

**UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO RIO  
GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FÍSICA E ESTATÍSTICA  
DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE MESTRADO EM MODELAGEM MATEMÁTICA**

**SINCRONIZAÇÃO DOS SISTEMAS CAÓTICOS DE  
LOTKA-VOLTERRA USANDO CONTROLE ÓTIMO  
LINEAR FEEDBACK**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Janice Pinheiro Boeira**

**Ijuí, RS, Brasil.**

**2007**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**SINCRONIZAÇÃO DOS SISTEMAS CAÓTICOS DE LOTKA-  
VOLTERRA USANDO CONTROLE ÓTIMO LINEAR  
FEEDBACK**

**por**

**Janice Pinheiro Boeira**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Modelagem Matemática do Departamento de Física, Estatística e Matemática e do Departamento de Tecnologia da Universidade Regional do Noroeste do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Ciências da Modelagem Matemática**

**Orientador: Prof. Dr. Marat Rafikov**

**Ijuí, RS, Brasil.**

**2007**

**UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE O ESTADO DO RIO  
GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM  
MATEMÁTICA**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação

**“SINCRONIZAÇÃO DOS SISTEMAS CAÓTICOS DE LOTKA-  
VOLTERRA USANDO CONTROLE ÓTIMO LINEAR FEEDBACK”**

Elaborada por

**JANICE PINHEIRO BOEIRA**

Como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática

Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Marat Rafikov – (Orientador) UNIJUI

---

Prof. Dr. Jorge Luis Palacios Felix – URI

---

Prof. Dr. Antonio Carlos Valdiero – UNIJUI

Ijuí-RS, 02 de Abril de 2007.

Às amadas famílias de Itaqui e de Ijuí, a quem nada pedi, mas tudo de melhor recebi, dedico não só este trabalho, mas todas as futuras conquistas que Deus nos permitir.

Agradeço ao Prof. Marat pela confiança e pelos ensinamentos. À CAPES, cujo apoio foi fundamental para a realização deste trabalho. Aos colegas, professores e amigos do mestrado pela partilha do saber e da dúvida, e pela alegria de conviver. Por tudo, obrigada Senhor!

## RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é utilizar o controle ótimo a fim de obter a sincronização de dois sistemas idênticos de Lotka-Volterra de duas presas e um predador em comportamento caótico. O gênero de sincronização desejada é do tipo mestre-escravo em que a solução de um dos sistemas converge para a do outro. O regime caótico dos sistemas é garantido pelo conjunto de parâmetros utilizado. Inicialmente é empregado um controle não-linear baseado no teorema de Krasovskii. A seguir, utiliza-se o controle linear feedback para obter a sincronização, com justificativa para o uso de controle linear em sistemas não-lineares. Finalmente, conclui-se que a sincronização, ao utilizar o controle linear, ocorre tão rapidamente quanto na utilização do controle não-linear, com a vantagem de que o linear é mais eficiente na presença de perturbações, ruídos e outros fatores que influenciam o sistema físico.

**Palavras-chave:** sincronização caótica; controle feedback ; sistemas de Lotka-Volterra.

## ABSTRACT

The main focus of this work is to use the optimal control in order to get the synchronization of Lotka-Volterra two identical systems of two-prey-one-predator in a chaotic behavior. The desired synchronization kind is the master-slave type where the solution of the slave system converges to the master one. The chaotic regime of the systems is guaranteed by the set of parameters. Initially a nonlinear control is employed based in the Krasovskii theorem. Next, the linear feedback control is used to get the synchronization, supporting the linear control use in nonlinear systems. Finally, using the linear control, the synchronization occurs as quick as using the nonlinear control, taking advantage of that the linear one is more efficient in the presence of disturbances, noises and other factors which influence the physical system.

**Key-words:** chaotic synchronization; feedback control ; Lotka-Volterra systems.



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 - Atrator de Lorenz: representação no espaço de fase de seu clássico sistema que descreve o fluxo de fluídos na atmosfera.....	16
FIGURA 1.2 - Divergência nas trajetórias da componente $x_1$ do sistema de Lorenz mediante pequenas mudanças na condição inicial: $(5;5;5)$ , linha contínua; $(5,5;5;5)$ , linha tracejada.....	18
FIGURA 1.3 - Atrator estranho do sistema de Rössler.....	19
FIGURA 1.4 - Representação bidimensional da evolução de um elemento de volume de raio $\varepsilon_0(x_0)$ em torno de um ponto inicial $x_0$ .....	21
FIGURA 1.5 - Regulador de velocidade para motores a vapor apresentado por James Watt, em 1788 (CASTRUCCI E BATISTA, 1991).....	31
FIGURA 2.1 - Esquema original mestre-escravo para sincronização por substituição completa.....	36
FIGURA 2.2 - Trajetórias de $y_1$ e $y_2$ sincronizadas por substituição completa.....	37
FIGURA 2.3 - Trajetórias de $z_1$ e $z_2$ sincronizadas por substituição completa.....	38
FIGURA 2.4 - O gráfico de $y_1$ versus $y_2$ converge para a identidade $y_1=y_2$ .....	38
FIGURA 2.5 - O gráfico de $z_1$ versus $z_2$ converge para a identidade $z_1=z_2$ .....	39
FIGURA 2.6 - Trajetórias no espaço de fase dos sistemas de Lorenz mestre e escravo sincronizados por substituição completa.....	39
FIGURA 4.1 - Relação estrutural de evolução entre quatro sistemas com espécies disponíveis de duas presas e um predador.....	55
FIGURA 4.2 - Diagrama de fase dos sistema de Lotka-Volterra de duas presas e um predador com condição inicial $(10;20;1)$ .....	57
FIGURA 5.1 - Diagrama de fase dos dois sistemas idênticos de Lotka-Volterra, com diferentes condições iniciais, sem aplicação de controle.....	66
FIGURA 5.2. - Diagrama de fase dos dois sistemas idênticos de Lotka-Volterra, com diferentes condições iniciais, sincronizados pelo controle ótimo (5.12) conforme o teorema de Krasovskii.....	67
FIGURA 5.3 - Trajetória temporais sincronizadas das componentes correspondentes dos sistemas mestre e escravo.....	68
FIGURA 5.4 - Trajetórias dos sistemas mestre e escravo com controle (5.12) no intervalo $[0,3]$ .....	69
FIGURA 5.5 - Gráfico do erro entre a trajetória do sistema escravo e do sistema mestre para cada componente. Condição inicial $(-199,9;-1.8;29)$ .....	70
FIGURA 6.1 - Comportamento das componentes dos sistemas mestre e escravo antes da sincronização.....	76
FIGURA 6.2 - Trajetórias temporais dos sistemas sincronizados através do controle feedback (6.18).....	77

FIGURA 6.3 - Trajetórias temporais das três componentes sincronizadas no intervalo [0,3].....	78
FIGURA 6.4 – Erro entre as trajetórias temporais das componentes dos sistemas mestre e escravo.....	79
FIGURA 6.5 – Gráficos de $x$ versus $y$ mostrando que as trajetórias convergem para a identidade $y=x$ .....	80
FIGURA 6.6 – Diagrama de fase dos sistemas mestre e escravo sem controle. As trajetórias pertencem ao mesmo atrator, mas não coincidem.....	81
FIGURA 6.7 – Diagrama de fase dos sistemas sincronizados pelo controle linear feedback. A linha tracejada, sistema escravo, rapidamente rastreia a trajetória do sistema mestre.....	82
FIGURA 6.8 – Gráfico da função $l(e)$ .....	83
FIGURA 6.9 – Evolução do erro de sincronização com variação da matriz $Q$ , mantendo $R=\text{diag}(1,1,1)$ fixo.....	86
FIGURA 6.10 – Evolução do erro de sincronização com variação da matriz $R$ , mantendo $Q=\text{diag}(10,10,10)$ fixo.....	87
FIGURA 6.11 –Influência dos pesos das matrizes no cálculo dos valores mínimos do funcional $J$ . A legenda mostra os diferentes pesos da matriz $R$ .....	88

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1.1 - Resumo das características de processos regulares, caóticos e estocásticos em sistemas dissipativos.....	27
---	----

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>1 DINÂMICA CAÓTICA, CONTROLE E SINCRONIZAÇÃO</b> .....	15
<b>1.1 Caos Determinístico</b> .....	15
1.1.1 Atratores Estranhos.....	17
1.1.2 Caracterização do Caos.....	19
1.1.3 Distinção de Processos Caóticos. ....	26
<b>1.2 Sincronização</b> .....	27
<b>1.3 Uma Visão Geral de Controle</b> .....	29
1.3.1 Controle Feedback... ..	30
<b>2 SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS</b> .....	34
<b>2.1 Sincronização Mestre-Escravo</b> .....	35
<b>2.2 Sincronização de Sistemas Populacionais Caóticos</b> .....	40
<b>3 CONTROLE LINEAR FEEDBACK APLICADO A SISTEMAS NÃO-LINEARES</b> .....	41
<b>3.1 Problema do Regulador Ótimo Linear Minimizando o Funcional Quadrático</b> .....	42
3.1.1 Otimalidade do Controle.....	43
<b>3.2 Feedback Linear para Sistemas Não-Lineares</b> .....	46
<b>3.3 Controlabilidade de Sistemas Dinâmicos</b> .....	51
<b>4 MODELOS POPULACIONAIS DE LOTKA-VOLTERRA</b> .....	53
<b>4.1 Modelos Populacionais</b> .....	53
<b>4.2 Modelo de Duas Presas e Um Predador</b> .....	54
4.2.1 Estudo da Estabilidade do Sistema.....	57
<b>4.3 Sincronização dos Sistemas de Lotka-Volterra através de Controle Ótimo</b> .....	61
<b>5 SINCRONIZAÇÃO CONFORME O TEOREMA DE KRASOVSKII</b>	63
<b>5.1 Sincronização Ótima</b> .....	63
<b>5.2 Resultado da Sincronização Baseada no Teorema de Krasovskii</b> .....	65
<b>6 SINCRONIZAÇÃO USANDO CONTROLE ÓTIMO</b> .....	71
<b>6.1 Formulação do Problema de Sincronização</b> .....	71
<b>6.2 Resultados para o sistema de duas presas e um predador</b> .....	74
<b>6.3 Positividade da Função <math>l(e)</math></b> .....	83

<b>6.4 Seleção de <math>Q</math> e <math>R</math>.....</b>	<b>84</b>
<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>89</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>91</b>

## INTRODUÇÃO

Há mais de três séculos, observou-se que sistemas com movimentos periódicos independentes acoplados, de modo a trocarem sinais entre si, poderiam sincronizar suas fases. Esta foi a contribuição pioneira de Christian Huygens que percebeu o fenômeno da sincronização ao pendurar em uma mesma barra de ferro dois relógios pêndulo - patente obtida por ele 1665 - com movimentos não correlatos inicialmente, mas que tornavam-se síncronos com o passar do tempo.

Durante muitos anos os estudos nessa área não atraíram a atenção dos pesquisadores até que, em 1965, o biólogo Arthur Winfree retomou essa linha de pesquisa ao observar a sincronização no piscar das luzes dos vaga-lumes no sudoeste da Ásia.

Com o surgimento de trabalhos importantes na área de sistemas complexos, em especial, com a consolidação da idéia de caos determinístico, as pesquisas relativas à sincronização deixaram de limitar-se à análise de sistemas com comportamento periódico. O grande marco para o surgimento do campo de estudo da sincronização em sistemas com dinâmica caótica deve-se a Pecora e Carrol (1990). O iminente uso de resultados dessa linha de pesquisa em esquemas de comunicação segura, cada vez mais necessários a uma sociedade que faz da informação seu principal produto, fez com que surgisse ampla literatura científica tratando da sincronização caótica (PECORA E CARROL, 1997).

Trabalhos anteriores na linha de pesquisa em que este se insere tiveram o intuito de levar um sistema com dinâmica caótica a um ponto de equilíbrio ou a uma trajetória periódica. Aqui a trajetória desejada será uma com comportamento caótico. Para que um sistema natural seja viável ecológica ou economicamente não se faz necessário que este

assuma um padrão de estabilidade assintótica, mas que se mantenha dentro de uma faixa de valores aceitáveis, mesmo que em regime caótico. Até porque, acredita-se que a presença do caos em sistemas biológicos ajuda a manter sua diversidade.

O objetivo principal deste trabalho é utilizar o controle linear feedback para atingir a sincronização entre sistemas caóticos. O modelo escolhido para este estudo foi o Lotka-Volterra de duas presas e um predador por sua dinâmica ser bastante conhecida e amplamente estudada. Os sistemas serão sincronizados na forma mestre-escravo através da sincronização idêntica.

De modo mais específico, os objetivos podem ser sistematizados como segue:

- realizar pesquisa bibliográfica sobre a origem dos estudos da sincronização e, mais diretamente, da sincronização caótica;
- formular o problema de controle ótimo linear feedback aplicado a sincronização, justificando seu uso;
- estudar as principais características do modelo de Lotka-Volterra de duas presas e um predador;
- realizar simulações empregando ferramenta de controle ótimo não-linear encontrada na literatura, baseada no teorema de Krasovskii;
- empregar o controle linear feedback para a sincronização de dois sistemas idênticos de Lotka-Volterra na forma mestre-escravo.

O primeiro capítulo traz breve síntese das três linhas norteadoras deste estudo: caos, controle e sincronização. O segundo capítulo busca especificar o tipo de sincronização caótica a que este trabalho se refere, delimitando seu enfoque. Na terceira parte, é apresentado o problema do regulador ótimo linear com funcional quadrático, enfatizando a otimalidade do controle e justificando o uso em sistemas não-lineares. No quarto capítulo, o modelo de Lotka-Volterra é caracterizado em termos da sua interpretação física e da dinâmica da sua

solução: a instabilidade do modelo é mostrada como decorrência de seu comportamento caótico. Os dois últimos capítulos apresentam os resultados da sincronização obtida através de dois tipos de controle. O controle não-linear baseado no teorema de Krasovskii é utilizado para obter a sincronização no quinto capítulo, onde são apresentados os resultados das simulações. Finalmente, no sexto capítulo é apresentado o resultado da sincronização de dois sistemas de duas presas e um predador através do controle ótimo linear feedback, assim como as simulações necessárias para sua implementação.



# 1 DINÂMICA CAÓTICA, CONTROLE E SINCRONIZAÇÃO

## 1.1 Caos Determinístico

As últimas décadas do século XX marcaram o cenário científico pelas profundas transformações ocorridas em relação a conceitos antes estabelecidos e pelo surgimento de novos paradigmas. Neste contexto é que surge um campo de estudo que hoje chega a ser chamado de *a nova ciência do caos* (GLEICK, 1991).

Indagações filosóficas ou científicas formuladas a partir da observação da natureza e seus fenômenos, e que antes pareciam desprovidas de nexos comuns, encontram na complexidade do caos um ponto de convergência. O caos passa a ser visto como a ciência do mundo cotidiano, relacionada a fatos diversos, como a diversidade dos ecossistemas, a ocorrência de eventos meteorológicos, a maneira pela qual a água forma vórtices em uma correnteza. O desafio, porém, vai além de reconhecer sua presença nos mais variados tipos de fenômenos, mas principalmente representá-lo através de modelos teóricos que permitam análises, simulações e previsões nas situações em que o caos parece estar presente.

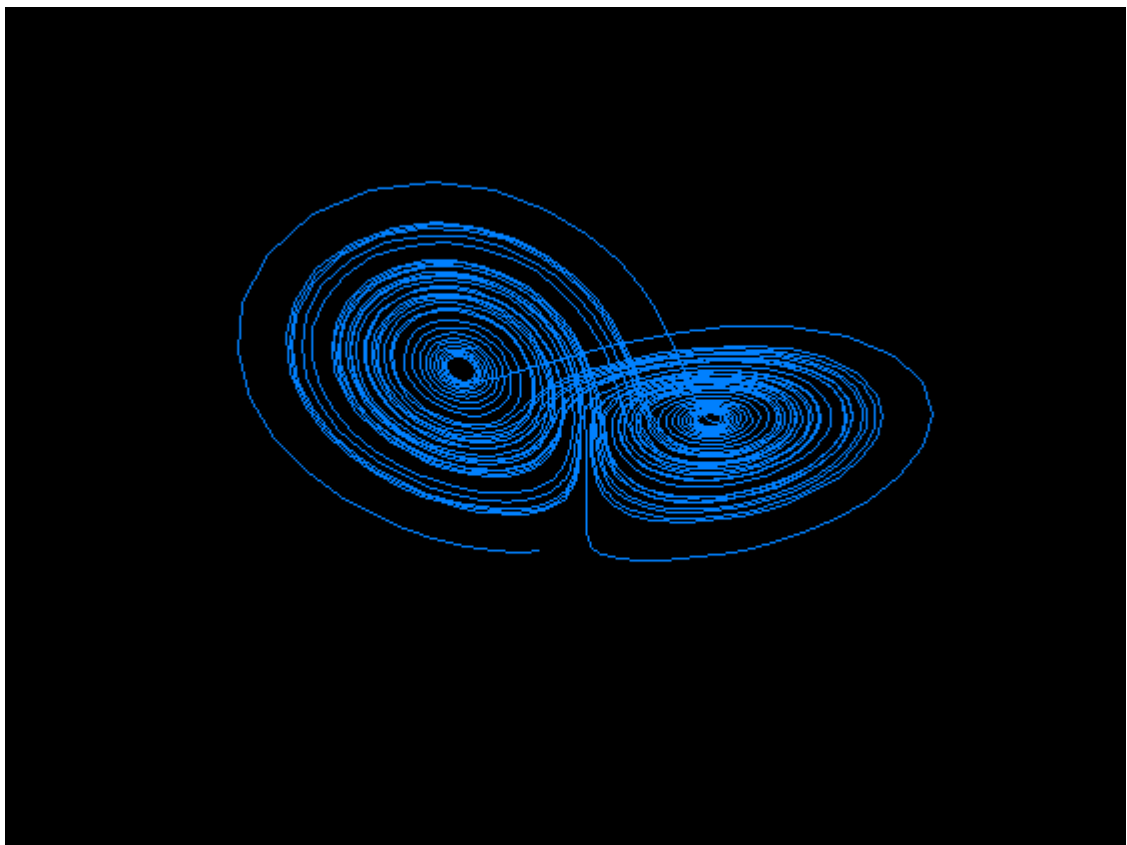
Os estudos introduzidos por Edward N. Lorenz em 1963, no seu clássico artigo que tratava da estabilidade de fluxos de fluídos na atmosfera, apontaram a direção de um novo campo de pesquisa da ciência moderna. As equações do modelo por ele criado são

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\alpha x + \alpha y \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\gamma z + xy.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Para reproduzir o comportamento da nossa atmosfera, Lorenz formou uma camada de gás entre duas placas com temperaturas distintas. A variável  $x$  relaciona-se à intensidade do movimento do fluido, enquanto as variáveis  $y$  e  $z$  relacionam-se com as variações de

temperatura nas direções horizontal e vertical. Os parâmetros  $\alpha$  (número de Prandtl) e  $\beta$ , reais positivos, dependem do material e das propriedades geométricas da camada de fluido. O parâmetro  $\gamma$  (número de Rayleigh) é proporcional à diferença de temperatura entre as placas (BOYCE e DI PRIMA, 2001). Variações da diferença de temperatura aplicada modificam a importância relativa dos efeitos não lineares no modelo (BERGÉ, 1984).

Pela primeira vez observou-se que um modelo determinístico poderia ter um



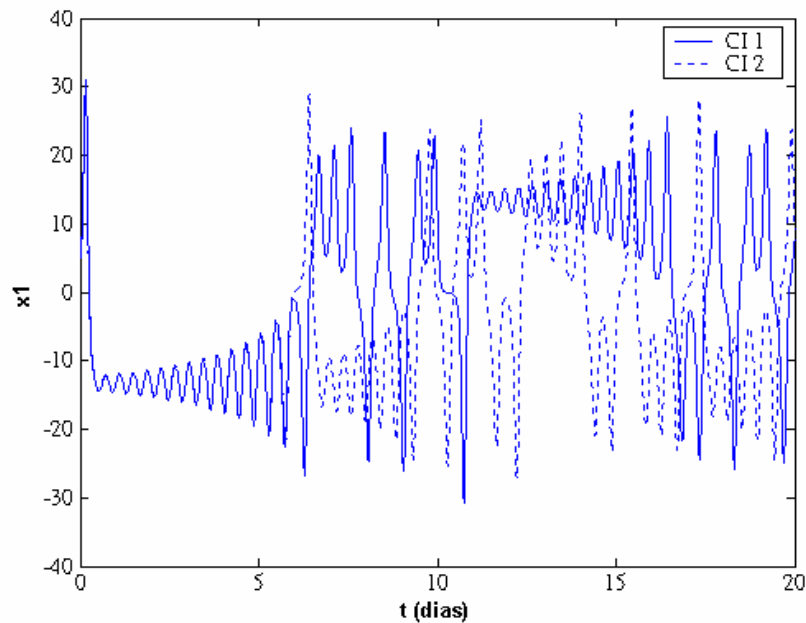
Contudo, mesmo sendo o caos determinístico uma das áreas mais ativas da pesquisa matemática atual, muitas perguntas permanecem sem resposta. Algumas das questões são de natureza matemática, enquanto outras estão relacionadas a aplicações físicas ou interpretações de soluções. Áreas específicas da Física, maior campo de confluência do estudo do caos, discutem a aplicação das ferramentas típicas dos sistemas tradicionais, como critérios de estabilidade de Routh-Hurwitz, Jury, segundo método de Lyapunov e critérios de controlabilidade, entre outras. Eles consideram imperativa a adoção de critérios mais robustos para caracterização do caos.

Sabe-se das dificuldades e riscos inerentes a qualquer tentativa de definição geral de uma disciplina ou área de estudo, em especial uma tão abrangente quanto a do caos determinístico. A maior dificuldade encontra-se em resumir o conteúdo de milhares de linhas em umas poucas e o risco recai em deixar de fora da definição alguns aspectos importantes da matéria em questão. Por isso é que, sem pretensões de vislumbrar todos os horizontes descortinados por essa nova ciência, as subseções seguintes terão por objetivo fazer a abordagem dos principais tópicos relacionados ao estudo de dinâmicas caóticas: a existência de atratores estranhos e os critérios de caracterização da presença de comportamento caótico em sistemas.

### 1.1.1 Atratores Estranhos

Para que seja compreendida a noção de caos determinístico, é importante falar sobre atratores estranhos. Um fluxo contínuo autônomo que descreve a dinâmica da evolução de um sistema dissipativo determinístico tem suas trajetórias convergindo para um atrator: um conjunto compacto no espaço de fases e invariante sob o fluxo. Podem existir vários atratores, mas esta análise estará restrita ao caso da existência de um único atrator. Os atratores podem ser de quatro tipos: atrator pontual, que é independente do tempo; ciclo limite, que tem amplitude e período; toro, regime *quasi*-periódico; e atratores estranhos, com dependência sensitiva às condições iniciais.

A dinâmica caótica surge nos sistemas determinísticos cujas trajetórias evoluem assintoticamente para atratores estranhos. Para cada condição inicial corresponde uma trajetória diferente.

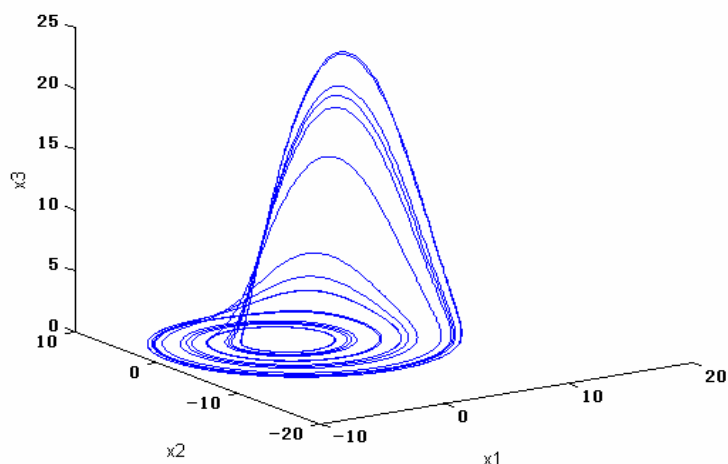


**Figura 1.2-Divergência nas trajetórias da componente  $x_1$  do sistema de Lorenz mediante pequenas mudanças na condição inicial:  $(5;5;5)$ , linha contínua;  $(5.5;5;5)$ , linha tracejada.**

Pequenas diferenças nas condições iniciais são amplificadas exponencialmente como resultado das não-linearidades presentes no sistema, isto é, comportamentos caóticos surgem mesmo na ausência de ruído ou flutuações externas. O sistema de Rössler,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c)\end{aligned}\tag{1.2}$$

por exemplo, é um conjunto de três equações diferenciais ordinárias, muito conhecido por ser considerado um dos sistemas caóticos com menor grau de não-linearidade possível. Seu atrator pode ser visto na Figura 1.3.



**Figura 1.3-Atrator estranho do sistema de Rössler.**

### 1.1.2 Caracterização do Caos

A necessidade de estabelecer critérios que caracterizem um comportamento caótico em sistemas dinâmicos é um dos problemas centrais da teoria do caos. De acordo com o enfoque dado por Fiedler-Ferrara e Do Prado (1995), a presença de atratores estranhos com dimensão fractal é própria desta classe de sistemas e dificilmente detectada pelos métodos clássicos. Entenda-se por dimensão fractal aquela em que a geometria do objeto tem dimensão caracterizada por um número irracional ou fracionário, sugerindo a complexidade de ser mais do que linha e menos do que superfície. Num conceito moderno, o caos pode ser entendido como o comportamento estocástico de um processo determinístico. A transformada de Fourier e a função de autocorrelação não distinguem em uma série de dados experimentais a ocorrência de ruído branco ou caos determinístico. As seções de Poincaré ou retratos de fase não são úteis a menos que a dinâmica se desenvolva num espaço com dimensão  $\leq 3$ .

Sendo assim, séries temporais experimentais podem ser usadas para reconstruir o atrator em um pseudo-espaço de fases baseando-se em um procedimento proposto por Takens (1981). Depois desta etapa, a caracterização dos atratores pode ser feita por uma abordagem métrica efetivada segundo uma caracterização dinâmica (FIEDLER-FERRARA e DO PRADO, 1995). A partir daí obtém-se informações a respeito da taxa de expansão de trajetórias inicialmente próximas (expoentes de Lyapunov) ou da taxa de produção de informação no sistema (entropia de Kolmogorov-Sinai).

### Expoentes de Lyapunov

A introdução do conceito associado à determinação analítica de expoentes de Lyapunov pode ser feita de forma heurística (FIEDLER-FERRARA E DO PRADO, 1995), ou seja, por um método que, embora não rigoroso, produz uma solução satisfatória (FERREIRA, 1999). Considerando-se sistemas contínuos de  $m$  equações diferenciais ordinárias deve-se imaginar um pequeno hiper-volume esférico de teste de estados iniciais vizinhos  $y_0$  (raio  $\varepsilon_0(x_0)$ ) em torno do ponto inicial  $x_0$  de uma linha de fluxo em que  $x_i$  indica a posição no instante  $i$ , isto é,

$$|y_0 - x_0| \leq \varepsilon_0(x_0) \quad (1.3)$$

Com o passar do tempo o fluxo deforma a hiper-esfera num objeto hiper-elipsoidal com eixos principais  $\varepsilon_k(t)$  e os expoentes de Lyapunov são definidos por

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

Em geral os  $\lambda_i$  dependem do estado inicial  $x_0$ , mas em muitos casos eles são constantes ao longo de uma significativa região do espaço de fases.

Da equação (1.4) é recorrente que

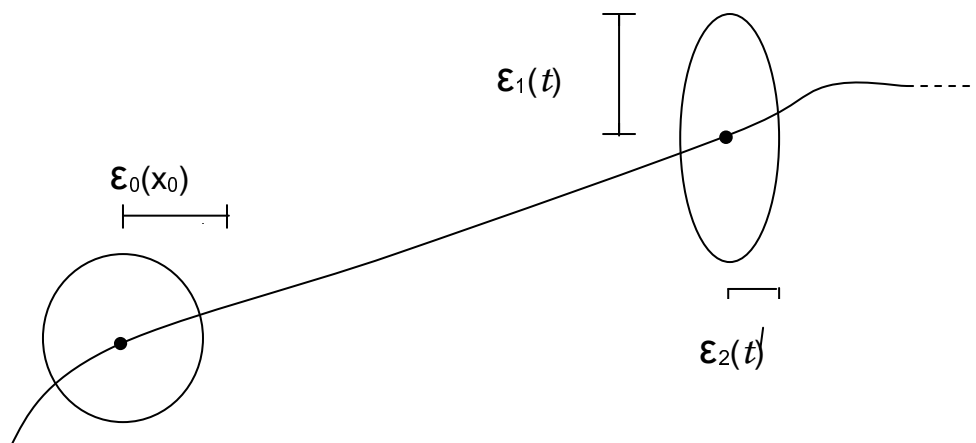
$$\varepsilon_i(t) \square \varepsilon_0(x_0)e^{\lambda_i t} \quad (1.5)$$

Pode-se então concluir que:

a) a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas;

b) para uma solução caótica, associada a um atrator estranho, a dependência às condições iniciais implica na existência de pelo menos em expoente de Lyapunov  $\lambda_i > 0$ ;

c) para uma solução periódica ou *quasi*-periódica pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não devem se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial. Segue portanto de (1.5) que no caso de solução periódica ou *quasi*-periódica  $\lambda_i < 0$  nas direções perpendiculares ao movimento e  $\lambda_i = 0$  ao longo da trajetória.



**Figura 1.4-Representação bidimensional da evolução de um elemento de volume de raio  $\varepsilon_0(x_0)$  em torno de um ponto inicial  $x_0$ .**

Escreve-se o elemento de hiper-volume num instante  $t$  no espaço de fase como

$$\delta V(t) = \prod_{i=1}^m \varepsilon_i(t) \quad (1.6)$$

Substituindo (1.3) em (1.4) tem-se

$$\delta V(t) = \delta V(0) \exp\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i t\right) \quad (1.7)$$

Existem, portanto, duas situações para as quais o hiper-volume no espaço de fases não diverge:

a)  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$  quando , situação  $\delta V(t) = \delta V(0)$  em que e o sistema é conservativo (teorema de Liouville);

b)  $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$  quando , que resulta em  $\delta V(t) < \delta V(0)$  (diminuição do hiper-volume no espaço de fases) e o sistema é dissipativo.

Os atratores possíveis em um espaço tridimensional considerando-se os sinais dos expoentes de Lyapunov são do tipo:

a) *ponto fixo*: (-,-,-). As trajetórias convergem para um único ponto.

b) *ciclo limite*: (0,-,-). O expoente nulo corresponde à direção ao longo da trajetória.

c) *toro*  $T^2$ : (0,0,-). Deslocamentos em duas direções.

d) *atrator estranho*: (+,0,-). O expoente positivo caracteriza a dependência sensível às condições iniciais. Ao longo da trajetória associa-se um expoente nulo. Sendo o sistema dissipativo, a desigualdade  $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$  é válida, justificando o terceiro expoente negativo.

Em poucos casos é possível calcular os expoentes característicos de Lyapunov (ECL) analiticamente. O cálculo analítico é facilitado quando a matriz das derivadas parciais



do sistema, conhecida como matriz Jacobiana, é constante. Nos outros casos, deve-se recorrer ao cálculo numérico.

Benettin et al. (1980 apud BREMEN et al. 1997) fornecem uma sólida base analítica para cálculo destes expoentes sendo pioneiros em propor um procedimento do tipo ortogonalização de Gram-Schmidt. Em geral, ao calcular estes expoentes tanto em sistemas discretos quanto contínuos, realiza-se uma fatoração QR da solução fundamental do sistema expressando-a da forma  $Y = QR$ , onde  $Q$  é uma matriz ortogonal e  $R$  uma matriz triangular superior. Os elementos diagonais da matriz  $R$  fornecem os ECL que são função da matriz ortogonal  $Q$  e da matriz Jacobiana do sistema. Para sistemas contínuos,  $Q$  é dependente do tempo (UDWADIA E BREMEN, 2001).

Bremen et al. (1997) apresentam um método numericamente estável, uma variante dos métodos de fatoração QR, que usa uma transformação de Householder (HQR) para determinar todos os ECLs, destacando aspectos como convergência, precisão e eficiência. Considerando que a caracterização do caos em um sistema dinâmico frequentemente pode ser oferecida pelo seu maior expoente de Lyapunov, Bremen et al. (2000) também propõem dois métodos numéricos para determinação do maior expoente  $p$  de sistemas discretos como uma adaptação do método HQR.

Para este trabalho, a caracterização do caos do sistema não foi feita através do cálculo destes expoentes, por tratar-se de um estudo que exige um tratamento específico e aprofundado, fugindo do escopo desta dissertação. No capítulo 4, é mostrada a instabilidade do sistema de modo a indicar a presença de um comportamento não regular na dinâmica do modelo.

### **Entropia de Kolmogorov-Sinai**

Para definir entropia, considere-se um atrator no espaço de fases. Recubra-se este atrator com cubos de lado  $\varepsilon$ . Seja uma seqüência de  $b$  cubos  $i_1, i_2, \dots, i_b$ . Seja  $p(i_1, i_2, \dots, i_b)$  a probabilidade de que o sistema se encontre sucessivamente nos cubos  $i_1, i_2, \dots, i_b$  em intervalos

de tempo regulares  $\tau$ . Segundo Shannon (1949 apud FIEDLER-FERRARA E DO PRADO, 1995) a informação associada à seqüência de  $b$  cubos é proporcional a

Trata-se também da informação necessária para localizar o sistema em uma trajetória especial com precisão  $\varepsilon$ , quando se conhece apenas as probabilidades  $p(i_1, i_2, \dots, i_b)$ . Então é a informação adicional necessária para predizer em qual cubo o sistema estará, sabendo-se que ele esteve em antes. Conseqüentemente, mede a perda de informação do observador (e a conseqüente geração de informação no sistema) entre o tempo  $b\tau$  e  $(b+1)\tau$ .

A entropia métrica ou probabilística ou de Kolmogorov-Sinai (K) é definida como a taxa média de criação de informação no sistema (ou a taxa média de perda de informação do observador), isto é,

## Informação e Expoentes de Lyapunov

Pela definição de Boltzmann para entropia, tem-se genericamente

$$(1) \quad I^{(1)} = \frac{1}{N} \log_2 N$$

onde  $I^{(1)}$  é o número de especificações necessárias para localizar o ponto  $x_0$  em função do número  $N$  de sub-regiões determinadas por uma malha  $\mathcal{B}$  no espaço de fases. A informação  $I^{(1)}$  ligada ao conhecimento da posição  $x_0$  é dada, segundo Shannon (1949 apud FIEDLER-FERRARA E DO PRADO, 1995), por

$$I^{(1)} = -\sum_{i=0}^N p_i \log_2 p_i. \quad (1.11)$$

Se a malha tem  $N$  regiões iguais isso implica que  $p_i = 1/N$  e recupera-se o resultado (1.10).

Comparando-se (1.8) e (1.11) vê-se diferença na base do logaritmo. Contudo, como o interesse não está na informação, mas na taxa em que ela aumenta quando o tamanho dos cubos ou sub-regiões diminui, a base é irrelevante.

Para o caso contínuo, seja  $\Delta x_i$  um elemento de comprimento e  $\varepsilon$  uma unidade de comprimento ( $\varepsilon \ll \Delta x_i$ ). Então  $\Delta x_i = N\varepsilon$ , onde  $N$  desempenha o papel de número de sub-regiões.

A informação que se obtém através da especificação de um ponto em  $\Delta x_i$  usando a unidade  $\varepsilon$  é dada por (1.10), isto é,

$$I_i^{(1)} = \log_2 \frac{\square x_i}{\varepsilon}.$$

Admitindo-se que  $\Delta x_i$  corresponda à distância entre dois pontos no espaço de fases de um sistema dinâmico no instante  $t$ . Seja  $\Delta x_i(0)$  o valor inicial ( $t = 0$ ) dessa distância. De acordo com (1.5) têm-se

$$\square x_i(t) = \square x_i(0)e^{\lambda_i t},$$

onde  $\lambda_i$  é o expoente de Lyapunov associado à dinâmica. Substituindo a última equação em (1.11) resulta

$$I_i^{(1)} = \log_2 \frac{\square x_i(0)e^{\lambda_i t}}{\varepsilon},$$

e, portanto

$$\frac{dI_i^{(1)}}{dt} \propto \lambda_i. \quad (1.12)$$

Conseqüentemente, quando existe um (ou mais) expoente de Lyapunov positivo num sistema dinâmico, produz-se informação no sistema. Trata-se de uma situação típica aos processos caóticos. Se há vários  $\lambda_i > 0$  todos esses expoentes de Lyapunov contribuirão para a produção interna de informação no sistema. É portanto natural que a quantidade  $\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$  se relacione com a taxa de produção de informação no sistema, que é a entropia de Kolmogorov-Sinai.

Ruelle (1985) estabeleceu a desigualdade  $K \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$ . Pesin (1977 apud FIEDLER-FERRARA E DO PRADO, 1995) demonstrou que satisfeitas certas condições vale a igualdade, ou seja,  $K = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$ . Vale enfatizar que a existência de uma entropia de Kolmogorov-Sinai positiva e finita é condição suficiente para a existência de caos determinístico.

### 1.1.3 Distinção de Processos Caóticos

Os sistemas, físicos ou não, podem ser, de um modo geral, classificados em dois grupos: determinísticos ou estocásticos. Entenda-se por processos determinísticos aqueles que são regidos por relações pré-determinadas entre as variáveis que influenciam o sistema, ou seja, não dependem de fatores aleatórios. Processos determinísticos podem ser ainda de dois tipos: regulares, cujo comportamento apresenta características de estabilidade e são passíveis de previsões, e os caóticos, cujas características foram citadas nas seções anteriores. Na classe de processos estocásticos, incluem-se aqueles sujeitos a influências que não podem ser facilmente conhecidas, impedindo prever com precisão o estado do sistema em cada instante. Tal imprevisibilidade caracteriza fenômenos deste tipo como aleatórios.

Uma distinção importante entre processos regulares, caóticos e estocásticos é a dimensão da dinâmica assintótica para tempos suficientemente longos. O Quadro 1.1 resume as características mais importantes dos três tipos de processo.

Processo	Expoente de Lyapunov	Entropia de Kolmogorov-Sinai	Dimensão da dinâmica assintótica ( $t \rightarrow \infty$ )
Regular		$K=0$	$D < m, D \in \mathbb{N}$

encantam turistas piscando em sincronia. Winfree descobriu que o piscar de um vaga-lume fornece um sinal ao seu companheiro, estimulando o vizinho a reprogramar sua frequência de emissão de luzes, ajustando-a ao ritmo do outro. O biólogo considerou que a sincronização ocorre quando os sinais trocados pelos indivíduos são suficientes para superar a variação inicial das frequências individuais. Afirmava que abaixo deste marco, predominava a anarquia e, acima dele, estabelecia-se um ritmo coletivo (MORAIS, 2003).

Um dispositivo supercondutor de eletricidade criado pelo inglês Brian Josephson, pesquisador da sincronização, rendeu a ele o Prêmio Nobel de Física de 1973 e possibilitou a Steven Strogatz a determinação de um modelo matemático para a sincronia ao estudar o seu funcionamento. Neste exemplo, um isolante é transformado em supercondutor, fato possível porque os elétrons numa fileira de junções de Josephson entram em sincronia, constituindo um condensado que não encontra resistência, ao contrário da corrente que percorre condutores convencionais.

Os efeitos da sincronização fazem com que certos conceitos da física clássica sejam repensados. Segundo Strogatz "...a sincronia se manifesta do subatômico ao macrocosmo, em escalas de frequências que variam de bilhões de oscilações por segundo à apenas um ciclo em um milhão de anos" (STROGATZ apud MORAIS, 2003).

A sincronização espontânea entre osciladores pode ser detectada em toda a parte, das células ao sistema solar, influenciando inclusive certos mecanismos vitais que regulam o funcionamento do nosso organismo. A própria cognição humana está ligada à ativação e desativação de processos que ocorrem em ondas de sincronia entre neurônios. Avanços nas pesquisas relacionadas à sincronia das ondas cerebrais podem colaborar significativamente em várias questões, até mesmo na prevenção de distúrbios como ataques de epilepsia. A cronobiologia também estuda osciladores periódicos síncronos que governam os ritmos corporais, como o ritmo cardíaco.

Na área da engenharia, a ocorrência de sincronização em sistemas elétricos e eletromecânicos é de conhecimento dos cientistas há muito tempo. Os conceitos daí originados têm permitido que mecanismos sejam utilizados no desenvolvimento de aplicações tecnológicas que apresentam características de eficiência.

Porém, em muitos desses exemplos, a sincronização limita-se à análise de sistemas com comportamento periódico. O surgimento de pesquisas na área de sistemas complexos, com comportamentos antes considerados desprovidos de ordem e que passaram a ser entendidos como *quasi*-periódicos ou caóticos, deram espaço a novas idéias no campo da sincronização. Desde então, a sincronia entre sistemas que exibem caos pode ser definida como uma mútua conformidade de tempo de dois ou mais processos em regime caótico e pode ser vista como uma manifestação da tendência à auto-organização nesta classe de sistemas complexos (MORENO et al. , 2000).

### 1.3 Uma Visão Geral de Controle

Os avanços teóricos e práticos no controle de sistemas dinâmicos têm desempenhado um papel fundamental no progresso da engenharia e da ciência. Tais pesquisas tiveram, e continuam tendo, extrema importância em projetos de veículos espaciais, sistemas de direcionamento de mísseis, sistemas robóticos e similares, além de integrarem de modo decisivo modernos processos industriais e de produção. Podem ser citados numerosos exemplos da aplicação do controle: projetos de piloto automático na indústria aeroespacial, projetos de veículos automotivos, operações industriais em que é exigido o controle de pressão, de temperatura, de umidade, de viscosidade e de vazão. A necessidade de interferência humana em processos naturais - ecológicos, epidemiológicos, agrícolas, populacionais, entre outros - também faz do uso da teoria do controle uma poderosa ferramenta.

Na origem histórica das pesquisas mais significativas na área de controle, está a construção, por James Watt, de um regulador centrífugo para o controle de velocidade de uma máquina a vapor, no século XVIII, mecanismo que será exposto na seção seguinte por tratar-se de um tipo de controle de realimentação (*feedback*). Minorsky (1962 apud OGATA, 2005) e Nyquist (1932 apud OGATA, 2005) também podem ser citados por seus importantes trabalhos nos primeiros estágios de desenvolvimento deste campo da engenharia e da matemática. Minorsky, em 1922, demonstrou como a estabilidade poderia ser determinada a partir de equações diferenciais que descreviam um sistema de pilotagem de embarcações. Dez anos depois, Nyquist desenvolveu um procedimento relativamente simples para a

determinação da estabilidade de sistemas de malha fechada com base na resposta de malha aberta a excitações senoidais estacionárias (OGATA,2005).

Contudo, os sistemas originados na essência da teoria clássica do controle eram considerados aceitáveis por satisfazer a um conjunto de condições de desempenho,mas não eram ótimos no sentido estrito do termo. Foi desde o final da década de 50 que o enfoque das pesquisas direcionou-se para o projeto de sistemas que não simplesmente funcionassem, mas que fossem ótimos em algum aspecto relevante. A década seguinte permitiu o desenvolvimento da teoria de controle moderno que, devido à disponibilidade dos computadores digitais, tornou possível lidar com a crescente complexidade dos novos sistemas e seus rigorosos requisitos relativos à precisão, à importância e ao custo nas mais variadas aplicações.

Ampla pesquisa sobre controle ótimo de sistemas determinísticos e estocásticos, controle adaptativo e de aprendizagem de sistemas complexos tiveram espaço entre 1960 e 1980. A partir da década de 1980 os avanços na teoria de controle moderno se voltaram para o controle robusto, o controle  $H_\infty$  e outros itens a eles relacionados.

### 1.3.1 Controle *Feedback*

O termo inglês *feedback* tornou-se de uso corrente no português e significa realimentação. Este é um fenômeno freqüente na natureza e nas máquinas. Sistema de controle por realimentação é uma combinação de elementos que respeita a uma regra essencial: a ação do sistema é determinada, pelo menos em parte, pelas próprias variáveis do sistema. Nesses sistemas a entrada e a saída são funções do tempo. Em um sistema deste tipo, também chamado de sistema de malha fechada, o sinal de erro atuante, que é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de realimentação (que pode ser o próprio sinal de saída ou uma função do sinal de saída e suas derivadas e/ou integrais), realimenta o controlador, de modo que minimize o erro e acerte a saída do sistema ao valor desejado.

Um exemplo simples, mas de grande clareza, é a situação de um piloto de barco que, observando o rumo da bússola e comandando o leme para alterá-lo, tenta manter o seu rumo



constante. A principal função do sistema é a de compensar o efeito das perturbações acidentais do rumo, por meio dos movimentos do leme. Essa constante redução dos efeitos das perturbações é uma qualidade importante que se obtém com controle *feedback*. Um problema de controle seria projetar a substituição do piloto nessa função. Neste caso, são importantes as características dinâmicas de todos os componentes, inclusive as dos sinais que o meio aplica ao barco.

O conceito de controle *feedback* aqui introduzido, considerado o mais importante em controle automático, não é novo. Os primeiros controles de nível de líquidos por meio de válvulas acionadas por bóias foram construídos por árabes no início da era cristã (CASTRUCCI E BATISTA, 1991). A necessidade de determinação precisa do tempo, preocupação da humanidade desde o início da civilização, também serviu de motivação para a construção de um regulador flutuante para o relógio de água pelo grego Ktesibios por volta de 270 dC. Estes tipos de relógios, chamados de clepsidra, indicavam a passagem do tempo em escala linear pela vazão, a uma taxa constante, de água em um reservatório. Eles foram muito usados até o século XVII.

O regulador de Watt, já citado anteriormente e mostrado abaixo na Figura 1.5, foi construído em 1788 e introduziu a noção de controle automático.

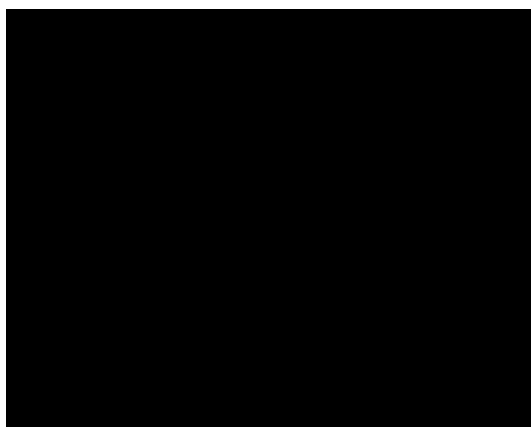


Figura 1.5—Regulador de velocidade para motores a vapor apresentado por James Watt, em 1788 (CASTRUCCI E BATISTA, 1991).

Seu funcionamento era o seguinte: quando a velocidade do eixo  $E$  ultrapassa o valor desejado, a força centrífuga  $M.a$  sobre cada massa  $M$  tem uma componente normal à haste de suporte, que vence a componente da força-peso; as massas  $M$  se afastam do eixo vertical e o

cursor  $C$  sobe;  $C$  aciona a válvula de vapor, reduzindo sua vazão e reduzindo a velocidade do motor e do eixo  $E$ . O inverso ocorre quando a velocidade está abaixo da desejada.

Na segunda metade do século XIX, o controle dos navios passou a exigir maior precisão e potência, influenciando um maior desenvolvimento nas pesquisas de servomecanismos. Tais pesquisas, inicialmente feitas por tentativas caras e intuitivamente guiadas, foram sendo substituídas por projetos teóricos nas décadas de 1930-40. Foram essas as ferramentas da engenharia para desenvolver os variados tipos de servomecanismos da 2ª Guerra Mundial e da grande maioria das aplicações industriais até hoje.

No campo da matemática paralelamente eram desenvolvidos métodos fundamentais para o estudo da realimentação. Laplace em 1779, seguido por Fourier e, vinte anos depois, Cauchy contribuíram significativamente para a base da teoria de controle por realimentação, assim como Nyquist com seu critério de estabilidade.

James Clerk Maxwell (1868 apud CASTRUCCI E BATISTA, 1991) em sua obra "*On Governors*" faz a primeira análise de sistemas de controle feedback. Sua técnica foi linearizar as equações diferenciais de movimento para encontrar a equação característica do sistema.

Seu trabalho antecedeu o de E.J. Routh, "*Dynamics of a System of a Rigid Bodies*", (1877 apud CASTRUCCI E BATISTA, 1991), considerado um grande passo por apresentar um critério de estabilidade através de uma técnica numérica. No mesmo ano o russo I. I. Vishnegradsky analisou, independentemente de Maxwell, a estabilidade de reguladores que usam equações diferenciais.

Desde então, diversos cientistas notáveis se envolveram nessa área, incluindo Norbert Wiener, Richard Bellman e Lev Semenovich Pontryagin (1962 apud DE SOUZA, 2006; IYANAGA E KAWADA, 1980). Usando técnicas de espaço-de-estado, Programação Dinâmica de Bellman e Princípio do Máximo de Pontryagin, construiu-se uma teoria substancial para sistemas determinísticos. A programação dinâmica de Bellman, cujo ponto central é a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (ou equação da programação dinâmica), e o Princípio do Máximo de Pontryagin proporcionaram métodos altamente potentes para a solução de problemas de controle ótimo (DE SOUZA, 2006).

Cabe dar destaque ao trabalho de Lyapunov (1896 apud CASTRUCCI E BATISTA, 1991), "*O Problema Geral da Estabilidade do Movimento*", fundamental para a teoria do controle por tratar da estabilidade de equações diferenciais não-lineares que usam noção generalizada de energia.

## 2 SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS

Há cerca de duas décadas, pesquisadores que trabalham com sistemas complexos perceberam que dinâmicas caóticas podem ser controladas e sincronizadas. Os trabalhos que estabeleceram as bases dessas duas importantes áreas de pesquisa foram as publicações de Hübler (1989), de Ott, Grebogy e Yorke (1990) - a chamada teoria OGY- e de Pecora e Carrol (1990). A partir daí o campo de sincronização caótica tem crescido consideravelmente.

Sabe-se que apesar de um sistema caótico ter um atrator no espaço de fase, determinar a posição assintótica de uma trajetória sobre o atrator, dada sua posição anterior, é um problema que se torna mais difícil conforme o tempo passa. Pode-se observar isto ao serem traçadas lado a lado as trajetórias de dois sistemas caóticos idênticos, iniciadas ambas em condições iniciais bastante próximas, mas não iguais. Os sistemas parecem divergir um do outro, mas ambos permanecem no mesmo atrator padrão. A posição ocupada pela trajetória de um dos sistemas dentro do atrator não se relaciona com a localização exata do outro sistema.

A questão levantada foi a seguinte: é possível levar os dois sistemas caóticos a seguir o mesmo caminho no atrator? Seria possível ligar um ao outro e assim provocar sua sincronização? Pecora et al. (1997) perceberam que a resposta a ambas as questões eram afirmativas. O interesse em conseguir tal resultado tinha várias razões, uma delas a de que o comportamento de um sistema caótico que pode ser confundido com um ruído seria de uso profícuo em esquemas de comunicação como garantia de segurança na informação.

Tem sido sugerido o uso do caos em robótica ou implantes biológicos. Caso seja desejável que diversas partes de um sistema executem ações ao mesmo tempo, embora caoticamente, prontamente se leva a pensar em sincronização caótica.

Existe uma grande classe de trabalhos na literatura científica que tratam da distinção entre diferentes tipos de sincronização caótica, embora poucos deles tratem da unificação de tais conceitos. De modo geral, a sincronização de sistemas que exibem caos pode ser classificada em dois tipos - sincronização mútua e sincronização mestre-escravo. Tal distinção

ocorre dependendo da forma como se configura a ligação, ou a troca de informação, entre os sistemas acoplados (CHEN E LÜ, 2002).

Para casos em que os sistemas a serem sincronizados são idênticos, Huang et al.(2004) citam vários esquemas de sincronização que têm sido aplicados com sucesso, tais como controle de estruturas variáveis, controle adaptativo de parâmetros, controle baseado no observador, controle ativo.

Dentro da perspectiva da teoria de controle, a sincronização caótica pode ser considerada com um problema do tipo *tracking*, ou de rastreamento, no qual um sistema pode seguir a direção de outro assintoticamente, particularmente se um feedback de estado é usado como um meio de controle (JIANG et al., 2003). De modo similar ao enfoque de sincronização baseado no observador, tanto os esquemas de controle com feedback linear quanto aqueles com feedback não-linear podem ser usados. Devido à simplicidade na configuração e implementação, o feedback linear é especialmente atrativo e tem sido comumente adotado para implementação.

No caso em que os sistemas são sincronizados sem o uso de controle, a estabilidade da sincronização de subsistemas idênticos acoplados de maneira mestre-escravo, exibindo comportamento caótico, pode ser avaliada pelo método proposto em Brown e Rulkov (1997) visando garantir a estabilidade do movimento síncrono em face de pequenas perturbações.

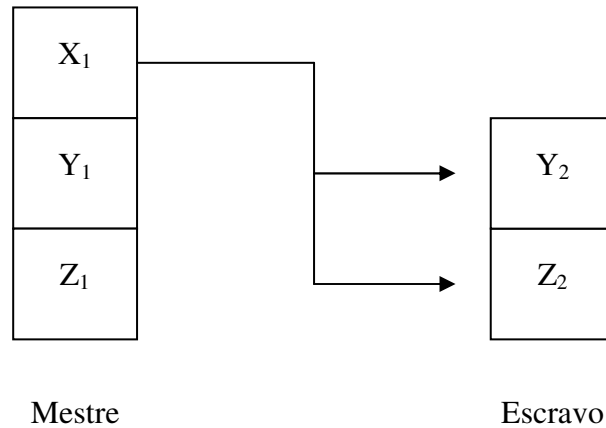
## 2.1 Sincronização Mestre-Escravo

Os fundamentos da sincronização em osciladores caóticos da forma mestre-escravo foram introduzidos por Pecora e Carrol (1990). Grosso modo, a idéia é que dois sistemas podem ser acoplados de tal modo que a solução de um convirja para a solução de outro, independentemente das condições iniciais. Contudo, embora um dos sistemas responda ao outro, a recíproca não ocorre. Este tipo de sincronização é chamado sincronização mestre-escravo.

A idéia original para sincronização mestre-escravo introduzida pelos autores pode ser chamada sincronização por substituição completa. O exemplo é dado com dois sistemas caóticos de Lorenz. Transmite-se um sinal do primeiro para o segundo. Seja este sinal a componente  $x$  do primeiro sistema. Todas as componentes  $x$  do segundo sistema são então substituídas pelo sinal do primeiro sistema. Esta construção é chamada *substituição completa*. Disto resulta um novo sistema composto penta-dimensional:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \sigma (y_1 - x_1) \\ \frac{dy_1}{dt} &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1 \\ \frac{dz_1}{dt} &= x_1 y_1 - b z_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -x_1 z_2 + r x_1 - y_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= x_1 y_2 - b z_2\end{aligned}$$

onde os sub-índices identificam cada um dos sistemas.

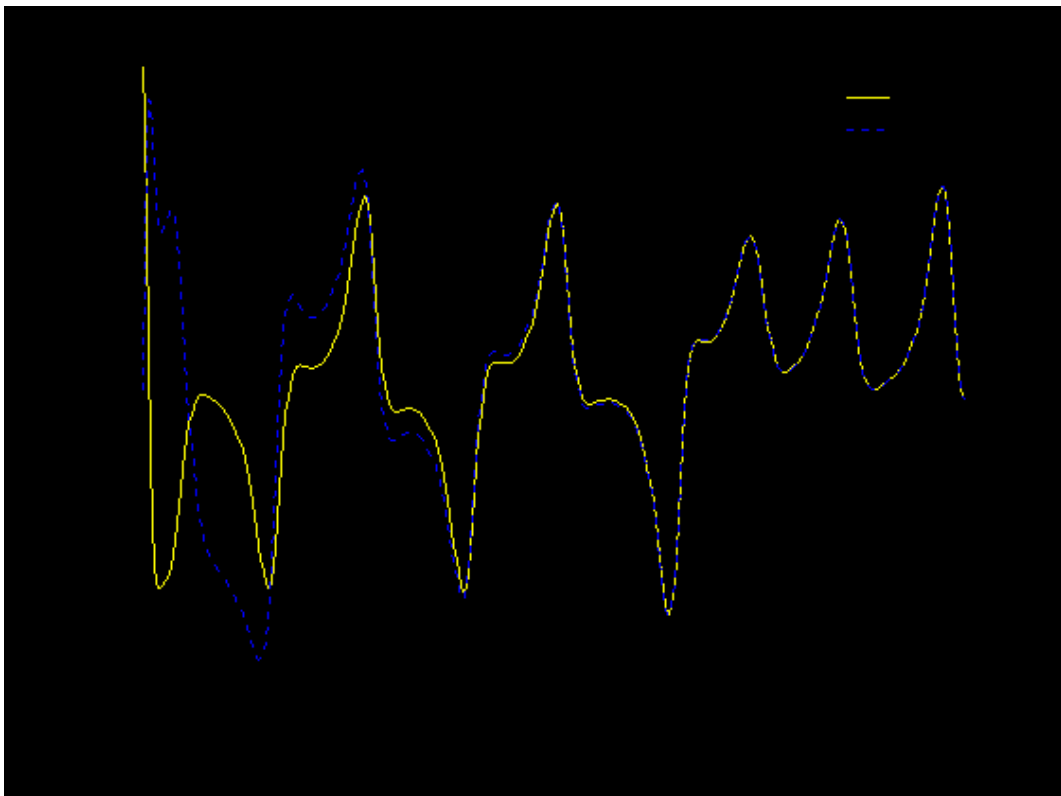


**Figura 2.1: Esquema original mestre-escravo para sincronização por substituição completa.**

Pode-se pensar a variável  $x_1$  como a componente que está dirigindo o segundo sistema. A Figura 2.1 mostra isto esquematicamente. Dentro desta idéia, o primeiro sistema é chamado *mestre* e o segundo, *escravo*.

Partindo de qualquer condição inicial arbitrária, é possível observar nas Figuras 2.2 e 2.3 que  $y_2$  converge para  $y_1$  e  $z_2$  converge para  $z_1$  conforme o sistema evolui. Assintoticamente, o movimento faz com que as componentes  $y$  e  $z$  de ambos os sistemas tornem-se iguais, como mostram as Figuras 2.4 e 2.5. É obtido assim um conjunto de sistemas caóticos sincronizados (Figura 2.6). As simulações foram feitas para a condição inicial (50;50;50;0,1;0,1). A igualdade entre as componentes dos subsistemas ( $y,z$ ) permite se referir a esta situação como sincronização idêntica.

O comportamento geométrico de sistemas caóticos sincronizados pela metodologia proposta e as características de estabilidade da sincronização obtida são apresentados por Pecora et al. (1997).



**Figura 2.2:** Trajetórias de  $y_1$  e  $y_2$  sincronizadas por substituição completa.

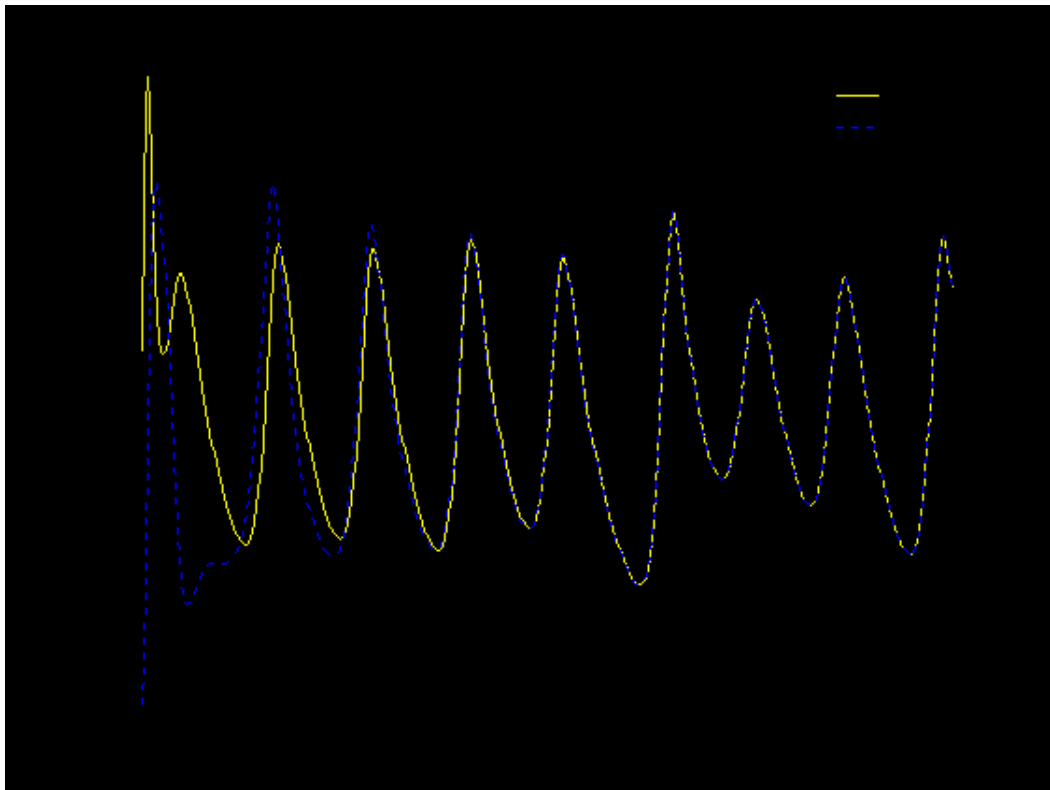






Figura 2.5: O gráfico de  $z_1$  versus  $z_2$  converge para a identidade  $z_1 = z_2$ .

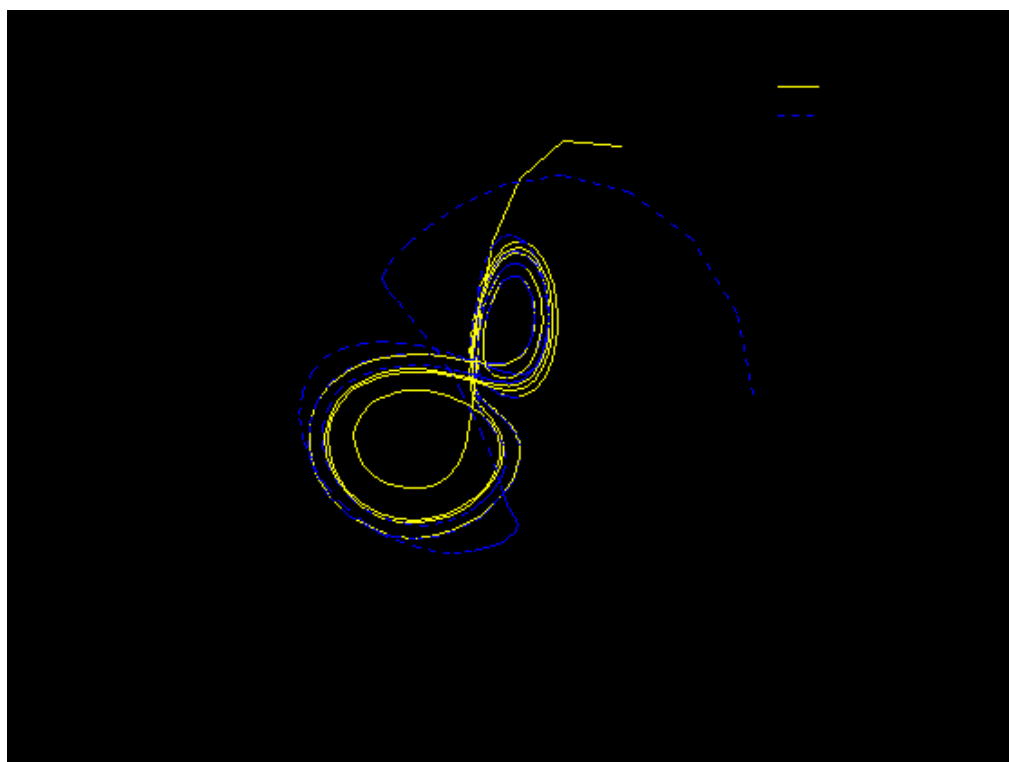


Figura 2.6: Trajetórias no espaço de fase dos sistemas de Lorenz mestre e escravo sincronizados por substituição completa.

## 2.2 Sincronização de Sistemas Populacionais Caóticos

O modelo escolhido para realização de sincronização caótica neste trabalho é, como veremos mais adiante, uma formulação conceitual efetuada a partir de observações de um sistema real. Nele, as características mais importantes do fenômeno a ser representado foram preservadas e a dinâmica abstraída do mundo físico pode ser observada através da interação entre as variáveis do modelo e pela evolução dos estados dessas variáveis.

A propriedade auto-reguladora de um sistema físico ou organismo que permite manter o estado de equilíbrio de suas variáveis essenciais ou de seu meio ambiente é chamada de *homeostase*. Esta tendência natural à estabilidade é atingida pelo uso de controle feedback. Devido ao fato de que sistemas naturais mantêm-se estáveis dentro de limiares tênues (por exemplo, pequenas variações de temperatura podem eliminar certas populações) e de que os recursos disponíveis são freqüentemente limitados, parece lógico observar que a maioria desses sistemas dotados de controle feedback tenha evoluído para sistemas ótimos. Se tais sistemas são ótimos por natureza, faz sentido pensar que os controles projetados para intervir neles sejam construídos sob a perspectiva da otimalidade.

Tomando sincronização como uma tendência natural à auto-organização, assim como a homeostase, e levando em conta o uso espontâneo do controle ótimo feedback por parte dos sistemas físicos, biológicos e até mesmo sociais, pretende-se então atingir o sincronismo entre dois sistemas caóticos de Lotka-Volterra à luz da teoria do controle ótimo. A formulação matemática relacionada a essa teoria será descrita no próximo capítulo.



O índice de desempenho depende das variáveis do sistema. Ele é representado por um funcional que pode incluir, por exemplo, uma medida do erro de operação do sistema, uma medida da 'força' do controle, ou outra característica que seja importante para o uso do sistema de controle.

Na prática, significa manter controlados os estados de um sistema que está sujeito a distúrbios inesperados ou perturbações. Exemplos como de um sistema de controle de atitude de um satélite artificial sujeito a torques ambientais ou de um sistema regulador de voltagem elétrica que sofre repentinas mudanças de carga servem para ilustrar o problema do regulador ótimo.

O sistema a ser controlado é definido por

onde  $x(t)$  é o vetor de estado  $n$ -dimensional,  $A(t)$  é matriz  $n \times n$ ,  $u(t)$  é o vetor o

Sendo assim, o problema do regulador ótimo se reduz à determinação dos elementos da matriz  $K$  que será definida na seção seguir.

O segundo termo do lado direito da equação (3.2) contabiliza o dispêndio de energia dos sinais de controle. As matrizes  $Q$  e  $R$  determinam a importância relativa do erro e o gasto de energia, por isso seus elementos são chamados coeficientes de ponderabilidade do funcional de custo (3.2).

O índice de desempenho poderia ser redefinido como

$$J^* = \frac{1}{2} J ,$$

conforme é visto em muitos casos. Porém, o uso da fração  $1/2$  não altera a natureza do controle a ser obtido, apenas favorece as simplificações no desenvolvimento matemático necessário para o cálculo do mesmo.

### 3.1.1 Otimalidade do Controle

A discussão que busca esclarecer se o controle  $u$  é ótimo a fim de minimizar  $J(x, u)$  se dá sob o enfoque da Programação Dinâmica, baseada no princípio da otimalidade de Bellman (1957), de onde se origina a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\min_u [F(x, u)] = 0 \quad (3.4)$$

onde

$$F(x, u) = x^T Q x + u^T R u + \frac{\partial S}{\partial x} (A x + B u) \quad (3.5)$$

e  $S$  é uma função de Lyapunov escolhida como

$$S = x^T P x, \quad (3.6)$$

onde  $P$  é matriz positiva e simétrica.

A derivada de (3.6) usada em (3.5) é dada por

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2Px. \quad (3.7)$$

Aplicando os critérios de máximo e mínimo da primeira e segunda derivada sabe-se que (3.4) ocorre quando

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} > 0 \quad (3.8) \quad e \quad (3.9)$$

De (3.8) e de (3.9) resulta

$$2Ru + 2x^T PB = 0 \quad e \quad 2R > 0$$

de onde se pode concluir, lembrando que  $2Px = 2x^T P$ , que o controle ótimo  $u$  é dado por

$$u = -R^{-1} B^T P x. \quad (3.10)$$

O controle  $u$  obtido constitui um feedback negativo do estado  $x$ . A matriz  $K$  que não ficou determinada em (3.3) fica definida como

$$K = R^{-1} B^T P \quad (3.11)$$

e constitui o chamado ganho de *Kalman*.

Usando (3.3) em (3.2) pode-se escrever

$$J = \int_0^{\infty} [x^T (Q + K^T RK)x] dt. \quad (3.12)$$

De acordo com a abordagem de Lyapunov considera-se que para qualquer  $x(t)$

$$x^T (Q + K^T RK)x = -\frac{d}{dx}(x^T Px), \quad (3.13)$$

onde P é positiva definida e simétrica. Conseqüentemente obtém-se

$$\begin{aligned} x^T (Q + K^T RK)x &= -\dot{x}^T Px - x^T P\dot{x} = \\ &= -x^T [(A - BK)P - P(A - BK)]x \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pelo segundo método de Lyapunov, sabe-se que para uma matriz positiva definida, se a matriz A-BK for estável, sempre existe P simétrica positiva definida tal que

$$(A - BK)^T P - P(A - BK) = -(Q + K^T BK). \quad (3.15)$$

Desse modo, o procedimento para determinar a função de controle passa pela determinação dos elementos de P. Mais de uma matriz P pode satisfazer (3.15), porém somente aquelas positivas definidas darão garantia de estabilidade ao sistema.

Nestas condições, o índice de desempenho (3.12) pode ser obtido em termos da condição inicial  $x(t_0)$  e de P. Isto ocorre porque dado que A-BK é estável, tem-se  $x(\infty) \rightarrow 0$ . O funcional J, considerando (3.13), pode ser avaliado como

$$J = \int_0^{\infty} \frac{d}{dx}(x^T(t)Px(t))dt = -x^T(t)Px(t) \Big|_0^{\infty} = x^T(0)Px(0)$$

A relação dada em (3.15) pode ser expressa como

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.16)$$

que é chamada equação algébrica de Riccati (EAR) da qual P é a solução.

A equação (3.16) é uma forma reduzida da equação diferencial matricial de Riccati (EDR)

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A(t)^T P(t) - P(t)B(t)R(t)^{-1} B(t)^T P(t) + Q(t) = 0 \quad (3.17)$$

visto que

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} (P(t_f)) = \bar{P} \quad (3.18)$$

onde  $\bar{P}$  é uma matriz constante, definida positiva e, sendo assim,

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = 0$$

Para (3.17),  $P(t)$  é chamada coeficiente de Riccati ou matriz de Riccati. No entanto em ambos os casos, tanto em (3.16) quanto em (3.17), considera-se (3.3) a lei de controle ótimo feedback para sistemas contínuos no tempo.

### 3.2 Feedback Linear para Sistemas Não-Lineares

Considere-se um sistema que apresenta não-linearidades caóticas para um certo conjunto de parâmetros e é descrito por

$$\dot{x} = Ax + g(x) \quad (3.19)$$

onde  $x$  é o vetor  $n$ -dimensional do estado,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tem elementos constantes, e  $g(x)$  é vetor de funções contínuas.

A lei de controle  $U$  encarrega-se de conduzir o sistema a um regime desejado. Nos problemas de controle em geral este regime será um ponto de equilíbrio fixo, uma órbita



periódica ou outra não periódica. Ao estender este problema para o caso de sincronização, será desejada outra trajetória, também caótica, gerada por mudanças nas condições iniciais do sistema mestre. Por enquanto, o problema de controle será abordado na forma geral em que o sistema controlado tem a forma

$$\dot{x} = Ax + g(x) + U \quad (3.20)$$

onde  $U \in \mathbb{R}^m$  é vetor de controle que consiste de duas partes

$$U = \tilde{u} + u_t \quad (3.21)$$

O termo  $\tilde{u}$  representa o feedforward que mantém o sistema controlado (3.20) na trajetória desejada  $\tilde{x}$  e pode ser escrito como

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}} - A\tilde{x} - g(\tilde{x}) \quad (3.22)$$

de onde resulta que  $\tilde{u} = 0$ . O termo  $u_t$  é responsável pela realimentação do sistema, estabilizando-o em torno da trajetória desejada e tem a forma

$$u_t = Bu, \quad (3.23)$$

onde  $B$  tem dimensão  $n \times m$  e é constante.

Definindo

$$e = x - \tilde{x} \quad (3.24)$$

como desvio da trajetória do sistema (3.20) da trajetória desejada, e admitindo (3.21)-(3.24), obtém-se o sistema

$$\dot{e} = Ae + g(x) - g(\tilde{x}) + Bu. \quad (3.25)$$

que representa o erro entre a trajetória  $x$  e aquela desejada.

A parte não-linear do sistema (3.25) pode ser escrita como

$$h(\tilde{x}, e) = g(\tilde{x} + e) - g(\tilde{x}), \quad (3.26)$$

onde  $h(\tilde{x}, e)$  é uma matriz limitada. Admitindo (3.26) pode-se escrever (3.25) como

$$\dot{e} = Ae + h(\tilde{x}, e) + Bu. \quad (3.27)$$

O vetor de controle  $u$  deverá ser encontrado de modo a transferir o sistema (3.25) do estado inicial ao estado final

$$e(\infty) = 0 \quad (3.28)$$

minimizando o funcional

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (l(e) + u^T Ru) dt, \quad (3.29)$$

onde

$$l(e) = e^T Qe - h^T(\tilde{x}, e)Pe - e^T Ph(\tilde{x}, e). \quad (3.30)$$

Este funcional constitui uma generalização do índice de desempenho quadrático

$$J = \int_0^{\infty} (e^T Qe + u^T Ru) dt, \quad (3.31)$$

para problemas lineares, isto é, em que  $g(x) \equiv 0$ , cuja lei de controle ótimo é dada por

$$u = -R^{-1} B^T Pe \quad (3.32)$$

conforme formulação da seção anterior.

Na utilização do controle linear feedback para sistemas não-lineares, é relevante determinar as condições que permitem o seu uso e discutir em que sentido este controle é

ótimo. A justificativa a respeito do uso do controle linear e sobre sua otimalidade é dada pelo teorema a seguir.

**Teorema** (RAFIKOV E BALTHAZAR, 2006)

Se existem matrizes Q, definida positiva, e R, definida positiva, sendo Q simétrica, tal que a função

$$l(e) = e^T Q e - h^T(\tilde{x}, e) P e - e^T P h(\tilde{x}, e) \quad (3.33)$$

seja definida positiva então o controle linear feedback

$$u = -R^{-1} B^T P e \quad (3.34)$$

é ótimo, a fim de transferir o sistema não-linear (3.27) de qualquer condição inicial ao estado final

$$e(t_f) = 0 \quad (3.35)$$

minimizando o funcional

$$J = \int_0^\infty [l(e) + u^T R u] dt \quad (3.36)$$

onde P, matriz simétrica, positiva definida, é a solução da equação algébrica de Riccati

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.37)$$

satisfazendo a condição final

$$P(\infty) = 0. \quad (3.38)$$

**Prova**

Considere-se o controle linear feedback (3.34) com a matriz P determinada pela equação (3.37) a qual transfere o sistema não-linear (3.27) da condição inicial ao estado final (3.35), minimizando o funcional (3.36) em que a função  $l(e)$  precisa ser determinada.

Segundo as leis da Programação Dinâmica (BELLMAN,1957)., sabe-se que se o mínimo do funcional (3.36) existe e se  $V$  é uma função suave das condições iniciais, então ela satisfaz a seguinte equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\min_u \left( \frac{dV}{dt} + l(e) + u^T R u \right) = 0 \quad (3.39)$$

Considerando a função de Lyapunov

$$V = e^T P e \quad (3.40)$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva e satisfaz a equação algébrica de Riccati (3.37).

Pode-se observar que a derivada da função  $V$ , calculada na trajetória ótima com o controle dado em (3.34) é

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \quad (3.41)$$

Considerando-se (3.27) e substituindo em (3.41), obtém-se

$$\dot{V} = [e^T A^T + h^T(\tilde{x}, e) - e^T P B (R^{-1})^T] P e + e^T P [A e + h(\tilde{x}, e) - B R^{-1} B^T P e]. \quad (3.42)$$

Então, substituindo  $\dot{V}$  na equação (3.39) resulta

$$e^T [A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P] e + h^T(\tilde{x}, e) P e + e^T P h(\tilde{x}, e) + l(e) = 0. \quad (3.44)$$

Com isso pode-se escrever

$$l(e) = -e^T [A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P]e - h^T(\tilde{x}, e)Pe - e^T Ph(\tilde{x}, e) \quad (3.45)$$

que de acordo com (3.37) corresponde a

$$l(e) = e^T Qe - h^T(\tilde{x}, e)Pe - e^T Ph(\tilde{x}, e) \quad (3.46)$$

Deste resultado, pode-se reescrever (3.42) como

$$\dot{V} = -l(e) - u^T Ru. \quad (3.47)$$

Sendo  $l(e)$  uma função definida positiva e  $R$  uma matriz positiva definida, existe uma função de Lyapunov positiva definida, cuja derivada é calculada na trajetória ótima do sistema (3.27) e é negativa definida conforme visto em (3.47), que garante a estabilidade assintótica do sistema controlado (3.27).

Da teoria do controle ótimo de sistemas lineares com funcional quadrático vem que a solução da equação algébrica de Riccati  $P$  é uma matriz positiva definida e simétrica para  $t \in [0, \infty]$  e para matrizes  $Q$  e  $R$  dadas, definidas positivas, respectivamente, o que conclui a prova do teorema.

### 3.3 Controlabilidade de Sistemas Dinâmicos

O conceito de controlabilidade de sistemas foi introduzido por Kalman (1960). A condição relacionada a este conceito pode ditar a existência de uma solução completa para o problema de projeto do sistema de controle. Portanto, é fundamental para este estudo a determinação das condições que garantem que o sistema seja controlável.

Um sistema será dito controlável no instante  $t_0$  se for possível, por meio de um vetor de controle não limitado, transferir o sistema de qualquer estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito.

O interesse aqui se volta para as condições que irão garantir que o sistema (3.1) seja controlável. Os modelos matemáticos que descrevem os sistemas físicos reais, predominantemente controláveis, podem não apresentar as mesmas propriedades destes últimos, tornando a busca de uma solução inviável matematicamente. A condição de controlabilidade completa do estado é dada a seguir, de acordo com Ogata (2005).

Para que o sistema (3.1) seja de estado completamente controlável, então é exigido que o posto da matriz  $n \times nr$

$$[B \ : \ AB \ : \ \dots \ : \ A^{n-1}B]$$

seja  $n$ .

Com isso podem-se estabelecer as condições para a controlabilidade completa de estado, como segue: o sistema (3.1) é de estado completamente controlável se, e somente se, os vetores  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ , que formam a matriz de controlabilidade, forem linearmente independentes.

## 4 MODELOS POPULACIONAIS DE LOTKA-VOLTERRA

### 4.1 Modelos Populacionais

Um modelo matemático que se propõe a descrever dinâmicas populacionais parte sempre de suposições e de simplificações sobre a realidade considerando somente os aspectos mais relevantes na interação entre os indivíduos da população. Os indivíduos podem ser desde moléculas bioquímicas, bactérias ou neurônios, até insetos, cardumes de peixes ou organismos superiores, incluindo a sociedade humana. Em qualquer destes casos o modelo tem por finalidade determinar a evolução temporal do sistema, a partir de dados iniciais, baseado em hipóteses teóricas levantadas através de informações biológicas.

Malthus (1798) e Verhulst (1838) publicaram modelos de crescimento populacional clássicos, amplamente estudados desde então. Os modelos que focalizavam a interação entre duas espécies naturais tornaram-se conhecidos somente na segunda década do século XX a partir dos trabalhos independentes de Alfred Lotka (1925) e Vito Volterra (1926). Volterra propôs um modelo simples de predação para explicar os níveis oscilatórios da captura de peixes no mar Adriático ao ser observado um fenômeno interessante: a concentração de peixes menores - presas de peixes maiores – havia diminuído, enquanto a concentração de peixes predadores havia aumentado. As mesmas equações foram utilizadas por Lotka para estudar uma reação química e o comportamento periódico de concentrações químicas. Se  $x_1(t)$  é a população da presa e  $x_2(t)$  é a população do predador, as equações deste modelo são dadas por:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(a - bx_2) \quad (4.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(cx_1 - d) \quad (4.2)$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são constantes positivas.

As suposições no modelo são:

a) A presa na ausência de qualquer predação cresce ilimitadamente de um modo malthusiano de acordo com o termo  $ax_1$  em (4.1). Esta é a parte do modelo criticada pelos biólogos, estando já superada hipótese de crescimento ilimitado de populações.

b) O efeito da predação é reduzir a taxa de crescimento per capita da presa por um termo proporcional para a população de presas e de predadores, este é o termo  $-bx_1x_2$ .

c) Na ausência de qualquer presa para servir de alimento, a taxa de mortalidade do predador resulta em decréscimo exponencial, este é o termo  $-dx_2$  em (4.2).

d) A contribuição da presa para a taxa de crescimento do predador é  $cx_1x_2$ , isto é, proporcional à população de presas disponíveis como também ao tamanho da população de predadores, ou seja, ao encontro de presas e predadores. O termo  $x_1x_2$  representa a conversão de energia de uma fonte para outra em forma de alimento:  $bx_1x_2$  é a retirada de presas e  $cx_1x_2$  é o acréscimo de predadores.

Com este trabalho foi possível mostrar que modelos que envolvem predação apresentam comportamento cíclico cuja amplitude depende fortemente das condições iniciais. Nesse tipo de modelo, onde existem apenas duas espécies interagindo, não ocorre comportamento caótico.

O modelo original foi aperfeiçoado por vários cientistas e apresenta variantes, como o modelo com competição e o modelo estendido para  $n$  espécies, onde surge o comportamento caótico, do qual estudaremos um caso particular a seguir.

## 4.2 Modelo de Duas Presas e um Predador

O modelo de Lotka-Volterra para duas presas e um predador é dado por:

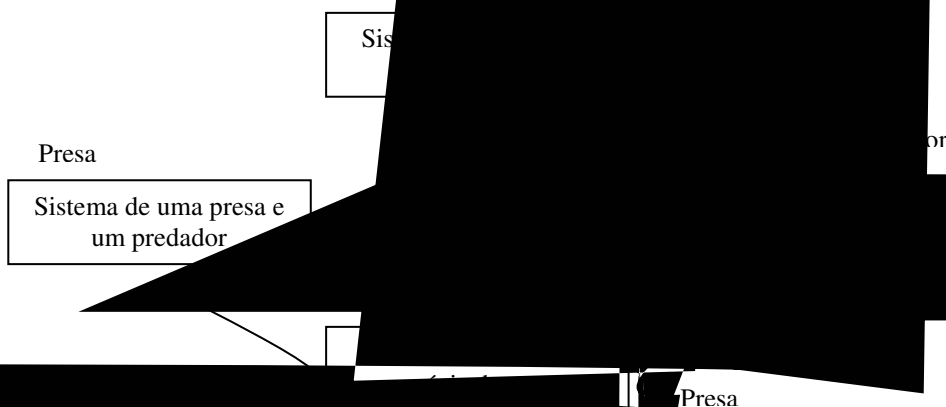
$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left( r_i - \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_j \right) \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.3)$$



onde  $x_1, x_2, x_3$  são as densidades das espécies, respectivamente;  $c_{ij}$ ,  $i, j=1, 2, 3$  são coeficientes de competição intra e interespecífica;  $r_i$  é a taxa de crescimento da população  $i$ .

É atribuída a Parrish e colaboradores (1970) a introdução de um sistema de duas presas e um predador, motivados por estudos de campo. O modelo Fujii (1970) apresenta detalhado estudo da dinâmica de evolução do sistema de uma espécie para o de duas espécies, conforme a seguir.

Quando espécies de duas presas e um predador existem quatro sistemas recorrentes possíveis (Figura 4.3). Quando se introduz uma espécie expresso pelas equações 4.3 uma variedade de resultados podem ocorrer. A introdução de novas espécies são possíveis. A introdução de uma presa mantém o mesmo desta forma (ou seja, a presa substituir a primeira) ou transforma-o em um sistema de duas presas e um predador. A introdução de uma espécie de predador em um sistema de duas presas transforma-o em um sistema de uma presa e um predador.



**Figura 4.3** Transição entre sistemas com espécies (FUJII, 1970).

Se mais uma espécie de presa é adicionada a um sistema de uma presa e um predador, o sistema pode ficar como está ou ir para um sistema de duas presas e um predador. Aqui as condições para estabilidade de três espécies, que serão apresentadas na próxima seção, não

são necessariamente exigidas para levar o sistema a um sistema de duas presas e um predador, devido a possibilidade de que soluções oscilatórias existam.

Quando duas espécies de presas co-existem, a introdução de uma espécie predadora qualquer leva o sistema a um sistema de duas presas e um predador ou o mantém como é, isto é, a espécie predadora é eliminada.

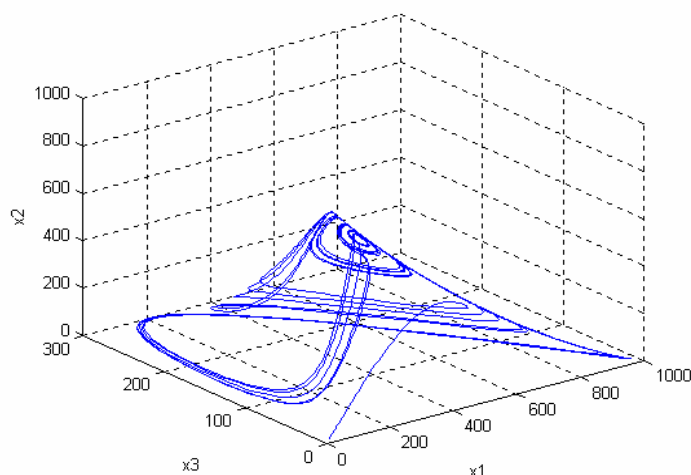
Todas as condições que relacionam os quatro tipos de sistemas descritos no esquema acima, e determinam pontos de estabilidade, ciclos limites e instabilidades -inclusive caóticas- em cada um deles, estão vinculadas aos valores paramétricos assumidos pelos sistemas.

Michael E. Gilpin (1979) comenta o comportamento *quasi-cíclico* descoberto por Vance (1978) em trajetórias de coexistência entre duas presas e um predador e refina esta classificação para *caos espiral*.

Segundo Vance e Gilpin, o comportamento supradescrito ocorre para os valores de parâmetros:

1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

A Figura 4.2 mostra o diagrama de fase do sistema (4.3) para os parâmetros citados.



**Figura 4.2: Diagrama de fase do sistema de Lotka-Volterra de duas presas e um predador com condição inicial (10;20;1).**

#### 4.2.1 Estudo da Estabilidade do Sistema

Um estudo detalhado dos pontos de equilíbrio positivos e estabilidade local para o sistema de duas presas e um predador foi realizado por Zhang, Liu & Chen (2003), baseado em estudos feitos anteriormente por Parrish & Salla (1970), Cramer & May (1972), Fujii (1977), Hsu (1981) e Takeuchi & Adashi (1983) entre outros, que consideram o critério de estabilidade de Ruth-Hurwitz.

O objetivo aqui será mostrar que para o conjunto de parâmetros de Vance (1978) e Gilpin (1979) o sistema apresenta-se instável, ou seja, as condições apresentadas não são satisfeitas.

Os pontos de equilíbrio para três espécies, duas espécies e uma única espécie das componentes do sistema (4.3) são dados a seguir segundo o critério de que a derivada é nula nos pontos críticos a serem determinados. À este conjunto de pontos de equilíbrio relacionam-se as condições de não-negatividade e condições de estabilidade local para o conjunto de parâmetros do sistema, que serão analisados caso a caso (ZHANG et all, 2003).

Para três espécies em equilíbrio:  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ .

$$x_1^* = \frac{c_{13}c_{32}r_2 - c_{32}c_{23}r_1 + (c_{23}c_{12} - c_{13}c_{22})r_3}{\Delta_C}$$

$$x_2^* = \frac{c_{31}c_{23}r_1 - c_{13}c_{31}r_2 + (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})r_3}{\Delta_C}$$

$$x_3^* = \frac{(c_{32}c_{21} - c_{22}c_{31})r_1 + (c_{12}c_{31} - c_{11}c_{32})r_2 + (c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21})r_3}{\Delta_C}$$

onde  $\Delta_C$  é o determinante da matriz de coeficientes  $c_{ij}$ .

A condição de não-negatividade é dada por

$$x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, x_3^* \geq 0$$

e satisfeita com  $x_1^* = 118,4211$ ;  $x_2^* = 815,7895$ ;  $x_3^* = 6,5789$ .

As condições de estabilidade local para este ponto de equilíbrio são:

$$\begin{cases} a_0 = x_1^* + x_2^* + x_3^* > 0 \\ a_1 = (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})x_1^*x_2^* + (c_{31}c_{13}x_1^* + c_{32}c_{23}x_2^*)x_3^* > 0 \\ a_2 = x_1^*x_2^*x_3^*\Delta_C > 0 \\ a_0a_1 - a_2 > 0 \end{cases}$$

que calculadas para os valores aqui considerados resultam em

$$\begin{cases} a_0 = 934,2105 > 0 \\ a_1 = -0,0899 < 0 \\ a_2 = 0,0242 > 0 \\ a_0a_1 - a_2 = -84,0481 < 0. \end{cases}$$

Sendo assim, duas das quatro condições de estabilidade para três espécies em equilíbrio não são satisfeitas, o que já é suficiente para caracterizar um ponto instável.

Para o caso em que duas espécies co-existem supõe-se três situações:

1) primeira presa e predador;

$$\begin{cases} x_2^* = 0 \\ r_1 - c_{11}x_1^* - c_{13}x_3^* = 0 \\ -b_3 + c_{31}x_1^* = 0 \end{cases}$$

$$(x_1^*, 0, x_3^*) \rightarrow \left( \frac{r_3}{c_{31}}, 0, \frac{c_{31}r_1 - c_{11}r_3}{c_{13}c_{31}} \right)$$

A condição de não-negatividade é satisfeita quando  $c_{13} \geq r_3 c_{13} / r_1 c_{31}$ . Dado que  $c_{13}=0,01$  e  $r_3 c_{13} / r_1 c_{31} = 2$ , a condição é violada para esta situação.

A estabilidade de  $(x_1^*, 0, x_3^*)$  ocorre se  $c_{31}c_{23}r_1 - c_{13}c_{31}r_2 + (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})r_3 < 0$ . Ao ser feita a substituição dos valores dos parâmetros obtém-se  $c_{31}c_{23}r_1 - c_{13}c_{31}r_2 + (c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23})r_3 = 3,1 \times 10^{-5} > 0$ . Logo, a condição não é satisfeita.

2) segunda presa e predador;

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ r_2 - c_{22}x_2^* - c_{23}x_3^* = 0 \\ -b_3 + c_{32}x_2^* = 0 \end{cases}$$

$$(0, x_2^*, x_3^*) \rightarrow \left( 0, \frac{r_3}{c_{32}}, \frac{c_{32}r_2 - c_{22}r_3}{c_{23}c_{32}} \right)$$

Para esta situação a condição de não-negatividade  $c_{23} \geq r_3 c_{13} / r_2 c_{31}$  não é satisfeita com  $c_{23}=0,01$  e  $r_3 c_{13} / r_2 c_{31} = 0,2$ .

Do mesmo modo, a estabilidade deste ponto crítico não é garantida para a condição,  $r_2 c_{13} c_{32} - r_1 c_{32} c_{23} + r_3 (c_{23} c_{12} - c_{13} c_{22}) < 0$  tendo em vista que o valor calculado é  $r_2 c_{13} c_{32} - r_1 c_{32} c_{23} + r_3 (c_{23} c_{12} - c_{13} c_{22}) = 4,5 \times 10^{-5} > 0$ .

3) duas presas;

$$\begin{cases} x_3^* = 0 \\ r_1 - c_{11}x_1^* - c_{12}x_2^* = 0 \\ b_2 - c_{21}x_1^* - c_{22}x_2^* = 0 \end{cases}$$

$$(x_1^*, x_2^*, 0) \rightarrow \left( \frac{c_{22}r_1 - c_{12}r_2}{c_{22}c_{11} - c_{21}c_{12}}, \frac{c_{11}r_2 - c_{21}r_1}{c_{22}c_{11} - c_{21}c_{12}}, 0 \right)$$

A condição de não-negatividade para a co-existência de duas presas é dada por e  $(r_1 - c_{12}r_2)(r_2 - c_{21}r_1) \geq 0$  satisfeita para  $(r_1 - c_{12}r_2)(r_2 - c_{21}r_1) = 0,9975 \geq 0$ .

Quanto à estabilidade, pode-se dizer que o sistema apresenta-se instável para este ponto crítico devido ao fato de que a condição é contrariada com o valor  $2,5 \times 10^{-7} > 0$ , embora  $(c_{32}c_{21} - c_{22}c_{31})r_1 + (c_{12}c_{31} - c_{11}c_{32})r_2 + (c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21})r_3 < 0$  a outra condição,  $c_{12}c_{21} < 1$ , seja satisfeita com  $c_{12}c_{21} = 1,5 \times 10^{-6} < 1$ .

Quando o sistema se reduz a uma única espécie, os pontos são:

$$(x_1^*, 0, 0) \rightarrow \left( \frac{r_1}{c_{11}}, 0, 0 \right)$$

$$(0, x_2^*, 0) \rightarrow \left( 0, \frac{r_2}{c_{22}}, 0 \right)$$

$$(0, 0, x_3^*) \rightarrow (0, 0, 0)$$

Como pode-se observar, estes pontos sempre serão não-negativos.

A estabilidade para a sobrevivência da primeira presa está subordinada a duas condições:

$$c_{12} > \frac{r_1}{r_2} \quad \text{e} \quad c_{23} > \frac{r_3 c_{13}}{c_{31} r_2} ,$$

sendo que a primeira delas não é satisfeita com  $c_{12} = 0,001 < \frac{r_1}{r_2} = 1$ . Mesmo tendo a segunda condição respeitada para o valor  $c_{23} = 0,001 > \frac{r_3 c_{13}}{c_{31} r_2} = 0,00005$ , a negação da condição anterior já é um indicativo da instabilidade do sistema para este ponto.

De modo similar, a estabilidade para existência da segunda presa relaciona-se às condições:

$$c_{21} > \frac{r_2}{r_1} \quad \text{e} \quad c_{13} > \frac{r_3 c_{13}}{c_{31} r_1} ,$$

que correspondem a  $c_{21} = 0,0015 < \frac{r_2}{r_1} = 1$  e  $0,01 > 0,00005$ , respectivamente. Mais uma vez a primeira condição é violada, caracterizando a instabilidade.

O terceiro ponto é obviamente instável, visto que o predador não sobrevive (ou não permanece no sistema) na ausência de presas, justificando a extinção das três espécies.

### 4.3 Sincronização dos Sistemas de Lotka-Volterra através de Controle Ótimo

A formulação do problema de sincronização é descrita a seguir para dois sistemas idênticos de Lotka-Volterra na forma mestre-escravo. Esta formulação considera a forma geral para  $n$  espécies e é uma extensão da formulação do problema de estabilização ótima do estado de equilíbrio através do controle ótimo.

O comportamento síncrono dos dois sistemas de Lotka-Volterra usando esta metodologia será demonstrado aqui para o caso  $n=3$ . As variáveis de estado do sistema mestre serão denotadas por  $x_i$  e o sistema escravo terá equações idênticas denotadas pelas variáveis  $y_i$ ,

$i=1,2,3$ . A diferença entre os sistemas será dada por condições iniciais distintas. Assim, o sistema mestre é descrito por:

$$\dot{x}_i = x_i \left( r_i - \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_j \right) \quad i = 1, 2, 3; \quad (4.4)$$

e o sistema escravo por:

$$\dot{y}_i = y_i \left( r_i - \sum_{j=1}^3 c_{ij} y_j \right) + U_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.5)$$

Serão introduzidas funções de controle  $U_i$ ,  $i=1,2,3$ , as mesmas que são utilizadas para realização de controle levando o sistema a um ponto de equilíbrio ou para direcioná-lo a uma trajetória periódica. Define-se o erro de estados entre os sistemas mestre e escravo pelas variáveis

$$e_i = y_i - x_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.6)$$

Subtraindo a equação (4.4) da equação (4.5) e usando a notação (4.6) obtém-se:

$$\dot{e}_i = r_i e_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} (x_i x_j - y_i y_j) + U_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

A utilização de funções de controle adequadas deverá levar o sistema (4.7) de qualquer condição inicial ao estado final

$$e(\infty) = 0 \quad (4.8)$$

de modo a determinar a sincronização entre os dois sistemas.

As funções de controle que serão usadas para satisfazer a condição (4.8) podem ser obtidas de modos diversos, variando de acordo com a metodologia adotada.



## 5 SINCRONIZAÇÃO CONFORME O TEOREMA DE KRASOVSKII

### 5.1 Sincronização Ótima

O controle e a sincronização do sistema de Lotka-Volterra generalizado para  $n$  espécies através do controle não-linear feedback baseado no teorema de Krasovskii foram propostos por El-Gohary e Yassen (2001), considerando  $n=2$ . Esta metodologia será apresentada neste capítulo para o caso  $n=3$  visando a sincronização dos sistemas idênticos na forma mestre e escravo.

Considere-se o sistema mestre (5.1)

$$\dot{x}_i = x_i \left( r_i - \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

e o sistema escravo (5.2),

$$\dot{y}_i = y_i \left( r_i - \sum_{j=1}^3 c_{ij} y_j \right) + U_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.2)$$

sujeitos às diferenças entre as trajetórias definidas por (5.3)

$$e_i = y_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.3)$$

e cuja evolução é descrita no sistema (5.4)

$$\dot{e}_i = r_i e_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} (x_i x_j - y_i y_j) + U_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.4)$$

Assume-se que o controle  $U_i$  são funções de  $e_i$ ,  $x_i$  e  $y_i$ ,  $i=1,2,3$ . Então a condição para estabilidade assintótica no ponto de equilíbrio, de acordo com o teorema de Krasovskii, pode também ser aplicada para a sincronização geral do sistema, exigindo a minimização do funcional

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sum_i \left\{ m_i e_i^2 + \frac{1}{m_i} \left[ U_i + r_i e_i + \sum_j c_{ij} (y_i y_j - x_i x_j) \right]^2 \right\} dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.5)$$

e que a expressão

$$B[V; e_i; U_i] = \sum_i e_i \left[ U_i + r_i e_i + \sum_j c_{ij} (y_i y_j - x_i x_j) \right] + \frac{1}{2} \sum_i m_i e_i^2 + \sum_i \frac{1}{2m_i} \left[ U_i + r_i e_i + \sum_j c_{ij} (y_i y_j - x_i x_j) \right]^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.6)$$

seja maior ou igual a zero, onde  $V$  é a função de Lyapunov escolhida como

$$2V = \sum_i e_i^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.7)$$

e com constantes  $m_i$  positivas.

Das condições de sincronização ótima, pode-se supor que a expressão (4.2) tem um zero quando  $U_i = U_i^{(0)}$ , onde  $U_i^{(0)}$  são as funções de controle ótimo propostas por El-Gohary e Yassen (2001)

$$U_i^{(0)} = -(m_i + r_i) e_i - \sum_{j=1}^3 c_{ij} (y_i y_j - x_i x_j), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.8)$$

Substituindo as equações (5.8) em (5.4) tem-se um sistema de equações diferenciais em forma de malha fechada com estabilidade assintótica da solução particular  $e_i=0$  e  $U_i=0$  descrito por

$$\dot{e}_i = -m_i e_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.9)$$

Para provar o enunciado acima, considere-se a função de Lyapunov (5.7). Esta função é uma forma quadrática definida positiva, e sua derivada em função do tempo é

$$\dot{V} = \sum_i e_i \dot{e}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.10)$$

Levando em conta (5.9) a derivada fica escrita como

$$\dot{V} = -\sum_i m_i e_i^2 \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.11)$$

e é definida positiva para constantes  $m_i$  positivas.

Assim, sob o efeito das funções de controle (5.8) o estado de equilíbrio  $e_i=0$  do modelo de Lotka-Volterra será assintoticamente estável.

## 5.2 Resultado da sincronização baseada no teorema de Krasovskii.

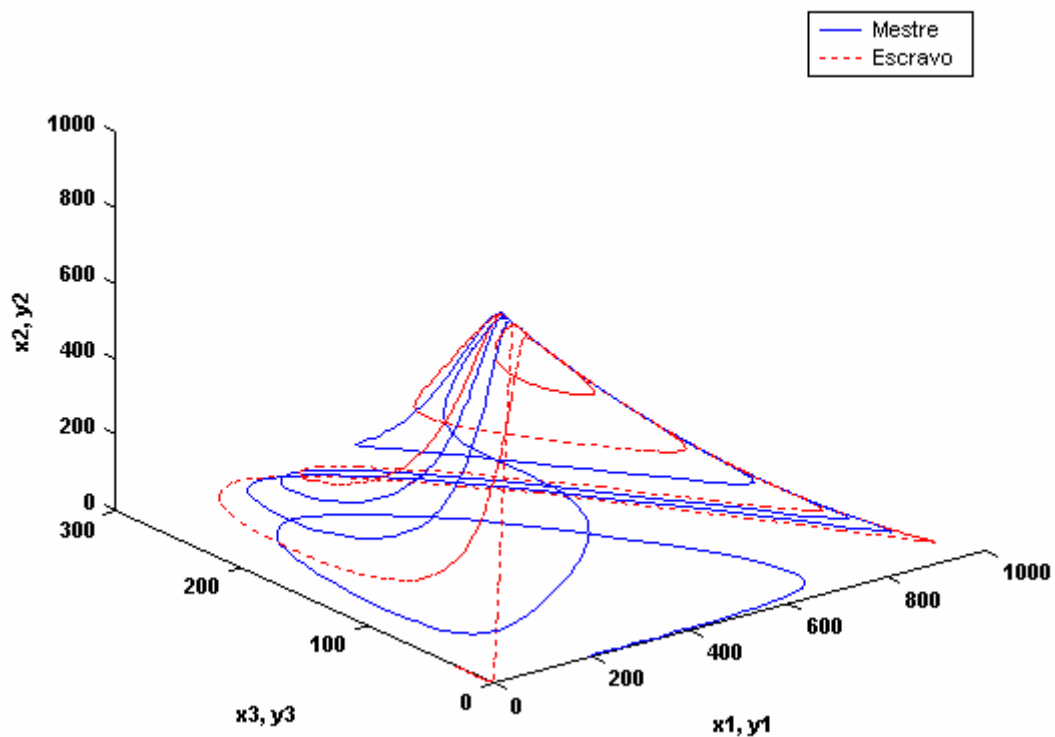
As simulações numéricas da sincronização dos dois sistemas idênticos de Lotka-Volterra (5.1) e (5.2), respectivamente mestre e escravo, foram realizadas para os parâmetros indicados por Vance (1978) e Gilpin(1979) conforme apresentado no capítulo anterior.

O sistema com controle é, então, escrito na forma

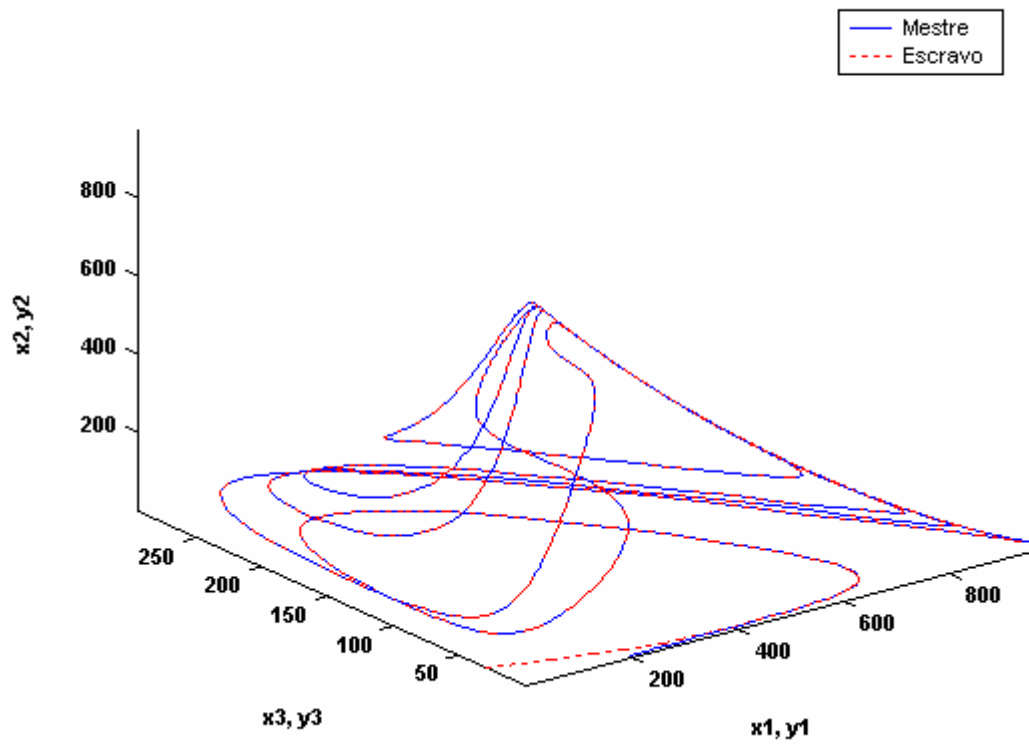
$$\dot{e}_i = r_i e_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} (x_i x_j - y_i y_j) + m_i e_i, \quad (5.12)$$

cujos parâmetros foram acima descritos.

No trabalho de El-Gohary & Yassen (2001) as simulações foram feitas para o caso  $n=2$ , com  $m_1=0,5$  e  $m_2=0,2$ . Aqui, para  $n=3$ , a sincronização dos sistemas de duas presas e um predador foi atingida para  $m_1 = m_2 = m_3 = 5$ , conforme mostram as Figuras 5.1-5.4. A condição inicial para o sistema mestre é  $(200;2;1)$  e para o sistema escravo  $(0,01;0,2;30)$ . A condição inicial do sistema do erro é dada pela diferença entre as condições iniciais do escravo e do mestre, resultando em  $(-199,9; -1,8; 29)$ .



**Figura 5.1:** Diagrama de fase dos dois sistemas idênticos de Lotka-Volterra, com diferentes condições iniciais, sem a aplicação de controle.



**Figura 5.2:** Diagrama de fase dos dois sistemas idênticos de Lotka-Volterra, com diferentes condições iniciais, sincronizados pelo controle ótimo (5.12) conforme o teorema de Krasovskii.

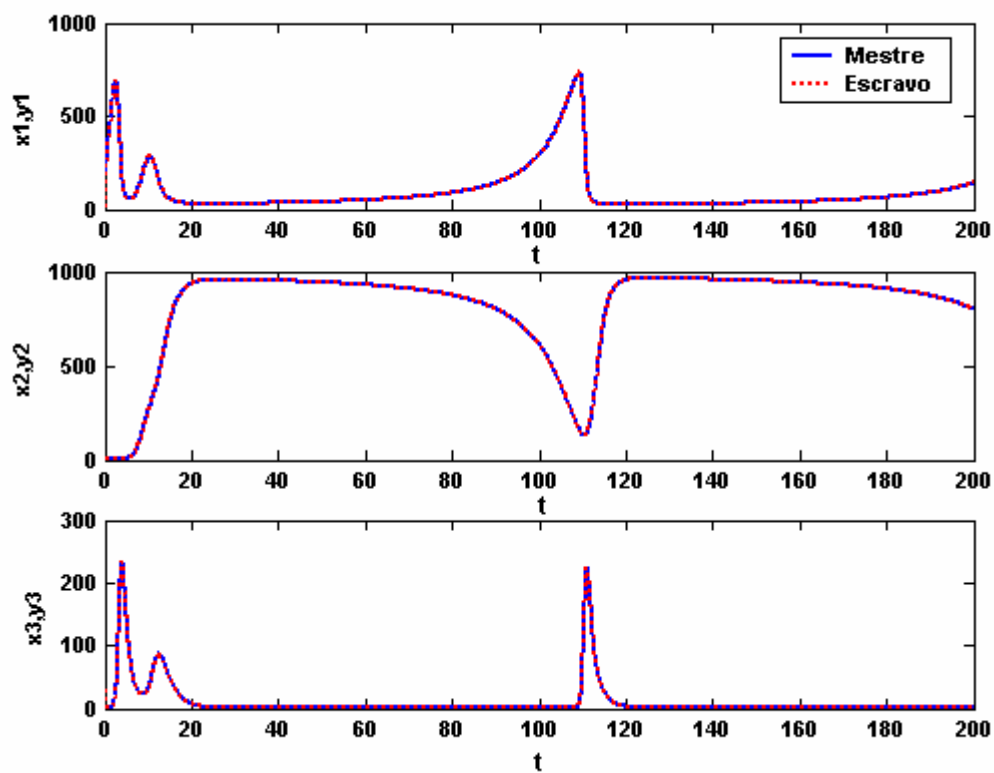


Figura 5.3: Trajetórias temporais sincronizadas das componentes correspondentes dos sistemas mestre e escravo.

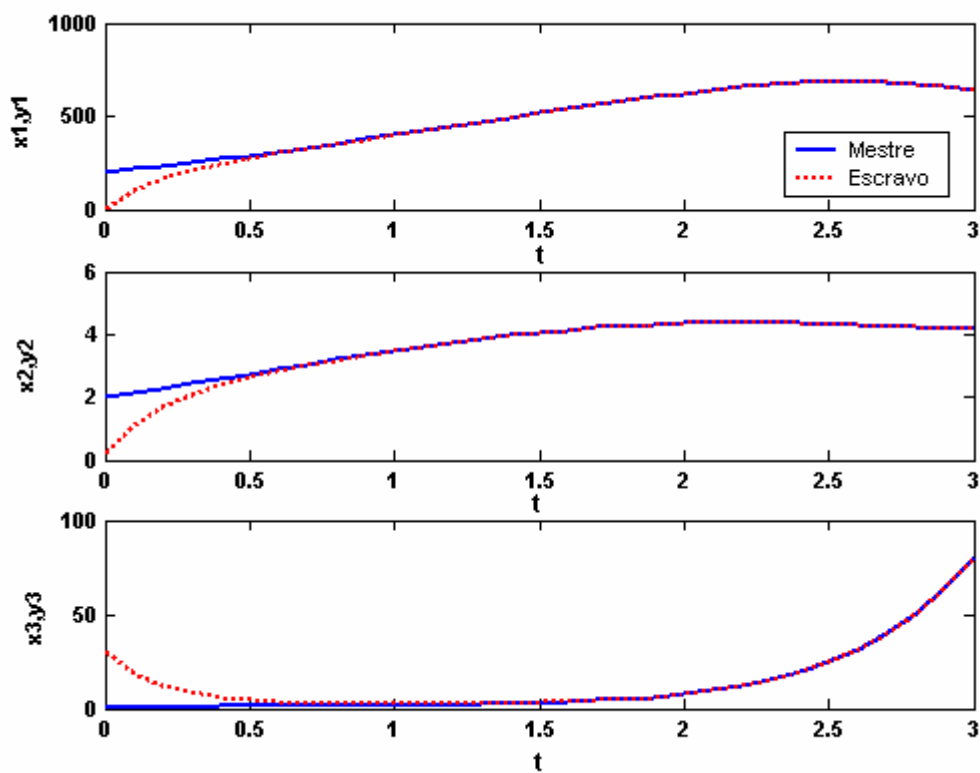


Figura 5.4: Trajetórias dos sistemas mestre e escravo com controle (5.12) no intervalo  $[0,3]$ .

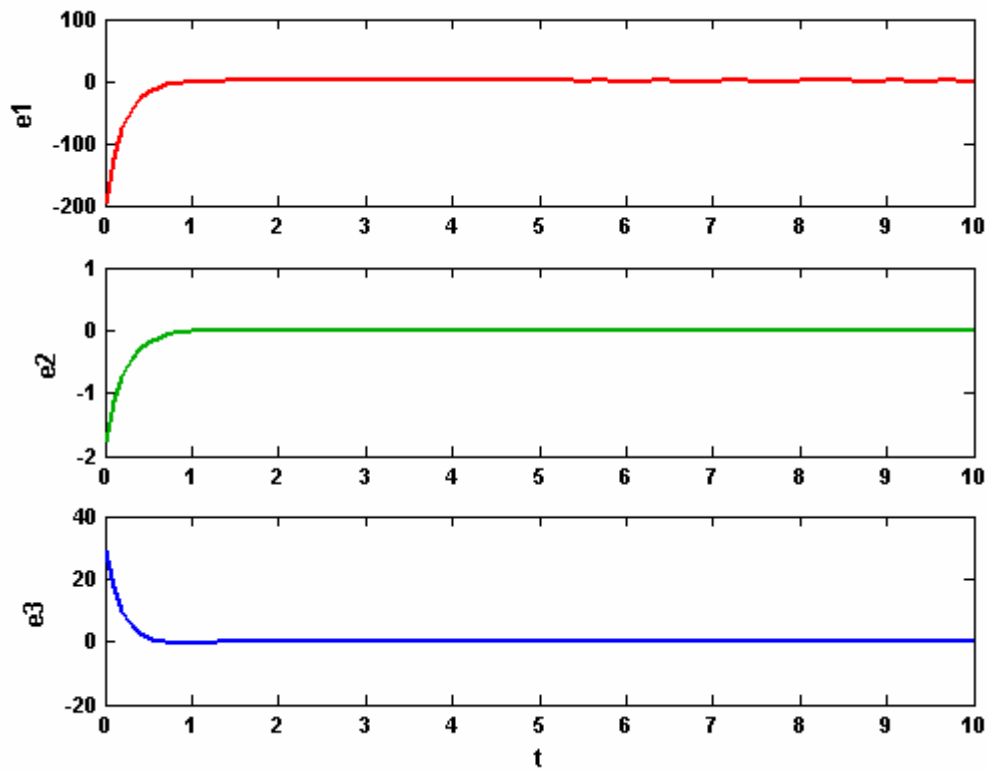


Figura 5.5: Gráfico do erro entre a trajetória do sistema escravo e do sistema mestre para cada componente. Condição inicial  $(-199,9;-1,8;29)$ .



## 6 SINCRONIZAÇÃO DO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA USANDO CONTROLE ÓTIMO LINEAR FEEDBACK.

### 6.1 Formulação do problema de sincronização para sistemas de ordem $n$

O problema da sincronização do modelo de Lotka-Volterra de duas presas e um predador escritos na forma mestre e escravo será formulado nesta seção de acordo com as leis do controle ótimo, optando pelo uso de um feedback linear conforme justificativa apresentada no terceiro capítulo.

Considere-se o sistema mestre (6.1)

$$\dot{x}_i = x_i \left( r_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

e o sistema escravo (6.2),

$$\dot{y}_i = y_i \left( r_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j \right) + U_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.2)$$

sujeitos às diferenças entre as trajetórias definidas por (6.3)

$$, \quad 1, 2, \dots,$$

Os sistemas (6.1) e (6.2) têm os mesmos parâmetros, mas condições iniciais diferentes. No sistema (6.2),  $U$  é o vetor de controle definido conforme (6.5)

$$U = \tilde{u} + u_t \quad (6.5)$$

sendo que  $\tilde{u}$  é o *feedforward* da trajetória desejada cujos componentes podem ser descritos como

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}} - r_i \tilde{x}_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{x}_j \quad (6.6)$$

e o controle  $u_t$  é um feedback linear e tem a forma de (6.7):

$$u = Bu \quad (6.7)$$

onde  $B \in R^{n \times n}$  é uma matriz constante. Para este estudo, considere-se  $B$  uma matriz identidade.

Sabendo que a trajetória desejada satisfaz o sistema (6.1), ou seja,  $\tilde{x} = x$ . Disto resulta que  $\tilde{u} = 0$ .

Desse modo, o problema de sincronização pode ser formulado como o problema do controle ótimo descrito pelo teorema apresentado no capítulo três.

Sob estas considerações, o sistema (6.4) que representa o erro entre as trajetórias  $y$  e  $x$  pode ser reescrito em termos de  $e$  e  $x$  como

$$\dot{e}_i = r_i e_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} (e_i e_j + e_i x_j + e_j x_i) + \sum_{k=1}^n b_{ik} U_k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.8)$$

O sistema (6.8) na forma vetorial mostrada em (3.27) pode ser escrito como

$$\dot{e} = Ae + h(x, e) + Bu \quad (6.9)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

e

$$h(x, e) = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^n c_{1j} (e_1 e_j + e_1 x_j + e_j x_1) \\ -\sum_{j=1}^n c_{2j} (e_2 e_j + e_2 x_j + e_j x_2) \\ \dots \\ -\sum_{j=1}^n c_{nj} (e_n e_j + e_n x_j + e_j x_n) \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

A justificativa para o uso do controle linear feedback em sistemas não-lineares apresentada no terceiro capítulo é feita sobre a condição de minimização do funcional (6.10)

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (l(e) + u^T R u) dt, \quad (6.12)$$

onde a função (6.11) dada por

$$l(e) = e^T Q e - h^T(x, e) P e - e^T P h(x, e) \quad (6.13)$$

deve ser positiva definida.

## 6.2 Resultados para o sistema de duas presas e um predador

O regime caótico dos sistemas (6.1) e (6.2) é garantido pelos parâmetros de Vance (1978) e Gilpin(1979) como já descrito anteriormente. As condições iniciais dadas para os sistemas mestre e escravo são iguais àquelas usadas na sincronização ótima baseada no teorema de Krasovskii, ou seja,  $x_1(0)=200$ ,  $x_2(0)=2$ ,  $x_3(0)=1$ ;  $y_1(0)=0,01$ ;  $y_2(0)=0,2$ ;  $y_3(0)=30$ . A condição inicial para o erro é  $e_1(0)=-199,99$ ;  $e_2(0)=-1,8$ ;  $e_3(0)=29$ .

Os valores da matriz  $A$  são

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

enquanto os da matriz  $B$  são valores de uma matriz identidade de ordem 3. Desse modo, considera-se satisfeita a condição de controlabilidade do sistema conforme visto no terceiro capítulo.

As matrizes  $Q$  e  $R$  escolhidas para este estudo foram

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Para esta escolha considerou-se que o desempenho esperado na sincronização fosse atingido satisfatoriamente, conforme será explicado na seção (6.4).

Os valores das matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  e  $R$  são usados para calcular o valor da matriz  $P$  do ganho  $K$  do controle visto em (3.11) através do comando LQR (*linear-quadratic regulator*) do software Matlab. Os valores dos elementos de  $P$  obtidos, neste caso, foram

$$P = \begin{bmatrix} 4.3166 & 0 & 0 \\ 0 & 4.3166 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3166 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Desse modo, o controle  $u$  fica escrito explicitamente como

$$u = \begin{bmatrix} -4.3166 & 0 & 0 \\ 0 & -4.3166 & 0 \\ 0 & 0 & -2.3166 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

A seguir são apresentados os resultados obtidos para sincronização de dois sistemas idênticos de Lotka-Volterra com comportamento caótico através do controle linear feedback.

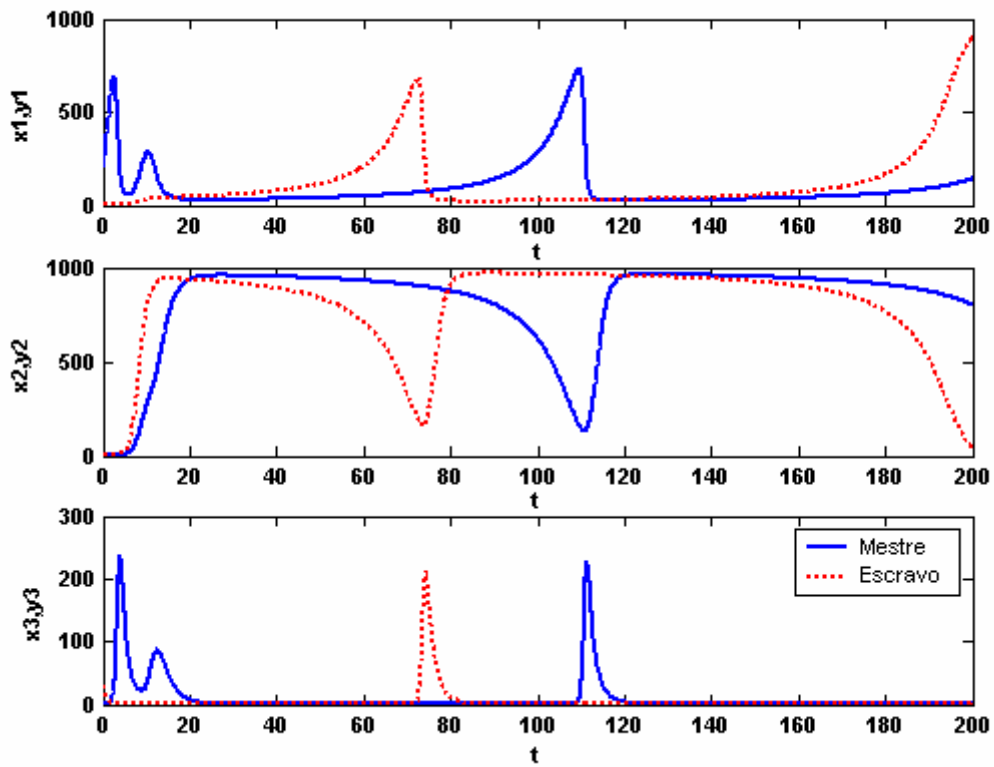


Figura 6.1 - Comportamento das componentes dos sistemas mestre e escravo antes da sincronização.

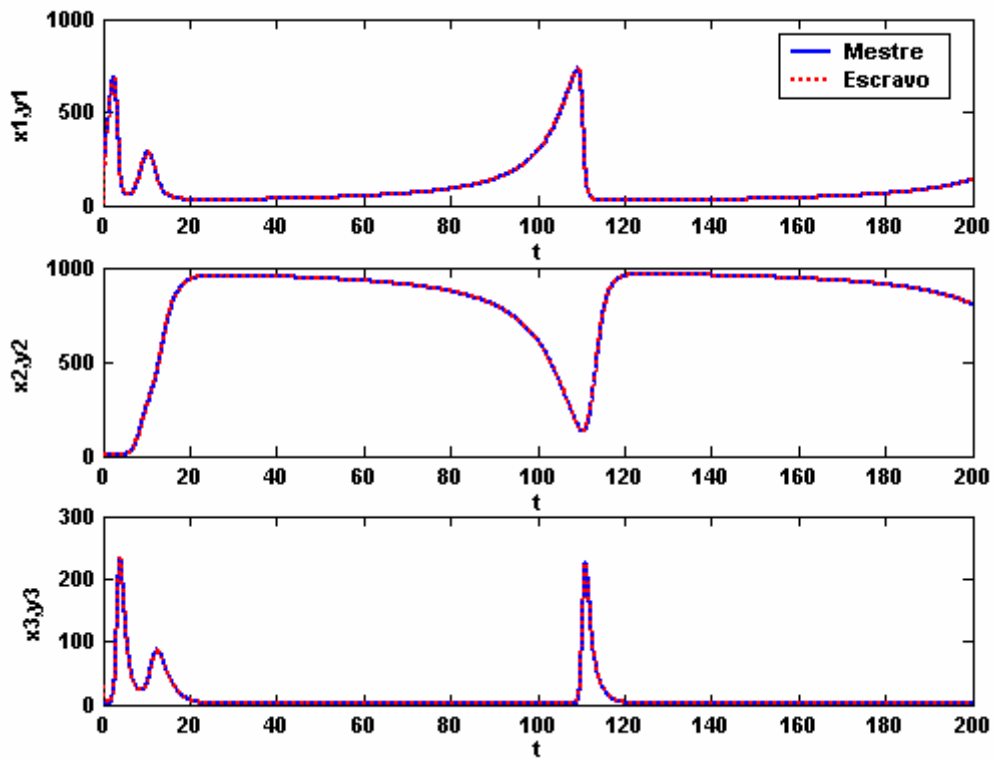


Figura 6.2 - Trajetórias temporais dos sistemas sincronizados através do controle feedback (6.18).

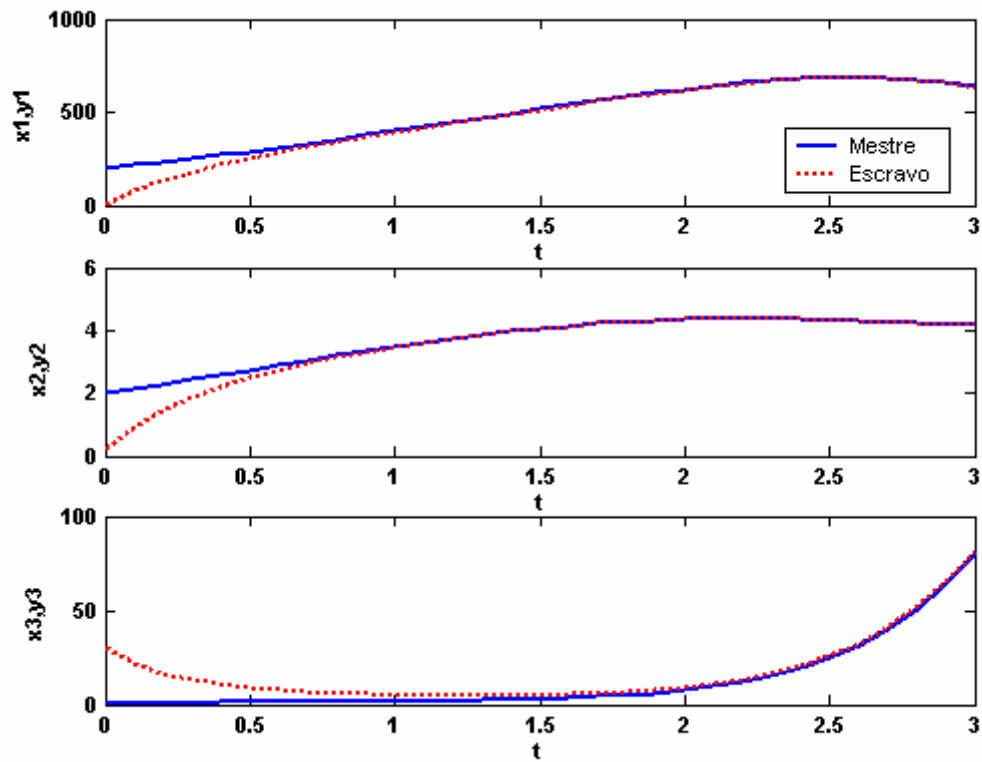


Figura 6.3- Trajetórias temporais das três componentes sincronizadas no intervalo [0,3].



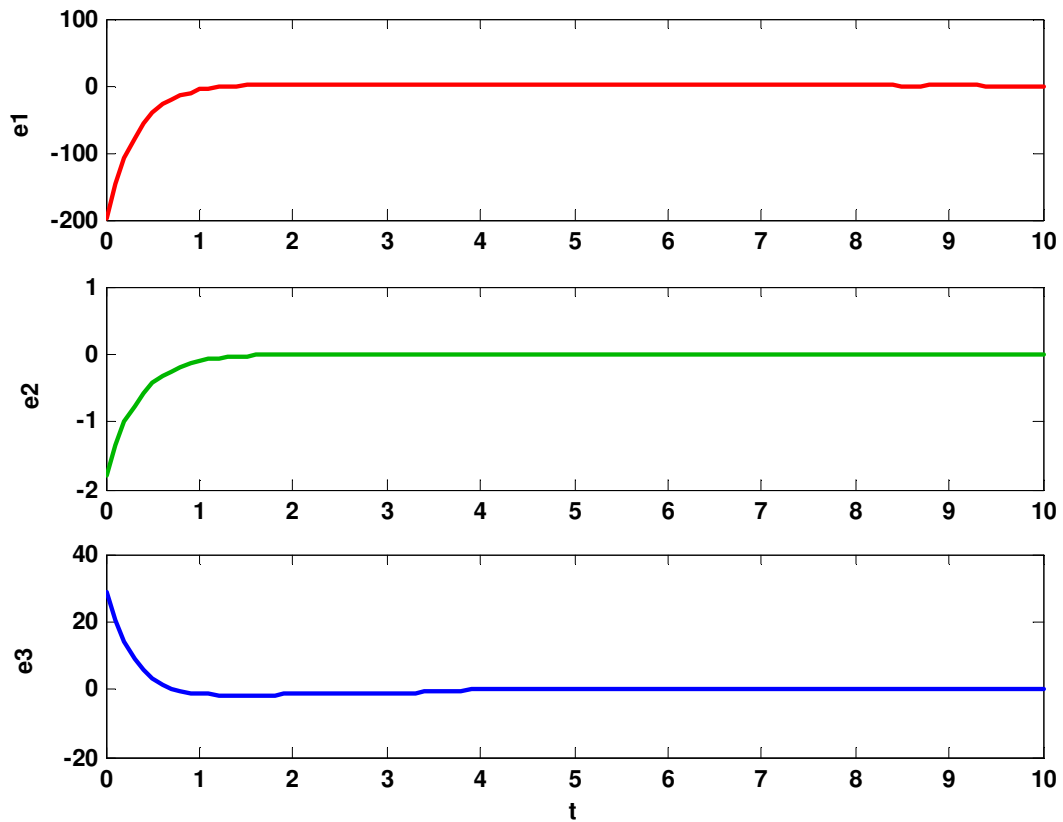
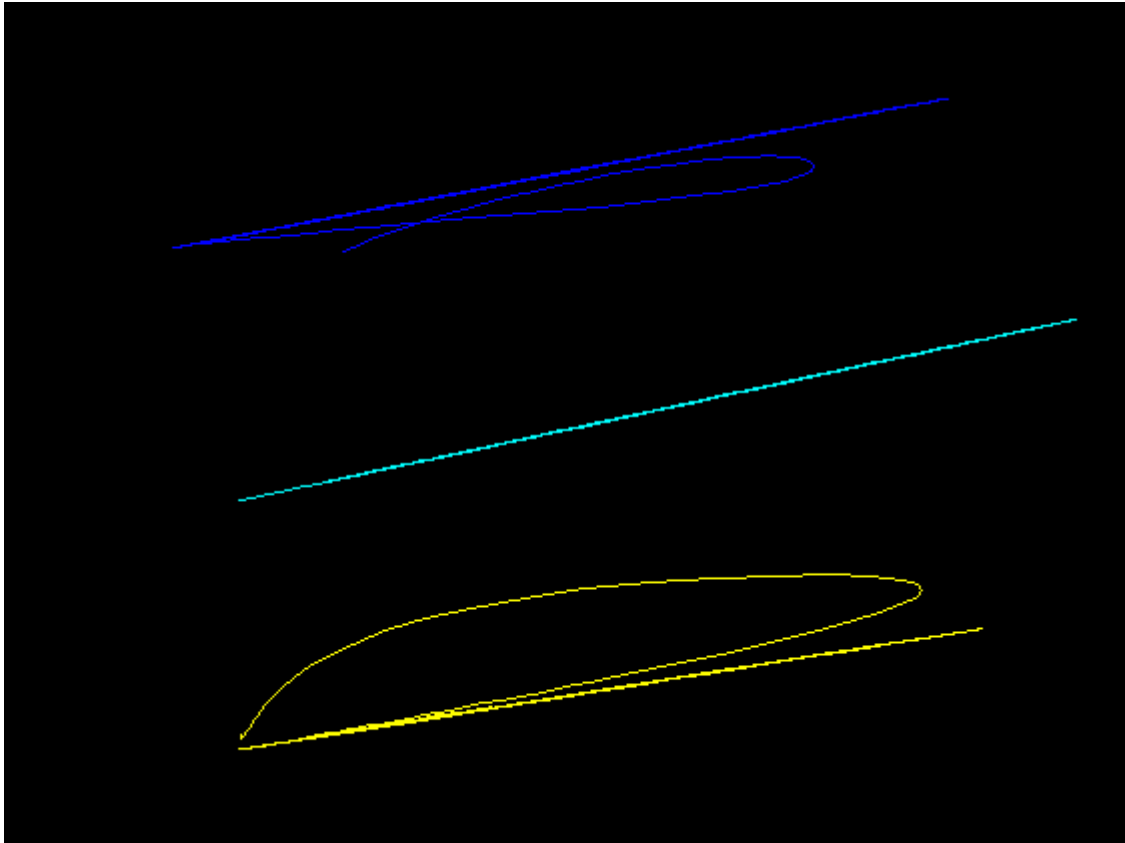


Figura 6.4 - Erro entre as trajetórias temporais das componentes correspondentes dos sistemas mestre e escravo.



**Figura 6.5 - Gráficos de  $x$  versus  $y$  mostrando que as trajetórias convergem para a identidade  $y=x$ .**

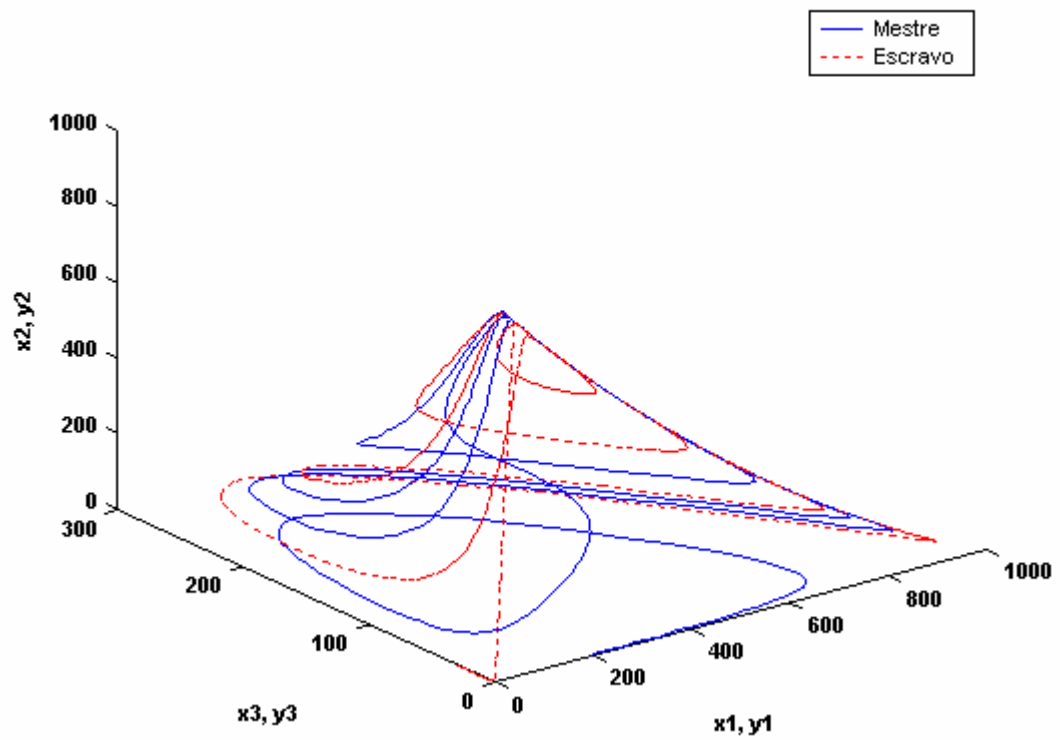
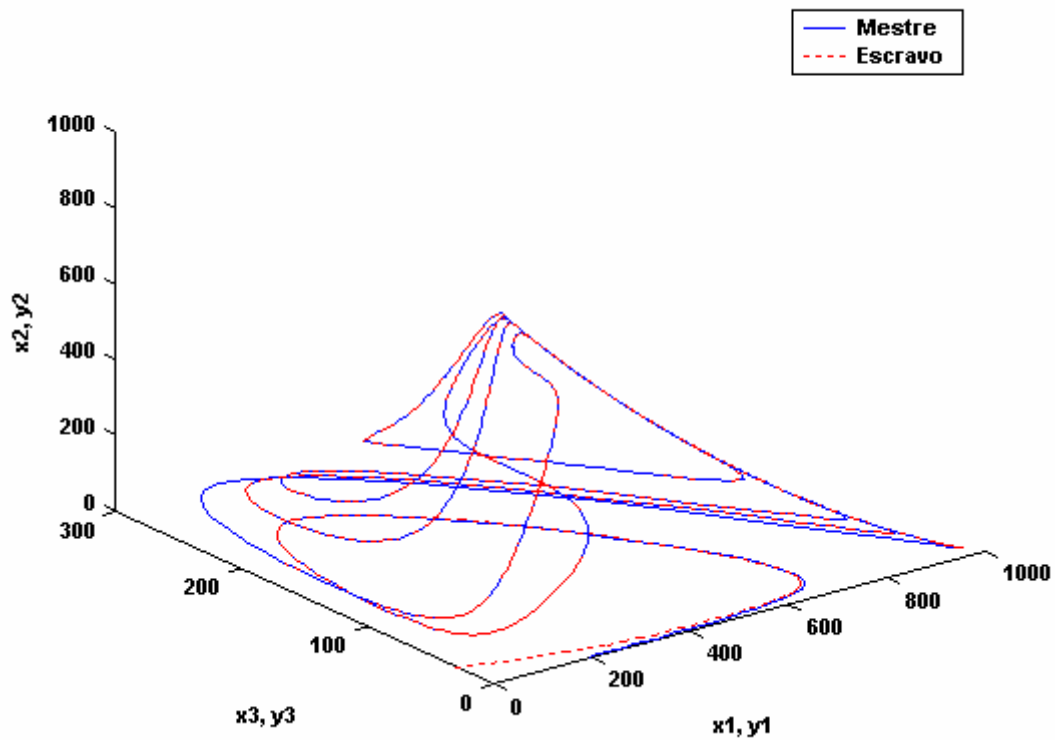


Figura 6.6 - Diagrama de fase dos sistemas mestre e escravo sem controle. As trajetórias pertencem ao mesmo atrator, mas não coincidem.



**Figura 6.7 - Diagrama de fase dos sistemas sincronizados pelo controle linear feedback. A linha tracejada, sistema escravo, rapidamente rastrea a trajetória do mestre.**

As simulações mostraram que a sincronização foi atingida com sucesso entre dois sistemas em regime caótico na forma mestre-escravo através de um controle feedback linear mantidas as características de otimalidade.



## 6.4 Seleção de $Q$ e $R$

A seleção das matrizes de peso  $Q$  e  $R$ , que representam coeficientes de ponderação do funcional a ser minimizado, não ocorre de modo direto. Na resolução de problemas práticos este constitui um dos maiores desafios de quem elabora o projeto de controle. Seus valores impõem penalizações ao estado da variável controlada e ao controle empregado ao longo do tempo, respectivamente. Como não há um processo sistemático para a escolha destes pesos, ela normalmente é feita por tentativa e erro.

Deseja-se, ao incluir  $Q$  e  $R$  no integrando do índice de desempenho, que seja mantido um compromisso dos valores destas matrizes com a realidade prática do problema. Um aumento grande do controle empregado pode ser o custo para que se obtenha uma redução arbitrariamente rápida do estado. Cabe lembrar que este custo normalmente gera uma impossibilidade prática na implementação de tal solução. Por outro lado, uma redução considerável no controle pode provocar uma grande elevação do estado, situação também indesejável para um problema do tipo regulador.

Se os elementos da matriz  $Q$  são selecionados muito maiores do que aqueles da matriz  $R$ , então os componentes correspondentes de  $x(t)$  serão mantidos menores pelo controle ótimo. Por outro lado, se  $R$  é escolhido grande,  $u(t)$  será mantido menor de forma que seja usada menos força no controle. Geralmente, os pólos da malha-fechada são 'acelerados' (exigindo mais força no controle) para um  $R$  menor (LEWIS e SYRMOS, 1995).

Neste trabalho foi adotada a forma diagonal para as matrizes de peso que é a mais usual, tendo em vista que isto possibilita que as componentes do estado e do controle sejam penalizadas individualmente pelos coeficientes de ponderação correspondentes. Isto facilita o ajuste nas simulações e a interpretação física dos resultados, se for o caso.

O critério adotado neste trabalho para que se efetuasse a seleção dos valores de  $Q$  e  $R$  foi o tempo necessário para atingir a sincronização e a influência destas matrizes no cálculo de  $J_{min} = e^T(0)Pe(0)$ . O tempo de sincronização foi observado através das trajetórias temporais do erro entre os sistemas mestre e escravo, primeiramente fixando  $R=1$  e variando  $Q$ , conforme a Figuras 6.9, e depois fazendo  $Q=10$  constante e variando  $R$ , como mostra a Figura 6.10.

A influência dos pesos das matrizes no cálculo dos valores mínimos do funcional  $J$  é

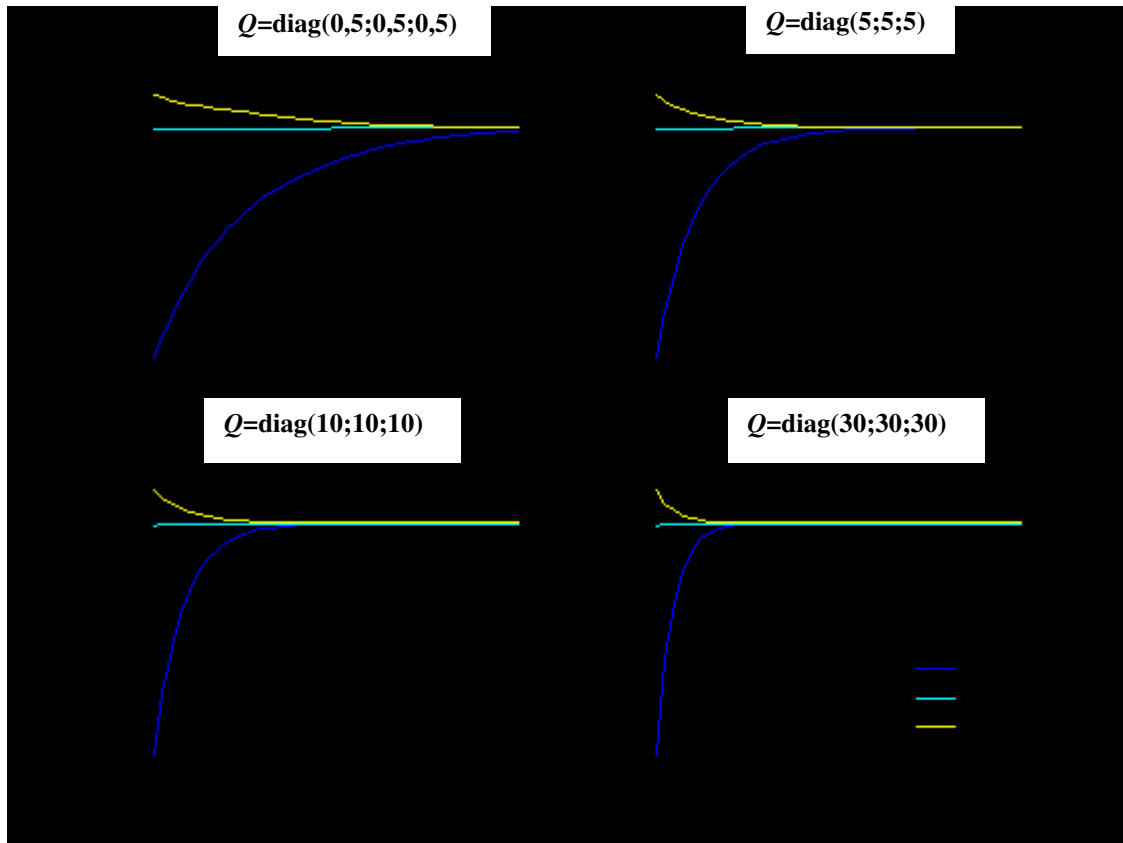


Figura 6.9 - Evolução do erro de sincronização com variação da matriz  $Q$ , mantendo  $R = \text{diag}(1, 1, 1)$  fixo.



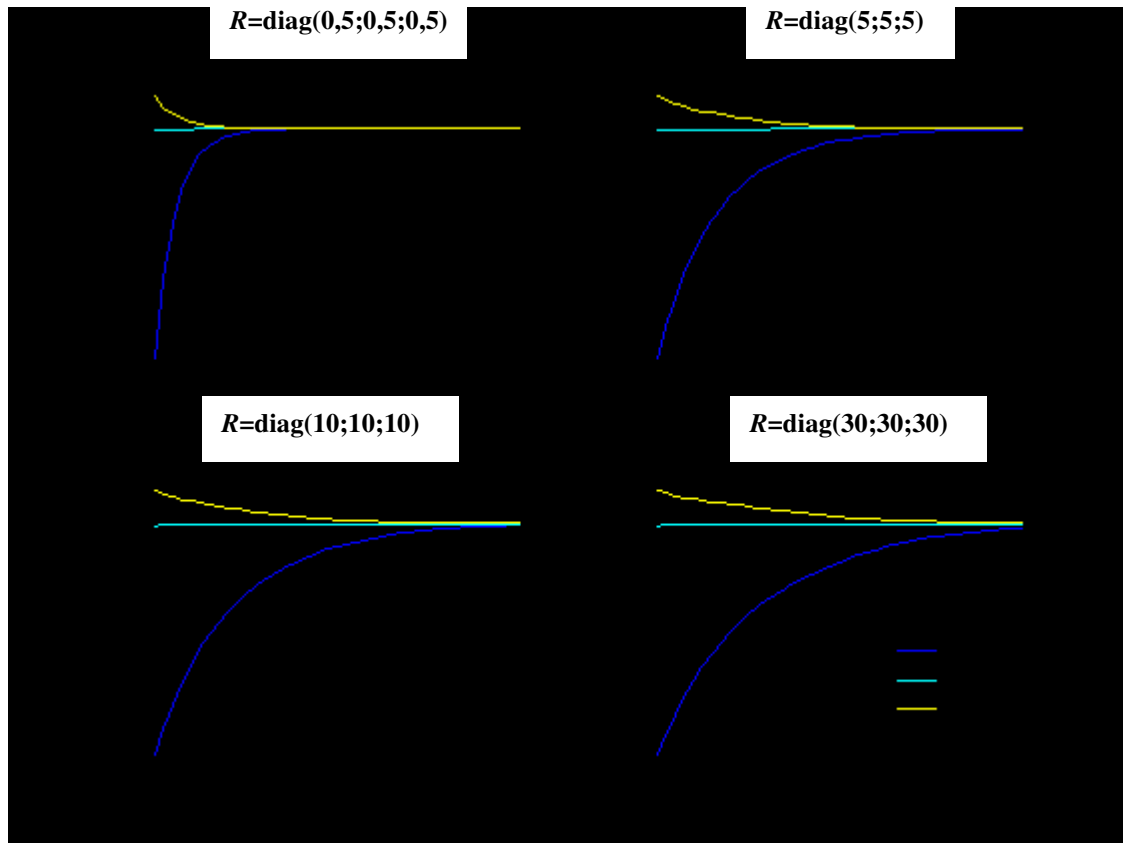
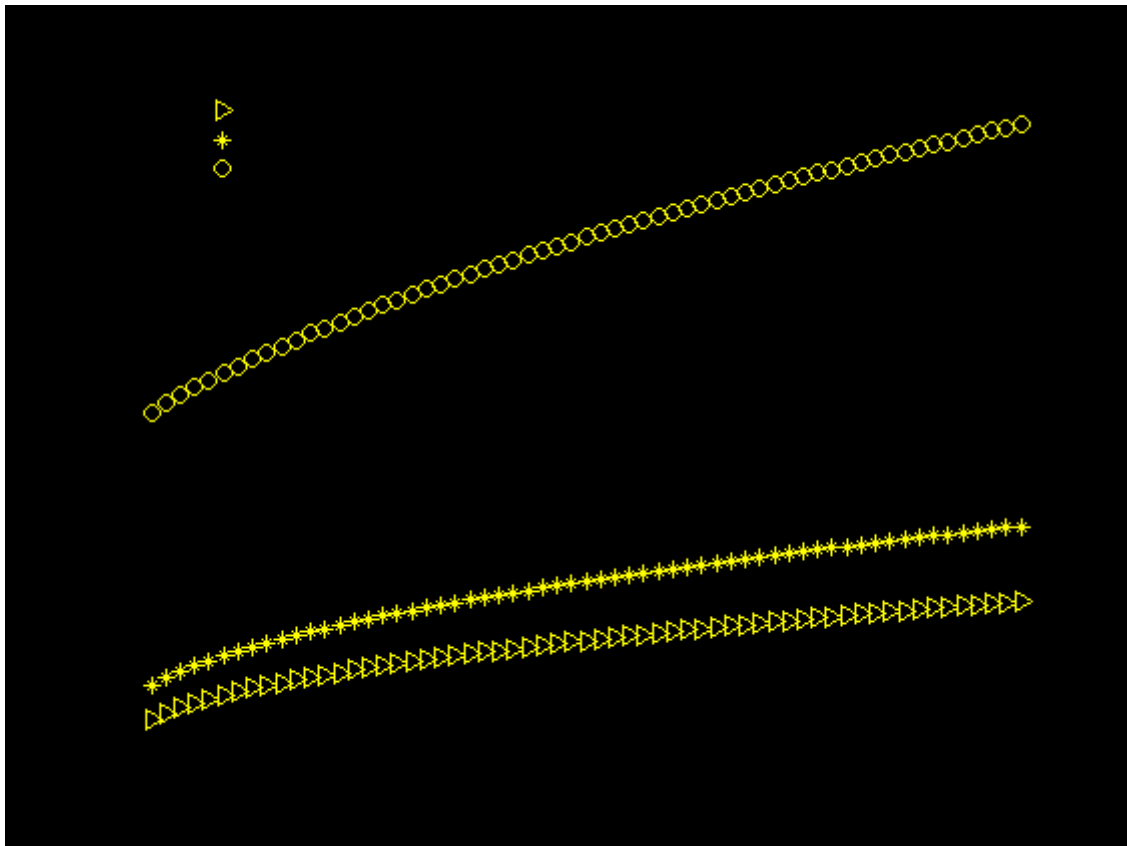


Figura 6.10: Evolução do erro de sincronização com variação da matriz  $R$ , mantendo  $Q = \text{diag}(10, 10, 10)$  fixo.



**Figura 6.11 - Influência dos pesos das matrizes no cálculo dos valores mínimos do funcional  $J$ . A legenda mostra os diferentes pesos da matriz  $R$ .**

## CONCLUSÃO

A abordagem do tema da sincronização de sistemas caóticos segundo o enfoque da teoria do controle ótimo foi o objetivo principal deste trabalho. Apesar de ser relativamente recente, a área da sincronização de sistemas caóticos tem sido um campo de intensa produção científica nas duas décadas passadas. Por esse motivo, considerou-se relevante o tratamento da questão como continuidade das pesquisas já desenvolvidas relacionadas ao controle de sistemas caóticos.

O tipo de sincronização pretendida foi aquela do tipo mestre-escravo, em que a solução de um sistema converge para a solução do outro, independente das condições iniciais. Foram escolhidos dois sistemas de Lotka-Volterra de duas presas e um predador, com parâmetros que determinam o comportamento caótico desejado para fins de sincronização (VANCE, 1978; GILPIN, 1979). Os sistemas mestre e escravo tinham coeficientes idênticos, mas condições iniciais distintas produziram trajetórias diferentes para cada um deles dentro do mesmo atrator.

Para atingir o estado síncrono dos sistemas foram utilizadas duas metodologias, ambas relacionadas à teoria do controle ótimo. A primeira, já apresentada na literatura para o modelo generalizado de Lotka-Volterra com  $n=2$ , foi estendida para o caso de três espécies e basea-se no teorema de Krasovskii (EL-GOHARY e YASSEN, 2001). A segunda, basea-se

Foi apresentada a justificativa para o uso do controle linear feedback conforme o teorema visto em Rafikov e Balthazar (2006). Simulações gráficas que mostram a positividade da função  $l(e)$  ratificaram a prova do teorema, mostrando que o controle linear feedback é ótimo para fins de sincronização de sistemas não-lineares.

Ambas metodologias de controle ótimo obtiveram sucesso em tornar síncronas as trajetórias dos dois sistemas na forma mestre-escravo. Porém, cabe ressaltar que o resultado obtido com o uso de um controle linear feedback é tão eficaz quanto o controle ótimo não-linear baseado do teorema de Krasovskii, com a vantagem de que o linear é mais eficiente na presença de perturbações, ruídos e outros fatores que não entraram no modelo.

Deste modo, apresentou-se mais uma possibilidade de uso do controle ótimo linear feedback em um campo que merece ainda ampla investigação, que é o da sincronização caótica. A partir deste trabalho, em que foi dada uma introdução ao tema nesta linha de pesquisa do curso de Mestrado em Modelagem Matemática, espera-se que surjam alternativas para a utilização da ferramenta aqui sugerida em problemas mais complexos e quem sabe para futuras aplicações de caráter prático.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AL'BREKHT, E.G. **On the Optimal Stabilization of Non-Liearn Systems.** Journal of Applied Mathematics Mechanics, v.25,n.5,p.1254-1266, 1962.
- ASAI, Tetsuya; KAMIYA, Charles; HIROSE, Tetsuya; AMEMIYA, Yoshihito. **A subthreshold analog MOS circuit for Lotka-Volterra chaotic oscillator.** International Journal of Bifurcation and Chaos, v.16,n.1, p. 207-212, 2006.
- BALMFORTH, Neil; TRESSER, Charles; WORFOLK, Patrick; WU, Chai Wah. **Master-slave synchronization and the Lorenz equations.** American Institute of Physics. Chaos, v.7, n.3, p.392-394, 1997.
- BELLMAN, Richard Ernest. **Dynamic Programming.** New Jersey: Princeton University, 1957.
- BENETTIN, G.; GALGANI, A. et al. **Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: a method for computing all of them.** Parts I and II. Meccanica 15, p.9-30, 1980.
- BERGÉ, P. **Order within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence.** Hermann, Paris, 1984
- BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 7ª ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2001.
- BREMEN, Hubertus F. Von; UDWADIA, Firdaus E.; PROSKUROWSKI, Wlodek. **An efficient QR based method for the computacion of Lyapunov exponents.** Physica D, v.101, p.1-16, 1997.
- CASTRUCCI, Plínio; BATISTA, Léo. **Controle Linear - Método Básico,** v.1, 2ª ed. São Paulo, SP: Edgard Blücher, 1991.
- COSTELLO, John S. **Synchronization of Chaos in a Generalized Lotka-Volterra Attractor.** The Nonlinear Journal, v.1, p.11-17, 1999.
- CUBILLOS, Ximena C. M. **Extensão da Teoria do Regulador Linear Quadrático para o Controle de Atitude de um Satélite Artificial.** Relatório do Projeto de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq/INPE). São José dos Campos: INPE, 2005.
- CRAMER, N.F.; MAY, R.M.J. *theor. Biol.*, v.34, n.289, 1972.
- DE SOUZA, Carlos Emanuel (coord.). **Controle de Sistemas Dinâmicos.** PRONEX Nacional – CNPq. Disponível em: <<http://www.cnpq.br/programasespeciais/pronex/nacional/exatas/015-98.htm>>. Acesso em: 2 de setembro de 2006.
- EARN, David J.D.; ROHANI, Pejman; GRENFELL, Bryan T. **Persistence, chaos and synchrony in ecology and epidemiology.** Proc. R. Soc. Lond. B, v.265, p.7-10, 1998.
- EL-GOHARY, Awad; YASSEN, M.T. **Optimal control and synchronization of Lotka-Volterra model.** Chaos, Solitons and Fractals, v.12, p.2087-2093, 2001.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa.** 3ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

- FIEDLER-FERRARA, Nelson, DO PRADO, Carmen P.C. **Caos: uma introdução**. Edgard Blücher: São Paulo, 1995.
- FUJII, Koichi. **Complexity-Stability Relationship of Two-Prey-One-Predator Species System Model: Local and Global Stability**. J. Theor. Biol. n° 69, p.613-623, 1977.
- GILPIN, Michael E. **Spiral Chaos in a Predator-Prey Model**. American Naturalist, 113, p.306-308, 1979.
- GLEIK, James. **O Caos: A Criação de uma Nova Ciência**. Traduzido por Waltensir Dutra - 4ª ed.; Rio de Janeiro: Campus, 1991.
- HUANG, Lilian; FENG, Rupeng; WANG, Mao. **Synchronization of chaotic systems via nonlinear control**. Physics Letters A, n.320, p.271-275, 2004.
- HÜBLER AW **Adaptive Control in Chaotic System**. Helv Phis Acta; 62:343-6, 1989.
- IYANAGA, S. and KAWADA, Y. **Encyclopedic Dictionary of Mathematics**. Cambridge, MA: MITPress, 1980.
- JIANG, Guo-Ping; CHEN, Guanrong; TANG, W.Kit-Sang. **A New Criterion for Chaos Synchronization Using Linear State Feedback Control**. International Journal of Bifurcation and Chaos, v.13, n.8, p.2343-2351, 2003.
- KALMANN, R.E. **Contributions to the Theory of Optimal Control**, Mexican Mathematics Society Bulletin, 2 (5):, p.102-119, 1960.
- KOCAREV, L.; PARLITZ, U. **General Approach for Chaotic Synchronization with Applications to Communication**. Physical Review Letters, v.74, n.25, p.5028-5031, 1995.
- LEWIS, Frank. SYRMOS, Vassilis. **Optimal Control**. New York: John Wiley-IEEE, 1995.
- LOTKA, A.J. **Elements of physical biology**. Baltimore: Willian and Wilkins, 1925.
- LUKES, D.L. **Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems**. SIAM JOURNAL, 7(1): 75-100,1969.
- MOLTER, Alexandre. **Controle Ótimo de Regimes Caóticos de Sistemas Populacionais**. Dissertação [Mestrado em Modelagem Matemática]. Ijuí, RS: UNIJUÍ, 2004.
- MORAIS, Jomar. **Há Ordem no Caos**. Revista Superinteressante, Ano IX, n 331, julho de 2003.
- MORENO, Ubirajara, PERES, Pedro L.D., BONATTI, Ivanil S., **Estabilidade de Sincronização de Osciladores Caóticos**. Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2000 - 11-14 set 2000. Florianópolis, SC, Brasil. p.1880-1885.
- NAIDU, Desineni Subbaram. **Optimal Control Systems**. CRC Press, 2003.
- NIJMEIJER, H. **A dynamical control view on synchronization**. Physica D, n.154, p.219-228, 2001.
- OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. 4ª ed. São Paulo: Pearson - Prentice Hall, 2005.
- OTT E, GREBOGY C, YORKE JA. **Controlling Chaos**. Phys Rev Lett.64:1196-9,1990.
- PAINE, R.T. Am. Nat. v.100, n.65, 1966.
- PARRISH, J.D.;SAILA, S.B. J. Theor Biol., v.27, n.207, 1970.
- PECORA LM, CARROL TL. **Synchronization in Chaotic System**. Phys Rev Lett.64:821-4, 1990.

PECORA L.M., CARROL, T.L.; JOHNSON, GREGG A.J.; MAR, D.J. **Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications.** Chaos, v.7, n.4, p.520-543, 1997.

PESIN Ya. B.; Russ Math Survey 32, 55, 1977.

RAFIKOV, M., BALTHAZAR, J.M. **On Control and Synchronization in Chaotic and Hyperchaotic Systems via Active Control.** Ijuí, RS:[submetido], 2006.

RAFIKOV, Marat; BALTHAZAR, José Manoel. **Optimal Linear and Nonlinear Control Design for Chaotic Systems.** Proceedings of ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Long Beach, California, USA, September 24-28, 2005.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J.M. **On a Optimal Control Design for Rössler System.** Phys. Lett. A 333, p.241-245, 2004.

RUELLE D.; ECKMANN J.P.; Rev. Mod. Phys. 57, 617, 1985.

SILVA, A.S.; SOUZA, F.M.C.de. Introdução à Economia da Extração dos Recursos Naturais. Disponível em: < [http://www.stamford.pro.br/ARQUIVOS/2000\\_TeoriaExtratRec.doc](http://www.stamford.pro.br/ARQUIVOS/2000_TeoriaExtratRec.doc) > Acesso em: 18 de outubro de 2006.

TAKENS, F. **Detecting Strange Attractors in Turbulence,** Warwick, Lecture notes in Mathematics, v.898, Ed. D. Rand & L.-S Young, Springer, pp.366-381, 1981.

UDWADIA, Firdaus E.; BREMEN, Hubertus F.von. An Efficient and Stable Approach for Computation of Lyapunov Characteristic Exponents of Continuous Dynamical Systems. Applied Mathematics and Computation, n.121, p.219-259, 2001.

UDWADIA, F. E.; BREMEN, H. F.von; PROSKUROWSKI, W. **A note on the computation of the largest  $p$  LCEs of discrete dynamical systems.** Applied Mathematics and Computation n°114, p.205-214, 2000.

WEBER, Angela B. **Controle Ótimo do Sistema de Lotka-Volterra: Linear ou não-linear?** Dissertação [Mestrado em Modelagem Matemática]. Ijuí, RS: UNIJUÍ, 2006.

WILLEMSTEIN, A.P. **Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems on a Finite Interval.** SIAM JOURNAL, 15 (6): 1050-1069, 1977.

WINFREE, A.T. **Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators,** J. Theor. Biol., 16, p.15-42, 1967.

VOLTERRA, V. **Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically.** Nature, v. 118, p. 558-560, 1926.

ZHANG, Yujuan, LIU, Bing, CHEN, Lansun. **Extinction and permanence of a two-prey one-predator system with impulsive effect.** Mathematical Medicine and Biology. 20, p.309-325. 2003.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)