



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

**ANÁLISE NUMÉRICA NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE  
CONCRETO ARMADO CONSIDERANDO O FENÔMENO DA  
ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO**

Eng<sup>o</sup> Joaquim Marins Neto

**Campinas, Maio de 2007**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS**

# **ANÁLISE NUMÉRICA NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO CONSIDERANDO O FENÔMENO DA ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO**

Eng<sup>o</sup> Joaquim Marins Neto

Orientador: Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan

Tese de Doutorado apresentada à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

**Campinas, Maio de 2007**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M339a Marins Neto, Joaquim  
Análise numérica não-linear de estruturas de concreto armado considerando o fenômeno da aderência entre o aço e o concreto / Joaquim Marins Neto.--Campinas, SP: [s.n.], 2007.

Orientador: Aloisio Ernesto Assan.  
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Método dos elementos finitos. 2. Concreto armado. 3. Análise numérica. 4. Deformações e tensões. 5. Materiais - Propriedades. I. Assan, Aloisio Ernesto. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Título em Inglês: Non-linear numerical analysis of reinforced concrete structures considering the bond phenomena between the steel and the concrete

Palavras-chave em Inglês: Finite element, Material non-linearity, Computational model, Reinforced concrete, Bond stress

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Doutor em Engenharia Civil

Banca examinadora: Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho, Sergio Persival Baroncini Proença, Maria Cecília Amorin Teixeira da Silva e José Luiz Antunes de Oliveira e Sousa

Data da defesa: 18/05/2007

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

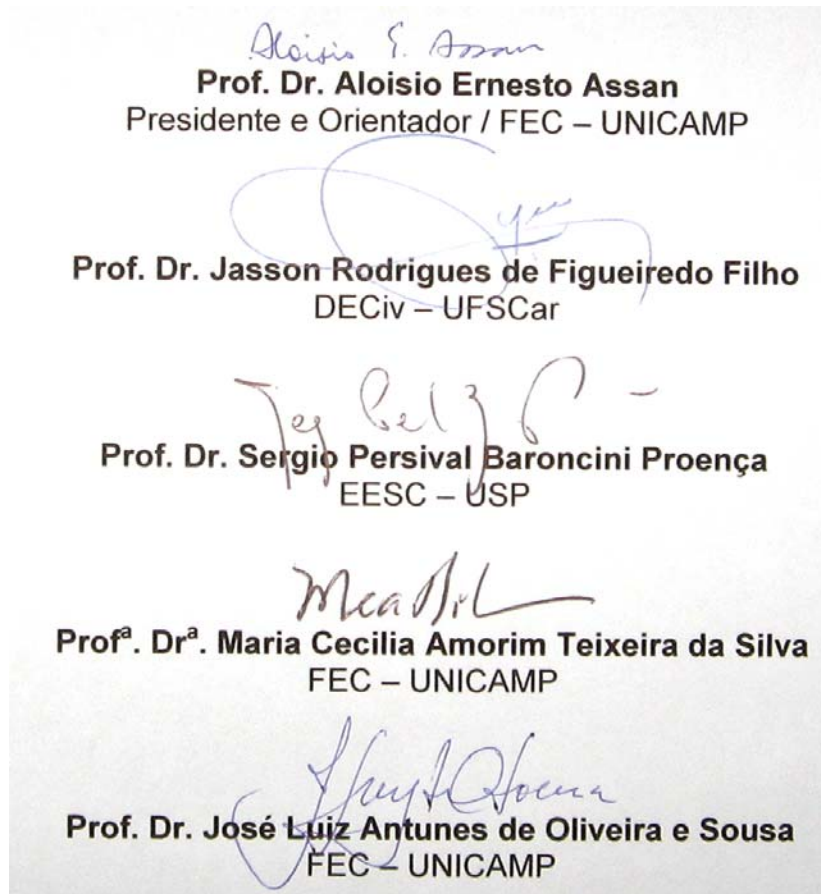
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO  
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

**ANÁLISE NUMÉRICA NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE  
CONCRETO ARMADO CONSIDERANDO O FENÔMENO DA  
ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO**

Joaquim Marins Neto

Tese de Doutorado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:



**Campinas, 18 de Maio de 2007**

À minha amada esposa Vivian e  
à minha filha Bianca, jóias preciosas,  
dedico este trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Aloisio Ernesto Assan pela atenção e orientação fornecidas durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores e funcionários da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo pelo apoio, atenção e colaboração.

À minha esposa Vivian e à minha princesinha Bianca, eterna gratidão pela paciência, compreensão, amor e carinho.

Aos meus pais e irmãos, pelo zelo, suporte e incentivo.

Aos colegas da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo pela amizade e convívio.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	<b>ix</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>xv</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS</b>	<b>xvi</b>
<b>RESUMO</b>	<b>xx</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xxi</b>
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>001</b>
1.1 GENERALIDADES	001
1.2 COMPOSIÇÃO E PROPRIEDADES DO CONCRETO	004
1.3 ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO	007
1.4 O COMPORTAMENTO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	011
1.5 OBJETIVO DO TRABALHO	012
<b>2. HISTÓRICO DO FENÔMENO DE ADERÊNCIA</b>	<b>013</b>
2.1 GENERALIDADES	013
2.2 ESTUDO DO FENÔMENO DE ADERÊNCIA	014
<b>3. MODELAGEM NUMÉRICA</b>	<b>033</b>
3.1 INTRODUÇÃO	033
3.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	034
3.2.1 A MATRIZ DE RIGIDEZ	034
3.2.2 ELEMENTO FINITO BIDIMENSIONAL	037



<b>3.3</b>	<b>PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR</b>	<b>044</b>
<b>3.4</b>	<b>MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO COMUM</b>	<b>048</b>
3.4.1	GENERALIDADES	048
3.4.2	DEFORMAÇÃO UNIAXIAL EQUIVALENTE	050
3.4.3	CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO	054
3.4.3.1	CONCRETO SUBMETIDO À COMPRESSÃO – TENSÃO ABAIXO DA MÁXIMA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO	054
3.4.3.2	CONCRETO SUBMETIDO À COMPRESSÃO – TENSÃO ACIMA DA MÁXIMA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO	056
3.4.3.3	CONCRETO SUBMETIDO À TRAÇÃO – TENSÃO ABAIXO DA MÁXIMA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO	059
3.4.3.4	CONCRETO SUBMETIDO À TRAÇÃO – TENSÃO ACIMA DA MÁXIMA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO	061
3.4.4	CONDIÇÕES DE DESCARREGAMENTO E RECARREGAMENTO	064
3.4.5	MODELAGEM DA FISSURAÇÃO DO CONCRETO	067
3.4.5.1	MODELO DE FISSURAÇÃO DISCRETA	068
3.4.5.2	MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA	069
3.4.5.3	CRITÉRIOS DE FORMAÇÃO DAS FISSURAS	069
3.4.6	CURVAS PARA CARREGAMENTO MONOTÔNICO	074
<b>3.5</b>	<b>MODELO CONSTITUTIVO PARA A ARMADURA DE AÇO</b>	<b>078</b>
3.5.1	A MODELAGEM DA ARMADURA	078
3.5.2	O COMPORTAMENTO DO AÇO	080
<b>3.6</b>	<b>RELAÇÕES ENTRE A TENSÃO DE ADERÊNCIA E O DESLIZAMENTO</b>	<b>082</b>
<b>3.7</b>	<b>MODELAGEM DA ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO</b>	<b>088</b>
3.7.1	MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO ELEMENTO DE LIGAÇÃO PROPOSTO POR NGO (1967)	088
3.7.2	MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO ELEMENTO DE INTERFACE	095
<b>4.</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL</b>	<b>103</b>
4.1	INTRODUÇÃO	103
4.2	VIGA SIMÉTRICA BI-APOIADA	104
4.3	ALGORITMO GERAL PARA A SOLUÇÃO	106
4.4	PROGRAMA COMPUTACIONAL	110

<b>5. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA</b>	<b>113</b>
5.1 INTRODUÇÃO	113
5.2 ANLEC 2007: ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	114
<b>6. EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>129</b>
6.1 INTRODUÇÃO	129
6.2 APRESENTAÇÃO DOS EXEMPLOS PARA O ENSAIO DE VIGA SIMÉTRICA	130
6.2.1 EXEMPLO NUMÉRICO 1	130
6.2.2 EXEMPLO NUMÉRICO 2	135
6.2.3 EXEMPLO NUMÉRICO 3	141
6.2.4 EXEMPLO NUMÉRICO 4	146
6.2.5 EXEMPLO NUMÉRICO 5	152
6.2.6 EXEMPLO NUMÉRICO 6	157
6.2.7 EXEMPLO NUMÉRICO 7	162
6.2.8 EXEMPLO NUMÉRICO 8	168
<b>7. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>173</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>175</b>
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	175
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	188

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 1

**Figura 1.3.1** -Interação mecânica entre as nervuras da barra de aço e o concreto ao redor. 008

**Figura 1.3.2** -Obtenção da tensão de aderência pelo equilíbrio de forças. 009

### CAPÍTULO 2

**Figura 2.2.1** -Representação dos ensaios analisados por **PERRY (1966)**. 015

**Figura 2.2.2** -Elemento de ligação (fonte: **NGO, 1967**). 016

**Figura 2.2.3** -Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: **MIRZA, 1979**). 018

**Figura 2.2.4** -Relação local da tensão de aderência x deslizamento (fonte: **YANKELEVSKY, 1985**). 020

**Figura 2.2.5** -Propagação do cone formado por fissuras ao redor da barra de aço. 022

**Figura 2.2.6** -Estágios decorrentes da propagação das fissuras. 023

### CAPÍTULO 3

**Figura 3.2.1.1** -Meio contínuo. 034

**Figura 3.2.1.2** -Meio discreto, divisão em elementos finitos (malha). 035

**Figura 3.2.2.1** -Elemento finito retangular (*LSR*). 038

**Figura 3.2.2.2** -Dimensões dos elementos finitos. 040

**Figura 3.3.1** -a) Curva carregamento-deslocamento ( $f \times r$ ); b) Curva tensão-deformação ( $\sigma \times \epsilon$ ). 044

<b>Figura 3.3.2</b>	-Método da rigidez inicial para análise não-linear.	045
<b>Figura 3.3.3</b>	-Método da rigidez secante para análise não-linear.	045
<b>Figura 3.3.4</b>	-Método da rigidez tangente para análise não-linear.	046
<b>Figura 3.4.2.1</b>	-Curva tensão-deformação uniaxial equivalente.	053
<b>Figura 3.4.3.1</b>	-Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto comprimido abaixo da máxima resistência à compressão (fonte: <b>DARWIN, 1974</b> ).	055
<b>Figura 3.4.3.2</b>	-Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto comprimido acima da máxima resistência à compressão (fonte: <b>DARWIN, 1974</b> ).	058
<b>Figura 3.4.3.3</b>	-Ângulo entre o sistema de coordenada local e o sistema de coordenada global para o concreto comprimido.	059
<b>Figura 3.4.3.4</b>	-Curva tensão x deformação uniaxial equivalente para o concreto tracionado abaixo da máxima resistência à tração.	060
<b>Figura 3.4.3.5</b>	-Curva tensão x deformação uniaxial equivalente para o concreto tracionado acima da máxima resistência à tração.	062
<b>Figura 3.4.3.6</b>	-Ângulo entre o sistema de coordenada local e o sistema de coordenada global para o concreto tracionado.	064
<b>Figura 3.4.4.1</b>	-Condições de descarregamento e recarregamento para diferentes estados do concreto comprimido (fonte: <b>GREUNEN, 1979</b> ).	065
<b>Figura 3.4.4.2</b>	-Condições de descarregamento e recarregamento para diferentes estados do concreto tracionado.	066
<b>Figura 3.4.5.1</b>	-Esquema do modelo de fissuração discreta.	068
<b>Figura 3.4.5.2</b>	-Esquema do modelo de fissuração distribuída.	069
<b>Figura 3.4.5.3</b>	-Curva tensão-deformação para o elemento com fissuras distribuídas.	070
<b>Figura 3.4.5.4</b>	-Curva tensão-abertura da fissura.	071
<b>Figura 3.4.5.5</b>	-Curva tensão-deformação em função da energia de fratura.	072
<b>Figura 3.4.5.6</b>	-Comprimento equivalente de cada ponto de integração do elemento finito.	073

<b>Figura 3.4.5.7</b>	-Definição de Comprimento equivalente em função do ângulo de propagação da fissura.	073
<b>Figura 3.4.6.1</b>	-Curva envoltória da resistência biaxial do concreto ( <b>KUPFER, 1969</b> ).	074
<b>Figura 3.5.1.1</b>	-Representação distribuída da armadura.	078
<b>Figura 3.5.1.2</b>	-Representação embutida da armadura.	079
<b>Figura 3.5.1.3</b>	-Representação discreta da armadura.	079
<b>Figura 3.5.1.4</b>	-Elementos de representação da armadura.	080
<b>Figura 3.5.2.1</b>	-Comportamento do elemento de aço na compressão e na tração.	081
<b>Figura 3.6.1</b>	-Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: <b>NILSON, 1968</b> ).	083
<b>Figura 3.6.2</b>	-Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: <b>MIRZA, 1979</b> ).	084
<b>Figura 3.6.3</b>	-Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: <b>YANKELEVSKY, 1985</b> ).	085
<b>Figura 3.6.4</b>	-Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: <b>CEB, 1990</b> ).	085
<b>Figura 3.7.1.1</b>	-Elemento de ligação (fonte: <b>NGO, 1967</b> ).	088
<b>Figura 3.7.1.2</b>	-Elemento de ligação, deslocamentos nodais.	089
<b>Figura 3.7.1.3</b>	-Elemento de ligação, forças nodais.	090
<b>Figura 3.7.1.4</b>	-Inclinação da curva tensão de aderência x deslizamento.	092
<b>Figura 3.7.1.5</b>	-Seção transversal de um elemento de concreto armado.	093
<b>Figura 3.7.1.6</b>	-Área de influência dos elementos de ligação.	094
<b>Figura 3.7.1.7</b>	-Elemento de ligação: topo e base das barras de aço.	094
<b>Figura 3.7.1.8</b>	-Seção modificada (unitária) de um elemento de concreto armado.	095
<b>Figura 3.7.2.1</b>	-Elemento de Interface.	096
<b>Figura 3.7.2.2</b>	-Elemento de Interface linear.	096
<b>Figura 3.7.2.3</b>	-Elemento de Interface linear no sistema de coordenada global.	100

## **CAPÍTULO 4**

<b>Figura 4.2.1</b>	-Viga simétrica bi-apoiada.	104
<b>Figura 4.2.2</b>	-Consideração da simetria da viga.	105
<b>Figura 4.2.3</b>	-Transformação da viga tridimensional para o modelo numérico plano.	105
<b>Figura 4.4.1</b>	-Fluxograma do programa.	110

## **CAPÍTULO 5**

<b>Figura 5.2.1</b>	-Tela inicial (Anlec2007).	114
<b>Figura 5.2.2</b>	-Tela inicial de entrada de dados (Anlec2007).	115
<b>Figura 5.2.3</b>	-Tela: elementos finitos (Anlec2007).	116
<b>Figura 5.2.4</b>	-Tela: Geometria (Anlec2007).	117
<b>Figura 5.2.5</b>	-Tela: Apoio (Anlec2007).	118
<b>Figura 5.2.6</b>	-Tela: Carregamento (Anlec2007).	119
<b>Figura 5.2.7</b>	-Tela: Ancoragem (Anlec2007).	120
<b>Figura 5.2.8</b>	-Tela: Elementos da Viga (Anlec2007).	121
<b>Figura 5.2.9</b>	-Tela: Concreto (Anlec2007).	122
<b>Figura 5.2.10</b>	-Tela: Aço (Anlec2007).	123
<b>Figura 5.2.11</b>	-Tela: Interface (Anlec2007).	124
<b>Figura 5.2.12</b>	-Tela: Resultados (Anlec2007).	126
<b>Figura 5.2.13</b>	-Tela: Gráficos (Anlec2007).	128

## **CAPÍTULO 6**

<b>Figura 6.2.1</b>	-Conformação geométrica da viga simétrica.	130
<b>Figura 6.2.2</b>	-Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.	132
<b>Figura 6.2.3</b>	-Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).	133

<b>Figura 6.2.4</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – ANLEC 2007 (a).	134
<b>Figura 6.2.5</b>	-Conformação geométrica da viga simétrica.	135
<b>Figura 6.2.6</b>	-Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.	137
<b>Figura 6.2.7</b>	-Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).	138
<b>Figura 6.2.8</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – ANLEC 2007 (a).	139
<b>Figura 6.2.9</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço (aderência perfeita).	140
<b>Figura 6.2.10</b>	-Conformação geométrica da viga simétrica.	141
<b>Figura 6.2.11</b>	-Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.	143
<b>Figura 6.2.12</b>	-Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).	144
<b>Figura 6.2.13</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – ANLEC 2007 (a).	145
<b>Figura 6.2.14</b>	-Conformação geométrica da viga simétrica.	146
<b>Figura 6.2.15</b>	-Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.	148
<b>Figura 6.2.16</b>	-Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).	149
<b>Figura 6.2.17</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – ANLEC 2007 (a).	150
<b>Figura 6.2.18</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço (aderência perfeita).	151
<b>Figura 6.2.19</b>	-Conformação geométrica da viga simétrica.	152
<b>Figura 6.2.20</b>	-Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.	154
<b>Figura 6.2.21</b>	-Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).	155
<b>Figura 6.2.22</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – ANLEC 2007 (a).	156

<b>Figura 6.2.23</b>	-Conformação geométrica da viga simétrica.	157
<b>Figura 6.2.24</b>	-Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.	159
<b>Figura 6.2.25</b>	-Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – <i>ANLEC 2007 (a)</i> .	160
<b>Figura 6.2.26</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – <i>ANLEC 2007 (a)</i> .	161
<b>Figura 6.2.27</b>	-Conformação geométrica da viga simétrica.	162
<b>Figura 6.2.28</b>	-Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.	164
<b>Figura 6.2.29</b>	-Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – <i>ANLEC 2007 (a)</i> .	165
<b>Figura 6.2.30</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – <i>ANLEC 2007 (a)</i> .	166
<b>Figura 6.2.31</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço (aderência perfeita).	167
<b>Figura 6.2.32</b>	-Conformação geométrica da viga simétrica.	168
<b>Figura 6.2.33</b>	-Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.	170
<b>Figura 6.2.34</b>	-Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – <i>ANLEC 2007 (a)</i> .	171
<b>Figura 6.2.35</b>	-Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – <i>ANLEC 2007 (a)</i> .	172



## LISTA DE TABELAS

### CAPÍTULO 3

<b>Tabela 3.6.1</b>	-Parâmetros para a curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: <b>CEB, 1990</b> ).	086
---------------------	---	-----

### CAPÍTULO 6

<b>Tabela 6.2.1</b>	-Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.	131
<b>Tabela 6.2.2</b>	-Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.	136
<b>Tabela 6.2.3</b>	-Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.	142
<b>Tabela 6.2.4</b>	-Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.	147
<b>Tabela 6.2.5</b>	-Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.	153
<b>Tabela 6.2.6</b>	-Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.	158
<b>Tabela 6.2.7</b>	-Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.	163
<b>Tabela 6.2.8</b>	-Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.	169

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

- $A_c$**  - Área da seção transversal do concreto
- $A_s$**  - Área da seção transversal do aço
- [A]** - Matriz das funções aproximadoras
- b** - Largura
- [C]** - Matriz da rigidez ao deslizamento
- $d_b$**  - Diâmetro da barra de aço
- $dx$**  - Comprimento de um elemento infinitesimal
- {d}** - Incógnitas nodais
- E** - Módulo de elasticidade
- $E_o$**  - Módulo de elasticidade inicial
- $E_s$**  - Módulo de elasticidade secante
- $E_t$**  - Módulo de elasticidade tangente
- $E_1$**  - Módulo de elasticidade, eixo 1
- $E_2$**  - Módulo de elasticidade, eixo 2
- $f_c$**  - Máxima resistência à compressão do concreto
- $f_t$**  - Máxima resistência à tração do concreto
- $f_{ext}$**  - Carregamento externo
- $\Delta f$**  - Carregamento desequilibrado
- F, f, P** - Força aplicada, carregamento
- $F_1, R_1$**  - Reação da força

- g** - Deslocamentos nodais global
- G<sub>t</sub>** - Energia de fratura
- h** - Altura
- k** - Matriz de rigidez local
- K** - Matriz de rigidez global
- K<sub>h</sub>** - Rigidez ao deslizamento horizontal
- K<sub>v</sub>** - Rigidez ao deslizamento vertical
- L** - Comprimento, largura
- [M]** - Matriz de transformação dos deslocamentos
- n** - Relação entre os módulos de elasticidades principais
- r** - Deslocamento
- $\tilde{r}$**  - Deslocamento nodal virtual
- R** - Esforços nodais externos
- S, S<sub>(x)</sub>** - Deslizamento entre o aço e o concreto
- S<sub>y</sub>** - Deslizamento correspondente à tensão limite de aderência
- S<sub>1...3</sub>** - Deslizamento limite
- u** - Deslocamento interno
- u(x,y)** - Função aproximadora dos deslocamentos horizontais
- {u}** - Vetor dos deslocamentos nodais
- v** - Deslocamento interno
- v(x,y)** - Função aproximadora dos deslocamentos verticais
- w** - Abertura da fissura
- W<sub>e</sub>** - Trabalho virtual externo
- W<sub>i</sub>** - Trabalho virtual interno

- $\alpha$  - Relação entre as tensões principais
- $\Delta$  - Diferença relativa
- $\varepsilon$  - Deformação específica
- $\varepsilon_c$  - Deformação no concreto
- $\varepsilon_x$  - Deformação no eixo x
- $\varepsilon_y$  - Deformação no eixo y
- $\varepsilon_{iu}$  - Deformação uniaxial equivalente total na direção principal i
- $\varepsilon_{ic}$  - Deformação correspondente a  $\sigma_{ic}$
- $\varepsilon_u$  - Deformação limite última do concreto
- $\varepsilon_{su}$  - Deformação limite última do aço
- $\varepsilon_h$  - Deformação horizontal entre dois nós
- $\varepsilon_v$  - Deformação vertical entre dois nós
- $\varepsilon_1$  - Deformação principal, eixo 1
- $\varepsilon_2$  - Deformação principal, eixo 2
- $\varepsilon_{1c}$  - Deformação principal de compressão, eixo 1
- $\varepsilon_{2c}$  - Deformação principal de compressão, eixo 2
- $\varepsilon_{1t}$  - Deformação principal de tração, eixo 1
- $\varepsilon_{2t}$  - Deformação principal de tração, eixo 2
- $\gamma$  - Deformação angular
- $\phi$  - Diâmetro da barra de aço
- $\varphi$  - Função dos deslocamentos
- $\theta$  - Ângulo
- $\sigma$  - Tensão
- $\sigma_i$  - Tensão principal na direção i

- $\sigma_{ic}$  - Tensão de compressão na direção principal i
- $\sigma_c$  - Tensão no concreto
- $\sigma_s$  - Tensão no aço
- $\sigma_{sy}$  - Tensão de escoamento do aço
- $\sigma_1$  - Tensão principal, eixo 1
- $\sigma_2$  - Tensão principal, eixo 2
- $\sigma_{1c}$  - Tensão principal de compressão, eixo 1
- $\sigma_{2c}$  - Tensão principal de compressão, eixo 2
- $\sigma_{1t}$  - Tensão principal de tração, eixo 1
- $\sigma_{2t}$  - Tensão principal de tração, eixo 2
- d** $\sigma_c$  - Tensão no concreto para um elemento infinitesimal
- d** $\sigma_s$  - Tensão no aço para um elemento infinitesimal
- $\tau_b$  - Tensão de aderência local
- $\tau_u$  - Tensão última de aderência
- $\tau_y$  - Tensão limite de aderência
- $\tau_{m\acute{a}x}$  - Tensão máxima de aderência
- $\tau_{(x)}$  - Tensão de aderência em um ponto
- $\nu$  - Coeficiente de Poisson
- [ $\xi$ ]** - Matriz das incógnitas das funções aproximadoras
- [ $\psi$ ]** - Matriz função de operadores diferenciais
- MEF** - Método dos elementos finitos

## RESUMO

Marins Neto, J. – *Análise numérica não-linear de estruturas de concreto armado considerando o fenômeno da aderência entre o aço e o concreto*. Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, 2007. 192 pág. Tese (Doutorado).

Neste trabalho são estudados os aspectos das propriedades do concreto, das propriedades do aço e das interações entre eles, com particular interesse na deterioração da aderência que ocorre na interface aço-concreto, para a análise numérica de estruturas de concreto armado. O objetivo principal é o desenvolvimento de uma modelagem numérica capaz de investigar, de forma mais realista, o comportamento de vigas de concreto armado, considerando a não-linearidade física dos materiais e os efeitos do deslizamento entre a armadura de aço e o concreto. Com o Método dos Elementos Finitos e com um procedimento incremental-iterativo de carregamento, os comportamentos dos materiais puderam ser facilmente representados na modelagem numérica computacional, possibilitando o uso de diferentes curvas representativas das tensões de aderência que se opõem ao deslizamento da armadura. A análise crítica foi feita comparando, através de exemplos numéricos, a modelagem numérica desenvolvida neste trabalho com outras encontradas na literatura e com ensaios experimentais, mostrando os excelentes resultados e a eficiência da proposta aqui apresentada.

**Palavras-chave:** elemento finito, não-linearidade física, modelagem computacional, concreto armado, tensão de aderência.

## ABSTRACT

Marins Neto, J. – *Non-linear numerical analysis of reinforced concrete structures considering the bond phenomena between the steel and the concrete*. Campinas, Faculty of Civil Engineering, Architecture and Urbanism, State University of Campinas, 2007. 192 pages. Ph.D. Thesis.

In this work aspects of the properties of the concrete, steel and the interaction between them, with particular interest in the deterioration of the bond that occurs in the steel-concrete interface that are necessary to the numerical analysis of reinforced concrete structures are studied. The main aim of this research is the development of a numerical model to simulate the reinforced concrete beams behavior, considering the nonlinear material and the effects of the slip between the reinforcement steel and the concrete. With the Finite Element Method and increment-iterative techniques, the behavior of the materials could be easily represented in the computational numerical model proposed, allowing the use of curves based on the stages of relationship between the local bond stress and the relative slip of the bar. The critical analysis have been done comparing the numerical model developed in this work with other numerical models and with experimental works, showing excellent results and very good efficiency of the present proposal.

**Keywords:** finite element, material non-linearity, computational model, reinforced concrete, bond stress.

# **CAPÍTULO 1**

## ***INTRODUÇÃO***

### **1.1 GENERALIDADES**

Os sistemas estruturais em concreto armado e os elementos que os constituem, submetidos a carregamentos, podem apresentar diversos modos de comportamento a partir da resposta dada pelo trabalho conjunto entre o aço e o concreto, por meio da distribuição dos esforços e das deformações entre eles.

A importância da utilização conjunta do aço e do concreto, com finalidade estrutural, deve-se ao fato que o concreto endurecido, embora apresente boa resistência à compressão, é pouco resistente à tração. Assim, a disposição conveniente de barras de aço nos elementos de concreto aumenta a capacidade de resistência à tração e, conseqüentemente, a capacidade de carga da estrutura. O trabalho solidário entre esses dois materiais é possível graças à coincidência de duas propriedades: aderência e dilatação térmica.

Dessas propriedades apenas a aderência será abordada no decorrer do presente trabalho.



Conforme a associação entre o cimento, o agregado miúdo, o agregado graúdo e a armadura de aço, podemos ter:

**Argamassa armada:** associação do cimento e agregado miúdo com armadura de pequeno diâmetro convenientemente posicionada;

**Concreto armado:** associação do cimento, agregado miúdo e agregado graúdo com armadura passiva convenientemente posicionada;

**Concreto protendido:** associação do cimento, agregado miúdo e agregado graúdo com armadura ativa convenientemente posicionada;

**Concreto com fibras:** associação do cimento, agregado miúdo e agregado graúdo com fibras metálicas ou poliméricas empregado em peças solicitadas por pequenos esforços de tração. As fibras também podem ser utilizadas nas associações apresentadas acima.

A aplicação do concreto armado é predominante em relação a outros materiais utilizados na execução de estruturas na construção civil brasileira. Entre as suas principais vantagens, desde que executado seguindo critérios técnicos, temos:

- boa resistência aos esforços provenientes de carregamento, choque, vibração;
- boa durabilidade e resistência a altas temperaturas, quando comparado ao aço e à madeira;
- boa trabalhabilidade e versatilidade na obtenção de novas formas para os elementos estruturais;
- possibilidade de pré-moldagem dos elementos e peças estruturais.

As desvantagens se dão principalmente pelo elevado peso próprio dos elementos, tendo seu uso restrito em determinadas situações.

A seguir, temos um resumo cronológico dos fatos mais importantes do início da evolução do concreto armado (**KAEFER, 1998**):

**1770:** Igreja de Santa Genoveva, Pantheon de Paris (França) – utilização de vigas feitas de pedra natural com barras longitudinais retas colocadas em furos feitos artesanalmente nas zonas de tração;

**1796:** James Parker (Inglaterra) – patenteia um cimento hidráulico natural obtido da calcinação de calcário impuro contendo argila;

**1818:** Louis Joseph Vicat (França) – publica seus estudos sobre ensaios realizados com cimento, concluindo que a qualidade do cimento estava relacionada com o tipo de mistura utilizada na sua produção;

**1824:** Joseph Aspdin (Inglaterra) – desenvolve o cimento Portland a partir da queima da mistura do calcário e da argila finamente moídos. Esse cimento difere-se do cimento Portland atual pelo fato da temperatura de queima não ter sido tão elevada a fim de produzir o clínquer;

**1836:** Inicia-se na Alemanha os primeiros ensaios sistemáticos para determinação da resistência do cimento;

**1854:** William Boutland Wilkinson (Inglaterra) – desenvolve um sistema de lajes nervuradas a partir da associação do concreto e cabos de aço;

**1855:** Joseph Louis Lambot (França) – solicita a patente de um barco feito de argamassa de cimento reforçada com ferro;

**1867:** Joseph Monier (França) – exhibe, na exposição de Paris, vasos de flores feitos de concreto com armadura de arame;

**1873:** William E. Ward (EUA) – constrói uma casa de concreto armado, o Ward's Castle;

**1904:** é iniciado, na Alemanha, o projeto preliminar de normalização para dimensionamento, execução e ensaios de estruturas de concreto armado;

**1917:** são publicadas, nos Estados Unidos, as primeiras normas para a utilização do concreto armado.

## 1.2 COMPOSIÇÃO E PROPRIEDADES DO CONCRETO

Desde o desenvolvimento e o patenteamento do cimento Portland, por Joseph Aspdin (Inglaterra) em 1824, o concreto tem sido o material mais aplicado na construção civil, sendo utilizado sozinho ou em conjunto com armadura de aço ou com fibras, em obras de infra-estruturas, edificações residenciais, comerciais e industriais.

O concreto é constituído basicamente por uma mistura de aglomerante (cimento), materiais inertes (agregados miúdo e graúdo), água e, freqüentemente, algum outro material que tende a melhorar ou conferir certas propriedades ao material em estado fresco ou endurecido. Conforme a quantidade e tipo de material que constitui a mistura, podemos classificar os concretos quanto à sua resistência em: concreto de baixíssima resistência, concreto de baixa resistência, concreto de média resistência e concreto de alta resistência.

**Concreto de baixíssima resistência:** concreto leve, de baixa massa específica, composto de alta porosidade, onde os espaços podem ser ocupados somente por ar ou por agregados leves, como argila expandida, vermiculita e escória de alto forno. A resistência à compressão é geralmente inferior a 7 MPa, sendo utilizado como material de enchimento, decoração ou em local onde a resistência estrutural não é importante (**MINDESS, 1981**);

**Concreto de baixa resistência:** concreto comumente utilizado na construção civil constituído de materiais convencionais como cimento Portland, areia, pedrisco e brita, sendo produzido em canteiro comum. A resistência à compressão fica abaixo de 25 MPa, tendo, na ruptura, fratura áspera com agregados intactos, sendo utilizado sozinho para fins não estruturais ou em conjunto com o aço (concreto armado estrutural) **(AMARAL FILHO, 1997)**;

**Concreto de média resistência:** concreto utilizado na construção civil constituído de materiais convencionais como cimento Portland, areia, pedrisco e brita, podendo ter um superplastificante que tem a função de reduzir a água da mistura, sendo produzido em centrais com bom controle tecnológico. A resistência à compressão fica entre 25 MPa e 50 MPa, podendo ter fratura áspera com rompimento de agregados, sendo utilizado principalmente em elementos de concreto armado **(AMARAL FILHO, 1997)**;

**Concreto de alta resistência:** concreto que apresenta resistência à compressão maior que 50 MPa, também chamado de concreto de alto desempenho (CAD), por apresentar características especiais e altamente atrativas para o seu emprego, como: altas resistências precoces; retração menor que a do concreto normal; baixa deformação lenta; baixíssima permeabilidade; excelente aderência a outra superfície de concreto e resistência à corrosão química. Essas características são obtidas pelo aumento da compacidade do concreto decorrente da diminuição dos vazios, através da diminuição da água da mistura com o uso de superfluidificantes, ou pela adição de materiais formados por grãos finíssimos, menores que os grãos do cimento, como a sílica ativa. Esse tipo de concreto é produzido em centrais com rigoroso controle tecnológico. A ruptura do material é frágil, com fratura lisa e agregados cisalhados **(AMARAL FILHO, 1997)**.

O concreto endurecido tem suas propriedades em constante evolução devido às reações lentas, as quais qualificam o concreto, permitindo a escolha do material adequado para cada uso na construção civil.

Entre as principais propriedades do concreto endurecido, temos:

**Resistência à compressão:** capacidade do concreto em resistir a esforços de compressão;

**Resistência à tração:** capacidade do concreto em resistir a esforços de tração. Em geral, para o concreto, a máxima resistência à tração corresponde a aproximadamente 10% da máxima resistência à compressão;

**Deformação específica:** deformação causada pela aplicação de uma carga, sendo expressa pela variação de comprimento por unidade de comprimento;

**Deformação elástica:** deformação causada pela aplicação de uma carga, porém desaparece quando essa carga é retirada;

**Deformação permanente:** deformação causada pela aplicação de uma carga que ultrapassa o limite elástico de resistência do material. Essa deformação não desaparece quando essa carga é retirada;

**Retração devida à contração química:** variação espontânea do volume, na ausência de variações de temperatura e de tensões de origem externa, causada pelas reações de hidratação do cimento.

A fissuração nos elementos de concreto endurecido é praticamente inevitável pois, antes da aplicação de qualquer tipo de carregamento, o concreto pode apresentar microfissuras resultantes da variação de volume (retração) decorrente dos processos de hidratação do cimento.

Com a submissão dos elementos de concreto a carregamentos, essas microfissuras, ou novas microfissuras, se propagam, formando microfissuras, até a ruptura total do material.

O processo de fissuração confere ao concreto e ao elemento de concreto armado um comportamento não-linear, sendo considerado no decorrer do presente trabalho.

### 1.3 ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO

A aderência entre a armadura de aço e o concreto é um dos mecanismos mais importantes para a existência das estruturas de concreto armado, sendo responsável pela ancoragem dessa armadura na massa de concreto e, ainda, serve para impedir o escorregamento dessa armadura nos segmentos entre fissuras, limitando a abertura dessas fissuras.

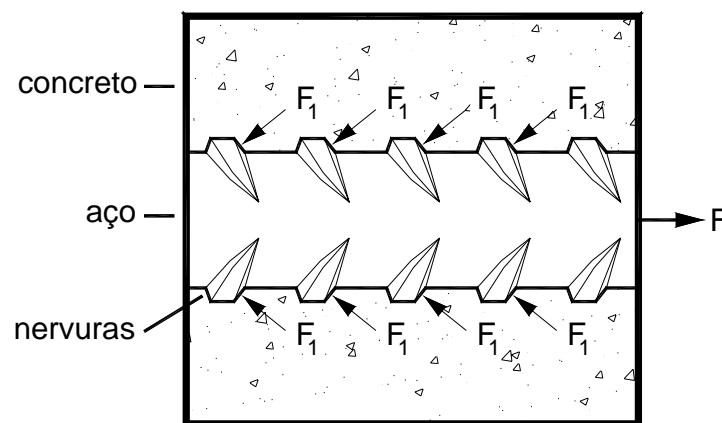
A transmissão de esforços entre a barra de aço e o concreto faz-se através de tensões cisalhantes (tensões de aderência) paralelas à barra de aço na interface com o concreto. Essas tensões modificam o comportamento e a distribuição dos esforços e das deformações ao longo dos elementos. Considerando uma estrutura submetida a um carregamento progressivo, a tensão de aderência entre o aço e o concreto aumenta até um nível de carregamento, a partir do qual a aderência começa a se deteriorar gradualmente vindo a comprometer a segurança da estrutura.

Os modos de transferência de tensões entre o aço e o concreto envolvem a combinação de parcelas relativas a três componentes: aderência por adesão, aderência por atrito e aderência por interação mecânica.

***Aderência por adesão:*** forças na interface entre os dois materiais provocadas pelo efeito de colagem que a nata de cimento provoca na superfície do aço, sendo de natureza físico-química;

**Aderência por atrito:** força de contato entre os dois materiais que se manifesta após a ruptura da adesão, quando há tendência ao deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto.

**Aderência por interação mecânica:** principalmente para as barras com nervuras (Figura 1.3.1), após a ruptura da adesão, as saliências se intertravam no concreto, constituindo um terceiro elemento resistente ao escorregamento da barra.



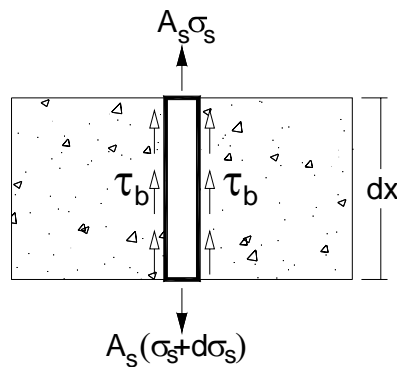
**Figura 1.3.1-** Interação mecânica entre as nervuras da barra de aço e o concreto ao redor.

Analiticamente, a tensão de aderência ( $\tau_b$ ) pode ser encontrada efetuando o equilíbrio das forças atuantes na barra de aço e no concreto de um elemento infinitesimal (Figura 1.3.2):

$$A_s \sigma_s + A_s d\sigma_s = A_s \sigma_s + \tau_b \pi \phi dx \quad (1.1)$$

$$\tau_b \pi \phi dx = A_s d\sigma_s \quad (1.2)$$

$$\tau_b = \frac{A_s d\sigma_s}{\pi \phi dx} \quad (1.3)$$



**Figura 1.3.2-** Obtenção da tensão de aderência pelo equilíbrio de forças.

A aderência pode ser afetada por diversos fatores relacionados com as características e propriedades dos materiais que constituem o concreto armado e, também, pelo meio em que a estrutura está inserida.

A seguir são apresentados alguns fatores que influenciam o comportamento da aderência entre o aço e o concreto:

**Resistência do concreto:** o aumento da capacidade do concreto em suportar ações, ao redor da barra de aço, aumenta a tensão máxima de aderência, pois o cone de fissuração que é formado ao redor da barra, devido ao efeito de arrancamento, estará mais resistente;

**Limite de escoamento do aço:** quando a deformação por tração na barra de aço atinge e ultrapassa o limite de escoamento, o diâmetro da barra é consideravelmente reduzido afetando a aderência;

**Diâmetro das barras de aço:** o diâmetro da barra de aço afeta a área superficial de aderência;

**Espaçamento entre as barras de aço:** com o aumento do espaçamento entre as barras de aço, o comportamento da tensão de aderência tende a melhorar, pois a sobreposição da área de influência do cone de fissuração ao redor da barra tende a diminuir;



**Cobrimento de concreto ao redor das barras de aço:** influencia o cone de fissuração formado ao redor da barra de aço;

**Formas e dimensões das nervuras das barras de aço:** afeta a interação mecânica entre a barra de aço e o concreto (Figura 1.3.1);

**Tratamento superficial do aço:** afeta a adesão e a resistência por atrito entre a barra de aço e o concreto;

**Condições da mistura do concreto fresco:** a homogeneidade e a estabilidade da mistura do concreto fresco garante uma igualdade nas condições de aderência ao longo da barra de aço e um melhor aproveitamento das propriedades do concreto endurecido;

**Adensamento do concreto fresco:** após a colocação do concreto na forma, ele deve ser compactado (adensado) de forma a provocar a saída do ar e melhorar o seu contato com as barras de aço, evitando o surgimento de vazios;

**Cura do concreto:** conjunto de medidas necessárias para evitar a evaporação da água que deverá hidratar o cimento;

**Tipo de carregamento:** para um mesmo deslizamento, o módulo da tensão de aderência para cargas de tração é bastante parecido com o módulo da tensão de aderência para cargas de compressão, para tensões no aço abaixo da tensão de escoamento. Após o escoamento, o diâmetro da barra submetida à tração é notadamente reduzido devido ao efeito de Poisson, afetando consideravelmente a aderência;

**Distribuição e tipos de microfissuras e fissuras ao longo da estrutura.**

## 1.4 O COMPORTAMENTO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

As estruturas de concreto armado possuem um comportamento muito complexo. O aço pode ser considerado um material homogêneo com propriedades bem definidas, porém o concreto é um material heterogêneo constituído por diversos materiais de propriedades diferentes. Assim, essas estruturas são influenciadas pelo comportamento individual de cada material, bem como pela interação entre eles, a partir das solicitações a que estão submetidos.

Entre outros fatores que influenciam esse comportamento, temos:

- não homogeneidade na construção dos elementos estruturais;
- histórico do carregamento e descarregamento ao longo do tempo;
- efeitos térmicos;
- fluência dos materiais;
- degradação da aderência entre a armadura de aço e o concreto;
- formação de microfissuras e macrofissuras.

A estrutura de concreto armado pode apresentar comportamento não-linear quando a resposta a uma causa não é linear. Esse comportamento pode ser devido à não-linearidade física do material e/ou à não-linearidade geométrica da estrutura.

Neste trabalho serão abordadas apenas as não-linearidades físicas dos materiais.

## 1.5 OBJETIVO DO TRABALHO

Neste trabalho são estudados os aspectos das propriedades do concreto, das propriedades do aço e das interações entre eles, com particular interesse na deterioração da aderência que ocorre na interface aço-concreto, para o desenvolvimento de modelagem numérica, para a análise não-linear de estruturas de concreto armado.

Os procedimentos e modelos numéricos apresentados nesta Tese consideram as principais e mais importantes características dos materiais e suas interações, sendo de fáceis manuseios, podendo ser incorporados em diferentes modelagens computacionais para a análise de diferentes tipos de estruturas de concreto armado como, vigas, pilares, lajes, pórticos e suas combinações, sendo necessários apenas ajustes para a simulação da estrutura a que se destinam, diferentemente de muitas propostas de modelagens numéricas encontradas na literatura.

Para validar os procedimentos propostos, foi desenvolvido um programa computacional para análise de viga simétrica bi-apoiada submetida à flexão, utilizando o método dos elementos finitos e, através de exemplos numéricos, a análise crítica foi feita comparando a modelagem numérica desenvolvida neste trabalho com outros tipos de modelagens numéricas encontradas na literatura e com ensaios experimentais obtidos também na literatura, comprovando a eficiência da proposta aqui apresentada.

## **CAPÍTULO 2**

### ***HISTÓRICO DO FENÔMENO DE ADERÊNCIA***

#### **2.1 GENERALIDADES**

O interesse em se conhecer o complexo mecanismo da aderência entre o aço e o concreto nas estruturas vem, a partir da década de 40, crescendo substancialmente. Através de análises teóricas e/ou ensaios práticos, pesquisadores têm mostrado interesse em explicar esse fenômeno para que, conceituado de forma mais realista, permita o desenvolvimento de métodos e modelos que serão aplicados na análise comportamental e no cálculo de estruturas de concreto armado.

A seguir são apresentados trabalhos que mostram estudos experimentais e numéricos relacionados com o fenômeno de aderência. Alguns propuseram modelos teóricos que pretendem simular esse fenômeno, a partir de ensaios práticos. Outros desenvolveram modelos teóricos a partir do conhecimento do fenômeno de aderência já adquirido.

## 2.2 ESTUDO DO FENÔMENO DE ADERÊNCIA

**WATSTEIN (1941)** analisou a distribuição da tensão de aderência, ao longo de barras de aço, a partir do ensaio de arrancamento (*pull-out test*). Com o auxílio de extensômetros mecânicos, mediu o alongamento e a tensão na barra da parte encravada no cilindro de concreto.

**MYLREA (1948)**, através do ensaio e da análise da resistência ao arrancamento de barras encravadas no concreto, e de trechos de barras ancoradas em vigas simples submetidas à flexão, apresentou um estudo da distribuição e progressão da tensão de aderência e da diminuição da segurança causada pela falha na aderência.

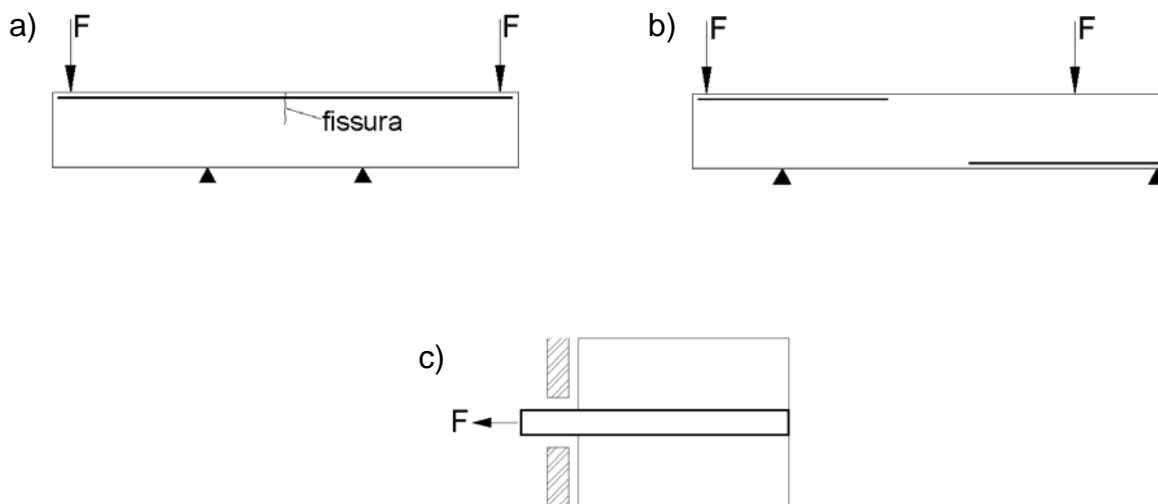
**McHENRY (1948)** descreveu um método de ensaio laboratorial para medir a distribuição da tensão ao longo de barras de aço, em elementos de concreto armado, obtida com o auxílio de medidores elétricos. Foram usadas barras de aço, com diferentes superfícies, em vigas submetidas à flexão, sendo obtidos os resultados da distribuição da tensão ao longo das barras, antes e depois da sua fissuração do concreto.

**CLARK (1949)** comparou e correlacionou os dados da resistência ao deslizamento do aço em relação ao concreto, obtidos a partir de vários ensaios feitos em vigas submetidas à flexão e a partir de ensaios de arrancamento, variando, por exemplo, a resistência do concreto e o comprimento e o diâmetro das barras ancoradas no interior do concreto.

**MAINS (1951)** mediu a distribuição da tensão de aderência ao longo da barra de aço a partir de ensaios de arrancamento (*pull-out test*) e de vigas bi-apoiadas submetidas a carregamentos concentrados. Utilizou extensômetros elétricos para medir a deformação específica do aço e do concreto. Foram evidenciados, na viga, os efeitos das fissuras sobre a magnitude e a distribuição da tensão de aderência na barra de aço.

**FERGUSON (1954)** investigou o espaçamento mínimo, entre as barras de aço, necessário para uma perfeita transmissão das tensões de aderência entre o aço e o concreto, através de ensaios de arrancamento excêntrico.

**PERRY (1966)** analisou a distribuição da tensão de aderência ao longo de barras de aço a partir de três ensaios diferentes: ensaio de uma viga bi-apoiada submetida a carregamentos concentrados com uma fissura existente no meio do vão (Figura 2.2.1.a); ensaio de uma viga bi-apoiada com as barras de aço principais posicionadas somente nas extremidades, com ancoragem livre no centro, submetida a carregamentos concentrados (Figura 2.2.1.b); ensaio de arrancamento (*pull-out test*) (Figura 2.2.1.c). Com os resultados dos ensaios, verificou a influência da distribuição do momento fletor ao longo do elemento, na relação entre a tensão de aderência e o deslizamento ao longo da barra de aço.

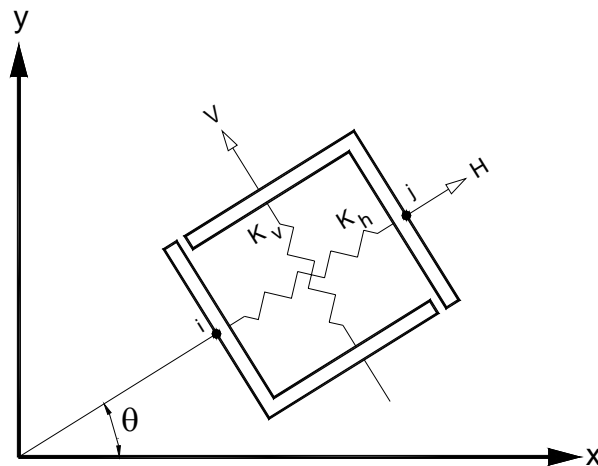


**Figura 2.2.1-** Representação dos ensaios analisados por **PERRY (1966)**.

**FERGUSON (1966)** discutiu a natureza da falha na aderência entre o aço e o concreto e a sua influência no fendilhamento do concreto, destacando a importância, na resistência da aderência, da largura da viga e do espaçamento das barras de aço na seção transversal.

**ABELES (1966)**, utilizando uma camada de material foto-sensível (método da foto-tensão) colocada na superfície de vigas com diferentes características, ensaiadas em laboratório, observou a distribuição da tensão e da propagação das fissuras para diversos ciclos de carregamento.

**NGO (1967)** utilizou o método dos elementos finitos na construção de um modelo numérico, para estudar o comportamento de vigas de concreto armado considerando os efeitos das tensões de aderência. Para a representação da rigidez da aderência entre as barras de aço e o concreto, foi desenvolvido e apresentado um elemento finito de ligação adimensional (bond link) (Figura 2.2.2), colocado entre os elementos finitos que representam o concreto e os elementos finitos que representam as barras de aço.



**Figura 2.2.2-** Elemento de ligação (fonte: **NGO, 1967**).

**LUTZ (1967)** examinou a ação das forças de aderência, associadas ao deslizamento e à fissuração, em barras com diversas propriedades superficiais. Foi discutida a mecânica do deslizamento de barras nervuradas, onde a aderência é formada por três componentes: adesão química, fricção e interação mecânica entre o aço e o concreto.

**BRESLER (1968)** investigou a contribuição da história do carregamento na deterioração de estruturas de concreto armado a partir de ensaios de arrancamento submetidos a ciclos de carregamento e descarregamento. Este estudo foi baseado no efeito acumulativo de diversos danos: fissuração, redução da rigidez, etc, sendo verificadas as suas influências na transferência de tensão entre o aço e o concreto.

**NILSON (1968)**, utilizando o método dos elementos finitos e o elemento de ligação apresentado por **NGO (1967)**, desenvolveu modelos numéricos de representação de amostras de concreto armado submetidas a ensaio de arrancamento excêntrico. A rigidez dos elementos de ligação, utilizada nos cálculos, foi obtida a partir do desenvolvimento de uma função polinomial de terceiro grau que relaciona a tensão de aderência com o deslizamento entre a barra de aço e o concreto. Para o desenvolvimento dessa equação foram utilizados os resultados experimentais obtidos por **BRESLER (1968)**.

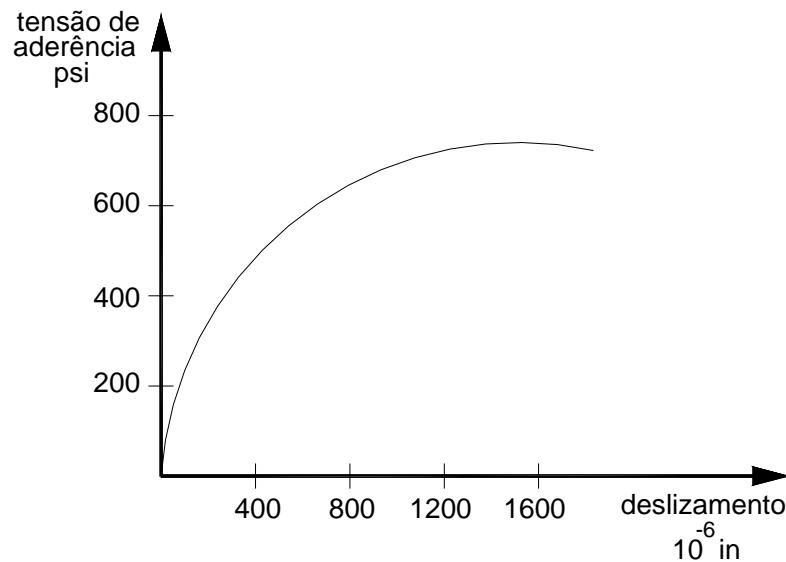
**PERRY (1969)**, através de ensaios de arrancamento excêntrico submetidos a cargas repetidas estáticas e dinâmicas, determinou o efeito dessas repetições na distribuição da tensão de aderência ao longo de barras de aço. Teve como variáveis: a resistência do concreto, o número de repetições das cargas e o nível das cargas aplicadas.

**GOTO (1971)** mostrou, através de ensaios, a formação e o comportamento das fissuras de aderência no concreto ao redor da barra, decorrentes das fortes pressões atuantes na frente das nervuras, devido aos mecanismos de transferência de tensões e aderência.



**ISMAIL (1972)** analisou a deterioração da aderência entre a armadura de aço e o concreto, através de ensaios laboratoriais, quando o componente de concreto armado é submetido a carregamento cíclico.

**MIRZA (1979)**, a partir de amostras prismáticas ensaiadas com tensão axial de arrancamento aplicada nas extremidades da barra inserida no concreto, estudou o comportamento entre a tensão de aderência e o deslizamento entre o aço e o concreto, sob influência da variação do diâmetro das barras, da resistência à compressão do concreto e do carregamento, entre outros, obtendo, com isso, uma relação empírica entre a tensão de aderência e o deslizamento para ser utilizada na modelagem de um elemento finito.



**Figura 2.2.3-** Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: **MIRZA, 1979**).

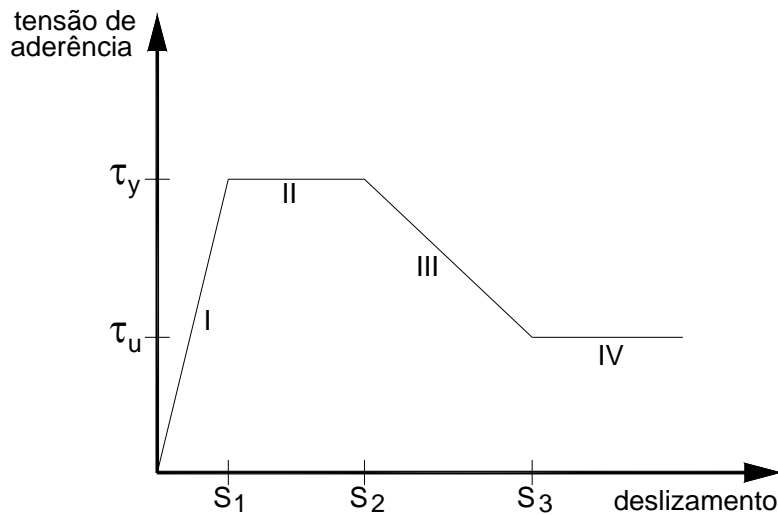
**TASSIOS (1981)** apresentou um modelo analítico que pode ser incrementado em programas computacionais para a análise da tensão e deformação de elementos de concreto armado. O desenvolvimento conceitual é feito a partir do estudo analítico das relações entre a tensão de aderência local e o deslizamento local ao longo de uma barra, assumindo leis não-lineares locais com diferentes estágios do comportamento global da interface, e em algumas expressões empíricas das propriedades dos materiais.

**SOMAYAJI (1981)** propôs um modelo analítico para investigação do comportamento das fissuras, e do efeito do enrijecimento à tração (*tension-stiffening*), em elementos de concreto armado submetidos à tração uniaxial, a ser usado com o método dos elementos finitos ou com outro método, baseado no desenvolvimento teórico e na diferenciação de equações de equilíbrio e em expressões representativas das propriedades do concreto e do aço. A validade dos resultados, obtidos por esse modelo, foi justificada com a comparação dos resultados obtidos por ensaio prático.

**JIANG (1984)**, através de investigações analíticas, apresentou um modelo experimental utilizado para medir a aderência local e o deslizamento local, observar as fissuras secundárias e observar a distribuição da tensão no concreto ao redor da barra de aço.

**YANKELEVSKY (1985)**, fundamentado em equações de equilíbrio das forças atuantes na interface entre a barra de aço e o concreto, para um elemento infinitesimal, e na relação local entre a tensão de aderência e o deslizamento, propôs um elemento finito unidimensional para consideração da tensão de aderência e o deslizamento na interface aço-concreto. Na Figura 2.2.4 temos os quatro estágios em que foi dividido o comportamento do fenômeno de aderência a partir da relação tensão de aderência x deslizamento: I- contato inicial entre o aço e o concreto em que o deslizamento entre os dois materiais tem um correspondente aumento da tensão de aderência até o limite  $\tau_y$ ; II- início da quebra da aderência onde o deslizamento entre os dois materiais ocorre sem um acréscimo da tensão de aderência; III- há uma redução da tensão de aderência

até chegar a uma tensão última onde a transferência de tensão, provocada pelo deslizamento entre os dois materiais, passa a ser dada também por fricção (estágio IV).



**Figura 2.2.4-** Relação local da tensão de aderência x deslizamento (fonte: **YANKELEVSKY, 1985**).

**KEMP (1986)** apresentou critérios para considerar a tensão de aderência entre o aço e o concreto sob condições de carregamento último e de serviço. Os critérios foram baseados em pesquisas experimentais e em estudos sobre a influência, no comportamento da aderência, de diversos fatores: comprimento e espaçamento das barras de aço encravadas no concreto, estribos, cobrimento de concreto e a interação entre o cisalhamento e a flexão.

**KEUSER (1987)** investigou a influência na qualidade dos resultados obtidos na análise da tensão de aderência entre o aço e o concreto, com o método dos elementos finitos, através da variação do tipo de função de deslizamento, da densidade dos elementos da malha e da relação entre a tensão de aderência e o deslizamento utilizados na implementação desses elementos.

**ALLWOOD (1989)** descreveu um procedimento numérico baseado em elementos finitos para a análise de vigas de concreto armado onde o aço e o concreto são analisados separadamente e as forças de interface, entre eles, são consideradas usando um método iterativo de convergência, o qual traz soluções conjuntas.

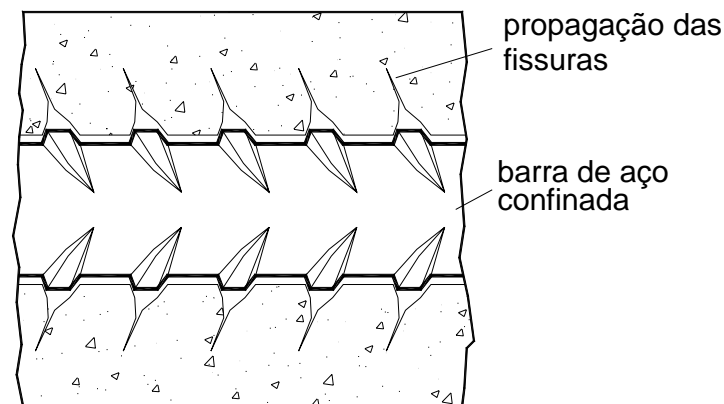
**RUSSO (1990)** apresentou uma solução analítica de sistemas de equações diferenciais governadas pelo comportamento da ancoragem da barra de aço sob excitação generalizada. A solução usa um modelo bilinear do aço e assume uma relação local da tensão de aderência x deslizamento expressa por função exponencial ou por função linear.

**DUCATTI (1993)** estudou a aderência entre o concreto de alto desempenho e a armadura através da realização de ensaios de arrancamento. Entre os objetivos visados destacaram-se: determinação da curva de comportamento de aderência e a comparação dos parâmetros obtidos para estas curvas com os regulamentados por normas internacionais de concreto comum; quantificação de diversos parâmetros sobre a relação tensão de aderência e deslizamento, e o desenvolvimento de um ensaio de arrancamento capaz de eliminar o efeito do confinamento do concreto circunvizinho à barra de arrancamento.

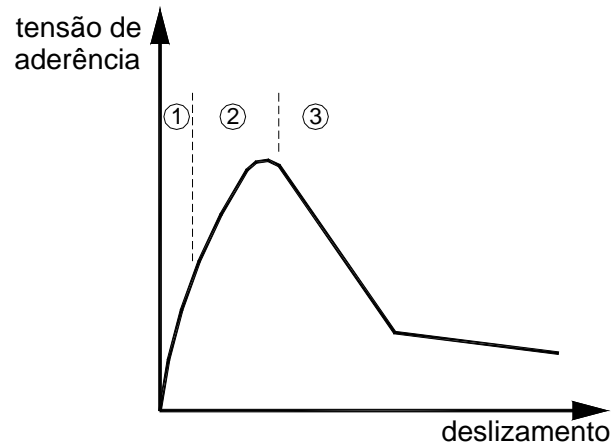
**ROSA (1994)** apresentou uma análise comparativa das várias curvas de aderência x deslizamento entre o aço e o concreto quando aplicadas ao método dos elementos finitos. Foi analisado o desempenho quanto ao tempo de processamento, número de interações necessárias, facilidade de utilização e precisão dos resultados obtidos quando comparados com os resultados de ensaio.

**KWAK (1995)** apresentou uma formulação, para implementação em programas computacionais, da modelagem de elementos de concreto armado onde os efeitos da aderência e do deslizamento, na interface entre o aço e o concreto, são considerados a partir do desenvolvimento do modelo analítico das barras de aço. Resultados analíticos e experimentais são comparados estabelecendo uma validade do modelo proposto.

**UIJL (1996)**, considerando uma barra de aço encravada em um cilindro de concreto, desenvolveu um modelo baseado na capacidade de confinamento do concreto ao redor da barra (Figura 2.2.5), sendo descrita a relação entre o deslocamento radial e a tensão de compressão radial na interface dos dois materiais. A aderência entre a barra e o concreto é descrita em três estágios diferentes (Figura 2.2.6): estágio I – o contato inicial entre o aço e o concreto é mantido pela adesão e o entrelaçamento da cimentação na superfície do aço. Nesse estágio é assumido um comportamento elástico da aderência, onde a tensão tem pequenos valores; estágio II – inicia a quebra da aderência, onde a aderência é principalmente governada pelo apoio das saliências da barra no concreto. A concentração das forças na frente das saliências causa a formação de um cone de fissuras, iniciado na crista dessas saliências; estágio III – as fissuras alcançam a superfície externa e a tensão de aderência é reduzida repentinamente. O mecanismo de transferência da tensão é dado também pela fricção.



**Figura 2.2.5-** Propagação do cone formado por fissuras ao redor da barra de aço.



**Figura 2.2.6-** Estágios decorrentes da propagação das fissuras.

**EL-HAWARY (1996)** estudou os efeitos do fogo e das altas temperaturas no comportamento das propriedades do concreto armado, principalmente sobre a aderência entre o aço e o concreto, a partir de amostras cilíndricas de concreto com barras de aço no seu interior, submetidas a diferentes durações de exposições para diferentes temperaturas.

**ALLWOOD (1996)** expôs a abordagem do uso de um modelo não-linear da relação aderência x deslizamento em conjunto com um método para incorporação da rigidez da aderência, em elemento finito, para a análise de estruturas de concreto armado.

**YANKELEVSKY (1997)** apresentou o desenvolvimento de elementos finitos bidimensionais, que representam o comportamento da interface entre o aço e o concreto, para estruturas submetidas a ensaio de tração. A rigidez dos elementos incorpora parâmetros do aço, do concreto e da relação entre a tensão de aderência x deslizamento.

**DESIR (1998)** propôs uma modelagem numérica para simular o comportamento do fenômeno da aderência entre o aço e o concreto utilizando leis constitutivas baseadas nos conceitos da termodinâmica clássica, o qual considera a interface como sendo uma superfície de descontinuidade. Este modelo numérico foi incorporado na formulação de um elemento finito que representa tanto o aço quanto o concreto, onde cada material tem um comportamento próprio definido por uma lei constitutiva separada.

**MANFREDI (1998)** apresentou um modelo numérico para análise de vigas contínuas de concreto armado que inclui, em sua formulação, a relação tensão de aderência x deslizamento, introduzida no desenvolvimento da matriz de rigidez utilizada no método. Esse método leva em conta os detalhes dos modelos dos materiais e as suas interações, e o comportamento não-linear das vigas de concreto armado considerando a largura das fissuras e o efeito da tensão de enrijecimento.

**BARBOSA (1998)** fez estudo experimental e numérico sobre estruturas de concreto de alto desempenho armadas com aço de elevado limite elástico. Entre os principais objetivos destacaram-se: quantificação de alguns parâmetros influentes na relação tensão de aderência e deslizamento, dentre eles a posição das barras tendo em vista o lançamento do concreto e o comportamento de vigas fletidas influenciadas pelas características mecânicas dos materiais que constituem o concreto armado de elevado desempenho.

**AYOUB (1999)** comparou diferentes modelos analíticos para a simulação de barras de aço ancoradas em blocos de concreto, do tipo *pull-out test*, considerando os mecanismos de transferência de tensão entre o aço e o concreto, para carregamentos monotônico e cíclico. Também propôs um novo modelo que considera o deslizamento relativo entre a barra de aço e o concreto.

**MONTI (2000)** apresentou um modelo em elementos finitos para vigas de concreto armado considerando o deslizamento entre a barra de aço e o concreto circunvizinho. O modelo pressupõe a conservação plana da seção e as tensões no aço são computadas como sendo a soma de duas contribuições: a deformação e o deslizamento da ancoragem. Os resultados do modelo são comparados com ensaios experimentais para carregamentos monotônicos e cíclicos mostrando bons resultados.

**ZUO (2000)**, estudando a relação entre as diferentes características do concreto armado em vigas e a tensão de aderência entre o aço e concreto, para poder chegar a um modelo numérico mais realista dessa tensão, após ensaiar 64 vigas de concreto armado com diferentes propriedades, expôs uma equação para o comprimento de ancoragem por transpasse de barras de aço em vigas, onde esse comprimento depende das características da interface.

**ELMORSI (2000)** descreve uma formulação, pelo método dos elementos finitos, da junção entre viga e pilar de concreto armado considerando os efeitos da aderência, do deslizamento da ancoragem das barras de aço e da deformação por cisalhamento do painel na região da junção. A capacidade do modelo em simular a deterioração da aderência e o eventual arrancamento das barras de ancoragem, sob carregamentos cíclicos, são demonstrados através de comparações feitas com outros resultados analíticos e experimentais.

**FERNANDES (2000)** descreveu o comportamento da aderência entre o aço e o concreto sob ações monotônicas e repetidas através de investigação experimental, utilizando ensaios de arrancamento (*pull-out test*), variando diversos parâmetros como diâmetro da barra e tipo e amplitude do carregamento. Alguns resultados dos ensaios foram comparados com modelagens analíticas feitas através de um programa de computador comercial de elementos finitos.



**SPACONE (2000)** discutiu a importância da modelagem do fenômeno da aderência e do deslizamento no comportamento de estruturas de concreto armado sob carregamento estático e dinâmico, apresentando formulações para a implementação desse fenômeno em modelos de elementos finitos, para a análise dessas estruturas.

**CAO (2001)** observou a degradação da aderência, em amostra cilíndrica de concreto armado, quando submetida a carregamento cíclico, através de ensaio não destrutivo, por meio de dispositivos elétricos de contato, colocados na interface aço-concreto.

**KWAK (2001a)** propôs um modelo analítico o qual simula o comportamento da aderência x deslizamento entre a armadura de aço e o concreto para estruturas sob carregamento monotônico. A resolução do modelo é feita a partir da determinação das condições de contorno das extremidades da barra de aço por meio de equações baseadas no equilíbrio de cada nó dos elementos em que a barra foi dividida e, nas condições de compatibilidade entre o aço e o concreto.

**KWAK (2001b)** desenvolveu um modelo analítico, para análise do comportamento não-linear de vigas submetidas a carregamento cíclico, baseado na relação momento-curvatura, podendo considerar os efeitos da aderência. Foram comparados os estudos analíticos com estudos experimentais para validar o modelo proposto.

**SALARI (2001)** apresentou formulações gerais, para elementos unidimensionais, considerando os efeitos da aderência e do deslizamento na interface entre o aço e o concreto. Essas formulações são derivadas do equilíbrio e compatibilidade de equações diferenciais baseadas no equilíbrio de deslocamento e no equilíbrio de forças.

**MARINS NETO (2002)** desenvolveu modelagens numéricas computacionais para análise de estruturas de concreto armado submetidas ao ensaio de tração simétrica e de viga simétrica submetida à flexão, considerando o comportamento linear dos materiais, o fenômeno aderência-deslizamento entre a armadura de aço e o concreto e o modelo de fissuração discreta do concreto. O método dos elementos finitos foi utilizado para prever o comportamento de estruturas de concreto armado baseado nas propriedades do concreto, da armadura de aço e da relação aço-concreto na interface. Exemplos numéricos comparando a distribuição da tensão de aderência, a tensão e a deformação ao longo da barra de aço, obtidos com os programas e com valores providos de outros autores foram apresentados, mostrando muito bons resultados.

**LIMKATANYU (2002a)** utilizando formulações derivadas do equilíbrio e compatibilidade de equações diferenciais apresentou a teoria e a aplicação de três diferentes formulações de elementos utilizados para modelagem numérica de estruturas de concreto armado que consideram a aderência entre a barra de aço e o concreto. A primeira formulação é baseada no processo dos deslocamentos nodais, a segunda é baseada no processo das forças nos elementos e a terceira na interação entre as duas formulações.

**LIMKATANYU (2002b)** discute as teorias e a aplicações das formulações apresentadas em **LIMKATANYU (2002a)**. Exemplos numéricos comparativos entre as três formulações são apresentados para avaliar as convergências, precisões e os processamentos computacionais.

**KAMINSKA (2002)** utilizando estruturas de vigas, colunas e pórticos de concreto armado, realizou ensaios para estudar o comportamento do concreto de alta resistência, o comportamento do aço e o comportamento da aderência entre eles.

**KWAK (2002a)** propõe um modelo analítico para simular o comportamento da fissuração e o efeito da perda de rigidez para estruturas de concreto armado, considerando as interações entre os materiais, baseados em funções de distribuição das deformações do aço e do concreto. Foram apresentados estudos comparando os resultados analíticos com resultados experimentais para validar o modelo proposto.

**CHOI (2002)** analisou os mecanismos da interação na interface entre barras nervuradas e o concreto, como o atrito, a adesão e a características das nervuras, a fim de estabelecer uma expressão para prever a perda da resistência de aderência entre os dois materiais.

**GIRARD (2002)** apresentou um modelo em elemento finito desenvolvido para investigar o comportamento de coluna de concreto armado submetida a carregamento cíclico, considerando os efeitos do confinamento do concreto, a perda da rigidez do concreto, a deterioração gradual da aderência entre a armadura de aço e o concreto e outros aspectos não-lineares.

**JEPSSON (2003)** analisou através de ensaios a influência da perda de aderência total em regiões da armadura longitudinal de vigas de concreto armado, no comportamento global da estrutura, onde a variação do comprimento da armadura de aço sem aderência com o concreto é feita através da colocação de tubos plásticos ao redor da barra.

**CHEN (2003)** investigou a influência da aderência-deslizamento, entre a barra de aço e o concreto, na distribuição das fissuras em elementos de concreto armado, através de um modelo numérico que utiliza elementos de ligação para simular as propriedades da interface.

**SIMÃO (2003)** discutiu diversos modelos utilizados para simular o comportamento do aço, do concreto e da aderência, na implementação de elementos finitos para análise não-linear de estruturas de concreto armado.

**FANG (2004)** estudou a influência dos níveis de corrosão da armadura de aço sobre o comportamento aderência x deslizamento que ocorre entre a barra e o concreto, em amostra prismáticas submetidas ao ensaio de arrancamento.

**JENDELE (2004)** apresentou um modelo numérico para a simulação da aderência entre a armadura de aço e o concreto, baseado nas características geométricas unidimensionais da barra de aço e nas propriedades da interface. O modelo analisa vigas de concreto armado considerando a falha na aderência e a fissuração do concreto.

**KWAK (2004)** propôs um modelo analítico para simular o comportamento não-linear de estruturas de concreto armado submetidas ao cisalhamento e à tensão normal. O modelo se baseia no equilíbrio de forças, nas condições de compatibilidade e nas relações tensão de aderência x deslizamento entre a barra de aço e o concreto. O comportamento do concreto considera a formação de fissuras as quais seguem ortogonalmente as direções das deformações principais e rotacionam de acordo com o histórico do carregamento. Foram apresentados estudos comparando os resultados analíticos com resultados experimentais para validar o modelo proposto.

**LOWES (2004)** propôs um modelo de elemento para simular a aderência entre a barra de aço e o concreto, pelo método dos elementos finitos, para estruturas submetidas a qualquer tipo de carregamento.

**FRANÇA (2004)** apresentou resultados de ensaios de tração direta e ensaios de arrancamento, realizados com concreto convencional e concreto contendo porcentagens de resíduos de borracha em substituição à areia, analisando as condições de aderência entre a barra de aço e o concreto.

**LUCCIONI (2005)** desenvolveu um modelo analítico para o estudo do comportamento de estruturas de concreto armado, formulado a partir da teoria da plasticidade e considerando que cada elemento que forma o concreto armado contribui proporcionalmente no comportamento final. No modelo são consideradas duas fases que correspondem ao concreto e à armadura de aço. Para considerar o mecanismo da aderência-deslizamento é modificado o comportamento do aço. Para validar o modelo proposto foram apresentados estudos comparando os resultados analíticos com resultados experimentais obtidos por outros autores.

**YANG (2005)** apresentou um modelo computacional para análise de vigas planas de concreto armado, onde as fissuras se propagam, a partir de um critério de energia, baseadas no conceito de fissuração fictícia. A geração automática das fissuras considera a deterioração da aderência entre o aço e o concreto para cada estado de carregamento.

**BATIS (2005)** examinou a performance de diferentes tipos de barras de aço, que foram submetidas a diversos estados de corrosão, devido à poluição atmosférica, utilizadas em amostras de elementos de concreto armado, observando-se as influências na aderência entre o aço e o concreto.

**CAMPIONE (2005)** através de ensaios de arrancamento (*pull-out test*) estudou a aderência da armadura de aço embebida em elementos de concreto leve reforçado com fibras e feito com argila expandida, quando submetidos a carregamento monotônico e carregamento cíclico.

**OLIVEIRA FILHO (2005)** analisou o comportamento experimental e teórico de vigas de concreto armado, quantificando a perda de rigidez através do cálculo de flechas sucessivas ocorridas durante a aplicação de carregamento cíclico. A ênfase foi dada à análise da aderência na interface aço-concreto.

**FANG (2006)** estudou a influência da corrosão da armadura de aço sobre o comportamento aderência x deslizamento que ocorre entre a barra e o concreto, para amostras prismáticas de concreto armado, através de ensaios de arrancamento e modelagem por elementos finitos.

**JENDELE (2006)** apresentou um modelo numérico para simular a aderência entre a armadura de aço e o concreto, baseado nas características geométricas unidimensionais da barra, nas propriedades da superfície e na relação tensão de aderência x deslizamento. Este modelo é uma variação do modelo apresentado por **JENDELE (2004)**.

**BROOKE (2006)** através de ensaios, analisou a performance da aderência, entre a armadura de aço e o concreto, no interior da junção viga-pilar, quando submetida a carregamento cíclico.

**CORONELLI (2006)** desenvolveu uma modelagem não linear baseada no método dos elementos finitos, considerando as características do concreto, do aço e da interface, para análise do comportamento do cisalhamento em vigas de concreto armado.

**HIGGINS (2006)** através de investigação experimental analisou a influência dos estribos, quando submetidos à corrosão acelerada, na capacidade de resistência ao cisalhamento de vigas de concreto armado.

**KWAK (2006)** apresentou uma modelagem não-linear, pelo método dos elementos finitos, para a análise de vigas de concreto armado engastadas submetidas ao carregamento cíclico, sendo considerado comportamento da aderência x deslizamento entre a armadura de aço e o concreto.

**ALMEIDA FILHO (2006)** fez estudo teórico-experimental da aderência aço-concreto, utilizando concreto do tipo auto-adensável, mediante ensaios monotônicos de flexão em vigas e de arrancamento. O estudo considerou parâmetros como o tipo de concreto (convencional ou auto-adensável), a resistência à compressão do concreto e o diâmetro das barras.

**AZAD (2007)** estudou os efeitos da corrosão da armadura de aço sobre o comportamento de vigas fletidas. Através do ensaio de 56 amostras de vigas de concreto armado, considerando vários graus de corrosão da armadura, foi desenvolvido um modelo analítico que relaciona a densidade da corrosão da armadura como o momento fletor resistente da viga.

**HADDAD (2007)** estudou experimentalmente, através de ensaios de arrancamento, os efeitos das reações agregado-cimento sobre as características da aderência entre o aço e o concreto em elementos de concreto armado.

**XIAO (2007)** investigou, através de ensaios de arrancamento, o comportamento da aderência entre a armadura de aço e o concreto produzido com agregados reciclados.

## CAPÍTULO 3

### ***MODELAGEM NUMÉRICA***

#### **3.1 INTRODUÇÃO**

Os modelos analíticos que representam cada material que constitui um elemento estrutural de concreto armado, bem como as interações entre eles, devem ser desenvolvidos de forma a satisfazer o comportamento real da estrutura. A modelagem pode se tornar muito complexa devido a diversos fatores: não-homogeneidade dos componentes que constituem a massa de concreto; aparecimento de fissuras e microfissuras que variam com o histórico do carregamento; não linearidade das relações tensão-deformação; perda de aderência entre a barra de aço e o concreto. Considerando esses e outros fatores, podemos ter uma combinação de modelos numéricos essenciais que levam em conta importantes características dos materiais e que podem simplificar algumas propriedades, através de considerações lineares, ou podem prever um comportamento mais real, através de considerações não lineares.

Neste capítulo apresentam-se as propriedades, os modelos e os métodos de resolução numérica que representam o comportamento e as características do aço, do concreto e as interações e influências que um material pode exercer sobre o outro, que podem ser utilizados na formulação de modelagens numéricas computacionais de estruturas de concreto armado como, vigas, pilares, pórticos, lajes e suas combinações.



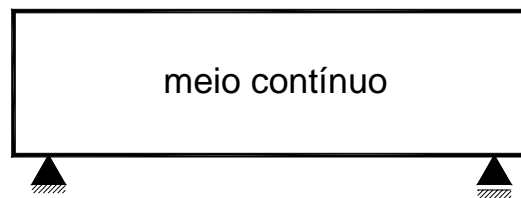
## 3.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos surgiu, junto com outros métodos, para suprir a necessidade de resolver inúmeros problemas, a partir de complexos modelos matemáticos que representam o comportamento de materiais e estruturas. Por apresentar uma boa precisão e ser de fácil manuseio, o método dos elementos finitos (MEF) é o método mais utilizado para a análise numérica de estruturas.

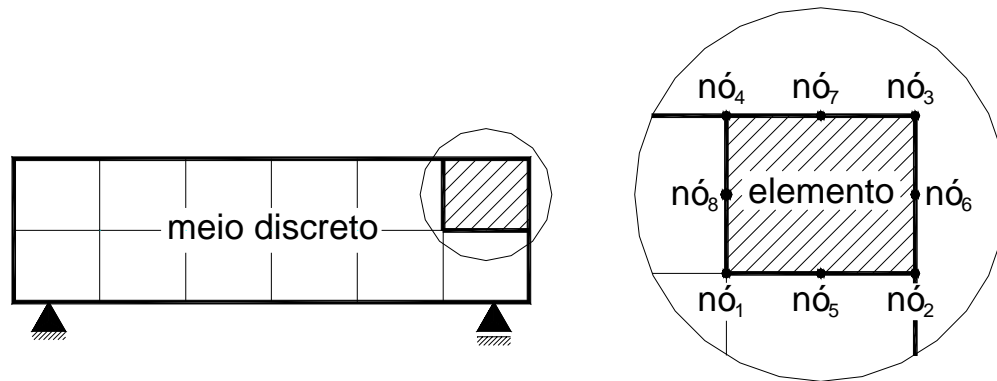
O desenvolvimento generalizado da matriz de rigidez e do vetor de cargas para os elementos finitos, que serão utilizados neste trabalho, será demonstrado a seguir. Em **ASSAN (1999)** pode-se encontrar uma demonstração mais detalhada desse desenvolvimento.

### 3.2.1 A MATRIZ DE RIGIDEZ

A técnica de análise pelo método dos elementos finitos consiste na divisão do domínio, contínuo (Figura 3.2.1.1), em um número finito de pequenas regiões, elementos finitos, tornando-o um meio discreto (Figura 3.2.1.2).



**Figura 3.2.1.1-** Meio contínuo.



**Figura 3.2.1.2-** Meio discreto, divisão em elementos finitos (malha).

A seguir, temos alguns passos para a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de cargas empregados no método dos elementos finitos:

- a) obter as componentes de deslocamentos internos  $\{v\}$  em função de deslocamentos nodais  $\{r\}$  do elemento, através das funções de forma  $[\varphi]$ :

$$\{v\} = [\varphi] \{r\} \quad (3.2.1)$$

- b) escrever as relações entre deformações e deslocamentos nodais:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{r\} \quad (3.2.2)$$

- c) adotar uma relação tensão-deformação apropriada  $[D]$ :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.2.3)$$

- d) substituir a equação (3.2.2) na (3.2.3):

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{r\} \quad (3.2.4)$$

e) o trabalho virtual externo é obtido através da imposição arbitrária de um deslocamento nodal virtual  $\{\tilde{r}\}$ :

$$W_e = \{\tilde{r}\}^t \{f\} \quad (3.2.5)$$

f) o trabalho virtual interno é:

$$W_i = \int_V \{\tilde{\epsilon}\}^t \{\sigma\} dV \quad (3.2.6)$$

g) da equação (3.2.2), obtemos:

$$\{\tilde{\epsilon}\}^t = \{\tilde{r}\}^t [B]^t \quad (3.2.7)$$

h) substituindo (3.2.7) em (3.2.6), temos:

$$W_i = \{\tilde{r}\}^t \left( \int_V [B]^t \{\sigma\} dV \right) \quad (3.2.8)$$

i) agora, substituindo (3.2.4) em (3.2.8), temos:

$$W_i = \{\tilde{r}\}^t \left( \int_V [B]^t [D] [B] dV \right) \{r\} \quad (3.2.9)$$

j) igualando  $W_e$  e  $W_i$  obtemos o vetor de cargas nodais equivalentes:

$$\{f\} = \left( \int_V [B]^t [D] [B] dV \right) \{r\} \quad (3.2.10)$$

$$\{f\} = [k] \{r\} \quad (3.2.11)$$

onde a matriz de rigidez  $[k]$  é dada por:

$$[k] = \int_V [B]^t [D] [B] dV \quad (3.2.12)$$

A matriz de rigidez  $[K]$  da estrutura é obtida superpondo a matriz de rigidez  $[k]$  de cada elemento nas coordenadas globais.

A seguir, temos a relação do vetor dos esforços nodais externos conhecidos  $\{R\}$  com a matriz de rigidez global  $[K]$  e os deslocamentos nodais globais  $\{g\}$ , a serem encontrados com a resolução do sistema:

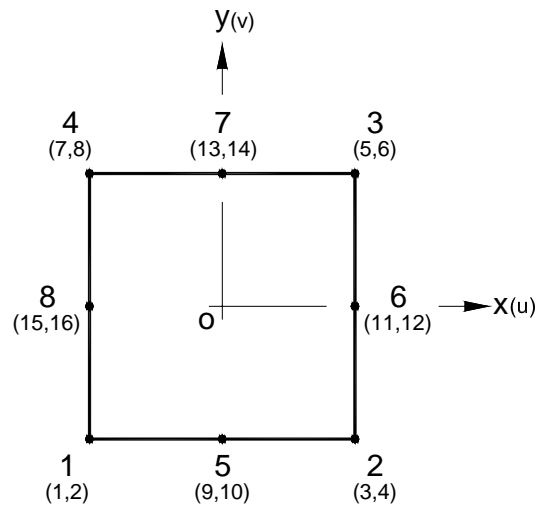
$$\{R\} = [K] \{g\} \quad (3.2.13)$$

A tensão em cada elemento  $\{\sigma\}$  é obtida da equação (3.2.14):

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{g\} \quad (3.2.14)$$

### 3.2.2 ELEMENTO FINITO BIDIMENSIONAL

Neste trabalho é utilizado o elemento finito bidimensional retangular, que aqui será denominado como LSR (*Linear Strain Rectangle*), composto por 8 nós, com 2 graus de liberdade por nó (2 translações) (Figura 3.2.2.1). A rigidez do elemento é obtida numericamente usando uma grade três por três de pontos de integração de Gauss, para o cálculo da matriz constitutiva ortotrópica corrente e para a rotação para as coordenadas globais.



**Figura 3.2.2.1-** Elemento finito retangular (*LSR*).

Seja  $\{u\}$  o vetor que contém as funções aproximadoras das componentes dos deslocamentos para cada nó (incógnitas nodais):

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.2.15)$$

Para este elemento as funções aproximadoras têm variação quadrática sobre os lados, cujo sistema de referência está localizado no centro, sendo dadas por:

$$u(x, y) = d_1 + d_2 x + d_3 y + d_4 x^2 + d_5 y^2 + d_6 x y + d_7 x^2 y + d_8 x y^2 \quad (3.2.16)$$

$$v(x, y) = d_9 + d_{10} x + d_{11} y + d_{12} x^2 + d_{13} y^2 + d_{14} x y + d_{15} x^2 y + d_{16} x y^2 \quad (3.2.17)$$

Sendo as incógnitas nodais dadas pelo vetor  $\{d\}$ , escrevemos  $\{u\}$  na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 \end{bmatrix} \{d\} \quad (3.2.18)$$

onde,

$$\{d\} = \{ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8 \ d_9 \ d_{10} \ d_{11} \ d_{12} \ d_{13} \ d_{14} \ d_{15} \ d_{16} \}^t \quad (3.2.19)$$

Fazendo,

$$[\xi] = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^2y & xy^2 \end{Bmatrix} \quad (3.2.20)$$

obtemos,

$$\{u\} = [\xi] \{d\} \quad (3.2.21)$$

Considerando os elementos com largura  $L$  e altura  $h$  (Figura 3.2.2.2) podemos escrever, na forma matricial (3.2.22), os deslocamentos nodais considerando as funções aproximadoras, como se segue.

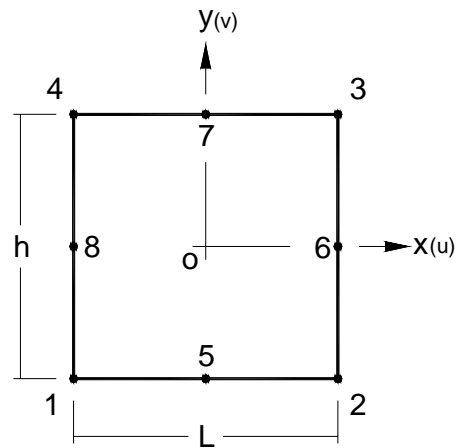


Figura 3.2.2.2- Dimensões dos elementos finitos.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{15} \\ d_{16} \end{Bmatrix} \quad (3.2.22)$$

Assim, temos:

$$\{r\} = [A] \{d\} \quad (3.2.23)$$

Agora, substituindo (3.2.23) em (3.2.21), temos:

$$\{u\} = [\xi] [A]^{-1} \{r\} \quad (3.2.24)$$

Sendo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{deformação no eixo } x)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{deformação no eixo } y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{deformação angular})$$

Podemos escrever, em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.2.25)$$

$$\{\varepsilon\} = [L] \{u\} \quad (3.2.26)$$

Substituindo (3.2.24) em (3.2.26) obtemos a deformação:

$$\{\varepsilon\} = [L] [\xi] [A]^{-1} \{r\}$$



onde,

$$[L] [\xi] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y & 2xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & x^2 & 2xy \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2y & x & x^2 & 2xy & 0 & 1 & 0 & 2x & 0 & y & 2xy & y^2 \end{bmatrix}$$

Fazendo:

$$[B] = [L] [\xi] [A]^{-1} = [\psi] [A]^{-1} \quad (3.2.27)$$

Agora temos:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{r\} \quad (3.2.28)$$

Como a tensão é dada por:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.2.29)$$

Substituindo (3.2.28) em (3.2.29), obtemos:

$$\{\sigma\} = [D] [B] \{r\} \quad (3.2.30)$$

A matriz de rigidez  $[k]$  de cada elemento finito pode ser obtida, para o caso em que não se tem explicitada a matriz  $[B]$ , substituindo (3.2.27) em (3.2.12):

$$[k] = [[A]^{-1}]^t \int_V [\psi]^t [D] [\psi] dV [A]^{-1} \quad (3.2.31)$$

Com isso, podemos obter os valores de  $[k]$  que somados, nas coordenadas globais, constituirão a matriz de rigidez global da estrutura conforme (3.2.13).

Para obtermos o vetor de cargas nodais equivalentes  $\{f\}$  de (3.2.10), a partir do vetor de tensões de cada elemento  $\{\sigma\}$ , fazemos:

$$\{f\} = \left( \int_V [B]^t [D] [B] dV \right) \{r\} \quad (3.2.10)$$

$$\{f\} = \int_V [B]^t [D] \{r\} [B] dV \quad (3.2.32)$$

Substituindo (3.2.30) em (3.2.32), obtemos  $\{f\}$ :

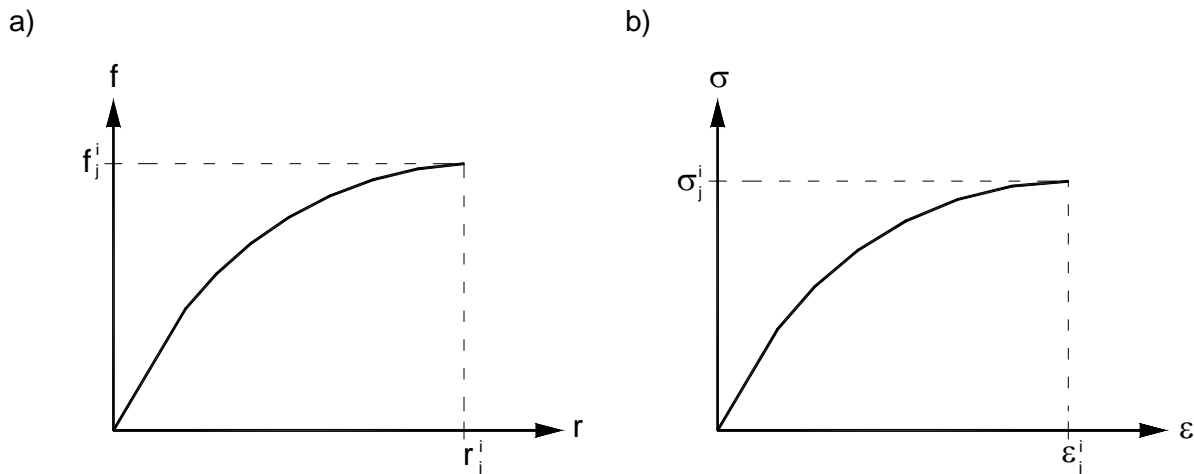
$$\{f\} = \int_V \{\sigma\}^t [B] dV$$

$$\{f\} = \{\sigma\}^t \int_V [B] dV \quad (3.2.33)$$

### 3.3 PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR

Em muitos casos, quando as condições de carregamento permitem e para simplificar processos de análises, é considerado que o comportamento da estrutura de concreto armado assume uma descrição física linear. Porém, na maioria dos casos, a estrutura exibe um comportamento de não linearidade física que não pode ser desprezado.

O problema não linear é solucionado numericamente através de um procedimento incremental-iterativo, onde, para cada incremento do carregamento aplicado, o equilíbrio da estrutura é verificado, a partir de ciclos de aproximações iterativas, até as equações de equilíbrio atingirem uma precisão satisfatória. A Figura 3.3.1 mostra as relações carregamento-deslocamento ( $f \times r$ ) da estrutura e tensão-deformação ( $\sigma \times \varepsilon$ ) do elemento, para o caso de tensão uniaxial.



**Figura 3.3.1-** a) Curva carregamento-deslocamento ( $f \times r$ ); b) Curva tensão-deformação ( $\sigma \times \varepsilon$ ).

Podemos ter três métodos para serem aplicados, separados ou combinados no procedimento incremental-iterativo, que são classificados como:

**método da rigidez inicial** (Figura 3.3.2): o módulo de elasticidade inicial ( $E_0$ ) é mantido para todos os incrementos, permanecendo sempre a mesma rigidez da estrutura para cada solução até a convergência do sistema;

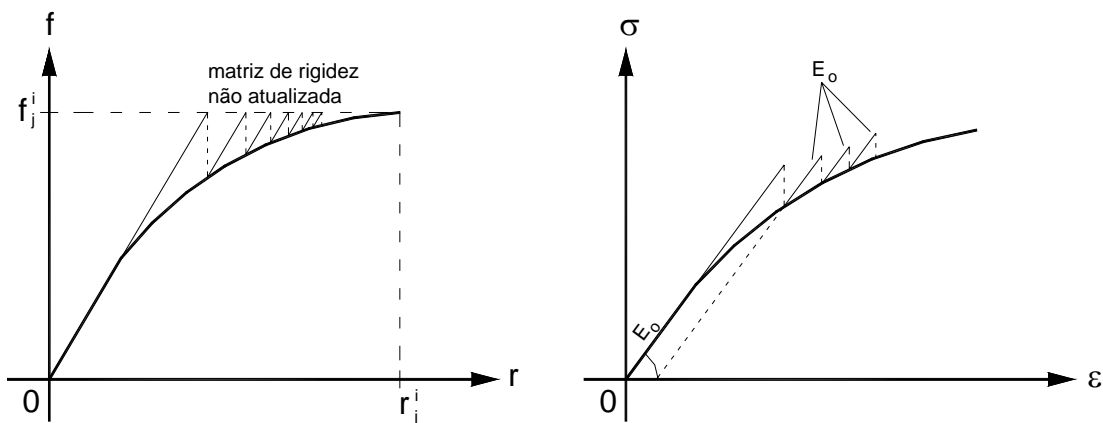


Figura 3.3.2- Método da rigidez inicial para análise não-linear.

**método da rigidez secante** (Figura 3.3.3): a rigidez da estrutura é atualizada para cada incremento a partir da atualização do módulo de elasticidade ( $E_s$ ) que é obtido pela reta secante ao ponto considerado na curva tensão-deformação, até a convergência do sistema;

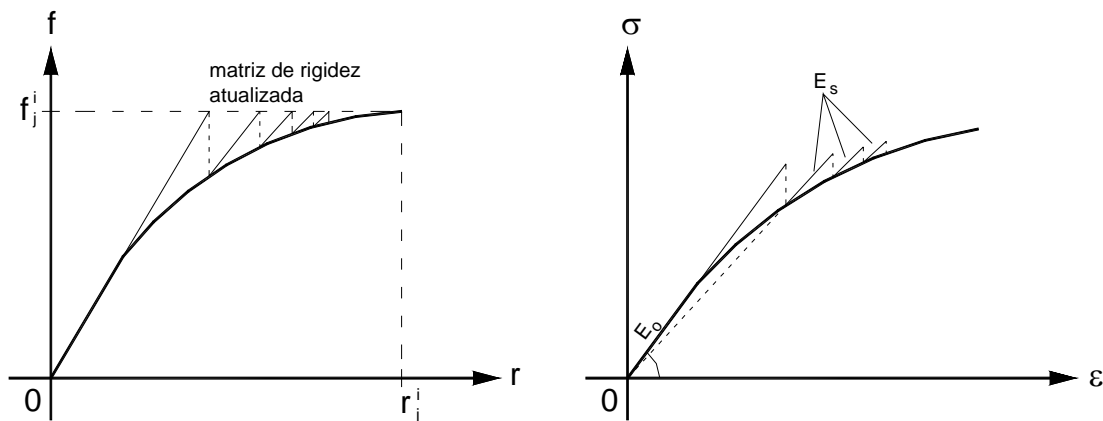
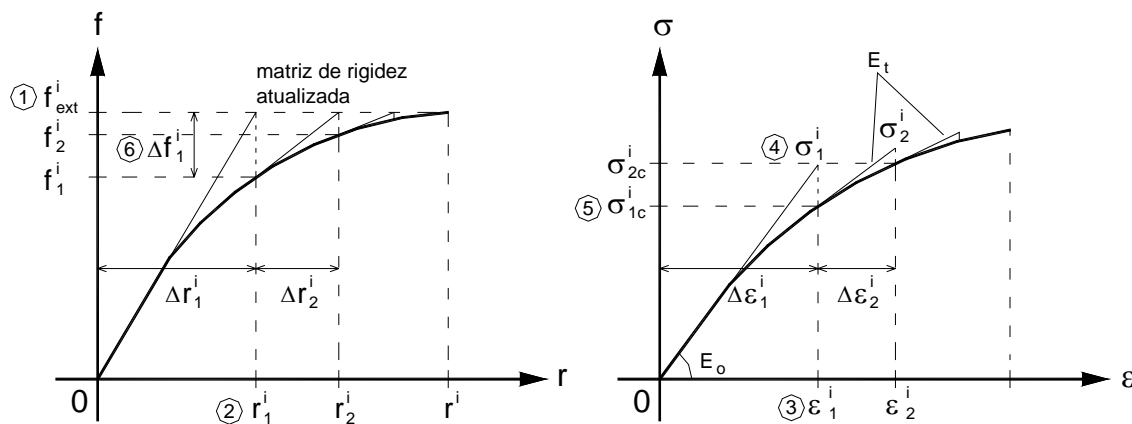


Figura 3.3.3- Método da rigidez secante para análise não-linear.

**método da rigidez tangente** (Figura 3.3.4): a rigidez da estrutura é atualizada para cada incremento a partir da atualização do módulo de elasticidade ( $E_t$ ) que é obtido pela reta tangente ao ponto considerado na curva tensão-deformação, até a convergência do sistema.



**Figura 3.3.4-** Método da rigidez tangente para análise não-linear.

Desses métodos, o método da rigidez tangente converge com mais rapidez satisfazendo as condições de equilíbrio e compatibilidade. Esse método será utilizado no presente trabalho.

A seguir serão descritos, de forma genérica (relação tensão x deformação unidimensional) para o método da rigidez tangente, os passos para o procedimento de um incremento  $i$  do carregamento externo ( $f_{\text{ext}}^i$ ) combinado com iterações de equilíbrio para traçar o comportamento não-linear da estrutura. O comportamento não-linear também pode ser analisado através da imposição de incrementos de deslocamentos.

1) É aplicado o carregamento total externo ( $f_{\text{ext}}^i$ ), com a rigidez inicial ( $k$ ) de cada elemento da estrutura sendo obtida a partir do módulo de elasticidade inicial ( $E_0$ ). Através da solução de equações de equilíbrio é obtido o deslocamento nodal ( $r_1^i$ ), assumindo-se um comportamento elástico linear;

2) Com o deslocamento nodal ( $r_1^i$ ) é obtida a deformação ( $\varepsilon_1^i$ ) e, considerando o módulo de elasticidade inicial ( $E_0$ ), obtém-se a tensão ( $\sigma_1^i$ ). A tensão real na curva ( $\sigma_{1c}^i$ ) é obtida substituindo a deformação ( $\varepsilon_1^i$ ) na expressão que traça o comportamento do material;

3) O carregamento desequilibrado ( $\Delta f_1^i$ ), que será reaplicado na estrutura, pode ser obtido de duas formas:

a- Calcula-se a diferença entre as tensões ( $\Delta\sigma_1^i$ ):

$$\Delta\sigma_1^i = \sigma_{1c}^i - \sigma_1^i \quad (3.3.1)$$

Substitui-se  $\Delta\sigma_1^i$  em (3.2.33) para se obter o carregamento desequilibrado:

$$\Delta f_1^i = (\Delta\sigma_1^i)^t \int_V B \, dV \quad (3.3.2)$$

b- Substitui-se  $\sigma_{1c}^i$  em (3.2.33) para se obter o carregamento ( $f_1^i$ ) que equilibra essa tensão:

$$f_1^i = (\sigma_{1c}^i)^t \int_V B \, dV \quad (3.3.3)$$

Calcula-se a diferença entre o carregamento de equilíbrio ( $f_1^i$ ) e o carregamento total externo ( $f_{\text{ext}}^i$ ) para se obter o carregamento desequilibrado:

$$\Delta f_1^i = f_1^i - f_{\text{ext}}^i \quad (3.3.4)$$

Esta segunda técnica será aplicada no desenvolvimento do trabalho, por apresentar menor acúmulo de erros numéricos, pois o equilíbrio é sempre verificado com o carregamento total externo ( $f_{\text{ext}}^i$ );

4) O carregamento desequilibrado ( $\Delta f_1^i$ ) é reaplicado na estrutura, onde a rigidez inicial ( $k$ ) de cada elemento da estrutura agora é obtida a partir do módulo de elasticidade tangente ( $E_t$ ), para o ponto da curva correspondente à deformação  $\varepsilon_1^i$ . Esses passos são repetidos até que o valor, para o carregamento desequilibrado, esteja dentro de um critério de convergência aceitável para finalizar o processo para o incremento  $i$  do carregamento externo.

### 3.4 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO COMUM

#### 3.4.1 GENERALIDADES

O concreto é um material heterogêneo que apresenta um comportamento muito complexo. A modelagem realística de suas propriedades torna-se muito difícil devido às diversas características e condições que devem ser consideradas para uma análise mais próxima da situação real. Assim, para simplificar a análise numérica, procura-se considerar as propriedades dominantes que mais representam o comportamento do material.

Na maioria das situações o modelo constitutivo para o concreto comum considera um comportamento não-linear na compressão uniaxial e um comportamento linear elasto-frágil na tração uniaxial. O desenvolvimento do modelo constitutivo ortotrópico para o concreto comum sob um estado biaxial de tensões, que teve as primeiras idealizações feitas por **LIU (1972)**, passa a considerar um comportamento mais complexo para a relação biaxial tensão-deformação, sob diferentes combinações de carregamento.

A relação tensão-deformação, para um estado biaxial de tensão, a partir da relação constitutiva incremental, nas direções ortotrópicas 1 e 2 do material ortotrópico, é apresentada a seguir:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -\nu_{12} E_2^{-1} & 0 \\ -\nu_{21} E_1^{-1} & E_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.4.1)$$

A condição de simetria é dada por:

$$\nu_{12} E_1 = \nu_{21} E_2 \quad (3.4.2)$$

Considerando a simetria, podemos reescrever (3.4.1), como:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{12}\nu_{21})G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.4.3)$$

Um modelo que representa bem o comportamento do concreto, sendo de fácil aplicação na análise numérica de estruturas de concreto armado, é o modelo ortotrópico proposto por **DARWIN (1974)**, denominado de modelo da *deformação uniaxial equivalente*. **GREUNEN (1979)** utilizou esse modelo para analisar painéis de concreto armado, obtendo excelentes resultados, e em seu trabalho é ressaltado que outros pesquisadores obtiveram melhores resultados com esse modelo, quando comparado com outros modelos, sem necessitar de um maior esforço computacional.



**CHAN (1982)** analisou cascas de concreto armado, através do método dos elementos finitos, onde a modelagem do concreto foi feita utilizando o modelo da deformação uniaxial equivalente, chegando a excelentes resultados. **SHAYANFAR (1995)** analisou os efeitos do tamanho do elemento finito na análise não-linear de estruturas de concreto, onde o modelo da deformação uniaxial equivalente foi utilizado para modelar o concreto, devido à facilidade de manuseio e os excelentes resultados conseguidos.

### 3.4.2 DEFORMAÇÃO UNIAXIAL EQUIVALENTE

O modelo ortotrópico incremental proposto por **DARWIN (1974)** analisa independentemente as duas direções principais do material, através da deformação em cada uma das direções, denominado de modelo da *deformação uniaxial equivalente*. Nesse modelo a curva tensão-deformação no estado biaxial é representada por duas curvas uniaxiais equivalentes tensão-deformação, sendo uma para cada eixo principal. Essa técnica consiste em remover o efeito de Poisson que aparece no comportamento biaxial do concreto.

Podemos reescrever (3.4.3), como:

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{12}\nu_{21})G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.4.4)$$

Onde as *deformações uniaxiais equivalentes*  $d\varepsilon_{1u}$  e  $d\varepsilon_{2u}$  são definidas como:

$$d\varepsilon_{1u} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} d\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}\sqrt{E_2}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})\sqrt{E_1}} d\varepsilon_2 \quad (3.4.5)$$

$$d\varepsilon_{2u} = \frac{\sqrt{\nu_{12}\nu_{21}}\sqrt{E_1}}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})\sqrt{E_2}} d\varepsilon_1 + \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} d\varepsilon_2 \quad (3.4.6)$$

De (3.4.1), temos:

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\sigma_1}{E_1} - \nu_{12} \frac{d\sigma_2}{E_2} \quad (3.4.7)$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{d\sigma_2}{E_2} - \nu_{21} \frac{d\sigma_1}{E_1} \quad (3.4.8)$$

em que,  $\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2$ .

Substituindo em (3.4.5) e (3.4.6), e rearranjando, temos:

$$d\varepsilon_{1u} = \frac{d\varepsilon_1}{1 - \nu_{12}\alpha n} \quad (3.4.9)$$

$$d\varepsilon_{2u} = \frac{d\varepsilon_2}{1 - \nu_{21}\alpha n} \quad (3.4.10)$$

onde,

$\alpha$  – relação das tensões principais  $(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \sigma_1 \geq \sigma_2)$ ;

$n$  – relação entre os módulos de elasticidades principais  $(\frac{E_1}{E_2})$ .

A introdução das deformações uniaxiais equivalentes,  $d\varepsilon_{1u}$  e  $d\varepsilon_{2u}$ , em (3.4.4), eliminou a dependência do módulo de elasticidade com o efeito de Poisson, na curva tensão-deformação.

A deformação uniaxial equivalente total ( $\varepsilon_{iu}$ ) para todos os incrementos é representada por:

$$\varepsilon_{iu} = \sum d\varepsilon_{iu} = \sum \frac{d\sigma_i}{E_i} \quad (3.4.11)$$

onde,

$d\sigma_i$  – tensão principal na direção  $i$  para o incremento correspondente.

Considerando a curva da Figura 3.4.2.1, apresentada a seguir, a deformação uniaxial equivalente, na direção principal  $i$ , para um certo incremento é dada por:

$$\Delta\varepsilon_{iu}^j = \frac{\bar{\sigma}_i^j - \bar{\sigma}_i^{j-1}}{E_i^{j-1}} \quad (3.4.12)$$

onde,

$\bar{\sigma}_i^j$  – tensão principal na direção  $i$  da iteração atual;

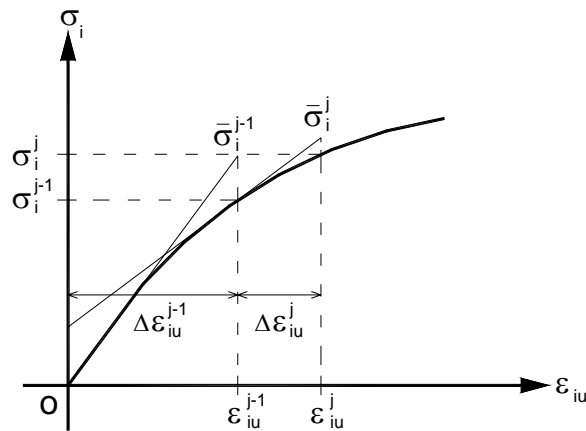
$\bar{\sigma}_i^{j-1}$  – tensão principal na direção  $i$  da iteração anterior;

$E_i^j$  – módulo de elasticidade tangente da iteração atual;

$E_i^{j-1}$  – módulo de elasticidade tangente da iteração anterior.

A deformação uniaxial equivalente total será:

$$\varepsilon_{iu}^j = \varepsilon_{iu}^{j-1} + \Delta\varepsilon_{iu}^j \quad (3.4.13)$$



**Figura 3.4.2.1-** Curva tensão-deformação uniaxial equivalente.

A seguir serão apresentadas as relações constitutivas para os diversos estágios do concreto submetido à compressão e à tração, a partir das curvas tensão-deformação, considerando o modelo da deformação uniaxial equivalente.

### 3.4.3 CURVAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO

#### 3.4.3.1 CONCRETO SUBMETIDO À COMPRESSÃO – TENSÃO ABAIXO DA MÁXIMA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO

A relação constitutiva para o concreto submetido à compressão, representado pela curva uniaxial tensão-deformação, que descreve o comportamento do material quando a tensão é menor ou igual à máxima resistência à compressão (tensão de esmagamento, *crushing*), a partir do conceito da deformação uniaxial equivalente (Figura 3.4.3.1) utilizada por **DARWIN (1974)**, é dada pela expressão proposta por **SAENZ (1964)**:

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon_{iu} E_o}{1 + \left( \frac{E_o}{E_s} - 2 \right) \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left( \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2}, \quad (\sigma_i \leq \sigma_{ic}) \quad (3.4.14)$$

onde,

$\sigma_i$  – tensão principal na direção  $i$ ;

$\varepsilon_{iu}$  – deformação uniaxial equivalente na direção da tensão principal  $i$ ;

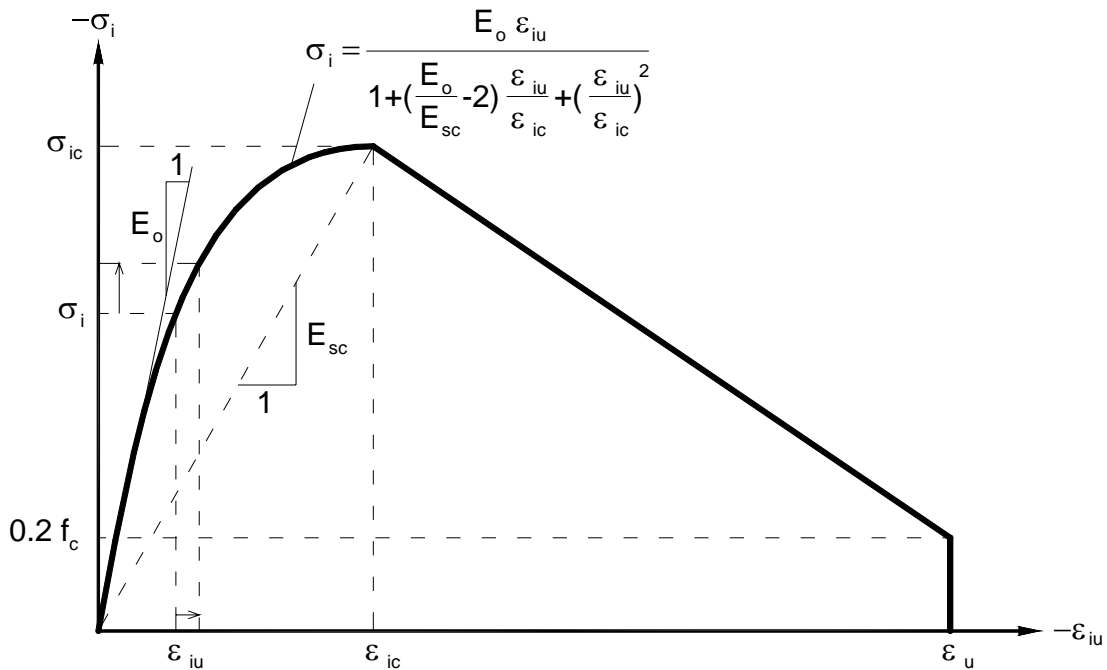
$\sigma_{ic}$  – máxima tensão de compressão na direção principal, obtida da curva envoltória biaxial;

$\varepsilon_{ic}$  – deformação correspondente a  $\sigma_{ic}$ ;

$E_o$  – módulo de elasticidade tangente inicial para tensão zero;

$E_s$  – módulo de elasticidade secante para a máxima tensão de compressão ( $\sigma_{ic}$ ):

$$E_s = \frac{\sigma_{ic}}{\varepsilon_{ic}} \quad (3.4.15)$$



**Figura 3.4.3.1-** Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto comprimido abaixo da máxima resistência à compressão (fonte: **DARWIN, 1974**).

Os módulos de elasticidades tangentes nas direções principais,  $E_1$  e  $E_2$ , são obtidos a partir da curva tensão-deformação, para cada incremento de carregamento, item 3.3, satisfazendo o comportamento não-linear.

$$E_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_{iu}} = \frac{E_o \left(1 - \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)}{\left[1 + \left(\frac{E_o}{E_s} - 2\right) \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^2\right]^2} \quad (3.4.16)$$

Neste estágio, em que a tensão de compressão ainda não ultrapassou a máxima resistência à compressão do concreto, e considerando também que o concreto ainda não começou a fissurar por tração devido à outra tensão principal, o sistema de

coordenadas locais referente aos eixos principais gira livremente. O ângulo ( $\theta$ ), entre o sistema de coordenadas locais e o sistema de coordenadas globais, dependerá do estado de tensões para cada iteração e incremento de cargas:

$$\theta = \theta_p \quad (3.4.17)$$

onde,

$\theta$  – ângulo formado entre o sistema local e o sistema global;

$\theta_p$  – ângulo entre o sistema de eixos principais e o sistema global.

### 3.4.3.2 CONCRETO SUBMETIDO À COMPRESSÃO – TENSÃO ACIMA DA MÁXIMA RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO

Quando a tensão de compressão atinge a máxima resistência à compressão (tensão de esmagamento), o concreto começa a escoar e a tensão passa a cair com o aumento da deformação. Uma fissura por esmagamento aparece no plano normal à direção da tensão principal que ultrapassou o limite de resistência do material, no ponto em consideração. Esse comportamento se dá pela perda da rigidez (amolecimento) resultante do esmagamento do concreto, causando um descarregamento até a deformação atingir uma deformação limite, a partir da qual é considerado que o concreto perdeu toda a sua capacidade de suporte.

A curva envoltória para o amolecimento do concreto comprimido, representado pela curva uniaxial tensão-deformação, quando a tensão é maior que a máxima resistência à compressão, a partir do conceito da deformação uniaxial equivalente (Figura 3.4.3.2), apresentada por **DARWIN (1974)**, é dada por:

$$\sigma_i = \sigma_{ic} + \left( \frac{0.2f_c - \sigma_{ic}}{\varepsilon_u - \varepsilon_{ic}} \right) (\varepsilon_{iu} - \varepsilon_{ic}), \quad (\varepsilon_i \geq \varepsilon_{ic}) \quad (3.4.18)$$

onde,

$\sigma_i$  – tensão principal na direção  $i$ ;

$\varepsilon_{iu}$  – deformação uniaxial equivalente na direção da tensão principal  $i$ ;

$\sigma_{ic}$  – máxima tensão de compressão na direção principal, obtida da curva envoltória biaxial;

$\varepsilon_{ic}$  – deformação correspondente a  $\sigma_{ic}$ ;

$\varepsilon_u$  – deformação limite;

$f_c$  – máxima resistência à compressão do concreto.

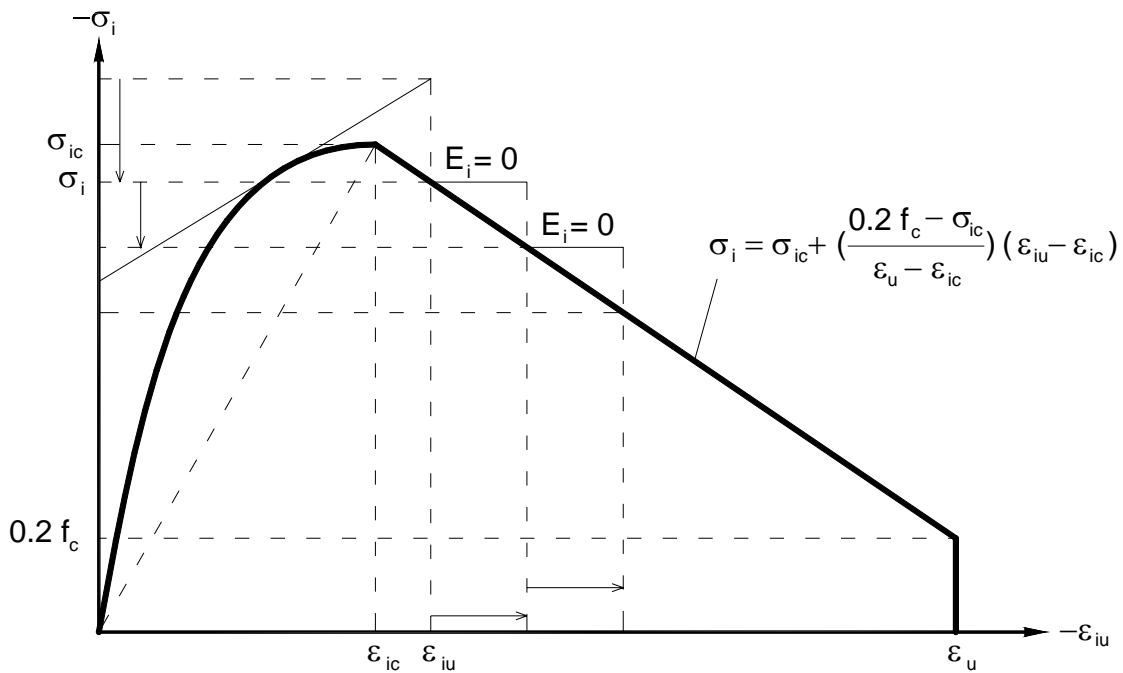
Com o escoamento do concreto a tensão cai com o aumento da deformação, levando a um módulo de elasticidade tangente negativo. Assim, para evitar dificuldades numéricas, o módulo de elasticidade tangente que era positivo, no passo anterior ao escoamento, agora é assumido ter valor nulo (3.4.19).

$$E_i = 0 \quad (3.4.19)$$

Temos, portanto, a relação constitutiva para o material comprimido após o início do esmagamento:

$$d\sigma = 0 \, d\varepsilon \quad (3.4.20)$$





**Figura 3.4.3.2-** Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto comprimido acima da máxima resistência à compressão (fonte: **DARWIN, 1974**).

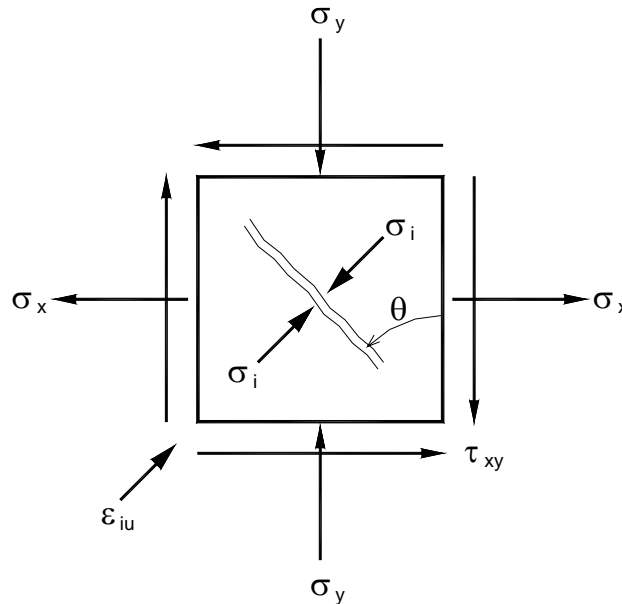
Após ser atingida a máxima resistência à compressão, dando início ao esmagamento do concreto, o sistema de coordenadas locais, referente aos eixos principais, torna-se fixo. O ângulo ( $\theta$ ) (Figura 3.4.3.3), entre o sistema de coordenadas locais e o sistema de coordenadas globais, assume o valor do ângulo ( $\theta_{p-1}$ ) entre o sistema de eixos principais e o sistema global referente ao estado de tensões que deu início ao escoamento do concreto.

$$\theta = \theta_{p-1} \quad (3.4.21)$$

onde,

$\theta$  – ângulo formado entre o sistema local e o sistema global;

$\theta_{p-1}$  – ângulo entre o sistema de eixos principais e o sistema global da iteração anterior.



**Figura 3.4.3.3-** Ângulo entre o sistema de coordenada local e o sistema de coordenada global para o concreto comprimido.

### 3.4.3.3 CONCRETO SUBMETIDO À TRAÇÃO – TENSÃO ABAIXO DA MÁXIMA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO

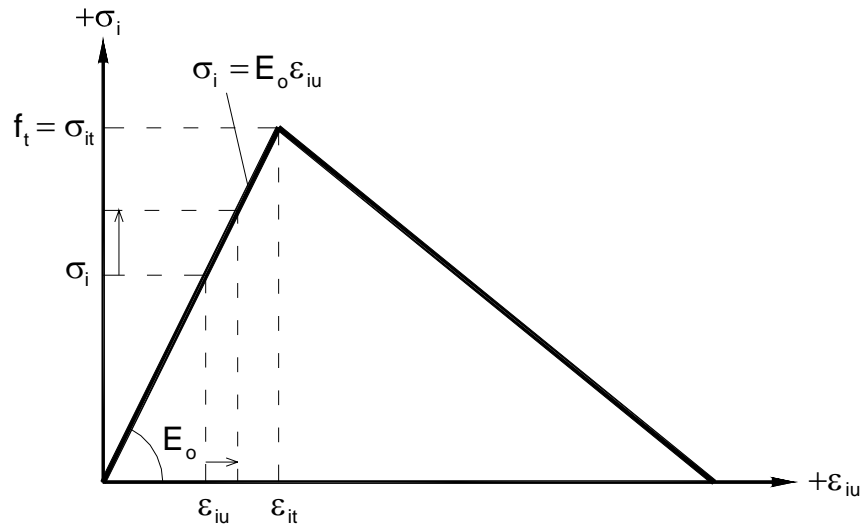
A resistência à tração do concreto é uma das propriedades mais importantes para a análise numérica não-linear de estruturas de concreto armado. A máxima resistência à tração corresponde a aproximadamente um décimo da resistência à compressão. O concreto tracionado se comporta como um material linear elasto-frágil, fissurando nas regiões em que a tensão de tração é superior à máxima resistência à tração do material.

Na região onde a tensão de tração ainda não ultrapassou a máxima resistência à tração do concreto, a curva tensão-deformação pode ser considerada linear (Figura 3.4.3.4).

$$\sigma_i = E_o \varepsilon_{iu}, \quad (\sigma_i \leq \sigma_{it}) \quad (3.4.22)$$

onde,

$\sigma_{it}$  – máxima resistência à tração do concreto na direção principal  $i$ .



**Figura 3.4.3.4-** Curva tensão x deformação uniaxial equivalente para o concreto tracionado abaixo da máxima resistência à tração.

O módulo de elasticidade tangente ( $E_i$ ) na direção principal  $i$  é constante, sendo considerado o módulo de elasticidade inicial, até ser atingida a máxima resistência à tração:

$$E_i = E_o \quad (3.4.23)$$

Neste estágio, em que a tensão de tração ainda não ultrapassou a máxima resistência à tração do concreto, e considerando também que o concreto ainda não começou a fissurar por compressão devido a outra tensão principal, o sistema de

coordenada local, referente aos eixos principais, rotaciona livremente. O ângulo ( $\theta$ ) entre o sistema de coordenada local e o sistema de coordenada global dependerá do estado de tensões para cada iteração e incremento de cargas.

$$\theta = \theta_p \quad (3.4.24)$$

onde,

$\theta$  – ângulo formado entre o sistema local e o sistema global;

$\theta_p$  – ângulo entre o sistema de eixos principais e o sistema global.

#### 3.4.3.4 CONCRETO SUBMETIDO À TRAÇÃO – TENSÃO ACIMA DA MÁXIMA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO

Quando a tensão de tração atinge a máxima resistência à tração (tensão de fissuração), o concreto começa a fissurar e a tensão cai rapidamente com o aumento da deformação. Uma fissura por tração aparece no plano normal à direção da tensão principal que ultrapassou o limite de resistência do material, no ponto em consideração. Esse comportamento se dá pela perda da rigidez (amolecimento) causando um descarregamento vertical, a partir do qual é considerado que o concreto perdeu toda a sua capacidade de suporte.

Em elementos de concreto armado, após o início da fissuração, o aço assume parte da transferência da tensão entre os planos da fissura, contribuindo na rigidez total do concreto. Assim, o concreto fissurado mantém certa rigidez entre os planos da fissura (*tension stiffening effect*), perdendo resistência gradualmente após a fissuração (**FIGUEIRAS, 1983**). A curva envoltória para o amolecimento do concreto tracionado, representado pela curva uniaxial tensão-deformação, quando a tensão é maior que a máxima resistência à tração, a partir do conceito da deformação uniaxial equivalente (Figura 3.4.3.5), apresentada por **DARWIN (1974)**, é dada por:

$$\sigma_i = \frac{1}{1-\beta} (E_o \varepsilon_{iu} - \beta f_t), \quad (\varepsilon_i \geq \varepsilon_{it}) \quad (3.4.25)$$

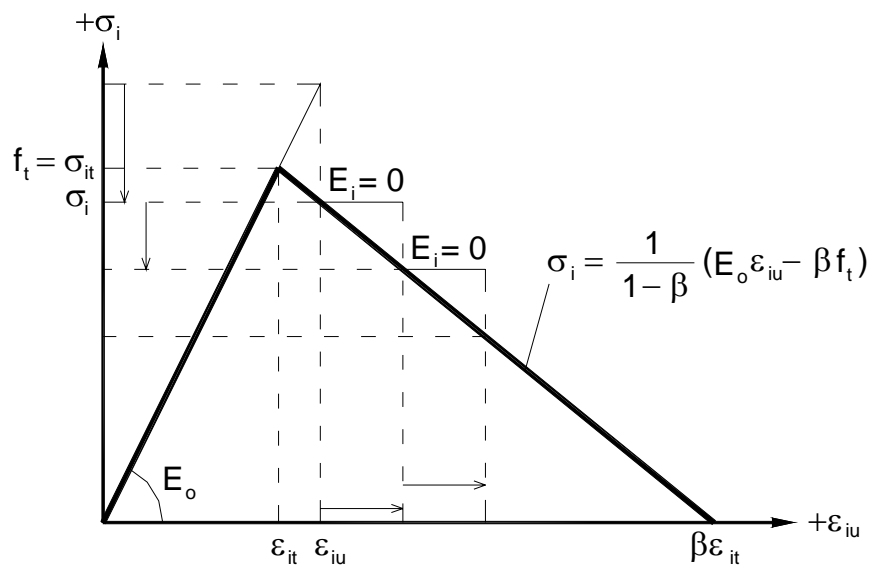
onde,

$\sigma_i$  – tensão principal na direção  $i$ ;

$\varepsilon_{iu}$  – deformação uniaxial equivalente na direção da tensão principal  $i$ ;

$\beta$  – constante limite para a máxima deformação;

$f_t$  – máxima resistência à tração do concreto.



**Figura 3.4.3.5-** Curva tensão x deformação uniaxial equivalente para o concreto tracionado acima da máxima resistência à tração.

Com a fissuração do concreto, a tensão cai com o aumento da deformação, levando a um módulo de elasticidade tangente negativo. Assim, para evitar dificuldades numéricas, o módulo de elasticidade tangente que era positivo, no passo anterior ao início do escoamento, agora é assumido ter valor nulo (3.4.26).

$$E_i = 0 \quad (3.4.26)$$

Temos, portanto, a relação constitutiva para o material tracionado após o início do escoamento:

$$d\sigma = 0 \, d\varepsilon \quad (3.4.27)$$

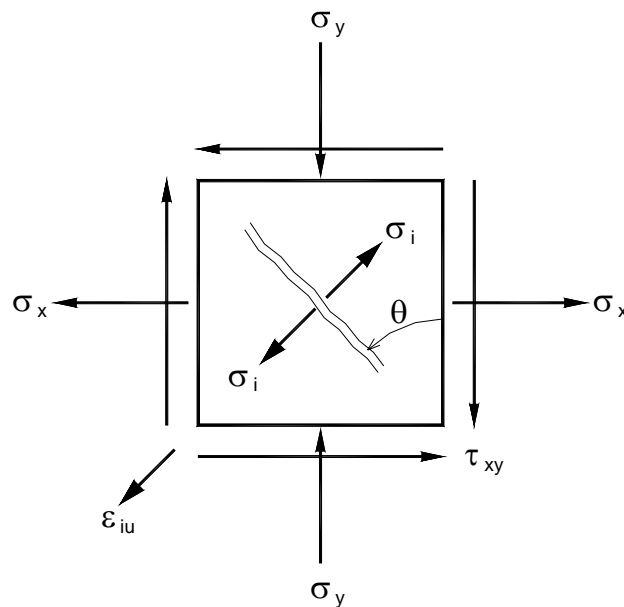
Após ser atingida a máxima resistência à tração, dando início ao escoamento do concreto, o sistema de coordenadas locais, referente aos eixos principais, torna-se fixo (*fixed angle crack model*), assumindo, assim, que a primeira fissura formada é a mais crítica, se comparado com o modelo que permite a rotação da fissura (*rotating angle crack model*). O ângulo ( $\theta$ ) (Figura 3.4.3.6), entre o sistema de coordenada local e o sistema de coordenada global, assume o valor do ângulo ( $\theta_{p-1}$ ) entre o sistema de eixos principais e o sistema global referente ao estado de tensões que deu início ao escoamento do concreto.

$$\theta = \theta_{p-1} \quad (3.4.28)$$

onde,

$\theta$  – ângulo formado entre o sistema local e o sistema global;

$\theta_{p-1}$  – ângulo entre o sistema de eixos principais e o sistema global da iteração anterior.



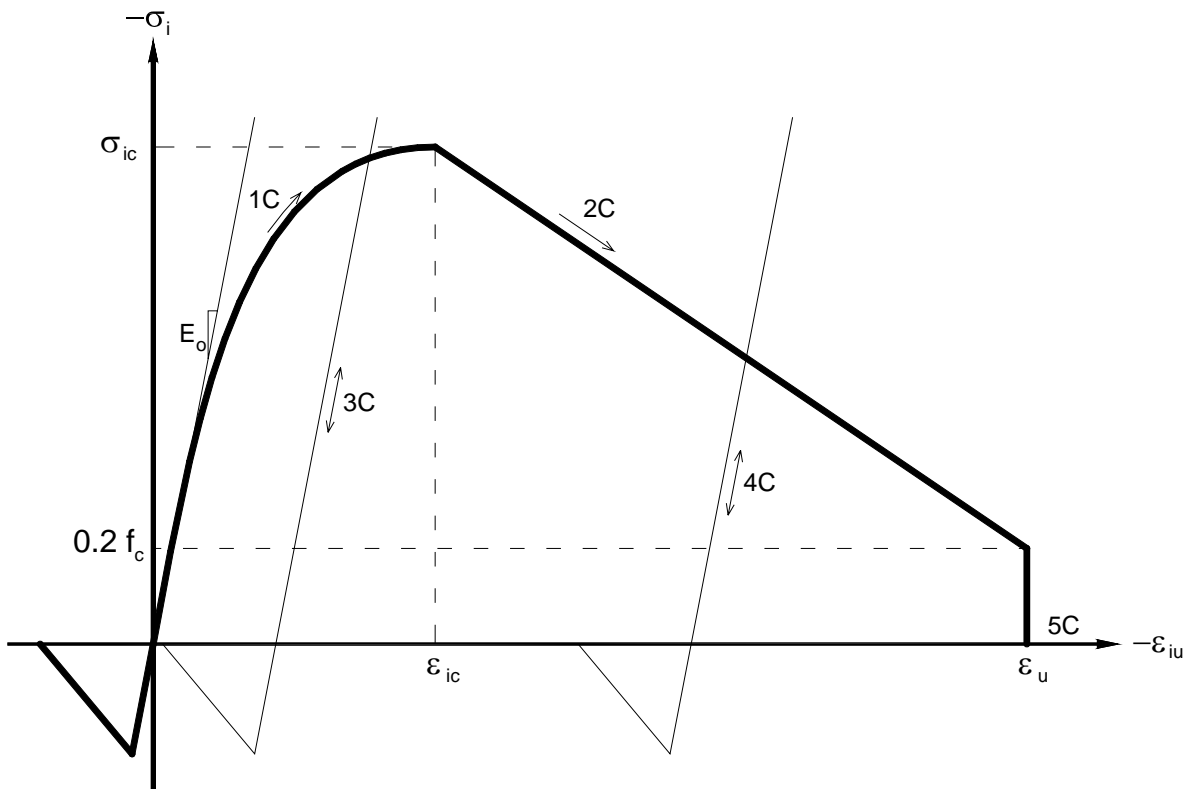
**Figura 3.4.3.6-** Ângulo entre o sistema de coordenada local e o sistema de coordenada global para o concreto tracionado.

### 3.4.4 CONDIÇÕES DE DESCARREGAMENTO E RECARREGAMENTO

O descarregamento ou tensão reversa do concreto é possível devido aos efeitos de deformação lenta (*creep*) e retração (*shrinkage*) do material e a história do carregamento, devendo, portanto, ser considerado. **DARWIN (1974)** incluiu em seu modelo curvas de carregamento, descarregamento e recarregamento para a análise de estruturas submetidas ao carregamento cíclico.

Um modelo simples para o descarregamento e o recarregamento da estrutura é adotado, baseado no modelo proposto por **GREUNEN (1979)**, não sendo considerado o carregamento cíclico.

A Figura 3.4.4.1, apresenta a curva para o descarregamento e o recarregamento, a qual acompanha o módulo de elasticidade inicial  $E_0$ , para o concreto submetido à compressão.



**Figura 3.4.4.1-** Condições de descarregamento e recarregamento para diferentes estados do concreto comprimido (fonte: **GREUNEN, 1979**).

A seguir serão descritos os diferentes estados para o carregamento, descarregamento e recarregamento para o concreto comprimido.

**1C** – Carregamento de compressão ao longo da curva até atingir a máxima resistência à compressão  $\sigma_{ic}$  (esmagamento). Nesse estágio o descarregamento e recarregamento se dão ao longo de **3C**;

**2C** – Redução da tensão após atingir a máxima resistência à compressão  $\sigma_{ic}$  (esmagamento). Caso ocorra descarregamento e recarregamento se darão ao longo de **4C**;

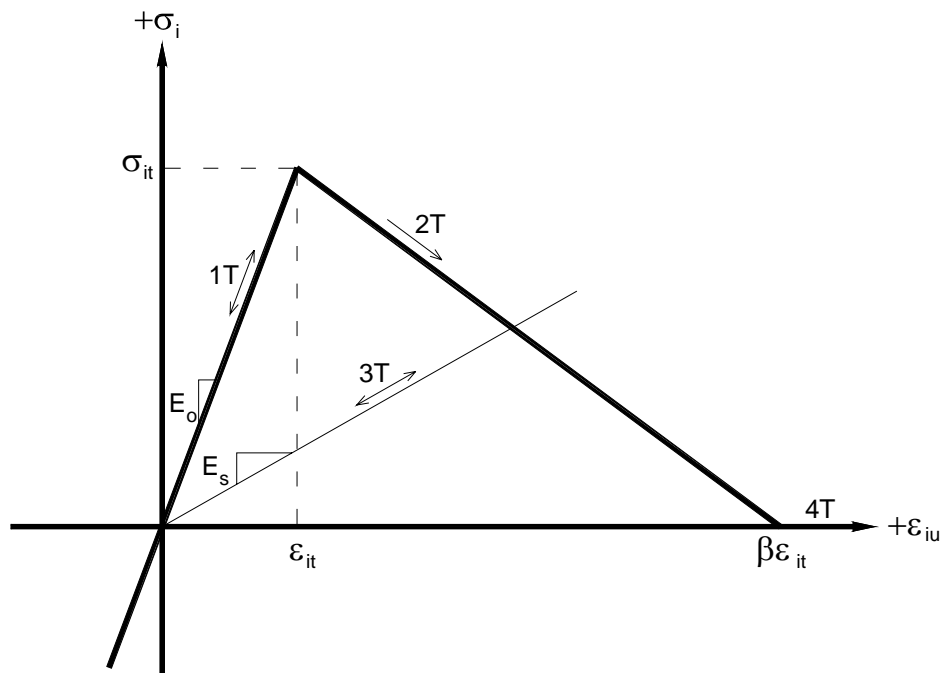


**3C** – Descarregamento ou recarregamento na compressão antes de atingir o esmagamento do concreto, assumindo o módulo de elasticidade inicial  $E_o$ . Nesse estágio a tensão pode passar da compressão para a tração;

**4C** – Descarregamento ou recarregamento na compressão após atingir o esmagamento do concreto, assumindo o módulo de elasticidade inicial  $E_o$ . Nesse estágio a tensão pode passar da compressão para a tração;

**5C** – O concreto perdeu toda a sua capacidade de suporte. Caso ocorra descarregamento ou recarregamento, se dará ao longo do eixo horizontal.

A curva para o descarregamento e o recarregamento acompanha o módulo de elasticidade tangente  $E_s$ , para o concreto submetido à tração (Figura 3.4.4.2).



**Figura 3.4.4.2-** Condições de descarregamento e recarregamento para diferentes estados do concreto tracionado.

A seguir serão descritos os diferentes estados para o carregamento, descarregamento e recarregamento para o concreto tracionado.

**1T** – Carregamento de tração ao longo da curva até atingir a máxima resistência à tração  $\sigma_{it}$  (escoamento). Nesse estágio o descarregamento e recarregamento se dão ao longo da própria curva **1T**, podendo passar da tração para a compressão;

**2T** – Redução da tensão após atingir a máxima resistência à tração  $\sigma_{it}$  (escoamento). Caso ocorra descarregamento ou recarregamento, se dará ao longo de **3T**;

**3T** – Descarregamento ou recarregamento na tração após atingir o escoamento do concreto, assumindo o módulo de elasticidade tangente  $E_s$ . Nesse estágio a tensão pode passar da tração para a compressão;

**4T** – O concreto perdeu toda a sua capacidade de suporte. Caso ocorra descarregamento ou recarregamento, se dará ao longo do eixo horizontal.

### 3.4.5 MODELAGEM DA FISSURAÇÃO DO CONCRETO

O comportamento das fissuras sob as condições do carregamento externo é uma combinação de dois componentes: determinação do início (formação) e método de representação.

A consideração do elemento de concreto fissurado, a partir da modelagem pelo método dos elementos finitos, pode ser baseada em diferentes modelos que vêm sendo desenvolvidos a partir da década de 60. A escolha do modelo depende do objetivo da análise a ser realizada. A fissura pode ser representada de duas formas básicas: fissuração discreta e fissuração distribuída.

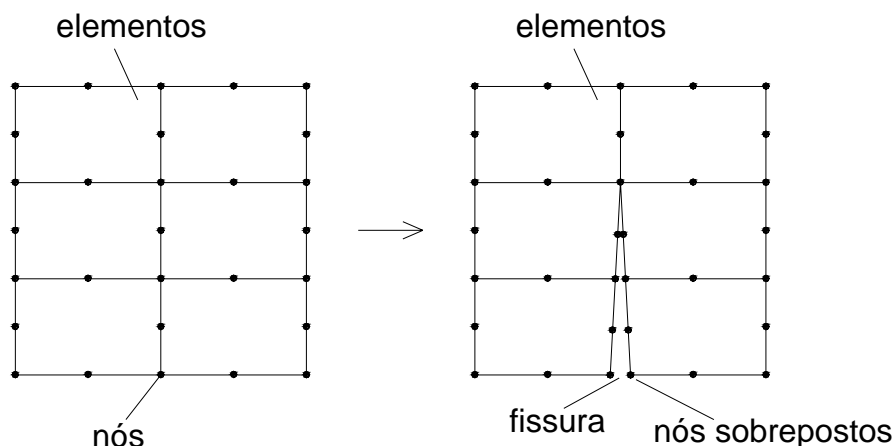
### 3.4.5.1 MODELO DE FISSURAÇÃO DISCRETA

A consideração da fissuração discreta em elementos de concreto armado, utilizando o método dos elementos finitos, se faz pela locação da fissura no elemento de concreto em regiões pré-determinadas. Essas fissuras, unidirecionais ou bidirecionais, seguem as faces dos elementos finitos, sendo impostas através de descontinuidades geométricas.

O primeiro modelo de fissuração discreta foi desenvolvido por **NGO (1967)**, que propôs um modelo elástico linear para a análise de vigas de concreto armado, com a forma das fissuras já definidas, impostas através da separação nodal dos elementos finitos, sendo atribuídos novos nós sobrepostos aos nós onde passarão as fissuras (Figura 3.4.5.1).

Normalmente esse modelo é utilizado quando se tem interesse no comportamento local de uma fissura dominante (**YAO, 1993**).

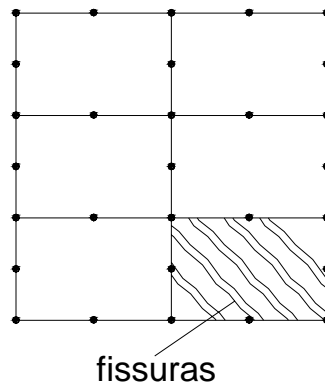
A dificuldade em se trabalhar com esse modelo se faz pelo fato que a localização e orientação da fissura, na maioria dos casos, não são conhecidas, sendo muito difícil local inicialmente uma fissura, de forma que seja a mais próxima da situação real. Outra dificuldade envolve a redefinição da topologia da estrutura conforme a fissura vai se propagando ao longo do processo de análise. A mudança da topologia da estrutura afeta toda a malha e a matriz de rigidez dos elementos finitos, aumentando o esforço computacional.



**Figura 3.4.5.1-** Esquema do modelo de fissuração discreta.

### 3.4.5.2 MODELO DE FISSURAÇÃO DISTRIBUÍDA

A consideração da fissuração distribuída (Figura 3.4.5.2), idealizada por **RASHID (1968)**, em elementos de concreto armado utilizando o método dos elementos finitos, não se faz de modo discreto através da descontinuidade do material. A fissura é considerada através da mudança das propriedades do material, representado pelos elementos finitos, conforme a fissura vai se propagando. Com isso, a topologia da estrutura permanece inalterada, não necessitando a geração da fissura através da redefinição da malha dos elementos finitos, e possibilitando que a fissura se propague para qualquer direção, sem grande esforço computacional. Neste trabalho é utilizado esse método para considerar a fissuração nos elementos de concreto.



**Figura 3.4.5.2-** Esquema do modelo de fissuração distribuída.

### 3.4.5.3 CRITÉRIOS DE FORMAÇÃO DAS FISSURAS

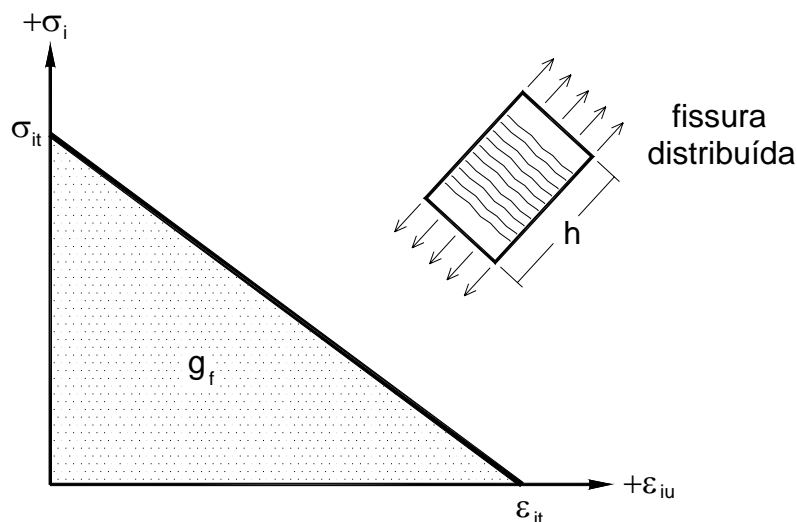
O surgimento da fissura ao longo do elemento de concreto deve respeitar alguns critérios relacionados com as propriedades do material. Assim, temos: *critério da resistência* e *critério da energia de fratura*.

O critério da resistência estabelece que quando a tensão principal excede a resistência do concreto, no caso resistência à tração, uma fissura aparece ao longo da direção perpendicular à tensão principal. A abertura ou fechamento da fissura obedece

à curva tensão-deformação (Figura 3.4.3.5). O resultado final da análise de uma estrutura utilizando esse método, acaba sendo influenciado pelas dimensões dos elementos finitos e pelo número de pontos de integração de Gauss, sendo necessária a simulação através de inúmeras malhas de elementos finitos para definir qual se aproxima mais da situação real.

O critério da energia de fratura também estabelece que quando a tensão principal excede a resistência do concreto, no caso resistência à tração, uma fissura aparece ao longo da direção perpendicular à tensão principal. Porém, a abertura ou fechamento da fissura obedece à energia de fratura do material. A seguir é demonstrada, de forma geral, a utilização da energia de fratura na curva tensão-deformação.

Vamos considerar um elemento finito com fissuras distribuídas ao longo de um comprimento  $h$  (comprimento equivalente) e a curva tensão-deformação após o início da fissuração (Figura 3.4.5.3) (ROTS, 1985):



**Figura 3.4.5.3-** Curva tensão-deformação para o elemento com fissuras distribuídas.

A área ( $g_f$ ) sob a curva é dada por:

$$g_f = \int \sigma_i d\varepsilon_{iu} \quad (3.4.29)$$

Agora, definido  $G_f$  como sendo a energia de fratura requerida para criar uma unidade de área de uma fissura contínua, que representa a área sob a curva tensão-abertura da fissura (Figura 3.4.5.4), temos:

$$G_f = \int \sigma_i dw \quad (3.4.30)$$

onde,  $w$  representa a soma das aberturas de todas as micro-fissuras dentro da zona de fratura  $h$ , podendo ser definida como:

$$w = \int_h \varepsilon_{iu} dn \quad (3.4.31)$$

sendo,  $n$  a direção perpendicular ao plano da deformação.

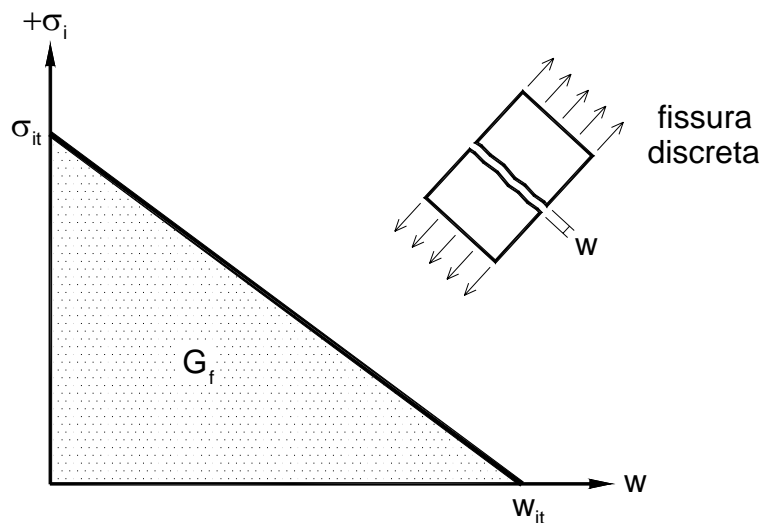


Figura 3.4.5.4- Curva tensão-abertura da fissura.

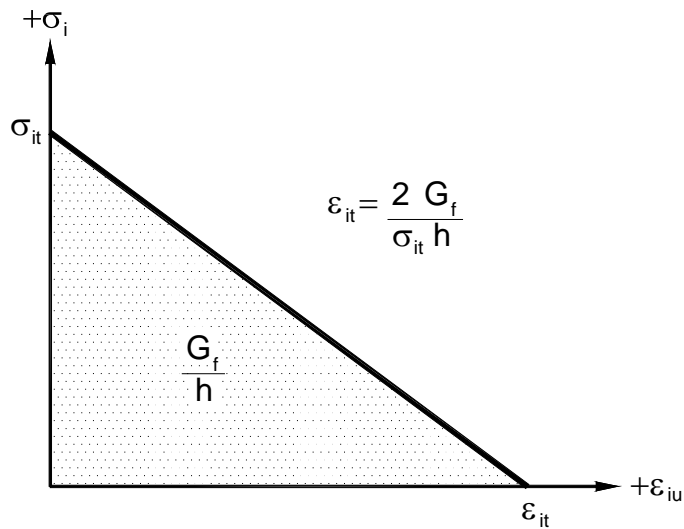
Considerando que as micro-fissuras são uniformemente distribuídas, temos:

$$w = h \varepsilon_{iu} \quad (3.4.32)$$

A partir de (3.4.29), (3.4.30) e (3.4.32) obtemos a relação entre  $g_f$  e  $G_f$ :

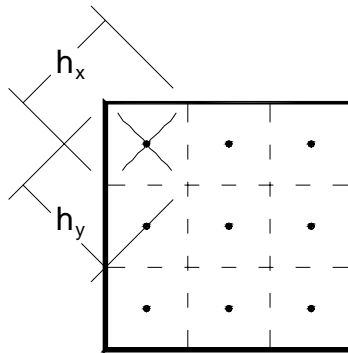
$$G_f = h g_f \quad (3.4.33)$$

Com isso, podemos definir uma nova curva tensão-deformação (Figura 3.4.5.5) que depende da energia de fratura  $G_f$  do material.



**Figura 3.4.5.5-** Curva tensão-deformação em função da energia de fratura.

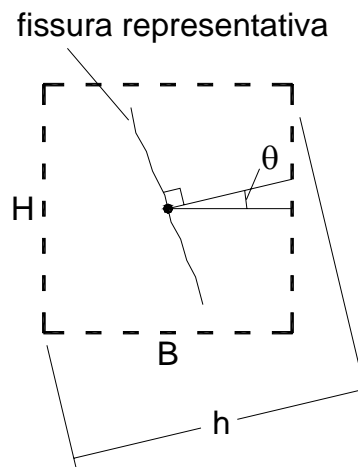
Utilizando o modelo de fissuração distribuída na análise pelo método dos elementos finitos e considerando que cada elemento finito retangular (Figura 3.2.2.1) tem nove pontos de integração de Gauss, temos que o comprimento equivalente ( $h$ ) corresponde ao comprimento de influência, de cada ponto de integração de Gauss, na direção perpendicular ao plano de propagação da fissura (Figura 3.4.5.6).



**Figura 3.4.5.6-** Comprimento equivalente de cada ponto de integração do elemento finito.

Esse comprimento equivalente é uma quantidade puramente geométrica, sendo determinado em função das dimensões e forma da região de influência de cada ponto de Gauss e do ângulo normal à propagação da fissura (Figura 3.4.5.7). Assim, temos:

$$h = B \cos\theta + H \sin\theta \quad (3.4.34)$$



**Figura 3.4.5.7-** Definição de Comprimento equivalente em função do ângulo de propagação da fissura.

Neste trabalho são implementados os dois critérios de formação das fissuras, sendo a escolha opcional no momento da análise numérica.



### 3.4.6 CURVAS PARA CARREGAMENTO MONOTÔNICO

A técnica da deformação uniaxial equivalente é utilizada para definir a curva tensão-deformação equivalente para o concreto, que é usada com o incremento linear, no desenvolvimento das relações constitutivas ortotrópicas do concreto plano sob carregamento monotônico.

O modelo numérico não-linear que utiliza a relação constitutiva para o concreto comprimido (equação 3.4.14) e a relação constitutiva para o concreto tracionado (equação 3.4.22), que representam as curvas tensão-deformação uniaxial equivalente (Figura 3.4.3.1) e (Figura 3.4.3.4), utilizadas por **DARWIN (1974)**, é dividido em quatro regiões definidas a partir da curva constitutiva do modelo biaxial do concreto (Figura 3.4.6.1), apresentada por **KUPFER (1969)**.

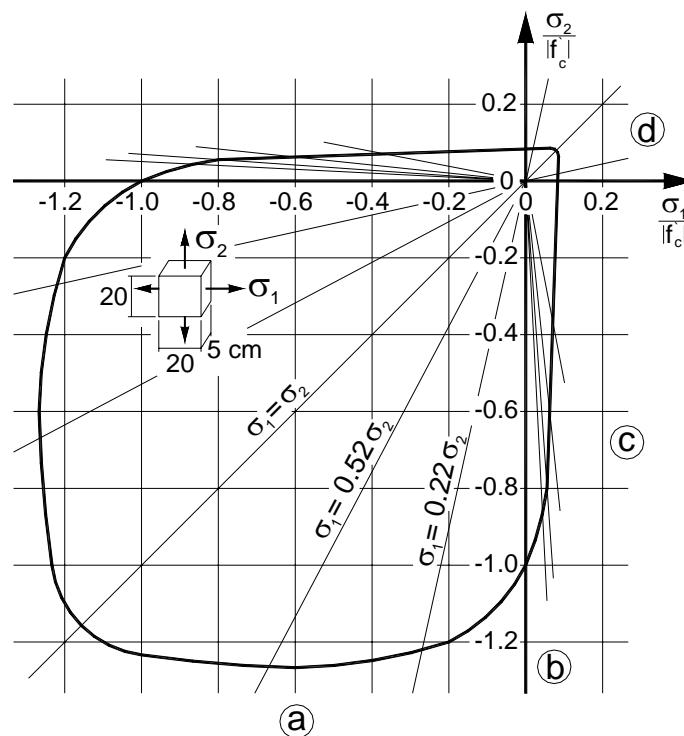


Figura 3.4.6.1- Curva envoltória da resistência biaxial do concreto (KUPFER, 1969).

As quatro regiões dependem do estado de tensão que é representado pela relação ( $\alpha$ ) entre a tensão principal na direção 1 e a tensão principal na direção 2. As tensões de compressão são sempre negativas e as tensões de tração são sempre positivas.

$$\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2) \quad (3.4.35)$$

A seguir são apresentadas as quatro regiões do modelo constitutivo utilizado com o conceito de deformação uniaxial equivalente.

a)  $\sigma_1$  (compressão) e  $\sigma_2$  (compressão),  $0 \leq \alpha \leq 1$

Para esta região, considera-se que a máxima tensão principal e a mínima tensão principal são de compressão.

$$\sigma_{2c} = \frac{1 + 3,65 \alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c \quad (3.4.36)$$

$$\sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c} \quad (3.4.37)$$

$$\varepsilon_{1c} = \varepsilon_c \left[ -1,6 p_1^3 + 2,25 p_1^2 + 0,35 p_1 \right] \quad (3.4.38)$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c \left[ 3 p_2 - 2 \right] \quad (3.4.39)$$

$$p_1 = \frac{\sigma_{1c}}{f_c}, \quad p_2 = \frac{\sigma_{2c}}{f_c} \quad (3.4.40)$$

As equações (3.4.36) e (3.4.37) são baseadas na curva envoltória da resistência biaxial de **KUPFER (1973)**, enquanto as equações (3.4.38) e (3.4.39) foram propostas por **DARWIN (1974)** baseadas em observações experimentais.

b)  $\sigma_1$  (tração) e  $\sigma_2$  (compressão),  $-0,17 \leq \alpha \leq 0$

Para esta região considera-se que a máxima tensão principal é de tração e a mínima tensão principal é de compressão. Se a tensão de tração for superior à resistência de tração do concreto, então se passa a considerar a fissuração com a perda progressiva da resistência do concreto até a fissuração total, onde a rigidez é considerada nula nessa direção.

$$\sigma_{2c} = \frac{1 + 3,28 \alpha}{(1 + \alpha)^2} f_c \quad (3.4.41)$$

$$\sigma_{1t} = \alpha \sigma_{2c} \quad (3.4.42)$$

$$\varepsilon_{1t} = \frac{\sigma_{1t}}{E_o} \quad (3.4.43)$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c \left[ -2,58 p_2^3 + 7,54 p_2^2 - 8,38 p_2 + 4,42 \right] \quad (3.4.44)$$

$$p_2 = \frac{\sigma_{2c}}{f_c} \quad (3.4.45)$$

As equações (3.4.41) e (3.4.42) foram sugeridas por **DARWIN (1974)**, enquanto as equações (3.4.43) e (3.4.44) foram propostas por **RAJAGOPAL (1976)**.

c)  $\sigma_1$  (tração) e  $\sigma_2$  (compressão),  $-\infty \leq \alpha \leq -0,17$

Para esta região, considera-se que a máxima tensão principal é de tração e a mínima tensão principal é de compressão, como no caso anterior.

$$\sigma_{2c} = 0,65 f_c \quad (3.4.46)$$

$$\sigma_{1t} = f_t \quad (3.4.47)$$

$$\varepsilon_{1t} = \frac{\sigma_{1t}}{E_o} \quad (3.4.48)$$

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_c \left[ -2,58 p_2^3 + 7,54 p_2^2 - 8,38 p_2 + 4,42 \right] \quad (3.4.49)$$

$$p_2 = \frac{\sigma_{2c}}{f_c} \quad (3.4.50)$$

**d)**  $\sigma_1$  (tração) e  $\sigma_2$  (tração),  $1 \leq \alpha \leq \infty$

Para esta região, considera-se que a máxima tensão principal e a mínima tensão principal são de tração.

$$\sigma_{1t} = \sigma_{2t} = f_t \quad (3.4.51)$$

$$\varepsilon_{1t} = \varepsilon_{2t} = \frac{f_t}{E_o} \quad (3.4.52)$$

### 3.5 MODELO CONSTITUTIVO PARA A ARMADURA DE AÇO

#### 3.5.1 A MODELAGEM DA ARMADURA

Podemos representar a armadura de aço, das estruturas de concreto armado, de três formas diferentes (A. S. C. E., 1982):

**Representação Distribuída:** A armadura de aço é distribuída no elemento finito de concreto, sendo usada uma relação constitutiva que combina as características da armadura de aço e do concreto. Para este caso é assumida uma perfeita aderência entre os dois materiais e o aço assume uma orientação particular conforme a Figura 3.5.1.1.

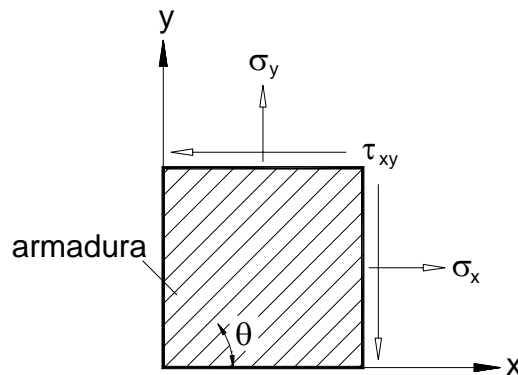
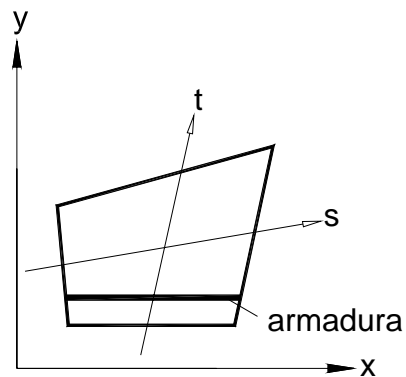


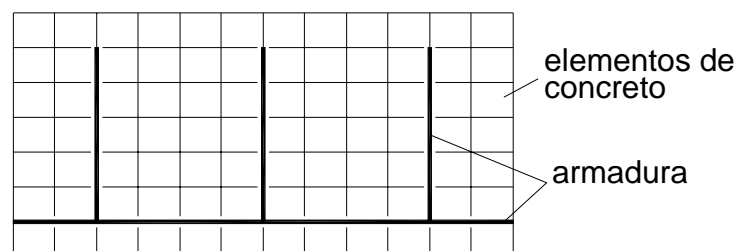
Figura 3.5.1.1- Representação distribuída da armadura.

**Representação Embutida:** Esta representação é utilizada considerando a armadura de aço como elemento axial ligado diretamente ao elemento finito de concreto, tal que os deslocamentos da armadura são consistentes com os dos elementos, assumindo perfeita aderência entre os dois materiais (Figura 3.5.1.2).



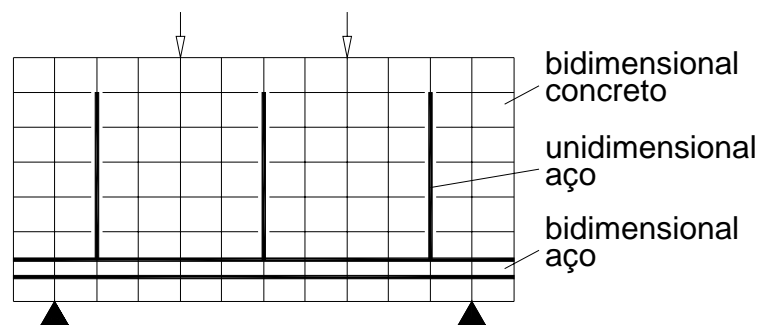
**Figura 3.5.1.2-** Representação embutida da armadura.

**Representação Discreta:** Nesta representação, a armadura (Figura 3.5.1.3) pode ser considerada como sendo composta por elementos unidimensionais, devido às próprias características de barra da armadura, tendo dois graus de liberdade por nó, ou, também, como elementos de viga, assumindo capacidade de resistir aos esforços axiais, cortantes e também momentos, podendo ter três graus de liberdade por nó. A vantagem desse tipo de representação é que se pode considerar os deslocamentos relativos entre a armadura e o concreto, através da sobreposição de nós dos elementos do aço e do concreto, sendo conectados por elementos finitos especiais na interface.



**Figura 3.5.1.3-** Representação discreta da armadura.

Para a modelagem de uma mesma estrutura de concreto armado podemos combinar a representação das armaduras de aço com elementos unidimensionais e elementos bidimensionais, sobrepondo-os em uma malha bidimensional de elementos finitos (Figura 3.5.1.4), onde os elementos bidimensionais representam a armadura principal e os elementos unidimensionais representam os estribos. O mesmo elemento finito que é utilizado para representar o concreto pode ser utilizado para representar o aço, com as devidas características a serem assumidas na modelagem.

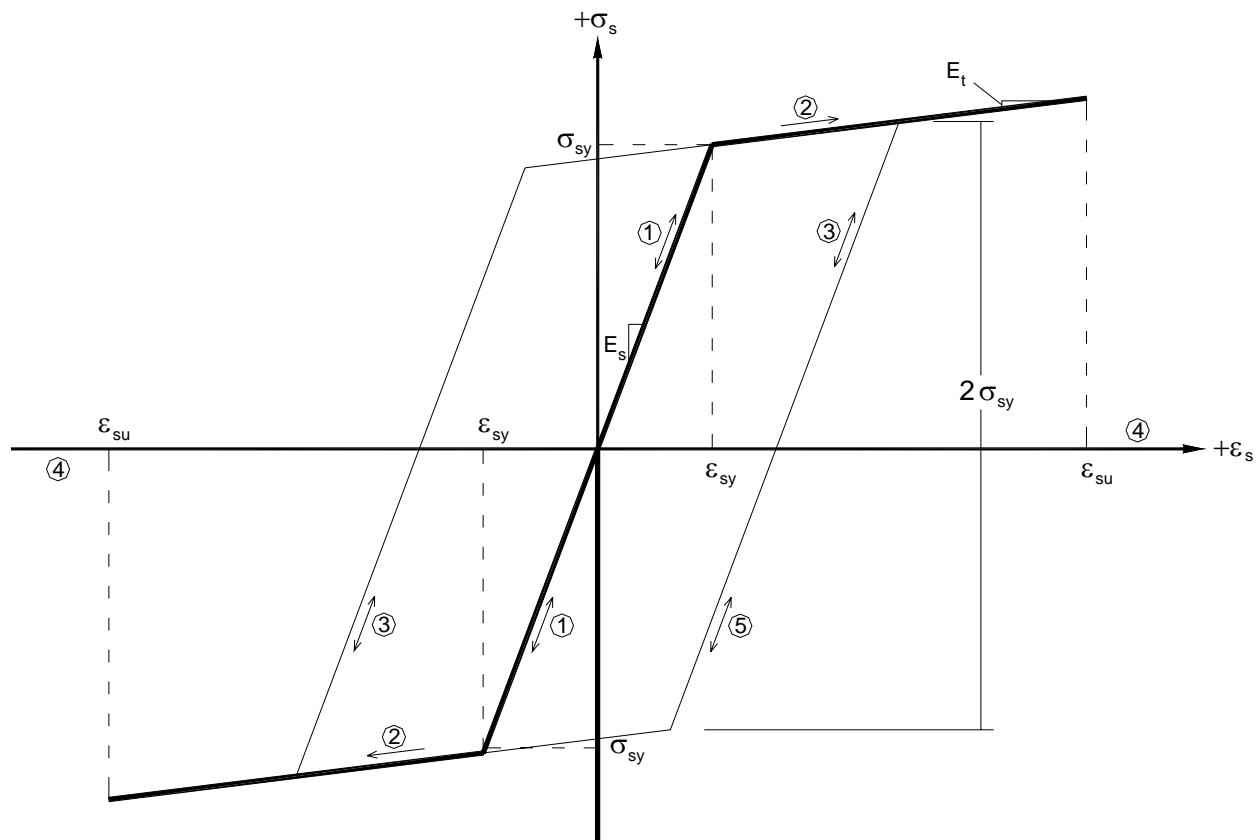


**Figura 3.5.1.4-** Elementos de representação da armadura.

### 3.5.2 O COMPORTAMENTO DO AÇO

A representação do aço é feita utilizando o elemento finito bilinear LSR (**ASSAN, 1999**). A armadura de aço exibe um comportamento elasto-plástico perfeito junto com o efeito Bauschinger (Figura 3.5.2.1).

A caracterização do comportamento elasto-plástico do material se dá por uma resposta inicial elástica, até um certo nível de tensão onde, após ter sido alcançado esse nível, uma deformação plástica se desenvolve. O início da deformação plástica (ou escoamento) é governado por um critério de escoamento a partir do qual ocorre uma intensa redução da rigidez do material (**OWEN, 1980**).



**Figura 3.5.2.1-** Comportamento do elemento de aço na compressão e na tração.

O aço pode apresentar vários estados ao longo da análise da estrutura.

**1** – O material se deforma com módulo de elasticidade inicial  $E_s$ , na tração ou na compressão, até o nível de tensão alcançar um valor  $\sigma_{sy}$  (tensão de escoamento). O descarregamento ou recarregamento se dá ao longo da mesma curva, podendo mudar de sentido, compressão ou tração;

**2** – Com o aumento do carregamento, ocorre uma redução da rigidez do material exibindo um novo comportamento linear com módulo de elasticidade  $E_t$ . O descarregamento ou recarregamento agora se faz por uma curva linear com o mesmo módulo de elasticidade inicial  $E_s$ ;



- 3 – O descarregamento ocorre podendo passar para a curva 5, mudando o sentido da tensão;
- 4 – Quando a deformação no aço ultrapassa uma deformação limite  $\varepsilon_{su}$ , é assumido que o material falhou perdendo toda a sua capacidade resistente;
- 5 – Ocorre uma mudança no sentido da tensão, podendo voltar ao sentido anterior, ou partir para a nova curva 1. Considerando o efeito Bauschinger a tensão de escoamento diminui. O módulo da diferença entre a tensão antes do descarregamento, curva 3, e a nova tensão de escoamento para a curva 5, corresponde a  $2 \sigma_{sy}$ .

### 3.6 RELAÇÕES ENTRE A TENSÃO DE ADERÊNCIA E O DESLIZAMENTO

A complexidade do fenômeno da aderência entre a armadura de aço e o concreto leva a realização de numerosas investigações práticas na busca de uma lei que exprima a evolução da tensão de aderência ( $\tau$ ) em função do deslizamento (S).

Um caminho para estudar essa evolução é exprimir, a partir de ensaios de arrancamento ou de tirante (tração simétrica), o esforço total aplicado na barra em relação ao deslizamento medido a partir de uma face da amostra. Na modelagem em elementos finitos é necessário desenvolver uma relação entre a tensão de aderência local e o deslizamento local ao longo da interface entre os dois materiais.

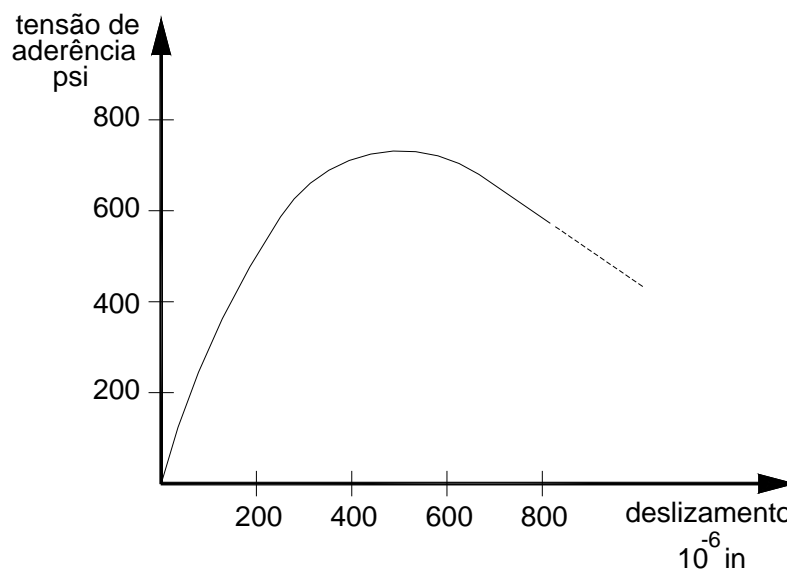
A tensão de aderência local pode ser calculada a partir da variação da tensão do aço ao longo da barra através da deformação específica. Extensômetros elétricos são colocados em um centro oco da barra serrada longitudinalmente, sendo reconstruída por solda, posteriormente. Assim, a tensão de aderência local é calculada como a variação da tensão axial na barra por unidade de comprimento, dividida pelo perímetro da barra.

O deslizamento local pode ser determinado em posições específicas ao longo da interface, sendo baseado na diferença entre o deslocamento do aço e do concreto em cada posição. O deslocamento do aço é encontrado por integração numérica de suas deformações específicas, lidas pelos extensômetros internos. O deslocamento do concreto é determinado a partir de medidores especiais de deformação específica de resistência elétrica, embutidos a uma pequena distância da interface entre o aço e o concreto, espaçados ao longo da interface.

Os resultados obtidos por **BRESLER (1968)**, em suas investigações experimentais sobre as deformações do aço e do concreto, foram utilizados por **NILSON (1968)** na formulação de uma lei teórica correlacionando a tensão de aderência e o deslizamento, chegando a um polinômio de terceiro grau (Figura 3.6.1):

$$\tau_{(x)} = 3606 \cdot 10^3 S_{(x)} - 5356 \cdot 10^6 S_{(x)}^2 + 1986 \cdot 10^9 S_{(x)}^3 \quad (3.6.1)$$

onde a tensão de aderência é dada em libra por polegada quadrada (*psi*) e o deslizamento em polegada (*in*).

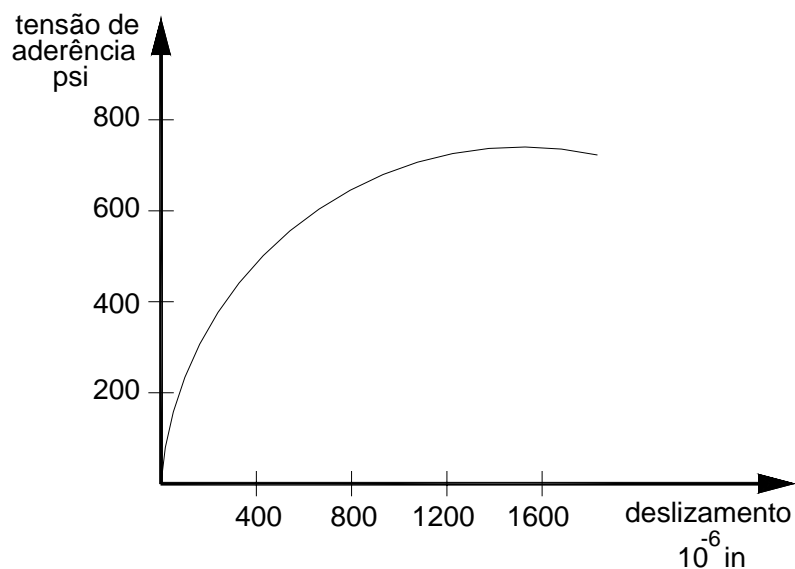


**Figura 3.6.1-** Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: **NILSON, 1968**).

Em **MIRZA (1979)** é apresentado um polinômio de quarta ordem, como segue abaixo, baseado nos resultados experimentais de amostras de concreto armado, onde se incluem, nos ensaios, variações nos níveis de carregamento, na espessura de cobrimento do concreto e na resistência de compressão do concreto (Figura 3.6.2):

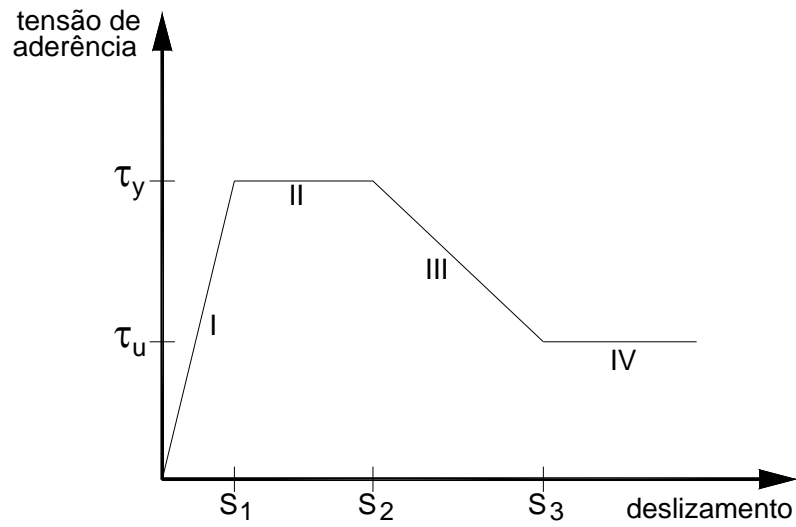
$$\tau_{(x)} = 1.95 \cdot 10^6 S_{(x)} - 2.35 \cdot 10^9 S_{(x)}^2 + 1.39 \cdot 10^{12} S_{(x)}^3 - 0.33 \cdot 10^{15} S_{(x)}^4 \quad (3.6.2)$$

onde a tensão de aderência é dada em libra por polegada quadrada (*psi*) e o deslizamento em polegada (*in*).



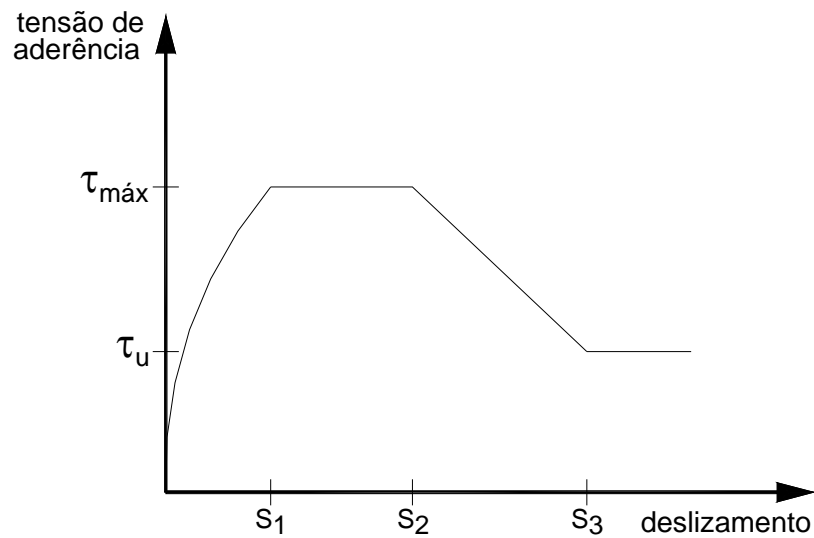
**Figura 3.6.2-** Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: **MIRZA, 1979**).

A Figura 3.6.3 mostra a curva apresentada por **YANKELEVSKY (1985)** representada por quatro estágios. O estágio I refere-se ao contato inicial entre o aço e o concreto mantido pela adesão até iniciar a perda da aderência, onde ela passa a ser, principalmente, governada pelo apoio das saliências da barra no concreto (estágio II). No estágio III a tensão de aderência se reduz, onde o mecanismo de transferência da tensão é dado também pela fricção. No estágio IV a aderência se dá pela fricção. Os limites para cada situação (estágio) são obtidos a partir de ensaios práticos.



**Figura 3.6.3-** Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: **YANKOLEVSKY, 1985**).

No modelo de curva proposto pelo **CEB (1990)** (Figura 3.6.4), a relação entre a tensão de aderência ( $\tau$ ) e o deslizamento ( $s$ ) é representada em quatro estágios.



**Figura 3.6.4-** Curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: **CEB, 1990**).

O cálculo da tensão de aderência é dado por:

$$\tau = \tau_{\text{máx}} \left( \frac{s}{s_1} \right)^{\alpha'}, \quad \text{para } 0 \leq s \leq s_1$$

$$\tau = \tau_{\text{máx}}, \quad \text{para } s_1 < s \leq s_2$$

$$\tau = \tau_{\text{máx}} - (\tau_{\text{máx}} - \tau_u) \left( \frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \right)^{\alpha'}, \quad \text{para } s_2 < s \leq s_3$$

$$\tau = \tau_u, \quad \text{para } s_3 < s$$

A Tabela 3.6.1 apresenta os parâmetros para definir a relação tensão de aderência x deslizamento para barra nervurada.

**Tabela 3.6.1-** Parâmetros para a curva tensão de aderência x deslizamento (fonte: **CEB, 1990**).

	Condições de aderência		Condições de aderência	
	Boas	Demais casos	Boas	Demais casos
<b>S<sub>1</sub></b>	0,6 mm	0,6 mm	1,0 mm	
<b>S<sub>2</sub></b>	0,6 mm	0,6 mm	3,0 mm	
<b>S<sub>3</sub></b>	1,0 mm	2,5 mm	espaçamento entre nervuras	
<b>α'</b>	0,4		0,4	
<b>τ<sub>máx</sub></b>	2,0 f <sub>ck</sub> <sup>1/2</sup>	1,0 f <sub>ck</sub> <sup>1/2</sup>	2,5 f <sub>ck</sub> <sup>1/2</sup>	1,25 f <sub>ck</sub> <sup>1/2</sup>
<b>τ<sub>u</sub></b>	0,15 τ <sub>máx</sub>		0,40 τ <sub>máx</sub>	

\* Ruptura por fendilhamento do concreto

\*\* Ruptura por arrancamento da barra

Em **TASSIOS (1981)** e **SOMAYAJI (1981)** podem ser encontradas outras curvas referentes às formulações das relações entre a tensão de aderência e o deslizamento.

Entre as inúmeras leis que exprimem a dependência da tensão de aderência pelo deslizamento, podemos classificar os tipos de curvas, quanto à forma geométrica, existentes na literatura em:

**Poligonal:** representadas por segmentos de retas caracterizando os estágios da relação tensão de aderência x deslizamento, ex: **YANKELEVSKY (1985)**;

**Polinomial:** representadas por um polinômio definido pelo grau de interpolação dos resultados obtidos nos ensaios, ex: **NILSON (1968)**, **MIRZA (1979)**;

**Exponencial:** representadas pela variação da tensão de aderência em função exponencial do deslizamento ao longo da barra, ex: **SOMAYAJI (1981)**;

**Mista:** combinação das outras formas apresentadas, ex: **CEB (1990)**.

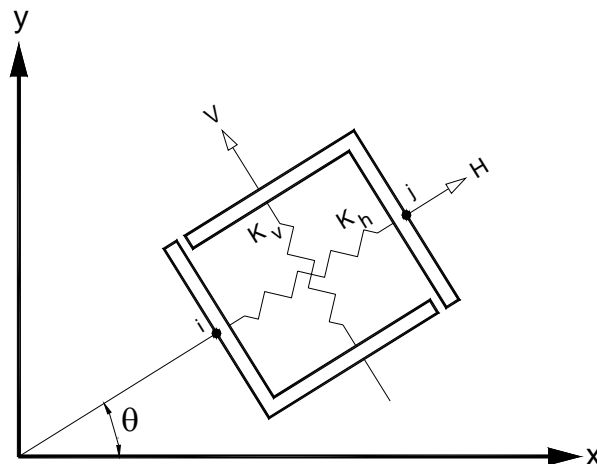
O tipo de curva utilizada na representação do modelo da aderência, na análise de estruturas de concreto armado, utilizando a representação discreta da armadura através da modelagem numérica pelo método dos elementos finitos, poderá influenciar a rigidez da interface entre o aço e o concreto. A relação apresentada pelo **CEB (1990)** possibilita um ajuste dos parâmetros da curva tensão de aderência x deslizamento com os dados e características da estrutura a ser analisada, através de tabelas, o que não ocorre com as curvas de **NILSON (1968)** e **MIRZA (1979)** que têm os parâmetros fixos pelos polinômios. Neste trabalho são utilizadas as curvas apresentadas por **NILSON (1968)**, por **MIRZA (1979)**, por **YANKELEVSKY (1985)** e pelo **CEB (1990)**.

### 3.7 MODELAGEM DA ADERÊNCIA ENTRE O AÇO E O CONCRETO

A modelagem da aderência, entre a armadura de aço e o concreto, é feita utilizando o método dos elementos finitos. A seguir, serão apresentados os dois principais elementos para a modelagem da aderência: o elemento de ligação e o elemento de interface.

#### 3.7.1 MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO ELEMENTO DE LIGAÇÃO PROPOSTO POR NGO (1967)

O elemento finito proposto por **NGO (1967)** (Figura 3.7.1.1), chamado de elemento de ligação, é constituído de duas “molas” perpendiculares, que representam as rigidezes de interface, conectando os nós  $i$  e  $j$ .



**Figura 3.7.1.1-** Elemento de ligação (fonte: **NGO, 1967**).

Esse elemento é composto por nós duplos, onde somente as suas propriedades mecânicas são importantes, podendo ser orientado por um ângulo arbitrário  $\theta$  com o eixo horizontal ao que se pretende trabalhar. A utilização desse elemento na modelagem não interfere na geometria da estrutura por não ter dimensões físicas.

O elemento de ligação pode ser utilizado para conectar elementos de aço e de concreto, conectar elementos de aço e de aço ou de concreto e de concreto, sendo necessário definir a rigidez de interface para cada caso. Nas estruturas de concreto armado esses elementos são utilizados para simular o fenômeno da aderência-deslizamento entre o aço e o concreto, transmitindo os esforços de cisalhamento e normal entre os dois materiais.

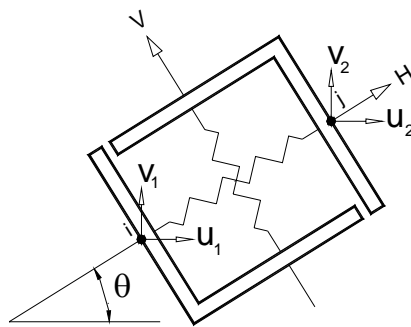
A relação constitutiva entre a tensão–deformação é dada por:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (3.7.1)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_h \\ \sigma_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_h \\ \varepsilon_v \end{Bmatrix} \quad (3.7.2)$$

onde,

$\varepsilon_h$ ,  $\varepsilon_v$  – deformações relativas aos deslocamentos entre os nós i e j (Figura 3.7.1.2).



**Figura 3.7.1.2-** Elemento de ligação, deslocamentos nodais.



A relação entre as deformações e os deslocamentos, a partir da matriz de transformação dos deslocamentos [M], é apresentada a seguir:

$$\{\varepsilon\} = [M] \{r\} \quad (3.7.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_h \\ \varepsilon_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ s & -c & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.7.4)$$

onde:

$$c = \cos \theta;$$

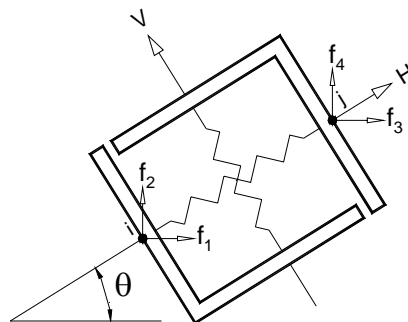
$$s = \sin \theta;$$

$u_1$  e  $u_2$  – deslocamentos dos nós i e j na direção H;

$v_1$  e  $v_2$  – deslocamentos dos nós i e j na direção V.

Abaixo, temos a relação entre os esforços e os deslocamentos (Figura 3.7.1.3):

$$\{f\} = [k] \{r\} \quad (3.7.5)$$



**Figura 3.7.1.3-** Elemento de ligação, forças nodais.

Como matriz de rigidez, temos:

$$[k] = [M]^t [C] [M] \quad (3.7.6)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} -c & s \\ -s & -c \\ c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ s & -c & -s & c \end{bmatrix} \quad (3.7.7)$$

A matriz de Rigidez  $[k]$  é dada abaixo:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_h c^2 + k_v s^2 & k_h s c - k_v s c & -k_h c^2 - k_v s^2 & -k_h s c + k_v s c \\ k_h s c - k_v s c & k_h s^2 + k_v c^2 & -k_h s c + k_v s c & -k_h s^2 - k_v c^2 \\ -k_h c^2 - k_v s^2 & -k_h s c + k_v s c & k_h c^2 + k_v s^2 & k_h s c - k_v s c \\ -k_h s c + k_v s c & -k_h s^2 - k_v c^2 & k_h s c - k_v s c & k_h s^2 + k_v c^2 \end{bmatrix} \quad (3.7.8)$$

A manipulação dessa matriz de rigidez é semelhante a qualquer outra matriz de rigidez de elementos finitos. Assim, somando a matriz de rigidez de cada elemento de ligação obtemos a rigidez total na interface.

Para as estruturas de concreto armado o valor da rigidez ao deslizamento vertical  $k_v$  refere-se à força de transferência vertical (normal) entre a barra de aço e o concreto. Para as estruturas em geral, considera-se um valor alto para essa rigidez, já que na conexão nodal, entre o aço e o concreto, o deslizamento vertical é praticamente desprezível.

O valor da rigidez ao deslizamento horizontal  $k_h$  refere-se à rigidez de cisalhamento na interface, podendo ser obtida a partir das relações entre a tensão de aderência e o deslizamento na interface entre o aço e o concreto.

Um valor grande da rigidez, “tendendo ao infinito”, significa grande aderência ou contato perfeito, e um valor nulo significa nenhuma aderência ou deslizamento livre.

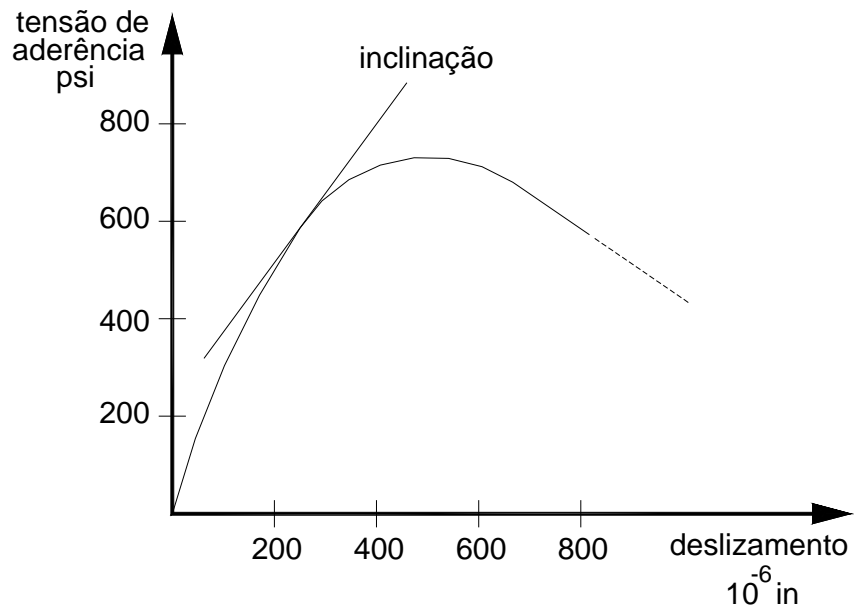
Para obtermos o valor da rigidez ao deslizamento, entre a barra de aço e o concreto, determinamos a derivada da função da curva da tensão de aderência em função do respectivo deslizamento. Assim, considerando como exemplo a curva apresentada por **NILSON (1968)** (3.6.1), temos a inclinação da curva da tensão de aderência x deslizamento (3.7.9) (Figura 3.7.1.4):

$$\tau_{(x)} = 3606 \cdot 10^3 S_{(x)} - 5356 \cdot 10^6 S_{(x)}^2 + 1986 \cdot 10^9 S_{(x)}^3 \quad (3.6.1)$$

$$\frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}} = 3.606 \cdot 10^6 - 10.712 \cdot 10^9 S_{(x)} + 5.958 \cdot 10^{12} S_{(x)}^2 \quad (3.7.9)$$

onde, a tensão de aderência é dada em “psi”, o deslizamento em “in” e  $\frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}}$  é dada

em  $\frac{\text{lb}}{\text{in}^3}$ .



**Figura 3.7.1.4-** Inclinação da curva tensão de aderência x deslizamento.

Agora, a expressão (3.7.9) é multiplicada pela área de influência superficial de contato entre os materiais:

$$\text{Área de influência superficial} = \frac{m\pi d_b L}{2} \quad (3.7.10)$$

onde:

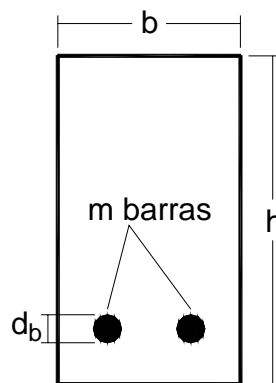
m - número de barras na seção;

$d_b$  - diâmetro da barra (Figura 3.7.1.5);

L - distância de influência dos elementos de ligação (Figura 3.7.1.6);

fator 2 (no denominador) – aparece quando são usados elementos de ligação no topo e na base das barras (Figura 3.7.1.7).

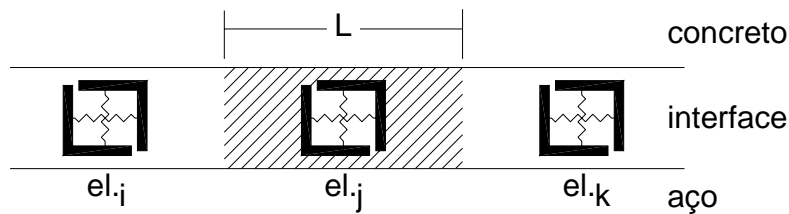
Esta área pode ser dividida, por exemplo, pela largura b da seção transversal do elemento de concreto armado, quando estamos trabalhando por unidade de comprimento, pela seção modificada, na modelagem dos elementos finitos.



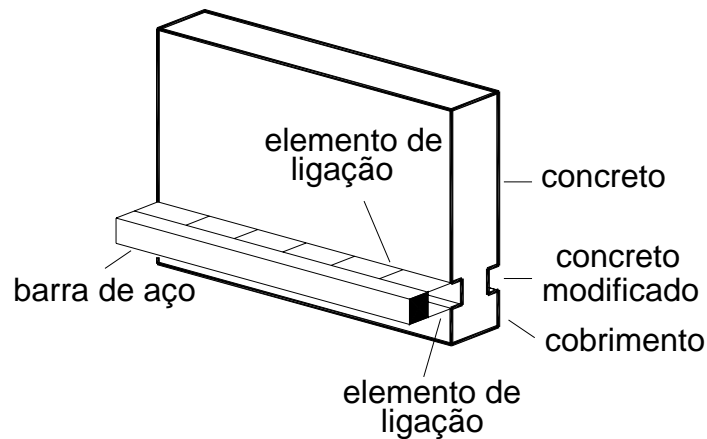
**Figura 3.7.1.5-** Seção transversal de um elemento de concreto armado.

Abaixo, temos a rigidez ao deslizamento horizontal:

$$k_h = \frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}} \frac{m\pi d_b L}{2b} \quad (3.7.11)$$



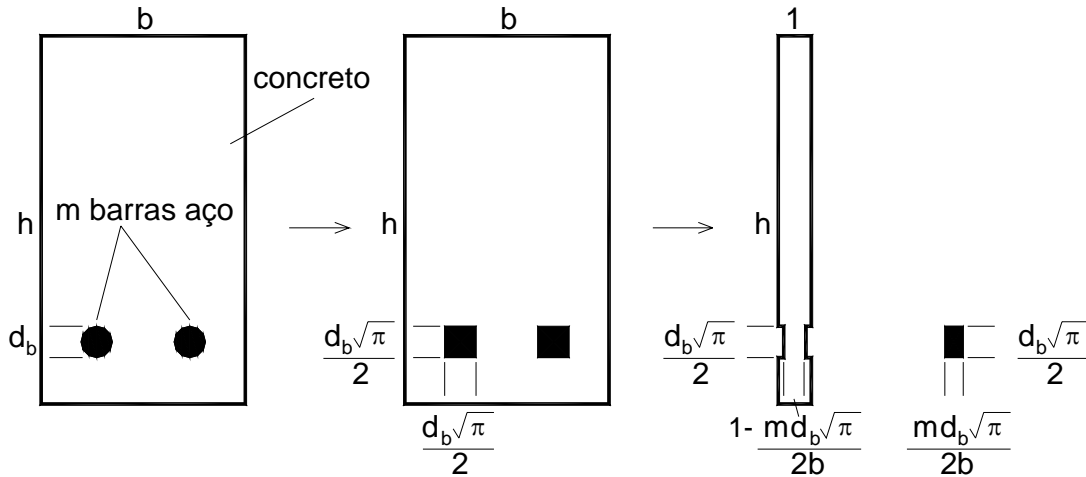
**Figura 3.7.1.6-** Área de influência dos elementos de ligação.



**Figura 3.7.1.7-** Elemento de ligação: topo e base das barras de aço.

A Figura 3.7.1.8 mostra uma seção de um elemento de concreto armado contendo  $m$  barras de aço de diâmetro  $d_b$ , distribuídas dentro de uma seção de largura  $b$ . Por conveniência essas barras circulares foram transformadas em barras quadradas de mesma área. Como, pelo método dos elementos finitos, a representação é baseada

em uma fatia unitária da largura ( $b$ ), do elemento de concreto, então é considerada uma fração referente à soma das larguras das barras na seção modificada. No nível das barras de aço a largura do concreto é considerada subtraindo a largura das barras.



**Figura 3.7.1.8-** Seção modificada (unitária) de um elemento de concreto armado.

### 3.7.2 MODELAGEM DA ADERÊNCIA PELO ELEMENTO DE INTERFACE

O elemento de interface (Figura 3.7.2.1) apresentado por **GROOT (1981)** tem o mesmo princípio de funcionamento que o elemento de ligação. A diferença reside no fato de que o elemento de ligação descreve o comportamento da aderência-deslizamento entre o aço e o concreto apenas nos pontos nodais ao longo da interface, sendo necessário calcular a sua área de influência.

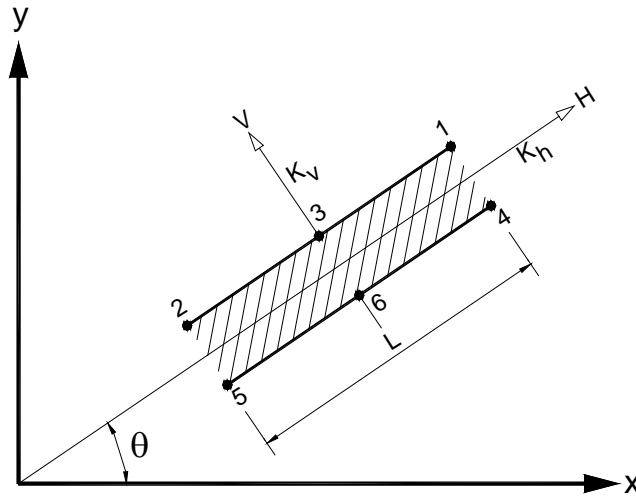


Figura 3.7.2.1- Elemento de Interface.

Para o elemento de interface, que é constituído de nós que se sobrepõem tendo altura nula, o comportamento da aderência-deslizamento se dá ao longo do seu comprimento que define a sua área de influência.

O desenvolvimento da relação constitutiva, para um elemento de interface linear constituído por dois pares de nós que se sobrepõem (Figura 3.7.2.2), será apresentado a seguir.

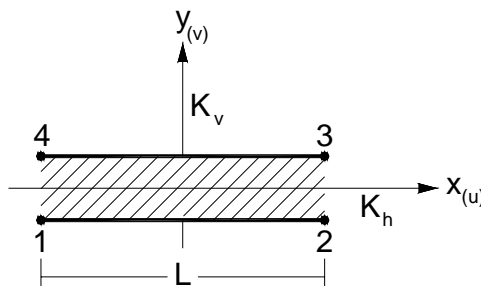


Figura 3.7.2.2- Elemento de Interface linear.

Seja  $\{u\}$  o vetor que contém as funções das componentes dos deslocamentos relativos para cada nó:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta u_{12} - \Delta u_{34} \\ \Delta v_{12} - \Delta v_{34} \end{Bmatrix} \quad (3.7.11)$$

Considerando  $u$  e  $v$  os deslocamentos nodais nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, temos para o nível inferior do elemento:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_{12} \\ \Delta v_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x}{L} & 0 & 1 + \frac{2x}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2x}{L} & 0 & 1 + \frac{2x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.7.12)$$

Para o nível superior do elemento, temos:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_{34} \\ \Delta v_{34} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{2x}{L} & 0 & 1 - \frac{2x}{L} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2x}{L} & 0 & 1 - \frac{2x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.7.13)$$

Fazendo  $A = 1 - \frac{2x}{L}$  e  $B = 1 + \frac{2x}{L}$ , temos para o vetor  $\{u\}$ :



$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A & 0 \\ 0 & -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.7.14)$$

$$\{u\} = \frac{1}{2} [H] \{r\} \quad (3.7.15)$$

A energia de deformação é dada por:

$$\Omega_d = \frac{1}{2} \int \{\sigma\} \{\varepsilon\} dv \quad (3.7.16)$$

$$\Omega_d = \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{4} \{r\} [H]^T [C] [H] \{r\} dx \quad (3.7.17)$$

onde, a matriz de rigidez [k] é expressa por:

$$[K] = [H]^T [C] [H] \quad (3.7.18)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \\ -B & 0 \\ 0 & -B \\ B & 0 \\ 0 & B \\ B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_H & 0 \\ 0 & k_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A & 0 \\ 0 & -A & 0 & -B & 0 & B & 0 & A \end{bmatrix} \quad (3.7.19)$$

Para:

$$A^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(1 - \frac{2x}{L}\right)^2 dx = \frac{4}{3}L \quad (3.7.20)$$

$$B^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(1 + \frac{2x}{L}\right)^2 dx = \frac{4}{3}L \quad (3.7.21)$$

temos a matriz de rigidez  $[k]$  para o sistema de coordenada local:

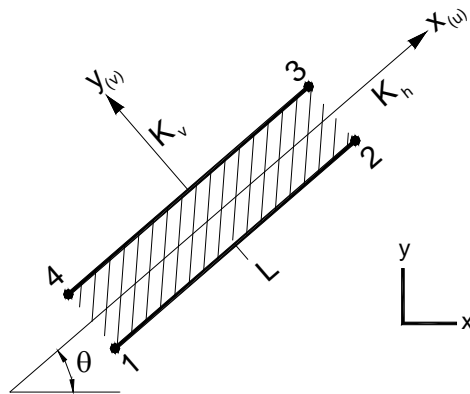
$$[k] = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2k_h & 0 & k_h & 0 & -2k_h & 0 & -k_h & 0 \\ 0 & 2k_v & 0 & k_v & 0 & -2k_v & 0 & -k_v \\ k_h & 0 & 2k_h & 0 & -k_h & 0 & -2k_h & 0 \\ 0 & k_h & 0 & 2k_v & 0 & -k_v & 0 & -k_v \\ -2k_h & 0 & -k_h & 0 & 2k_h & 0 & k_h & 0 \\ 0 & -2k_v & 0 & -k_v & 0 & 2k_v & 0 & k_v \\ -k_h & 0 & -2k_h & 0 & k_h & 0 & 2k_h & 0 \\ 0 & -k_v & 0 & -k_v & 0 & k_v & 0 & 2k_h \end{bmatrix} \quad (3.7.22)$$

Para passar a matriz de rigidez  $[k]$  do sistema de coordenada local para o sistema de coordenada global (Figura 3.7.2.3) fazemos:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (3.7.23)$$

$$\{x\} = [m] \{X\} \quad (3.7.24)$$

onde,  $s = \text{sen } \theta$  e  $c = \text{cos } \theta$ .



**Figura 3.7.2.3-** Elemento de Interface linear no sistema de coordenada global.

Para o elemento (oito graus de liberdade), temos como matriz parcial de mudança de coordenadas:

$$[M] = \begin{bmatrix} [m] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [m] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [m] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [m] \end{bmatrix} \quad (3.7.25)$$

Fazendo,

$$[D] = [H][M] \quad (3.7.26)$$

onde [H] é obtido de (3.7.15), e multiplicando por (3.7.22), obtemos a matriz de rigidez para o sistema de coordenada global:

$$[K] = [D]^t [k] [D] \quad (3.7.27)$$

A matriz de rigidez para o elemento de interface de seis nós (Figura 3.7.2.1), na coordenada local, é apresentada a seguir:

$$[k] = \frac{L}{30} \begin{bmatrix} 4k_h & 0 & -k_h & 0 & 2k_h & 0 & -4k_h & 0 & k_h & 0 & -2k_h & 0 \\ & 4k_v & 0 & -k_v & 0 & 2k_v & 0 & -4k_v & 0 & k_v & 0 & -2k_v \\ & & 4k_h & 0 & 2k_h & 0 & k_h & 0 & -4k_h & 0 & -2k_h & 0 \\ & & & 4k_v & 0 & 2k_v & 0 & k_v & 0 & -4k_v & 0 & -2k_v \\ & & & & 16k_h & 0 & -2k_h & 0 & -2k_h & 0 & -16k_h & 0 \\ & & & & & 16k_v & 0 & -2k_v & 0 & -2k_v & 0 & -16k_v \\ & & & & & & 4k_h & 0 & -k_h & 0 & 2k_h & 0 \\ & & & & & & & 4k_v & 0 & -k_v & 0 & 2k_v \\ & s & i & m & e & t. & & & 4k_h & 0 & 2k_h & 0 \\ & & & & & & & & & 4k_v & 0 & 2k_v \\ & & & & & & & & & & 16k_h & 0 \\ & & & & & & & & & & & 16k_v \end{bmatrix}$$

O valor da rigidez ao deslizamento vertical  $k_v$  refere-se à força de transferência vertical (normal), entre a barra de aço e o concreto, como já foi definido para os elementos de ligação.

O valor da rigidez ao deslizamento horizontal  $k_h$ , referente à rigidez de cisalhamento na interface, é obtido da mesma forma que obtivemos para o elemento de ligação, porém, como nesse elemento já se define nas propriedades de sua matriz de

rigidez o seu comprimento de influência, não precisamos multiplicar a área de influência superficial pela distância de influência, como é feito para o elemento de ligação.

$$\text{Área de influência superficial} = \frac{m\pi d_b}{2b} \quad (3.7.28)$$

onde  $m$  é o número de barras na seção,  $d_b$  é o diâmetro da barra, o fator 2, no denominador, aparece quando são usados elementos de ligação no topo e na base das barras e  $b$  é a largura da seção transversal do elemento de concreto armado.

Multiplicando  $\frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}}$  pela área de influência superficial de contato entre os materiais obtemos  $k_h$ :

$$k_h = \frac{d\tau_{(x)}}{dS_{(x)}} \frac{m\pi d_b}{2b} \quad (3.7.29)$$

Neste trabalho é utilizado o elemento de interface para simular o comportamento da aderência entre a armadura de aço e o concreto.

## **CAPÍTULO 4**

### ***IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL***

#### **4.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo são apresentados os procedimentos necessários para incorporar os modelos numéricos, descritos no capítulo anterior, na modelagem numérica para a análise não-linear de estruturas de concreto armado. Esses procedimentos e modelos numéricos consideram as principais e mais importantes características dos materiais e suas interações e, diferentemente de muitas propostas de modelagens numéricas encontradas na literatura, têm a vantagem de poder ser incorporados em diferentes implementações computacionais para a análise de diferentes tipos de estruturas de concreto armado como vigas, pilares, lajes, pórticos e suas combinações, sendo necessários apenas ajustes para a simulação da estrutura a que se destinam.

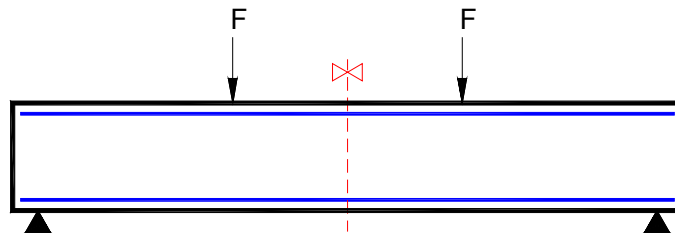
Neste trabalho, para validar os procedimentos aqui propostos, os modelos foram incorporados em um programa computacional para análise de viga simétrica bi-apoiada submetida à flexão simples, porém, vale reforçar novamente que esses modelos e procedimentos propostos podem ser utilizados na análise de outros tipos de estruturas de concreto armado.

O programa foi desenvolvido no ambiente Delphi 5.0, em linguagem Pascal avançado. Assim, a capacidade e o tempo de processamento da estrutura dependem

principalmente da capacidade do computador que está sendo utilizado para esse processamento.

## 4.2 VIGA SIMÉTRICA BI-APOIADA

Trata-se de uma viga de concreto armado que tem como características as simetrias de apoio e carregamento (Figura 4.2.1), com seção constante e com barras de aço localizadas nas regiões de interesse.



**Figura 4.2.1-** Viga simétrica bi-apoiada.

O método dos elementos finitos é utilizado como ferramenta para modelar o concreto, o aço e a interface. Para a configuração da malha que representa o concreto é utilizado o elemento finito *LSR*, item 3.2.2. A armadura é representada pela forma discreta, item 3.5.1, sendo modelada pelo mesmo tipo de elemento finito do concreto, porém considerando apenas as propriedades longitudinais da barra de aço. Para a modelagem da aderência é utilizado o elemento de interface de seis nós que é compatível com o elemento *LSR*, item 3.7.2.

A curva a ser utilizada para a obtenção do valor de rigidez ao deslizamento  $k_h$ , item 3.6, poderá ser definida externamente pelo usuário, tendo como opções as curvas polinomiais de **NILSON (1968)** e **MIRZA (1979)**, a curva poligonal de **YANKELEVSKY (1985)** e a curva mista do **CEB (1990)**. A estrutura também pode ser modelada considerando a aderência perfeita entre o aço e o concreto. Para a rigidez normal  $k_v$

será adotado um valor alto (ordem de  $10^{15}$ ), que não desestabiliza o procedimento de análise para a solução final.

Considerando o comportamento simétrico, é modelada apenas metade da estrutura (Figura 4.2.2), melhorando a capacidade de processamento da estrutura pelo computador.

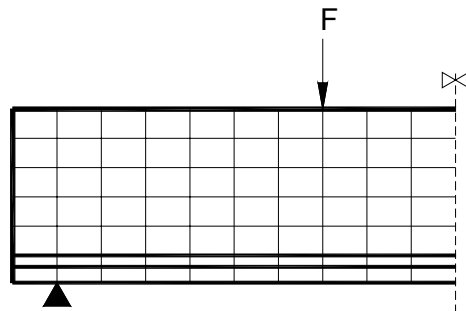


Figura 4.2.2- Consideração da simetria da viga.

Usando o conceito da seção modificada a viga é convertida em uma viga com largura unitária, com redução do volume de concreto no nível das barras de aço (Figura 4.2.3). Assim, a viga tridimensional é transformada em uma viga bidimensional no modelo numérico.

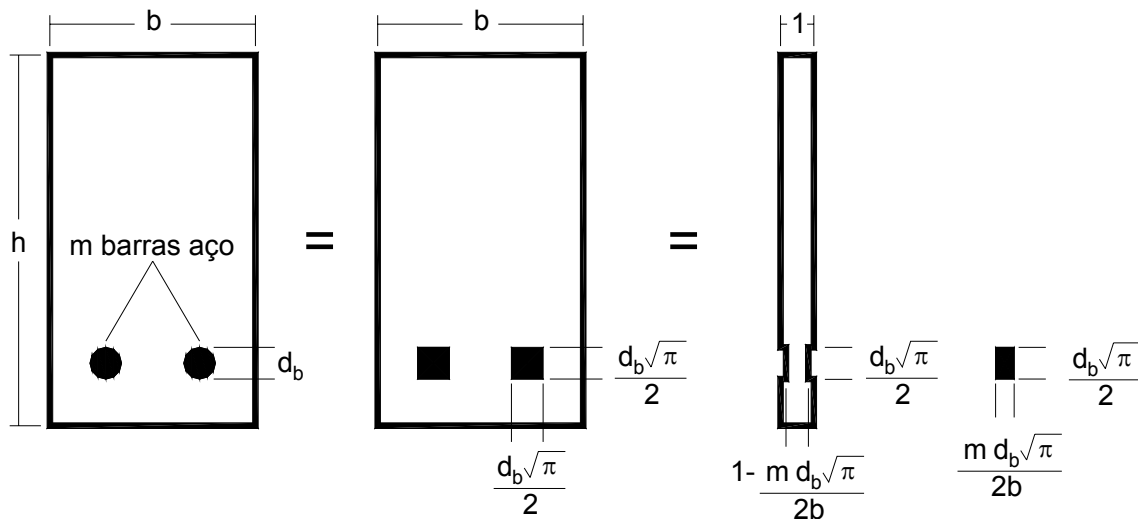


Figura 4.2.3- Transformação da viga tridimensional para o modelo numérico plano.



### 4.3 ALGORITMO GERAL PARA A SOLUÇÃO

Para traçar o comportamento não-linear, item 3.3, da estrutura de concreto armado, a solução do problema é feita a partir de equações lineares incrementais:

$$\{\Delta R\} = [K] \{\Delta r\} \quad (4.3.1)$$

O carregamento total é subdividido em um número de incrementos, aplicados passo a passo, através do procedimento de carregamento incremental. Para cada passo, a solução é dada através de um método iterativo, que utiliza o método da rigidez tangente, até que o equilíbrio da estrutura seja alcançado, satisfazendo um critério de parada.

A seguir é apresentado o algoritmo básico do método de análise.

**1-** Leitura das características geométricas, das propriedades dos materiais, dos carregamentos e das restrições.

**2-** geração da matriz de rigidez dos elementos de concreto, aço e interface.

**3-** geração do vetor de carregamento nodal incremental  $\{\Delta R\}$ . O carregamento total  $\{R\}$  corresponde à soma de todos os incrementos de carregamento:

$$\{R\} = \Sigma \{\Delta R\} \quad (4.3.2)$$

**4-** Solução iterativa do sistema de equações.

$$\{\Delta R\} = [K] \{\Delta r\} \quad (4.3.3)$$

O incremento do deslocamento nodal  $\{\Delta r_i\}$  é encontrado. Para cada elemento são calculados os incrementos da tensão e da deformação. Assim, a matriz de rigidez de cada elemento é recalculada. Considerando uma iteração  $i$ , temos:

**a-** É obtido o vetor de incrementos de deslocamentos nodais  $\{\Delta r_e^i\}$  através da solução das equações de equilíbrio, e são calculados os vetores dos incrementos de deslocamentos nodais de cada elemento  $\{\Delta r_e^i\}$ .

**b-** O incremento da deformação do elemento é obtido:

$$\{\Delta \varepsilon^i\} = [B] \{\Delta r_e^i\} \quad (4.3.4)$$

O vetor da deformação nodal total atual é, portanto:

$$\{\varepsilon^i\} = \{\varepsilon^{i-1}\} + \{\Delta \varepsilon^i\} \quad (4.3.5)$$

**c-** Assim, a partir da matriz linearizada do material, são calculados os incrementos das tensões aproximadas:

$$\{\Delta \bar{\sigma}^i\} = [D^{i-1}] \{\Delta \varepsilon^i\} \quad (4.3.6)$$

As tensões aproximadas totais atuais agora são calculadas:

$$\{\bar{\sigma}^i\} = \{\bar{\sigma}^{i-1}\} + \{\Delta \bar{\sigma}^i\} \quad (4.3.7)$$

**d-** Das tensões aproximadas totais são calculadas as tensões principais aproximadas  $\{\bar{\sigma}_1^i\}$  e  $\{\bar{\sigma}_2^i\}$ . (4.3.8)

e- Os incrementos das deformações uniaxiais equivalentes, item 3.4.2, são então calculados:

$$\{\Delta\varepsilon_{1u}^i\} = \left( \frac{\{\bar{\sigma}_1^i\} - \{\sigma_1^{i-1}\}}{E_1^{i-1}} \right) \quad (4.3.9)$$

$$\{\Delta\varepsilon_{2u}^i\} = \left( \frac{\{\bar{\sigma}_2^i\} - \{\sigma_2^{i-1}\}}{E_2^{i-1}} \right) \quad (4.3.10)$$

onde,

$\{\sigma_1^{i-1}\}$ ,  $\{\sigma_2^{i-1}\}$  - tensões principais da iteração anterior;

$\{E_1^{i-1}\}$ ,  $\{E_2^{i-1}\}$  - módulos de rigidez tangente da iteração anterior.

A deformação uniaxial equivalente total é dada por:

$$\{\varepsilon_{1u}^i\} = \{\varepsilon_{1u}^{i-1}\} + \{\Delta\varepsilon_{1u}^i\} \quad (4.3.11)$$

$$\{\varepsilon_{2u}^i\} = \{\varepsilon_{2u}^{i-1}\} + \{\Delta\varepsilon_{2u}^i\} \quad (4.3.12)$$

onde,

$\{\varepsilon_{1u}^{i-1}\}$ ,  $\{\varepsilon_{2u}^{i-1}\}$  - deformações uniaxiais equivalentes da iteração anterior.

f- Cálculo da relação:

$$\alpha^i = \frac{\bar{\sigma}_1^i}{\bar{\sigma}_2^i} \quad (4.3.13)$$

Com as curvas tensão-deformação, item 3.4.3, calculamos  $[D]^i$ .

g- As tensões principais  $\{\sigma_1^i\}$  e  $\{\sigma_2^i\}$  correspondentes a  $\{\varepsilon_{1u}^i\}$  e  $\{\varepsilon_{2u}^i\}$  também são calculadas utilizando as curvas tensão-deformação, item 3.4.3.

h- Mudança da matriz de rigidez do material com o novo módulo de elasticidade.

i- Transformação das tensões principais  $\{\sigma_1^i\}$  e  $\{\sigma_2^i\}$  para os eixos globais, para a obtenção do vetor  $\{\sigma^i\}$ .

j- Agora é obtido o vetor de carregamento nodal interno  $\{R_i\}$ :

$$\{R_i\} = \int_v [B]^T \{\sigma^i\} dv \quad (4.3.14)$$

Com o vetor de carregamento nodal interno e o vetor de carregamento nodal externo é calculado o vetor de carregamento nodal desbalanceado, o qual será utilizado no decorrer do procedimento incremental-iterativo.

#### 4.4 PROGRAMA COMPUTACIONAL

A seguir (Figura 4.4.1), é apresentado o fluxograma de processamento do programa para análise incremental-iterativa:

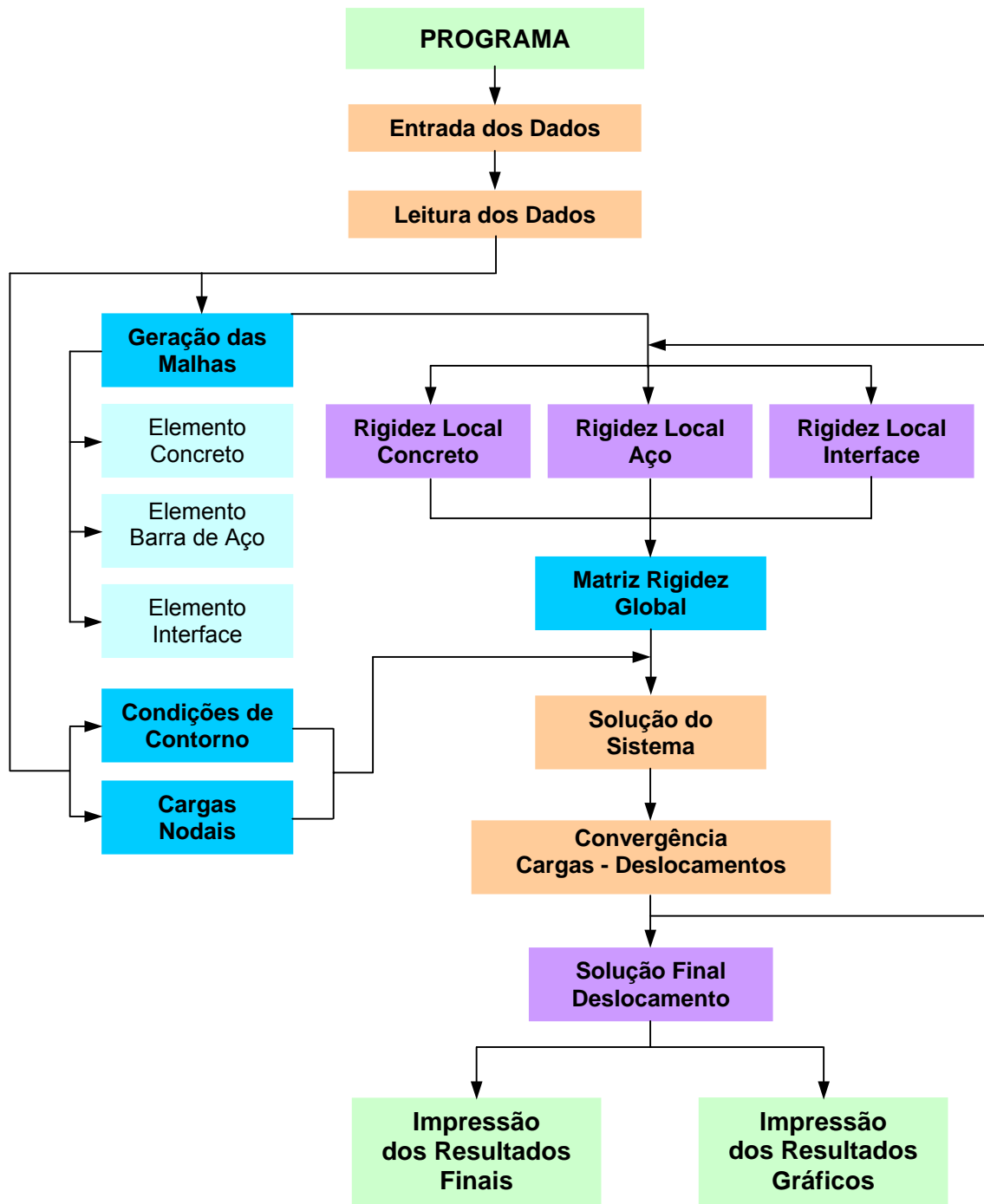


Figura 4.4.1- Fluxograma do programa.

Como dados de entrada, temos:

**Características da viga:** Altura da viga, largura da viga, comprimento total da viga, número de camadas de barras de aço, número e diâmetro das barras de aço, tipo de ancoragem das extremidades das barras, cobrimentos das capas de concreto e distância do apoio até a face da viga;

**Restrições nodais (apoios):** número total de nós de apoio restritos, número do nó restrito e em que eixo está restrito. A restrição dada pela simetria da viga é gerada automaticamente pelo programa;

**Carregamento:** tipo de carregamento (concentrado ou distribuído), número de nós carregados referente à metade da estrutura, número do nó de aplicação do carregamento concentrado, valor do carregamento e número de incrementos em que o carregamento total será dividido para a análise através do procedimento incremental-iterativo. Os resultados finais são referentes ao carregamento total aplicado;

**Características dos materiais:** módulo de elasticidade do concreto, coeficiente de Poisson do concreto, resistência à compressão do concreto, deformação última do concreto, resistência à tração do concreto, energia de fratura do concreto, módulo de elasticidade inicial do aço, módulo de elasticidade de escoamento do aço, coeficiente de Poisson do aço, tensão de escoamento do aço e tensão de ruptura do aço;

**Elementos finitos:** número de elementos finitos na horizontal, número de elementos finitos na vertical. O programa gera automaticamente os elementos finitos das camadas de concreto no nível do aço e no cobrimento do aço. A numeração automática dos elementos se dá da esquerda para a direita e de cima para baixo. A numeração automática dos nós se dá da esquerda para a direita e de cima para baixo;

**Curva tensão de aderência x deslizamento:** escolha do tipo de curva, e entrada de suas características, quando necessário.

A partir da leitura dos dados, temos:

**Montagem do vetor de carregamento:** o vetor é montado considerando a divisão da força pelo número de incrementos;

**Condições de contorno:** as restrições nodais são definidas pelo programa a partir das condições de simetria desse tipo de estrutura;

**Montagem da matriz de rigidez global:** a matriz de rigidez global é feita pela soma das matrizes locais de todos os elementos: concreto, aço e interface.

Como respostas finais, temos:

**Deslocamentos nodais;**

**Deslizamento:** deslocamento relativo entre o aço e o concreto ao longo da barra;

**Tensão de Aderência:** Tensão entre o aço e o concreto ao longo da barra;

**Concreto:** deformação e tensão;

**Aço:** deformação e tensão.

## **CAPÍTULO 5**

### ***APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA***

#### **5.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo é apresentado o programa computacional desenvolvido para a análise não-linear de vigas de concreto armado submetidas à flexão, considerando os efeitos da aderência entre a armadura de aço e o concreto.

O programa, desenvolvido no ambiente Delphi 5.0, foi denominado *ANLEC 2007* (Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto Armado).



## 5.2 ANLEC 2007: ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

O arquivo executável do programa é designado por *Anlec2007.exe*. A seguir temos a apresentação das telas do programa e das opções e dos passos necessários para a execução da simulação da estrutura e da apresentação dos resultados.

1 – Executar o programa *Anlec2007.exe*:

A Figura 5.2.1 mostra a tela inicial.

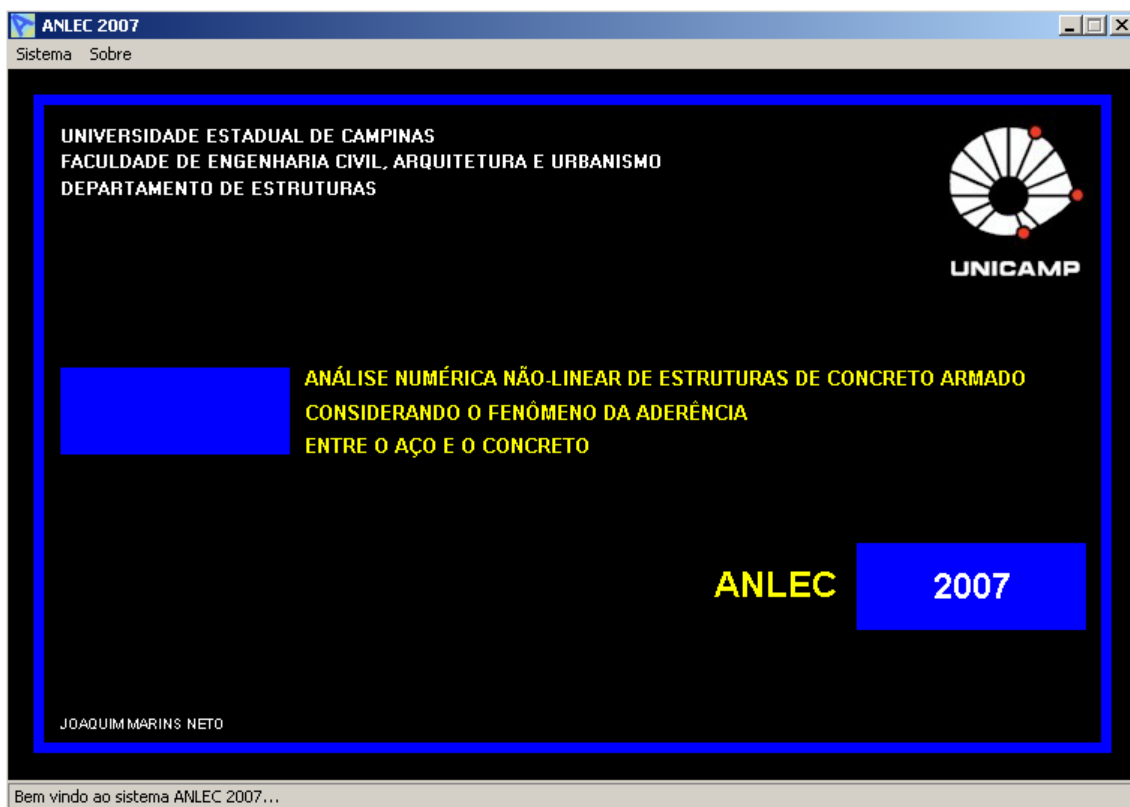


Figura 5.2.1- Tela inicial (Anlec2007).

2 – Em < **Sistema** > clicar em < **Iniciar** > para ativar a tela inicial de entrada de dados (Figura 5.2.2):

< **Sistema** > < **Iniciar** >

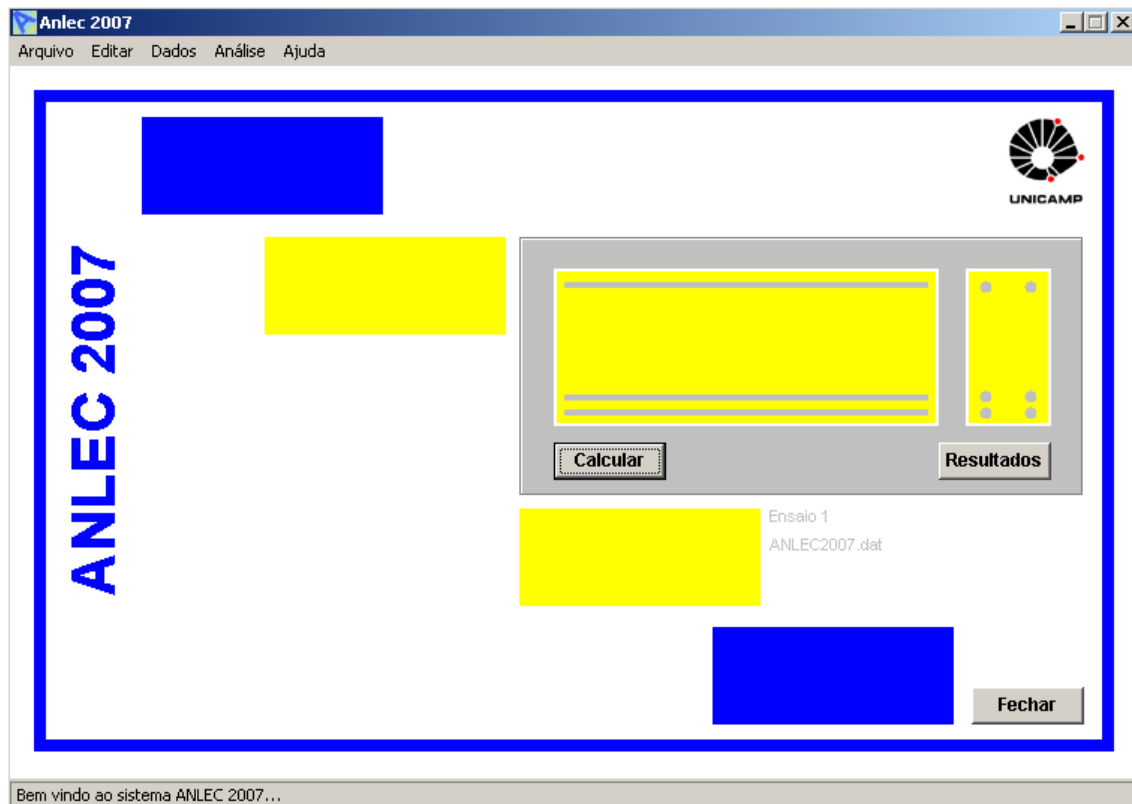


Figura 5.2.2- Tela inicial de entrada de dados (Anlec2007).

Acima dos botões < **calcular** > e < **resultados** > temos uma figura que representa a viga com os níveis de barras de aço, sendo modificada de acordo com as características da simulação desejada. O botão < **calcular** > executa a simulação da estrutura, caso todos os dados de entrada estejam corretos, e, terminando a execução dos cálculos, a figura muda de cor. O botão < **resultados** > abre a tela de visualização dos resultados. Para ativar o botão < **calcular** > é necessário que *todos* os campos de entrada de dados numéricos estejam preenchidos (os campos que não forem utilizados deverão ser preenchidos com zero). A separação das casas decimais é feita por vírgula.

3 – Em < **Dados** > temos todas as disponibilidades de dados de entrada para iniciar o cálculo da estrutura:

< **Dados** > < **Características da Viga** > < **Elementos Finitos** >

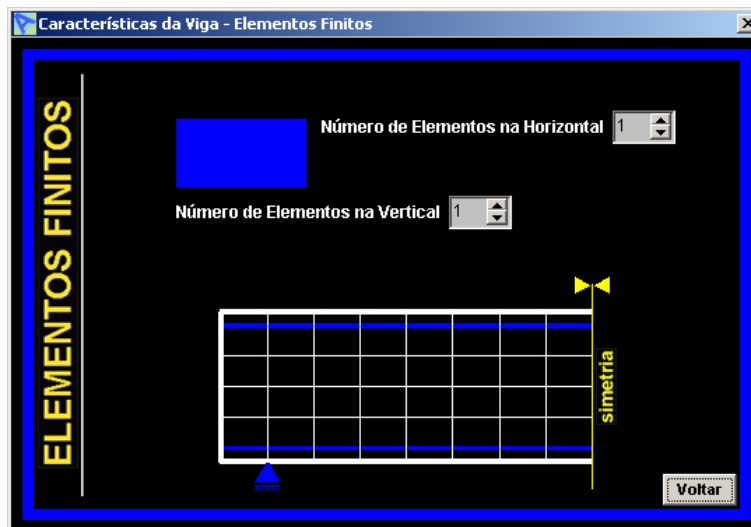


Figura 5.2.3- Tela: elementos finitos (Anlec2007).

### Elementos Finitos

Número de elementos na Horizontal (1...);

Número de elementos na Vertical (1...).

A simulação é feita considerando a simetria da estrutura, assim, o número de elementos finitos na *horizontal* corresponde à metade da viga. O programa gera automaticamente os elementos finitos correspondentes às barras de aço, ao concreto no nível das barras de aço, ao concreto de cobertura das barras e ao concreto entre camadas diferentes das barras de aço localizadas na parte inferior da seção. Assim, caso se tenha *uma* camada de barras de aço na parte inferior da viga e *uma* camada na parte superior, e o usuário define no botão seis elementos finitos na *vertical*, a simulação será feita com dez elementos finitos na *vertical*, pois o programa gera automaticamente quatro linhas de elementos, dadas pelas camadas das barras de aço. A numeração automática dos elementos finitos e dos nós é feita da esquerda para a direita e de cima para baixo.

< Dados > < Características da Viga > < Geometria >

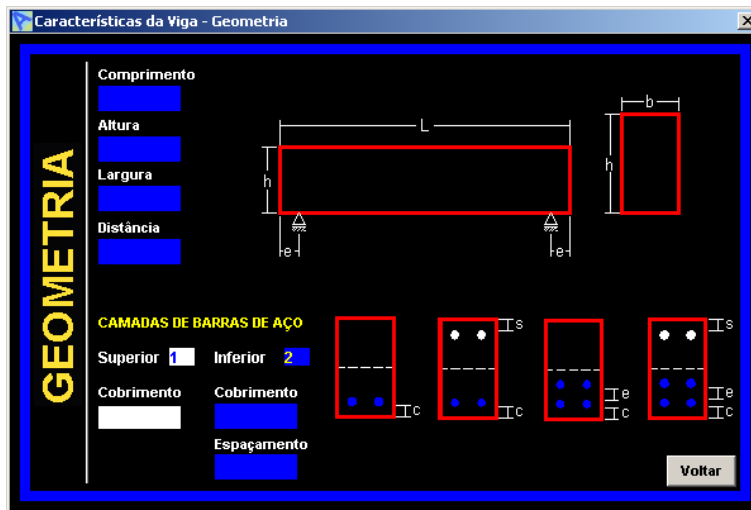


Figura 5.2.4- Tela: Geometria (Anlec2007).

### Geometria

Comprimento total da viga;

Altura total da viga;

Largura total da viga;

Distância do Apoio da viga: corresponde a largura dos elementos finitos da primeira coluna (*esquerda*). A largura dos outros elementos é calculada descontando essa largura do comprimento da metade da viga, assim, esse valor nunca poderá ser zero.

### Camadas de Barras de Aço

Superior (0 ou 1 camada de barras de aço na parte superior da viga);

Cobrimento das barras de aço da camada superior.

Inferior (1 ou 2 camadas de barras de aço na parte inferior da viga);

Cobrimento das barras de aço da camada inferior;

Espaçamento entre as faces das camadas.

Os arranjos entre as camadas de barras de aço são escolhidos clicando sobre a figura da seção desejada para ativar os campos de digitação.

< Dados > < Características da Viga > < Apoio >

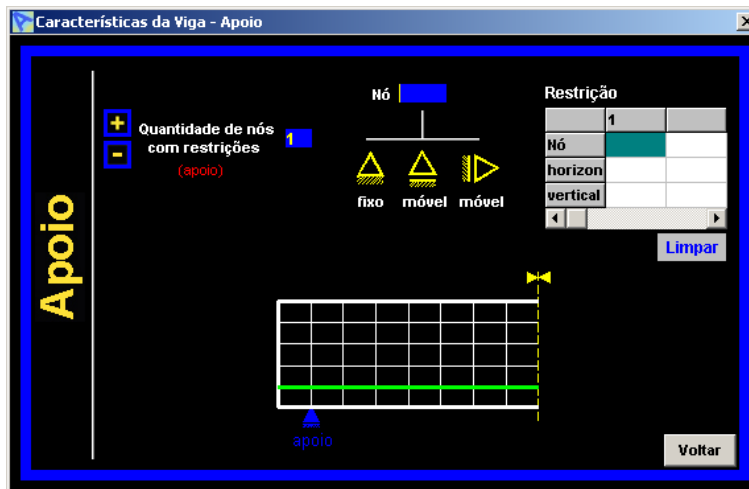


Figura 5.2.5- Tela: Apoio (Anlec2007).

### Apoio

Quantidade de nós com restrições de apoio (1...);

Número do Nó com apoio;

Fixo: restrição horizontal e vertical;

Móvel: restrição vertical;

Móvel: restrição horizontal.

Depois de digitado o número correspondente ao nó com restrição de apoio e escolhido o tipo de apoio, entre as opções disponíveis, os dados são carregados na grade, podendo ser apagados ou corrigidos clicando em < **Limpar** >. A visualização do número do nó com restrição, a ser escolhido, pode ser feita consultando a tela de < **Elementos da Viga** >. Caso o apoio seja colocado no canto inferior esquerdo da viga, deverá ser definida uma distância não nula no campo *Distância do apoio da viga* na tela < **Geometria** >.

O programa gera automaticamente as restrições nodais dadas pela consideração de simetria da viga.

< Dados > < Características da Viga > < Carregamento >

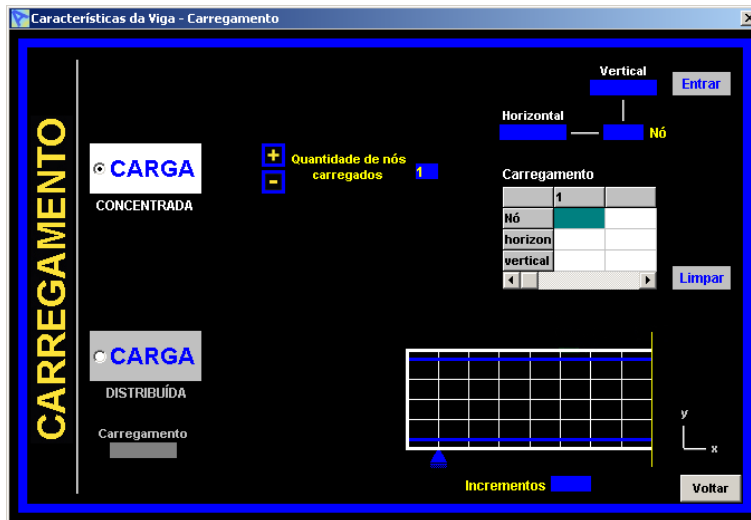


Figura 5.2.6- Tela: Carregamento (Anlec2007).

### Carga Concentrada

- Quantidade de nós carregados (1...);
- Número do Nó com carga concentrada;
- Carregamento total Horizontal;
- Carregamento total Vertical.

Depois de digitado o número correspondente ao nó com carregamento e os carregamentos vertical e horizontal, os dados devem ser carregados na grade clicando em < **Entrar** >, podendo ser apagados ou corrigidos clicando em < **Limpar** >. A visualização do número do nó com carga concentrada, a ser escolhido, pode ser feita consultando a tela de < **Elementos da Viga** >.

### Carga Distribuída

- Carregamento vertical.

Incrementos: número de incrementos em que o carregamento total será dividido para a análise através do procedimento incremental-iterativo. Os resultados finais são referentes ao carregamento total aplicado.

< Dados > < Características da Viga > < Ancoragem >

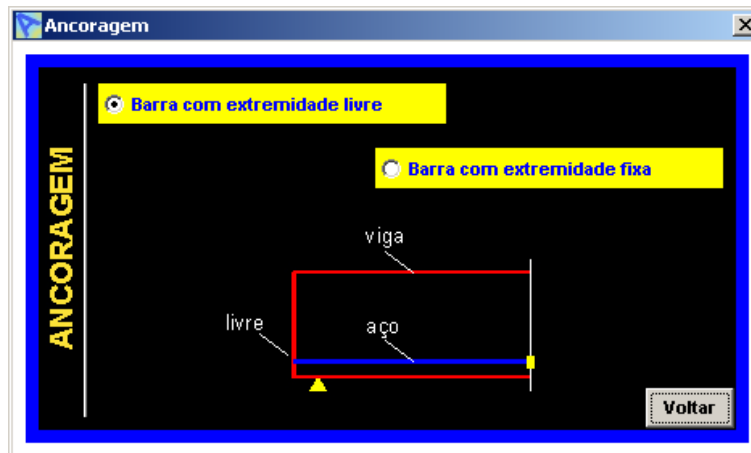


Figura 5.2.7- Tela: Ancoragem (Anlec2007).

### Ancoragem

Barra com extremidade livre: a extremidade da barra pode se deslocar com relação ao concreto, sendo ancorada apenas pela aderência aço-concreto.

Barra com extremidade ancorada: a extremidade da barra não pode se deslocar com relação ao concreto, pois tem uma ancoragem perfeita entre os dois materiais.

< Dados > < Características da Viga > < Elementos da Viga >

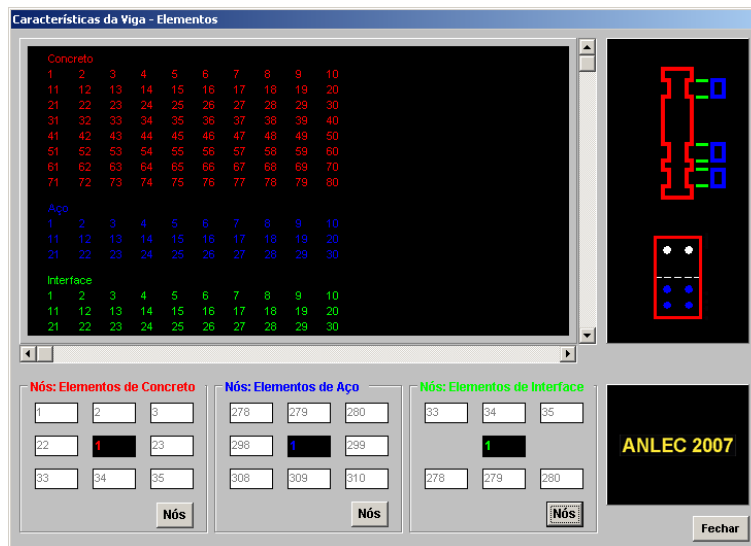


Figura 5.2.8- Tela: Elementos da Viga (Anlec2007).

### Elementos da Viga

A numeração dos *elementos finitos* é dada separadamente para o concreto, para o aço e para a interface, não tendo uma seqüência da numeração entre eles. A numeração dos elementos é feita da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Os números dos *nós* dos elementos finitos do concreto, do aço e da interface são numerados em seqüência. Assim, o programa numera primeiro os nós do concreto e na seqüência numera os nós do aço, a partir do último número do nó dado ao concreto. A numeração é feita da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Os nós correspondentes a cada elemento finito podem ser visualizados digitando o número do elemento no campo correspondente.



< Dados > < Materiais > < **Concreto** >

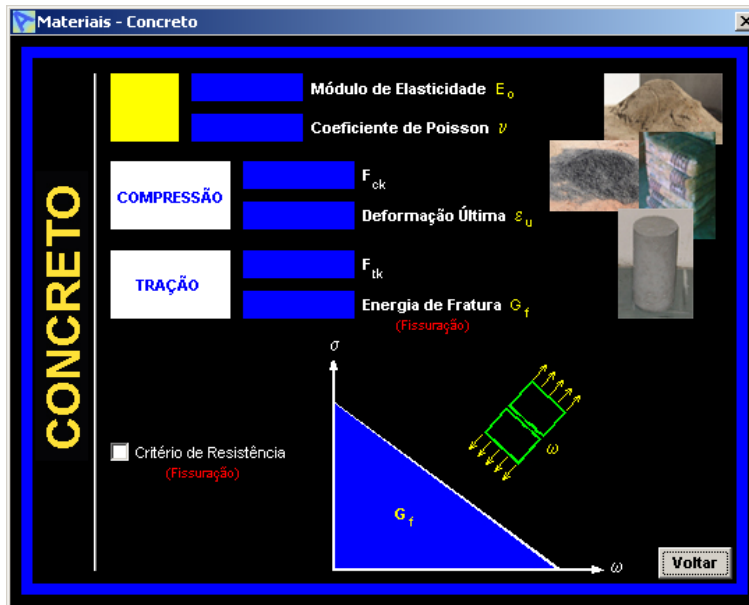


Figura 5.2.9- Tela: Concreto (Anlec2007).

### Concreto

Módulo de Elasticidade ( $E_0$ );

Coeficiente de Poisson ( $\nu$ );

Resistência à Compressão ( $F_{ck}$ );

Deformação Última ( $\epsilon_u$ );

Resistência à Tração ( $F_{tk}$ );

Energia de Fratura ( $G_f$ );

Critério de Resistência.

Como opções para o critério de surgimento das fissuras ao longo do elemento de concreto, temos: *critério de resistência* e *critério da energia de fratura*. Caso seja escolhido o *Critério de Resistência*, deve-se colocar o valor zero no campo *Energia de Fratura*.

< Dados > < Materiais > < Aço >

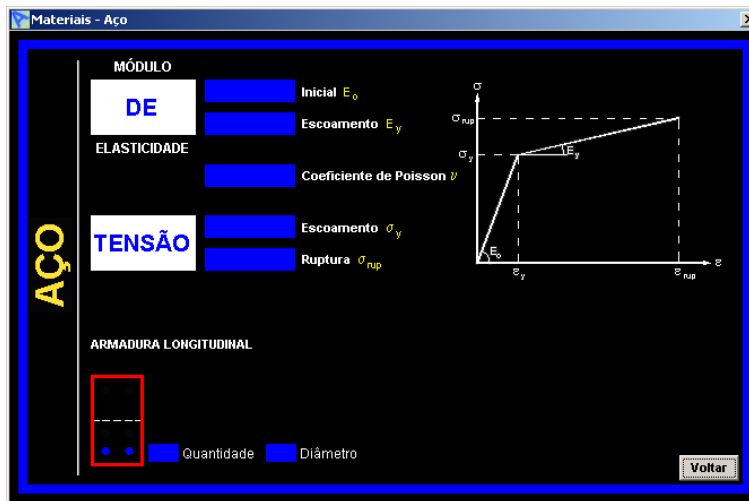


Figura 5.2.10- Tela: Aço (Anlec2007).

## Aço

Módulo de Elasticidade Inicial ( $E_0$ );

Módulo de Elasticidade de Escoamento ( $E_y$ );

Coeficiente de Poisson ( $\nu$ );

Tensão de Escoamento ( $\sigma_y$ );

Tensão de Ruptura ( $\sigma_{rup}$ ).

Os campos para a entrada dos dados da armadura longitudinal só estarão disponíveis após as camadas de barras de aço terem sido definidas em < **Dados** > < **Características da Viga** > < **Geometria** >.

## Armadura Longitudinal

*Camada Superior (Nível 1)*

Quantidade de barras na camada;

Diâmetro das barras.

*Camada Inferior (Nível 2)*

Quantidade de barras na camada;  
Diâmetro das barras.

*Camada Inferior (Nível 3)*

Quantidade de barras na camada;  
Diâmetro das barras.

< Dados > < Materiais > < Interface >

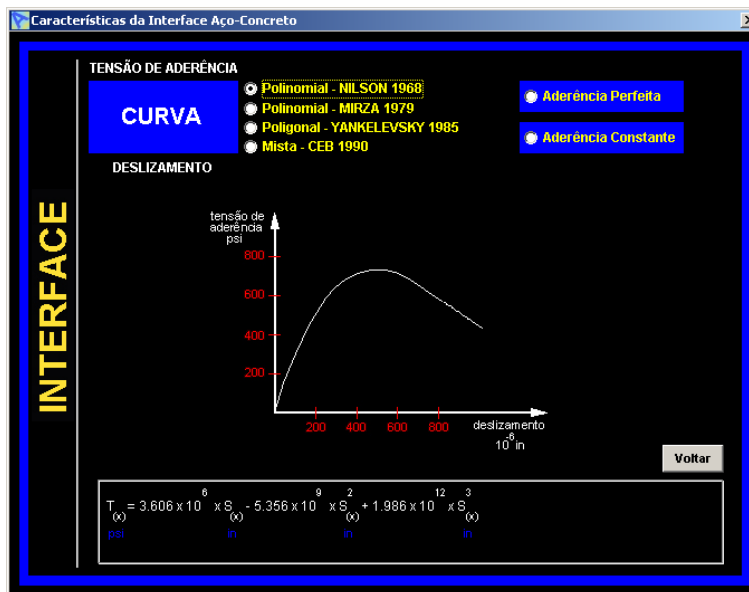


Figura 5.2.11- Tela: Interface (Anlec2007).

### Interface

Aderência Perfeita;

Aderência Constante ( $K_h$ );

Curva Polinomial Nilson (1968);

Curva Polinomial Mirza (1979);

Curva Polinomial Yankelevsky (1985):

$\tau_y$  – tensão de aderência limite;

$\tau_u$  – tensão de aderência última;

S1 – deslizamento limite, estágio 1;

S2 – deslizamento limite, estágio 2;

S3 – deslizamento limite, estágio 3;

Curva Mista CEB (1990):

$\tau_{m\acute{a}x}$  – tensão de aderência máxima;

$\tau_u$  – tensão de aderência última;

S1 – deslizamento limite;

S2 – deslizamento limite;

S3 – deslizamento limite.

A curva a ser utilizada para a obtenção do valor da rigidez ao deslizamento é definida externamente, tendo como opções as curvas polinomiais de **NILSON (1968)** e **MIRZA (1979)**, a curva poligonal de **YANKELEVSKY (1985)** e a curva mista do **CEB (1990)**. A estrutura também pode ser modelada considerando a aderência perfeita entre o aço e o concreto ou uma rigidez constante na interface (dada por uma relação linear entre a tensão de aderência e o deslizamento).

A relação apresentada pelo **CEB (1990)** possibilita um ajuste dos parâmetros da curva tensão de aderência x deslizamento com os dados e características da estrutura a ser analisada, através da tabela que aparece ao clicar sobre “*CEB*”, o que não ocorre com as curvas de **NILSON (1968)** e **MIRZA (1979)** que têm os parâmetros fixos pelos polinômios e estão no *Sistema Inglês*.

#### 4 – Processamento da estrutura:

< Análise > < **Calcular** >

A execução dos cálculos é feita caso todos os dados de entrada estejam corretos. Os dados de entrada podem ser gravados em arquivo texto, para depois poderem ser carregados novamente. Para isso, primeiro deve-se criar um *Arquivo Novo* e depois salvar os dados de entrada.

#### 5 – Apresentação dos resultados:

< Análise > < **Resultados** >

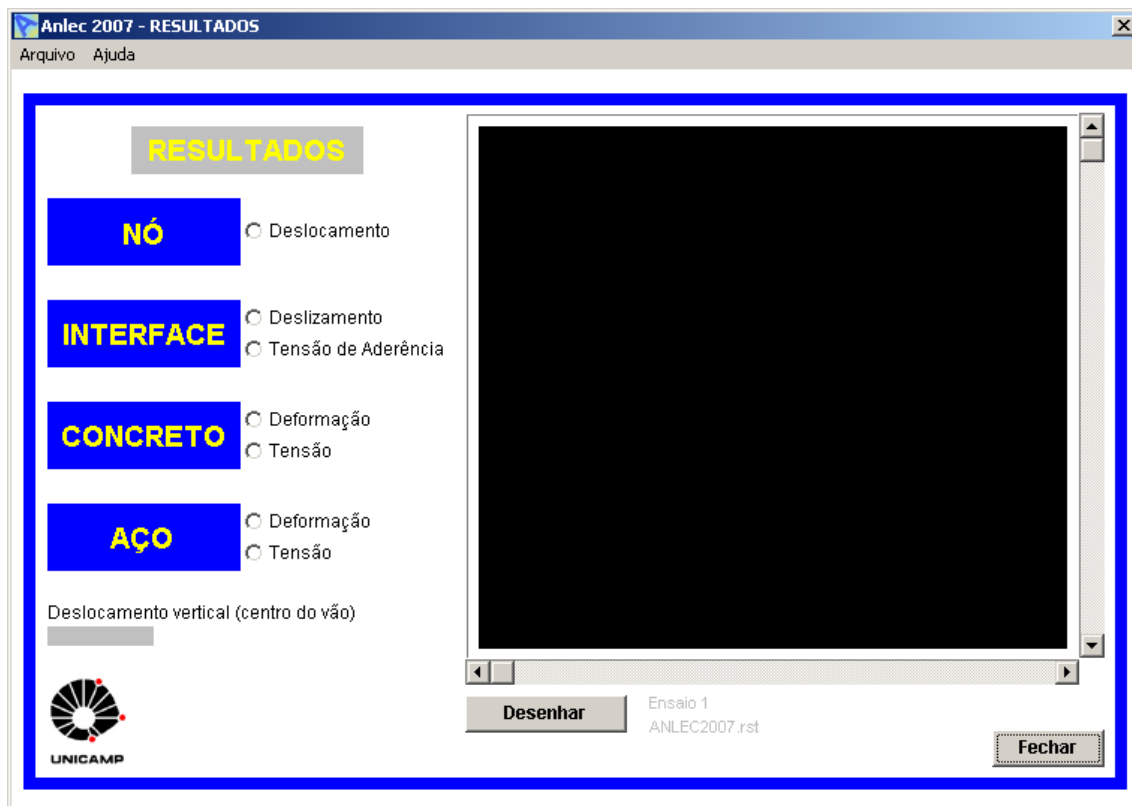


Figura 5.2.12- Tela: Resultados (Anlec2007).

**Deslocamento**

Deslocamento horizontal e vertical de cada nó.

**Deslizamento**

Deslocamento relativo entre o aço e o concreto ao longo da barra.

**Tensão de Aderência**

Tensão entre o aço e o concreto ao longo da barra.

**Concreto: Deformação**

Deformação no centro de cada elemento finito correspondente ao concreto.

**Concreto: Tensão**

Tensão no centro de cada elemento finito correspondente ao concreto.

**Aço: Deformação**

Deformação no centro de cada elemento finito correspondente ao aço.

**Aço: Tensão**

Tensão no centro de cada elemento finito correspondente ao aço.

**Deslocamento vertical no centro do vão da viga.**

Os resultados podem ser gravados em arquivos de texto de acordo com as disponibilidades dadas pelo próprio programa. Para isso, primeiro deve-se criar um *Arquivo Novo* e depois salvar os resultados.

6 – A visualização gráfica (Figura 5.2.13) está disponível para as seguintes características do concreto: o estado de fissuração, a tensão horizontal ( $\sigma_x$ ), a tensão vertical ( $\sigma_y$ ) e o cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ).

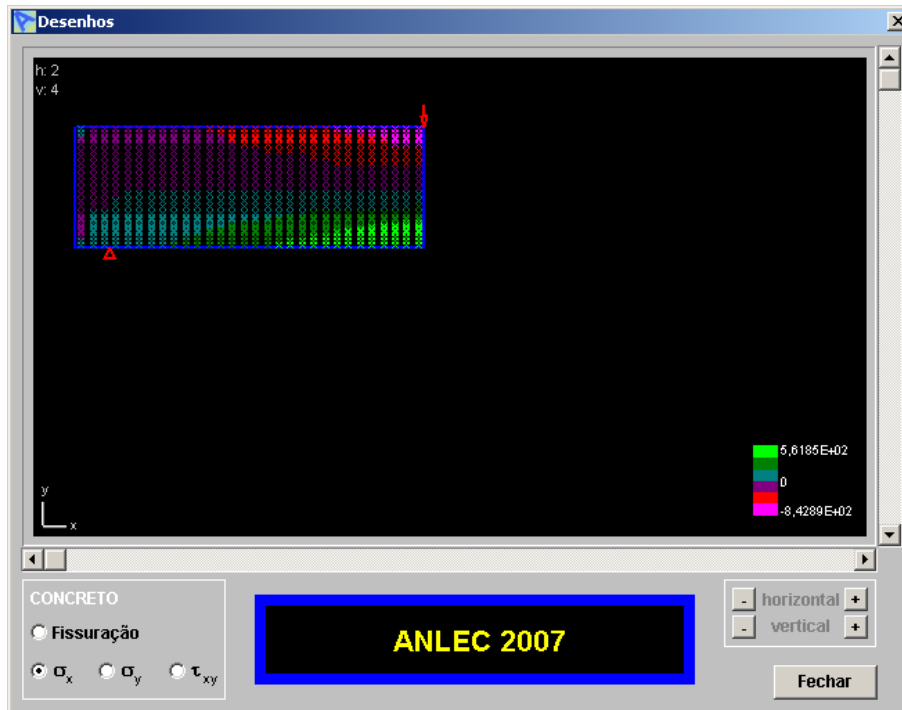


Figura 5.2.13- Tela: Gráficos (Anlec2007).

## CAPÍTULO 6

### **EXEMPLOS NUMÉRICOS**

#### **6.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo são apresentadas as análises dos resultados numéricos obtidos pelo programa computacional desenvolvido neste trabalho e resultados obtidos na literatura, através de exemplos comparativos de vigas de concreto armado. Os exemplos abrangem vigas submetidas a carregamento concentrado aplicado no centro do vão, carregamentos concentrados simétricos aplicados a uma certa distância do centro do vão e carregamento distribuído.

Na simulação pelo programa *ANLEC 2007*, foram consideradas três curvas para a modelagem da aderência entre a barra de aço e o concreto: a curva de **NILSON (1968)** - *ANLEC 2007 (a)*, a curva de **MIRZA (1979)** - *ANLEC 2007 (b)* e a curva do **CEB (1990)** - *ANLEC 2007 (c)*, além da consideração da aderência perfeita entre os dois materiais - *ANLEC 2007 (d)*.

A apresentação dos resultados se faz, principalmente, através de gráficos que apresentam o deslocamento vertical no centro do vão da viga, a distribuição da tensão de aderência na interface aço-concreto e a tensão ao longo da barra de aço.

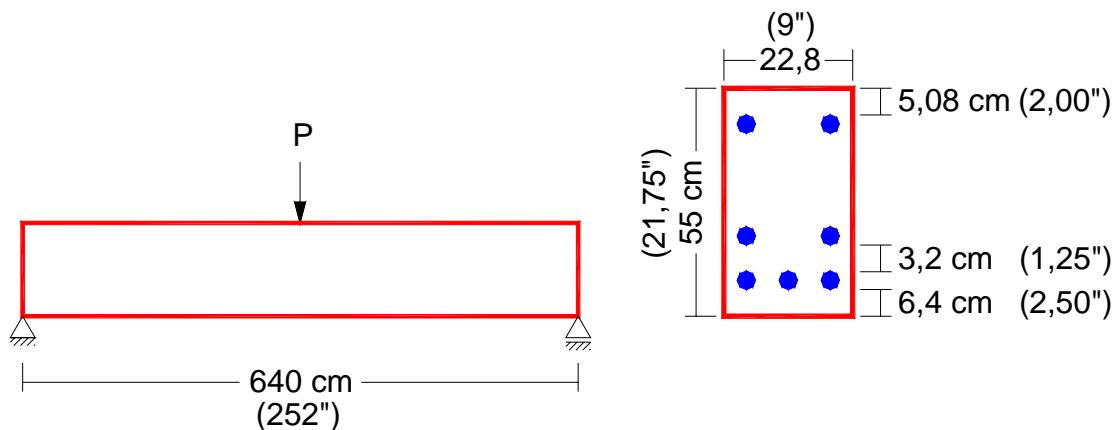


## 6.2 APRESENTAÇÃO DOS EXEMPLOS PARA O ENSAIO DE VIGA SIMÉTRICA

### 6.2.1 EXEMPLO NUMÉRICO 1

Neste exemplo são comparados os resultados obtidos com o programa *ANLEC 2007*, os resultados numéricos obtidos por **KANG (1977)**, os resultados numéricos obtidos por **LIN (1973)** citado por **KANG (1977)** e os resultados experimentais também citados por **KANG (1977)**, de uma viga de concreto armado submetida à flexão devido a um carregamento concentrado.

Abaixo (Figura 6.2.1) tem-se a conformação geométrica da viga simétrica utilizada neste exemplo:



**Figura 6.2.1-** Conformação geométrica da viga simétrica.

Para a análise comparativa foram aplicados sete carregamentos concentrados ( $P$ ), no centro do vão da viga, com os seguintes valores: 44,48 kN (10 kip), 88,96 kN (20 kip), 133,44 kN (30 kip), 177,92 kN (40 kip), 222,40 kN (50 kip), 266,88 kN (60 kip) e 311,36 kN (70 kip), sendo obtidos os resultados para cada carregamento.

As informações das características físicas e geométricas, utilizadas neste exemplo, são apresentadas na Tabela 6.2.1.

Tabela 6.2.1- Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.

<b>Geometria</b>	Comprimento total da viga entre apoios (L)	640 cm (252 in)
	Altura da viga (h)	55 cm (21,75 in)
	Largura da viga (b)	22,8 cm (9 in)
<b>Cobrimento</b>	Concreto superior ( $c_s$ )	5,08 cm (2 in)
	Concreto inferior ( $c_i$ )	6,4 cm (2,5 in)
	Distância vertical entre as barras ( $c_b$ )	3,2 cm (1,25 in)
<b>Armadura de Aço</b>	Número de barras na camada superior ( $n_s$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada superior ( $\phi_s$ )	1,27 cm (0,5 in)
	Número de barras na camada intermediária ( $n_{int}$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada intermediária ( $\phi_{int}$ )	2,85 cm (1,125 in)
	Número de barras na camada inferior ( $n_i$ )	3 barras
	Diâmetro das barras da camada inferior ( $\phi_i$ )	2,85 cm (1,125 in)
<b>Aço</b>	Módulo de elasticidade, inicial ( $E_o$ )	21.167,6 kN/cm <sup>2</sup> (30.700.000 psi)
	Módulo de elasticidade, escoamento ( $E_y$ )	288,2 kN/cm <sup>2</sup> (418.000 psi)
	Tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	55,2 kN/cm <sup>2</sup> (80.000 psi)
	Tensão de ruptura ( $\sigma_{rup}$ )	68,9 kN/cm <sup>2</sup> (100.000 psi)
<b>Concreto</b>	Módulo de elasticidade ( $E_o$ )	3355,8 kN/cm <sup>2</sup> (4.867.000 psi)
	Poisson ( $\nu$ )	0,20
	Resistência à compressão ( $F_{ck}$ )	3,88 kN/cm <sup>2</sup> (5.620 psi)
	Deformação última ( $\epsilon_u$ )	0,0038
	Resistência à tração ( $F_{tk}$ )	0,388 kN/cm <sup>2</sup> (562 psi)
<b>E. F.</b>	Número de elementos finitos na horizontal (total)	10
	Número de elementos finitos na vertical (total)	10
Nó apoio (321)		Nó carregamento (21)

A Figura 6.2.2 apresenta os resultados dos deslocamentos verticais no centro do vão da viga.

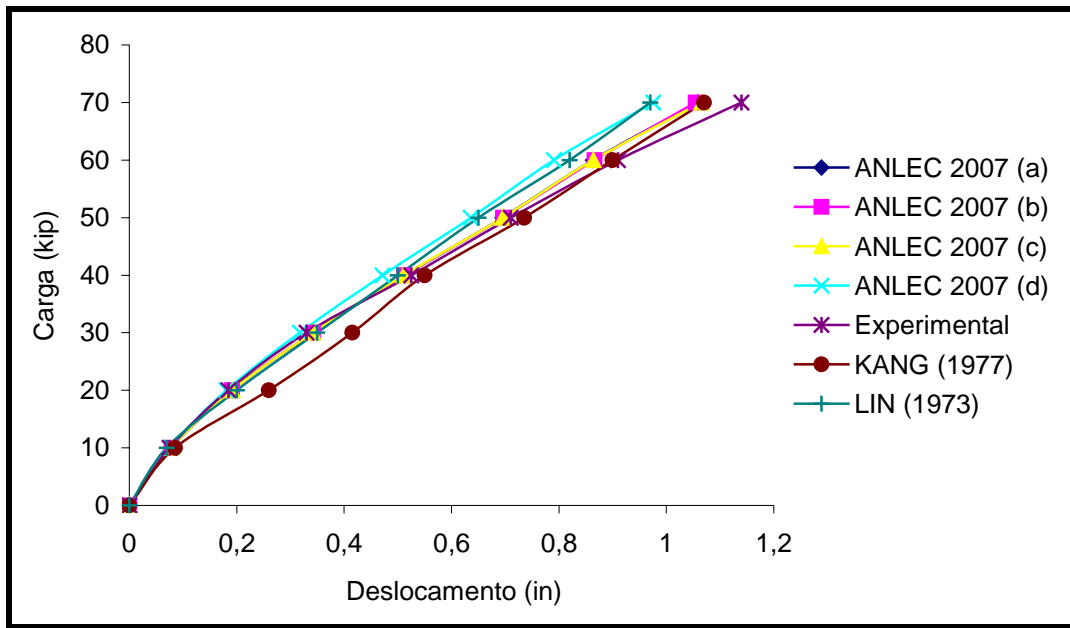
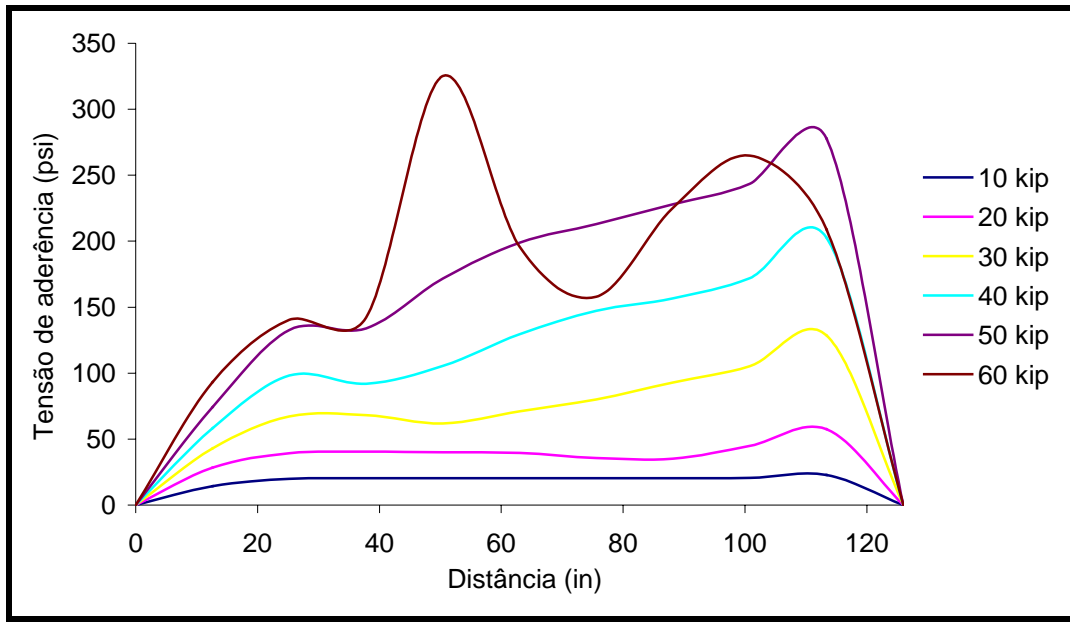


Figura 6.2.2- Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.

As curvas obtidas pelo programa *ANLEC 2007*, considerando a degradação da aderência, possuem um comportamento semelhante à curva experimental, o que não ocorre tão bem com as curvas apresentadas por **KANG (1977)** e **LIN (1973)** citado por **KANG (1977)**.

A curva obtida por *ANLEC 2007 (d)*, para a aderência perfeita, caminha próxima das outras três curvas que consideram a degradação da aderência, obtidas com o programa, até o início da influência dessa degradação (carga de aproximadamente 18 kip) na fissuração do concreto, a partir do qual as três curvas mostram que a viga apresentou uma perda de rigidez maior devido ao estado de fissuração mais avançado, seguindo mais próximas da curva experimental.

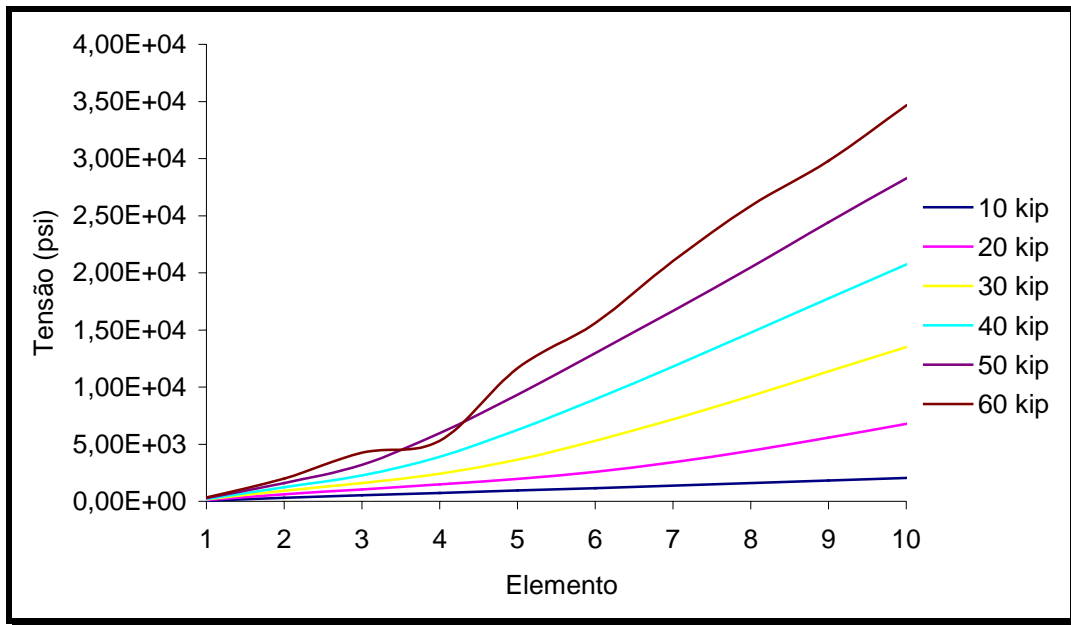
A Figura 6.2.3 apresenta a distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto, para as barras de aço do nível intermediário, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga.



**Figura 6.2.3-** Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).

Com o aumento do carregamento, aumentaram as fissuras no concreto e aumentou o deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto. Em algumas regiões da barra de aço, o aumento do deslizamento levou à deterioração da aderência ocasionando uma diminuição da tensão de aderência ao longo da barra de aço. Essa situação pode ser observada com a carga de 60 kip, onde ocorreu um decréscimo da tensão de aderência em algumas regiões da barra, quando comparada com a carga de 50 kip, ocasionado pela deterioração avançada da aderência entre a barra e o concreto.

A Figura 6.2.4 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos das barras de aço do nível intermediário, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (a)*, o qual considera a perda de aderência na interface aço-concreto.



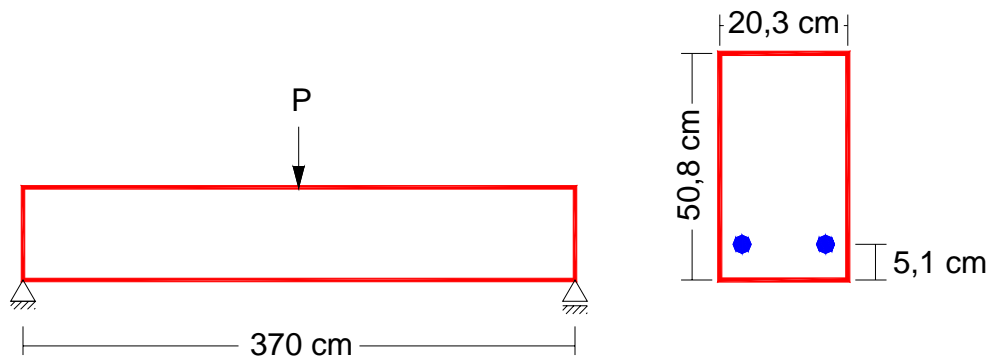
**Figura 6.2.4-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – *ANLEC 2007 (a)*.

A distribuição da tensão nas barras de aço é influenciada pela distribuição da tensão de aderência na interface aço-concreto, relação (1.2) do item 1.3. Com o aumento do carregamento e conseqüente aumento do deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto, ocorreu uma mudança na distribuição e nos valores da tensão de aderência na interface. Para o carregamento de 60 kip pode ser observado que as curvaturas da distribuição da tensão na barra de aço foi afetada na região onde ocorreu o decréscimo da tensão de aderência na interface (Figura 6.2.3).

## 6.2.2 EXEMPLO NUMÉRICO 2

Neste exemplo são comparados os resultados obtidos com o programa *ANLEC 2007*, os resultados numéricos apresentados por **KWAK (1997)** e **OLIVEIRA (2000)** e os resultados experimentais citados por **OLIVEIRA (2000)**, de uma viga de concreto armado submetida à flexão devido a um carregamento concentrado no centro do vão da viga.

Abaixo (Figura 6.2.5) tem-se a conformação geométrica da viga simétrica utilizada neste exemplo:



**Figura 6.2.5-** Conformação geométrica da viga simétrica.

Para a análise comparativa foram aplicados sete carregamentos concentrados ( $P$ ) com os seguintes valores: 20 kN, 40 kN, 50 kN, 60 kN, 100 kN, 120 kN e 140 kN, sendo obtidos os resultados para cada carregamento.

As informações das características físicas e geométricas, utilizadas neste exemplo, são apresentadas na Tabela 6.2.2.

Tabela 6.2.2- Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.

<b>Geometria</b>	Comprimento total da viga entre apoios (L)	370 cm
	Altura da viga (h)	50,8 cm
	Largura da viga (b)	20,3 cm
<b>Cobrimento</b>	Concreto inferior ( $c_i$ )	4,0 cm
<b>Armadura de Aço</b>	Número de barras na camada inferior ( $n_i$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada inferior ( $\phi_i$ )	2,54 cm
<b>Aço</b>	Módulo de elasticidade, inicial ( $E_o$ )	20.740 kN/cm <sup>2</sup>
	Módulo de elasticidade, escoamento ( $E_y$ )	289 kN/cm <sup>2</sup>
	Tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	31,6 kN/cm <sup>2</sup>
	Tensão de ruptura ( $\sigma_{rup}$ )	40 kN/cm <sup>2</sup>
<b>Concreto</b>	Módulo de elasticidade ( $E_o$ )	2.670 kN/cm <sup>2</sup>
	Poisson ( $\nu$ )	0,20
	Resistência à compressão ( $F_{ck}$ )	3,39 kN/cm <sup>2</sup>
	Deformação última ( $\epsilon_u$ )	0,0038
	Resistência à tração ( $F_{tk}$ )	0,36 kN/cm <sup>2</sup>
<b>Interface</b>	( $\tau_m$ )	1,30 kN/cm <sup>2</sup>
	( $\tau_u$ )	0,20 kN/cm <sup>2</sup>
	( $S_1$ ) = ( $S_2$ ) // ( $S_3$ )	0,6 mm // 1,0 mm
<b>E. F.</b>	Número de elementos finitos na horizontal (total)	10
	Número de elementos finitos na vertical (total)	6
Nó apoio (193)		Nó carregamento (21)

A Figura 6.2.6 apresenta os resultados dos deslocamentos verticais no centro do vão da viga.

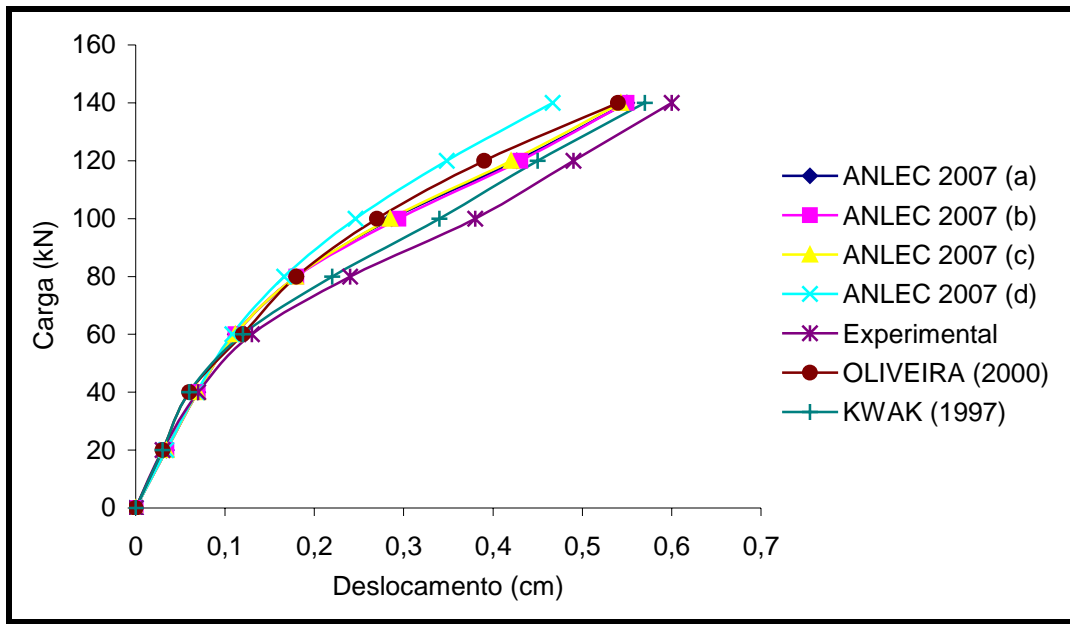


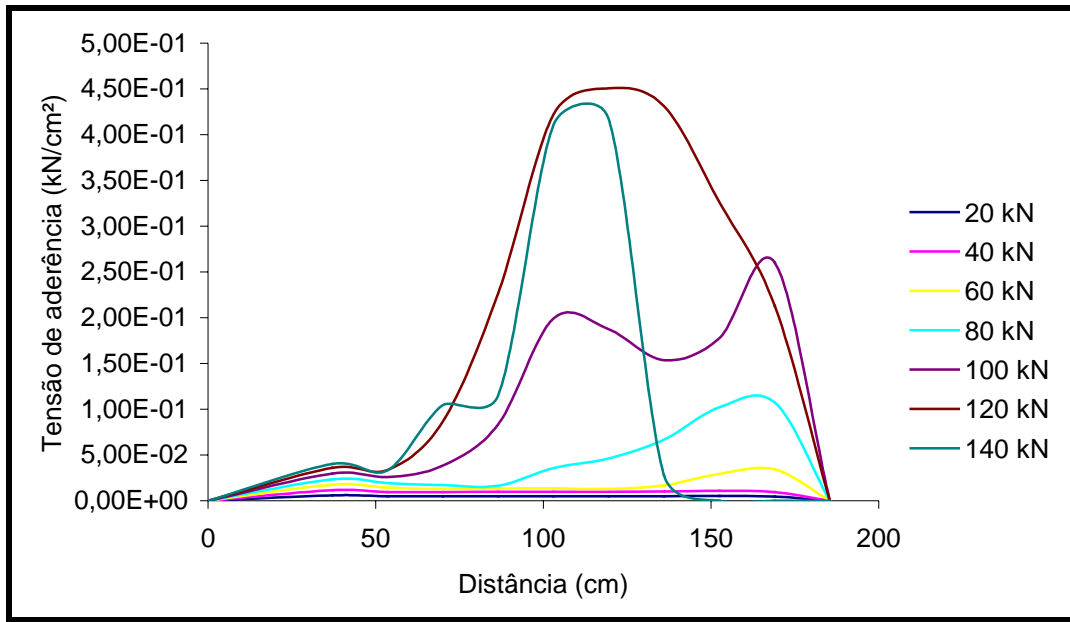
Figura 6.2.6- Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.

As curvas obtidas pelo programa *ANLEC 2007*, considerando a degradação da aderência, possuem um comportamento semelhante à curva experimental. A curva obtida por **OLIVEIRA (2000)**, que considera a degradação da aderência entre a barra de aço e o concreto, apresenta rigidez um pouco maior, porém caminha próxima das curvas obtidas pelo programa *ANLEC 2007*. A curva obtida por **KWAK (1997)** citado por **OLIVEIRA (2000)** caminha próxima da curva experimental, porém tem uma forma mais irregular.

A curva obtida por *ANLEC 2007 (d)*, para a aderência perfeita, caminha próxima das outras três curvas que consideram a degradação da aderência, obtidas com o programa *ANLEC 2007*, até o início da influência dessa degradação (carga de aproximadamente 40 kN) na fissuração do concreto, a partir do qual as três curvas mostram que a viga apresentou uma perda de rigidez maior devido ao estado de fissuração mais avançado, seguindo mais próximas da curva experimental.



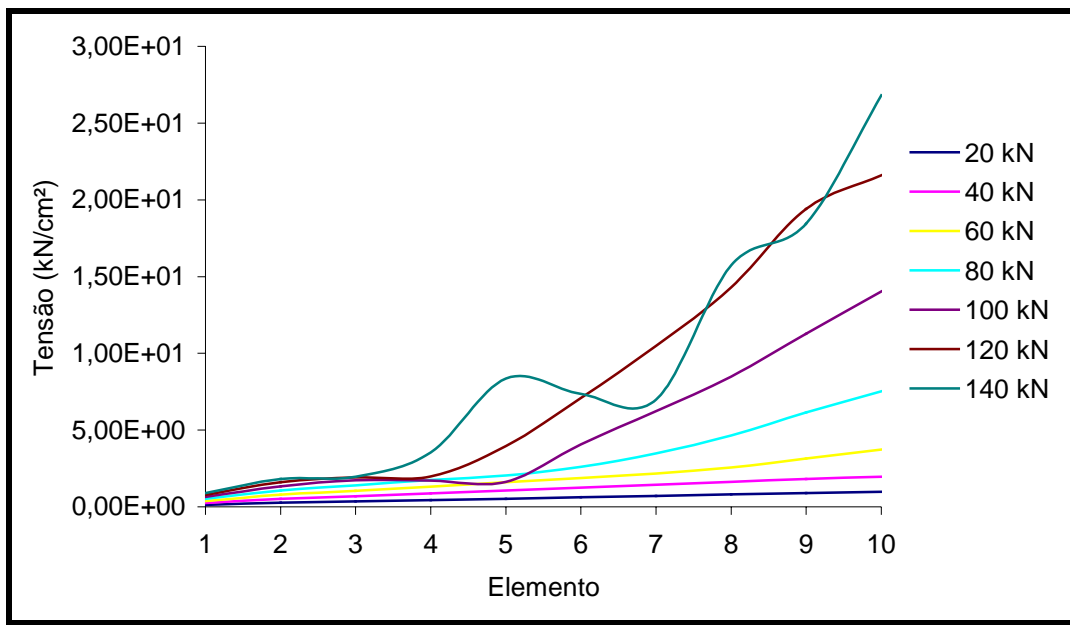
A Figura 6.2.7 apresenta a distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto, para as barras de aço, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga.



**Figura 6.2.7-** Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).

Com o aumento do carregamento, aumentaram as fissuras no concreto e o deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto também aumentou. A máxima tensão de aderência ocorreu para o carregamento de 120 kN, a partir do qual, em algumas regiões da barra de aço, o aumento do deslizamento levou a deterioração da aderência ocasionando uma diminuição da tensão de aderência ao longo da barra de aço. Essa situação pode ser observada com a carga de 140 kN, onde ocorreu um decréscimo da tensão de aderência em algumas regiões da barra, quando comparada com a carga de 120 kN, ocasionado pela deterioração avançada da aderência na interface.

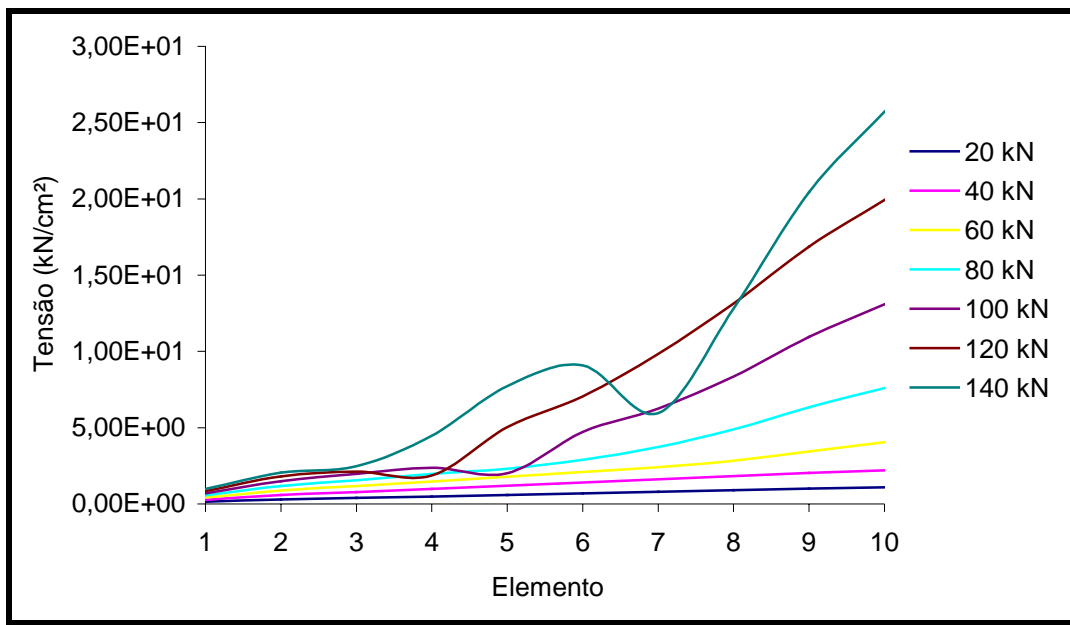
A Figura 6.2.8 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos das barras de aço, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (a)*, o qual considera a perda de aderência na interface aço-concreto.



**Figura 6.2.8-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – *ANLEC 2007 (a)*.

Para o carregamento de 140 kN, ocorreu uma mudança significativa nas curvaturas da distribuição da tensão no aço, influenciada pela diminuição da tensão de aderência (Figura 6.2.7), devido à deterioração da aderência ocasionada pelo aumento do deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto.

A Figura 6.2.9 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos das barras de aço, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (d)*, o qual considera a aderência perfeita entre o aço e o concreto.



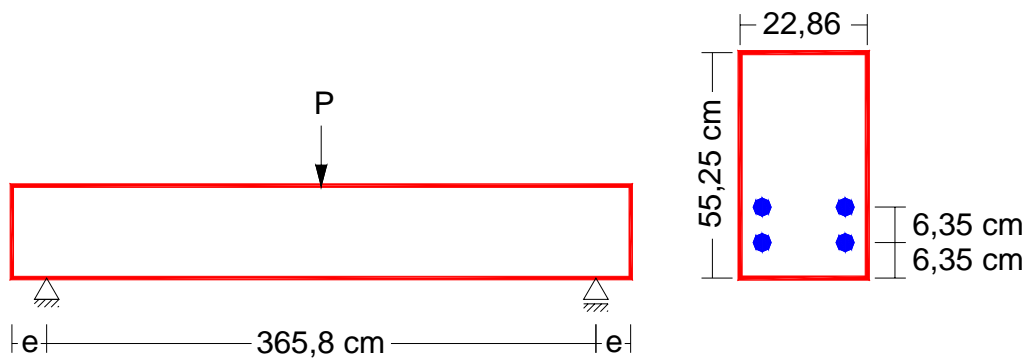
**Figura 6.2.9-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço (aderência perfeita).

As barras de aço estão um pouco menos solicitadas, se comparadas com a Figura 6.2.8, devido à não consideração da degradação da aderência na interface aço-concreto. Essa situação pode ser observada para a carga de 140 kN, quando a tensão de aderência atingiu valor máximo em algumas regiões da barra e começou a diminuir devido à degradação da aderência em outras regiões.

### 6.2.3 EXEMPLO NUMÉRICO 3

Neste exemplo são comparados os resultados obtidos com o programa *ANLEC 2007*, os resultados numéricos obtidos por **WANG (2001)** e os resultados numéricos obtidos por **BRESLER (1964)** citado por **WANG (2001)**, de uma viga de concreto armado submetida à flexão devido a um carregamento concentrado.

Abaixo (Figura 6.2.10) tem-se a conformação geométrica da viga simétrica utilizada neste exemplo:



**Figura 6.2.10-** Conformação geométrica da viga simétrica.

Para a análise comparativa foram aplicados cinco carregamentos concentrados ( $P$ ), no centro do vão da viga, com os seguintes valores: 50 kN, 100 kN, 150 kN, 200 kN e 250 kN, sendo obtidos os resultados para cada carregamento.

As informações das características físicas e geométricas, utilizadas neste exemplo, são apresentadas na Tabela 6.2.3.

Tabela 6.2.3- Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.

<b>Geometria</b>	Comprimento total da viga entre apoios (L)	365,8 cm
	Altura da viga (h)	55,25 cm
	Largura da viga (b)	22,86 cm
	Distância do apoio (e)	20 cm
<b>Cobrimento</b>	Concreto inferior ( $c_i$ )	6,35 cm
	Distância vertical entre as barras ( $c_b$ )	6,35 cm
<b>Armadura de Aço</b>	Número de barras na camada intermediária ( $n_{int}$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada intermediária ( $\phi_{int}$ )	2,858 cm
	Número de barras na camada inferior ( $n_i$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada inferior ( $\phi_i$ )	2,858 cm
<b>Aço</b>	Módulo de elasticidade, inicial ( $E_o$ )	191.400 MPa
	Tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	917 MPa
<b>Concreto</b>	Módulo de elasticidade ( $E_o$ )	21.300 MPa
	Resistência à compressão ( $F_{ck}$ )	24,5 MPa
<b>E. F.</b>	Número de elementos finitos na horizontal (total)	10
	Número de elementos finitos na vertical (total)	8
Nó apoio (259)		Nó carregamento (21)

A Figura 6.2.11 apresenta os resultados dos deslocamentos verticais no centro do vão da viga.

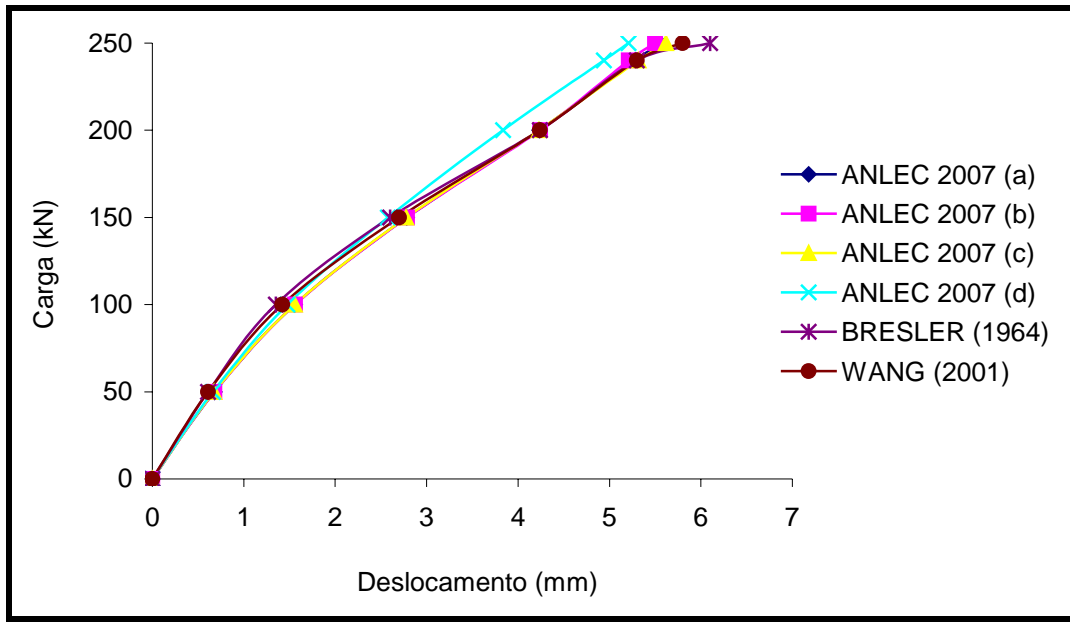
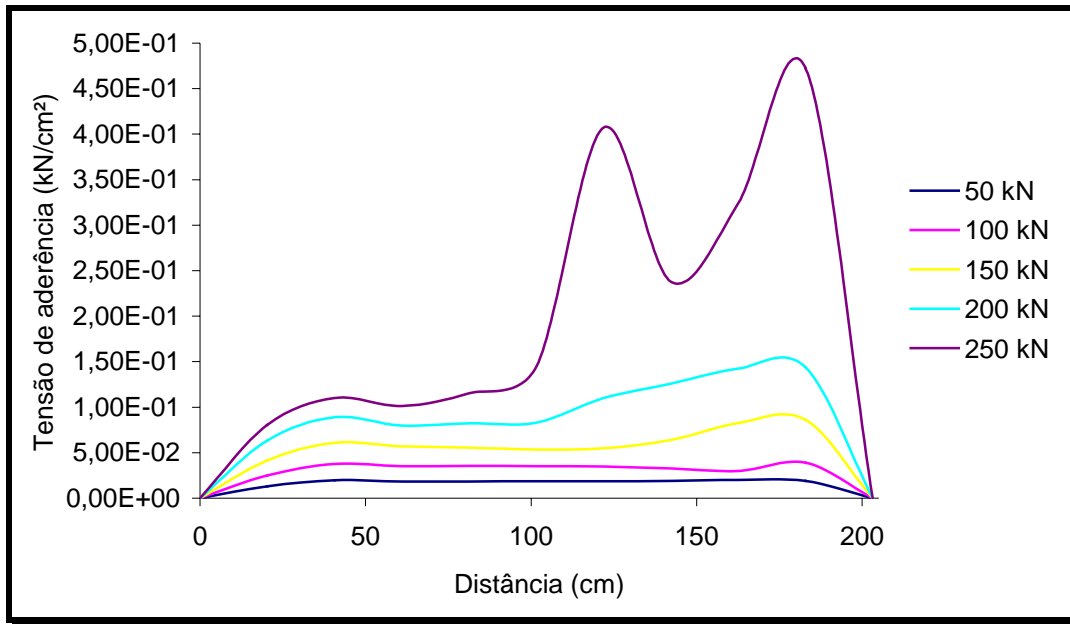


Figura 6.2.11- Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.

As curvas obtidas pelo programa *ANLEC 2007*, considerando a degradação da aderência, têm comportamento semelhante às curvas apresentadas por **WANG (2001)** e por **BRESLER (1964)** citado por **WANG (2001)**. A consideração da aderência perfeita influenciou o estado de fissuração do concreto deixando a viga um pouco mais rígida.

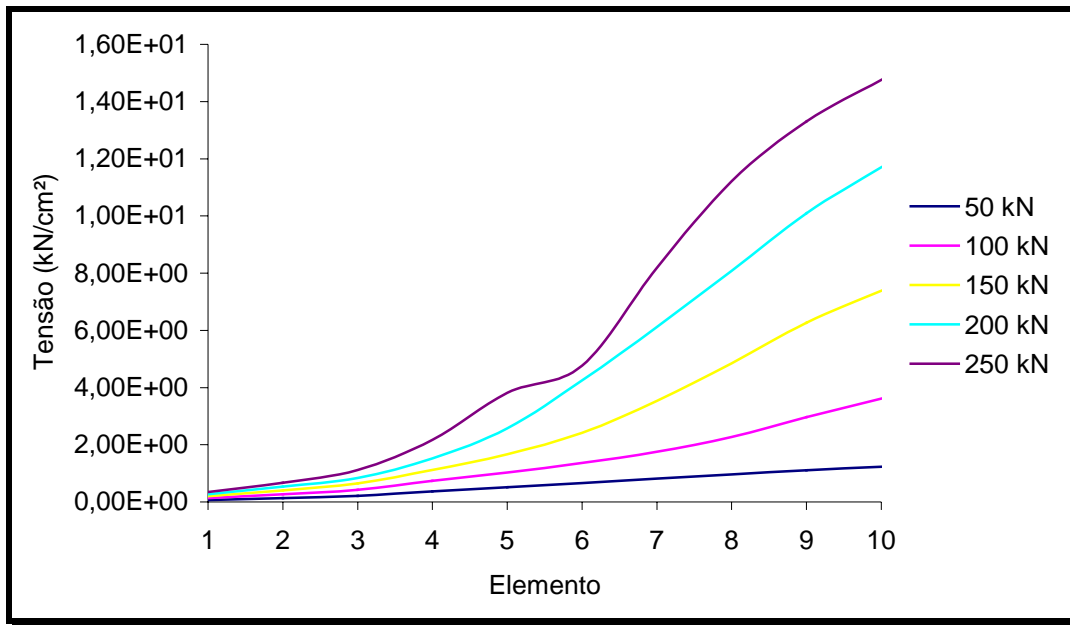
A Figura 6.2.12 apresenta a distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto, para as barras de aço do nível superior, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga.



**Figura 6.2.12-** Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).

Para a carga de 250 kN, algumas regiões da barra de aço tiveram um aumento significativo do deslizamento, levando a uma maior deterioração da aderência, ocasionando uma diminuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto.

A Figura 6.2.13 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos das barras de aço do nível superior, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (a)*, o qual considera a perda de aderência na interface aço-concreto.



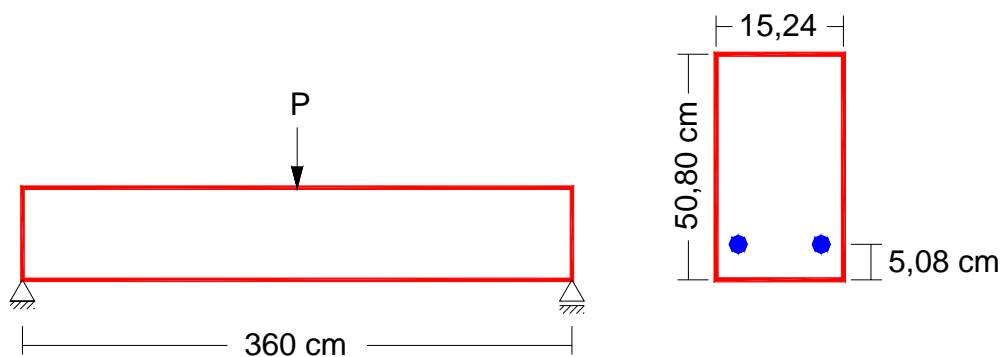
**Figura 6.2.13-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – *ANLEC 2007 (a)*.



#### 6.2.4 EXEMPLO NUMÉRICO 4

Neste exemplo são comparados os resultados obtidos com o programa *ANLEC 2007*, os resultados numéricos obtidos por **KWAK (2001a)** e os resultados experimentais citados por **KWAK (2001a)**, de uma viga de concreto armado submetida à flexão devido a um carregamento concentrado.

Abaixo (Figura 6.2.14) tem-se a conformação geométrica da viga simétrica utilizada neste exemplo:



**Figura 6.2.14-** Conformação geométrica da viga simétrica.

Para a análise comparativa foram aplicados cinco carregamentos concentrados ( $P$ ), no centro do vão da viga, com os seguintes valores: 2,5 tf, 5 tf, 7,5 tf, 10 tf e 12,5 tf, sendo obtidos os resultados para cada carregamento.

As informações das características físicas e geométricas, utilizadas neste exemplo, são apresentadas na Tabela 6.2.4.

**Tabela 6.2.4-** Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.

<b>Geometria</b>	Comprimento total da viga entre apoios (L)	360 cm
	Altura da viga (h)	50,80 cm
	Largura da viga (b)	15,24 cm
<b>Cobrimento</b>	Concreto inferior ( $c_i$ )	5,08 cm
<b>Armadura de Aço</b>	Número de barras na camada inferior ( $n_i$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada inferior ( $\phi_i$ )	2,1 cm
<b>Aço</b>	Módulo de elasticidade, inicial ( $E_o$ )	2.074.145 kgf/cm <sup>2</sup>
	Tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	3.157 kgf/cm <sup>2</sup>
<b>Concreto</b>	Módulo de elasticidade ( $E_o$ )	267.178 kgf/cm <sup>2</sup>
	Resistência à compressão ( $F_{ck}$ )	340 kgf/cm <sup>2</sup>
<b>E. F.</b>	Número de elementos finitos na horizontal (total)	8
	Número de elementos finitos na vertical (total)	6
Nó apoio (157)		Nó carregamento (17)

A Figura 6.2.15 apresenta os resultados dos deslocamentos verticais no centro do vão da viga.

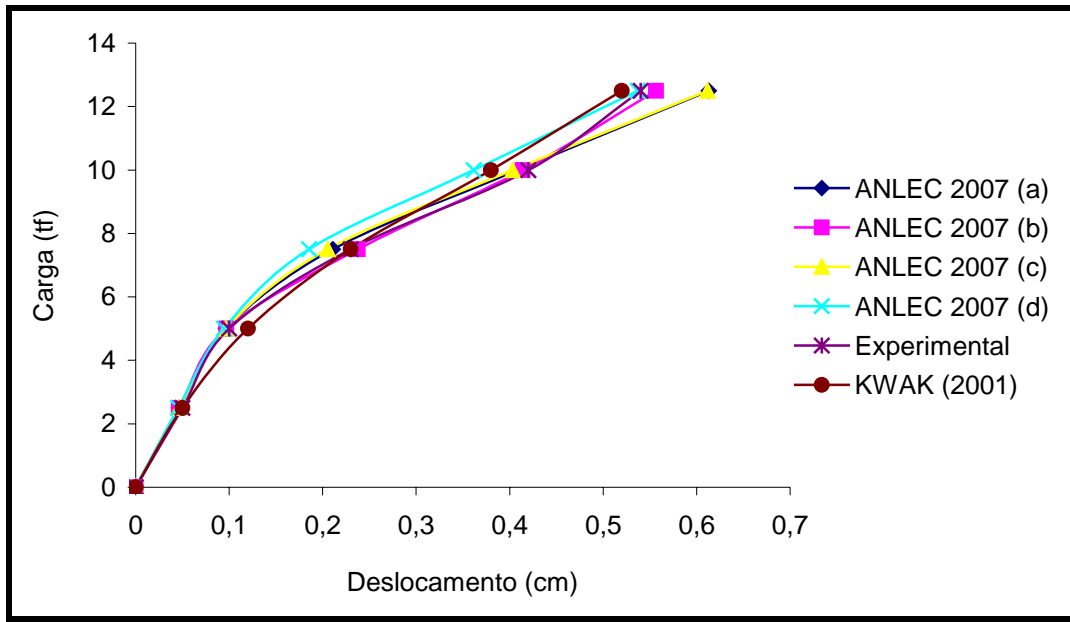
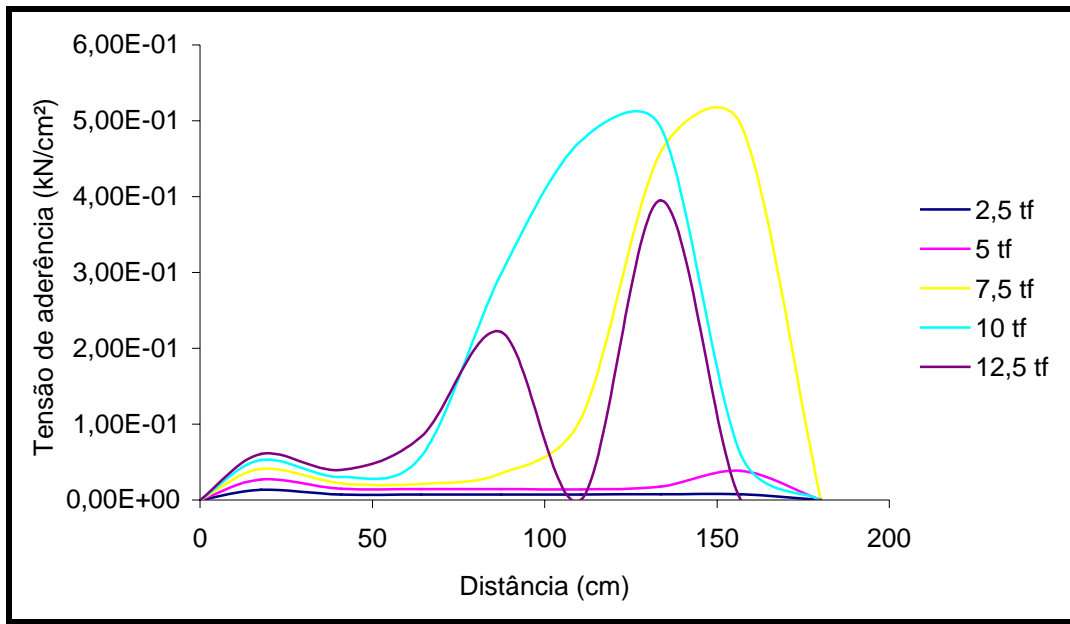


Figura 6.2.15- Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.

As curvas obtidas pelo programa *ANLEC 2007*, considerando a degradação da aderência, possuem um comportamento semelhante à curva experimental. A modelagem apresentada por **KWAK (2001a)**, a qual considera os efeitos da degradação da aderência entre a barra de aço e o concreto, apresenta uma rigidez um pouco maior, se comparada com a curva experimental.

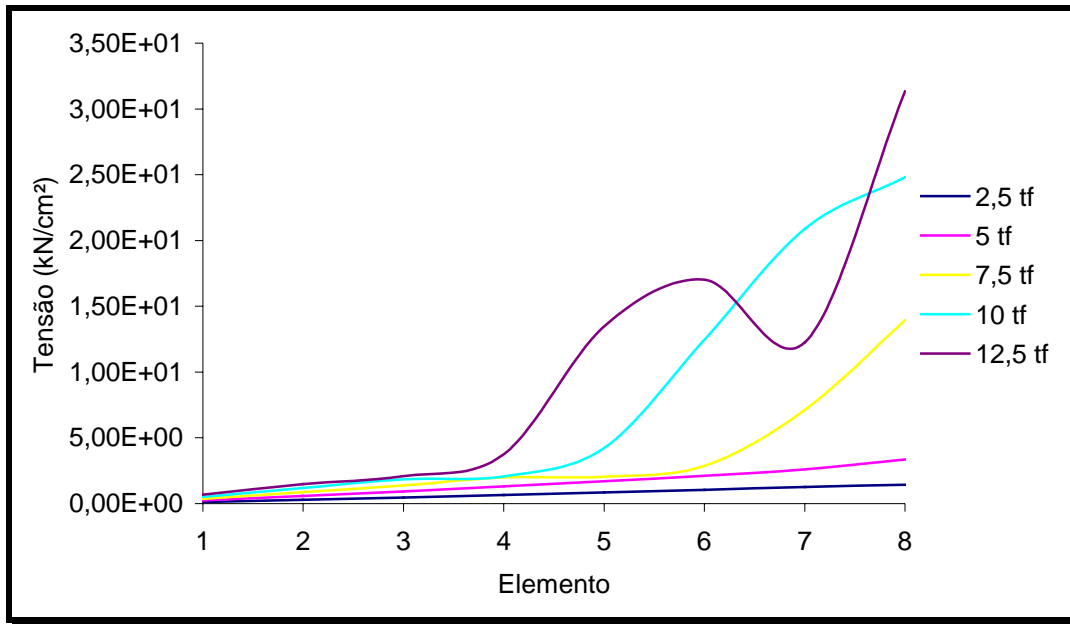
A Figura 6.2.16 apresenta a distribuição da tensão de aderência entre as barras de aço e o concreto, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga.



**Figura 6.2.16-** Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).

A aumento da deterioração da aderência causada pelo aumento do carregamento fica claro para os carregamentos de 7,5 tf, 10 tf e 12,5 tf, em que, para certas regiões da armadura, a transferência de tensões de um material para outro diminuiu consideravelmente.

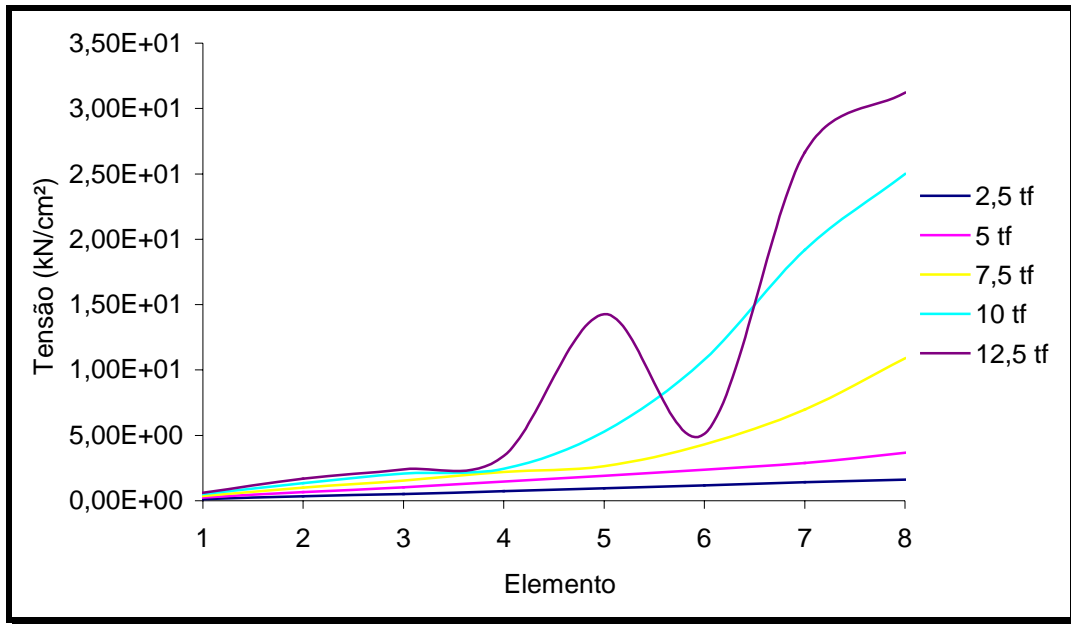
A Figura 6.2.17 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos das barras de aço, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (a)*, o qual considera a perda de aderência na interface aço-concreto.



**Figura 6.2.17-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – *ANLEC 2007 (a)*.

Para o carregamento de 12,5 tf, ocorreu uma mudança considerável na forma da curva de distribuição da tensão no aço devido à mudança na distribuição da tensão de aderência e também ao estado de fissuração mais avançado do concreto.

A Figura 6.2.18 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos das barras de aço, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (d)*, o qual considera a aderência perfeita entre o aço e o concreto.

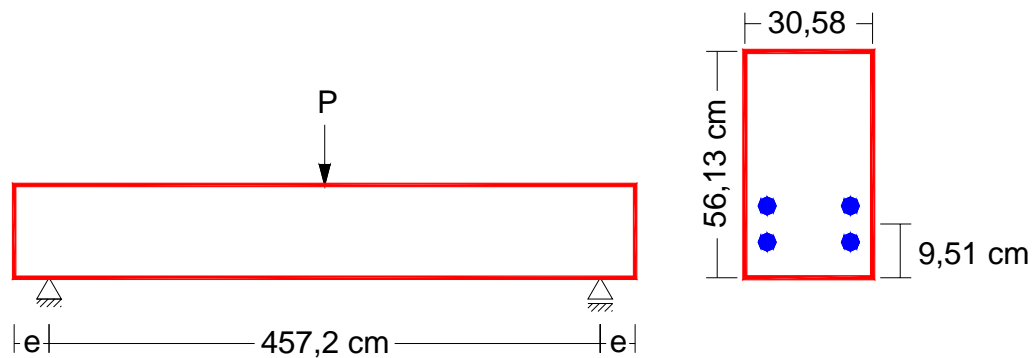


**Figura 6.2.18-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço (aderência perfeita).

### 6.2.5 EXEMPLO NUMÉRICO 5

Neste exemplo são comparados os resultados obtidos com o programa *ANLEC 2007*, os resultados numéricos obtidos por **YANG (2005)**, os resultados numéricos obtidos por **BRESLER (1963)** citado por **YANG (2005)** e os resultados numéricos obtidos por **INGRAFFEA (1984)** citado por **YANG (2005)**, de uma viga de concreto armado submetida à flexão devido a um carregamento concentrado.

Abaixo (Figura 6.2.19) tem-se a conformação geométrica da viga simétrica utilizada neste exemplo:



**Figura 6.2.19-** Conformação geométrica da viga simétrica.

Para a análise comparativa foram aplicados cinco carregamentos concentrados ( $P$ ), no centro do vão da viga, com os seguintes valores: 50 kN, 100 kN, 150 kN, 200 kN e 250 kN, sendo obtidos os resultados para cada carregamento.

As informações das características físicas e geométricas, utilizadas neste exemplo, são apresentadas na Tabela 6.2.5.

Tabela 6.2.5- Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.

<b>Geometria</b>	Comprimento total da viga entre apoios (L)	502,92 cm
	Altura da viga (h)	56,13 cm
	Largura da viga (b)	30,58 cm
	Distância do apoio (e)	22,86 cm
<b>Cobrimento</b>	Concreto inferior ( $c_i$ )	2,54 cm
	Distância vertical entre as barras ( $c_b$ )	8,224 cm
<b>Armadura de Aço</b>	Número de barras na camada intermediária ( $n_{int}$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada intermediária ( $\phi_{int}$ )	2,858 cm
	Número de barras na camada inferior ( $n_i$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada inferior ( $\phi_i$ )	2,858 cm
<b>Aço</b>	Módulo de elasticidade, inicial ( $E_o$ )	200.000 MPa
	Tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	552 MPa
<b>Concreto</b>	Módulo de elasticidade ( $E_o$ )	24.000 MPa
	Resistência à compressão ( $F_{ck}$ )	23,7 MPa
<b>E. F.</b>	Número de elementos finitos na horizontal (total)	8
	Número de elementos finitos na vertical (total)	8
Nó apoio (211)		Nó carregamento (17)



A Figura 6.2.20 apresenta os resultados dos deslocamentos verticais no centro do vão da viga.

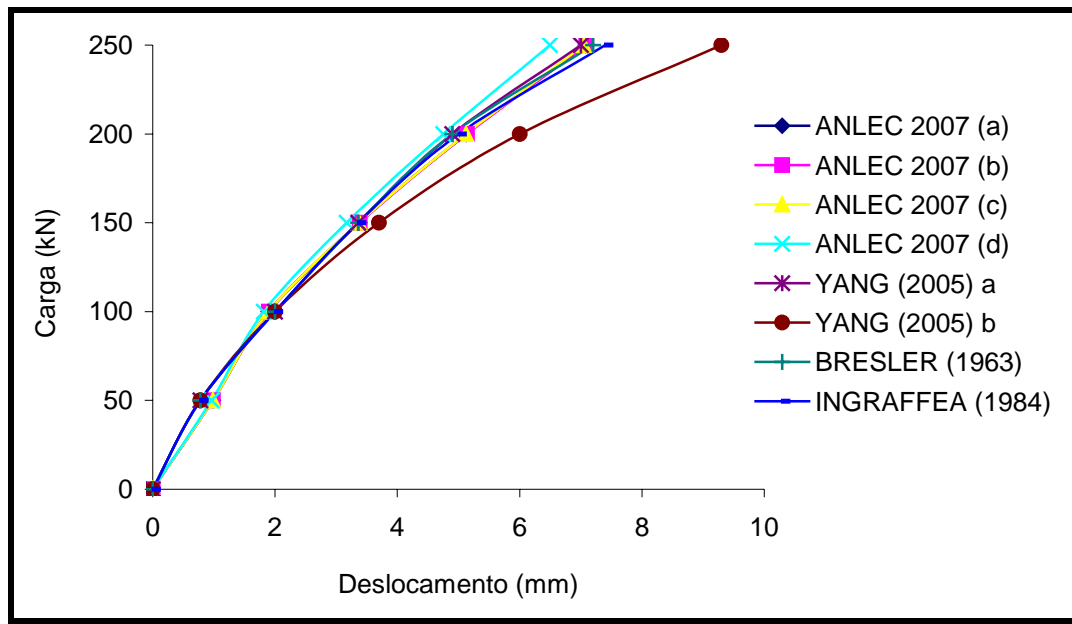
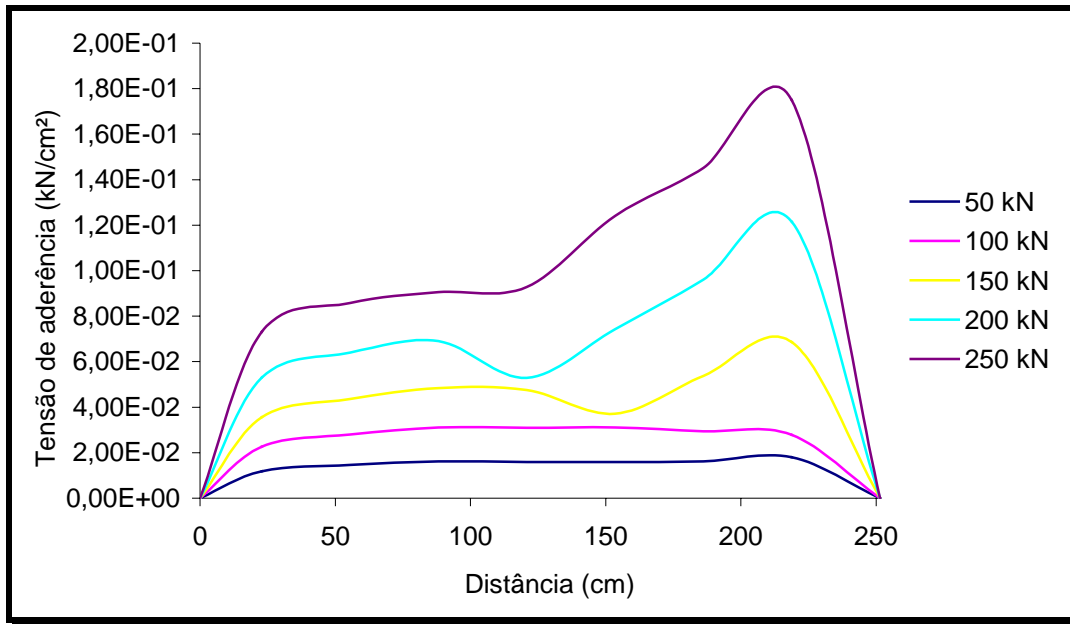


Figura 6.2.20- Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.

As curvas obtidas pelo programa *ANLEC 2007*, considerando a degradação da aderência, possuem um comportamento semelhante às curvas obtidas por **YANG (2005) a**, que considera a perda da aderência entre a barra de aço e o concreto, por **BRESLER (1963)** citado por **YANG (2005)** e por **INGRAFFEA (1984)** citado por **YANG (2005)**. A curva obtida por **YANG (2005) b**, que considera a barra de aço pouco aderida ao concreto, tem menor rigidez que as outras curvas, mostrando a influência das condições da aderência no comportamento final da viga.

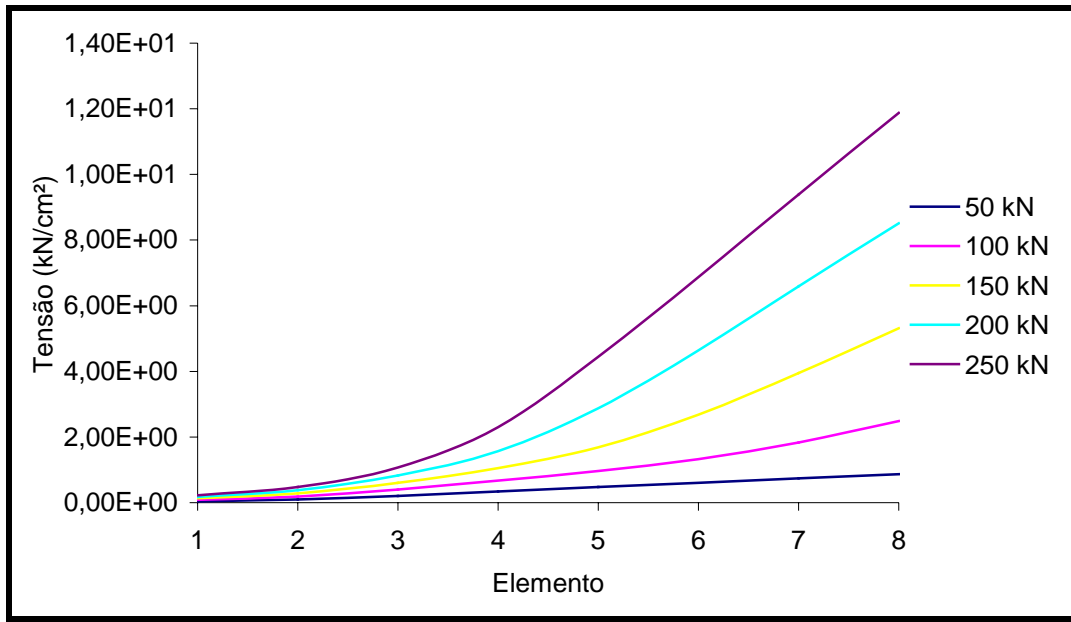
A Figura 6.2.21 apresenta a distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto, para as barras de aço do nível superior, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga.



**Figura 6.2.21-** Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).

Devido às características da viga, o máximo carregamento aplicado não provocou grandes deslizamentos que levassem a significativa deterioração da aderência.

A Figura 6.2.22 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos das barras de aço do nível superior, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (a)*, o qual considera a perda de aderência na interface aço-concreto.



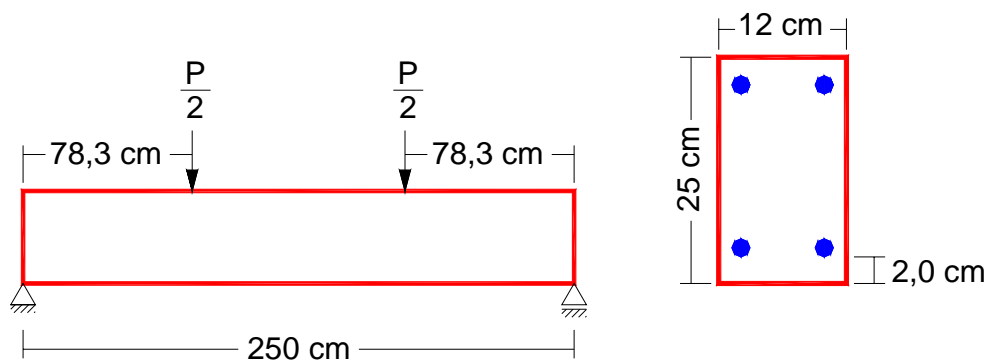
**Figura 6.2.22-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – *ANLEC 2007 (a)*.

Como os carregamentos aplicados não provocaram significativas deteriorações da aderência, causando perda da tensão de aderência, a tensão ao longo das barras de aço teve uma forma de distribuição semelhante para todos os carregamentos, sem mudanças bruscas nas curvaturas das curvas.

### 6.2.6 EXEMPLO NUMÉRICO 6

Neste exemplo são comparados os resultados obtidos com o programa *ANLEC 2007*, os resultados numéricos obtidos por **AURICH (2003)** e os resultados experimentais citados por **AURICH (2003)**, de uma viga de concreto armado submetida à flexão devido aos carregamentos concentrados simétricos.

Abaixo (Figura 6.2.23) tem-se a conformação geométrica da viga simétrica utilizada neste exemplo:



**Figura 6.2.23-** Conformação geométrica da viga simétrica.

Para a análise comparativa foram aplicados cinco carregamentos concentrados simétricos ( $P$ ), com os seguintes valores: 10 kN, 20 kN, 30 kN, 40 kN e 50 kN, sendo obtidos os resultados para cada carregamento.

As informações das características físicas e geométricas, utilizadas neste exemplo, são apresentadas na Tabela 6.2.6.

Tabela 6.2.6- Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.

<b>Geometria</b>	Comprimento total da viga entre apoios (L)	250 cm
	Altura da viga (h)	25 cm
	Largura da viga (b)	12 cm
<b>Cobrimento</b>	Concreto superior ( $c_s$ )	2 cm
	Concreto inferior ( $c_i$ )	2 cm
<b>Armadura de Aço</b>	Número de barras na camada superior ( $n_s$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada superior ( $\phi_s$ )	6,3 mm
	Número de barras na camada inferior ( $n_i$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada inferior ( $\phi_i$ )	10 mm
<b>Aço</b>	Módulo de elasticidade, inicial ( $E_o$ )	210.000 MPa
	Módulo de elasticidade, escoamento ( $E_y$ )	2.926 Mpa
	Tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	549 Mpa
	Tensão de ruptura ( $\sigma_{rup}$ )	659 Mpa
<b>Concreto</b>	Módulo de elasticidade ( $E_o$ )	38.200 MPa
	Poisson ( $\nu$ )	0,20
	Resistência à compressão ( $F_{ck}$ )	33,3 MPa
	Deformação última ( $\epsilon_u$ )	0,0038
	Resistência à tração ( $F_{tk}$ )	3,28 MPa
<b>E. F.</b>	Número de elementos finitos na horizontal (total)	8
	Número de elementos finitos na vertical (total)	8
Nó apoio (209)		Nó carregamento (11)

A Figura 6.2.24 apresenta os resultados dos deslocamentos verticais no centro do vão da viga.

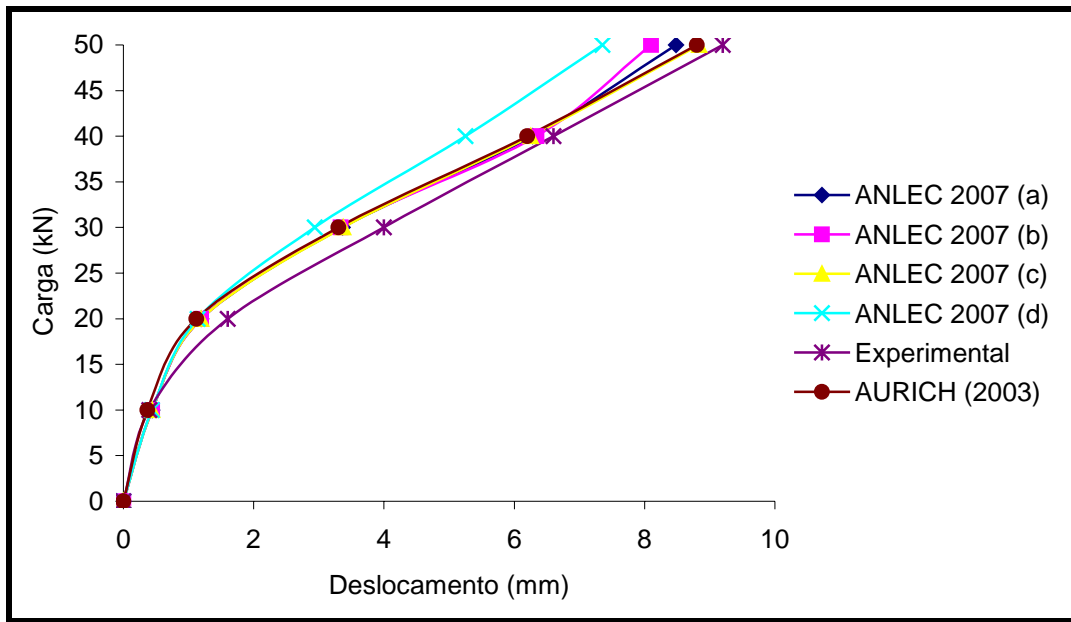
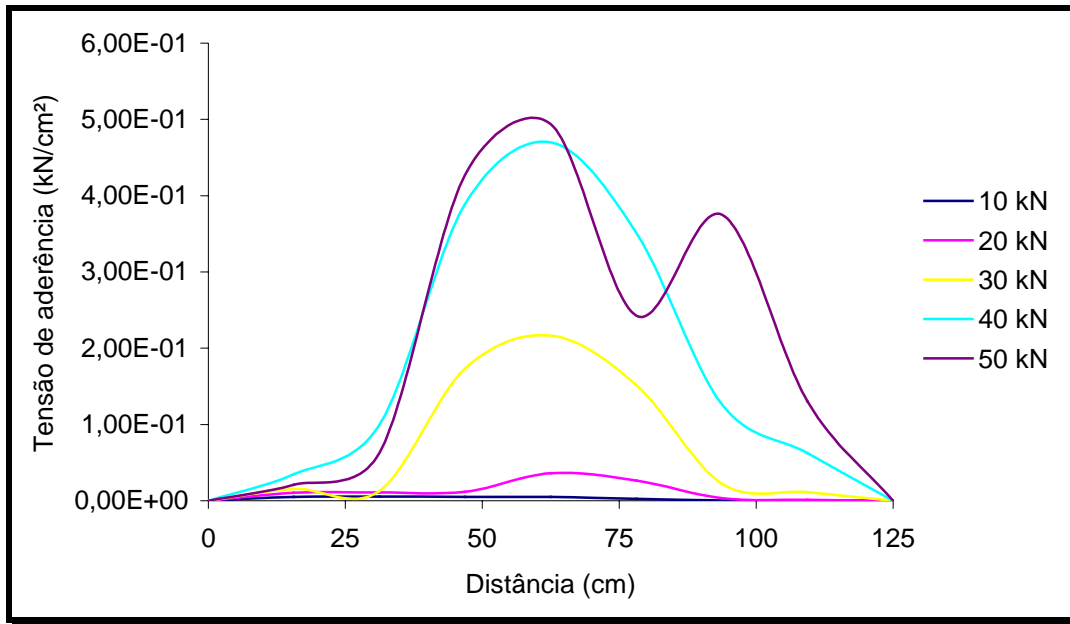


Figura 6.2.24- Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.

As curvas obtidas pelo programa *ANLEC 2007*, considerando a degradação da aderência, são as que mais se aproximam da curva experimental citada por **AURICH (2003)**. A modelagem apresentada por **AURICH (2003)** utiliza elementos tridimensionais para o concreto, elementos unidimensionais para o aço e considera os efeitos da aderência através da mudança do sistema de forças na barra, apresentando um bom comportamento.

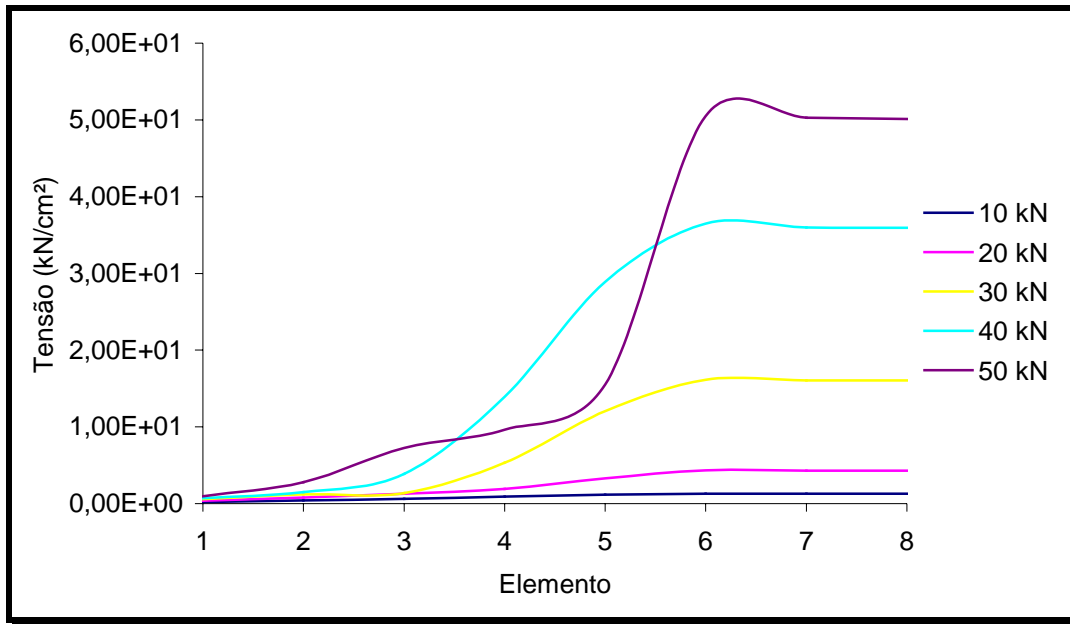
A Figura 6.2.25 apresenta a distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto, para as duas barras de aço do nível inferior, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga.



**Figura 6.2.25-** Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).

Com o aumento do carregamento, aumentaram as fissuras no concreto e o deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto também aumentou. A máxima tensão de aderência ocorreu para o carregamento de 50 kN, e em algumas regiões da barra de aço, o aumento do deslizamento levou a deterioração da aderência ocasionando uma diminuição da tensão de aderência ao longo de algumas regiões da barra de aço, quando se compara com o carregamento de 40 kN.

A Figura 6.2.26 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos das barras de aço do nível inferior, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (a)*, o qual considera a perda de aderência na interface aço-concreto.



**Figura 6.2.26-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – *ANLEC 2007 (a)*.

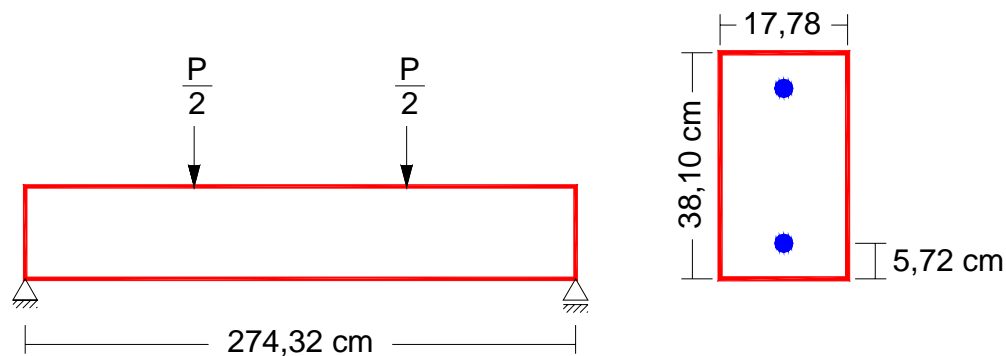
Como o carregamento de 50 kN provocou significativas deteriorações da aderência, causando diminuição da tensão de aderência, a distribuição da tensão ao longo das barras de aço foi significativamente influenciada, causando mudanças bruscas na forma da curva.



### 6.2.7 EXEMPLO NUMÉRICO 7

Neste exemplo são comparados os resultados obtidos com o programa *ANLEC 2007*, os resultados numéricos obtidos por **KWAK (2002b)** e os resultados experimentais citados por **KWAK (2002b)**, de uma viga de concreto armado submetida à flexão devido aos carregamentos concentrados simétricos

Abaixo (Figura 6.2.27) tem-se a conformação geométrica da viga simétrica utilizada neste exemplo:



**Figura 6.2.27-** Conformação geométrica da viga simétrica.

Para a análise comparativa foram aplicados seis carregamentos concentrados simétricos ( $P$ ), com os seguintes valores: 2.5 tf, 5 tf, 7.5 tf, 10 tf, 12.5 tf e 15 tf, sendo obtidos os resultados para cada carregamento.

As informações das características físicas e geométricas, utilizadas neste exemplo, são apresentadas na Tabela 6.2.7.

Tabela 6.2.7- Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.

<b>Geometria</b>	Comprimento total da viga entre apoios (L)	274,32 cm
	Altura da viga (h)	38,10 cm
	Largura da viga (b)	17,78 cm
<b>Cobrimento</b>	Concreto inferior ( $c_i$ )	4,06 cm
<b>Armadura de Aço</b>	Número de barras na camada inferior ( $n_s$ )	1 barra
	Diâmetro das barras da camada inferior ( $\phi_s$ )	2,36 cm
	Número de barras na camada inferior ( $n_i$ )	1 barra
	Diâmetro das barras da camada inferior ( $\phi_i$ )	3,33 cm
<b>Aço</b>	Módulo de elasticidade, inicial ( $E_o$ )	2.040.000 kgf/cm <sup>2</sup>
	Tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	5.623 kgf/cm <sup>2</sup>
<b>Concreto</b>	Módulo de elasticidade ( $E_o$ )	110.000 kgf/cm <sup>2</sup>
	Resistência à compressão ( $F_{ck}$ )	334 kgf/cm <sup>2</sup>
<b>E. F.</b>	Número de elementos finitos na horizontal (total)	6
	Número de elementos finitos na vertical (total)	8
Nó apoio (161)		Nó carregamento (9)

A Figura 6.2.28 apresenta os resultados dos deslocamentos verticais no centro do vão da viga.

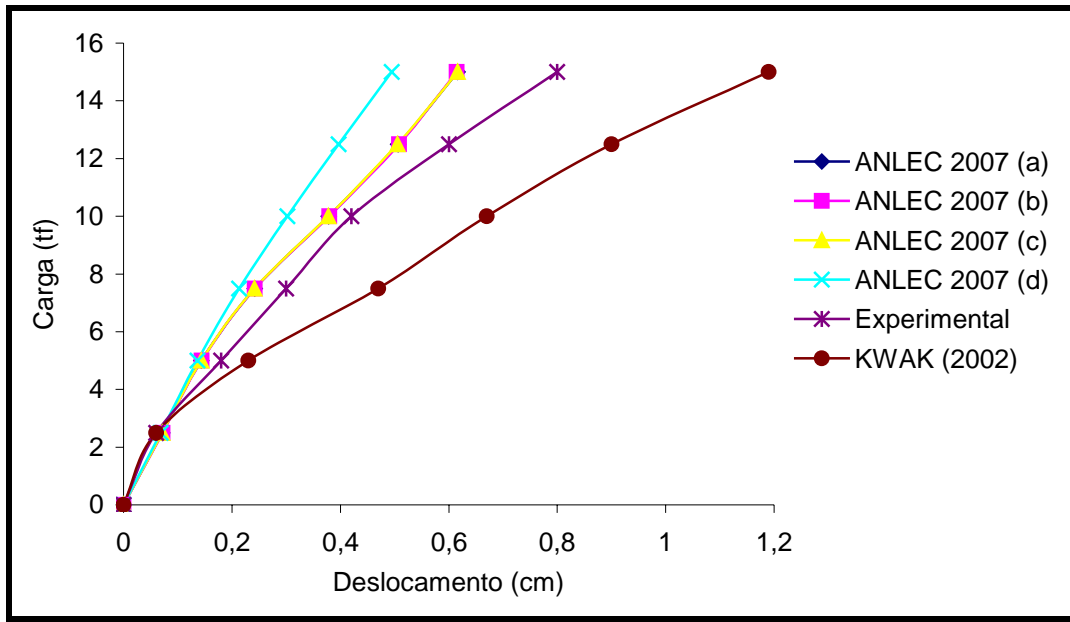
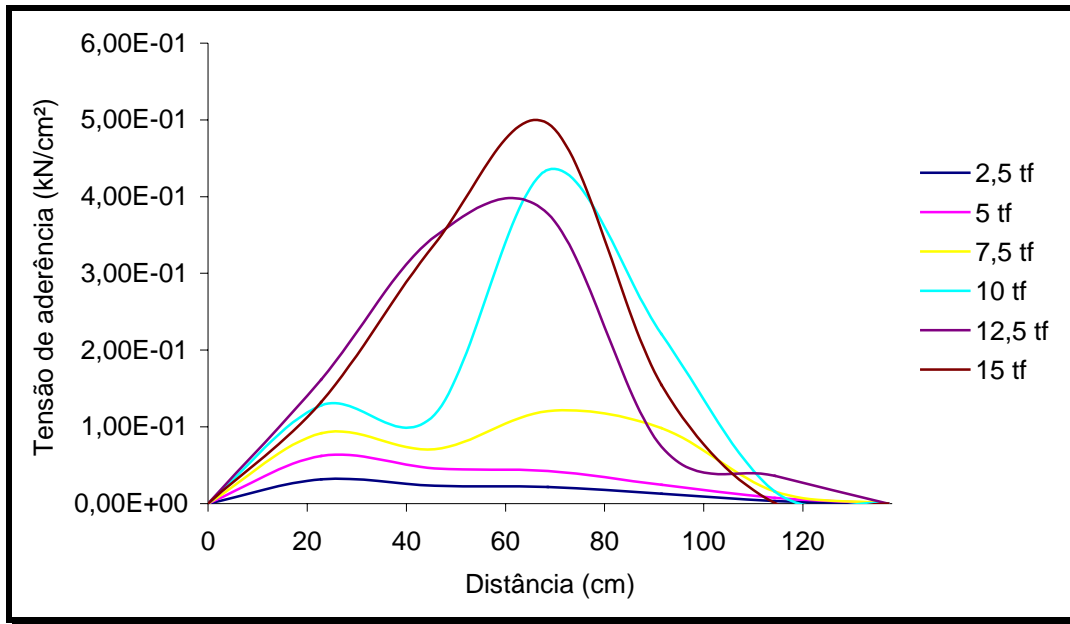


Figura 6.2.28- Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.

As curvas obtidas pelo programa *ANLEC 2007*, considerando a degradação da aderência, possuem uma distribuição próxima à curva experimental citada por **KWAK (2002b)**. Os resultados obtidos por **KWAK (2002b)** consideram os efeitos da perda aderência entre a barra de aço e o concreto, porém a curva apresentada possui rigidez menor que a curva experimental.

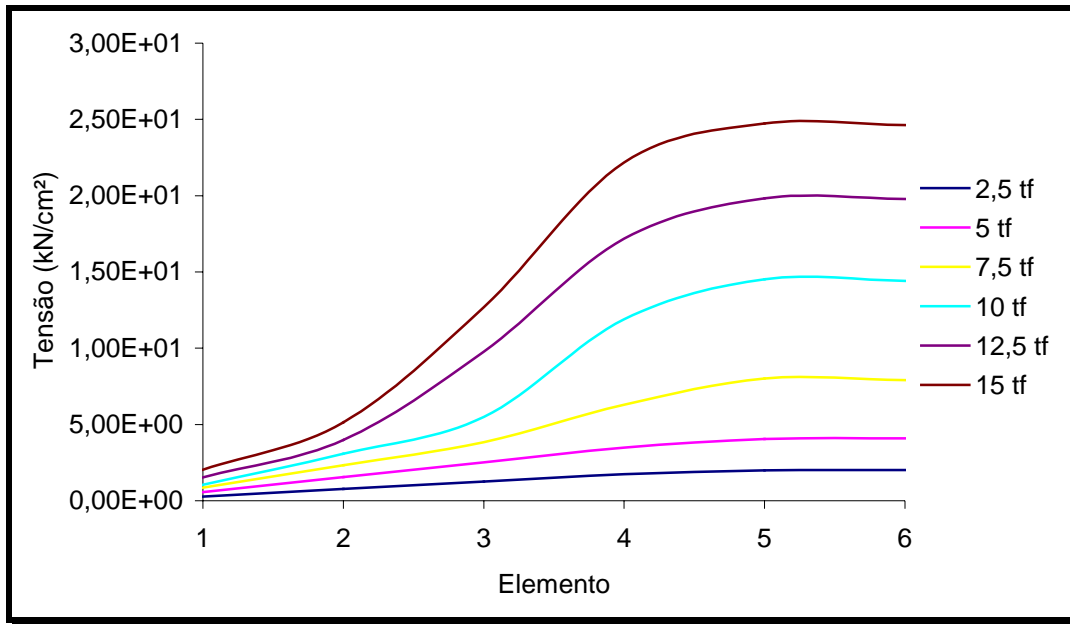
A Figura 6.2.29 apresenta a distribuição da tensão de aderência entre aço e o concreto, para a barra de aço inferior, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga.



**Figura 6.2.29-** Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).

Devido às características da viga, o máximo carregamento aplicado não provocou grandes deslizamentos que levassem a significativas deteriorações da aderência.

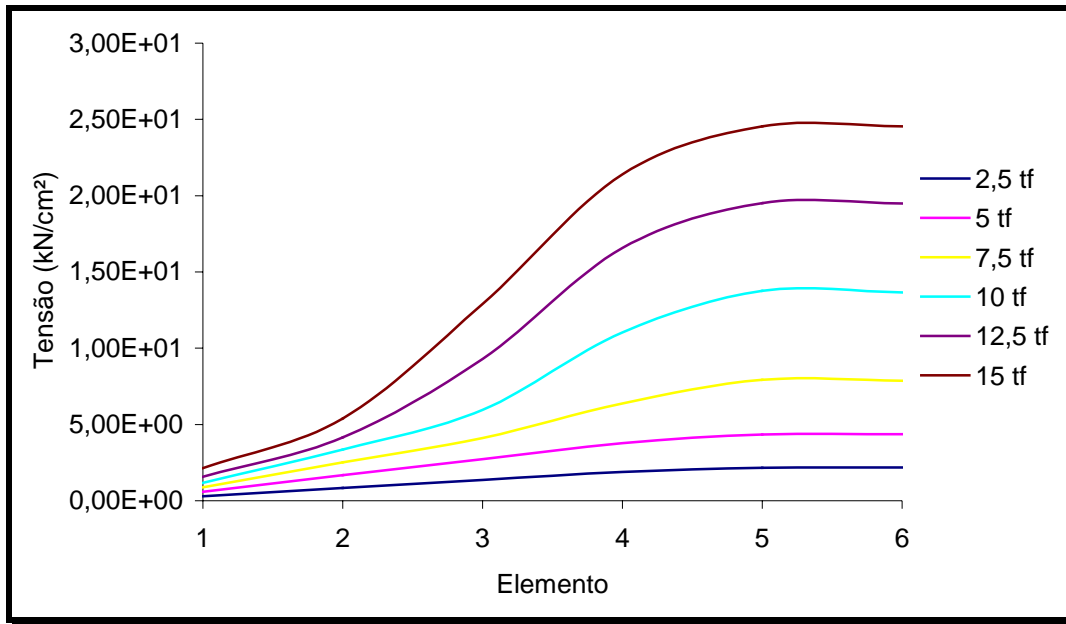
A Figura 6.2.30 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos da barra de aço inferior, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (a)*, o qual considera a perda de aderência na interface aço-concreto.



**Figura 6.2.30-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – *ANLEC 2007 (a)*.

Como os carregamentos aplicados não provocaram significativas deteriorações da aderência, causando perda da tensão de aderência, a tensão ao longo das barras de aço teve uma forma de distribuição semelhante para todos os carregamentos, sem mudanças bruscas nas curvaturas das curvas.

A Figura 6.2.31 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos da barra de aço inferior, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (d)*, o qual considera a aderência perfeita na interface aço-concreto.



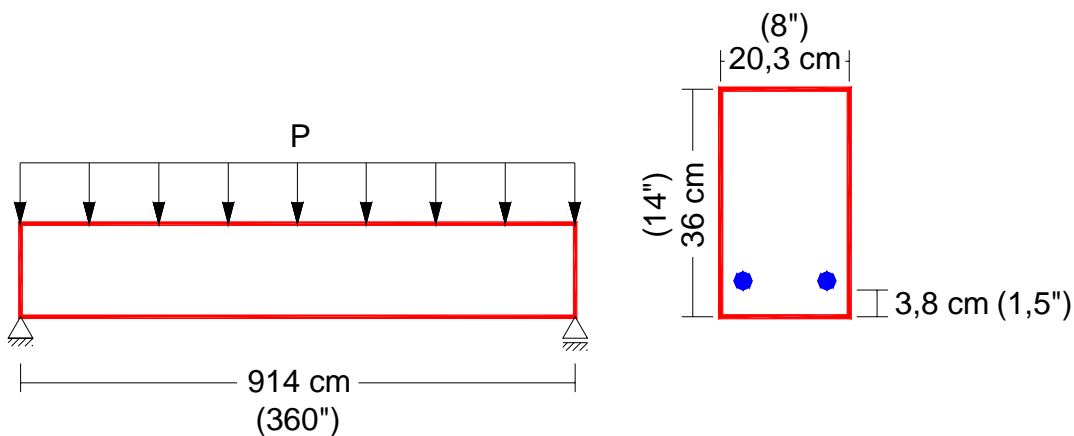
**Figura 6.2.31-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço (aderência perfeita).

As barras estão um pouco menos solicitadas, se comparadas com a Figura 6.2.30, devido à não consideração da degradação da aderência aço-concreto.

### 6.2.8 EXEMPLO NUMÉRICO 8

Neste exemplo são comparados os resultados obtidos com o programa *ANLEC 2007* e os resultados numéricos apresentados por **GREUNEN (1979)** e por **CHAN (1982)**, de uma viga de concreto armado submetida à flexão devido a um carregamento distribuído.

Abaixo (Figura 6.2.32) tem-se a conformação geométrica da viga simétrica utilizada neste exemplo:



**Figura 6.2.32-** Conformação geométrica da viga simétrica.

Para a análise comparativa foram aplicados três carregamentos distribuídos, com os seguintes valores: 8,8 kN/m (50 lbf/in), 17,6 kN/m (100 lbf/in) e 26,4 kN/m (150 lbf/in), sendo obtidos os resultados para cada carregamento.

As informações das características físicas e geométricas, utilizadas neste exemplo, são apresentadas na Tabela 6.2.8.

**Tabela 6.2.8-** Dados do exemplo para a viga simétrica submetida à flexão.

<b>Geometria</b>	Comprimento total da viga entre apoios (L)	914 cm (360 in)
	Altura da viga (h)	36 cm (14 in)
	Largura da viga (b)	20,3 cm (8 in)
<b>Cobrimento</b>	Concreto inferior ( $c_i$ )	3,8 cm (1,5 in)
<b>Armadura de Aço</b>	Número de barras na camada inferior ( $n_i$ )	2 barras
	Diâmetro das barras da camada inferior ( $\phi_i$ )	2,85 cm (1,125 in)
<b>Aço</b>	Módulo de elasticidade, inicial ( $E_o$ )	19.995,5 kN/cm <sup>2</sup> (29.000.000 psi)
	Módulo de elasticidade, escoamento ( $E_y$ )	238,5 kN/cm <sup>2</sup> (346.000 psi)
	Tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )	82,7 kN/cm <sup>2</sup> (120.000 psi)
	Tensão de ruptura ( $\sigma_{rup}$ )	99,3 kN/cm <sup>2</sup> (144.000 psi)
<b>Concreto</b>	Módulo de elasticidade ( $E_o$ )	2.643,5 kN/cm <sup>2</sup> (3.834.000 psi)
	Poisson ( $\nu$ )	0,20
	Resistência à compressão ( $F_{ck}$ )	5,5 kN/cm <sup>2</sup> (8.000 psi)
	Deformação última ( $\epsilon_u$ )	0,0038
	Resistência à tração ( $F_{tk}$ )	0,53 kN/cm <sup>2</sup> (775 psi)
<b>E. F.</b>	Número de elementos finitos na horizontal (total)	10
	Número de elementos finitos na vertical (total)	6
Nó apoio (193)		Carregamento distribuído



A Figura 6.2.33 apresenta os resultados dos deslocamentos verticais no centro do vão da viga.

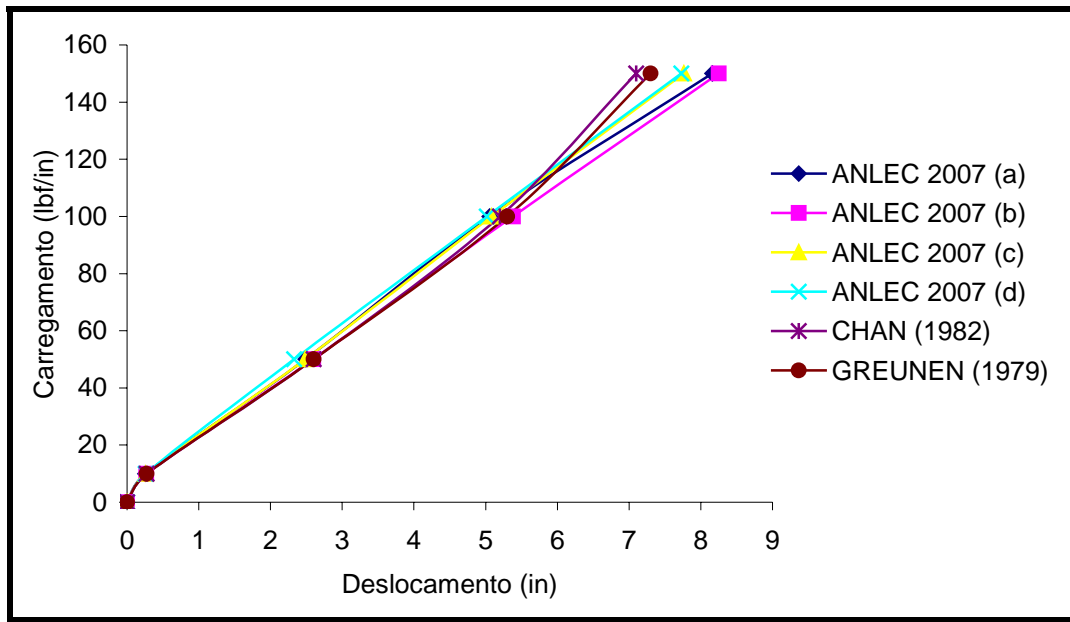


Figura 6.2.33- Gráfico: carga x deslocamento vertical no centro do vão.

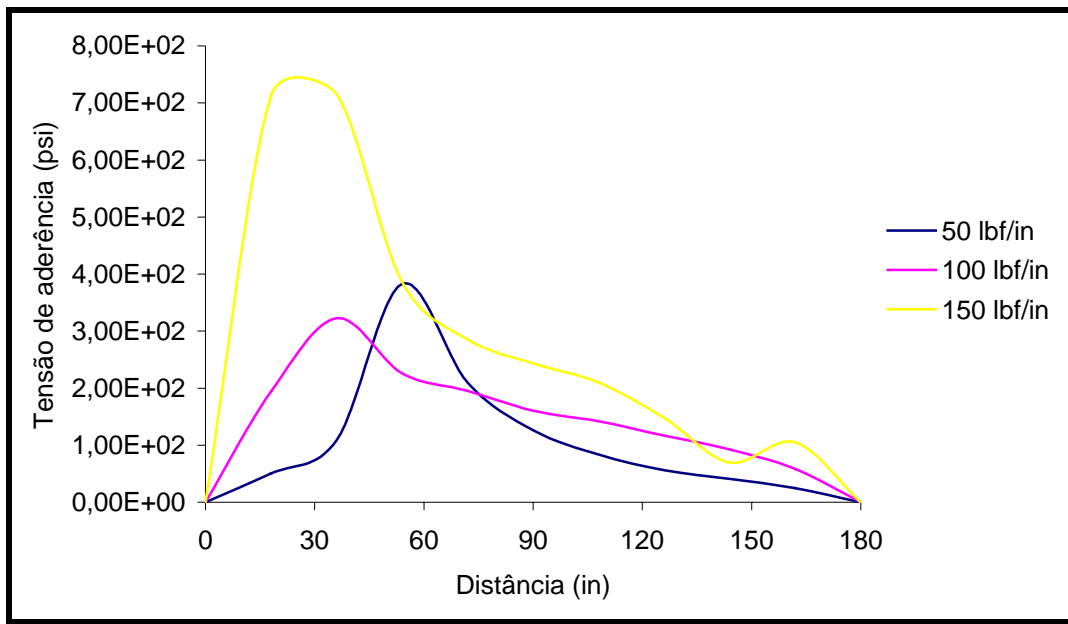
As modelagens apresentadas por **GREUNEN (1979)** e por **CHAN (1982)** consideram os efeitos das não-linearidades físicas e geométricas, porém não consideram a degradação da aderência entre a barra de aço e o concreto, apresentando maior rigidez que as curvas obtidas pelo programa *ANLEC 2007*, considerando a degradação da aderência.

A curva obtida por *ANLEC 2007 (d)*, para a aderência perfeita, caminha próxima das outras três curvas obtidas com o programa até o início da fissuração do concreto, a partir do qual as três curvas mostram que a viga apresentou uma perda de rigidez um pouco maior, devido à degradação da aderência entre a barra de aço e o concreto.

Para um carregamento de 146 lbf/in a máxima tensão de compressão encontrada no concreto e máxima tensão de tração encontrada no aço, apresentados por **CHAN (1982)**, foram respectivamente, 6.9 ksi e 109 ksi. Com o programa *ALENC*

2007, a máxima tensão de compressão encontrada no concreto foi de 7,8 ksi e máxima tensão de tração encontrada no aço foi de 109 ksi.

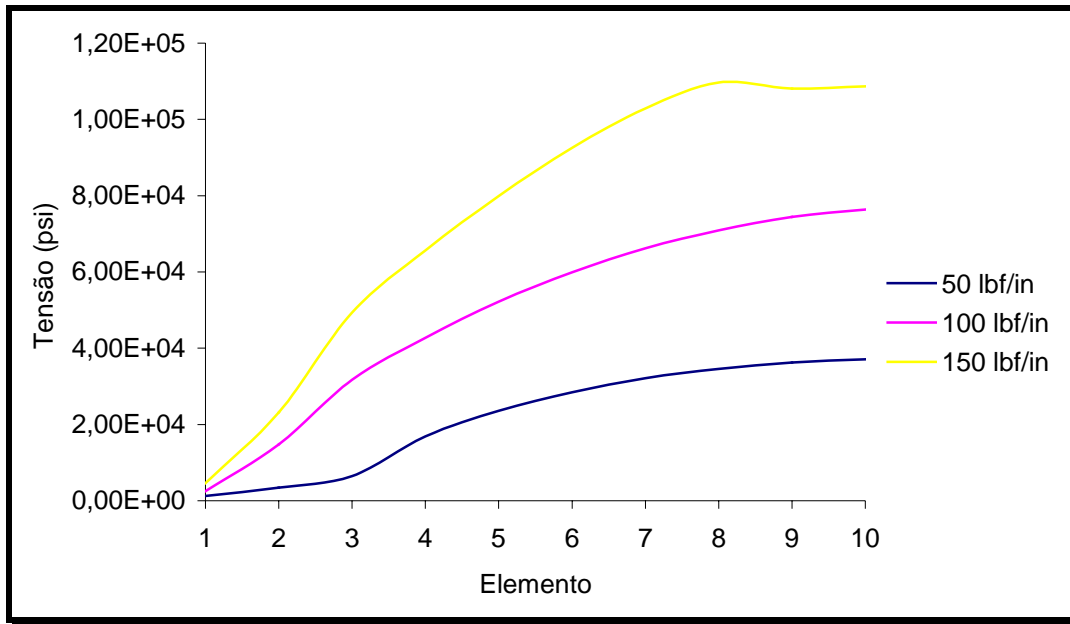
A Figura 6.2.34 apresenta a distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto, para as barras de aço, a partir da extremidade esquerda até o centro do vão da viga.



**Figura 6.2.34-** Gráfico: distribuição da tensão de aderência entre o aço e o concreto – ANLEC 2007 (a).

Com o aumento do carregamento distribuído e aumento do estado de fissuração do concreto, a distribuição da tensão de aderência ao longo das barras de aço foi modificada, onde, em alguns trechos, ela diminuiu devido à degradação da interface.

A Figura 6.2.35 apresenta a distribuição da tensão no centro dos elementos finitos das barras de aço, obtida pelo programa *ANLEC 2007 (a)*, o qual considera a perda de aderência na interface aço-concreto.



**Figura 6.2.35-** Gráfico: distribuição da tensão no centro dos elementos da barra de aço – *ANLEC 2007 (a)*.

Como os carregamentos aplicados não provocaram significativas deteriorações da aderência, causando perda da tensão de aderência, a tensão ao longo das barras de aço teve uma distribuição semelhante para todos os carregamentos, sem mudanças bruscas.

## **CAPÍTULO 7**

### ***CONSIDERAÇÕES FINAIS***

A análise dos resultados dos exemplos numéricos do capítulo anterior mostra que a consideração da não linearidade física dos materiais e a introdução da degradação da aderência na interface aço-concreto, na análise numérica de estrutura de concreto armado, se mostram de grande importância quando se quer uma modelagem mais realista do funcionamento dessa estrutura, possibilitando uma investigação mais confiável do seu comportamento nas possíveis condições de uso facilitando a observação de prováveis falhas, que venham a ocorrer, antes que essa estrutura seja executada e posta em uso.

Os procedimentos e modelos numéricos apresentados nesta Tese consideram as principais e mais importantes características dos materiais e suas interações e, diferentemente de muitas propostas de modelagens numéricas encontradas na literatura, têm a vantagem de poder ser incorporados em diferentes implementações computacionais para a análise de diferentes tipos de estruturas de concreto armado como vigas, pilares, lajes, pórticos e suas combinações.

Utilizando o Método dos Elementos Finitos, um procedimento incremental-iterativo de carregamento e os modelos descritos no corpo da Tese, foi desenvolvido um programa computacional para viga simétrica bi-apoiada submetida à flexão simples.

Porém, vale ressaltar que esses modelos e procedimentos podem ser utilizados na análise de vigas não simétricas e de outros tipos de estruturas de concreto armado.

Para a mesma modelagem computacional foram comparados resultados obtidos com o uso de diferentes curvas da tensão de aderência x deslizamento e aderência perfeita, mostrando as suas influências na rigidez da interface entre o aço e o concreto, devido às diferenças nos limites da tensão de aderência e do deslizamento, com conseqüência importante no comportamento global da estrutura. A relação apresentada pelo **CEB (1990)** possibilitou um ajuste dos parâmetros da curva tensão de aderência x deslizamento com os dados e características da estrutura a ser analisada, através de tabelas, o que não ocorre com as curvas de **NILSON (1968)** e **MIRZA (1979)** que têm os parâmetros fixos nos polinômios. Os resultados obtidos com a consideração da aderência perfeita evidenciam a importância da consideração da degradação da aderência aço-concreto, principalmente quando o concreto apresenta não-linearidade causada pelo seu estado de fissuração nas regiões de tração.

Os resultados obtidos com a modelagem numérica desenvolvida mostraram-se de grande confiabilidade e coerência, quando comparados com resultados experimentais, apresentando-se melhores que muitos resultados, obtidos por análise numérica, encontrados na literatura.

Como sugestões, os procedimentos e modelos numéricos apresentados poderiam ser incorporados em modelagens para análise de outros tipos de estruturas como, por exemplo, pilares, lajes, pórticos e suas combinações, considerando ações monotônicas e ações cíclicas.

## BIBLIOGRAFIA

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A. S. C. E. . ***State-of-the-art report on finite element analysis of reinforced concrete***; American Society of Civil Engineers, New York – USA, 1982.

ABELES, P. W. . ***Cracking and bond resistance in high strength reinforced concrete beams, illustrated by photoelastic coating***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 63, November, pp. 1265-1278, 1966.

ALLWOOD, R. J. ; BAJARWAN, A. A. . ***A new method for modelling reinforcement and bond in finite element analyses of reinforced concrete***; International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 28, pp. 833-844, 1989.

ALLWOOD, R. J. ; BAJARWAN, A. A. . ***Modeling nonlinear bond-slip behavior for finite element analyses of reinforced concrete structures***; ACI Structural Journal, Vol. 93, No. 5, September-October, pp. 538-544, 1996.

ALMEIDA FILHO, F. M. . ***Contribuição ao estudo da aderência entre barras de aço e concretos auto-adensáveis***; Tese Doutorado, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos – SP, Brasil, 2006.

AMARAL FILHO, E. M. . **Classificação de concretos**; CD - Concreto de Alto Desempenho, Vol. 1, NUTAU – USP, São Paulo – SP, Brasil, 1997.

ASSAN, A. E. . **Método dos elementos finitos: primeiros passos**; Editora da Unicamp, Campinas – SP, Brasil, 1999.

AURICH, M. ; CAMPOS FILHO, A. . **Modelo de aderência para análise através do método dos elementos finitos de vigas de concreto armado reforçadas**; Teoria e Prática na Engenharia Civil, No. 3, Junho, pp. 3-14, 2003.

AYOUB, A. ; FILIPPOU, F. C. . **Mixed formulation of bond-slip problems under cyclic loads**; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 125, No. 6, June, pp. 661-671, 1999.

AZAD, A. K. ; AHMAD, S. ; AZHER, S. A. . **Residual strength of corrosion-damaged reinforced concrete beams**; ACI Materials Journal, Vol. 104, No. 1, January-February, pp. 40-47, 2007.

BARBOSA, M. P. . **Uma contribuição experimental e numérica sobre estruturas de concreto armado de elevado desempenho: estudo da aderência-ancoragem e do comportamento de vigas fletidas**; Tese Livre-Docência, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira – SP, Brasil, 1998.

BATIS, G. ; RAKANTA, E. . **Corrosion of steel reinforcement due to atmospheric pollution**; Elsevier, Cement & Concrete Composites, Vol. 27, pp. 269-275, 2005.

BRESLER, B. ; BERTERO, V. . **Behavior of reinforced concrete under repeated load**; ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 94, No. ST6, June, pp. 1567-1590, 1968.

BROOKE, N. J. ; MEGGET, M. ; INGHAM, J. M. . ***Bond performance of interior beam-column joints with high-strength reinforcement***, ACI Structural Journal, Vol. 103, No. 4, July-August, pp. 596-603, 2006.

CAMPIONE, G. ; CUCCHIARA, C. ; MENDOLA, L. . ***Steel-concrete bond in lightweight fiber reinforced concrete under monotonic and cyclic actions***; Elsevier, Engineering Structures, Vol. 27, pp. 881-890, 2005.

CAO, J. ; CHUNG, D. D. L. . ***Degradation of the bond between concrete and steel under cyclic shear loading, monitored by contact electrical resistance measurement***, Cement and Concrete Research, Vol. 31, pp. 669-671, 2001.

CHAN, E. C. . ***Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced concrete shells with edge beams***; Structural Engineering and Structural Mechanics, December, University of California, Berkeley, California – USA, 1982.

CHEN, G. ; BAKER, G. . ***Influence of bond slip on crack spacing in numerical modeling of reinforced concrete***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 129, No. 11, November, pp. 1514-1521, 2003.

CHOI, O. C. ; LEE, W. S. . ***Interfacial bond analysis of deformed bars to concrete***; ACI Structural Journal, Vol. 99, No. 6, November-December, pp. 750-756, 2002.

CLARK, A. P. . ***Bond of concrete reinforcing bars***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 46, November, pp. 161-184, 1949.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, ***CEB – FIP Model Code 1990***; Bulletin d' Information, 203-205, 1991.

CORONELLI, D ; MULAS, M. G. . ***Modeling of shear behavior in reinforced concrete beams***; ACI Structural Journal, Vol. 103, No. 3, May-June, pp. 372-382, 2006.



DARWIN, D. ; PECKNOLD, D. A. W. . ***Inelastic model for cyclic biaxial loading of reinforced concrete***; Civil Engineering Studies, University of Illinois, July, Illinois, USA, 1974.

DÉSIR, J. M. . ***Interface aço-concreto: reformulando os modelos constitutivos e numéricos***; Tese Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Brasil, 1998.

DUCATTI, V. A. . ***Concreto de elevado desempenho: estudo da aderência com a armadura***; Tese Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, Brasil, 1993.

EL-HAWARY, M. M. ; HAMOUSH, S. A. . ***Bond Shear modulus of reinforcing concrete at high temperatures***; Engineering Fracture Mechanics, Vol. 55, No. 6, pp. 991-999, 1996.

ELMORSI, M. ; KIANOUSH, M. R. ; TSO, W. K. . ***Modeling bond-slip deformations in reinforced concrete beam-column joints***; Journal of Civil Engineering, Vol. 27, pp. 490-505, 2000.

FANG, C. ; LUNDGREN, K. ; CHEN, L. ; ZHU, C. . ***Corrosion influence on bond in reinforced concrete***; Cement and Concrete Research, Vol. 34, pp. 2159-2167, 2004.

FANG, C. ; LUNDGREN, K. ; PLOS, M. ; GYLLTOFT, K. . ***Bond behavior of corroded reinforcing steel bars in concrete***; Cement and Concrete Research, Vol. 36, pp. 1931-1938, 2006.

FERGUSON, P. M. ; TURPIN, R. D. ; THOMPSON, J. N. . ***Minimum bar spacing as a function of bond and shear strength***; ACI Journal, Proc. Vol. 50, June, pp. 869-887, 1954.

FERGUSON, P. M. . **Bond stress – the state of the art**; ACI Journal, *Proc.* Vol. 63, November, pp. 1161-1190, 1966.

FERNANDES, R. M. ; EL DEBS, A. L. H. C. . **A influência das ações repetidas na aderência aço-concreto**; XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, Punta Del Este, Uruguay, 2000.

FIGUEIRAS, J. A. . **Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells**; Ph.D. Thesis, University of Wales, Swansea, 1983.

FRANÇA, V. H. . **Aderência aço-concreto – uma análise do comportamento do concreto fabricado com resíduos de borracha**; Dissertação Mestrado, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira – SP, Brasil, 2004.

GIRARD, C. ; BASTIEN, J. . **Finite-element bond-slip model for concrete columns under cyclic loads**; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 128, No. 12, December, pp. 1502-1510, 2002.

GOTO, Y. . **Cracks formed in concrete around deformed tension bars**; ACI Journal, *Proc.* Vol. 68, April, pp. 244-251, 1971.

GREUNEN, J. V. . **Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete slabs and panels**; Structures and Materials Research, October, University of California, Berkeley, California – USA, 1979.

GROOT, A. K. ; KUSTERS, G. M. A. ; MONNIER, T. . **Numerical modeling of bond-slip behavior**; Heron, Conc. Mech., Vol. 26, 1981.

HADDAD, R. H. ; NUMAYR, K. S. . **Effect of alkali-silica reaction and freezing and thawing action on concrete-steel bond**; Elsevier, Construction and Building Materials, Vol. 21, pp. 428-435, 2007.

HIGGINS, C ; FARROW, W. C. . **Tests of reinforced concrete beams with corrosion-damaged stirrups**; ACI Structural Journal, Vol. 103, No. 1, January-February, pp. 133-141, 2006.

ISMAIL, M. A. F. ; JIRSA, J. O. . **Bond deterioration in reinforced concrete subject to low cycle loads**; ACI Journal, *Proc.* Vol. 69, June, pp. 334-343, 1972.

JENDELE, L. ; CERVENKA, J. . **Bond slip in modelling of RC structures for engineering practice**; Computational Concrete Structures Technology, Civil-Comp Press, Edinburgh – Scotland, pp. 1-18, 2004.

JENDELE, L. ; CERVENKA, J. . **Finite element modelling of reinforcement with bond**; Computers & Structures, Vol. 84, pp. 1780-1791, 2006.

JEPSSON, J. ; THELANDERSSON, S. . **Behavior of reinforced concrete beams with loss of bond at longitudinal reinforcement**; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 129, No. 10, October, pp. 1376-1383, 2003.

JIANG, D. H. ; SHAH, S. P. ; ANDONIAN, A. T. . **Study of the transfer of tensile forces by bond**; ACI Journal, *Proc.* Vol. 81, May-June, pp. 251-259, 1984.

KAEFER, L. F. . **A evolução do concreto armado**; Apostila, Universidade de São Paulo – USP, São Paulo – SP, Brasil, 1998.

KAMINSKA, M. E. . **High-strength concrete and steel interaction in RC members**; Elsevier, Cement & Concrete Composites, Vol. 24, pp. 281-295, 2002.

KANG, Y. J. . **Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete frames**; Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, USA, 1977.

KEMP, E. L. . ***Bond in reinforced concrete: behavior and design criteria***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 83, January-February, pp. 50-57, 1986.

KEUSER, M. ; MEHLHORN, G. . ***Finite element models for bond problems***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 10, October, pp. 2160-2173, 1987.

KUPFER, H. B. ; HILSDORF, H. K. . ***Behavior of concrete under biaxial stresses***; ACI Journal, Vol. 66, August, pp. 656-666, 1969.

KUPFER, H. B. ; GERSTLE, K. H. . ***Behavior of concrete under biaxial stresses***; ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 99, No. EM4, August, pp. 852-866, 1973.

KWAK, H. G. ; FILIPPOU, F. C. . ***A new reinforcing steel model with bond-slip***; Journal Structural Engineering and Mechanics, Vol. 3, No. 4, pp. 299-312, 1995.

KWAK, H. G. ; FILIPPOU, F. C. . ***Nonlinear FE analysis of R/C structures under monotonic loads***; Computers & Structures, Vol. 65, pp. 1-16, 1997.

KWAK, H. G. ; KIM, S. P. . ***Bond-slip behavior under monotonic uniaxial loads***; Elsevier, Engineering Structures, Vol. 23, pp. 298-309, 2001a.

KWAK, H. G. ; KIM, S. P. . ***Nonlinear analysis of RC beam subject to cyclic loading***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 127, No. 12, December, pp. 1436-1444, 2001b.

KWAK, H. G. ; SONG, J. Y. . ***Cracking analysis of RC members using polynomial strain distribution function***; Elsevier, Engineering Structures, Vol. 24, pp. 455-468, 2002a.

KWAK, H. G. ; KIM, S. P. . ***Nonlinear analysis of RC beams based on moment-curvature relation***; Computers & Structures, Vol. 80, pp. 615-628, 2002b.

KWAK, H. G. ; KIM, D. Y. . ***Material nonlinear analysis of RC shear walls subject to monotonic loadings***; Elsevier, Engineering Structures, Vol. 26, pp. 1517-1533, 2004.

KWAK, H. G. ; KIM, D. Y. . ***Implementation of bond-slip effect in analyses of RC frames under cyclic loads using layered section method***; Elsevier, Engineering Structures, Vol. 28, pp. 1715-1727, 2006.

LIMKATANYU, S. ; SPACONE, E. . ***Reinforced concrete frame element with bond interfaces. I: displacement-based, force-based, and mixed formulations***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 128, No. 3, March, pp. 346-355, 2002a.

LIMKATANYU, S. ; SPACONE, E. . ***Reinforced concrete frame element with bond interfaces. II: state determinations and numerical validation***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 128, No. 3, March, pp. 356-364, 2002b.

LIU, T. C. Y. ; NILSON, A. H. ; SLATE, F. O. . ***Biaxial stress-strain relations for concrete***; ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 98, No. ST5, May, pp. 1025-1034, 1972.

LOWES, L. N. ; MOEHLE, J. P. ; GOVINDJEE, S. . ***Concrete-steel bond model for use in finite element modeling of reinforced concrete structures***; ACI Structural Journal, Vol. 101, No. 4, July-August, pp. 501-511, 2004.

LUCCIONI, B. M. ; LÓPEZ, D. E. ; DANESI, R. F. . ***Bond-slip in reinforced concrete elements***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 131, No. 11, November, pp. 1690-1698, 2005.

LUTZ, L. A. ; GERGELY, P. . ***Mechanics of bond and slip of deformed bars in concrete***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 64, November, pp. 711-721, 1967.

MAINS, R. M. . ***Measurement of the distribution of tensile and bond stresses along reinforcing bars***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 48, November, pp. 225-252, 1951.

MANFREDI, G. ; PECCE, M. . ***A refined R. C. beam element including bond-slip relationship for the analysis of continuous beams***; Computers & Structures, Vol. 69, pp. 53-62, 1998.

MARINS NETO, J. . ***Análise do deslizamento entre aço e concreto***; Dissertação Mestrado, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas – SP, Brasil, 2002.

McHENRY, D. ; WALKER, W. T. . ***Laboratory measurements of stress distribution in reinforcing steel***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 44, June, pp. 1041-1054, 1948.

MINDESS, S. ; YOUNG, J. F. . ***Concrete***; Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1981.

MIRZA, S. M. ; HOUDE, J. . ***Study of bond stress-slip relationships in reinforced concrete***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 76, January, pp. 19-46, 1979.

MONTI, G. ; SPACONE, E. . ***Reinforced concrete fiber beam element with bond-slip***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 126, No. 6, June, pp. 654-661, 2000.

MYLREA, T. D. . ***Bond and anchorage***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 44, March, pp. 521-552, 1948.

NGO, D. ; SCORDELIS, A. C. . ***Finite element analysis of reinforced concrete beams***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 64, March, pp. 152-163, 1967.

NILSON, A. H. . ***Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 65, September, pp. 757-766, 1968.

OLIVEIRA, R. S. ; CORRÊA, M. R. S. ; RAMALHO, M. A. . ***A refined reinforced concrete beam element including bond-slip relationship***; Computational Concrete Structures Technology, Civil-Comp Press, Edinburgh – Scotland, pp. 107-113, 2000.

OLIVEIRA FILHO, J. . ***Estudo teórico-experimental da influência das cargas cíclicas na rigidez de vigas de concreto armado***; Tese Doutorado, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos – SP, Brasil, 2005.

OWEN, D. R. J. ; HINTON, E. . ***Finite elements in plasticity***; Pineridge Press Limited, Swansea, UK, 1980.

PERRY, E. S. ; THOMPSON, J. N. . ***Bond stress distribution on reinforcing steel in beams and pullout specimens***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 63, August, pp. 865-875, 1966.

PERRY, E. S. ; JUNDI, N. . ***Pullout bond stress distribution under static and dynamic repeated loadings***; ACI Journal, *Proc.* Vol. 66, May, pp. 377-380, 1969.

RAJAGOPAL, K. R. . ***Nonlinear analysis of reinforced concrete beams, beam-columns and slabs by finite elements***; Ph.D. Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa, 1976.

RASHID, Y. R. . ***Analysis of prestressed concrete pressure vessels***; Nuclear Engineering and Design, Vol. 7, No. 4, April, pp. 334-344, 1968.

ROSA, W. A. . ***Modelagem do deslizamento entre o aço e o concreto com tensão de aderência não-linear***; Dissertação Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Brasil, 1994.

ROTS, J. G. ; NAUTA, P. ; KUSTERS, G. M. A. . ***Smearred crack approach and fracture localization in concrete***; Heron, Vol. 30, No. 1, 1985.

RUSSO, G. ; ZINGONE, G. ; ROMANO, F. . ***Analytical solution for bond-slip of reinforcing bars in R. C. joints***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No. 2, February, pp. 336-355, 1990.

SAENZ, L. P. . ***Discussion of "equation for the stress-strain curve of concrete", by DESAYI, P. and KRISHNAN, S.***; ACI Journal, Proc. Vol. 61, September, pp. 1229-1235, 1964.

SALARI, M. R. ; SPACONE, E. . ***Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip***; Elsevier, Engineering Structures, Vol. 23, pp. 815-826, 2001.

SHAYANFAR, M. A. . ***Nonlinear finite element analysis of normal and high strength concrete structures***; Ph.D. Thesis, August, McGill University, Montreal, Canada, 1995.

SIMÃO, W. I. S. ; PITANGUEIRA, R. L. S. . ***Modelos de elementos finitos para análise de estruturas de concreto armado***; XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - XXIV CILANCE, Ouro Preto – MG, Brasil, 2003.

SOMAYAJI, S. ; SHAH, S. P. . ***Bond stress versus slip relationship and cracking response of tension members***; ACI Journal, Proc. Vol. 78, May-June, pp. 217-225, 1981.

SPACONE, E. ; LIMKATANYU, S. . ***Responses of reinforced concrete members including bond-slip effects***; ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 6, November-December, pp. 831-839, 2000.



TASSIOS, T. P. ; YANNOPOULOS, P. J. . **Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond stress-slip relationships**; ACI Journal, *Proc.* Vol. 78, May-June, pp. 206-216, 1981.

UIJL, J. A. D. ; BIGAJ, A. J. . **A bond model for ribbed bars based on concrete confinement**; *Heron*, Vol. 41, No. 3, pp. 201-226, 1996.

WANG, T. ; HSU, T. T. C. . **Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models**; *Computers & Structures*, Vol. 79, pp. 2781-2791, 2001.

WATSTEIN, D. . **Bond stress in concrete pull-out specimens**; ACI Journal, *Proc.* Vol. 38, September, pp. 37-50, 1941.

XIAO, J. ; FALKNER, H. . **Bond behavior between recycled aggregate concrete and steel rebars**; Elsevier, *Construction and Building Materials*, Vol. 21, pp. 395-401, 2007.

YANG, Z. J. ; CHEN, J. . **Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams**; *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 72, pp. 2280-2297, 2005.

YANKELEVSKY, D. Z. . **New finite element for bond-slip analysis**; ASCE, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, No. 7, July, pp. 1533-1542, 1985.

YANKELEVSKY, D. Z. . **A two-phase one dimensional model for steel-concrete interaction**; *Computers & Structures*, Vol. 65, No. 6, pp. 781-794, 1997.

YAO, B. ; MURRAY, D. W. . **Prediction of distributed discrete concrete cracking in RC analysis**; ASCE, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 119, No. 10, October, pp. 2813-2834, 1993.

ZUO, J. ; DARWIN, D. . ***Splice strength of conventional and high relative rib area bars in normal and high-strength concrete***; ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 4, July-August, pp. 630-641, 2000.

## BIBLIOGRAFIA

### **BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR**

ACHARYA, D. N. ; KEMP, K. O. . ***Significance of dowel forces on the shear failure of rectangular reinforced concrete beams without web reinforced***; ACI Journal, Proc. Vol. 62, October, pp. 1265-1279, 1965.

BAZANT, Z. P. ; CEDOLIN, L. . ***Blunt crack band propagation in finite element analysis***; ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 105, No. EM2, April, pp. 297-315, 1979.

BAZANT, Z. P. ; CEDOLIN, L. . ***Fracture mechanics of reinforced concrete***; ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 106, No. EM6, December, pp. 1287-1306, 1980.

BAZANT, Z. P. ; CEDOLIN, L. . ***Finite element modeling of crack band propagation***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 109, No. 1, January, pp. 69-92, 1983.

BROMS, B. B. . ***Crack width and crack spacing in reinforced concrete members***; ACI Journal, Proc. Vol. 62, October, pp. 1237-1256, 1965.

CHAN, H. C. ; CHEUNG, Y. K. ; HUANG, Y. P. . ***Crack analysis of reinforced concrete tension members***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 8, August, pp. 2118-2131, 1992.

CHO, S. H. ; LEE, L. H. . ***Rotating- and fixed-angle crack models in beams without transverse reinforcement***; ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 5, September-October, pp. 757-764, 2000.

CHUNG, W. . ***Analytical model for diagonal tension failure in reinforced concrete members under static loads***; Ph.D. Thesis, North Carolina State University, USA, 1992.

DAHLBLOM, O. ; OTTOSEN, N. S. . ***Smearred crack analysis using generalized fictitious crack model***; ASCE, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 116, No. 1, January, pp. 55-76, 1990.

DÉSIR, J. M. ; ROMDHANE, M. R. B. ; ULM, F. J. . ***Steel-concrete interface: revisiting constitutive and numerical modeling***; Computers & Structures, Vol. 71, pp. 489-503, 1999.

EL-HACHA, R. ; EL-AGROUDY, H. ; RIZKALLA, S. H. . ***Bond characteristics of high-strength steel reinforcement***; ACI Structural Journal, Vol. 103, No. 6, November-December, pp. 771-782, 2006.

FABBROCINO, G. ; VERDERAME, G. M. ; POLESE, M. . ***Probabilistic steel stress-crack width relationship in RC frames with smooth rebars***; Elsevier, Engineering Structures, Vol. 29, pp. 1-10, 2007.

FANG, C. ; GYLLTOFT, K. ; LUNDGREN, K. ; PLOS, M. . ***Effect of corrosion on bond in reinforced concrete under cyclic loading***; Cement and Concrete Research, Vol. 36, pp. 548-555, 2006.

FOSTER, S. J. ; BUDIONO, B. ; GILBERT, R. I. . **Rotating crack finite element model for reinforced concrete structures**; Computers & Structures, Vol. 58, pp. 43-50, 1996.

FROSCH, R. J. . **Behavior of large-scale reinforced concrete beams with minimum shear reinforced**; ACI Structural Journal, Vol. 97, No. 6, November-December, pp. 814-820, 2000.

GAJER, G. ; DUX, P. F. . **Crack band based model for FEM analysis of concrete structures**; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No. 6, June, pp. 1696-1714, 1990.

GAMBAROVA, P. G. ; VALENTE, G. . **Smearred crack analysis for fracture and aggregate interlock in concrete**; Engineering Fracture Mechanics, Vol. 35, No. 4, pp. 651-663, 1990.

GUO, J. ; COX, J. V. . **Implementation of a plasticity bond model for reinforced concrete**; Computers & Structures, Vol. 77, pp. 65-82, 2000.

HILLERBORG, A. ; MODÉER, M. ; PETERSSON, P. E. . **Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements**; Cement and Concrete Research, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.

ICHINOSE, T. ; KANAYAMA, Y. ; INOUE, Y. . **Size effect on bond strength of deformed bars**; Elsevier, Construction and Building Materials, Vol. 18, pp. 549-558, 2004.

JIMENEZ, R. ; WHITE, R. N. ; GERGELY, P. . **Bond and dowel capacities of reinforced concrete**; ACI Journal, Proc. Vol. 76, January, pp. 73-85, 1979.

JOHANSSON, M. . **Nonlinear finite-element analyses of concrete frame corners**; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 126, No. 2, February, pp. 190-199, 2000.

KWAK, H. G. ; KIM, D. Y. . ***Nonlinear analysis of RC shear walls considering tension-stiffening effect***; Computers & Structures, Vol. 79, pp. 499-517, 2001.

MIER, J. G. M. . ***Fracture processes of concrete: assessment of material parameters for fracture models***; CRC Press, USA, 1996.

MORCOS, S. S. ; BJORHOVDE, R. . ***Fracture modeling of concrete and steel***; ASCE, Journal of Structural Engineering, Vol. 121, No. 7, July, pp. 1125-1133, 1995.

NILSON, A. H. . ***Internal measurement of bond slip***; ACI Journal, Proc. Vol. 69, July, pp. 439-441, 1972.

PETERSSON, P. E. . ***Fracture energy of concrete: method of determination***; Cement and Concrete Research, Vol. 10, pp. 78-89, 1980.

PROENÇA, S. P. B. . ***Sobre modelos matemáticos do comportamento não linear do concreto: análise crítica e contribuições***; Tese Doutorado, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos – SP, Brasil, 1988.

RANJBARAN, A. ; PHIPPS, M. E. . ***Dena: a finite element program for the non-linear stress analysis of two-dimensional, metallic and reinforced concrete, structures***; Computers & Structures, Vol. 51, pp. 191-211, 1994.

RIVEROS, G. A. . ***Post-cracking behavior of reinforced concrete deep beams: a numerical fracture investigation of concrete strength and beam size***; Ph.D. Thesis, University of Missouri, USA, 2005.

SHEHATA, A. E. M. ; VENTORINI, L. A. ; SHEHATA, L. C. D. . ***Bond influence on rotation capacity of high-strength and normal strength concrete beams***; ACI International Conference, Gramado – RS, Brazil, pp. 231-252, 1999.

TASSIOS, T. P. ; KORONEOS, E. G. . **Local bond-slip relationships by means of the moiré method**; ACI Journal, *Proc.* Vol. 81, January-February, pp. 27-34, 1984.

WANG, X. ; LIU, X. . **A strain-softening model for steel-concrete bond**; Cement and Concrete Research, Vol. 33, pp. 1669-1673, 2003.

WANG, X. ; LIU, X. . **Modeling bond strength of corroded reinforcement without stirrups**; Cement and Concrete Research, Vol. 34, pp. 1331-1339, 2004.

YANG, S. ; CHEN, J. . **Bond slip and crack width calculations of tension members**; ACI Structural Journal, Vol. 85, July-August, pp. 414-422, 1988.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)