizada (não necessariamente parametrizada pelo comprimento de arco). O campo variacional  $\frac{\partial \nu}{\partial t}(s, 0) = J(s)$  é chamado um *campo de Jacobi ao longo de  $g$* .

**Definição 3.2.** Seja  $g : [0, l] \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$ , com  $g(0) = p$ . Diz-se que o ponto  $q = g(s_0)$ ,  $s_0 \in (0, l]$ , é *conjugado de  $p$ , relativamente à geodésica  $g$* , se existe um campo de Jacobi  $J(s)$ , não identicamente nulo, ao longo de  $g$ , com  $J(0) = J(s_0) = 0$ .

**Teorema 3.1.** *Se a curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície  $M$  é tal que  $K \leq 0$ , então para todo  $p \in M$ , o conjunto dos pontos conjugados de  $p$  é vazio. Em particular,  $\forall p \in M$ , a aplicação  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo local.*

**Demonstração.** Ver [2], Teorema 4, página 72. ■

**Proposição 3.1.** *Seja  $M$  uma superfície completa com curvatura Gaussiana  $K \leq 0$ . Então  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ,  $p \in M$ , possui a propriedade de “aumentar comprimentos”, isto é, se  $v, \omega \in T_p M$ , temos*

$$\langle (d\exp_p)_v(\omega), (d\exp_p)_v(\omega) \rangle \geq \langle \omega, \omega \rangle,$$

onde,  $\omega$  indica um vetor de  $T_p M$ .

**Demonstração.** Ver [2], Lema 2, página 100. ■

## 3.2 Resultados de Equações Diferenciais e Cálculo Tensorial

Nesta seção fornecemos a definição de trajetória de um campo, fluxo gerado por um campo e alguns resultados de equações diferenciais ordinárias e de cálculo tensorial envolvendo estes elementos.

Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto. Um campo vetorial de classe  $C^r$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , em  $U$ , é uma aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$ . Ao campo vetorial  $X$  associamos uma equação diferencial

$$x'(t) = X(x(t)). \quad (3.1)$$

As soluções da equação (3.1), isto é, as aplicações diferenciáveis  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)),$$

para todo  $t \in I$ , são chamadas *trajetórias do campo  $X$* .

**Teorema 3.2.** *Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Para cada  $x \in U$  existe um intervalo aberto  $I_x$ , onde está definida uma única trajetória  $t \mapsto \varphi_t(x)$ ,  $t \in I_x$ , do campo  $X$  passando por  $x$ . O conjunto  $D = \{(t, x); x \in U, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $(t, x) \mapsto \varphi_t = \varphi(t, x)$  é de classe  $C^r$ .*

**Demonstração.** Ver [13], Teorema 3, página 215. ■

**Definição 3.3.** A aplicação  $\varphi : D \rightarrow U$ , onde  $D$  é o conjunto citado no Teorema 3.2, é dito o *fluxo gerado pelo campo  $X$* .

**Teorema 3.3.** *Sejam  $X, Z$  campos vetoriais de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , sobre uma variedade  $M$ . Indiquemos com  $\xi_s$  e  $\eta_t$ , respectivamente, os fluxos gerados por estes campos. Se o Colchete de Lie,  $[X, Z]$ , é identicamente nulo em  $M$ , então  $\xi_s \eta_t = \eta_t \xi_s$ , isto é,  $\xi_s(\eta_t(p)) = \eta_t(\xi_s(p))$ ,  $\forall p \in M$ .*

**Demonstração.** Ver [8], Teorema 3, página 217. ■

**Teorema 3.4.** *Sejam  $X_1, \dots, X_k$  campos vetoriais de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , tais que  $[X_i, X_j] = 0$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ , sobre uma variedade  $M$ . Seja  $p \in M$  um ponto tal que os vetores*



$X_1(p), \dots, X_k(p)$  são linearmente independentes. Então existe um sistema de coordenadas  $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^r$ , com  $p \in U$ , tal que  $X_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, X_k = \frac{\partial}{\partial u_k}$ , em todos os pontos de  $U$ , onde  $u_1, \dots, u_k$  são as coordenadas em  $U$ .

**Demonstração.** Ver [8], Teorema 4, página 219. ■

### 3.3 Resultados gerais de Formas Diferenciais

Nesta seção apresentamos resultados clássicos de formas diferenciais como as equações de estrutura, equação de Gauss e equações de Codazzi. Também definimos variedade diferenciável contrátil e enunciamos um resultado envolvendo variedade contrátil e forma diferencial.

Consideremos o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  e denotemos por  $\mathbb{R}^{2*}$  o espaço dual de  $\mathbb{R}^2$ . Dada uma base  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ , definimos uma base  $\{f_1, f_2\}$  de  $\mathbb{R}^{2*}$ , por  $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , chamada base dual de  $\{e_1, e_2\}$ .

Denotaremos por  $q = (u, v)$  os pontos do aberto  $V \subset \mathbb{R}^2$  e  $\frac{\partial}{\partial u} = (1, 0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial v} = (0, 1)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Denotemos também por  $u$  e  $v$  as projeções de  $V$  na primeira e segunda coordenada, respectivamente. Para cada  $q \in V$  as diferenciais de  $u$  e  $v$  em  $q$ ,  $du_q, dv_q$  formam a base dual canônica de  $\mathbb{R}^{2*}$ .

Uma 1-forma ou uma forma de grau 1 em um aberto  $V$  de  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $w$ , que para cada  $q \in V$  associa  $w_q \in \mathbb{R}^{2*}$ . Portanto,  $w_q$  é do tipo

$$w_q = P(q)du_q + Q(q)dv_q,$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções de  $V$  em  $\mathbb{R}$ . Além disso,  $w$  é dita uma 1-forma diferencial em  $V$ , se  $P$  e  $Q$  são diferenciáveis.

Se denotarmos por  $du$  e  $dv$  as aplicações que para cada  $q \in V$  associam  $du_q$  e  $dv_q$ , temos que  $du$  e  $dv$  são 1-forma diferenciais.

A soma de 1-forma diferenciais é definida como soma de funções.

Se  $w$  é uma 1-forma diferencial em um aberto  $V \subset \mathbb{R}^2$  e  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, o produto  $fw$  é uma 1-forma diferencial dada por  $(fw)_q = f(q)w_q$ .

Se  $w$  e  $\bar{w}$  são 1-formas diferenciais em um aberto  $V \subset \mathbb{R}^2$ , denotaremos o produto tensorial de  $w$  e  $\bar{w}$  por  $w\bar{w}$ , e o produto exterior por  $w \wedge \bar{w}$ . Em particular  $du^2 = dud u$  e  $dv^2 = dv dv$ .

Uma 2-forma diferencial ou uma forma diferencial de grau 2 em um aberto  $V \subset \mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $\phi$ , que para cada  $q \in V$ , associa uma transformação  $\phi_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , bilinear e alternada dada por

$$\phi_q = f(q)(du \wedge dv)_q,$$

onde  $f$  é uma função diferenciável de  $V$  em  $\mathbb{R}$ .

Uma função diferenciável  $f : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V$  aberto, é dita uma 0-forma diferencial em  $V$ . A diferencial de uma 0-forma diferencial é uma 1-forma diferencial.

Se  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  são formas diferenciais de grau 1 (respectivamente de grau 2),

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n),$$

é uma n-upla de 1-formas diferenciais (respectivamente de 2-formas diferenciais).

Se  $w = Pdu + Qdv$  é uma 1-forma diferencial. A diferencial exterior de  $w$ , denotada por  $dw$ , é uma 2-forma diferencial definida por  $dw = dP \wedge du + dQ \wedge dv$ .

As propriedades do produto tensorial, produto exterior e diferencial exterior (inclusive das n-uplas de formas diferenciais) podem ser encontradas em [4].

Agora vamos considerar variedades Riemannianas bidimensionais imersas isometricamente no espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ ,  $V$  um aberto, uma superfície parametrizada regular em  $\mathbb{R}^3$ . Denotemos por  $T_{Y(q)}\mathbb{R}^3$  e  $T_{Y(q)}M$  os espaços tangentes a  $\mathbb{R}^3$  e a  $M$  em  $Y(q)$  respectivamente. Sejam  $e_1, e_2, e_3 : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{Y(q)}\mathbb{R}^3$  campos diferenciáveis de vetores

ortonormais tais que  $e_1$  e  $e_2$  são tangentes a  $M$  e portanto  $e_3$  é normal a  $M$ . Nas condições acima  $e_1, e_2$  e  $e_3$  é dito um triedro móvel associado à superfície parametrizada regular  $Y$ .

Consideremos as aplicações lineares

$$dY_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{Y(q)}M \subset \mathbb{R}^3,$$

$$(de_i)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Vamos definir 1-formas diferenciais  $w_1, w_2, w_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$  em  $V$  do seguinte modo: para cada  $q \in V$ ,  $(w_1)_q, (w_2)_q, (w_{ij})_q$  são os funcionais de  $\mathbb{R}^{2*}$  que para cada  $v \in \mathbb{R}^2$  associam respectivamente

$$(w_i)_q(v) = \langle dY_q(v), e_i(q) \rangle, \quad i = 1, 2,$$

$$(w_{ij})_q(v) = \langle de_{iq}(v), e_j(q) \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

onde  $\langle, \rangle$  denota o produto interno usual do  $\mathbb{R}^3$ .

Como  $dY_q(\mathbb{R}^2) = T_{Y(q)}M$  e  $e_1, e_2$  formam uma base ortonormal deste plano tangente, segue-se das definições acima que, para cada  $v \in \mathbb{R}^2$ ,

$$dY_q(v) = (w_1)_q(v)e_1(q) + (w_2)_q(v)e_2(q).$$

Analogamente, como  $(de_i)_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$  temos que  $e_1, e_2$  e  $e_3$  formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  e portanto

$$(de_i)_q(v) = \sum_{j=1}^3 (w_{ij})_q(v)e_j(q), \quad i = 1, 2, 3.$$

Em termos de formas diferenciais, podemos então denotar as expressões acima por

$$w_i = \langle dY, e_i \rangle, \quad i = 1, 2,$$

$$w_{ij} = \langle de_i, e_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

$$dY = w_1e_1 + w_2e_2,$$

$$de_i = \sum_{j=1}^3 e_j w_{ij}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Dizemos que  $w_1, w_2$  é o coreferencial do triedro móvel associado à superfície e as formas  $w_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$ , são denominadas formas de conexão do triedro.

**Proposição 3.2.** *Nas condições acima temos que*

$$w_{ij} = -w_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad (3.2)$$

$$dw_1 = w_{12} \wedge w_2, \quad (3.3)$$

$$dw_2 = w_{21} \wedge w_1, \quad (3.4)$$

$$dw_{12} = w_{13} \wedge w_{32}, \quad (3.5)$$

$$dw_{31} = w_{32} \wedge w_{21}, \quad (3.6)$$

$$dw_{32} = w_{31} \wedge w_{12}, \quad (3.7)$$

$$w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23} = 0. \quad (3.8)$$

**Demonstração.** Ver [17], Proposição 2.2, página 244.

■

As equações de (3.2) a (3.8) são ditas *equações de estrutura*, a equação (3.5) é dita *equação de Gauss*, e as equações (3.6) e (3.7) são chamadas *equações de Codazzi*.

**Teorema 3.5.** *Uma superfície  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  tem curvatura Gaussiana constante  $K$  se, e somente se,*

$$dw_{12} = -K w_1 \wedge w_2. \quad (3.9)$$

**Demonstração.** Ver [17], Proposição 2.6, página 253.

■

**Proposição 3.3.** *Sejam  $X, Z$  campos de vetores diferenciáveis e  $\theta$  uma 1-forma diferencial, então*

$$d\theta(X, Z) = X\theta(Z) - Z\theta(X) - \theta[X, Z], \quad (3.10)$$

onde  $[X, Z]$  é o colchete de Lie dos campos  $X, Z$ .

**Demonstração.** Ver [8].

■

**Definição 3.4.** Uma variedade diferenciável  $M$  é *contrátil* (a um ponto  $p_0 \in M$ ) se existir uma aplicação diferenciável  $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $H(p, t) \in M$ ,  $p \in M$ ,  $t \in [0, 1]$ , tal que:

$$H(p, 1) = p, \quad H(p, 0) = p_0,$$

para todo  $p \in M$ .

**Teorema 3.6.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável contrátil e  $w$  uma 1-forma diferencial em  $M$ , com  $dw = 0$ . Então existe uma 0-forma  $\alpha$  em  $M$  tal que  $d\alpha = w$ .*

**Demonstração.** Ver [4], Teorema 1, página 110.

■

## 3.4 Demonstração do Teorema de Hilbert usando triedro móvel

Nesta seção apresentaremos uma demonstração do *Teorema de Hilbert* usando o método do triedro móvel, cuja idéia foi extraída da tese de J. D. Moore, ver [11] e [4].

**Observação 3.1.** Seja  $M$  uma superfície orientada contida em  $\mathbb{R}^3$  sem pontos umbílicos. Então a diferencial da aplicação normal de Gauss,  $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ ,  $p \in M$ , possui dois valores próprios  $k_1$  e  $k_2$ , em  $p \in M$ , e um par de autovetores ortonormais  $e_1, e_2$ .

Sendo que  $e_1, e_2$  são chamadas direções principais e  $-k_1, -k_2$  são ditas curvaturas principais.

**Lema 3.1.** *Seja  $M$  uma superfície contida em  $\mathbb{R}^3$ , sem pontos umbílicos,  $e_1$  e  $e_2$  as direções principais, e  $-k_1, -k_2$  as curvaturas principais. Seja  $\{w_1, w_2\}$  o coreferencial dual do referencial  $\{e_1, e_2\}$  e  $w_{12}$  a forma de conexão associada a  $\{e_1, e_2\}$ . Então*

$$(k_1 - k_2)w_{12} = dk_1(e_2)w_1 + dk_2(e_1)w_2. \quad (3.11)$$

Além disso, se a curvatura Gaussiana de  $M$  é constante e negativa, e  $E_1 = xe_1 + ye_2$ ,  $E_2 = xe_1 - ye_2$  são campos unitários, onde  $x > 0$  e  $y > 0$ , então

$$w_{12} = -\frac{dx(e_2)}{x}w_1 + \frac{dy(e_1)}{y}w_2. \quad (3.12)$$

**Demonstração.** Consideremos em  $M$  o referencial ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , onde  $e_3 = e_1 \wedge e_2$ . Denotemos por  $w_{ij}$  as formas de conexão associadas a este referencial. Considerando  $z = z_1e_1 + z_2e_2$ , temos

$$\begin{aligned} w_{31}(z) &= \langle \nabla_z e_3, e_1 \rangle \\ &= z_1 k_1 = k_1 w_1(z). \end{aligned}$$

Analogamente  $w_{32}(z) = k_2 w_2(z)$ . Temos então

$$w_{31} = k_1 w_1, \quad w_{32} = k_2 w_2. \quad (3.13)$$

Derivando as igualdades em (3.13) obtemos

$$\begin{aligned} dw_{31} &= dk_1(e_2)w_2 \wedge w_1 + k_1 dw_1, \\ dw_{32} &= dk_2(e_1)w_1 \wedge w_2 + k_2 dw_2. \end{aligned}$$

Fazendo uso das equações (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) e (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)w_{12} \wedge w_2 &= dk_1(e_2)w_1 \wedge w_2 \\ (k_1 - k_2)w_{12} \wedge w_1 &= -dk_2(e_1)w_1 \wedge w_2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como  $w_{12} = b_1 w_1 + b_2 w_2$ , temos

$$\begin{aligned} w_{12} \wedge w_1 &= b_2 w_2 \wedge w_1, \\ w_{12} \wedge w_2 &= b_1 w_1 \wedge w_2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Substituindo (3.15) nas equações (3.14), obtemos

$$b_1 = \frac{1}{k_1 - k_2} dk_1(e_2), \quad b_2 = \frac{1}{k_1 - k_2} dk_2(e_1),$$

ou seja,

$$(k_1 - k_2)w_{12} = dk_1(e_2)w_1 + dk_2(e_1)w_2.$$

Suponhamos agora que a curvatura Gaussiana de  $M$  seja constante negativa  $K \equiv -1$ . Notemos inicialmente que  $x^2 + y^2 = 1$  e que

$$0 = \langle dN(xe_1 + ye_2), xe_1 + ye_2 \rangle = k_1 x^2 + k_2 y^2.$$

Multiplicando a igualdade acima por  $k_1$  (respectivamente por  $k_2$ ), obtemos respectivamente

$$0 = k_1^2 x^2 + Ky^2 = k_1^2 x^2 - y^2 = (k_1^2 + 1)x^2 - 1, \tag{3.16}$$

$$0 = k_2^2 y^2 + Kx^2 = k_2^2 y^2 - x^2 = (k_2^2 + 1)y^2 - 1. \tag{3.17}$$

Derivando as equações (3.16) e (3.17) obtemos

$$k_1 dk_1 x + (k_1^2 + 1)dx = 0, \tag{3.18}$$

$$k_2 dk_2 y + (k_2^2 + 1)dy = 0. \tag{3.19}$$

Multiplicando as equações (3.18) por  $k_2$  e (3.19) por  $k_1$  obtemos

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dk_1}{k_1 - k_2},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dk_2}{k_1 - k_2}.$$

Portanto,

$$\frac{dx(e_2)}{x} = -\frac{dk_1(e_2)}{k_1 - k_2}, \quad \frac{dy(e_1)}{y} = \frac{dk_2(e_1)}{k_1 - k_2}.$$

Substituindo estes valores na expressão (3.11), obtemos

$$w_{12} = -\frac{dx(e_2)}{x}w_1 + \frac{dy(e_1)}{y}w_2.$$

■

**Teorema 3.7.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana bidimensional completa com curvatura Gaussiana constante  $K \equiv -1$ . Então  $M$  não pode ser isometricamente imersa em  $\mathbb{R}^3$ .*

**Demonstração.** Seja  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão isométrica. Mostraremos que a existência de uma tal  $\varphi$  conduz a uma contradição. Dado  $p \in M$ ,  $exp_p : T_pM \rightarrow M$  está bem definida, pois  $M$  é completa, e é um difeomorfismo local, uma vez que a curvatura Gaussiana  $K$  é negativa. Considerando em  $T_pM$  a métrica induzida por  $exp_p : T_pM \rightarrow M$ , temos que  $f = \varphi \circ exp_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão isométrica. Podemos portanto supor, sem perda de generalidade, que  $M$  é um plano com curvatura Gaussiana  $K \equiv -1$ .

Para cada  $p \in M$ , seja  $\bar{U} \subset T_pM$  uma vizinhança da origem  $O$ , restrita à qual  $f$  é um mergulho. Consideremos em  $U = f(\bar{U}) \subset \mathbb{R}^3$  um campo normal unitário  $N$ . Temos que  $U$  não tem pontos umbílicos, pois  $K < 0$ , então pela Observação 3.1 obtemos um referencial ortonormal  $\{e_1, e_2\}$ , de direções principais, em  $U$ . Como  $M$  é simplesmente conexa, podemos estender os campos diferenciais  $e_1, e_2$  a  $M$ . Notemos agora que existem funções diferenciáveis  $x > 0, y > 0$  em  $M$ , uma vez que  $M$  é completa e simplesmente conexa, tais que os campos  $E_1 = xe_1 + ye_2, E_2 = xe_1 - ye_2$  são assintóticos, isto é

$$\langle dN(E_i), E_i \rangle = 0.$$

Denotaremos por  $\vartheta_t$  e  $\psi_s$  os fluxos induzidos por  $E_1$  e  $E_2$  respectivamente, isto é,  $t \mapsto \vartheta_t(p)$  é a trajetória de  $E_1$  que passa por  $p \in M$ , em  $t = 0$  e  $s \mapsto \psi_s(p)$  é a trajetória de  $E_2$  que passa por  $p \in M$ , em  $s = 0$ . Como  $E_1$  e  $E_2$  são unitários e  $M$  é completa



temos que estas trajetórias estão definidas para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ . Pelo Teorema 3.2, as aplicações  $(t, p) \mapsto \vartheta_t(p)$  e  $(s, p) \mapsto \psi_s(p)$  são diferenciáveis. Fixemos um ponto  $q \in M$  e definamos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  por

$$F(t, s) = \vartheta_t(\psi_s(q)), \quad (3.20)$$

com  $F(0, 0) = q$ . O ponto crucial da demonstração deste Teorema consiste em mostrar que  $F$  é um difeomorfismo, ou seja,  $F$  é um sistema de coordenadas cuja imagem cobre  $M$ . Usando este sistema de coordenadas mostraremos que a área de  $M$  é finita.

Seja  $\{\theta_1, \theta_2\}$  o coreferencial dual do referencial (não ortogonal)  $\{E_1, E_2\}$ , isto é,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são 1-formas diferenciais tais que  $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$ . Mostraremos, usando a expressão (3.12), que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são fechadas, ou seja,  $d\theta_1 = d\theta_2 = 0$ .

Como  $E_1 = xe_1 + ye_2$  e  $E_2 = xe_1 - ye_2$ , temos

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x}w_1 + \frac{1}{y}w_2 \right\} \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x}w_1 - \frac{1}{y}w_2 \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo uso das equações (3.3), (3.4) e (3.12) obtemos

$$dw_1 = -\frac{dx(e_2)}{x}w_1 \wedge w_2, \quad dw_2 = \frac{dy(e_1)}{y}w_1 \wedge w_2. \quad (3.21)$$

Calculando  $d\theta_1$  temos

$$d\theta_1 = \frac{1}{2} \left\{ d\left(\frac{1}{x}\right) \wedge w_1 + \frac{1}{x}dw_1 + d\left(\frac{1}{y}\right) \wedge w_2 + \frac{1}{y}dw_2 \right\}. \quad (3.22)$$

Agora substituindo as expressões de  $dw_1$  e  $dw_2$  em (3.22) obtemos

$$d\theta_1 = 0.$$

Analogamente, calculando  $d\theta_2$  e usando (3.21) temos que  $d\theta_2 = 0$ . Logo as formas  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são fechadas.

Devido ao Teorema 3.6 concluímos que existem funções diferenciáveis  $m, n : M \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $m(q) = n(q) = 0$ , sendo  $q \in M$  fixado anteriormente, tais que  $dm = \theta_1$ ,  $dn = \theta_2$ . Além disso, usando a equação (3.10) concluímos que  $[E_1, E_2] = 0$ .

Isto acarreta, pelo Teorema 3.3, que

$$\vartheta_t(\psi_s(q)) = \psi_s(\vartheta_t(q)),$$

e portanto, pelo Teorema 3.4, temos que a função  $F$ , definida por (3.20) satisfaz

$$\frac{\partial F}{\partial t} = E_1, \quad \frac{\partial F}{\partial s} = E_2.$$

Agora, seja  $G : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação dada por  $G(p) = (m(p), n(p))$ . Temos que  $G \circ F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação tal que

$$G \circ F(0, 0) = (m(q), n(q)) = (0, 0).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(G \circ F) &= \left( dm(F(t, s)) \frac{\partial F}{\partial s}, dn(F(t, s)) \frac{\partial F}{\partial s} \right) \\ &= (\theta_1(E_2), \theta_2(E_2)) \\ &= (0, 1), \\ \frac{\partial}{\partial t}(G \circ F) &= \left( dm(F(t, s)) \frac{\partial F}{\partial t}, dn(F(t, s)) \frac{\partial F}{\partial t} \right) \\ &= (\theta_1(E_1), \theta_2(E_1)) \\ &= (1, 0). \end{aligned}$$

Assim,  $d(G \circ F) = id|_{\mathbb{R}^2}$  e  $d(G \circ F - id|_{\mathbb{R}^2}) = 0$ , onde  $id|_{\mathbb{R}^2}$  é a identidade do  $\mathbb{R}^2$ . Como  $G \circ F(0, 0) = (0, 0)$  obtemos que  $G \circ F = id|_{\mathbb{R}^2}$ . Portanto concluímos que a aplicação  $G$  é a inversa da  $F$ .

Agora mostraremos que a existência da parametrização  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , onde  $(t, s)$  são as coordenadas em  $\mathbb{R}^2$  implica que a área de  $M$  é finita.

Seja  $\alpha$  a função ângulo formado por  $E_1$  e  $E_2$ . Temos que

$$\cos \alpha = \langle E_1, E_2 \rangle = x^2 - y^2 = 2x^2 - 1,$$

segue então que

$$x = \cos \frac{\alpha}{2}, \quad y = \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3.23)$$

Assim temos

$$E_1 = \cos \frac{\alpha}{2} e_1 + \sin \frac{\alpha}{2} e_2, \quad E_2 = \cos \frac{\alpha}{2} e_1 - \sin \frac{\alpha}{2} e_2,$$

ou equivalentemente,

$$e_1 = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} (E_1 + E_2), \quad e_2 = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} (E_1 - E_2).$$

Observando que  $E_1$  e  $E_2$  são os campos tangentes às curvas coordenadas da parametrização  $F(t, s)$  segue que o coreferencial dual,  $\{w_1, w_2\}$ , do referencial  $\{e_1, e_2\}$  é dado por

$$w_1 = \cos \frac{\alpha}{2} (dt + ds), \quad w_2 = \sin \frac{\alpha}{2} (dt - ds). \quad (3.24)$$

Substituindo (3.23) e (3.24) na expressão (3.12) obtemos que

$$w_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial s} ds. \quad (3.25)$$

Derivando a expressão (3.25) e usando a expressão (3.9) obtemos

$$w_1 \wedge w_2 = dw_{12} = \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial s} \right) dt \wedge ds.$$

Seja  $R$  o retângulo  $[-a, a] \times [-a, a]$ . Temos que a área de  $F(R)$  é igual a

$$\begin{aligned} \int_{F(R)} w_1 \wedge w_2 &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial s} dt ds = \\ &= \alpha(-a, -a) + \alpha(a, a) - \alpha(a, -a) - \alpha(-a, a) \\ &= \sum_{i=1}^4 \beta_i - 2\pi < 2\pi, \end{aligned}$$

onde  $\beta_i \in (0, \pi)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , são os ângulos internos do retângulo  $F(R)$ .

Como  $M$  é simplesmente conexa e  $F$  é um difeomorfismo, podemos exaurir  $M$  por quadriláteros  $F(R)$ . Logo a área de  $M$  é menor ou igual a  $2\pi$ , portanto finita.

Por outro lado, como  $M$  tem curvatura Gaussiana negativa e é simplesmente conexa, temos que  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo que tem a propriedade de “aumentar comprimentos” e, portanto, aumenta área, (ver Proposição 3.1). Isto implica que  $M$  tem área infinita, estabelecendo uma contradição. E assim o teorema está demonstrado. ■

# Capítulo 4

## Terceira Demonstração

Neste capítulo, iremos apresentar a demonstração do *Teorema de Hilbert* que pode ser encontrada no livro de M. P. do Carmo, ver [3], ou de J. J. Stoker, ver [16]. A parte local desta demonstração é essencialmente igual à do trabalho original de Hilbert, ver [6], mas a parte global no entanto, é substancialmente diferente. Esta demonstração trata da existência de uma parametrização da superfície completa  $M$ , com curvatura Gaussiana constante negativa, por curvas assintóticas. Também utiliza-se do fato da superfície em questão ser globalmente isométrica ao plano hiperbólico  $H^2$ , que tem área infinita. Contudo, com a possibilidade de se parametrizar a superfície por curvas assintóticas, obtemos que esta tem área finita. Nesta demonstração utilizamos elementos da teoria clássica de Geometria Diferencial.

**Teorema 4.1.** *Uma superfície completa  $M$  com curvatura Gaussiana  $K$  constante negativa não pode ser isometricamente imersa em  $\mathbb{R}^3$ .*

Sem perda de generalidade, assumiremos a curvatura Gaussiana  $K \equiv -1$ . Além disso,  $exp_p : T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo local, pois  $M$  não tem pontos conjugados, que induz um produto interno em  $T_p M$ . Denotaremos por  $M'$  a variedade Riemanianna  $T_p M$  com este produto interno induzido.

Se  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão isométrica, o mesmo mantém-se para  $\psi = \varphi \circ exp_p :$

$M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Assim, basta provar a não existência da imersão isométrica  $\psi : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ , do plano  $M'$  com produto interno tal que  $K \equiv -1$ .

**Lema 4.1.** *A área de  $M'$  é infinita.*

**Demonstração.** Sejam  $\tilde{p} \in H^2$ ,  $p' \in M'$ , onde  $H^2$  é o plano hiperbólico ( $\mathbb{R}^2$  munido com o produto interno:  $\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle_q = E = 1$ ,  $\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle_q = F = 0$ ,  $\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle_q = G = e^{2u}$ ,  $\forall q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ ). Escolha uma isometria linear  $\varsigma : T_{\tilde{p}}H^2 \rightarrow T_{p'}M'$  entre os espaços tangentes aos mesmos. Defina uma aplicação  $\kappa : H^2 \rightarrow M'$  por  $\kappa = \exp_{p'} \circ \varsigma \circ \exp_{\tilde{p}}^{-1}$ . Como todo ponto de  $H^2$  é ligado a  $\tilde{p}$  por uma única geodésica minimal, pois  $H^2$  é completa,  $\kappa$  está bem definida.

Agora, fixe coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  e  $(\rho', \theta')$  entorno de  $\tilde{p}$  e  $p'$ , respectivamente, tal que  $\kappa$  aplique o eixo  $\theta = 0$  no eixo  $\theta' = 0$ . Temos que  $\kappa$  preserva a primeira forma fundamental, Teorema 1.4, sendo portanto, uma isometria local.

Como a curvatura Gaussiana de  $H^2$  e  $M'$  são ambas iguais a  $-1$ , temos que  $\exp_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}H^2 \rightarrow H^2$  e  $\exp_{p'} : T_{p'}M' \rightarrow M'$  são difeomorfismos locais. Além disso, temos que  $\langle (d\exp_{\tilde{p}})_u(w), (d\exp_{\tilde{p}})_u(w) \rangle \geq \langle w, w \rangle$ ,  $u, w \in T_{\tilde{p}}H^2$  e  $\langle (d\exp_{p'})_{u'}(w'), (d\exp_{p'})_{u'}(w') \rangle \geq \langle w', w' \rangle$ ,  $u', w' \in T_{p'}M'$ . E como  $\varsigma$  é uma isometria linear, temos que  $\kappa$  é um difeomorfismo local de  $H^2$  em  $M'$ , tal que  $\langle (d\kappa)_v(w), (d\kappa)_v(w) \rangle \geq \langle w, w \rangle$ ,  $\forall v, w \in T_{\tilde{p}}H^2$ . Logo pelo Lema 1.3 temos que  $\kappa$  é uma aplicação de recobrimento.

Assim, como  $M'$  é simplesmente conexa,  $\kappa$  é um homeomorfismo, e portanto uma isometria global. Então obtemos que  $M'$  é globalmente isométrica ao plano hiperbólico  $H^2$ .

Entretanto, temos que a área de  $H^2$  é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2u} dudv = \infty,$$

assim mostramos que a área de  $M'$  é infinita. ■

Agora assumiremos que existe uma imersão isométrica  $\psi : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $M'$  é uma variedade Riemanianna bidimensional homeomorfa ao plano e com curvatura Gaussiana  $K \equiv -1$ .

Para evitar as dificuldades associadas a possíveis auto-interseções de  $\psi(M')$ , trabalharemos com  $M'$  e usaremos a imersão  $\psi$  para induzir em  $M'$  a geometria extríntrica local de  $\psi(M') \subset \mathbb{R}^3$ . Mais precisamente, como  $\psi$  é uma imersão,  $\forall p \in M'$  existe uma vizinhança  $V' \subset M'$ , de  $p$ , tal que a restrição  $\psi|_{V'} = \bar{\psi}$  é um difeomorfismo. Para cada  $\bar{\psi}(q) \in \bar{\psi}(V')$  existem, por exemplo, duas direções assintóticas. Através de  $\bar{\psi}$ , estas direções induzem duas direções em  $q \in M'$ , que chamaremos de direções assintóticas de  $M'$  em  $q$ .

Temos que as curvas coordenadas de uma parametrização constituem uma rede de Tschebyscheff se todas as curvas coordenadas são parametrizadas pelo comprimento de arco. Se isso ocorre, é possível reparametrizar por uma vizinhança coordenada tal que  $E = G = 1$ ,  $F = \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado pelas curvas coordenadas. Assim, nesta situação  $\theta$  satisfaz a equação de *sine-Gordon*

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin \theta}. \quad (4.1)$$

**Lema 4.2.** *Para cada  $p \in M'$  existe  $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M'$ ,  $p \in Y(U)$ , uma parametrização tal que as curvas coordenadas de  $Y$  são as linhas assintóticas de  $Y(U) = V'$ , e formam uma rede de Tschebyscheff.*

**Demonstração.** Como  $K < 0$ , uma vizinhança  $V' \subset M'$  de  $p$  pode ser parametrizada por  $Y(u, v)$  tal que as curvas coordenadas de  $Y$  são linhas assintóticas em  $V'$ . Assim, se  $e$ ,  $f$  e  $g$  são os coeficientes da segunda forma fundamental de  $M'$  nesta parametrização temos  $e = g = 0$ . Note que usamos a convenção anteriormente feita, ao referirmos à segunda forma fundamental de  $M'$ .

Agora em  $\psi(V') \subset \mathbb{R}^3$ , temos

$$N_u \wedge N_v = K(Y_u \wedge Y_v).$$

Usando a notação,  $D = \sqrt{EG - F^2}$ , temos que

$$\begin{aligned} N \wedge N_u &= \frac{1}{D}[(Y_u \wedge Y_v) \wedge N_u] \\ &= \frac{1}{D}(\langle Y_u, N_u \rangle Y_v - \langle Y_v, N_u \rangle Y_u) \\ &= \frac{1}{D}(fY_u - eY_v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N \wedge N_v &= \frac{1}{D}[(Y_u \wedge Y_v) \wedge N_v] \\ &= \frac{1}{D}(\langle Y_u, N_v \rangle Y_v - \langle Y_v, N_v \rangle Y_u) \\ &= \frac{1}{D}(gY_u - fY_v). \end{aligned}$$

Como  $K = -1$  e  $e = g = 0$  temos,

$$K = \frac{-f^2}{D^2} \Rightarrow f = \pm D.$$

Assim,

$$N \wedge N_u = \pm Y_u, \quad N \wedge N_v = \mp Y_v.$$

Por outro lado, temos que

$$(N \wedge N_v)_u - (N \wedge N_u)_v = 2(N_u \wedge N_v) = 2KDN$$

então,

$$2KDN = -2DN = \pm Y_{uv} \pm Y_{vu} = \pm 2Y_{uv}.$$

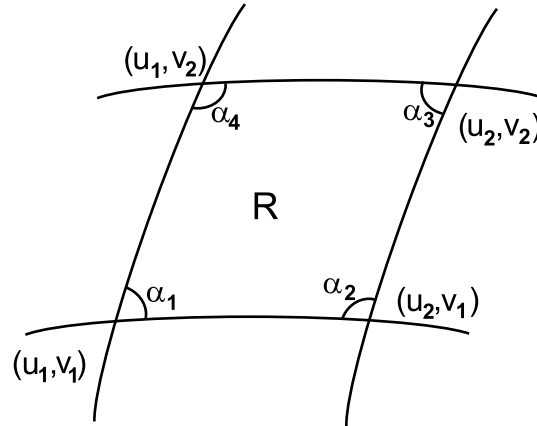
Deste segue que  $Y_{uv}$  é paralelo a  $N$ . Logo,

$$E_v = 2\langle Y_{uv}, Y_u \rangle = 0, \quad G_u = 2\langle Y_{uv}, Y_v \rangle = 0.$$

Mas  $E_v = G_u = 0$  implica que as curvas coordenadas formam uma rede de Tschebyscheff. ■

**Lema 4.3.** *Seja  $V' \subset M'$  uma vizinhança coordenada em  $M'$ , tal que as curvas coordenadas são linhas assintóticas em  $V'$ . Então a área  $A$  de cada quadrilátero formado pelas curvas coordenadas é menor que  $2\pi$ .*

**Demonstração.** Sejam  $(\bar{u}, \bar{v})$  as coordenadas de  $V'$ . Pelo Lema 4.2, as curvas coordenadas formam uma rede de Tschebyscheff. Assim, é possível reparametrizar  $V'$  por  $(u, v)$ , tal que  $E = G = 1$  e  $F = \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado pelas curvas coordenadas. Seja  $R$  um quadrilátero formado pelas curvas coordenadas com vértices  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_2, v_1)$ ,  $(u_2, v_2)$ ,  $(u_1, v_2)$  e ângulos interiores  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  respectivamente.



Como  $E = G = 1$ ,  $F = \cos \theta$  e por (4.1),  $\theta_{uv} = \sin \theta$  temos

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_R dA = \int_R \sin \theta \, dudv = \int_R \theta_{uv} \, dudv \\ &= \theta(u_1, v_1) - \theta(u_2, v_1) + \theta(u_2, v_2) - \theta(u_1, v_2) \\ &= \alpha_1 + \alpha_3 - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_4) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i - 2\pi. \end{aligned}$$

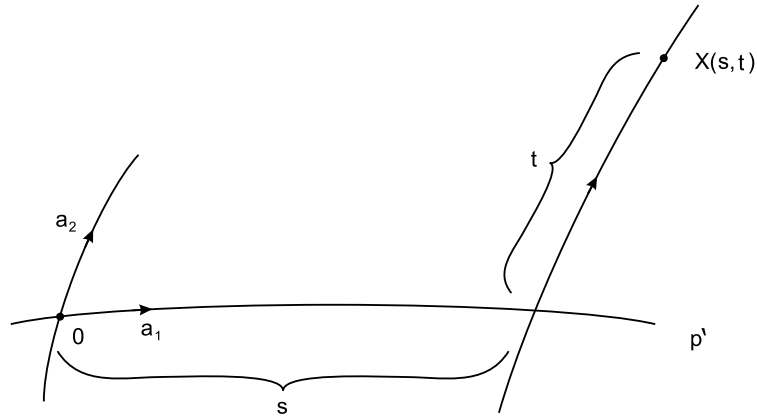
Como  $\alpha_i < \pi$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , então  $A(R) < 2\pi$ . ■

Agora definiremos uma aplicação  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow M'$  tal que  $X$  é uma parametrização para toda a superfície  $M'$ .

Fixe um ponto  $O \in M'$  e escolha orientações nas linhas assintóticas passando por  $O$ . Chame uma dessas curvas de  $a_1$  e a outra de  $a_2$ . Para cada  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ , tome em  $a_1$  um comprimento igual a  $s$ , a partir de  $O$ . Seja  $P'$  o ponto assim obtido. Através de



$P'$ , passe duas linhas assintóticas, sendo que uma é  $a_1$ . Na outra linha assintótica, que passa por  $P'$ , escolha uma orientação obtida pela extensão contínua, ao longo de  $a_1$ , da orientação de  $a_2$ . Nesta linha assintótica tome um comprimento igual a  $t$ , a partir de  $P'$ . O ponto assim obtido é  $X(s, t)$ .



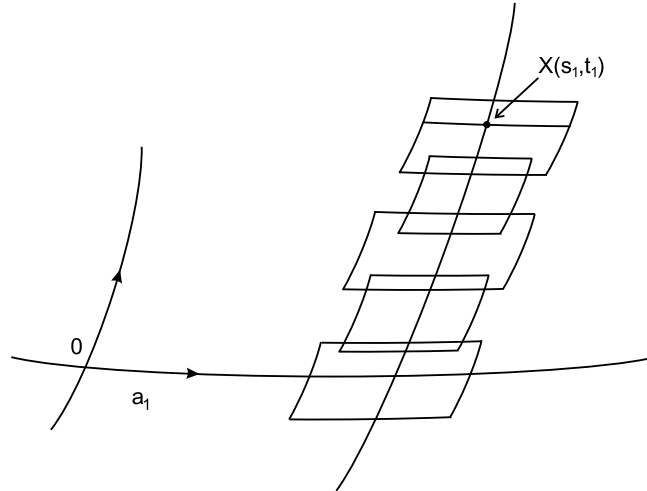
Temos que  $X(s, t)$  está bem definida,  $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$ . De fato, se  $X(s, 0)$  não está bem definida, então existe  $s_1$  tal que  $a_1(s)$  está definida para todo  $s < s_1$ , mas não para  $s = s_1$ . Seja  $q = \lim_{s \rightarrow s_1} a_1(s)$ . Como  $M'$  é completa,  $q \in M'$ . Pelo Lema 4.2, vemos que  $a_1(s_1)$  está definida, o que é uma contradição. Assim,  $X(s, 0)$  está bem definida para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Analogamente mostra-se que  $X(s, t)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Agora mostraremos que  $X$  é uma parametrização de  $M'$ , através de uma série de lemas.

**Lema 4.4.** *Para um  $t$  fixo, a curva  $X(s, t)$ ,  $-\infty < s < +\infty$ , é uma linha assintótica com comprimento de arco igual a  $s$ .*

**Demonstração.** Para cada ponto  $X(s', t') \in M'$ , existe, pelo Lema 4.2, uma vizinhança retangular (isto é,  $t_a < t < t_b$ ,  $s_a < s < s_b$ ), tal que as linhas assintóticas desta vizinhança formam uma rede de Tschebyscheff. Primeiro mostraremos para  $t_0$ ,  $t_a < t_0 < t_b$ , que a curva  $X(s, t_0)$ ,  $s_a < s < s_b$ , é uma linha assintótica. E então de forma análoga mostra-se que  $X(s, \bar{t})$ ,  $t_a < \bar{t} < t_b$ , é uma linha assintótica. De fato,

o ponto  $X(s, \bar{t})$  é obtido pela escolha do segmento de comprimento  $\bar{t}$  sobre  $X(s, 0)$ , que é equivalente à escolha do segmento de comprimento  $\bar{t} - t_0$  sobre  $X(s, t_0)$ . Como as linhas assintóticas formam uma rede de Tschebyscheff nesta vizinhança, a asserção segue.



Agora, seja  $X(s_1, t_1) \in M'$  um ponto qualquer. Pela compacidade do segmento  $X(s_1, t)$ ,  $0 \leq t \leq t_1$ , é possível cobri-lo com um número finito de vizinhanças retangulares, tais que as linhas assintóticas de cada, formem uma rede de Tschebyscheff. Como  $X(s, 0)$  é uma linha assintótica, temos que  $X(s, t_1)$  é uma linha assintótica na vizinhança de  $s_1$ . Como  $(s_1, t_1)$  é qualquer, a asserção do lema segue.

■

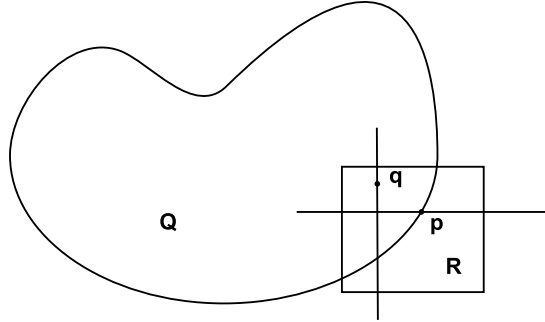
**Lema 4.5.**  $X$  é um difeomorfismo local.

**Demonstração.** Este resultado segue do fato de que cada  $X(s_0, t)$ ,  $X(s, t_0)$  é uma linha assintótica parametrizadas pelo comprimento de arco, e de que  $M'$  pode ser localmente parametrizada tal que as curvas coordenadas são linhas assintóticas em  $M'$ , e  $E = G = 1$ . Assim,  $X$  localmente identifica-se com tal parametrização.

■

**Lema 4.6.**  $X$  é sobrejetiva.

**Demonstração.** Seja  $Q = X(\mathbb{R}^2)$ . Como  $X$  é um difeomorfismo local,  $Q$  é aberto em  $M'$ . Anteriormente vimos que se  $P' = X(s_0, t_0)$ , então as duas linhas assintóticas que passam por  $P'$  estão inteiramente contidas em  $Q$ .



Suponha  $Q \neq M'$ . Como  $M'$  é conexa, a fronteira  $\partial Q \neq \emptyset$ . Seja  $p \in \partial Q$ . Como  $Q$  é aberto em  $M'$ ,  $p \notin Q$ . Agora considere um vizinhança retangular  $R$  de  $p$ , tal que as linhas assintóticas formem uma rede de Tschebyscheff. Seja  $q \in Q \cap R$ . Então uma das linhas assintóticas que passam por  $q$  intercepta uma das linhas assintóticas que passam por  $p$ . O que é um absurdo, uma vez que as linhas assintóticas que passam por  $q$  devem estar totalmente contidas em  $Q$ . Assim,  $Q = M'$ .

■

**Lema 4.7.** Em  $M'$  existem dois campos de vetores linearmente independentes que são tangentes às linhas assintóticas de  $M'$ .

**Demonstração.** Por um ponto de  $M'$  passam duas linhas assintóticas distintas. Fixe um ponto  $p \in M'$  e escolha dois vetores unitários  $v_1(p)$  e  $v_2(p)$ , tangentes às linhas assintóticas que passam por  $p$ . Seja  $q \in M'$  um ponto arbitrário, e seja  $\gamma_0 : [0, l] \rightarrow M'$  um arco tal que  $\gamma_0(0) = p$ ,  $\gamma_0(l) = q$ . Defina  $v_1(\gamma_0(s))$ ,  $s \in [0, l]$ , a única extensão contínua de  $v_1(p)$  ao longo de  $\gamma_0$ , que é tangente a uma linha assintótica. Defina analogamente  $v_2(\gamma_0(s))$ ,  $s \in [0, l]$ .

Afirmamos que  $v_1(q)$  e  $v_2(q)$  não dependem da escolha do arco ligando  $p$  a  $q$ . De fato, seja  $\gamma_1 : [0, l] \rightarrow M'$  um arco tal que  $\gamma_1(0) = p$ ,  $\gamma_1(l) = q$ . Como  $M'$  (que é homeomorfa ao plano) é simplesmente conexa, então existe uma homotopia  $\gamma_t(s) = H(s, t)$ ,  $s \in [0, l]$ ,  $t \in [0, 1]$ , entre  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ . Isto é,  $\gamma_t(s)$  é uma família de arcos contínuos ligando  $p$  a  $q$ . Pela continuidade das direções assintóticas e a compacidade de  $[0, l]$ , segue que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $t_0 \in [0, 1]$  tal que se  $t < t_0$ , então  $|v_1(\gamma_t(l)) - v_1(\gamma_0(l))| < \epsilon$ . Assim, se  $t_0$  é suficientemente pequeno, temos  $v_1(\gamma_t(l)) = v_1(\gamma_0(l))$ , para  $t < t_0$ . Como  $[0, 1]$  é compacto, podemos estender este argumento gradualmente para todo  $t \in [0, 1]$ . Portanto,  $v_1(\gamma_t(l)) = v_1(\gamma_0(l))$ .

Assim  $v_1, v_2$  são campos de vetores contínuos bem definidos em  $M'$  que são tangentes às linhas assintóticas. Portanto  $v_1$  e  $v_2$  são diferenciáveis, provando o Lema. ■

**Lema 4.8.**  *$X$  é injetiva.*

**Demonstração.** Suponha  $X(s_0, t_0) = X(s_1, t_0)$ ,  $s_1 > s_0$ . Pelo Lema 4.7, uma linha assintótica não pode se auto-intersectar, a menos que as retas tangentes sejam as mesmas no ponto de intersecção. Como  $X$  é um difeomorfismo local, existe um  $\epsilon > 0$  tal que

$$X(s_0, t) = X(s_1, t), \quad t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon.$$

Pela mesma razão, os pontos da curva  $X(s_0, t)$ , tais que

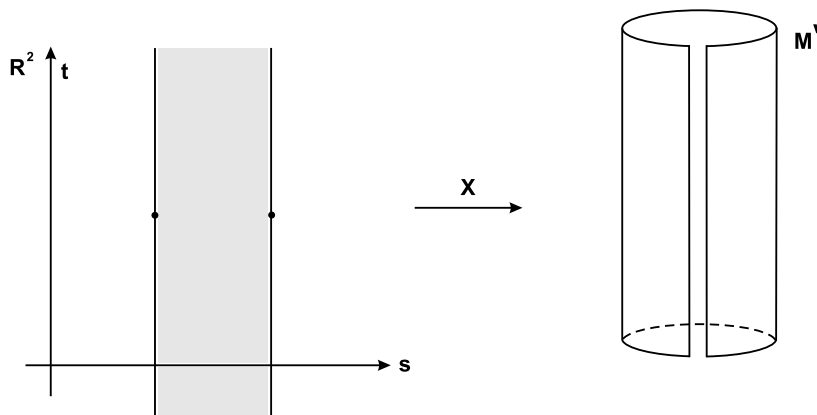
$$X(s_0, t) = X(s_1, t),$$

formam um conjunto aberto e fechado na curva. Portanto,  $X(s_0, t) = X(s_1, t)$ , para todo  $t$ . Além disso, pela construção da aplicação  $X$ ,  $X(s_0 + a, t_0) = X(s_1 + a, t_0)$ ,  $0 \leq a \leq s_1 - s_0$ . Portanto  $X(s_0 + a, t_0) = X(s_1 + a, t_0)$ , para todo  $t$ . Assim, ou

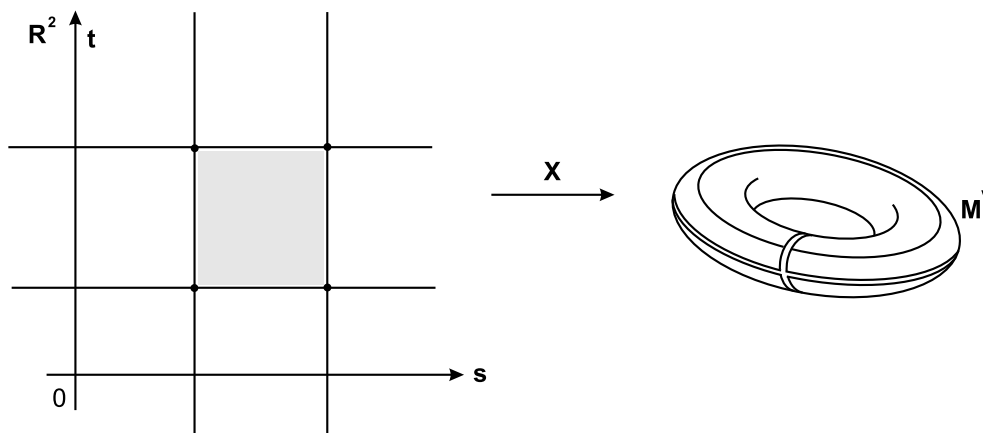
1.  $X(s_0, t_0) \neq X(s_0, t)$  para  $t > t_0$ , ou
2. Existe  $t = t_1 > t_0$  tal que  $X(s_0, t_0) = X(s_0, t_1)$ .

Por argumento similar, prova-se que  $X(s, t_0 + b) = X(s, t_1 + b)$ , para todo  $s$ ,  $0 \leq b \leq t_1 - t_0$ .

No caso 1.,  $X$  aplica cada faixa do  $\mathbb{R}^2$ , compreendida entre duas retas verticais, que distam  $s_1 - s_0$  uma da outra, em  $M'$ , e identifica pontos dessas retas com um mesmo  $t$ . Isto implica que  $M'$  é homeomórfico ao cilindro, o que é uma contradição.



No caso 2.,  $X$  aplica cada quadrado formado por duas retas horizontais, que distam  $s_1 - s_0$  uma da outra, e duas retas verticais, que distam  $t_1 - t_0$  uma da outra, em  $M'$ , e identifica pontos correspondentes dos lados opostos da fronteira. Isso implica que  $M'$  é homeomórfico ao toro, o que é uma contradição.



Por argumentação análoga, mostra-se que  $X(s_0, t_0) = X(s_0, t_1)$ ,  $t_1 > t_0$ , gera uma

contradição.

Agora considere o caso  $X(s_0, t_0) = X(s_1, t_1)$ ,  $s_1 > s_0$ ,  $t_1 > t_0$ . Usando o fato de  $X$  ser um difeomorfismo local e a conexidade de  $M'$ , vemos que  $X$  aplica em  $M'$  uma faixa de  $\mathbb{R}^2$  entre duas retas perpendiculares ao vetor  $(s_1 - s_0, t_1 - t_0) \in \mathbb{R}^2$ , e que distam  $\sqrt{(s_1 - s_0)^2 + (t_1 - t_0)^2}$  entre si. Assim, por argumentação análoga a anterior, obtemos casos 1 e 2, nos quais mostra-se que  $M'$  é homeomorfa a um cilindro ou a um toro. Obtendo-se uma contradição.

Portanto,  $X(s_0, t_0) = X(s_1, t_1)$  implica  $(s_0, t_0) = (s_1, t_1)$ .

■

**Demonstração do Teorema:** Suponha que existe uma imersão isométrica  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $M$  é uma variedade Riemanianna bidimensional completa com curvatura Gaussiana  $K \equiv -1$ . Seja  $p \in M$  e denote por  $M'$  o plano tangente  $T_p M$  munido com a métrica induzida por  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ . Então  $\psi = \varphi \circ \exp_p : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão isométrica, e os Lemas 4.4, 4.5, 4.6 e 4.8 mostram a existência de uma parametrização  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow M'$  de todo  $M'$ , tal que as curvas coordenadas de  $X$  são linhas assintóticas em  $M'$ . Assim, podemos cobrir  $M'$  por uma união de quadriláteros coordenados  $Q_n$ , com  $Q_n \subset Q_{n+1}$ . Pelo Lema 4.3, a área de cada  $Q_n$  é menor que  $2\pi$ . Mas pelo Lema 4.1, a área de  $M'$  é ilimitada, nos levando a uma contradição.

Portanto, não existe imersão isométrica de  $M$ , variedade Riemanianna bidimensional completa com curvatura Gaussiana  $K \equiv -1$ , em  $\mathbb{R}^3$ .

■

# Capítulo 5

## Existência de imersão local $C^\infty$ que não é Analítica

Neste capítulo, exibiremos uma demonstração da existência de superfícies não analíticas com curvatura Gaussiana constante negativa admitindo em cada ponto regular as derivadas de qualquer ordem, de autoria de M. E. Holmgren, ver [7]. Para isso mostraremos que a equação de derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \sin w,$$

admite solução local  $C^\infty$ , mas que não é analítica.

### 5.1 Resultados gerais de Análise Real e Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção introduziremos alguns conceitos e propriedades que serão ferramentas muito úteis na demonstração da existência de imersão  $C^\infty$  que não é analítica. Algumas demonstrações serão omitidas por serem resultados clássicos de Análise e de Equações Diferenciais Ordinárias, mas neste caso, sempre alguma referência de onde

estas podem ser encontradas será fornecida.

**Definição 5.1.** A série  $\sum_n f_n$ ,  $f_n : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , converge uniformemente em um conjunto  $V$  se, e somente se, a sequência de suas reduzidas  $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$  é uniformemente convergente em  $V$ .

**Proposição 5.1.** Seja  $a$  um ponto de acumulação de  $V \subset \mathbb{R}$ . Se a série  $\sum_n f_n$ ,  $f_n : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , converge uniformemente para  $f : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  em  $V$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe

$$L_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x),$$

então  $\sum_n L_n$  é uma série convergente e

$$\sum_n L_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \sum_n f_n(x) \right] = \sum_n \left[ \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right].$$

**Demonstração.** Ver [9], Corolário, página 296. ■

**Proposição 5.2.** Seja  $\sum_n f_n$ ,  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , uma série de funções deriváveis no intervalo  $[a, b]$ . Se a série de números reais  $\sum_n f_n(c)$  é convergente, para um certo  $c \in [a, b]$ , e a série  $\sum_n f'_n = g$  converge uniformemente em  $[a, b]$ , então  $\sum_n f_n = f$  converge uniformemente em  $[a, b]$  e  $f$  é derivável, com  $f' = g$ . ■

**Demonstração.** Ver [9], Corolário, página 304. ■

**Teorema 5.1.** Se a sequência das funções  $f_n : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente, em  $V$ , para a função  $f : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e todas as funções  $f_n$  são contínuas num ponto  $a \in V$  então  $f$  é contínua no ponto  $a$ .



**Demonstração.** Ver [9], Corolário, página 298. ■

**Definição 5.2.** Uma série de funções  $f_n : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita normalmente convergente quando existe uma seqüência de constantes  $a_n \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  tais que a série  $\sum_n a_n$  converge e  $|f_n(x)| \leq a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in V$ .

**Teorema 5.2.** Se a série  $\sum_n f_n$  é normalmente convergente então as séries  $\sum_n |f_n|$  e  $\sum_n f_n$  são uniformemente convergentes.

**Demonstração.** Ver [9], Corolário, página 294. ■

**Proposição 5.3.** Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções  $n$  vezes diferenciáveis. Para cada partição  $n = m_1 + m_2 + \dots + m_r$  de  $n$  como soma de  $r$  números naturais, existe um inteiro  $\alpha = \alpha(m_1, m_2, \dots, m_r)$  tal que

$$(g \circ f)^{(n)} = \sum_{r=1}^n \alpha(m_1, m_2, \dots, m_r) (g^{(n)} \circ f) f^{(m_1)} f^{(m_2)} \dots f^{(m_r)}, \quad (5.1)$$

onde para cada  $r = 1, 2, \dots, n$ , vale  $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$ .

**Demonstração.** Ver [9], página 236. ■

**Teorema 5.3.** Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitziana em  $\Omega = I_a \times I_b$ , onde  $I_a = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq a\}$ ,  $I_b = \{x \in \mathbb{R}^m; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| < A$ , em  $\Omega$ , então a equação diferencial

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

tem pelo menos uma solução em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{A}\}$ .

**Demonstração.** Ver [13], Teorema 2, página 13. ■

Na demonstração do Teorema 5.3 utiliza-se o método das aproximações sucessivas para fornecer a solução de (5.2).

Sejam  $E_1, E_2, \dots, E_m$  espaços euclidianos e seja  $\Omega$  um subconjunto de  $\mathbb{R} \times E$ , onde  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ . Sejam  $f_i : \Omega \rightarrow E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , funções contínuas. Uma família  $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ , onde cada  $\phi_i : I \rightarrow E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , é uma função diferenciável de um intervalo  $I$  em  $E_i$ , chama-se solução do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} = f_m(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \end{array} \right. \quad (5.3)$$

no intervalo  $I$ , se

1. Para todo  $t \in I$ ,  $(t, \phi(t)) = (t, \phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) \in \Omega$ ;
2. Para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\frac{d\phi_i}{dt}(t) = f_i(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_m(t)),$$

para cada  $t \in I$ .

O sistema (5.3), denotado abreviadamente por

$$x'_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.4)$$

é equivalente à equação diferencial ordinária

$$x' = f(t, x), \quad (5.5)$$

onde  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow E$ . Isto é, a família  $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  de funções é solução de (5.3) em  $I$  se, e somente se,  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : I \rightarrow E$  é solução de (5.5) em  $I$ .

O Problema de Cauchy para sistemas de equações da forma (5.3) formula-se do seguinte modo: dados  $t_0, x_1^0, \dots, x_m^0$  tais que  $(t_0, x_1^0, \dots, x_m^0) \in \Omega$ , encontrar uma solução  $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$  de (5.3) num intervalo  $I$  que contém  $t_0$  tal que  $\phi_i(t_0) = x_i^0$ , para todo  $i$ .

Abreviadamente, escrevemos

$$x'_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.6)$$

Este problema é equivalente ao problema de Cauchy

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x^0, \quad (5.7)$$

onde  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ .

Na equação (5.7) temos que a função  $f$  é, respectivamente, contínua, lipschitziana, etc, se e somente, se cada uma das  $f_i$  de (5.6) também é do mesmo tipo. Temos também que os resultados de existência de solução são válidos para (5.6).

Seja agora  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Uma função  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^m$ , definida num intervalo, chama-se solução da equação diferencial ordinária de ordem  $m$

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}) \quad (5.8)$$

em  $I$ , se:

(i) Para todo  $t \in I$ ,  $(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(m-1)}(t)) \in \Omega$ ;

(ii) Para todo  $t \in I$ ,

$$\frac{d^m \phi}{dt^m}(t) = f(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \dots, \phi^{(m-1)}(t)).$$

A equação (5.8) é também denotada por

$$x^{(m)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}), \quad (5.9)$$

e é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x'_r = x_{r+1}, & r = 1, 2, \dots, m-1, \\ x'_m = f(t, x_1, x_2, \dots, x_m). \end{cases} \quad (5.10)$$

Isto é, se uma função  $\phi$  é solução de (5.8), então  $\{\phi, \phi', \phi'', \dots, \phi^{(m-1)}\}$  é uma solução de (5.10). E se  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$  é uma solução de (5.10) então  $\phi = \phi_1$  é uma solução de (5.8), isto é,  $\phi$  é de classe  $C^m$  e satisfaz (i) e (ii), acima.

O Problema de Cauchy para a equação (5.8) formula-se do seguinte modo: dado um ponto  $(t_0, x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0) \in \Omega$  encontrar uma solução  $\phi$  de (5.8) definida num intervalo  $I$  que contém o ponto  $t_0$  e satisfaz

$$\phi(t_0) = x_0^0, \quad \phi'(t_0) = x_1^0, \quad \dots, \quad \phi^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}^0.$$

Abreviadamente escrevemos

$$x^{(m)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}), \quad x^{(i)}(t_0) = x_i^0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (5.11)$$

Este problema é equivalente ao seguinte problema de Cauchy para sistemas de equações

$$\begin{cases} x'_r = x_{r+1}, & , x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, m, \\ x'_m = f(t, x_1, x_2, \dots, x_m), & r = 1, 2, \dots, m-1. \end{cases} \quad (5.12)$$

Assim as questões relativas à existência de soluções de (5.8) são reduzidas a questões similares para sistemas (5.10). Em particular o Teorema 5.3 é válido para equações de ordem  $m$  qualquer e também utiliza-se o método de aproximações sucessivas para encontrar a solução.

## 5.2 Demonstração da existência de imersão local $C^\infty$ que não é analítica

Nesta seção, apresentaremos uma demonstração da existência de imersão local  $C^\infty$  que não é analítica.

**Teorema 5.4.** *Seja  $M$  uma superfície com curvatura Gaussiana constante negativa,  $K < 0$ , imersa isometricamente em  $\mathbb{R}^3$ . Então existe uma parametrização local de  $M$ ,  $X(u, v)$ , tal que a primeira e a segunda formas fundamentais são dadas por*

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2 \cos z \, dudv + dv^2, \\ II &= -2\sqrt{-K} \sin z \, dudv, \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde  $z$  é uma função diferenciável que satisfaz a equação

$$z_{uv} = -K \sin z. \tag{5.14}$$

Reciprocamente, para cada solução  $z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $U$  um aberto, de (5.14) tal que  $\sin z \neq 0$ , em  $U$ , podemos associar uma superfície com curvatura Gaussiana constante negativa,  $K < 0$ , imersa isometricamente em  $\mathbb{R}^3$ , cujas primeira e segunda formas fundamentais são dadas por (5.13).

**Demonstração.** Ver [12] e [1].

■

**Lema 5.1.** *A função  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\psi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(a^j t)}{j!},$$

onde  $a$  é um inteiro maior que 2, é contínua, bem como as derivadas de todas as ordens.

**Demonstração.** Temos que a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin(a^j t)}{j!} \tag{5.15}$$

é normalmente convergente, pois

$$\left| \frac{\sin(a^j t)}{j!} \right| \leq \frac{1}{j!},$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ . Mas a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

é convergente. Então, pelo Teorema 5.2, a série (5.15) é uniformemente convergente.

Por conseguinte, pelo Teorema 5.1, a função  $\psi(t)$  é contínua.

Agora observamos que as séries

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k} \sin(a^j t)}{j!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.16)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k+1} \cos(a^j t)}{j!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.17)$$

são uniformemente convergentes, pelo Teorema 5.2. Assim, pela Proposição 5.2, temos que  $\psi(t)$  possui derivadas de todas as ordens, sendo (5.16) e (5.17) as derivadas de ordem par,  $n = 2k$ , e ímpar,  $n = 2k + 1$ , de  $\psi(t)$ , respectivamente. Então por argumentação análoga a anteriormente feita para mostrar a continuidade de  $\psi(t)$ , temos que as derivadas de todas as ordens também são contínuas.

■

**Lema 5.2.** *Nas condições do Lema 5.1 a desigualdade*

$$|\psi^{(n)}(t)| < e^{a^n} \quad (5.18)$$

é válida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além disso, temos que

$$\left| \psi^{(2k+1)} \left( \frac{2\chi\pi}{a^p} \right) \right| \sim e^{a^{2k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.19)$$

onde  $a$  é um inteiro maior que 2,  $\chi$  é um inteiro não nulo e  $p$  é um inteiro maior que 0.

**Demonstração.** Temos das expressões (5.16) e (5.17) que

$$|\psi^{(n)}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a^j)^n}{j!} = e^{a^n}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ . Logo temos  $|\psi^{(n)}(t)| \leq e^{a^n}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Mas não existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $|\psi^{(n)}(t)| = e^{a^n}$ . Assim verifica-se (5.18).

Temos também da expressão (5.17) que

$$\begin{aligned} \psi^{(2k+1)}\left(\frac{2\chi\pi}{a^p}\right) &= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k+1}}{j!} \cos(a^{j-p} 2\chi\pi) + \sum_{j=p}^{\infty} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k+1}}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k+1}}{j!} \cos(a^{j-p} 2\chi\pi) - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k+1}}{j!} + \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k+1}}{j!}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\psi^{(2k+1)}\left(\frac{2\chi\pi}{a^p}\right) - \wp = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k+1}}{j!},$$

onde  $\wp = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k+1}}{j!} [\cos(a^{j-p} 2\chi\pi) - 1]$ , que é um número real. Logo, como para cada  $k$  fixo  $(-1)^k$  tem um sinal bem determinado, temos

$$\begin{aligned} \left| \psi^{(2k+1)}\left(\frac{2\chi\pi}{a^p}\right) \right| &\sim \left| \psi^{(2k+1)}\left(\frac{2\chi\pi}{a^p}\right) - \wp \right| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a^j)^{2k+1}}{j!} \right| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a^j)^{2k+1}}{j!} \\ &= e^{a^{2k+1}}. \end{aligned}$$

Demonstrando portanto (5.19). ■

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \sin w, \\ w(0, v) = \psi(v), \end{cases} \quad (5.20)$$

onde  $\psi(v)$  é a função dada no Lema 5.1. O método das aproximações sucessivas nos fornece uma solução contínua, assim como qualquer derivada, em todos os pontos do

plano, para o problema acima. Sendo esta,

$$w(u, v) = \psi(v) + \int_0^u \int_0^v \sin[w(r, s)] ds dr \quad (5.21)$$

a expressão para uma solução de (5.20).

**Observação 5.1.** Se  $a$  é um inteiro maior que 2 temos que  $a^2 > 2a$ , e assim

$$e^{a^2-a} - e^a > 0.$$

**Lema 5.3.** Para a função (5.21), acima definida, temos

$$\left| \frac{\partial^n w}{\partial v^n}(u, v) \right| < e^{a^n} + (n-1)! |u_0| \mu_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.22)$$

onde

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = e^{a^n} + (n-1)! |u_0| \mu_{n-1}, \quad (5.23)$$

$$|u_0| < e^{a^2-a} - e^a \quad e \quad u \in (0, |u_0|). \quad (5.24)$$

Além disso,

$$\mu_n < \mathfrak{B} e^{a^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.25)$$

onde  $\mathfrak{B}$  é uma constante.

**Demonstração.** Para provar a desigualdade (5.22) procederemos por indução.

Se  $n = 1$ , temos

$$\frac{\partial w}{\partial v}(u, v) = \psi'(v) + \int_0^u \sin[w(r, v)] dr.$$

Assim, pela desigualdade (5.18), obtemos

$$\left| \frac{\partial w}{\partial v}(u, v) \right| < e^a + |u_0| = e^a + (1-1)! |u_0| \mu_0 = \mu_1.$$

Se  $n = 2$ , temos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(u, v) = \psi''(v) + \int_0^u \cos[w(r, v)] \frac{\partial w}{\partial v}(r, v) dr.$$



Assim, pela desigualdade (5.18) e pela desigualdade (5.22), para  $n = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(u, v) \right| &< e^{a^2} + |u_0| \mu_1 \\ &= e^{a^2} + (2 - 1)! |u_0| \mu_1 = \mu_2. \end{aligned}$$

Se  $n = 3$ , temos

$$\frac{\partial^3 w}{\partial v^3}(u, v) = \psi^{(3)}(v) + \int_0^u \left[ -\sin[w(r, v)] \left( \frac{\partial w}{\partial v}(r, v) \right)^2 + \cos[w(r, v)] \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(r, v) \right] dr.$$

Assim, pela desigualdade (5.18) e pela desigualdade (5.22), para  $n = 1$  e  $n = 2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3 w}{\partial v^3}(u, v) \right| &< e^{a^3} + |u_0| (\mu_1^2 + \mu_2) \\ &= e^{a^3} + |u_0| (2\mu_2 + \mu_1^2 - \mu_2). \end{aligned}$$

Temos que  $\mu_1^2 - \mu_2 < 0$ , pois segue de (5.22) que

$$\mu_1^2 - \mu_2 = e^{2a} + |u_0| e^a - e^{a^2} < e^{2a} + e^{a^2} - e^{2a} - e^{a^2} = 0. \quad (5.26)$$

Logo

$$\left| \frac{\partial^3 w}{\partial v^3}(u, v) \right| < e^{a^3} + (3 - 1)! |u_0| \mu_2 = \mu_3.$$

Se  $n = 4$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial v^4}(u, v) &= \psi^{(4)}(v) + \int_0^u \left[ -\cos[w(r, v)] \left( \frac{\partial w}{\partial v}(r, v) \right)^3 - \right. \\ &\quad \left. - 3 \sin[w(r, v)] \frac{\partial w}{\partial v}(r, v) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(r, v) + \cos[w(r, v)] \frac{\partial^3 w}{\partial v^3}(r, v) \right] dr. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade (5.18) e pela desigualdade (5.22), para  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 3$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^4 w}{\partial v^4}(u, v) \right| &< e^{a^4} + |u_0| (\mu_1^3 + 3\mu_1\mu_2 + \mu_3) \\ &= e^{a^4} + |u_0| (\mu_1^3 + 3\mu_1\mu_2 + \mu_3 + 6\mu_3 - 6\mu_3) \\ &< e^{a^4} + |u_0| (4\mu_1\mu_2 - 5\mu_3 + 6\mu_3), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (5.26), que implica  $\mu_1^3 + 3\mu_1\mu_2 < 4\mu_1\mu_2$ . Temos que  $4\mu_1\mu_2 - 5\mu_3 < 0$ , pois

$$\begin{aligned} 4\mu_1\mu_2 - 5\mu_3 &= 4e^{a^2+a} + 4|u_0|e^{2a} + 4|u_0|^2 - 6|u_0|e^{a^2} - 6|u_0|^2e^a - 6|u_0|^3 - 5e^{a^3} \\ &= 4e^{a^2+a} - 5e^{a^3} + |u_0|(4e^{2a} - 6e^{a^2}) + |u_0|^2(4 - 6e^a) - 6|u_0|^3. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$a^3 > a^2 + a \Rightarrow 4e^{a^2+a} - 5e^{a^3} < 0,$$

$$a^2 > 2a \Rightarrow 4e^{2a} - 6e^{a^2} < 0,$$

$$a \geq 3 \Rightarrow 4 - 6e^a < 0,$$

assim,  $4\mu_1\mu_2 - 5\mu_3 < 0$ . Logo

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^4 w}{\partial v^4}(u, v) \right| &< e^{a^4} + 6|u_0|\mu_3 \\ &= e^{a^4} + (4-1)!|u_0|\mu_3 = \mu_4. \end{aligned}$$

Agora suponhamos que a desigualdade (5.22) seja válida para todo  $n \leq s$ , com  $s \geq 4$ , então provaremos que esta é válida para  $n = s + 1$ , ou seja,

$$\left| \frac{\partial^{s+1} w}{\partial v^{s+1}}(u, v) \right| < e^{a^{s+1}} + s!|u_0|\mu_s.$$

Temos que

$$\frac{\partial^{s+1} w}{\partial v^{s+1}}(u, v) = \psi^{(s+1)}(v) + \int_0^u \frac{\partial^s}{\partial v^s}(\sin[w(r, v)])dr.$$

Pela Proposição (5.3) e utilizando a desigualdade (5.22), para  $n \leq s$  temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^s(\sin[w(r, v)])}{\partial v^s} \right| &\leq \sum_{l=1}^s |\alpha(m_1, \dots, m_l)| \left| \frac{\partial^{m_1} w}{\partial v^{m_1}}(r, v) \right| \dots \left| \frac{\partial^{m_l} w}{\partial v^{m_l}}(r, v) \right| \\ &< \sum_{l=1}^s |\alpha(m_1, \dots, m_l)| \mu_{m_1} \dots \mu_{m_l} \\ &= \mu_s + \sum_{l=2}^s |\alpha(m_1, \dots, m_l)| \mu_{m_1} \dots \mu_{m_l}. \end{aligned}$$

Assim obtemos, pela desigualdade (5.18) e pela desigualdade (5.22), para  $n \leq s$ , que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{s+1} w}{\partial v^{s+1}}(u, v) \right| &< e^{a^{s+1}} + |u_0| \left( \mu_s + \sum_{l=2}^s |\alpha(m_1, \dots, m_l)| \mu_{m_1} \dots \mu_{m_l} \right) \\ &= e^{a^{s+1}} + s! |u_0| \mu_s + |u_0| \left( (1-s!) \mu_s + \sum_{l=2}^s |\alpha(m_1, \dots, m_l)| \mu_{m_1} \dots \mu_{m_l} \right). \end{aligned}$$

Agora utilizando o fato de que  $\mu_1^2 < \mu_2$  e a expressão (5.23), para  $n \leq s$ , obtemos que

$$(1-s!) \mu_s + \sum_{l=2}^s |\alpha(m_1, \dots, m_l)| \mu_{m_1} \dots \mu_{m_l} < 0.$$

Dessa forma provamos que

$$\left| \frac{\partial^{s+1} w}{\partial v^{s+1}}(u, v) \right| < e^{a^{s+1}} + s! |u_0| \mu_s = \mu_{s+1}.$$

Provando assim a desigualdade (5.22), para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Agora, provaremos a desigualdade (5.25). Para isso, definamos

$$x_0 = 1, \quad x_n = \mu_n e^{-a^n} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{(n-1)! |u_0|}{e^{a^n - a^{n-1}}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.27)$$

observando que

$$x_n = 1 + y_n x_{n-1}.$$

Temos que

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{n}{e^{a^{n+1} - a^n}}.$$

Como  $a$  é um inteiro maior que 2, observamos que

$$a^{n-1}(a-1)^2 \geq 4a^{n-1} \geq 4n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto obtemos que

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \leq \frac{n}{e^{4n}} \leq \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma seqüência decrescente, com  $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Conseqüentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

Tomemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $y_n < \frac{1}{2}$ ,  $\forall n \geq n_0$ , e seja

$$\mathfrak{B} = \max\{2, x_1, \dots, x_{n_0}\}.$$

Temos que se  $n \leq n_0$  então  $x_n \leq \mathfrak{B}$ . Agora observamos que se  $x_n \leq \mathfrak{B}$ , para algum  $n \geq n_0$ , temos

$$x_{n+1} = 1 + y_{n+1}x_n < 1 + \frac{\mathfrak{B}}{2} \leq \mathfrak{B}.$$

Assim temos  $x_n \leq \mathfrak{B}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Portanto segue de (5.27) que  $\mu_n \leq \mathfrak{B}e^{a^n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ■

**Teorema 5.5.** *Existe superfície não analítica com curvatura Gaussiana constante negativa admitindo em cada ponto regular as derivadas de qualquer ordem.*

**Demonstração.** Pelo Teorema 5.4 podemos observar que este teorema reduz-se a mostrar que a equação

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \sin w \tag{5.28}$$

admite solução contínua, com todas as derivadas contínuas, mas que não é analítica.

Para isso, consideremos o problema (5.20), com solução dada pela expressão (5.21). Observamos que para mostrar a não analiticidade de (5.21) é suficiente estabelecer que para valores da forma  $v_0 = \frac{2\chi\pi}{a^p}$ , onde  $\chi$  é um inteiro não nulo,  $a$  um inteiro maior que 2 e  $p$  um inteiro maior que 0, temos que  $w(u, v_0)$  não pode ser desenvolvido numa série de potências inteiras de  $v_0$ , para qualquer  $u \in (0, |u_0|)$ .

O Lema 5.1 garante a continuidade de  $w(u, v_0)$ , assim como de todas as suas derivadas. Pelo Lema 5.3 encontramos

$$\frac{\partial^{2k+1} w}{\partial v^{2k+1}}(u, v_0) = \psi^{(2k+1)}(v_0) + H_k,$$

onde  $|H_k| < (2k)!|u_0|\mathfrak{B}e^{a^{2k}}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Agora, aplicando (5.19) do Lema 5.2 obtemos

$$\left| \frac{\partial^{2k+1} w}{\partial v^{2k+1}}(u, v_0) \right| \sim e^{a^{2k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Assim concluimos, pelo teste da razão, que a série de Taylor de  $w(u, v_0)$ , entorno de  $(u, v_0)$ , tem raio de convergência nulo. Portanto a solução (5.21) não é analítica.

■

Observamos que M. E. Holmgren também apresentou uma demonstração para o *Teorema de Hilbert* neste artigo, em que trata da existência de imersão  $C^\infty$  que não é analítica, ver [7]. Contudo, esta demonstração do *Teorema de Hilbert* coincide com a apresentada no Capítulo 2, por isso a omitimos aqui.

# Referências Bibliográficas

- [1] Cartan, E. *Sur les Variétés de Courbure Constant d'un Espace Euclidien ou Noneuclidien*. Bull. Soc. Math. France 47, 125–160, 1919, e 48, 132–208, 1920.
- [2] do Carmo, M.P. *Introdução à Geometria Diferencial Global*. IMPA, Rio de Janeiro, 1a edição, 1970.
- [3] do Carmo, M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey, 1st edition, 1976.
- [4] do Carmo, M.P. *Formas Diferenciais e Aplicações*. IMPA, Rio de Janeiro, 1a edição, 1983.
- [5] do Carmo, M.P. *Geometria Riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro, 2a edição, 1988.
- [6] Hilbert, D. *Ueber flächen von constanter gausscher krümmung*. Trans. Amer. Math. Soc. 2, 87–99, 1901.
- [7] Holmgren, M. E. *Sur les surfaces à courbure constante négative*. C. R. Acad. Sci. Paris 134, 740–743, 1902.
- [8] Lima, E.L. *Cálculo Tensorial*. IMPA, Rio de Janeiro, 1a edição, 1965.
- [9] Lima, E.L. *Curso de Análise. Vol. 1*. IMPA, Rio de Janeiro, 10a edição, 2002.
- [10] Milnor, T.K. *Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature*. Advances in Mathematics 8, 474–543, 1972.

- [11] Moore, J.D. *Applications of Exterioly Quadratic Forms*. Thesis, University of California, Berkeley, 1961.
- [12] Moore, J.D. *Isometric Immersion of Space Forms in a Space Form*. Pac. J. of 40, 157–166, 1972.
- [13] Sotomayor, J.M. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1a edição, 1979.
- [14] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Diferential Geometry. Vol. 1*. Publish or Perish Inc., Houston, 2nd edition, 1979.
- [15] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Diferential Geometry. Vol. 3*. Publish or Perish Inc., Houston, 2nd edition, 1979.
- [16] Stoker, J.J. *Pure and Applied Mathematics. Diferential Geometry. Vol. XX*. Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [17] Tenenblat, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. Editora Universidade de Brasília, Brasília, 1a Reimpressão, 1990.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)