



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Um Estudo Global de Campos de Vetores Planares

Durval José Tonon

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

Dissertação apresentada ao Instituto de Biologia, Letras
e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista,
Campus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos
para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto
Fevereiro de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

COMISSÃO JULGADORA

Titulares

Claudio Aguinaldo Buzzi

Professor Doutor - IBILCE - UNESP

Orientador

Marco Antônio Teixeira

Professor Doutor - IMECC - UNICAMP

1º Examinador

Paulo Ricardo Silva

Professor Doutor - IBILCE - UNESP

2º Examinador

Suplentes

João Carlos da Rocha Medrado

Professor Doutor - UFG

1º Suplente

Luciana de Fátima Martins Brito

Professora Doutora - IBILCE - UNESP

2º Suplente

À minha família,
dedico.

Agradecimentos

A frase já tão batida “As palavras não conseguem expressar o que sinto...” neste momento da minha vida é muito verdadeira.

Muitas pessoas contribuíram para que este sonho se tornasse realidade. Infelizmente não conseguirei citar todos aqueles que me auxiliaram nesta jornada, mas gostaria de destacar pelo menos alguns.

Agradeço ao professor Dr. Claudio Buzzi (Claudião) pelos grandes ensinamentos, paciência, dedicação e principalmente pela amizade que desenvolvemos durante todo este tempo que estive sobre sua orientação.

Aos professores e funcionários do departamento pelo incentivo, agradável ambiente de trabalho e pelas mais agradáveis ainda “reuniões sociais”.

Ao meu pai Durval Tonon e minha mãe Aparecida Batista Tonon pelas inúmeras vezes que levantaram as 4 e meia da manhã para que estudasse durante o primário e parte do ensino médio, por trabalharem incansavelmente no sol desgastante para me dar as oportunidades que nunca tiveram. Por me passar todas as lições para me tornar uma pessoa digna, pelo apoio incondicional que sempre me deram, apesar de saber que este apoio as vezes estava sendo doloroso para eles. Muito obrigado!

À minha irmã Néia e a minha tia Wandira, obrigado pela paciência e cari-

nho que sempre tiveram comigo.

Aos meus avos José e Zuleika (in memorian).

Ao meu grande diretor professor Amaral Crepaldi Filho pelas conversas, conselhos e, por me abrir essa maravilhosa porta que é a Universidade Pública.

À Izilda, João, Laira e Thalisa pela convivência agradabilíssima e, por me acolherem de braços abertos em sua casa nos primeiros anos de minha graduação.

À Nádia pelos incentivos, carinho com que ouvia minhas “descobertas matemáticas”, pela compreensão nos momentos que estava ausente estudando, pelo ombro aconchegante nos momentos difíceis e deliciosos momentos de alegria.

Aos meus grandes amigos de Mirassol e de Rio Preto que fazem com que a vida seja muito mais feliz e interessante. Gostaria de agradecer aos amigos de república: Eduardo(Costela), Pedro e Marcus pela convivência agradável e muitos momentos de alegria que tivemos.

Ao Aroldinho, Eduardo(Bechram), Chico e Júlio, pelas lições que não se aprendem em livros e, que são tão valiosas para minha vida. Desejo que todos tenham muito sucesso.

Aos meus amigos de graduação e pós-graduação: Marcus(Fortinho), Gra, Vinícius, Carol, Rafael Ottoboni, Fernando, Lígia e Paulinho, pelos momentos agradáveis de convivência e amizade. Obrigado Cibele(Miguxa) por todos esses anos de amizade e carinho, e Aline(Gobbi) por nossas construtivas conversas e por se surpreender ao ser minha amiga.

À FAPESP pelo auxílio financeiro.

À Deus pela força de perseverar e pela saúde.

“...Sou seu objetivo, sua razão que a razão ignora e desconhece. Tenho milhões de definições, todas certas, todas imperfeitas, todas lógicas apenas em motivações pessoais, todas corretas, todas erradas. Sou tudo, sem mim, tudo é nada. Sou amanhecer, sou Fênix, renasço das cinzas, sei quando tenho que morrer, sei que sempre irei renascer. Mudo protagonista, nunca a história...”

Autor desconhecido.

Conteúdo

Lista de Figuras	xv
Introdução	1
I Estudo da Família $X(x, y) = (ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$.	7
1 Formas Normais	9
2 Definições Preliminares	13
2.1 Introdução	13
2.2 Pontos Singulares	13
2.2.1 Pontos Singulares Não Degenerados	13
2.2.2 Pontos Singulares Elementares	18
2.2.3 Pontos Singulares Nilpotentes	24
3 A Esfera de Poincaré e Pontos Singulares no Infinito	27
3.1 Introdução	27
3.2 A esfera de Poincaré	27
4 Pontos Singulares na Parte Finita do Campo	39
4.1 Introdução	39
5 Pontos Singulares na Parte Infinita do Campo	47
5.1 Introdução	47
5.2 A origem da carta U_2 como ponto singular na parte infinita do campo	49

5.3	A origem da carta U_1 como ponto singular na parte infinita do campo	54
6	Retratos de Fase Global com Pontos Singulares Linearmente Nulo	67
7	Retrato de Fase Global com Infinitos Pontos Críticos	69
8	Retratos de Fase Local com Finitos Pontos Críticos	77
9	Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré com Finitos Pontos Críticos	81
10	Demonstração do Teorema 0.0.1	87
II	Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2)$.	89
11	Formas Normais	91
12	Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2)$.	93
12.1	Singularidades na Parte Finita do Campo	93
12.2	Singularidades na Parte Infinita do Campo	98
12.3	Retratos de Fase Local no Disco de Poincaré	103
12.4	Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré	108
13	Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + cy + exy)$.	119
13.1	Singularidades na Parte Finita do Campo	119
13.2	Singularidades na Parte Infinita do Campo	123
13.3	Campos com Infinitos Pontos Singulares na Parte Infinita	138
13.4	Retratos de Fase Local	145
13.5	Retratos de Fase Global	147
14	Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + x^2 + exy)$.	151
14.1	Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré	151

15	Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + x + cy + exy)$.	155
15.1	Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré	155
16	Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, cy + exy)$.	159
16.1	Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré	159
17	Demonstração do Teorema 0.0.2	163
	Bibliografia	165

Lista de Figuras

1	Os 30 possíveis retratos de fase global.	3
2	Os 48 primeiros retratos de fase global do teorema 0.0.2.	5
3	Os 51 seguintes retratos de fase global do teorema 0.0.2.	6
2.1	Nó estável na forma canônica.	16
2.2	Nó estável degenerado na forma canônica.	16
2.3	Nó estável.	17
2.4	Sela na forma canônica.	17
2.5	Foco estável com $\beta > 0$	18
2.6	Foco estável com $\beta < 0$	18
2.7	As regiões $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$	20
2.8	Caso onde $\Delta_m > 0$ e m é ímpar.	23
2.9	Caso onde $\Delta_m < 0$ e m é ímpar.	23
2.10	Caso onde $\Delta_m < 0$ e m é par.	24
2.11	Caso onde $\Delta_m > 0$ e m é par.	24
3.1	Projeção estereográfica de S^2 sobre o plano xy	28
3.2	Um corte na figura anterior.	28
3.3	Projeção central do hemisfério superior de S^2 sobre o plano xy	29
3.4	Projeção central sobre o plano xy	30
3.5	35
3.6	35
3.7	Projeção central somente sob um hemisfério da esfera.	37
5.1	Projeção central somente sob um hemisfério da esfera.	48
5.2	As cartas U_1, U_2, V_1 e V_2	49
5.3	$\alpha^+ < 0$	55

5.4	$\alpha^+ > 0$.	55
5.5	$\alpha^- < 0$.	55
5.6	$\alpha^- > 0$.	55
5.7	Sela nó nilpotente $\left(-\frac{2}{B}, 0\right) \in U_1$.	59
5.8		65
6.1	O retrato de fase local da origem na carta U_1 .	68
6.2	O retrato de fase global dos campos X_7 e X_{23} .	68
7.1	Retratos de fase global dos campos com infinitos pontos singulares.	70
7.2	Retratos de fase global do campo $(1, x + Cy)$ com $C < 0$.	71
7.3	Retratos de fase global do campo $(1, x + Cy)$ com $0 < C < 1$ e, dos campos X_9 e X_1 com $0 < C < 1$, respectivamente.	72
7.4	Retratos de fase global do campo $(1, x + y)$ e, do campo X_1 com $C = 1$, respectivamente.	73
7.5	Retratos de fase global do campo $(1, x + Cy)$ e, dos campos X_1 com $C > 1$ e X_2 com $C = 1$, respectivamente.	73
7.6	Retratos de fase global dos campos X_{15} e X_{22} , respectivamente.	74
7.7	Retratos de fase global dos campos $(1, x)$ e X_4 com $B = 1$, respectivamente.	75
7.8	Retratos de fase global dos campos X_{14} e X_{21} , respectivamente.	75
7.9	Retratos de fase global dos campos $(1, x + y)$ e X_{20} , respectivamente.	76
8.1	Os 12 primeiros retratos de fase local no disco de Poincaré que possuem finitos pontos críticos.	79
8.2	Os 10 últimos retratos de fase local no disco de Poincaré que possuem finitos pontos críticos.	80
9.1	Retratos de fase global no disco de Poincaré. Não consideramos aqui as figuras 4 e 6 do teorema referente aos retratos de fase local.	83
9.2	Os 8 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré.	84
9.3	Os 6 retratos de fase global que vem dos retratos de fase local das figuras 4 e 6.	85

12.1	Retratos de fase local das singularidades n^- e n^+ , respectivamente.	97
12.2	Retrato de fase local da singularidade na carta U_1 .	100
12.3	Retrato de fase local da singularidade na carta V_1 .	102
12.4	Retratos de fase local das singularidades z_1^-, z_2^-, z_1^+ e z_2^+ , respectivamente.	104
12.5	Os 9 primeiros retratos de fase local no disco de Poincaré.	106
12.6	Os 9 seguintes retratos de fase local no disco de Poincaré.	107
12.7	Os 9 últimos retratos de fase local no disco de Poincaré.	108
12.8	Os 9 primeiros retratos de fase global no disco de Poincaré.	115
12.9	Os 9 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré.	116
12.10	Os 9 últimos retratos de fase global no disco de Poincaré.	117
13.1	Retratos na parte finita do campo com $c > 0$ e $c < 0$, respectivamente.	121
13.2	Retratos na parte finita do campo com $c < 0$ e $c > 0$, respectivamente.	122
13.3	Retratos na parte finita do campo da singularidade $\left(1, -\frac{1}{c+e}\right)$ com $c+e < 0$ e $c+e > 0$, respectivamente.	123
13.4	Retratos na parte finita do campo da singularidade $\left(1, -\frac{1}{c-e}\right)$ com $c-e < 0$ e $c-e > 0$, respectivamente.	123
13.5	Retratos na parte infinita do campo com $c < -1$ e $c > -1$, respectivamente.	124
13.6	Fluxo do campo sob a reta $x = 1$.	125
13.7	Retratos na parte infinita do campo com $c < -1$, $-1 < c < 0$ e $c > 0$, respectivamente.	126
13.8	Retratos na parte infinita do campo com $c < -1$ e $c > -1$, respectivamente.	127
13.9	Retratos na parte infinita do campo com $c < -1$, $-1 < c < 0$ e $c > 0$, respectivamente.	128
13.10	Retratos na parte infinita do campo com $c < 1$ e $c > 1$, respectivamente.	129
13.11	Fluxo do campo sob a reta $x = -1$.	130

13.12	Retratos na parte infinita do campo com $c > 1, 0 < c < 1$ e $c < 0$, respectivamente.	131
13.13	Retratos na parte infinita do campo com $c < 1$ e $c > 1$, respectivamente.	132
13.14	Retratos na parte infinita do campo com $0 < c < 1, c > 1$ e $c < 0$, respectivamente.	133
13.15	Retratos na parte infinita do campo com $e < 1$ e $e > 1$, respectivamente.	134
13.16	Retratos na parte infinita do campo com os referidos casos.	136
13.17	Retratos na parte infinita do campo com $e < 1$ e $e > 1$, respectivamente.	137
13.18	Retratos na parte infinita do campo com os referidos casos.	139
13.19	Cartas U_1, U_2, V_1 e V_2	140
13.20	140
13.21	141
13.22	Retrato de fase global para o caso (1) com $c = -1$	141
13.23	142
13.24	143
13.25	Retrato de fase global para o caso (2) com $c = 1$	143
13.26	Dinâmica próximo a reta de singularidades nas cartas U_1 e V_1	144
13.27	Retratos com relação à carta U_2	144
13.28	Retratos com relação à carta V_2	145
13.29	Retratos de fase global para o caso (3).	145
13.30	Os 14 retratos de fase local.	146
13.31	As quatro regiões que decompõem o espaço de parâmetros.	147
13.32	Os possíveis retratos de fase que podem ocorrer em cada uma das regiões do espaço de fase.	148
13.33	Os retratos de fase global.	149
14.1	Os 15 primeiros retratos de fase global no disco de Poincaré.	152
14.2	Os 15 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré.	153
14.3	Os 13 últimos retratos de fase global no disco de Poincaré.	154
15.1	Os 15 primeiros retratos de fase global no disco de Poincaré.	156

15.2	Os 12 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré. . .	157
15.3	Os 12 últimos retratos de fase global no disco de Poincaré. . .	158
16.1	Os 9 primeiros retratos de fase global no disco de Poincaré. . .	160
16.2	Os 10 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré. . .	161

Resumo

Neste trabalho estudamos os campos de vetores planares semi-homogêneos quadráticos e também os campos de vetores planares quadráticos com duas retas paralelas invariantes pelo fluxo. Para cada uma dessas classes, obtemos uma classificação dos retratos de fase global no disco de Poincaré e apresentamos as respectivas formas normais. Dentre as técnicas utilizadas no desenvolvimento do trabalho destacamos a Compactificação de Poincaré e o Método do Blow-up.

Palavras Chaves: Retratos de fase, sistemas semi-homogêneos, sistemas quadráticos.

Abstract

In this work we study the planar quadratic semi-homogeneous vector fields and the class of planar quadratic vector fields possessing two parallel flow invariant straight lines. For each one of these classes, we obtain a classification of the global phase portraits in the Poincaré disc and we present their normal forms. Among the technics used during the development of the work we emphasize the Poincaré Compactification and the Blow-up Method.

Key words: Phase portraits, semi-homogeneous systems, quadratic systems.

Introdução

Considere P e Q polinômios homogêneos reais nas variáveis x e y de graus m e n , respectivamente. Nesse caso, dizemos que o campo de vetores

$$X = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é um *campo de vetores polinomial planar semi-homogêneo*. Em particular, se $m = n$, temos que X é um campo vetorial polinomial planar homogêneo.

O caso $m = n$ tem sido estudado por vários autores. Os campos vetoriais polinomiais quadráticos homogêneos ($m = n = 2$) foram estudados por Lyagina [14], Markus [15], Korol [16], Sibirskii e Vulpe [17], Newton [18], Date [19] e Vdovina [20]; os campos vetoriais polinomiais cúbicos homogêneos ($m = n = 3$) foi estudado por Cima e Llibre [21]; o caso geral $m = n$ foi estudado por Argemí [22], Cima e Llibre [21], Collins [23] e Llibre e outros [24]. Em todos esses trabalhos é descrito um algoritmo para obter o retrato de fase de um campo polinomial homogêneo para todo grau $m = n$, a classificação de todos os retratos de fase de campos polinomiais homogêneos de graus 2 e 3 e, classificação algébrica de campos polinomiais homogêneos.

Neste contexto podemos perceber que o estudo dos campos de vetores homogêneos já se encontra bem adiantado. Com isso nos sentimos motivados a explorar outras classes de campos de vetores, como por exemplo a classe dos campos polinomiais semi-homogêneos. Dentro desta classe a família mais simples, não trivial é quando $m = 1$ e $n = 2$, ou seja, vamos estudar os campos da forma

$$X : \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = Ax^2 + Bxy + Cy^2. \end{cases} \quad (1)$$

Este estudo é relativamente recente, o artigo no qual baseamos nosso trabalho é [1] de 1997, cujos autores são Laurent Cairó e Jaume Llibre. Este artigo foi pioneiro na época pois iniciou o estudo de campos polinomiais semi-homogêneos.

Esta área de pesquisa tem sido muito fecunda, só para se ter um idéia nos últimos 30 anos foram publicados mais de 1000 papers tratando de campos polinomiais quadráticos.

Os passos principais para se chegar a essa classificação consiste inicialmente em reduzir o campo inicial que possui 5 parâmetros a 23 formas normais que possuem apenas 2 parâmetros. Depois passa-se a uma análise local dos pontos críticos finitos utilizando o *Teorema de Hartman*, no caso dos pontos hiperbólicos, *Teorema da Variedade Central*, no caso dos pontos parcialmente hiperbólicos e a *Técnica do Blow-up* para os pontos com autovalor zero duplo. Para a análise dos pontos singulares no infinito nos valeremos da *Compactificação de Poincaré*.

Temos o seguinte resultado referente a esta família de campos semi-homogêneos:

Teorema 0.0.1. *O retrato de fase de todo campo de vetores polinomial planar semi-homogêneo de graus 1 e 2*

$$X(x, y) = (ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$$

é topologicamente equivalente a uma das 30 configurações listadas na Figura

1.

Além disso cada um dos retratos a seguir provém de um campo de vetores de graus 1 e 2.

Posteriormente ao estudo dos campos polinomiais semi-homogêneos, vamos

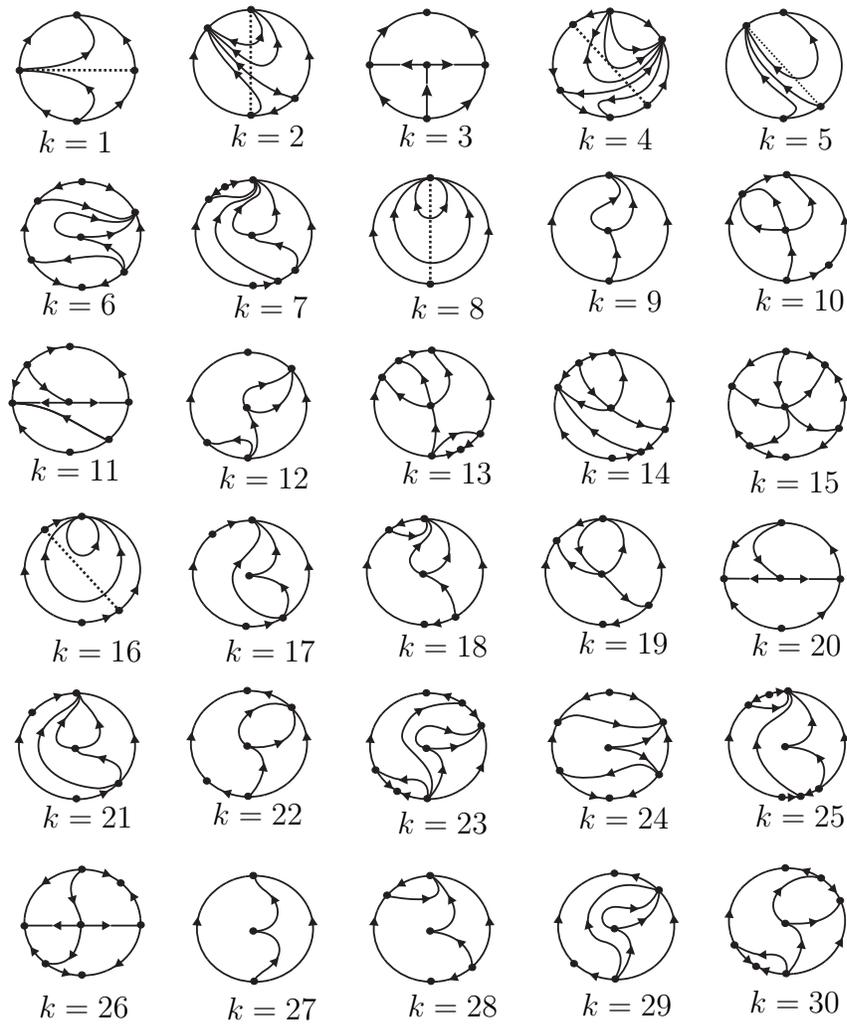


Figura 1: Os 30 possíveis retratos de fase global.

partir para o estudo de um problema com uma motivação na biologia.

Na literatura é conhecido o modelo de A. Lotka (1925) e V. Volterra (1926), presa-predador que fornece a dinâmica de populações dependentes entre si. Se x denota o número de predadores e y denota o número de presas, então o modelo de Lotka-Volterra toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bxy = x(-a + by) \\ \dot{y} = -cxy + dy = y(-cx + d), \end{cases}$$

onde a, b, c e d são constantes positivas.

Observe que trata-se de um sistema planar quadrático onde, na ausência de predadores ($x = 0$), $\dot{y} = dy$ e, assim o número de presas cresce exponencialmente. Na ausência de presas, $\dot{x} = -ax$, e assim a população de predadores tende a extinguir-se. Note também que os eixos x e y são invariantes pelo fluxo.

Tendo este famoso modelo em mente, estamos interessados em estudar um caso degenerado deste problema: quando estamos com um sistema polinomial planar com duas retas paralelas invariantes pelo fluxo.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que a família de campos é da forma

$$X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2). \quad (2)$$

Com efeito, dado um campo de vetores qualquer que possua duas retas paralelas invariantes pelo fluxo, podemos através de rotação, translação e multiplicação por um escalar obter o campo dado acima.

As técnicas utilizadas no estudo desta família de campos são basicamente as mesmas utilizadas no estudo da família de campos semi-homogêneos.

Chamamos a atenção para o fato de que o estudo desta segunda família de campos é um trabalho original, desenvolvido durante o segundo ano do mestrado.

Demonstraremos o seguinte resultado

Teorema 0.0.2. *O retrato de fase global no disco de Poincaré do campo $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2)$ é topologicamente equivalente a um dos retratos apresentados nas Figuras 2 e 3.*

Dividiremos este trabalho em duas partes, uma referente ao estudo da família de campos $X(x, y) = (ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$ e a outra ao estudo da família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2)$.

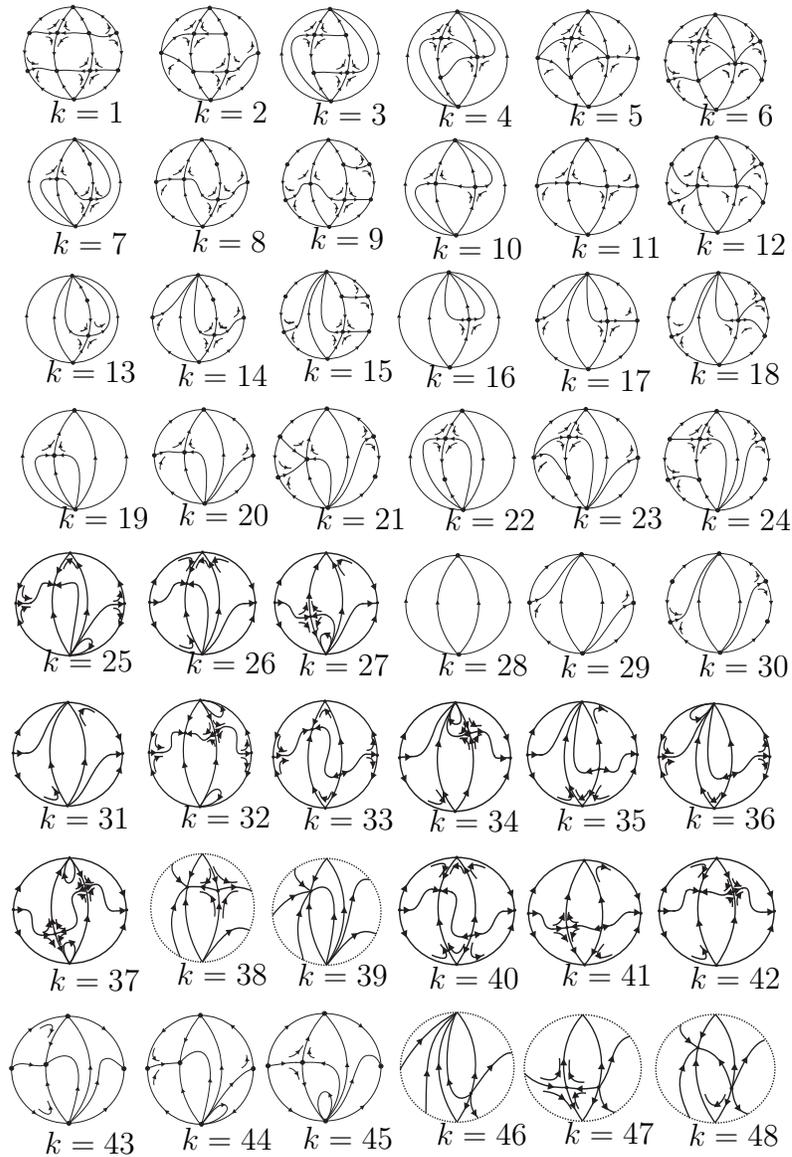


Figura 2: Os 48 primeiros retratos de fase global do teorema 0.0.2.

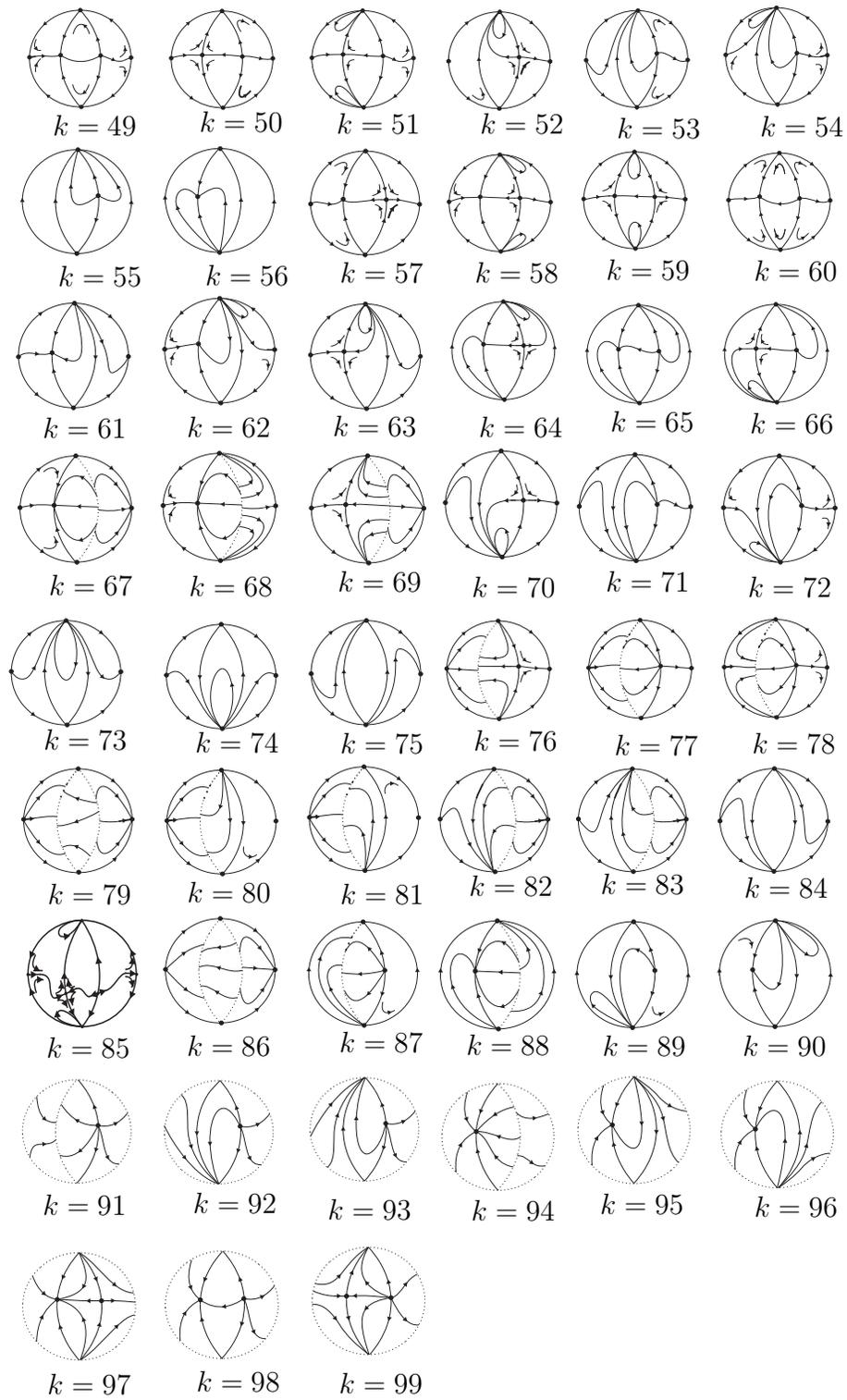


Figura 3: Os 51 seguintes retratos de fase global do teorema 0.0.2.

Parte I

Estudo da Família

$$X(x, y) = (ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2).$$

Capítulo 1

Formas Normais

Nosso interesse aqui restringir-se-á a campos de vetores semi-homogêneos $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ da forma linear $P(x, y) = ax + by$ e quadrática $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$. Note que esse campo de vetores semi-homogêneo possui 5 coeficientes independentes.

Nesse capítulo mostraremos que se pode reduzir o estudo desse sistema para o estudo de 23 formas normais, levando em conta somente parâmetros essenciais.

Definição 1.0.1. *Dizemos que dois campos de vetores $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ em \mathbb{R}^n são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo do \mathbb{R}^n que leva órbitas do fluxo induzido por $X(x, y)$ em órbitas do fluxo induzido por $Y(x, y)$, preservando ou invertendo o sentido de todas as trajetórias.*

Teorema 1.0.3. *Seja $X(x, y)$ um campo de vetores semi-homogêneo da forma $(ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$, temos que seu retrato de fase é topologicamente equivalente a um dos retratos de fase dos campos de vetores da lista seguinte:*

$$X_1 = (x + y, x^2 + Bxy + Cy^2) \quad \text{com } B \cdot C \neq 0,$$

$$X_2 = (x + y, xy + Cy^2) \quad \text{com } C \neq 0,$$

$$X_3 = (x + y, x^2 + Cy^2) \quad \text{com } C \neq 0,$$

$$X_4 = (x + y, x^2 + Bxy) \quad \text{com } B \neq 0,$$

$$X_5 = (x + y, x^2)$$

$$X_6 = (x + y, xy),$$

$$X_7 = (x + y, y^2),$$

$$X_8 = (y, x^2 + xy + Cy^2) \quad \text{com } C \neq 0,$$

$$X_9 = (y, xy + y^2),$$

$$X_{10} = (y, x^2 + y^2),$$

$$X_{11} = (y, x^2 - y^2),$$

$$X_{12} = (y, x^2 + xy),$$

$$X_{13} = (y, x^2),$$

$$X_{14} = (y, xy),$$

$$X_{15} = (y, y^2),$$

$$X_{16} = (x, x^2 + xy + Cy^2) \quad \text{com } C \neq 0,$$

$$X_{17} = (x, xy + y^2),$$

$$X_{18} = (x, x^2 + y^2),$$

$$X_{19} = (x, x^2 - y^2),$$

$$X_{20} = (x, x^2 + xy),$$

$$X_{21} = (x, x^2),$$

$$X_{22} = (x, xy),$$

$$X_{23} = (x, y^2).$$

Demonstração Considere a seguinte mudança linear de variáveis

$$\begin{cases} \bar{x} = \alpha x \\ \bar{y} = \beta y \\ \bar{t} = \gamma t. \end{cases}$$

Temos que o campo $X(x, y)$ pode ser reescrito nas novas variáveis como

$$X(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a\bar{x}}{\gamma} + \frac{b\alpha\bar{y}}{\beta\gamma}, \frac{A\beta\bar{x}^2}{\alpha^2\gamma} + \frac{B\bar{x}\bar{y}}{\alpha\gamma} + \frac{C\bar{y}^2}{\beta\gamma} \right).$$

As 23 formas normais aparecem quando consideramos a combinação das 3 possibilidades de a e b : $a \cdot b \neq 0$, $a = 0$ e $b \neq 0$, $a \neq 0$ e $b = 0$ com as 7 possibilidades de A, B e C : $A \cdot B \cdot C \neq 0$, $A = 0$ e $B \cdot C \neq 0$, $B = 0$ e $A \cdot C \neq 0$, $C = 0$ e $A \cdot B \neq 0$, $A \neq 0$ e $B = C = 0$, $B \neq 0$ e $A = C = 0$, $C \neq 0$ e $A = B = 0$.

Note que desta forma obtemos 21 possibilidades, contudo quando analisamos os casos observamos 2 duplicações, o que resulta ao todo 23 possibilidades.

Vamos analisar alguns desses casos para elucidar as idéias.

- **Caso** $a \cdot b \cdot A \neq 0$ e $B \cdot C \neq 0$. Estas condições implicam que podemos

escolher α, β e γ tais que:

$$\frac{a}{\gamma} = 1, \frac{b\alpha}{\beta\gamma} = 1 \text{ e } \frac{\beta A}{\alpha^2\gamma} = 1.$$

O que nos remete ao seguinte campo: $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2)$. Se ignorarmos as barras culminamos no campo X_1 .

- **Caso** $a \cdot b \cdot A \neq 0, B = 0$ e $C \neq 0$, temos $X_3 = (x + y, x^2 + Cy^2)$.
- **Caso** $a \cdot b \cdot A \neq 0, B \neq 0$ e $C = 0$ temos $X_4 = (x + y, x^2 + Bxy)$.
- **Caso** $a \cdot b \cdot A \neq 0$ e $B = C = 0$ temos $X_5 = (x + y, x^2)$.
- **Caso** $a \cdot b \cdot B \neq 0$, e $A = C = 0$. Consideremos aqui as restrições

$$\frac{B}{\alpha\gamma} = 1, \frac{b\alpha}{\beta\gamma} = 1 \text{ e } \gamma = a,$$

temos o campo $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x}\bar{y})$, ignorando as barras temos o campo $X_6(x, y) = (x + y, xy)$.

- **Caso** $a = 0, b \cdot A \cdot C \neq 0$ e $B = 0$.

Considere as equações

$$\frac{b\alpha}{\beta\gamma} = 1, \frac{\beta A}{\alpha^2\gamma} = 1 \text{ e } \frac{C}{\beta\gamma} = 1.$$

Note que nesse caso surgem duas possibilidades a serem consideradas, as quais são as duplicações supracitadas: $A \cdot C > 0$ e $A \cdot C < 0$, o que nos leva aos campos $X_{10} = (y, x^2 + y^2)$ e $X_{11} = (y, x^2 - y^2)$.

Note que procedendo analogamente aos itens acima e utilizando-nos de um argumento combinatorial obtemos as 23 possibilidades de campos na forma normal. ■

Pelo Teorema 1.0.3 podemos observar que o estudo de campos de vetores semi-homogêneos $(ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$ foi reduzido à análise de campos de vetores semi-homogêneos dependendo, no máximo de dois parâmetros.

Capítulo 2

Definições Preliminares

2.1 Introdução

Nesse capítulo serão introduzidas algumas definições básicas e notações, as quais necessitaremos para a análise do retrato de fase local nos pontos singulares na parte finita ou infinita de um campo de vetores semi-homogêneo dado pelo Teorema 1.0.3.

Denotaremos por $P_n(\mathbb{R}^2)$ o conjunto dos campos de vetores polinomiais no \mathbb{R}^2 da forma $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são polinômios reais nas variáveis x e y de grau no máximo n , onde $n \in \mathbb{N}$ sendo que \mathbb{N} representa o conjunto usual dos inteiros positivos.

2.2 Pontos Singulares

2.2.1 Pontos Singulares Não Degenerados

Nessa seção apresentaremos alguns resultados, a cerca de pontos singulares, que são válidos para campos mais gerais e não só para os campos de nosso interesse principal.

Um ponto $q \in \mathbb{R}^2$ é dito um **ponto crítico, estado de equilíbrio** ou

singularidade de um campo de vetores $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ se $P(q) = Q(q) = 0$.

Chamaremos a atenção para alguns resultados onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são funções analíticas em uma vizinhança de q .

Sejam $D = P_x(q)Q_y(q) - P_y(q)Q_x(q)$ e $T = P_x(q) + Q_y(q)$, temos que uma singularidade é chamada **não degenerada** se $D \neq 0$. Segue que esta singularidade é necessariamente uma singularidade isolada.

De fato, sabemos que D é o determinante da matriz Jacobiana do campo e, como $D \neq 0$ temos pelo Teorema da Função Inversa que $X(x, y)$ é um difeomorfismo local, assim leva zero em zero donde segue que não podemos ter outro ponto com imagem zero.

Admitamos, sem perda de generalidade, que a singularidade q é a origem.

Temos que o campo $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ admite a seguinte representação em uma vizinhança da origem:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = ax + by + \varphi(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) = cx + dy + \psi(x, y). \end{cases}$$

A **equação característica** do estado de equilíbrio, nesse caso a origem, é

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - T \cdot \lambda + D = 0, \quad (2.1)$$

com $T = a + d$ e $D = ad - bc$, neste caso.

Estamos no caso onde $D \neq 0$. As raízes λ_1 e λ_2 da equação característica são chamadas **raízes características**. Dependendo da natureza das raízes características o sistema pode ser reduzido por uma transformação linear, em uma vizinhança do estado de equilíbrio, a uma das seguintes formas canônicas:

Caso 1: Raízes características reais e distintas ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Temos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = \lambda_1 x + \varphi(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) = \lambda_2 y + \psi(x, y) \end{cases}$$

Caso 2: Raízes características reais e iguais ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$).

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = \lambda x + \varphi(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) = \lambda y + \mu x + \psi(x, y) \end{cases}$$

Aqui μ pode ser nulo ou não.

Caso 3: Raízes características complexas conjugadas ($\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i, \beta \neq 0$).

Temos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = \alpha x - \beta y + \varphi(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) = \beta x + \alpha y + \psi(x, y) \end{cases}$$

A seguir exibiremos todos os tipos possíveis de estados de equilíbrio cujas raízes características têm parte real não nula e, esboçaremos os retratos de fase em uma vizinhança do estado de equilíbrio.

Para focos e nós ilustraremos somente o caso estável. Para obter o retrato de fase para nós ou focos instáveis, simplesmente revertemos a direção das setas.

I.Nós: corresponde ao caso onde as raízes características são reais e de sinais iguais.

(a) Nó não degenerado estável: $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.

Nesse caso temos $D > 0, T^2 - 4D > 0$ e $T < 0$.

(b) Nó estável degenerado: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda < 0, \mu \neq 0$, isto é, $D > 0, T^2 - 4D = 0$ e $T < 0$.

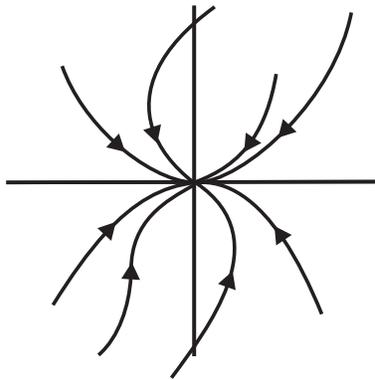


Figura 2.1: Nó estável na forma canônica.

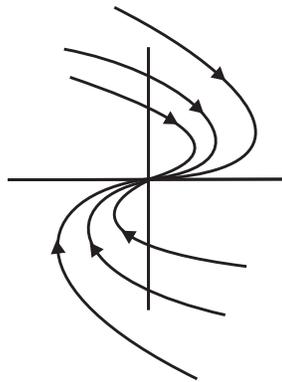


Figura 2.2: Nó estável degenerado na forma canônica.

(c) Nó estável: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda < 0, \mu = 0$.

II. Pontos de Sela : Corresponde ao caso onde as raízes características são reais e com sinais opostos.

Nesse caso temos $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, isto é, $D < 0$.

III. Focos: Corresponde a raízes características complexas conjugadas.

Nesse caso temos $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i, \beta \neq 0$, isto é, $D > 0$ e $T^2 - 4D < 0$.

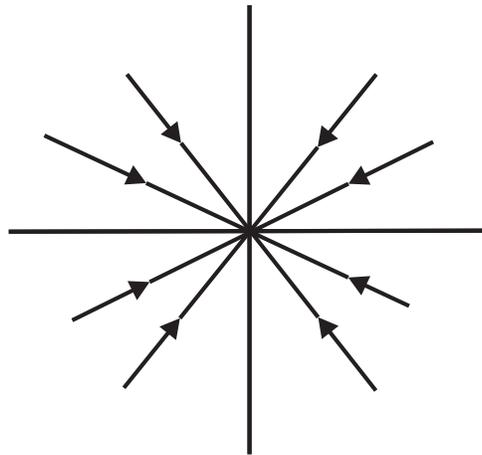


Figura 2.3: Nó estável.

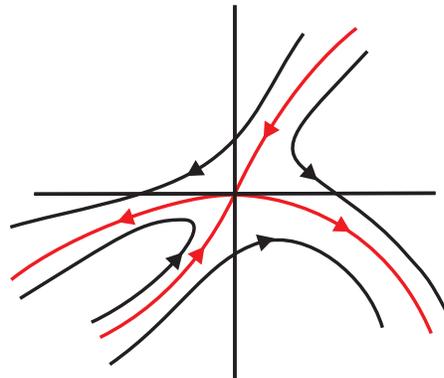


Figura 2.4: Sela na forma canônica.

Aqui podem ocorrer dois casos:

(a) Foco estável: Se $\alpha < 0$.

A figura 2.5 a seguir ilustra um foco estável com $\beta > 0$. A figura 2.6 para o caso onde $\beta < 0$.

(b) Foco instável: Se $\alpha > 0$.

Observe que a estrutura topológica, no retrato de fase de um nó e um foco é a mesma em uma vizinhança do ponto crítico.

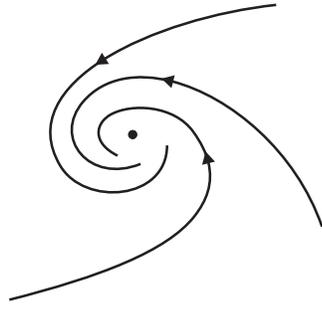


Figura 2.5: Foco estável com $\beta > 0$.

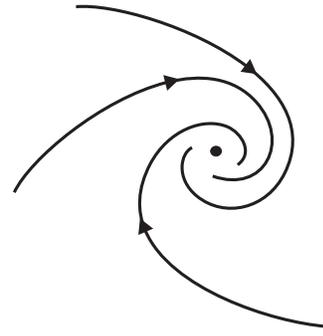


Figura 2.6: Foco estável com $\beta < 0$.

2.2.2 Pontos Singulares Elementares

Definição 2.2.1. Um ponto crítico ou singularidade q é **elementar** se $D = 0$ e $T \neq 0$.

Nesse caso temos que o ponto q é um ponto isolado no conjunto de todos os pontos singulares.

Considere novamente o campo de vetores

$$X(x, y) = (\overline{P}(x, y), \overline{Q}(x, y)) = (P(x, y), Q(x, y)). \quad (2.2)$$

Admitamos agora que $\overline{P}(x, y)$ e $\overline{Q}(x, y)$ possui um único ponto crítico $(0, 0)$ em uma vizinhança da origem, e são analíticas nessa vizinhança. Temos também que sua expansão em série de potência começa com termos quadráticos.

Nossas afirmações, como já comentamos, se restringem a uma vizinhança suficientemente pequena $U_\delta(0)$ da origem. Seja

$$T = T(x, y) = \sigma(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Temos que $\sigma(x, y)$ é uma função contínua, $\sigma(0, 0) = \sigma = 1$. Daí podemos assumir que $\sigma(x, y) > 0$ para quaisquer pontos em $U_\delta(0)$ e assim faremos uso do Teste de Bendixson e Dulac, o qual enunciaremos abaixo.

Teorema 2.2.1. (Teste de Dulac e Bendixson para regiões simplesmente conexas)

Sejam

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2.4)$$

um sistema dinâmico analítico, G uma subregião simplesmente conexa do domínio de definição do sistema (2.4). Seja $B(x, y)$ uma função continuamente diferenciável definida em G tal que a função

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \quad (2.5)$$

não muda de sinal. Temos que não existem curvas simples fechadas em G que são união de trajetórias do sistema (2.4).

Observação 2.2.1. A condição acima permite que a função (2.5) seja nula em um número finito de pontos isolados e curvas suaves, contudo possui o mesmo sinal em todos os pontos de G .

Demonstração

Demonstremos inicialmente que a região G não contém trajetórias fechadas. Vamos fazer a demonstração por partes.

Suponhamos que G contém uma trajetória fechada L . Considere a integral de linha

$$I = \int_L (-BQdx + BPdy).$$

Temos que $I = 0$. Com efeito, sejam

$$x = \varphi(t) \text{ e } y = \psi(t),$$

as equações da trajetória L , onde $0 \leq t \leq T$. Temos

$$I = \int_0^T B(\varphi(t), \psi(t)) [-Q(\varphi(t), \psi(t))\varphi(t)' + P(\varphi(t), \psi(t))\psi(t)'] dt \quad (2.6)$$

e portanto,

$$\varphi'(t) = P(\varphi(t), \psi(t)), \quad \psi'(t) = Q(\varphi(t), \psi(t)),$$

pois $(\varphi(t), \psi(t))$ é solução do sistema (2.4).

Note que os colchetes da equação é nulo, logo $I = 0$.

Por outro lado, temos pelo Teorema de Green que

$$I = \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \right] dx dy,$$

onde Ω é a região limitada pela curva fechada L ($\Omega \subset G$). Mas por hipótese a função que está sendo integrada não muda de sinal, logo a integral não pode ser nula. O que nos conduz a uma contradição. Portanto, G não contém trajetórias fechadas.

Mostremos agora que G não contém um “loop” fechado simples, isto é, a união de um ponto singular e uma trajetória fechada L que tende para a origem quando $t \rightarrow \pm\infty$. Analogamente ao feito anteriormente, suponhamos que existe um loop em G . Seja C_ε um círculo centrado na origem com raio suficientemente pequeno tal que existem pontos de L fora da região limitada pelo círculo.

Como (2.4) é um sistema analítico, L é uma curva analítica e portanto “corta” C_ε somente em um número finito de pontos, os quais dividem C_ε em um número finito de subarcos.

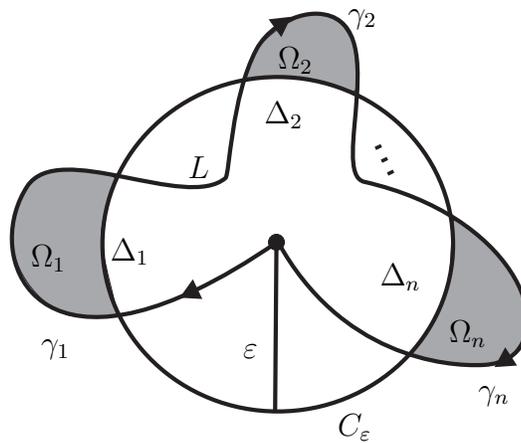


Figura 2.7: As regiões $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$.

Se Ω denota a região limitada pelo loop L e Ω_ε o conjunto dos pontos de Ω que distam mais do que ε da origem, temos que Ω_ε é um conjunto aberto do \mathbb{R}^2 e, a fronteira desse conjunto é a união dos subarcos mencionados acima.

Daí temos que Ω_ε é a união de um número finito de componentes $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$. Denotemos as fronteiras orientadas positivamente de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Temos que essas fronteiras são curvas suaves por partes.

Considere a integral

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \right] dx dy \\ &= \sum_{k=1}^n \int \int_{\Omega_k} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \right] dx dy. \end{aligned}$$

Como o integrando não muda de sinal, a integral é não nula e portanto $|I_\varepsilon|$ cresce com o decréscimo ε . Portanto, para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$,

$$|I_\varepsilon| > |I_{\varepsilon_0}|. \quad (2.7)$$

Por outro lado, o Teorema de Green nos diz que

$$I_{\varepsilon_0} = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} (-BQ dx + BP dy).$$

Como já mostramos acima temos que a integral de linha de $-BQ dx + BP dy$ sobre qualquer parte da trajetória L do sistema (2.4) é nula, segue que I_ε é igual a soma de integrais sobre os arcos de C_ε que aparecem na fronteira das regiões Ω_k . Denotemos esses arcos por $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$, daí temos

$$I_\varepsilon = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} (-BQ dx + BP dy).$$

Expressando os termos da integral de linha com respeito ao comprimento de arco, temos

$$I_\varepsilon = \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} (-BQ \cos \theta + BP \sin \theta) ds,$$

onde θ é o ângulo entre a tangente ao círculo C_ε e o eixo x positivo.

Seja M o máximo da expressão

$$|BQ| + |BP|$$

em Ω .

Estimando a expressão acima para I_ε e observando que a soma do comprimento de todos os arcos Δ_k é menor que o comprimento $2\pi\varepsilon$ de C_ε , temos

$$|I_\varepsilon| < 2\pi M\varepsilon.$$

Para ε suficientemente pequeno, esta inequação contradiz (2.7). Daí segue que não existe loop na região G .

A prova de que G não pode conter trajetórias fechadas as quais são união de trajetórias gerais e pontos singulares O_1, O_2, \dots, O_m é análoga ao feito anteriormente, exceto que teremos que considerar círculos $C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, \dots, C_{m\varepsilon}$ sob todos os pontos singulares.

Donde concluímos a demonstração. ■

Fizemos a demonstração do Teste de Dulac e Bendixson porque trata-se de um resultado muito útil para decidirmos quando um sistema possui trajetórias fechadas. Este resultado é utilizado na demonstração do próximo teorema, a qual não faremos aqui pois é muito longa e técnica e daí fugiria do enfoque principal do trabalho.

Vamos agora enunciar o resultado dessa seção que descreve as possibilidades de estrutura topológica de um estado de equilíbrio $(0, 0)$ do campo planar (2.2), cuja demonstração pode ser encontrada em [6].

Teorema 2.2.2. *Seja $(0, 0)$ um ponto singulares isolado do sistema (2.2). Seja $y = \varphi(x)$ a solução da equação $y + Q_2(x, y) = 0$ na vizinhança da origem e assumimos que a expansão em série da função $\psi(x) = P(x, \varphi(x)) = \Delta_m x^m + \dots$ onde $m \geq 2, \Delta_m \neq 0$. Temos:*

(i) *Se m é ímpar e $\Delta_m > 0$ temos que $(0, 0)$ é um nó topológico,*

(ii) Se m é ímpar e $\Delta_m < 0$ temos que $(0,0)$ é um ponto de sela sendo que duas de suas separatrizes tendem a 0 na direção 0 e π e outras duas na direção $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$;

(iii) Se m é par temos que $(0,0)$ é uma sela-nó, isto é, um ponto singular cuja vizinhança é a união de um setor parabólico e dois setores hiperbólicos.

Se $\Delta_m < 0$ os setores hiperbólicos contém um segmento do eixo x positivo que têm como fronteira a origem (veja figura 2.10), e se $\Delta_m > 0$ os setores contém um segmento do eixo x negativo (veja figura 2.11).

Interpretação geométrica do teorema 2.2.2.

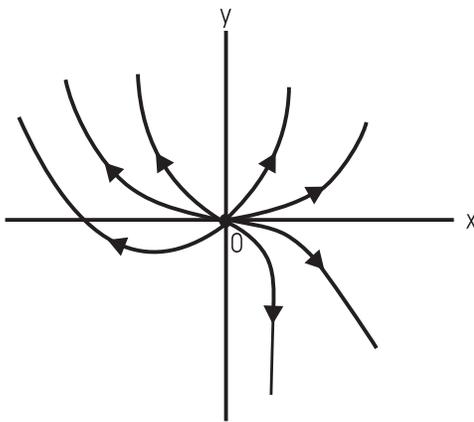


Figura 2.8: Caso onde $\Delta_m > 0$ e m é ímpar.

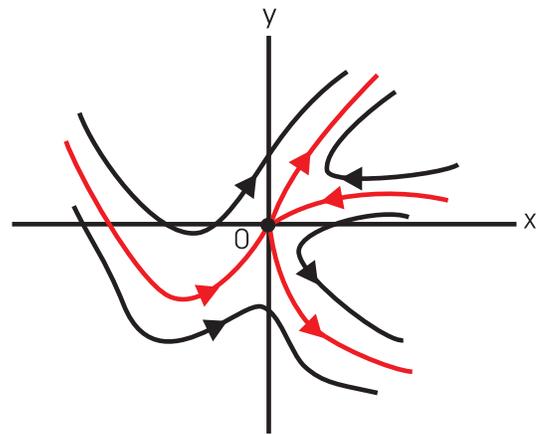


Figura 2.9: Caso onde $\Delta_m < 0$ e m é ímpar.

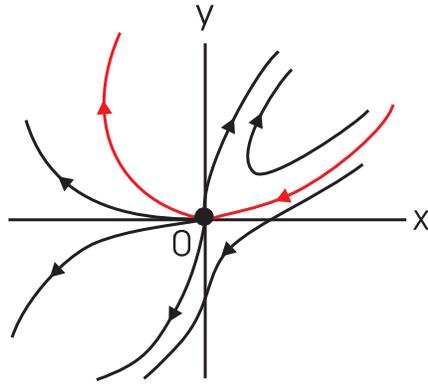


Figura 2.10: Caso onde $\Delta_m < 0$ e m é par.

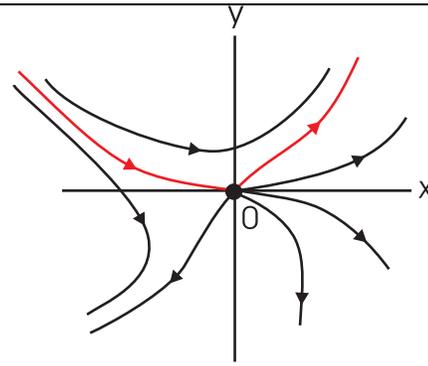


Figura 2.11: Caso onde $\Delta_m > 0$ e m é par.

2.2.3 Pontos Singulares Nilpotentes

Quando $D = T = 0$ mas a matriz Jacobiana em q não é nula e q é um ponto singular isolado no conjunto de todos os pontos singulares, dizemos que q é **nilpotente**. Citaremos agora o resultado de pontos singulares nilpotentes, o qual faremos uso e, cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 2.2.3. *Seja $(0,0)$ um ponto singular isolado do campo de vetores $(y + F(x, y), G(x, y))$, onde F e G são funções analíticas em uma vizinhança da origem começando com termos quadráticos nas variáveis x e y . Seja $y = f(x)$ a solução da equação $y + F(x, y) = 0$ em uma vizinhança da origem.*

Suponhamos que o desenvolvimento da função $G(x, f(x))$ é da forma

$$G(x, f(x)) = Kx^r + H.O.T.$$

e

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) (x, f(x)) = Lx^\lambda + H.O.T.$$

com $K \neq 0, r \geq 2$ e $\lambda \geq 1$.

- (a) Se r é par e $r > 2\lambda + 1$, temos que a origem é uma sela-nó;
- (b) Se r é par e $r < 2\lambda + 1$ temos que a origem é uma cúspide, isto é, um

ponto crítico formado pela união de dois setores hiperbólicos. Portanto, a cúspide possui duas separatrizes tangentes ao eixo x positivo;

- (c) Se r é ímpar, $K < 0$, $r = 2\lambda + 1$, λ par e $L^2 + 4K(\lambda + 1) \geq 0$ temos que a origem é um nó estável se $L < 0$, possuindo todas as órbitas tangentes ao eixo x em $(0, 0)$.
- (d) Se r é ímpar, $K < 0$, $r = 2\lambda + 1$, λ ímpar e $L^2 + 4K(\lambda + 1) \geq 0$ temos que a origem é uma sela elíptica.

Finalmente, se a matriz Jacobiana no ponto singular q é identicamente nula, e q é um ponto singular isolado dentro do conjunto de todos os pontos singulares, dizemos que q é **linearmente nulo**. O estudo do retrato de fase local, neste caso, necessita de um tratamento especial (blow-ups).

Capítulo 3

A Esfera de Poincaré e Pontos Singulares no Infinito

3.1 Introdução

O objetivo desse capítulo é encontrar ferramentas as quais propicie o estudo do comportamento de fluxos no “infinito” e, não somente em vizinhanças de pontos singulares.

Para estudarmos o comportamento de trajetórias de sistemas planares no “infinito” faremos uso da **projeção estereográfica** e da **projeção central** as quais, definiremos a seguir.

O comportamento de trajetórias longe da origem poderá ser entendido estudando o comportamento de trajetórias próximas de “pontos no infinito”, isto é, próximas do polo norte da esfera de Bendixson ou no equador da esfera de Poincaré.

3.2 A esfera de Poincaré

Iniciemos essa seção definindo a projeção estereográfica.

Definição 3.2.1. *Seja a esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ em \mathbb{R}^3 . Projetamos a esfera S^2 sobre o plano xy como indicado na figura a seguir.*

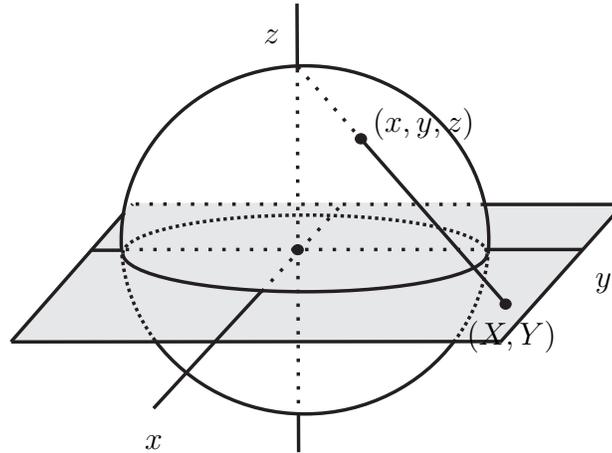


Figura 3.1: Projeção estereográfica de S^2 sobre o plano xy .

Analisando os triângulos dados na figura 3.2 temos que as equações que definem (X, Y) em termos de (x, y, z) são dadas por

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z}.$$

*Temos que a projeção definida pelo conjunto dessas equações é chamada **projeção estereográfica**.*

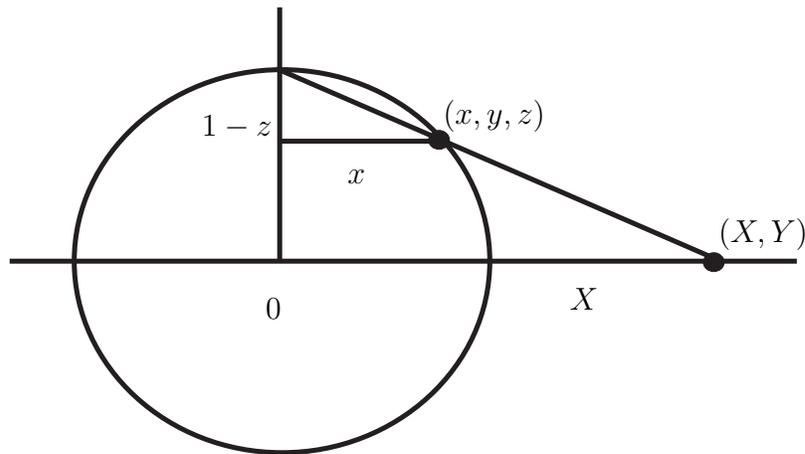


Figura 3.2: Um corte na figura anterior.

Note que o conjunto dessas equações estabelece uma bijeção entre os pontos (x, y, z) do hemisfério norte da esfera unitária S^2 e os pontos (X, Y) do plano.

A idéia de analisar o comportamento global de sistemas dinâmicos planares usando a projeção estereográfica da esfera sobre o plano é devida a Bendixson. A esfera, incluindo o ponto crítico no infinito, é chamada de **esfera de Bendixson**.

Se utilizarmos da projeção estereográfica, o ponto no infinito é usualmente um ponto singular complicado do fluxo induzido na esfera e, posteriormente teremos uma dificuldade para analisarmos o fluxo na vizinhança desse ponto singular.

Contudo, temos uma outra maneira de estudarmos o comportamento de trajetórias “no infinito”, a qual é chamada **esfera de Poincaré**, onde projetamos pelo centro da esfera unitária

$$S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3; X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

pontos diametralmente opostos sobre o plano xy tangente a S^2 no polo norte ou no polo sul, conforme ilustra a figura 3.3 .

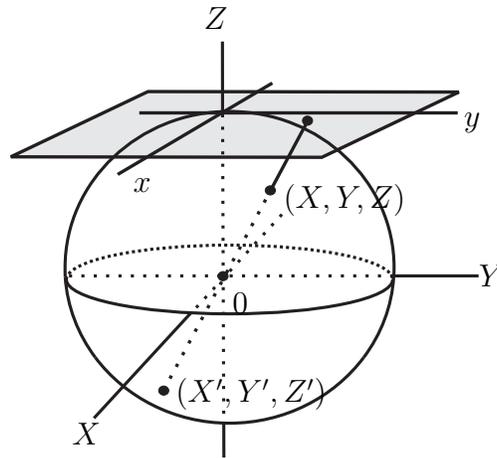


Figura 3.3: Projeção central do hemisfério superior de S^2 sobre o plano xy .

Esse tipo de projeção central introduzida por Poincaré têm a vantagem de que os pontos singulares no infinito estão espalhados ao longo do equador da

esfera de Poincaré e são portanto mais naturais do que os pontos singulares no infinito da esfera de Bendixson.

Se projetarmos o hemisfério superior de S^2 sobre o plano xy , teremos triângulos similares aos da figura 3.4.

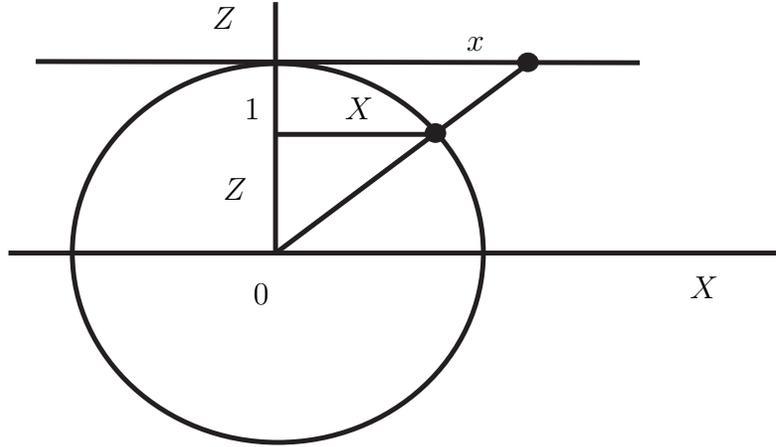


Figura 3.4: Projeção central sobre o plano xy .

Observando esses triângulos obtemos as equações que relacionam os pontos (x, y) no plano com os pontos (X, Y, Z) na esfera

$$x = \frac{X}{Z} \quad \text{e} \quad y = \frac{Y}{Z}. \quad (3.1)$$

De uma forma análoga podemos definir equações que expressam (X, Y, Z) em termos de (x, y) que são dadas por

$$X = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, Y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Essas equações estabelecem uma bijeção entre os pontos (X, Y, Z) com $Z > 0$ (o hemisfério norte da esfera) e os pontos (x, y) no plano. A origem $0 \in \mathbb{R}^3$ corresponde ao polo norte $(0, 0, 1)$ da esfera, pontos no círculo $x^2 + y^2 = 1$ correspondem a pontos no círculo $X^2 + Y^2 = \frac{1}{2}$ e $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ em S^2 e, pontos no equador de S^2 corresponde a “círculos no infinito” ou “pontos no infinito” de \mathbb{R}^2 .

Observe que pontos diametralmente opostos que não estão no equador de S^2 correspondem ao mesmo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (veja figura 3.3). Portanto, é natural esperarmos que pontos diametralmente opostos no equador levem a pontos iguais no infinito.

O hemisfério com os pontos diametralmente opostos identificados é o modelo para o plano projetivo.

Visualizaremos que o fluxo na esfera de Poincaré induz um sistema dinâmico em \mathbb{R}^2 onde o fluxo em vizinhanças de pontos diametralmente opostos é topologicamente equivalente.

Considere o fluxo definido por um sistema dinâmico em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.2)$$

onde P e Q são funções polinomiais de x e y . Seja m o maior grau de P e Q . O sistema acima pode ser escrito

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

ou na forma diferencial como

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0. \quad (3.3)$$

Observe que qualquer uma das últimas formas perdemos a direção do fluxo ao longo da curva solução de (3.2).

De (3.1), temos

$$dx = \frac{ZdX - XdZ}{Z^2}, dy = \frac{ZdY - YdZ}{Z^2}. \quad (3.4)$$

Daí (3.3) pode ser reescrita como

$$Q(ZdX - XdZ) - P(ZdY - YdZ) = 0$$

onde $P = P(x, y) = P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ e $Q = Q(x, y) = Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$.

Para eliminarmos Z nos denominadores, multiplicamos a equação anterior por Z^m e obtemos

$$ZQ^*dX - ZP^*dY + (YP^* - XQ^*)dZ = 0 \quad (3.5)$$

onde $P^*(X, Y, Z) = Z^m P\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ e $Q^*(X, Y, Z) = Z^m Q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ são polinômios em (X, Y, Z) .

Por outro lado essa equação pode ser reescrita ainda na forma de determinante

$$\begin{vmatrix} dX & dY & dZ \\ X & Y & Z \\ P^* & Q^* & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.6)$$

A equação diferencial (3.5) define uma família de curvas soluções ou fluxos em S^2 . Cada curva solução corresponde exatamente a uma curva solução do sistema (3.2) em \mathbb{R}^2 .

Além disso, o fluxo na esfera de Poincaré definido por (3.5) nos permite estudar o comportamento do fluxo definido por (3.2) no infinito, isto é, vamos estudar o fluxo definido por (3.5) nas vizinhanças do equador de S^2 . Temos que o equador de S^2 é constituído de pontos singulares e trajetórias de (3.5).

Se tomarmos $Z = 0$ em (3.5), temos que $(YP^* - XQ^*)dZ = 0$. Se $YP^* - XQ^* \neq 0$ temos que $dZ = 0$, isto é, temos uma trajetória passando por um ponto regular no equador de S^2 . Daí concluímos que os pontos singulares de (3.5), que estão no equador de S^2 são dados pela equação

$$YP^* - XQ^* = 0. \quad (3.7)$$

Se

$$P(x, y) = P_1(x, y) + \cdots + P_m(x, y)$$

e

$$Q(x, y) = Q_1(x, y) + \cdots + Q_m(x, y)$$

onde P_j e Q_j são polinômios homogêneos e j indica o grau do polinômio nas variáveis x e y . Daí

$$\begin{aligned} YP^* - XQ^* &= Z^m YP_1\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) + \cdots + Z^m YP_m\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \\ &\quad - Z^m XQ_1\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) - \cdots - Z^m XQ_m\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\ &= Z^{m-1} YP_1(X, Y) + \cdots + YP_m(X, Y) - \\ &\quad - Z^{m-1} XQ_1(X, Y) - \cdots - XQ_m(X, Y). \end{aligned}$$

Se fizermos $Z = 0$, temos que $YP^* - XQ^* = YP_m(X, Y) - XQ_m(X, Y)$. E, além disso para $Z = 0$ temos $X^2 + Y^2 = 1$, daí (3.7) é equivalente a

$$\text{sen } \theta P_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) - \cos \theta Q_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) = 0.$$

Assim, temos que os pontos singulares no infinito são determinados colocando os termos de maior grau em termos de θ e igualando a zero. O que nos remete ao seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. *Os pontos singulares no infinito para o sistema polinomial de grau m (3.2) ocorrem nos pontos $(X, Y, 0)$ no equador da esfera de Poincaré onde $X^2 + Y^2 = 1$ e*

$$XQ_m(X, Y) - YP_m(X, Y) = 0 \quad (3.8)$$

ou equivalentemente, em coordenadas polares onde os ângulos θ_j e $\theta_j + \pi$ satisfazem

$$G_{m+1} \equiv \cos \theta Q_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) - \text{sen } \theta P_m(\cos \theta, \text{sen } \theta) = 0. \quad (3.9)$$

Essa equação possui no máximo $m + 1$ pares de raízes θ_j e $\theta_j + \pi$ a não ser que $G_{m+1}(\theta)$ seja identicamente nula.

Na esfera temos coordenadas (z, θ) onde

$$\begin{cases} X = \sqrt{1 - Z^2} \cos \theta \\ Y = \sqrt{1 - Z^2} \sin \theta. \end{cases} \quad (3.10)$$

Note que na esfera será $\dot{\theta}$ que define se o movimento é anti-horário ($\dot{\theta} > 0$) ou horário ($\dot{\theta} < 0$).

Com efeito, de (3.10) temos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{Z^2} - 1}\right)^2} (XQ - YP).$$

Sabemos também que o sinal de $(XQ - YP)$ é idêntico ao sinal de $(XQ^* - YP^*)$ pois $Z > 0$. Donde segue a afirmação.

Daí podemos concluir que se $G_{m+1}(\theta)$ não é identicamente nula, o fluxo no equador da esfera de Poincaré será no sentido anti-horário para os pontos que correspondem a ângulos θ tais que $G_{m+1}(\theta) > 0$ e será no sentido horário para pontos que correspondam a ângulos θ tais que $G_{m+1}(\theta) < 0$.

Uma vez determinados os pontos singulares surge uma pergunta natural: *Qual o comportamento qualitativo nas vizinhanças desses pontos?*

Vamos agora determinar o comportamento de pontos singulares no infinito.

Sejam α , o plano tangente a S^2 no ponto $(0, 0, -1)$, C e C' os pontos de interseção do eixo X com o equador e D, D' os pontos de interseção do eixo Y com o equador. Veja figura 3.5.

Seja α^* o plano tangente a S^2 em C . Considere um sistema de coordenadas (u, z) no plano α^* tal que u está na direção do eixo Y e z na direção oposta do eixo Z .

Considere M' e M'' dois pontos antípodais em S^2 e, M^* a intersecção da projeção central com o plano α^* . Veja figura 3.6. Considere também o ponto M no plano α e M^* o correspondente ponto em α^* .

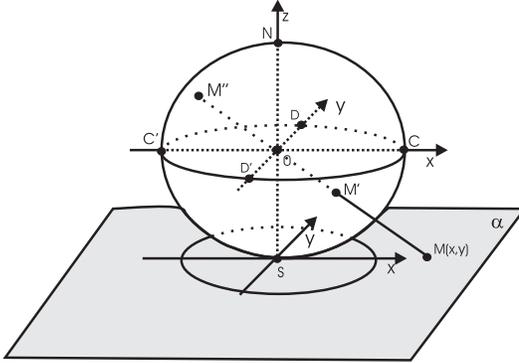


Figura 3.5:

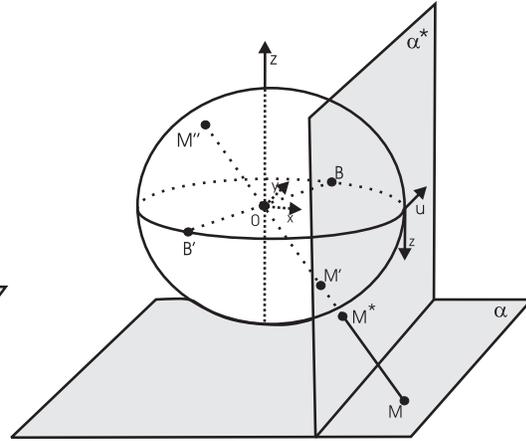


Figura 3.6:

Temos que M e M^* possuem as seguintes coordenadas espaciais: $(x, y, -1)$ e $(1, u, -z)$, respectivamente e, considerando a reta que passa por $(0, 0, 0)$ e M temos

$$x = \frac{y}{u} = \frac{1}{z} \quad (3.11)$$

ou

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z}. \quad (3.12)$$

Para o plano $\hat{\alpha}$ (tangente a esfera S^2 em D) temos relações análogas as coordenadas x, y e z, v :

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z},$$

ou

$$v = \frac{x}{y}, \quad z = \frac{1}{y}. \quad (3.13)$$

As transformações (3.12) e (3.13) são chamadas **transformações de Poincaré**. Aplicando as transformações (3.12) para o sistema (3.2) temos

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -uzP\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zQ\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) \\ \frac{dz}{dt} = -z^2P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right). \end{cases} \quad (3.14)$$

Para $z \neq 0$ (isto é, pontos que não estão no equador) as trajetórias desse sistema são obviamente projeções de trajetórias na esfera ou o que é o mesmo, projeções (passando pelo centro 0) de trajetórias do sistema (3.2) no plano α .

Considere o sistema (3.14), se multiplicarmos esse sistema por z^{m-1} e trocarmos y por u temos

$$\begin{cases} z^{m-1} \frac{dy}{dt} = -yz^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) + z^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ z^{m-1} \frac{dz}{dt} = -z^{m+1} P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right). \end{cases}$$

Escrevendo $\frac{z^{m-1}}{dt} = \frac{1}{d\tau}$ temos $dt = z^{m-1} d\tau$.

Daí o sistema (3.14) pode ser reescrito:

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\tau} = -yz^m P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) + z^m Q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ \frac{dz}{d\tau} = -z^{m+1} P\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right). \end{cases} \quad (3.15)$$

Note que esse sistema é topologicamente equivalente ao sistema (3.14) (e, conseqüentemente ao sistema (3.2)) quando m é ímpar e topologicamente equivalente com direção reversa se m é par.

Observação 3.2.1. *Salientamos aqui que os polinômios P e Q em questão são homogêneos, daí segue a afirmação anterior. Quando não o são não vale o resultado.*

Observe que o sistema (3.15) está definido para $z = 0$, isto é, para todo o plano α^* .

Esses resultados podem ser resumidos no seguinte teorema:

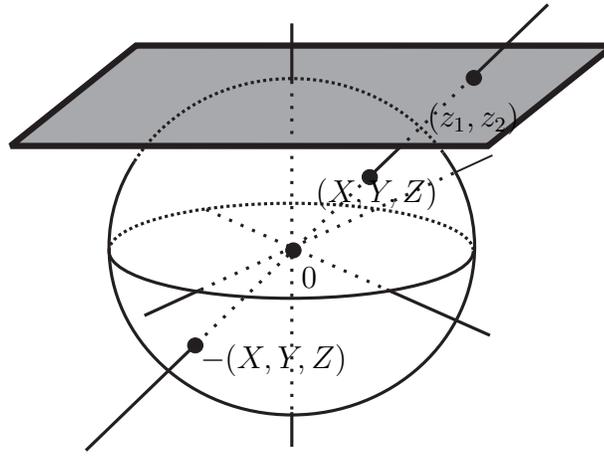


Figura 3.7: Projeção central somente sob um hemisfério da esfera.

Teorema 3.2.2. *O fluxo definido por (3.5) na carta correspondente a $\{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_1 > 0\}$ no equador da esfera de Poincaré S^2 , exceto o ponto $(0, 1, 0)$, é topologicamente equivalente ao fluxo definido pelo sistema*

$$\begin{cases} \dot{y} = z^m \left[Q \left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z} \right) - yP \left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z} \right) \right] \\ \dot{z} = -z^{m+1} P \left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z} \right). \end{cases} \quad (3.16)$$

Analogamente, o fluxo definido por (3.5) na carta correspondente a $\{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_2 > 0\}$ no equador de S^2 , exceto o ponto $(1, 0, 0)$ é topologicamente equivalente ao fluxo definido pelo sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = z^m \left[P \left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z} \right) - xQ \left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z} \right) \right] \\ \dot{z} = -z^{m+1} Q \left(\frac{x}{z}, \frac{1}{z} \right). \end{cases} \quad (3.17)$$

Observação 3.2.2. *Para determinarmos o retrato de fase nas cartas $\{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_1 < 0\}$ e $\{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_2 < 0\}$ basta observarmos que o campo dado no Teorema 3.2.2 provém do campo original multiplicado por um fator z^m e utilizarmos da projeção central.*

Definição 3.2.2. Os campos (3.16) e (3.17), obtidos pelo Teorema anterior para o campo $X(x, y)$ são denominados **campos de vetores compactificados de Poincaré** nas cartas $U_1 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_1 > 0\}$ e $U_2 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_2 > 0\}$, respectivamente, e são denotados por $\rho(X)$.

A compactificação de Poincaré possui a propriedade de que S^1 é invariante sob o fluxo de $P(X)$.

Observação 3.2.3. O ponto singular de (3.16) em $(y_0, 0)$ corresponde ao seguinte ponto singular de (3.5):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{1+y_0^2}}, 0 \right)$$

em S^2 , e o ponto singular de (3.17) corresponde ao ponto singular de (3.5) dado por

$$\left(\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}, 0 \right)$$

em S^2 .

Definição 3.2.3. A projeção do hemisfério norte fechado da esfera S^2 no conjunto $\{(y_1, y_2, y_3); y_3 = 0\}$, isto é, $(y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1, y_2)$ é chamada de **disco de Poincaré**.

Denotamos o disco de Poincaré por D^2 .

Observação 3.2.4. No restante deste texto dizemos que dois campos de vetores polinomiais $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ em \mathbb{R}^2 são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo em S^2 preservando o infinito S^1 , levando órbitas do fluxo induzido por $P(X)$ em órbitas do fluxo induzido por $P(Y)$, preservando ou invertendo o sentido de todas as órbitas.

Capítulo 4

Pontos Singulares na Parte Finita do Campo

4.1 Introdução

Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ polinômios homogêneos de graus 1 e 2, respectivamente, temos que a solução $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ pode ser somente a origem ou uma linha reta passando pela origem.

Com efeito, sabemos que a expressão $P(x, y) = ax + by = 0$, têm como solução uma reta passando pela origem, a solução da expressão $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ pode ser $(0, 0)$ ou um par de retas concorrentes pela origem. Donde concluímos que os pontos singulares do campo $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ são a origem ou uma linha reta passando pela origem.

Teorema 4.1.1. *Sejam $X_i, i = 1, 2, \dots, 23$, os campos de vetores do Teorema 1.0.3.*

- (a) *A origem é uma sela-nó elementar para X_1 se $B - C \neq 1$, para X_2 se $C \neq 1$, para X_3 se $C \neq -1$, para X_4 se $B \neq 1$ e para X_i com $i \in \{5, 6, 7, 16, 17, 18, 19, 23\}$. Portanto, a localização das 3 separatrizes podem ser obtidas pelo Lema 4.1.2 a seguir.*
- (b) *A origem é uma cúspide para X_i com $i \in \{8, 10, 11, 12, 13\}$ possuindo as duas separatrizes tangentes ao eixo x positivo.*

- (c) A linha reta $x + y = 0$ é formada por pontos singulares para X_1 se $B - C = 1$, para X_2 se $C = 1$, para X_3 se $C = -1$ e para X_4 se $B = 1$.
- (d) A linha reta $x = 0$ é formada por pontos singulares para X_i com $i \in \{20, 21, 22\}$.
- (e) A linha reta $y = 0$ é formada por pontos singulares para X_i com $i \in \{9, 14, 15\}$.

Para demonstrar o Teorema 4.1.1, necessitaremos de alguns lemas preliminares.

Lema 4.1.1. *Se $X(x, y)$ é um campo de vetores quadrático planar da forma $(ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$, então a origem é um ponto singular elementar se $a \neq 0$ e, nilpotente se $a = 0$.*

Demonstração Temos que a matriz Jacobiana é dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos que a origem é elementar se $a \neq 0$ e nilpotente se $a = 0$. Como $P(x, y) = ax + by$ tem que ser linear, o caso $a = b = 0$ não é possível. ■

Os próximos dois Lemas detalham o comportamento local do fluxo na origem. Veremos que a origem é uma sela-nó se $a \neq 0$ e uma cúspide se $a = 0$.

Lema 4.1.2. *Seja o campo de vetores $(x + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$, então o retrato de fase local em uma vizinhança da origem é uma sela-nó elementar com dois setores hiperbólicos tendo as duas separatrizes instáveis tangentes ao eixo x e a separatriz estável tangente a semi-reta $x + by = 0$ com $y < 0$ (respectivamente $y > 0$) onde $Ab^2 - Bb + C > 0$ (respectivamente $Ab^2 - Bb + C < 0$).*

Demonstração

Vamos aplicar o Teorema 2.2.2 no campo acima, mas para isso faremos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = x + by. \end{cases}$$

A qual nos fornecerá um campo de vetores na forma

$$(F(x_1, x_2), x_2 + G(x_1, x_2)),$$

onde

$$F(x_1, x_2) = (Ab^2 - Bb + C)x_1^2 + (B - 2Ab)x_1x_2 + Ax_2^2,$$

e

$$G(x_1, x_2) = b(Ab^2 - Bb + C)x_1^2 + b(B - 2Ab)x_1x_2 + Abx_2^2.$$

Seja $x_2 = g(x_1) = b(Ab^2 - Bb + C)x_1^2 + H.O.T.$ a solução de $x_2 + G(x_1, x_2) = 0$ na vizinhança de $(0, 0)$. Temos $f(x_1) = F(x_1, g(x_1)) = (Ab^2 - Bb + C)x_1^2 + H.O.T.$.

Portanto, pelo Teorema 2.2.2, segue o requerido. ■

Lema 4.1.3. *Seja o campo de vetores $(y, x^2 + Bxy + Cy^2)$, então a origem é uma cúspide possuindo duas separatrizes tangentes ao eixo x positivo.*

Demonstração

Vamos utilizar agora o Teorema 2.2.3 na origem do campo de vetores

$$(y + F(x, y), G(x, y)) = (y, x^2 + Bxy + Cy^2).$$

Temos $y = 0 = f(x)$, a solução de $y + F(x, y) = 0$, logo $G(x, f(x)) = G(x, 0) = x^2 = Kx^r$ e

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) (x, f(x)) = Bx = Lx^\lambda.$$

Suponhamos que $B \neq 0$, daí temos que $r = 2$ é par e $r < 2\lambda + 1 = 3$. Logo, pelo Teorema 2.2.3(b) concluímos esse caso.

Tratemos agora os casos onde $B = 0$. Para esta análise faremos blow-up polar. Temos os seguintes campos a serem considerados: X_{10} , X_{11} e X_{13} .

No campo $X_{10} = (y, x^2 + y^2)$, onde $B = 0$ e $C = 1$, fazendo um blow-up polar obtemos o campo:

$$\left(r(r + \cos t)\text{sen } t, \frac{1}{2}(-1 + 2r\cos t + \cos 2t) \right).$$

Fazendo um novo blow-up polar no ponto $(r, t) = (0, 0)$ temos

$$\begin{cases} \dot{r}_1 &= \frac{1}{8}r_1 \left((8 + 5r_1^2)\cos t_1 + r_1(8\cos[2t_1] + 3r_1\cos[3t_1]) \right) \text{sen } t_1 \\ \dot{t}_1 &= \cos^2 t_1 - \frac{1}{2}r_1\cos t_1(4 + 3r_1\cos t_1)\text{sen}^2 t_1. \end{cases}$$

Contudo ainda não há uma desingularização, e surgem mais dois pontos singulares: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Fazendo um novo blow-up na direção $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ temos

$$\begin{cases} \dot{r}_2 &= \frac{1}{2}r_2^2(4\cos t_2\text{sen}^2 t_2 + 2\text{sen}^3 t_2 - \cos^2 t_2\text{sen } t_2(2 + 3r_2^2\text{sen}^2 t_2) + \\ &+ \cos^3 t_2(-2 + 5r_2^2\text{sen}^2 t_2)) \\ \dot{t}_2 &= -\frac{1}{2}r_2\cos t_2\text{sen } t_2(-4\text{sen} t_2 + \cos t_2(-6 + r_2^2\text{sen } t_2(3\cos t_2 + 5\text{sen } t_2))) \end{cases}$$

cujas singularidades são: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \text{Arccos}\left[-\frac{2}{\sqrt{13}}\right]\right)$, $\left(0, -\text{Arccos}\left[\frac{2}{\sqrt{13}}\right]\right)$ e $(0, 0)$, as quais são todas selas elementares.

E, na direção $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ temos

$$\begin{cases} r_2 = -\frac{1}{2}r_2^2(4\cos t_2\sin^2 t_2 - 2\sin^3 t_2 + \cos^2 t_2\sin t_2(2 + 3r_2^2\sin^2 t_2) + \\ \quad + \cos^3 t_2(-2 + 5r_2^2\sin^2 t_2)) \\ t_2 = \frac{1}{2}r_2\cos t_2\sin t_2(4\sin t_2 + \cos t_2(-6 + r_2^2\sin t_2(-3\cos t_2 + 5\sin t_2))). \end{cases}$$

cujas singularidades são: $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, -\frac{\pi}{2})$, $(0, -\text{Arccos}[-\frac{2}{\sqrt{13}}])$, $(0, \text{Arccos}[\frac{2}{\sqrt{13}}])$ e $(0, 0)$, as quais são todas selas elementares.

Como as singularidades desses campos são todas hiperbólicas, trazendo as informações através de “blow-down” obtemos que a origem é uma cúspide.

Procedendo analogamente com os campos X_{11} e X_{13} obtemos também que a origem é uma cúspide.

Com relação ao campo X_{13} teremos um trabalho extra, visto que quando fizermos o primeiro “blow-up” já irá surgir duas direções a serem analisadas e não somente uma como nesse caso que detalhamos.

Donde concluímos o Lema. ■

Observação 4.1.1. *No trabalho original, cuja parte da dissertação é baseada, a análise desses casos isolados não foi considerada e, com isso preenchemos esta lacuna, que se tratava do caso onde o parâmetro B assume o valor nulo.*

Nos Lemas seguintes caracterizamos os casos onde a origem não é um ponto singular isolado.

Lema 4.1.4. *Considere o campo de vetores $(x + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$, temos que a linha reta $x + by = 0$ é formada de pontos singulares se $Ab^2 - Bb + C = 0$.*

Demonstração

Podemos reescrever o campo da seguinte forma

$$(x + by, (x + by)(Ax + (B - Ab)y)).$$

De fato, temos que $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (x + by)(Ax + (B - Ab)y) + (Ab^2 - Bb + C)y^2$. Como por hipótese temos $Ab^2 - Bb + C = 0$, segue que $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (x + by)(Ax + (B - Ab)y)$.

Donde concluímos o Lema. ■

Lema 4.1.5. *Considere o campo de vetores $(y, Bxy + Cy^2)$. Temos que a linha reta $y = 0$ é formada por pontos singulares.*

Demonstração

A demonstração é imediata, pois y é fator comum às duas componentes do campo. ■

Demonstração do Teorema 4.1.1.

A demonstração do Teorema segue imediatamente dos Lemas 4.1.1 ao 4.1.5. ■

Dos Lemas 4.1.2 e 4.1.3 segue o seguinte resultado:

Proposição 4.1.1. *Considere o campo de vetores analítico*

$$(ax + by + O_2(x, y), Ax^2 + Bxy + Cy^2 + O_3(x, y))$$

possuindo a origem como ponto singular isolado. Onde $O_2(x, y)$ e $O_3(x, y)$ representam polinômios homogêneos de ordem maior que 2 e 3, respectivamente.

- (i) *Se $a \neq 0$, podemos assumir que $a = 1$, e a origem é uma sela-nó elementar com dois setores hiperbólicos tendo duas separatrizes instáveis tangentes ao eixo x e uma estável tangente a linha reta $x + by = 0$ com $y < 0$ (respectivamente $y > 0$) quando $Ab^2 - Bb + C > 0$ (respectivamente $y < 0$).*
 - (ii) *Se $a = 0$ e $b \neq 0$, podemos assumir que $b = 1$ e $A = 1$, e a origem será uma cúspide possuindo as duas separatrizes tangentes ao eixo x positivo.*
-

A Proposição 4.1.1 é a extensão do Teorema de Hartman para campos de vetores planares começando com termos lineares e quadráticos.

Capítulo 5

Pontos Singulares na Parte Infinita do Campo

5.1 Introdução

As expressões

$$z_2^n \left(Q \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) - z_1 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), -z_2 P \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right) \quad \text{em } U_1, \quad (5.1)$$

$$z_2^n \left(P \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) - z_1 Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right), -z_2 Q \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) \right) \quad \text{em } U_2, \quad (5.2)$$

para a compactificação de Poincaré $P(X)$ do campo $X(x, y) = (ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$, cuja dedução encontra-se no Teorema 3.2.2, são escritas como

$$(A + Bz_1 + Cz_1^2 - z_1z_2(a + bz_1), -z_2(a + bz_1)) \quad \text{em } U_1, \quad (5.3)$$

$$(z_2(az_1 + b) - z_1(Az_1^2 + Bz_1 + C), -z_2(Az_1^2 + Bz_1 + C)) \quad \text{em } U_2. \quad (5.4)$$

Definição 5.1.1. *Um ponto singular q de $P(X)$ é dito um **ponto na parte infinita do campo** de $X(x, y)$ se q pertence ao equador da esfera e , é um **ponto na parte finita do campo** se $q \in S^2 \setminus S^1$.*

Observemos que os pontos singulares de $P(X)$ são simétricos com respeito a origem da esfera de Poincaré. Portanto, podemos estudar pontos singulares no infinito restringindo nossa análise para pontos singulares no infinito nas cartas locais U_1 e U_2 .

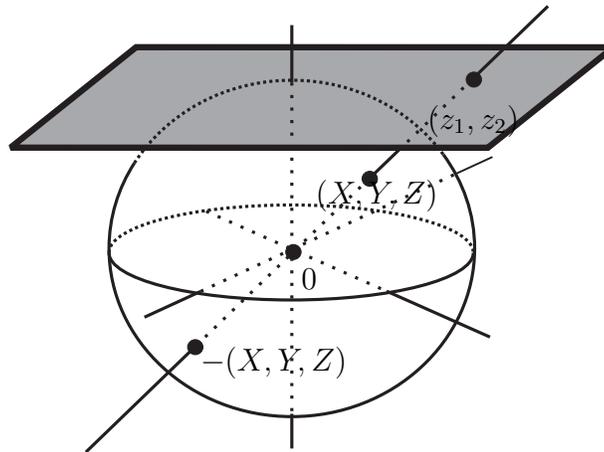


Figura 5.1: Projeção central somente sob um hemisfério da esfera.

Portanto, pelas definições de carta local os únicos pontos singulares no infinito que podem pertencer a $(U_2 \cup V_2) \setminus (U_1 \cup V_1)$ são as origens de U_2 e V_2 .

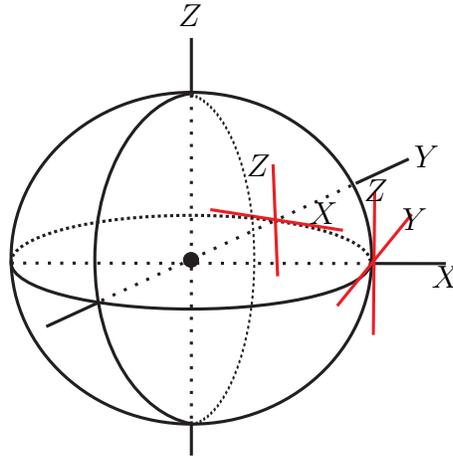


Figura 5.2: As cartas U_1, U_2, V_1 e V_2 .

Temos que os pontos singulares no infinito de $X(x, y)$ são os pontos $(z_1, 0)$ de U_1 tal que $A + Bz_1 + Cz_1^2 = 0$ e $(0, 0)$ de U_2 .

Para estudarmos o comportamento local dos pontos singulares no infinito, necessitaremos de suas partes lineares, as quais serão dadas pelas matrizes Jacobianas, que são da forma

$$\begin{bmatrix} B + 2Cz_1 & -az_1 - bz_1^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -C & b \\ 0 & -C \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

nos pontos $(z_1, 0) \in U_1$ e $(0, 0) \in U_2$, respectivamente.

5.2 A origem da carta U_2 como ponto singular na parte infinita do campo

Pelas expressões em (5.5) a origem de uma carta local U_2 é não-degenerada se $C \neq 0$, nilpotente se $C = 0$ e $b \neq 0$ e linearmente nula se $C = b = 0$.

Teorema 5.2.1. Denotemos por X_i , para $i \in \{1, 2, \dots, 23\}$ os campos de vetores do Teorema 1.0.3. A origem da carta local U_2 é

- (a) Um nó estável para X_i com $i \in \{1, 2, 3, 8, 16\}$ se $C > 0$ e, para X_i com $i \in \{5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 23\}$;

- (b) Um nó instável para X_i com $i \in \{1, 2, 3, 8, 16\}$ se $C < 0$ e, para X_i com $i \in \{11, 19\}$;
- (c) Uma sela-elíptica para X_i com $i \in \{4, 6, 12, 14\}$, possuindo as separatrizes do setor hiperbólico no infinito (S^1). Para X_4 com $B > 0$ e para X_6, X_{12} e X_{14} o setor elíptico está em $z_2 > 0$ e, a separatriz estável coincide localmente com o eixo z_1 positivo. Para X_4 com $B < 0$ o setor elíptico está em $z_2 < 0$ e, a separatriz estável coincide localmente com o eixo z_1 negativo;
- (d) Um ponto singular não isolado para X_i com $i \in \{20, 21, 22\}$.

Antes de demonstrarmos o Teorema 5.2.1 necessitaremos de dois Lemas auxiliares.

Lema 5.2.1. *Considere o campo de vetores*

$$X(x, y) = (ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2),$$

temos que a origem de U_2 é um nó estável se $C > 0$, e um nó instável se $C < 0$.

Demonstração

Temos por hipótese que $C > 0$ ou $C < 0$. Este Lema segue imediatamente da subseção 2.2.1, pois $D = C^2$ e $T = -2C$, logo $T^2 = 4C^2$. Assim, $4D \geq T^2$.

Portanto, é um nó estável se $T < 0$, isto é, $C > 0$, e é um nó instável se $T > 0$, isto é, $C < 0$. ■

No próximo Lema estudaremos o retrato de fase local da origem de U_2 quando é um ponto singular nilpotente.

Lema 5.2.2. *Considere o campo de vetores*

$$X(x, y) = (ax + y, Ax^2 + Bxy).$$

A origem de U_2 é uma sela-elíptica se $B \neq 0$ um nó estável se $B = 0$. Se $B \neq 0$ as separatrizes do setor hiperbólico da sela-elíptica estão no infinito

(S^1). Se $B > 0$ (respectivamente $B < 0$) o setor elíptico está em $z_2 > 0$ (respectivamente $z_2 < 0$), e a separatriz estável coincide localmente com o eixo z_1 positivo (respectivamente negativo).

Demonstração

Por (5.4) a expressão de $P(X)$ na carta local U_2 é

$$(z_2 + F(z_1, z_2), G(z_1, z_2)) = (z_2 - Bz_1^2 + az_1z_2 - Az_1^3, -Bz_1z_2 - Az_1^2z_2).$$

Seja $z_2 = f(z_1)$ a solução de $z_2 + F(z_1, z_2) = 0$ em uma vizinhança da origem. Temos que

$$f(z_1) = Bz_1^2 + (A - aB)z_1^3 - a(A - aB)z_1^4 + \dots$$

Temos $G(z_1, f(z_1)) = -B^2z_1^3 + B(aB - 2A)z_1^4 - (A - aB)^2z_1^5 + \dots = Kz_1^k + \dots$. Temos também que

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z_2} = -3Bz_1 + az_2 - 4Az_1^2,$$

donde resulta que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z_2} \right) (z_1, f(z_1)) &= -3Bz_1 + (aB - 4A)z_1^2 + (aA - a^2B)z_1^3 + \dots \\ &= Lz_1^\lambda + H.O.T.. \end{aligned}$$

Se $B \neq 0$, temos $K = -B^2$, $k = 3$, $L = -3B$ e $\lambda = 1$. Como k é ímpar, $K < 0$, $k = 2\lambda + 1$, λ é ímpar e $L^2 + 4K(\lambda + 1) = B^2 > 0$, pelo Teorema 2.2.3 (d) segue que a origem de U_2 é uma sela-elíptica.

Estudemos agora a localização das duas separatrizes da sela-elíptica com respeito ao infinito, isto é, com respeito ao eixo z_1 . Para realizarmos esse estudo faremos uso de blow-ups polares.

Estamos com o campo $(y - Bx^2 + axy - Ax^3, -Bxy - Ax^2y)$.

Fazendo um blow-up polar obtemos

$$(r \cos[t](-Br + \operatorname{sen}[t] + r \cos[t](-Ar + a \operatorname{sen}[t])), -(1 + \operatorname{arccos}[t]) \operatorname{sen}^2[t]).$$

Este campo possui duas singularidades: $(0, 0)$ e $(0, \pi)$.

Analisemos inicialmente a singularidade $(0, 0)$. Fazendo um novo blow-up polar temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r}_1 = \frac{1}{2} r_1^2 (2 \cos^2[t_1] \operatorname{sen}[t_1] - 2 \operatorname{sen}^3[t_1] - 2 a r_1 \cos[t_1] \operatorname{sen}^3[t_1] + \\ \quad + \cos^3[t_1] (-2B + r_1 \operatorname{sen}[t_1] (2a + B r_1 \operatorname{sen}[t_1]))) \\ \dot{t}_1 = \frac{1}{16} r_1 (-B(-8 + r_1^2) \cos[t_1] + B r_1^2 \cos[3t_1] - \\ \quad - 16(1 + a r_1 \cos[t_1]) \operatorname{sen}[t_1]) \operatorname{sen}[2t_1]. \end{array} \right.$$

Reescalando esse campo por um fator r , obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r}_1 = \frac{1}{2} r_1 (2 \cos^2[t_1] \operatorname{sen}[t_1] - 2 \operatorname{sen}^3[t_1] - 2 a r_1 \cos[t_1] \operatorname{sen}^3[t_1] + \\ \quad + \cos^3[t_1] (-2B + r_1 \operatorname{sen}[t_1] (2a + B r_1 \operatorname{sen}[t_1]))) \\ \dot{t}_1 = \frac{1}{16} (-B(-8 + r_1^2) \cos[t_1] + B r_1^2 \cos[3t_1] - \\ \quad - 16(1 + a r_1 \cos[t_1]) \operatorname{sen}[t_1]) \operatorname{sen}[2t_1]. \end{array} \right.$$

Este campo possui as singularidades: $(0, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(0, \operatorname{Arc cotg} \frac{2}{B})$, as quais são selas elementares e na direção $(0, \operatorname{Arc cotg} \frac{2}{B})$ temos um nó.

Analisemos agora a singularidade $(0, \pi)$. Fazendo um novo blow-up polar temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r}_1 = \frac{1}{2}r_1^2((2\cos^2[t_1]\text{sen}[t_1] - 2\text{sen}^3[t_1] + 2ar_1\cos[t_1]\text{sen}^3[t_1] - \\ \quad - \cos^3[t_1](-2B + r_1\text{sen}[t_1](2a + Br_1\text{sen}[t_1]))) \\ \dot{t}_1 = \frac{1}{16}r_1((Br_1^2\cos[3t_1] + 16\text{sen}[t_1] - \cos[t_1]((B(-8 + r_1^2)) + \\ \quad + 16ar_1\text{sen}[t_1])))\text{sen}[2t_1]. \end{array} \right.$$

Reescalando esse campo por um fator r , obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r}_1 = \frac{1}{2}r_1((2\cos^2[t_1]\text{sen}[t_1] - 2\text{sen}^3[t_1] + 2ar_1\cos[t_1]\text{sen}^3[t_1] - \\ \quad - \cos^3[t_1](-2B + r_1\text{sen}[t_1](2a + Br_1\text{sen}[t_1]))) \\ \dot{t}_1 = \frac{1}{16}((Br_1^2\cos[3t_1] + 16\text{sen}[t_1] - \cos[t_1]((B(-8 + r_1^2)) + \\ \quad + 16ar_1\text{sen}[t_1])))\text{sen}[2t_1]. \end{array} \right.$$

Este campo possui as singularidades: $(0, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(0, \text{Arc cotg} \frac{-2}{B})$, as quais são selas elementares e na direção $(0, \text{Arc cotg} \frac{2}{B})$ temos um nó.

Se $B = 0$ temos que $K = -A^2$, $k = 5$, $L = -4A$, $\lambda = 2$ e $A \neq 0$ pois a segunda componente do campo é de segundo grau.

Como k é ímpar, $K < 0$, $k = 2\lambda + 1$, λ é par e $L^2 + 4K(\lambda + 1) = 4 > 0$, pelo Teorema 2.2.3 (c) segue que a origem de U_2 é um nó estável. ■

Se $b = C = 0$ temos o campo de vetores $(ax, Ax^2 + Bxy)$. Note que $x = 0$ é uma reta composta de pontos singulares, a origem de U_2 é um ponto singular não isolado.

Estudaremos no capítulo 6 o retrato de fase local da origem de U_2 para tais

sistemas.

Demonstração do Teorema 5.2.1

A demonstração deste Teorema segue imediatamente dos Lemas 5.2.1 e 5.2.2 e do parágrafo anterior. ■

5.3 A origem da carta U_1 como ponto singular na parte infinita do campo

Vimos na seção anterior que os pontos singulares infinitos $(z_1, 0)$ na carta local U_1 de $X(x, y) = (ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$ necessariamente satisfazem

$$A + Bz_1 + Cz_1^2 = 0.$$

Se $B^2 - 4AC \geq 0$ definimos

$$z_1^\pm = \frac{-B \pm \delta}{2C}$$

e

$$\alpha^\pm = \pm \frac{(a + bz_1^\pm)}{\delta},$$

onde $\delta = \sqrt{B^2 - 4AC}$.

De acordo com as figuras a seguir, classificaremos a sela-nó elementar $(z_1^+, 0)$ (respectivamente $(z_1^-, 0)$) em tipos $\alpha^+ < 0$ e $\alpha^+ > 0$, (respectivamente $\alpha^- < 0$ e $\alpha^- > 0$).

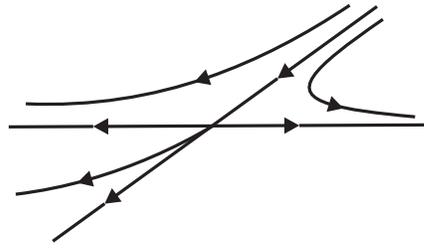


Figura 5.3: $\alpha^+ < 0$.

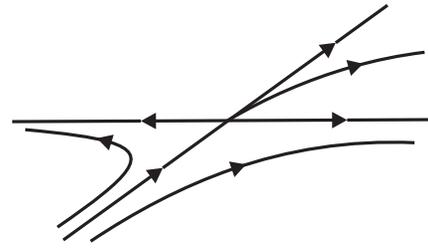


Figura 5.4: $\alpha^+ > 0$.

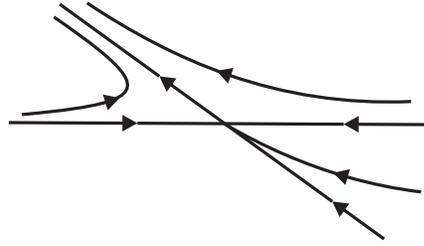


Figura 5.5: $\alpha^- < 0$.

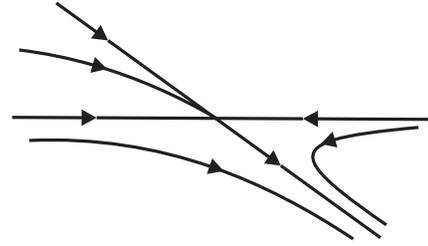


Figura 5.6: $\alpha^- > 0$.

A seguir demonstraremos um resultado relevante na direção da demonstração do Teorema 0.0.1.

Teorema 5.3.1. Denotemos por X_i , para $i = 1, 2, \dots, 23$, os campos de vetores do Teorema 1.0.3.

- (1) Se $C > \frac{B^2}{4}$ temos que X_1 não têm pontos singulares no infinito em U_1 . Se $C = \frac{B^2}{4}$, temos $\left(-\frac{2}{B}, 0\right)$ é o único ponto singular infinito de X_1 em U_1 .

Além disso, se $B \neq 2$ temos uma sela-nó nilpotente e a localização de suas separatrizes com respeito ao infinito é descrita no Lema 5.3.2 .

Se $B = 2$, o ponto $\left(-\frac{2}{B}, 0\right)$ é não isolado dentro do conjunto de todos pontos singulares. Se $C < \frac{B^2}{4}$ temos X_1 possui dois pontos singulares infinitos em U_1 , a saber $(z_1^\pm, 0)$. Além disso, se $B - C \neq 1$, estes pontos serão selas-nós elementares.

Se $B - C = 1$, temos $\left(-\frac{1}{C}, 0\right)$ é uma sela-nó elementar e, $(-1, 0)$ é um ponto singular não isolado dentro do conjunto de todos pontos singulares.

Finalmente, se $C < 0$ e $B - C < 1$, temos $z_1^+ < -1 < 0 < z_1^-$, e as selas-nós elementares $(z_1^\pm, 0)$ são do tipo $\alpha^+ > 0$ e $\alpha^- < 0$.

Se $0 < C < \frac{B^2}{4}$ e $B < 0$, (conseqüentemente $B - C < 1$), temos $0 < z_1^- < z_1^+$, e $(z_1^\pm, 0)$ são do tipo $\alpha^+ < 0$ e $\alpha^- > 0$.

Se $0 < C < \frac{B^2}{4}$, $0 < B < 2$ e $B - C < 1$, temos $z_1^- < z_1^+ < -1$, e $(z_1^\pm, 0)$ são do tipo $\alpha^+ > 0$ e $\alpha^- < 0$.

Se $0 < C < \frac{B^2}{4}$, $B > 2$ e $B - C < 1$, temos $-1 < z_1^- < z_1^+ < 0$, e $(z_1^\pm, 0)$ são do tipo $\alpha^+ < 0$ e $\alpha^- > 0$.

Se $C > 0$ e $B - C > 1$, temos $z_1^- < -1 < z_1^+ < 0$, e $(z_1^\pm, 0)$ são do tipo $\alpha^+ < 0$ e $\alpha^- < 0$.

Se $C < 0$ e $B - C > 1$, temos $-1 < z_1^+ < 0 < z_1^-$, e $(z_1^\pm, 0)$ são do tipo $\alpha^+ < 0$ e $\alpha^- > 0$.

- (2) O campo X_2 possui dois pontos singulares infinitos em U_1 , a saber, $(0, 0)$ e $\left(-\frac{1}{C}, 0\right)$. Se $C \neq 1$, esses pontos serão selas-nó elementares. Se $C = 1$ temos $(0, 0)$ é uma sela-nó elementar e, $(-1, 0)$ é um ponto singular não isolado. Além disso, $(0, 0)$ é do tipo $\alpha^+ < 0$ para todo C e, $\left(-\frac{1}{C}, 0\right)$ é do tipo $\alpha^- > 0$ para $C < 0$, $\alpha^- < 0$ para $0 < C < 1$ e $\alpha^- > 0$ para $C > 1$.
 - (3) Se $C > 0$ temos que X_3 não possui pontos singulares infinitos em U_1 . Se $C < 0$ temos que X_3 possui dois pontos singulares infinitos em U_1 , a saber $(z_1^\pm, 0) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{C}}, 0\right)$. Se $C \neq -1$ estes pontos serão selas-nós elementares. Se $C = -1$, temos que $(1, 0)$ é um ponto singular não isolado. Além disso, $\left(\frac{1}{\sqrt{|C|}}, 0\right)$ é do tipo $\alpha^- > 0$ para $C < 0$, e $\left(-\frac{1}{\sqrt{|C|}}, 0\right)$ é do tipo $\alpha^+ < 0$ para $C < -1$, e $\alpha^+ > 0$ para $-1 < C < 0$.
 - (4) O campo X_4 possui um ponto singular em U_1 , a saber, $\left(-\frac{1}{B}, 0\right)$. Se $B \neq 1$ temos que este ponto é uma sela-nó elementar. Se $B = 1$ este é um ponto singular não isolado. Além disso, a sela-nó elementar é do
-

tipo $\alpha^- > 0, \alpha^+ > 0$ e $\alpha^+ < 0$ de acordo com $B < 0, 0 < B < 1$ e $B > 1$, respectivamente.

- (5) O campo X_5 não possui pontos singulares infinitos em U_1 .
 - (6) O campo X_6 possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(0, 0)$ o qual é uma sela-nó elementar. Além disso, esta sela-nó elementar é do tipo α^+ .
 - (7) O campo X_7 possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(0, 0)$ o qual é linearmente nulo.
 - (8) Se $C > \frac{1}{4}$ temos que X_8 não possui pontos singulares no infinito de U_1 . Se $C = \frac{1}{4}$ temos que X_8 possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(-2, 0)$ e este é uma sela-nó nilpotente e a localização de suas separatrizes com respeito ao infinito são descritas na parte 3.2 da figura 5.7. Se $C < \frac{1}{4}$ temos que X_8 possui pontos singulares infinitos em U_1 , a saber $(z_1^\pm, 0)$, os quais são selas-nós elementares. Além disso, se $0 < C < \frac{1}{4}$, temos $z_1^- < z_1^+ < 0$, e $(z_1^\pm, 0)$ são do tipo $\alpha^+ > 0$ e $\alpha^- < 0$. Se $C < 0$, temos $z_1^+ < 0 < z_1^-$, e $(z_1^\pm, 0)$ são do tipo $\alpha^+ > 0$ e $\alpha^- > 0$.
 - (9) O campo X_9 possui dois pontos singulares infinitos em U_1 , a saber, $(z_1^+, 0) = (0, 0)$ e $(z_1^-, 0) = (-1, 0)$. O ponto singular $(-1, 0)$ é uma sela-nó elementar do tipo $\alpha^- < 0$, e $(0, 0)$ é não isolado.
 - (10) O campo X_{10} não possui pontos singulares infinitos em U_1 .
 - (11) O campo X_{11} possui dois pontos singulares infinitos em U_1 , a saber $(z_1^\pm, 0) = (\mp 1, 0)$, os quais são selas-nós elementares do tipo $\alpha^+ > 0$ e $\alpha^- > 0$.
 - (12) O campo X_{12} possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(-1, 0)$, o qual é uma sela-nó elementar do tipo $\alpha^+ > 0$.
 - (13) O campo X_{13} não possui pontos singulares infinitos em U_1 .
-

- (14) O campo X_{14} possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(0, 0)$, o qual é não isolado.
- (15) O campo X_{15} possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(0, 0)$, o qual é não isolado.
- (16) Se $C > \frac{1}{4}$ temos que o campo X_{16} não possui pontos singulares infinitos em U_1 . Se $C = \frac{1}{4}$ temos que X_{16} possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(-2, 0)$, e este é uma sela-nó nilpotente e a localização de suas separatrizes com respeito ao infinito são descritas na parte 3.1 da figura 5.7. Se $C < \frac{1}{4}$ e $C \neq 0$, temos que X_{16} possui dois pontos singulares infinitos em U_1 , a saber $(z_1^\pm, 0)$ os quais são selas-nós elementares do tipo $\alpha^+ < 0$ e $\alpha^- > 0$. Além disso, se $0 < C < \frac{1}{4}$, temos que $z_1^- < z_1^+ < -1$. Se $C < 0$, temos $-1 < z_1^+ < 0 < z_1^-$.
- (17) O campo X_{17} possui dois pontos singulares infinitos em U_1 , a saber $(z_1^+, 0) = (0, 0)$ e $(z_1^-, 0) = (-1, 0)$, os quais são selas-nós elementares do tipo $\alpha^+ < 0$ e $\alpha^- > 0$.
- (18) O campo X_{18} não possui pontos singulares infinitos em U_1 .
- (19) O campo X_{19} possui dois pontos singulares infinitos em U_1 , a saber $(z_1^\pm, 0) = (\mp 1, 0)$, os quais são selas-nós elementares do tipo $\alpha^+ < 0$ e $\alpha^- > 0$.
- (20) O campo X_{20} possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(-1, 0)$, o qual é uma sela-nó elementar do tipo $\alpha^+ < 0$.
- (21) O campo X_{21} não possui pontos singulares infinitos em U_1 .
- (22) O campo X_{22} possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(0, 0)$, o qual é uma sela-nó elementar do tipo $\alpha^+ < 0$.
- (23) O campo X_{23} possui um ponto singular infinito em U_1 , a saber $(0, 0)$, o qual é linearmente nulo.

Para demonstrar o Teorema 5.3.1 precisaremos dos dois próximos Lemas.

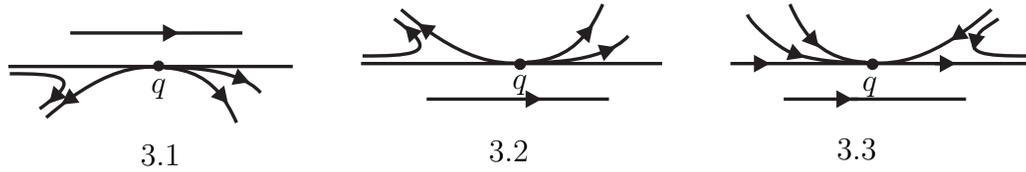


Figura 5.7: Sela nó nilpotente $\left(-\frac{2}{B}, 0\right) \in U_1$.

Lema 5.3.1. *Considere o campo de vetores $X(x, y) = (ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$.*

- (1) *Se $C \neq 0, \delta > 0$ e $(z_1^\pm, 0)$ são pontos singulares isolados em U_1 , temos $(z_1^\pm, 0)$ são selas-nós elementares. Além disso, a separatriz em $(z_1^\pm, 0)$ que não é tangente ao eixo z_1 tende para o infinito com inclinação $-\alpha^\pm z_1^\pm$.*
- (2) *Se $C = 0$ e $B \neq 0$, temos $\left(-\frac{A}{B}, 0\right)$ é o único ponto singular infinito em U_1 , e se este for isolado teremos uma sela-nó elementar.*

Demonstração

Assumimos que $\delta > 0$. Vamos transladar o ponto singular $(z_1^\pm, 0)$ para a origem das coordenadas. Utilizando-nos da equação (3.16) e, observando que $\delta = \sqrt{B^2 - 4AC}$, z_1^\pm são raízes de $A + Bz_1 + Cz_1^2$ e que $z_1^\pm = \frac{-B \pm \delta}{2C}$, obtemos o seguinte campo de vetores

$$(\pm\delta z_1 - (a + bz_1^\pm)z_1^\pm z_2 + Cz_1^2 - (a + 2bz_1^\pm)z_1 z_2 - bz_1^2 z_2, -(a + bz_1^\pm)z_2^2 - bz_1 z_2^2).$$

Vamos aplicar o Teorema 2.2.2, para isso precisamos escrever esse campo de vetores na forma canônica

$$(F(x, y), y + G(x, y)).$$

Com esse intuito vamos aplicar a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = z_2 \\ y = \pm\delta z_1 - (a + bz_1^\pm)z_1^\pm z_2 \end{cases}$$

o que nos conduz ao seguinte campo

$$\left(-(a + bz_1^\pm)x^2 \mp \frac{b}{\delta} [y + z_1^\pm(a + bz_1^\pm)x] x^2, \pm\delta y + H.O.T. \right).$$

Reescalando o tempo por um fator $\pm\delta$, obtemos o campo de vetores $(F(x, y), y + G(x, y))$ com

$$F(x, y) = \mp \frac{(a + bz_1^\pm)x^2}{\delta} + H.O.T.,$$

e

$$y + G(x, y) = y + H.O.T..$$

Como $F(x, y)$ começa com um termo em x^2 , a solução $y = g(x)$ de $y + G(x, y) = 0$ em uma vizinhança de $(0, 0)$ começará com pelo menos um fator linear, donde segue que $f(x) = F(x, g(x))$ iniciar-se-á com o termo

$$\mp \frac{(a + bz_1^\pm)}{\delta} x^2$$

seguido de termos de ordem superior.

Portanto, a sela-nó estará bem caracterizada pelo coeficiente $-\alpha^\pm = \mp \frac{a + bz_1^\pm}{\delta}$ de x^2 em $F(x, y)$. Logo, pelo Teorema 2.2.2 e voltando através da mudança de coordenadas segue que a separatriz em $(z_1^\pm, 0)$ não é tangente ao eixo z_1 e, tende para o infinito com inclinação $-\alpha^\pm z_1^\pm$.

De fato, temos que o infinito aqui trata-se de $z_2 = 0$, isto é, o eixo z_1 . Daí, a reta que determina a direção com a qual a separatriz tende para o infinito é determinada por $z_1 = m_1 z_2$. Substituindo na mudança de variáveis temos

$$\begin{aligned} y &= \pm\delta m_1 z_2 - (a + bz_1^\pm) z_1^\pm z_2 \\ &= [\pm\delta m_1 - (a + bz_1^\pm) z_1^\pm] z_2, \end{aligned}$$

o que resulta que

$$\pm\delta m_1 = (a + bz_1^\pm) z_1^\pm,$$

isto é,

$$m_1 = \frac{(a + bz_1^\pm)z_1^\pm}{\pm\delta} z_1^\pm = -\alpha^\pm z_1^\pm.$$

Note que $a + bz_1^\pm \neq 0$ segue do Teorema 4.1.1, pois $(z_1^\pm, 0)$ é um ponto singular isolado. Daí concluímos o item (1) do Lema.

Suponhamos agora que $C = 0$ e $B \neq 0$. Inicialmente trasladaremos o ponto singular $\left(-\frac{A}{B}, 0\right)$ para a origem, obtendo assim o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Bz_1 + \frac{A(aB - bA)}{B^2}z_2 + \left(\frac{2bA}{B} - a\right)z_1z_2 - bz_1^2z_2 - bz_1^2z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{aB - bA}{B}z_2^2 - bz_1z_2^2. \end{cases} \quad (5.6)$$

Analogamente, para podermos aplicar o Teorema 2.2.2 para esse campo de vetores precisamos escrevê-lo na forma canônica. Para tanto, aplicaremos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = z_2 \\ y = \frac{Bz_1 + A(aB - bA)z_2}{B^2}, \end{cases}$$

e o campo terá a seguinte forma

$$\left(-\frac{aB - bA}{B}x^2 + H.O.T., y + H.O.T.\right).$$

Donde obtemos o campo da forma $(F(x, y), y + G(x, y))$ com $F(x, y) = -\frac{aB - bA}{B}x^2 + H.O.T.$ e $y + G(x, y) = y + H.O.T.$.

Como $\left(-\frac{A}{B}, 0\right)$ é um ponto singular isolado, obtemos de (5.6) que $aB - bA \neq 0$. Logo, pelo Teorema 2.2.2 segue que $\left(-\frac{A}{B}, 0\right)$ é uma sela-nó elementar.

Assim, completamos a demonstração do item (2) do Lema. ■

Lema 5.3.2. *Considere o campo de vetores $X(x, y) = \left(ax + by, x^2 + Bxy + \frac{B^2y^2}{4}\right)$ com $B \neq 0$. Se $aB - 2b \neq 0$, temos um único ponto singular no infinito $q = \left(-\frac{2}{B}, 0\right)$, na carta local U_1 é uma sela-nó nilpotente. Além disso, seu retrato de fase local é topologicamente equivalente ao retrato de fase da parte 3.1 da figura 5.7, para $X = X_1$ com $B > 2$ e, para $X = X_6$. Se $0 < B < 2$ temos que o retrato é topologicamente equivalente ao retrato da parte 3.2 da figura 5.7, para $X = X_1$ com $0 < B < 2$ e para $X = X_8$ com $C = \frac{1}{4}$. E, será topologicamente equivalente ao retrato da parte 3.3 da figura 5.7 para $X = X_1$ com $B < 0$. Se $aB - 2b = 0$, temos que o ponto q é um ponto singular não-isolado.*

Demonstração

Pela expressão (3.16) obtemos o seguinte campo de vetores

$$\left(1 + Bz_1 + \frac{B^2}{4}z_1^2 - az_1z_2 - bz_1^2z_2, -az_2^2 - bz_1z_2^2\right).$$

Note que se $aB - 2b \neq 0$, temos $\left(-\frac{2}{B}, 0\right) = q$ é o único ponto singular infinito. Translademos agora o ponto singular $\left(-\frac{2}{B}, 0\right)$ para o origem, fornecendo assim um novo campo de vetores

$$\left(\frac{2}{B}\left(a - \frac{2b}{B}\right)z_2 + \frac{B^2}{4}z_1^2 + \left(\frac{4b}{B} - a\right)z_1z_2 - bz_1^2z_2, -\left(a - \frac{2b}{B}\right)z_2^2 - bz_1z_2^2\right).$$

Assumiremos agora que $aB - 2b \neq 0$. Vamos aplicar o Teorema 2.2.3, primeiro reescalaremos o campo de vetores pelo fator $\frac{B^2}{2(aB - 2b)}$, obtendo assim

$$(z_2 + F(z_1, z_2), G(z_1, z_2)) \tag{5.7}$$

onde

$$F(z_1, z_2) = \frac{B^4}{8(aB - 2b)} z_1^2 + \frac{B(4b - aB)}{2(aB - 2b)} z_1 z_2 - \frac{bB^2}{2(aB - 2b)} z_1^2 z_2,$$

e

$$G(z_1, z_2) = -\frac{B}{2} z_2^2 - \frac{bB^2}{2(aB - 2b)} z_1 z_2^2.$$

Temos, $z_2 = f(z_1) = -\frac{B^4}{8(aB - 2b)} z_1^2 + H.O.T.$, onde $f(z_1)$ é solução da equação: $z_2 + F(z_1, z_2) = 0$.

Daí temos que

$$G(z_1, f(z_1)) = -\frac{B^9}{128(aB - 2b)^2} z_1^4 + H.O.T. = K z_1^k + H.O.T.$$

e

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z_2} \right) (z_1, f(z_1)) = \frac{B^4}{4(aB - 2b)} z_1 + H.O.T. = L z_1^\lambda + H.O.T..$$

Logo, temos que $k = 4$ e $k > 3 = 2\lambda + 1$. Daí pelo Teorema 2.2.3, o ponto singular $\left(-\frac{2}{B}, 0\right)$ é uma sela-nó nilpotente.

Suponhamos agora que $aB - 2b = 0$. Temos z_1 é fator comum de ambos os componentes do campo de vetores, donde segue que q é um ponto não isolado.

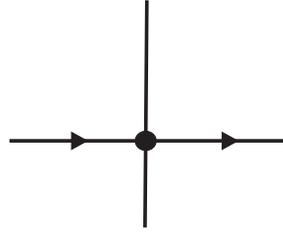
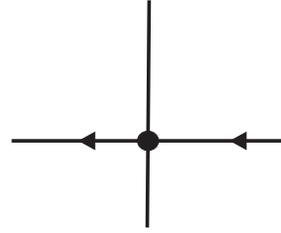
Para concluirmos a demonstração do Lema, precisamos realizar um estudo da localização das separatrizes da sela-nó com respeito ao infinito.

Considere a seguinte identificação $(z_1, z_2) \mapsto (x, y)$. Temos o seguinte campo

$$\left(y + \frac{B^4}{8(B-2)} x^2 + \frac{B(4-B)}{2(B-2)} xy - \frac{B^2}{2(B-2)} x^2 y, -\frac{B}{2} y^2 - \frac{B^2}{2(B-2)} xy^2 \right),$$

o qual possui o eixo x invariante. De fato, substituindo $(x, 0)$ no campo temos

$$\left(\frac{B^4}{8(B-2)}x^2, 0 \right).$$

caso $B > 2$ caso $B < 2$

Observe que obtemos este campo por um reescalonamento do campo original pelo fator $\frac{B^2}{2(B-2)}$. Daí temos que para $B > 2$ o campo será o mesmo e, para $B < 2$ teremos que inverter a direção das setas. Donde concluímos que a direção sob o eixo x é da esquerda para a direita para todo parâmetro B .

Vamos encontrar a estrutura topológica da origem. Para isso vamos procurar uma curva do tipo $y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$. Daí temos que

$$\dot{y} = (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots)\dot{x}.$$

Substituindo os valores \dot{x} e \dot{y} do campo e colocando os coeficientes a_1, a_2 e a_3 em função dos coeficientes do campo, obtemos que

$$y(x) = \frac{B^4}{8(B-2)} \left[-x^2 + \frac{6B - B^2}{4(B-2)^2}x^3 \right] + \dots$$

Vamos considerar aqui somente os termos até ordem 3 da curva e do campo, pois objetivamos estudar o comportamento do campo sob a curva em uma vizinhança da origem.

Daí temos que $y(x) = \frac{B^4}{8(B-2)} \left[-x^2 + \frac{6B - B^2}{4(B-2)^2}x^3 \right]$. Avaliando esta curva no campo, obtemos a seguinte expressão

$$X(x, y(x)) = \left(\frac{B^5(22 - 13B + 2B^2)}{32(B-2)^3}x^3 + H.O.T., -\frac{B^9}{128(B-2)^2}x^4 + H.O.T. \right).$$

Temos que $22 - 13B + 2B^2 > 0$ para todo $B \in \mathbb{R}$. Logo, para $B > 2$ temos

que $\frac{B^5}{32(B-2)^3} > 0$ e $-\frac{B^9}{128(B-2)^2} < 0$. O retrato para este caso será dada na figura a seguir.

Temos ainda os casos onde $0 < B < 2$ e $B < 0$. O que nos fornece os seguintes retratos

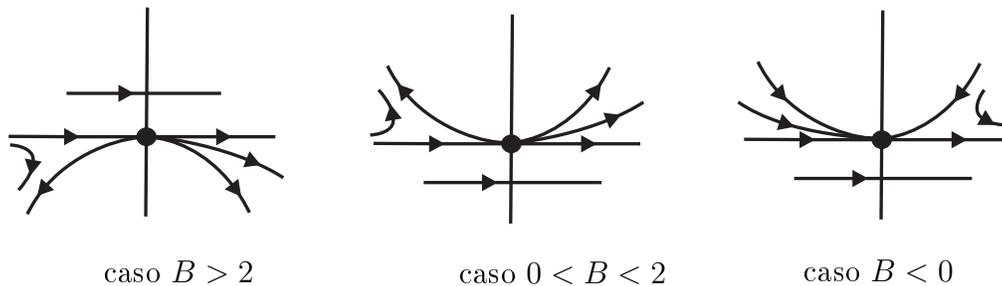


Figura 5.8:

Donde concluímos finalmente a demonstração deste lema. ■

Capítulo 6

Retratos de Fase Global com Pontos Singulares Linearmente Nulos

Estudaremos aqui retratos de fase no disco de Poincaré de campos de vetores dados na Figura 1, os quais possuem pontos singulares linearmente nulos.

Pelo Teorema 5.3.1 temos que os únicos campos de vetores do Teorema 1.0.3 que possuem pontos singulares linearmente nulos são X_7 e X_{23} e, este ponto singular é a origem $(0, 0)$ das cartas locais U_1 e V_1 .

Pelo Teorema 4.1.1 temos que a origem é uma sela-nó elementar sendo que as duas separatrizes instáveis estão no eixo x e a separatriz estável está contida em $y < 0$ (observe o Teorema 4.1.1).

Para que possamos descrever o retrato de fase global de X_7 e X_{23} vamos inicialmente fazer um estudo do retrato de fase local nos pontos singulares linearmente nulos.

Temos que o campo de vetores $X(x, y) = (x + by, y^2)$ corresponde a X_7 ou X_{23} de acordo com $b = 1$ ou $b = 0$, respectivamente. Por (3.16) temos que a expressão de $P(X)$ na carta local U_1 é dada por

$$(z_1^2 - z_1 z_2 - b z_1^2 z_2, -z_2^2 - b z_1 z_2^2). \quad (6.1)$$

Note que a origem é o único ponto singular infinito em U_1 , sendo esse ponto

linearmente nulo.

Tomando o campo $(z_1^2 - z_1 z_2 - b z_1^2 z_2, -z_2^2 - b z_1 z_2^2)$ e, fazendo um blow-up polar obtemos o

$$\left(\frac{1}{4} r (3 \cos[t] + \cos[3t] - 4((1 + b r \cos[t])) \sin[t]), -\cos^2[t] \sin[t] \right).$$

Este campo possui 4 singularidades: $(0, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$, $(0, \pi)$ e $(0, -\frac{\pi}{2})$, onde $(0, 0)$ e $(0, \pi)$ são selas elementares e para determinarmos o comportamento nas outras duas direções analisaremos o campo acima e o campo $(z_1^2 - z_1 z_2 - b z_1^2 z_2, -z_2^2 - b z_1 z_2^2)$.

Com essas informações em mãos e fazendo um blow-down obtemos o retrato de fase.

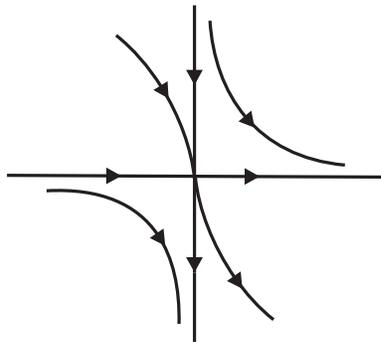


Figura 6.1: O retrato de fase local da origem na carta U_1 .

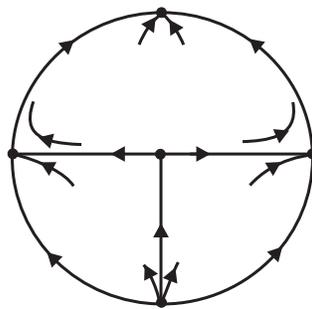


Figura 6.2: O retrato de fase global dos campos X_7 e X_{23} .

Capítulo 7

Retrato de Fase Global com Infinitos Pontos Críticos

Neste capítulo analisaremos os retratos de fase de $\rho(X_i)$ com $i = 1, 2, \dots, 23$ no disco de Poincaré os quais possuam infinitos pontos singulares.

Antes de partirmos para a classificação dos campos com infinitos pontos singulares, vamos a um resultado preliminar que fornece condições sobre os parâmetros a, b, A, B e C para que ocorra infinitos pontos singulares.

Lema 7.0.3. *Os campos de vetores que possuem infinitos pontos singulares são aqueles que satisfazem a seguinte relação entre os coeficientes: $B - C = 1$.*

Demonstração

Vimos no Capítulo 4 que podemos ter somente a origem como singularidade ou uma reta de singularidades passando pela origem.

Para que tenhamos infinitos pontos singulares, neste caso uma reta passando pela origem, é preciso que a primeira expressão do campo $ax + by$ seja um fator da segunda $Ax^2 + Bxy + Cy^2$. Resolvendo a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (ax + by)(\alpha x + \beta y)$ e, colocando α e β em função dos coeficientes do campo obtemos a seguinte relação: $Bab = a^2C + b^2A$. Observando que, após o Capítulo de Formas Normais, temos $a = b = A = 1$, segue o resultado. ■

Teorema 7.0.2. *O retrato de fase global de $\rho(X_i)$ possuindo infinitos pontos singulares é topologicamente equivalente a um dos retratos apresentadas na Figura 7.1.*

Demonstração

Analisaremos inicialmente o campo X_1 com $B - C = 1$ e suponhamos $C < 0$.

Temos $X_1(x, y) = (x + y, x^2 + (1 + C)xy + Cy^2) = (x + y, (x + y)(x + Cy))$. Consideremos inicialmente o campo $(1, x + Cy)$ e depois acrescentaremos a esse campo a reta de singularidades $x + y = 0$ para obter o campo original.

No campo $(1, x + Cy)$ só temos pontos singulares no infinito, os quais são: $\pm(0, 1, 0)$ e $\pm\left(-\frac{C}{\sqrt{C^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{C^2 + 1}}, 0\right)$.

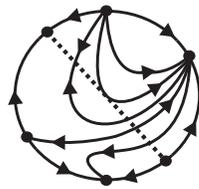


figura 1

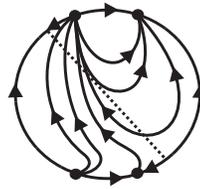


figura 2

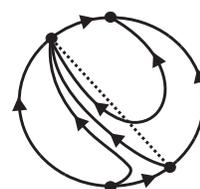


figura 3



figura 4

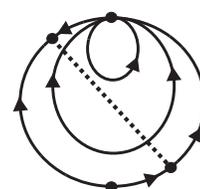


figura 5

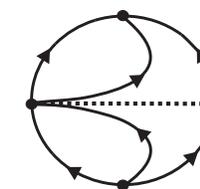


figura 6

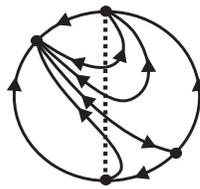


figura 7

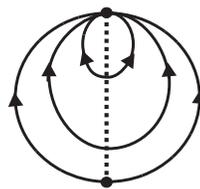


figura 8

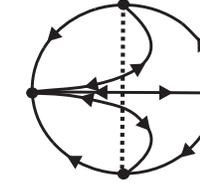


figura 9

Figura 7.1: Retratos de fase global dos campos com infinitos pontos singulares.

A figura 1 corresponde ao campo X_1 com $B - C = 1$ e $C < 0$ e, para X_3 com $C = -1$.

A figura 2 corresponde ao campo X_1 com $B - C = 1$ e $0 < C < 1$ e, para X_9 .

A figura 3 corresponde ao campo X_1 com $B - C = 1$ e $C = 1$.

A figura 4 corresponde ao campo X_1 com $B - C = 1$ e $C > 1$ e, para X_2 com $C = 1$.

A figura 5 corresponde ao campo X_4 com $B = 1$ e, para X_{14} .

A figura 6 corresponde ao campo X_{15} .

A figura 7 corresponde ao campo X_{20} .

A figura 8 corresponde ao campo X_{21} .

A figura 9 corresponde ao campo X_{22} .

Observe que o ponto $\left(\frac{C}{\sqrt{C^2+1}}, -\frac{1}{\sqrt{C^2+1}}, 0\right)$ corresponde ao ponto $(C, 0)$ na carta $V_1 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_2 > 0\}$.

Utilizando-nos das equações (3.16) e (3.17), da teoria de pontos hiperbólicos e do Teorema 2.2.2 obtemos o retrato de fase global para esse campo.

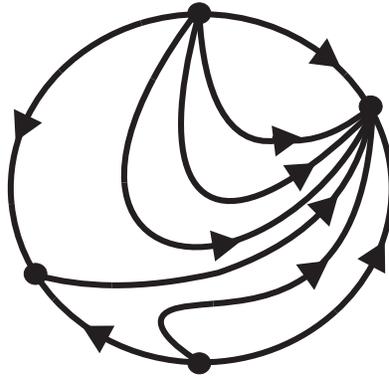


Figura 7.2: Retratos de fase global do campo $(1, x + Cy)$ com $C < 0$.

Inserindo a reta de singularidades $x + y = 0$ nesse retrato e observando que a direção do campo será preservado para a região onde $x + y > 0$ e, invertemos a direção das setas onde $x + y < 0$, obtemos o retrato que se encontra no teorema.

Analisaremos os campos X_9 e X_1 com $B - C = 1$ e suponhamos $0 < C < 1$.

Temos $X_9(x, y) = (y, xy + y^2)$ e $X_1(x, y) = (x + u, x^2 + (1 + C)xy + Cy^2) = (x + y, (x + y)(x + Cy))$. Consideremos inicialmente o campo $(1, x + Cy)$ e depois acrescentaremos a esse campo as retas de singularidades $y = 0$ ou $x + y = 0$, para o campo X_9 ou X_1 , para obter o campo original.

No campo $(1, x + Cy)$ só temos pontos singulares no infinito, os quais são: $\pm(0, 1, 0)$ e $\pm\left(-\frac{C}{\sqrt{C^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{C^2 + 1}}, 0\right)$.

Temos que o ponto $\left(\frac{C}{\sqrt{C^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{C^2 + 1}}, 0\right)$ corresponde ao ponto $(C, 0)$ na carta $V_1 = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_2 > 0\}$.

Utilizando-nos novamente das equações (3.16) e (3.17), da teoria de pontos hiperbólicos e do Teorema 2.2.3 obtemos o retrato de fase global para esse campo.

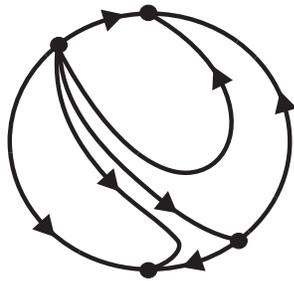


figura 1

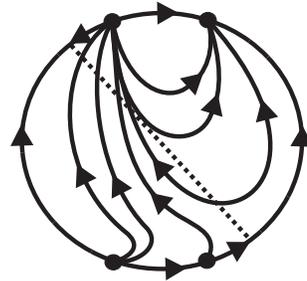


figura 2

Figura 7.3: Retratos de fase global do campo $(1, x + Cy)$ com $0 < C < 1$ e, dos campos X_9 e X_1 com $0 < C < 1$, respectivamente.

Inserindo as retas de singularidades $y = 0$ e $x + y = 0$ na figura 1, observando a direção das setas, obtemos o retrato que se encontra no enunciado do teorema.

Analisaremos o campo X_1 com $B - C = 1$ e suponhamos $C = 1$.

Temos $X_1(x, y) = (x + y, (x + y)^2)$. Consideremos inicialmente o campo $(1, x + y)$ e depois acrescentaremos a esse campo a reta de singularidades $x + y = 0$ para obter o campo original.

Procedendo analogamente aos campos anteriores obtemos o retrato

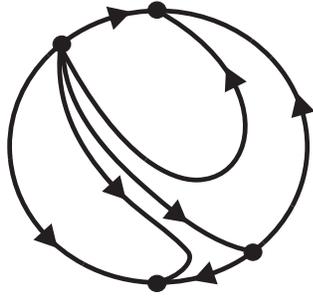


figura 1

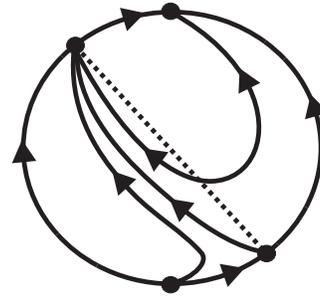


figura 2

Figura 7.4: Retratos de fase global do campo $(1, x + y)$ e, do campo X_1 com $C = 1$, respectivamente.

Inserindo a reta de singularidades $x + y = 0$ na figura 1 e, observando a direção do campo obtemos o retrato que se encontra no teorema.

Analisaremos os campos X_2 com $C = 1$ e X_1 com $B - C = 1$ e suponhamos $C > 1$.

Temos $X_2(x, y) = (x + y, xy + y^2) = (x + y, (x + y)y)$ e $X_1(x, y) = (x + y, (x + y)(x + Cy))$.

Consideremos inicialmente o campo $(1, x + Cy)$ e depois acrescentaremos a esse campo a reta de singularidades $x + y = 0$ para obter o campo original.

Procedendo analogamente aos campos anteriores obtemos o retrato

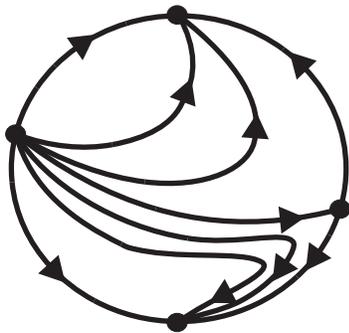


Figura 7.5: Retratos de fase global do campo $(1, x + Cy)$ e, dos campos X_1 com $C > 1$ e X_2 com $C = 1$, respectivamente.

Inserindo a reta de singularidades $x + y = 0$ na figura 1 e observando a direção do campo sob esta reta obtemos a figura 2.

Analisaremos agora o campo $(1, y)$ e depois acrescentaremos a esse campo a reta de singularidades $x + y = 0$ para obter o campo X_2 com $C = 1$.

Procedendo analogamente aos campos anteriores obtemos o retrato da figura 7.5.

Se considerarmos as retas de singularidades $y = 0$ ou $x = 0$ ao invés de $x + y = 0$, obtemos os retratos de fase correspondentes aos campos X_{15} e X_{22} , respectivamente, os quais são ilustrados na Figura 7.6.

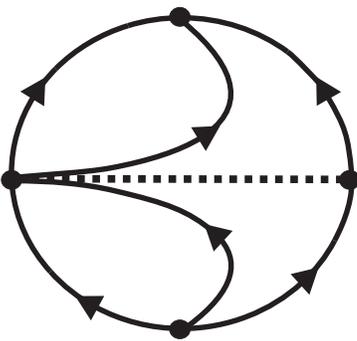


figura 1

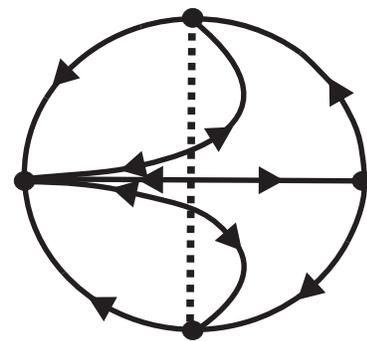


figura 2

Figura 7.6: Retratos de fase global dos campos X_{15} e X_{22} , respectivamente.

Analisaremos os campos X_4 com $B = 1$, X_{14} e X_{21} .

Temos $X_4(x, y) = (x + y, (x + y)x)$, com $B = 1$, $X_{14}(x, y) = (y, xy)$ e $X_{21}(x, y) = (x, x^2)$.

Consideremos inicialmente o campo $(1, x)$ e depois acrescentaremos a esse campo as retas de singularidades $x + y = 0$, $y = 0$ e $x = 0$ para obter os campos originais.

Procedendo analogamente aos campos anteriores obtemos os retratos dados na Figura 7.7.

Inserindo a reta de singularidades $x + y = 0$ na figura 1 e observando a direção do campo sob esta reta obtemos a figura 2, que corresponde ao campo

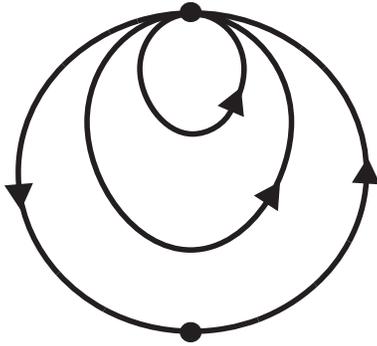


figura 1

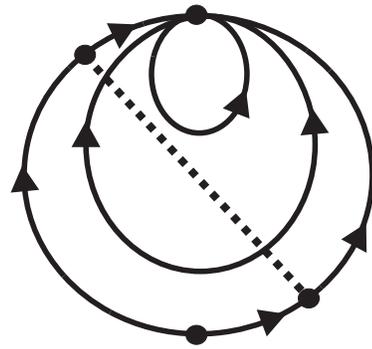


figura 2

Figura 7.7: Retratos de fase global dos campos $(1, x)$ e X_4 com $B = 1$, respectivamente.

X_4 com $B = 1$.

Inserindo a reta de singularidades $y = 0$ na figura 1 da figura 7.7 e observando a direção do campo sob esta reta obtemos o retrato que corresponde ao campo X_{14} . Inserindo a reta de singularidades $x = 0$ retrato e observando a direção do campo sob esta reta obtemos o retrato que corresponde ao campo X_{21} . Na Figura 7.8 exibiremos estes retratos.

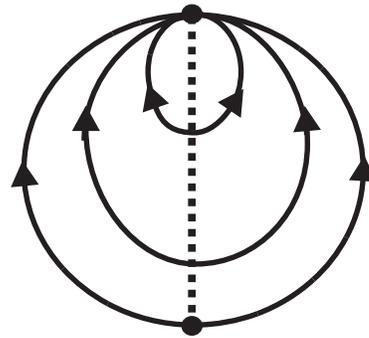
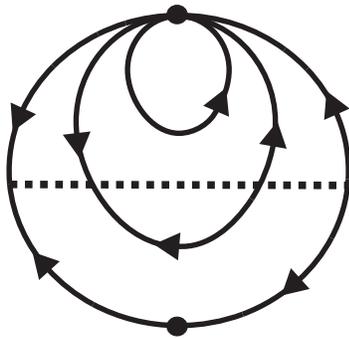


Figura 7.8: Retratos de fase global dos campos X_{14} e X_{21} , respectivamente.

Analisemos agora o campo $X_{20} = (x, x^2 + xy)$.

Como fizemos anteriormente, partiremos do campo $(1, x+y)$ e depois acrescentemos a reta de singularidades $x = 0$.

Identificando os pontos singulares infinitos do campo e em seguida analisando o comportamento nesses pontos analogamente aos casos anteriores, obtemos o retrato dado a seguir. Em seguida basta considerarmos a reta de singularidades $x = 0$, obtendo assim o retrato de fase global do campo X_{20} .

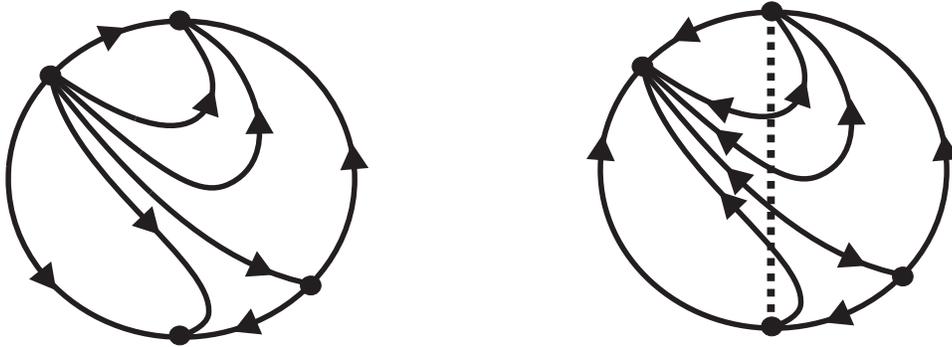


Figura 7.9: Retratos de fase global dos campos $(1, x + y)$ e X_{20} , respectivamente.

Donde concluímos finalmente a demonstração deste teorema.

■

Capítulo 8

Retratos de Fase Local com Finitos Pontos Críticos

O primeiro passo na caracterização de todos retratos de fase dos campos de vetores X_i com $i = 1, 2, \dots, 23$ do Teorema 1.0.3 é classificar os retratos de fase local de todos os pontos singulares finitos e infinitos.

Depois do estudo realizado até o momento necessitamos considerar somente os campos onde $\rho(X_i)$ possui um número finito de pontos de equilíbrio e nenhum deles é linearmente nulo.

Já temos alguns resultados nessa direção que nos auxiliarão nesta classificação. O Teorema 4.1.1 nos fornece o retrato de fase local no único ponto singular finito, a origem.

O Teorema 5.2.1 contribui com o retrato de fase local na origem das cartas U_2 e V_2 e, o Teorema 5.3.1 caracteriza o retrato de fase local em pontos singulares nas cartas U_1 e V_1 , quando estes pontos existem.

Todos esses resultados citados acima podem ser condensados no seguinte Teorema:

Teorema 8.0.3. *O retrato de fase local de todos os pontos singulares no disco de Poincaré é topologicamente equivalente a um dos retratos exibidos nas Figuras 8.1 e 8.2.*

Demonstração

Nos retratos que seguem abaixo traçamos uma reta ligando pontos antipodais no infinito e desenhamos a direção do fluxo ao longo dessas retas. Saber o comportamento do campo sob essas retas é relevante uma vez que nos proporciona saber qual a direção do campo, ou seja, em que direção o fluxo cruza esta reta. Para determinarmos essa direção basta avaliarmos o fluxo nos pontos da reta.

É imprescindível quando tratamos de retratos de fase no disco de Poincaré termos em mente o procedimento da compactificação de Poincaré (a parte geométrica), pois para determinarmos o comportamento de pontos nas cartas $V_i = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_i < 0\}$ faremos uso da projeção central, uma vez que conhecemos apenas a estrutura topológica dos pontos nas cartas $U_i = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2; y_i > 0\}$.

Feito essas observações e considerando as informações que temos até o momento, segue o teorema.



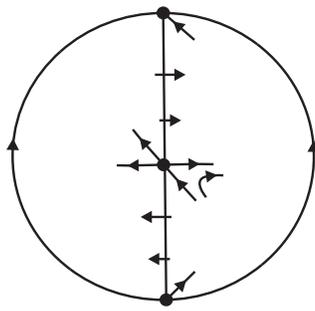


figura 1

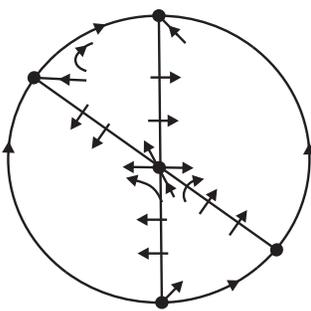


figura 2

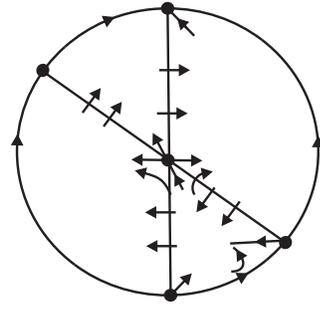


figura 3

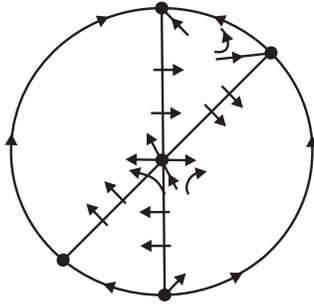


figura 4

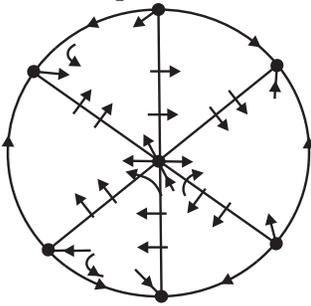


figura 5

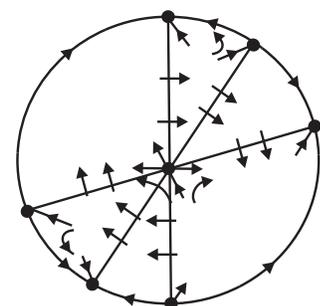


figura 6

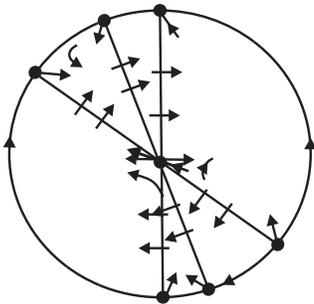


figura 7

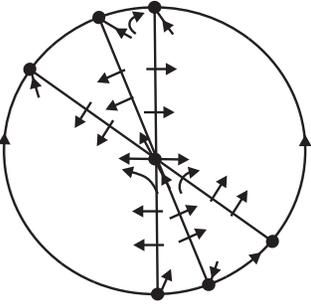


figura 8

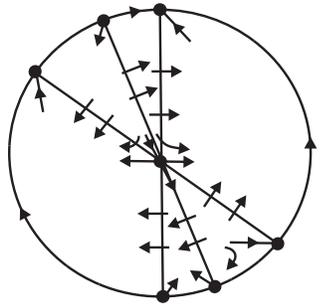


figura 9

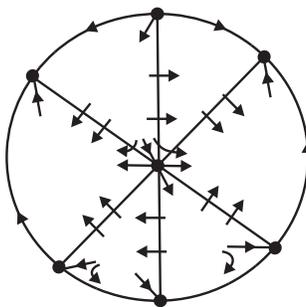


figura 10

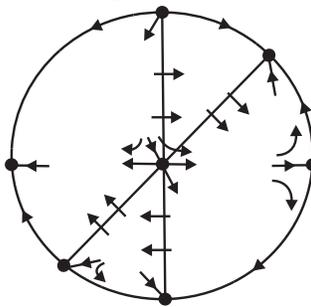


figura 11

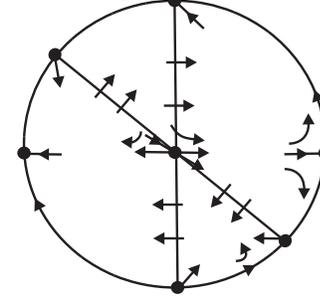


figura 12

Figura 8.1: Os 12 primeiros retratos de fase local no disco de Poincaré que possuem finitos pontos críticos.

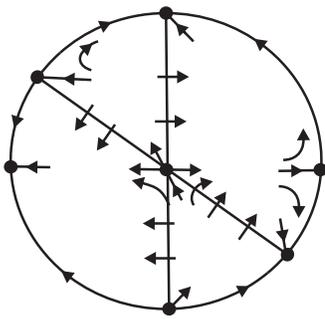


figura 13

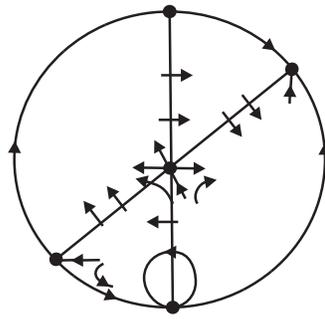


figura 14

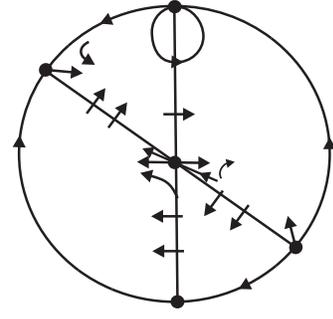


figura 15

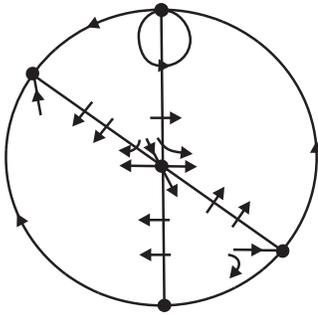


figura 16

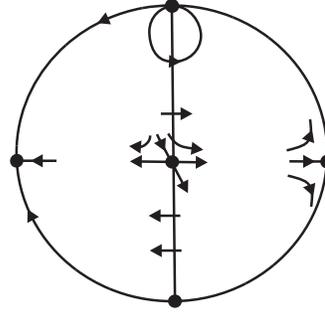


figura 17

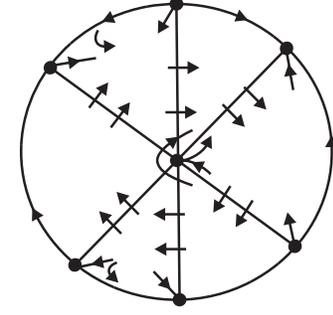


figura 18

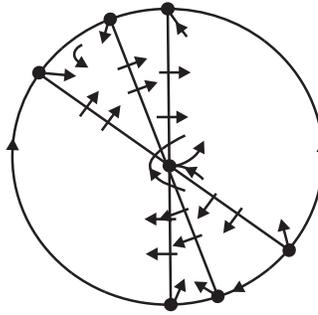


figura 19

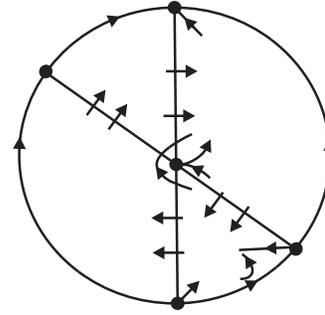


figura 20

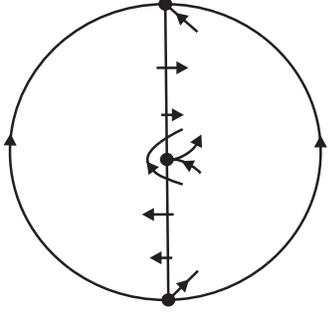


figura 21

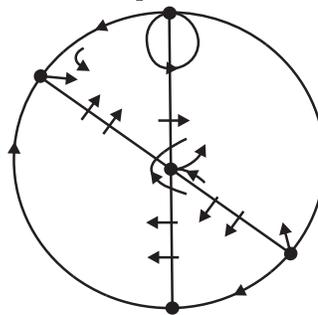


figura 22

Figura 8.2: Os 10 últimos retratos de fase local no disco de Poincaré que possuem finitos pontos críticos.

Capítulo 9

Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré com Finitos Pontos Críticos

Baseados nos retratos de fase local obtidos no capítulo anterior podemos esboçar os retratos de fase global no disco de Poincaré dos campos do Teorema 1.0.3 com finitos pontos singulares sendo que nenhum deles é linearmente nulo.

As figuras que se seguem correspondem as figuras da seção anterior, com os mesmos índices. Excluimos aqui as figuras 4 e 6, as quais serão analisadas posteriormente.

Definição 9.0.1. *Uma **separatriz** de $\rho(X_i)$ é uma órbita que é um ponto singular, ou um ciclo limite ou uma trajetória que percorre a fronteira de um setor hiperbólico até um ponto singular.*

Observação 9.0.1. *Os campos de vetores em questão (aqueles da forma $(ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2)$) não possuem ciclos limites.*

Com efeito, isso segue do fato de que se um campo de vetores polinomial quadrático têm um ciclo limite, temos que em seu interior existe um único ponto singular, o qual deverá ser um foco. Este resultado encontra-se em [12].

Através do estudo anterior das singularidades, sabemos que nossos campos X_i não têm foco, segue daí que não podemos ter ciclos limites.

Em [13] Neumann provou que o conjunto formado por todas as separatrizes de $\rho(X_i)$, denotado por $S(\rho(X_i))$, é fechado.

Definição 9.0.2. *As componentes conexas abertas de $S^2 \setminus S(\rho(X_i))$ são chamadas **regiões canônicas** de $\rho(X_i)$.*

Definição 9.0.3. *Definimos **configuração de separatriz** como a união de $S(\rho(X_i))$ com uma solução representativa escolhida para cada região canônica.*

Duas configurações de separatriz S_1 e S_2 são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo preservando a orientação que leva trajetórias de S_1 em trajetórias de S_2 .

Teorema 9.0.4. (Neumann) *Suponhamos que $P(X)$ e $P(Y)$ são fluxos contínuos em S^2 com ponto singulares isolados. Temos que $P(X)$ e $P(Y)$ são topologicamente equivalentes se, e somente se, suas configurações de separatriz são topologicamente equivalentes.*

O Teorema 9.0.4 nos diz que para obtermos o retrato de fase global dos campos de vetores $\rho(X_i)$ descritas no Teorema 8.0.3 essencialmente necessitaremos tomar o α - e o ω -limite de todas as separatrizes de $\rho(X_i)$.

Baseados nos retratos de fase local obtidos no capítulo anterior e, considerando a direção do fluxo ao longo das retas que ligam pontos singulares no infinito temos que cada um dos retratos de fase local nos fornece um retrato de fase global, exceto as figuras 4 e 6, as quais nos fornecem mais 3 possíveis retratos cada uma.

Daí os retratos de fase global dos campos são dados nas Figuras 9.1 e 9.2.

As figuras 4 e 6 dos retratos de fase local nos fornecem os seguintes retratos de fase global, sendo que as figuras 1, 2 e 3 correspondem a figura 4 e 5, 6 e 7 correspondem a figura 6. Veja Figura 9.3.

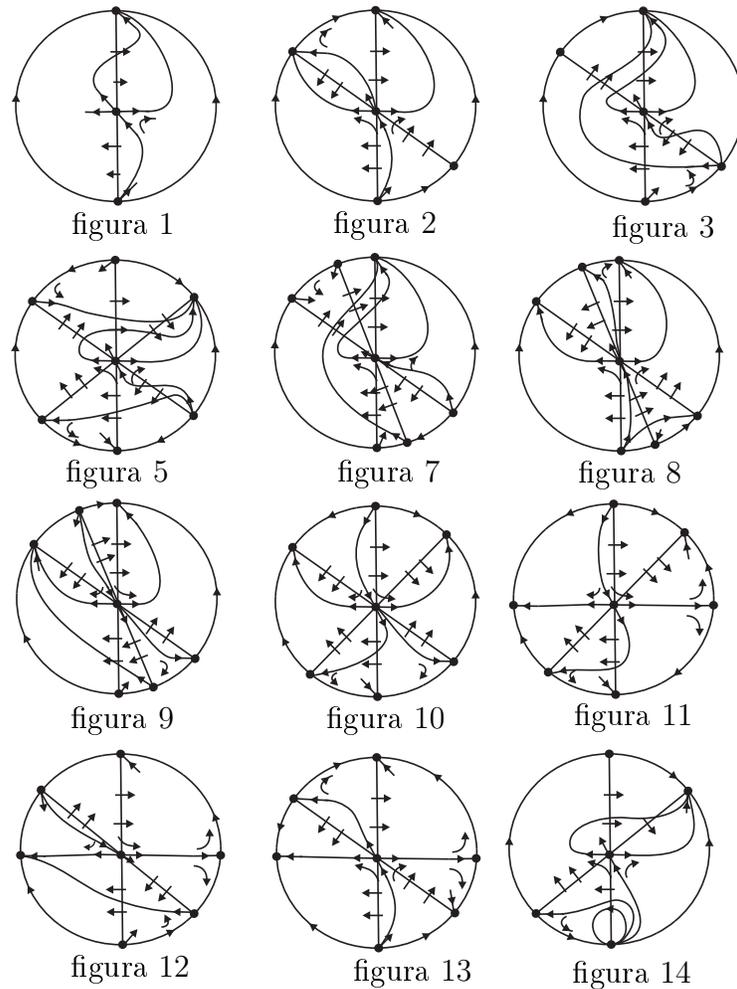


Figura 9.1: Retratos de fase global no disco de Poincaré. Não consideramos aqui as figuras 4 e 6 do teorema referente aos retratos de fase local.

Os retratos de fase das figuras 1 e 3 que se encontram na Figura 9.3 são provenientes, por exemplo, dos sistemas $(x + y, x^2 - xy + \frac{y^2}{4})$ e $(x + y, x^2 - 10xy + 25y^2)$, respectivamente, isto é, para $B = -1$ e $B = -10$. Daí temos por continuidade do parâmetro que existe $B \in (-10, -1)$ tal que o sistema $(x + y, x^2 + Bxy + \frac{B^2}{4}y^2)$ nos fornecerá o retrato da figura 2.

Os retratos de fase das figuras 4 e 6 que se encontram na Figura 9.3 são provenientes, por exemplo, dos sistemas $(x + y, x^2 - xy + \frac{0.24}{4}y^2)$ e $(x + y, x^2 - 10xy + 24y^2)$, respectivamente. Daí temos por continuidade do parâmetro o

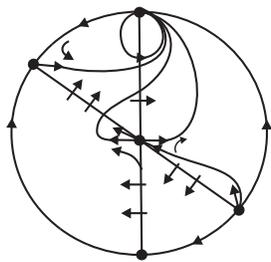


figura 15

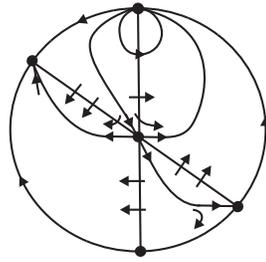


figura 16

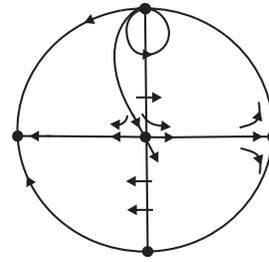


figura 17

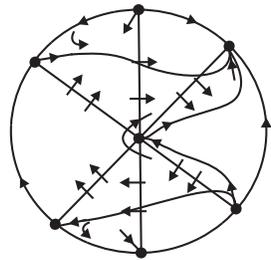


figura 18

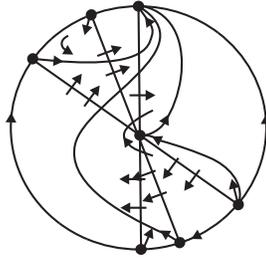


figura 19

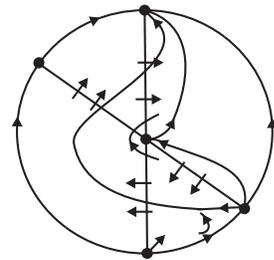


figura 20

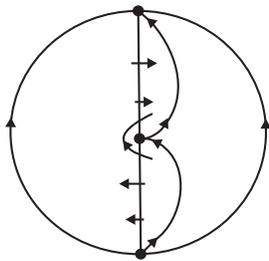


figura 21

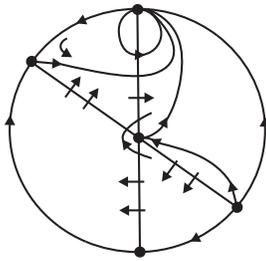


figura 22

Figura 9.2: Os 8 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré.

retrato da figura 5 também será proveniente de um sistema, isto é, este retrato será realizado.

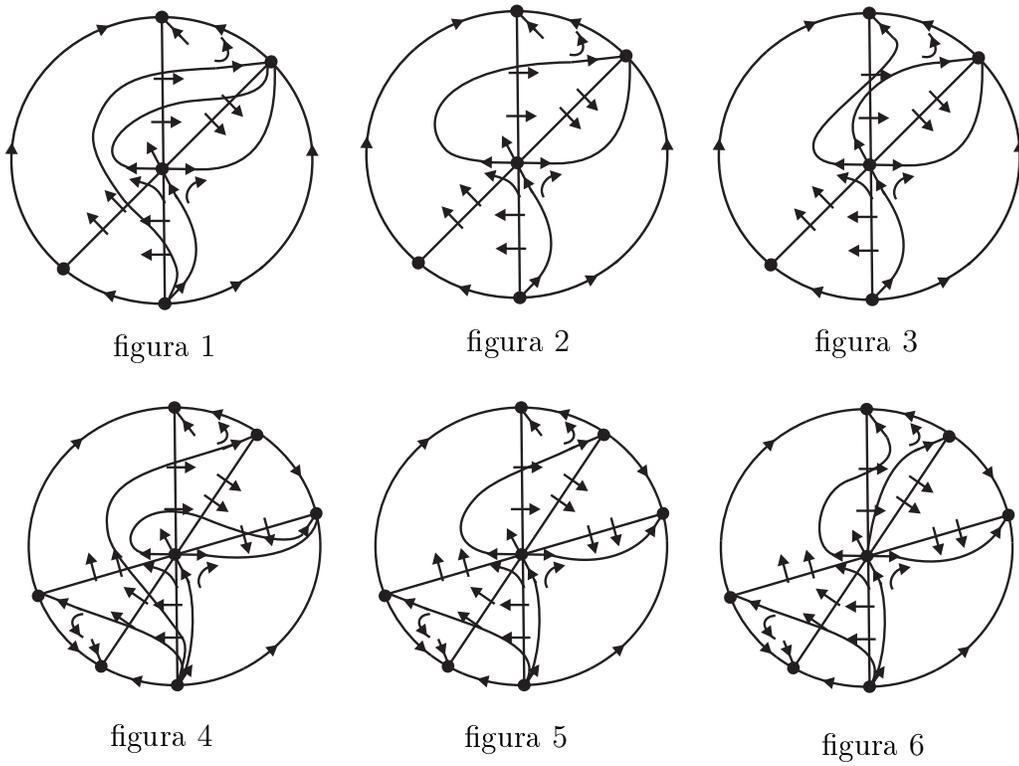


Figura 9.3: Os 6 retratos de fase global que vem dos retratos de fase local das figuras 4 e 6.

Capítulo 10

Demonstração do Teorema 0.0.1

No capítulo 6 obtemos um único retrato de fase global para o campo de vetores semi-homogêneo de graus 1 e 2 possuindo algum ponto singular linearmente nulo, veja figura 6.2.

No capítulo 7 obtemos 9 retratos de fase para os campos de vetores semi-homogêneos de graus 1 e 2, possuindo infinitos pontos singulares, veja figura 7.1.

Como os retratos de fase das figuras 1 e 4 (respectivamente figura 2), que se encontram na figura 7.1, são topologicamente equivalentes sob um homeomorfismo que preserva, (respectivamente reverte) o sentido das órbitas, e os retratos das figuras 7 e 9 são topologicamente equivalentes, obtemos daí que 6 dos 9 retratos de fase da figura 7.1 estão em diferentes classes de equivalência topológica.

No capítulo 9 obtemos 26 retratos de fase para os campos de vetores semi-homogêneos de graus 1 e 2 possuindo finitos pontos singulares, onde nenhum deles é linearmente nulo. Observe que os retratos de fase das figuras 13 da figura 9.1, 3 da figura 9.3 e 6 da figura 9.3, são topologicamente equivalentes aos retratos de fase das figuras 11, da figura 9.1, 2 da figura 9.1 e 8, da figura 9.1 respectivamente, o que resulta somente 23 classes diferentes de retratos de

fase nas figuras 9.1, 9.2 e 9.3.

Logo, temos $1 + 6 + 23 = 30$ diferentes retratos de fase para os campos de vetores semi-homogêneos de graus 1 e 2, sendo que todos esses são provenientes de algum sistema, isto é, são realizáveis.

Donde concluímos, finalmente a demonstração do Teorema 0.0.1, principal objetivo desta parte do trabalho.



Parte II

Estudo da Família $X(x, y) =$
 $(x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2)$.

Capítulo 11

Formas Normais

Vamos utilizar a teoria de Formas Normais para estudar a seguinte família de campos de vetores

$$X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2). \quad (11.1)$$

O procedimento para entendermos a estrutura dessa família será o mesmo que aplicamos no estudo da família

$$X(x, y) = (ax + by, Ax^2 + Bxy + Cy^2).$$

Teorema 11.0.5. *Seja $X(x, y)$ um campo de vetores da forma $(x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2)$, temos que seu retrato de fase é topologicamente equivalente a um dos retratos de fase das seguintes famílias de campos:*

1. $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2)$;
2. $X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + cy + exy)$;
3. $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + x^2 + exy)$;
4. $X(x, y) = (x^2 - 1, a + x + cy + exy)$;
5. $X(x, y) = (x^2 - 1, cy + exy)$.

Demonstração Consideremos a seguinte mudança linear de variáveis:

$$\begin{cases} \bar{x} = \alpha x \\ \bar{y} = \beta y \\ \bar{t} = \gamma t \end{cases} \quad (11.2)$$

O que nos remete ao seguinte campo

$$X(x, y) = \left(\frac{1}{\alpha\gamma} \bar{x}^2 - \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma} a + \frac{b\beta}{\alpha\gamma} \bar{x} + \frac{c}{\gamma} \bar{y} + \frac{d\beta}{\gamma\alpha^2} \bar{x}^2 + \frac{e}{\alpha\gamma} \bar{x} \bar{y} + \frac{f}{\beta\gamma} \bar{y}^2 \right).$$

Vamos impor as seguintes condições: $\alpha\gamma = 1$ e $\frac{\alpha}{\gamma} = 1$, isto é, $\alpha = \gamma = 1$. Assim, temos liberdade somente sobre o parâmetro β , isto é, podemos utilizar somente o parâmetro β para simplificar a expressão do campo original. Donde surge os seguintes casos:

1. $f \neq 0$;
2. $f = d = b = 0$ e $a \neq 0$;
3. $f = 0$ e $d \neq 0$;
4. $f = d = 0$ e $b \neq 0$;
5. $f = d = b = a = 0$.

Donde segue o teorema. ■

Nos capítulos 12, 13, 14, 15 e 16 vamos realizar o estudo dos ítems 1., 2., 3., 4. e 5., respectivamente.

Capítulo 12

Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2)$.

Neste capítulo vamos expor todos os possíveis retratos de fase global no disco de Poincaré da família

$$X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2), \quad (12.1)$$

conhecendo assim, toda a estrutura topológica da mesma.

12.1 Singularidades na Parte Finita do Campo

Vamos partir para o estudo das singularidades na parte finita do campo.

Sejam,

$$\Delta_+ = (c + e)^2 - 4(a + b + d), \quad (12.2)$$

$$\Delta_- = (c - e)^2 - 4(a - b + d), \quad (12.3)$$

Temos as seguintes singularidades:

$$\left(1, \frac{-(c+e) + \sqrt{\Delta_+}}{2}\right), \left(1, \frac{-(c+e) - \sqrt{\Delta_+}}{2}\right), \left(-1, \frac{-(c-e) + \sqrt{\Delta_-}}{2}\right) \text{ e } \left(-1, \frac{-(c-e) - \sqrt{\Delta_-}}{2}\right), \text{ caso } \Delta_+ > 0 \text{ e } \Delta_- > 0.$$

Se $\Delta_+ = 0$ e $\Delta_- > 0$ temos as seguintes singularidades

$$\left(-1, \frac{-(c-e) + \sqrt{\Delta_-}}{2}\right), \left(-1, \frac{-(c-e) - \sqrt{\Delta_-}}{2}\right) \text{ e } \left(1, \frac{-(c+e)}{2}\right).$$

Se $\Delta_+ < 0$ e $\Delta_- > 0$ temos as seguintes singularidades

$$\left(-1, \frac{-(c-e) + \sqrt{\Delta_-}}{2}\right) \text{ e } \left(-1, \frac{-(c-e) - \sqrt{\Delta_-}}{2}\right).$$

Se $\Delta_+ > 0$ e $\Delta_- = 0$ temos as seguintes singularidades

$$\left(1, \frac{-(c+e) + \sqrt{\Delta_+}}{2}\right), \left(1, \frac{-(c+e) - \sqrt{\Delta_+}}{2}\right) \text{ e } \left(-1, \frac{-(c-e)}{2}\right).$$

Se $\Delta_+ = 0$ e $\Delta_- = 0$ temos duas singularidades

$$\left(1, \frac{-(c+e)}{2}\right) \text{ e } \left(-1, \frac{-(c-e)}{2}\right).$$

Se $\Delta_+ < 0$ e $\Delta_- = 0$ temos a singularidade

$$\left(-1, \frac{-(c-e)}{2}\right).$$

Se $\Delta_+ > 0$ e $\Delta_- < 0$ temos as seguintes singularidades

$$\left(1, \frac{-(c+e) + \sqrt{\Delta_+}}{2}\right) \text{ e } \left(1, \frac{-(c+e) - \sqrt{\Delta_+}}{2}\right).$$

Se $\Delta_+ = 0$ e $\Delta_- < 0$ temos a singularidade

$$\left(1, \frac{-(c+e)}{2}\right).$$

No caso onde $\Delta_+ < 0$ e $\Delta_- < 0$ não temos singularidades na parte finita do campo.

Resumindo, temos os seguintes casos a serem analisados:

1. $\Delta_+ > 0, \Delta_- > 0$;
2. $\Delta_+ = 0, \Delta_- > 0$;
3. $\Delta_+ < 0, \Delta_- > 0$;
4. $\Delta_+ > 0, \Delta_- = 0$;
5. $\Delta_+ = 0, \Delta_- = 0$;
6. $\Delta_+ < 0, \Delta_- = 0$;
7. $\Delta_+ > 0, \Delta_- < 0$;
8. $\Delta_+ = 0, \Delta_- < 0$ e
9. $\Delta_+ < 0, \Delta_- < 0$.

Vamos analisar a estrutura topológica das singularidades, na parte finita do campo em cada um dos casos. A matriz Jacobiana do campo em questão é dada a seguir

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ b + 2dx + ey & c + ey + 2y \end{bmatrix}. \quad (12.4)$$

Considere os pontos

$$\left(1, \frac{-(c+e) + \sqrt{\Delta_+}}{2}\right) = z_1^+, \left(1, \frac{-(c+e) - \sqrt{\Delta_+}}{2}\right) = z_2^+,$$

$$\left(-1, \frac{-(c-e) + \sqrt{\Delta_-}}{2}\right) = z_1^-, \left(-1, \frac{-(c-e) - \sqrt{\Delta_-}}{2}\right) = z_2^-,$$

$$\left(1, \frac{-(c+e)}{2}\right) = n^+ \text{ e } \left(-1, \frac{-(c-e)}{2}\right) = n^-.$$

Com intuito de compreendermos a estrutura topológica em cada uma das singularidades vamos avaliar cada uma delas na matriz Jacobiana, obtendo assim os seguintes resultados: z_1^+ é um repulsor, z_2^+ é uma sela, tendo como variedade estável o eixo y , z_1^- é uma sela, tendo como variedade instável o eixo y e z_2^- é um atrator.

Os pontos n^+ e n^- não são hiperbólicos e sua análise precisa de um cuidado maior.

Temos que as expressões da matriz Jacobiana avaliada nos pontos n^+ e n^- são

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ b + 2d - \frac{1}{2}e(c + e) & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ b - 2d + \frac{1}{2}e(-c + e) & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Para entendermos o comportamento do campo na vizinhança do ponto n^+ vamos transladá-lo para a origem do campo. Considere a seguinte mudança de coordenadas,

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y + \frac{c + e}{2} \end{cases}$$

obtemos assim um novo campo:

$$X(u, v) = \left(u^2 + 2u, \left(b + 2d + \frac{ce}{2} - \frac{e^2}{2} \right) u + ev + du^2 + v^2 \right).$$

Daí colocando $u = 0$ temos $X(0, v) = (0, v^2)$, donde concluimos que o retrato de fase local da singularidade é dado na figura a seguir.

Procedendo analogamente com a singularidade n^- concluimos que esta singularidade possui o seguinte retrato de fase local:

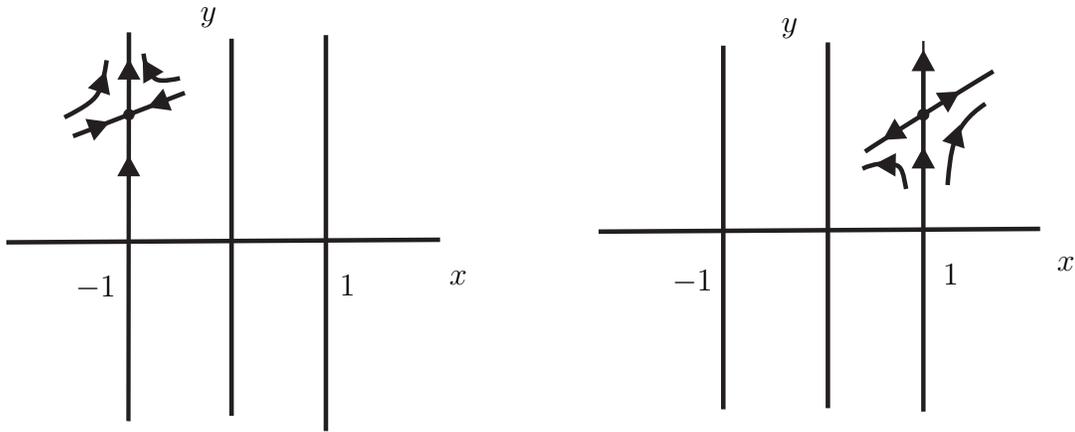


Figura 12.1: Retratos de fase local das singularidades n^- e n^+ , respectivamente.

Todos esses resultados podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 12.1.1. *Seja a família de campos $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2)$, temos que*

- (a) *Os pontos z_1^+ é um repulsor e z_2^+ é uma sela tendo como variedade estável o eixo y se $\Delta_+ > 0$;*
- (b) *Os pontos z_1^- é uma sela, tendo como variedade instável o eixo y e z_2^- é um atrator se $\Delta_- > 0$;*
- (c) *O ponto n^+ é uma sela-nó elementar com dois setores hiperbólicos se $\Delta_+ = 0$. Esta sela-nó tem como separatriz estável a semi-reta $x = 1$ com $y < \frac{-(c+e)}{2}$ e a separatriz instável tangente a reta $y = \frac{1}{2} \left[b + 2d - \frac{e}{2}(c+e) \right] x$;*
- (d) *O ponto n^- é uma sela-nó elementar com dois setores hiperbólicos se $\Delta_- = 0$. Esta sela-nó tem como separatriz instável a semi-reta $x = -1$ com $y > \frac{-(c-e)}{2}$ e a separatriz estável tangente a reta $y = \frac{1}{2} \left[b - 2d - \frac{e}{2}(c-e) \right] x$;*
- (e) *O campo não possui singularidades na parte finita se $\Delta_+ < 0$ e $\Delta_- < 0$.*

Demonstração A demonstração deste resultado segue das afirmações anteriores. ■

12.2 Singularidades na Parte Infinita do Campo

Estamos estudando o seguinte campo de vetores $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2) = (P(x, y), Q(x, y))$. Estamos interessados agora em entendermos a dinâmica próximo das singularidades na parte infinita do campo. Vamos realizar um estudo nas cartas U_1, V_1, U_2 e V_2 .

Gostaríamos de chamar a atenção neste ponto para o fato de que o campo que estamos trabalhando não é homogêneo, o que faz necessário estudarmos a expressão do campo nas 4 cartas.

Seja

$$\Delta_U = (e - 1)^2 - 4d. \quad (12.5)$$

Vamos considerar agora a carta U_1 do campo compactificado. Temos o seguinte resultado

Teorema 12.2.1. *Considere o campo $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2)$, na carta U_1 temos os seguintes resultados*

- (a) O campo $X(x, y)$ possui as singularidades $\left(\frac{-(e-1) + \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{-(e-1) - \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$, se $\Delta_U > 0$. Sendo uma sela e um atrator, respectivamente. Além disso, a sela possui o eixo y como variedade instável;
- (b) O campo possui a singularidade $\left(\frac{-(e-1)}{2}, 0\right)$ se $\Delta_U = 0$. A qual será uma sela-nó elementar com dois setores hiperbólicos, tendo como variedade instável a semi-reta formada pelo eixo y com $y > \frac{-(e-1)}{2}$ e a variedade estável tangente a reta $x = -\left[b - \frac{c}{2}(e-1)\right]y$;
-

(c) Não possui singularidades se $\Delta_U < 0$.

Demonstração A expressão do campo compactificado na carta U_1 é dada a seguir

$$\begin{cases} \dot{y} = az^2 + bz + cyz + d + ey + y^2 - y + yz^2 \\ \dot{z} = -z + z^3 \end{cases} \quad (12.6)$$

As singularidades são $\left(\frac{-(e-1) + \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{-(e-1) - \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$, se $\Delta_U > 0$.

Se $\Delta_U = 0$ temos uma única singularidade $\left(\frac{-(e-1)}{2}, 0\right)$ e, se $\Delta_U < 0$ não temos singularidades.

Vamos agora analisar a estrutura topológica das singularidades. Calculando a matriz Jacobiana e avaliando nas singularidades concluímos que $\left(\frac{-(e-1) + \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ é uma sela, tendo como variedade instável o eixo y , $\left(\frac{-(e-1) - \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ é um atrator e, a singularidade $\left(\frac{-(e-1)}{2}, 0\right)$ é não hiperbólica, com a seguinte representação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & b - \frac{c}{2}(e-1) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso necessitaremos de uma outra estratégia para obtermos informações acerca da dinâmica em sua vizinhança.

Contudo se avaliarmos o campo nos pontos do tipo $(y, 0)$ obtemos

$$\begin{cases} \dot{y} = d + ey + y^2 - y \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

No caso onde $\Delta_U = 0$ temos que $d = \left(\frac{e-1}{2}\right)^2$. Fazendo $\dot{y} = 0$ obtemos a equação $y^2 + (e-1)y + \frac{(e-1)^2}{4} = 0$, isto é, $y = -\frac{(e-1)}{2}$. Donde segue que

$\dot{y} \geq 0$. O retrato de fase local será exibido a seguir.

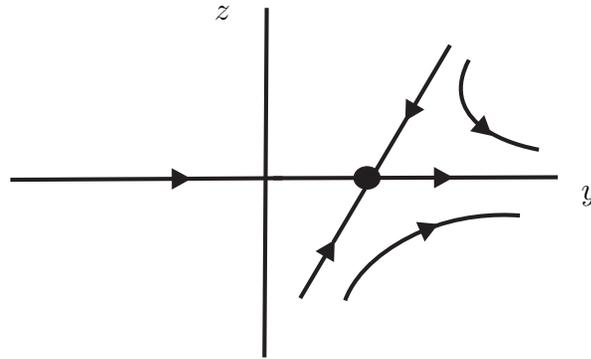


Figura 12.2: Retrato de fase local da singularidade na carta U_1 .

■

Consideremos a carta V_1 . Temos o resultado

Teorema 12.2.2. *Seja $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2)$, na carta V_1 temos os seguintes resultados*

- (a) *O campo $X(x, y)$ possui as singularidades $\left(\frac{-(1-e) + \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{-(1-e) - \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$, se $\Delta_U > 0$. Sendo um repulsor e uma sela, respectivamente. Além disso, a sela possui o eixo y como variedade estável;*
- (b) *O campo possui a singularidade $\left(\frac{-(1-e)}{2}, 0\right)$ se $\Delta_U = 0$. A qual é uma sela-nó elementar com dois setores hiperbólicos, tendo como variedade estável a semi-reta formada pelo eixo y com $y < \frac{-(1-e)}{2}$ e a variedade instável tangente a reta $x = -\left[b - \frac{c}{2}(e-1)\right]y$;*
- (c) *Não possui singularidades se $\Delta_U < 0$.*

Demonstração Na carta V_1 temos a seguinte expressão do campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{y} = az^2 - bz + cyz + d - ey + y^2 + y - yz^2 \\ \dot{z} = z - z^3 \end{cases} \quad (12.7)$$

As singularidades são $\left(\frac{-(1-e) + \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{-(1-e) - \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$, se $\Delta_U > 0$.

Se $\Delta_U = 0$ temos uma única singularidade $\left(\frac{-(1-e)}{2}, 0\right)$ e, se $\Delta_U < 0$ não temos singularidades.

Objetivamos estudar agora a estrutura topológica das singularidades. Calculando a matriz Jacobiana e avaliando nas singularidades concluímos que $\left(\frac{-(1-e) + \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ é um repulsor, $\left(\frac{-(1-e) - \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ é uma sela, tendo como variedade estável o eixo y e, a singularidade $\left(\frac{-(1-e)}{2}, 0\right)$ é não hiperbólica, com a seguinte representação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & -b + \frac{c}{2}(e-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso necessitaremos de uma outra estratégia para obtermos informações acerca da dinâmica em sua vizinhança.

Contudo se avaliarmos o campo nos pontos do tipo $(y, 0)$ obtemos

$$\begin{cases} \dot{y} = d + ey + y^2 - y \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

No caso onde $\Delta_U = 0$ temos que $d = \left(\frac{e-1}{2}\right)^2$. Fazendo $\dot{y} = 0$ obtemos a equação $y^2 + (1-e)y + \frac{(e-1)^2}{4} = 0$, isto é, $y = -\frac{(1-e)}{2}$. Donde segue que $\dot{y} \geq 0$. O retrato de fase local será exibido a seguir.

■

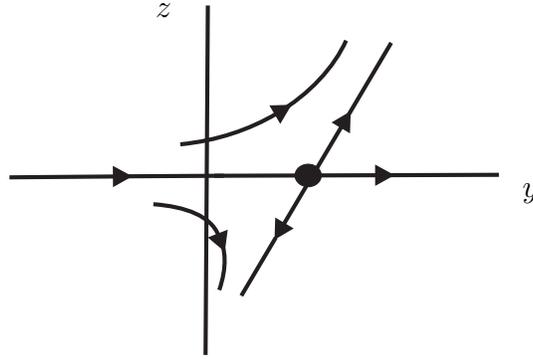


Figura 12.3: Retrato de fase local da singularidade na carta V_1 .

Teorema 12.2.3. *Considere o campo $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2)$. Temos os seguintes resultados acerca da carta U_2 e V_2*

- (a) *A origem da carta U_2 é um atrator;*
- (b) *A origem da carta V_2 é um repulsor;*

Demonstração Na carta U_2 temos o seguinte campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - z^2 - axz^2 - bx^2z - cxz - dx^3 - ex^2 - x \\ \dot{z} = -az^3 - bxz^2 - cz^2 - dx^2z - exz - z \end{cases} \quad (12.8)$$

Nesta carta consideremos somente a singularidade que se encontra na origem.

Calculando a matriz Jacobiana e avaliando na origem, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

donde concluimos que a origem é um atrator.

Finalmente, na carta V_2 obtemos a seguinte expressão para o campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - z^2 + axz^2 + bx^2z - cxz + dx^3 - ex^2 + x \\ \dot{z} = az^3 + bxz^2 - cz^2 + dx^2z - exz + z \end{cases} \quad (12.9)$$

Nesta carta, como na carta U_2 , consideremos somente a singularidade que se encontra na origem.

Analogamente ao realizado na carta anterior, vamos calcular a matriz Jacobiana e avaliar na origem, obtendo assim a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde concluímos que a origem é um repulsor. ■

Vamos explicitar agora a estrutura topológica em uma vizinhança da singularidade na parte finita e infinita do campo. Observe que na parte finita do campo, temos a seguinte relação entre as singularidades

$$-(c+e) + \sqrt{(c+e)^2 - 4(a+b+d)} > -(c+e) - \sqrt{(c+e)^2 - 4(a+b+d)}$$

e

$$-(c-e) + \sqrt{(c-e)^2 - 4(a-b+d)} > -(c-e) - \sqrt{(c-e)^2 - 4(a-b+d)}.$$

12.3 Retratos de Fase Local no Disco de Poincaré

Nesta seção nos dedicaremos a agrupar as informações obtidas até o momento, esboçando os retratos de fase local no disco de Poincaré. Com isso, aglutinaremos todas as informações que obtivemos nas seções anteriores na vizinhança da singularidade.

Observe que nas seções anteriores, onde analisamos a estrutura das singularidades na parte finita e infinita tivemos que considerar os casos onde Δ_+ , Δ_- e Δ_U eram positivos, negativos e nulos. Donde surgem 27 casos a serem considerados.

1. $\Delta_+ > 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U > 0$;
-

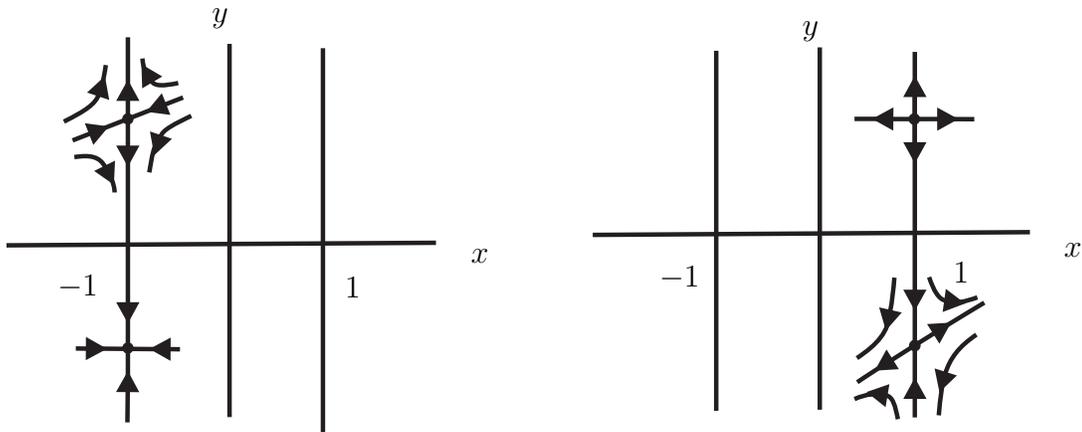


Figura 12.4: Retratos de fase local das singularidades z_1^- , z_2^- , z_1^+ e z_2^+ , respectivamente.

2. $\Delta_+ > 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U = 0$;
 3. $\Delta_+ > 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U < 0$;
 4. $\Delta_+ > 0, \Delta_- = 0$ e $\Delta_U > 0$;
 5. $\Delta_+ > 0, \Delta_- = 0$ e $\Delta_U = 0$;
 6. $\Delta_+ > 0, \Delta_- = 0$ e $\Delta_U < 0$;
 7. $\Delta_+ > 0, \Delta_- < 0$ e $\Delta_U > 0$;
 8. $\Delta_+ > 0, \Delta_- < 0$ e $\Delta_U = 0$;
 9. $\Delta_+ > 0, \Delta_- < 0$ e $\Delta_U < 0$;
 10. $\Delta_+ = 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U > 0$;
 11. $\Delta_+ = 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U = 0$;
 12. $\Delta_+ = 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U < 0$;
 13. $\Delta_+ = 0, \Delta_- = 0$ e $\Delta_U > 0$;
 14. $\Delta_+ = 0, \Delta_- = 0$ e $\Delta_U = 0$;
 15. $\Delta_+ = 0, \Delta_- = 0$ e $\Delta_U < 0$;
-

16. $\Delta_+ = 0, \Delta_- < 0$ e $\Delta_U > 0$;
17. $\Delta_+ = 0, \Delta_- < 0$ e $\Delta_U = 0$;
18. $\Delta_+ = 0, \Delta_- < 0$ e $\Delta_U < 0$;
19. $\Delta_+ < 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U > 0$;
20. $\Delta_+ < 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U = 0$;
21. $\Delta_+ < 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U < 0$;
22. $\Delta_+ < 0, \Delta_- = 0$ e $\Delta_U > 0$;
23. $\Delta_+ < 0, \Delta_- = 0$ e $\Delta_U = 0$;
24. $\Delta_+ < 0, \Delta_- = 0$ e $\Delta_U < 0$;
25. $\Delta_+ < 0, \Delta_- < 0$ e $\Delta_U > 0$;
26. $\Delta_+ < 0, \Delta_- < 0$ e $\Delta_U = 0$;
27. $\Delta_+ < 0, \Delta_- < 0$ e $\Delta_U < 0$.

Como estamos tratando de uma família a 5 parâmetros, temos que as condições acima determinam partições no \mathbb{R}^5 . Vamos verificar que essas partições não são vazias, para isso vamos exibir para cada caso um ponto que esta na região.

No caso 1. temos o ponto $(a, b, c, d, e) = (-1, 0, 3, -4, 0)$, no caso 2. temos o ponto $(-1, 0, 2, 0, 1)$, no caso 3. temos o ponto $(-2, 0, 4, 1, 1)$, no caso 4. temos o ponto $(0, -1, 2, 0, 0)$, no caso 5. temos o ponto $(0, -1, 3, 0, 1)$, no caso 6. temos o ponto $(0, 0, 3, 1, 1)$, no caso 7. temos o ponto $(0, -2, -1, 0, 0)$, no caso 8. temos o ponto $(0, -1, 2, 0, 1)$, no caso 9. temos o ponto $(-1, -1, 0, 1, 0)$, no caso 10. temos o ponto $(-1, 1, 0, 0, 0)$, no caso 11. temos o ponto $(0, 0, -1, 0, 1)$, no caso 12. temos o ponto $(-1, 0.25, 0, 1, 1)$, no caso 13. temos o ponto $(1, 0, 2, 0, 0)$, no caso 14. temos o ponto $(0, 0, 1, 0.25, 0)$, no caso 15. temos o ponto $(-0.75, 0, 0, 1, 1)$, no caso 16. temos o ponto $(1, -1, 0, 0, 0)$, no caso 17. temos o ponto

$(1, -1, -1, 0, 1)$, no caso 18. temos o ponto $(0, -1, 0, 1, 0)$, no caso 19. temos o ponto $(0, 1, 0, 0, 0)$, no caso 20. temos o ponto $(0, 2, 0, 0, 1)$, no caso 21. temos o ponto $(0, 1, 1, 1, 0)$, no caso 22. temos o ponto $(1, 1, 0, 0, 0)$, no caso 23. temos o ponto $(1, 0.75, 0, 0, 1)$, no caso 24. temos o ponto $(0, 1, 1, 1, 1)$, no caso 25. temos o ponto $(1, 0, 0, 0, 0)$, no caso 26. temos o ponto $(12, -5, 1, 0, 1)$ e, finalmente no caso 27. temos o ponto $(0, 0, 1, 1, 0)$.

Teorema 12.3.1. *O retrato de fase local no disco de Poincaré do campo $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2)$ é topologicamente equivalente a um dos retratos listados a seguir.*

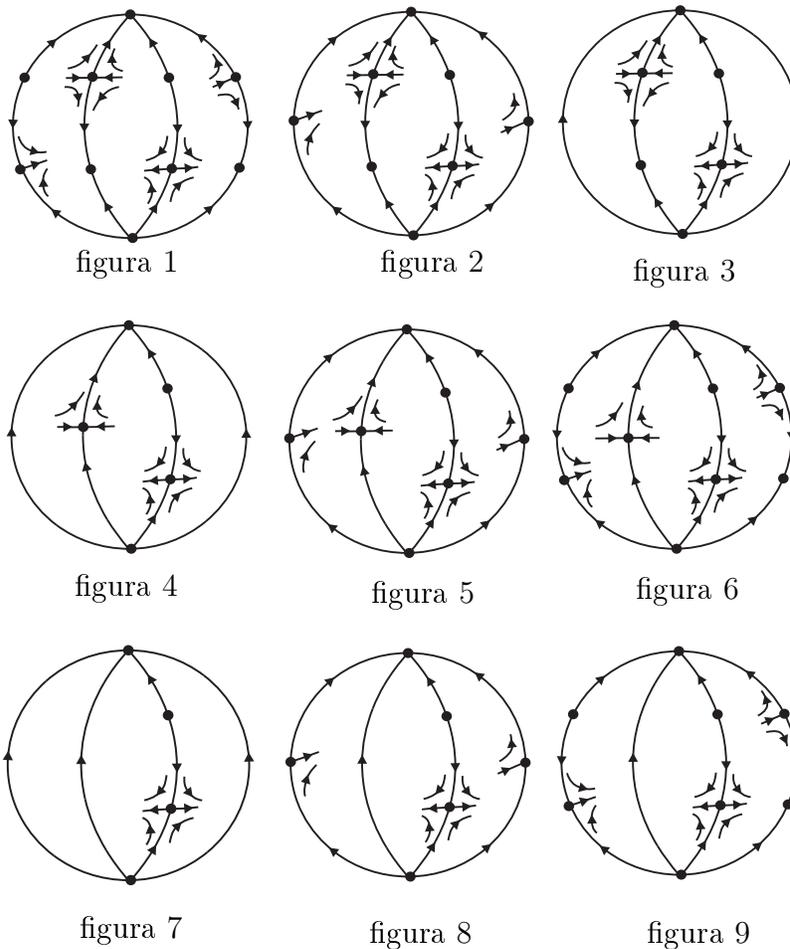


Figura 12.5: Os 9 primeiros retratos de fase local no disco de Poincaré.

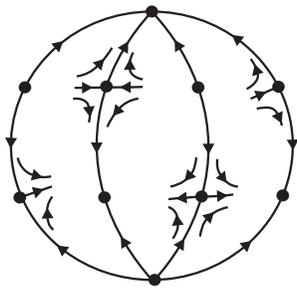


figura 10

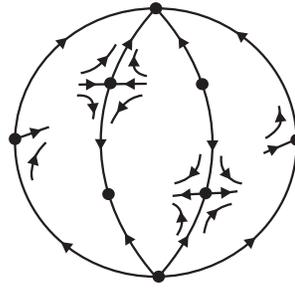


figura 11

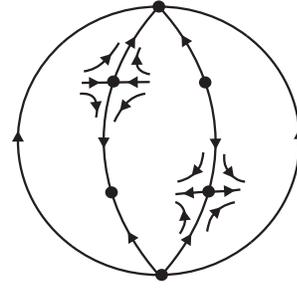


figura 12

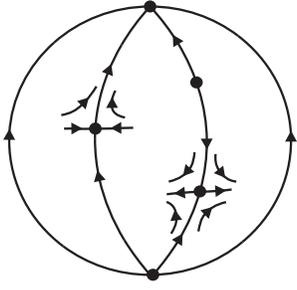


figura 13

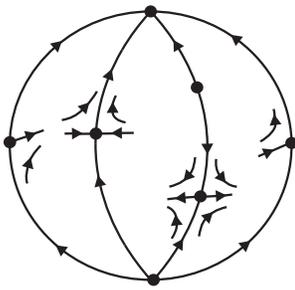


figura 14

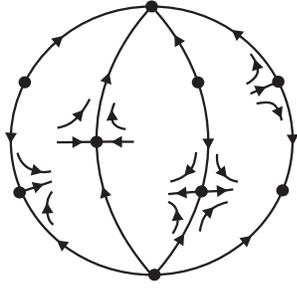


figura 15

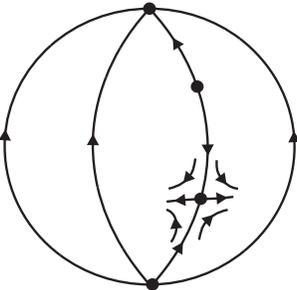


figura 16

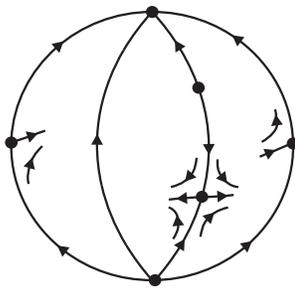


figura 17

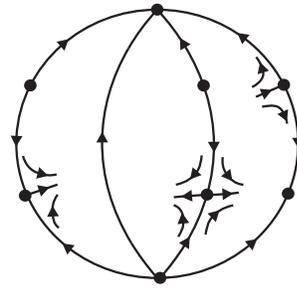


figura 18

Figura 12.6: Os 9 seguintes retratos de fase local no disco de Poincaré.

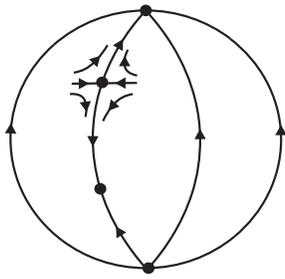


figura 19

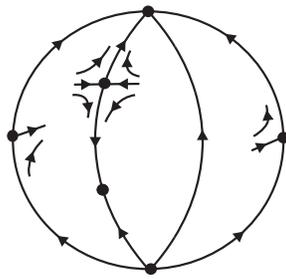


figura 20

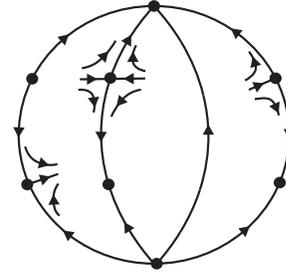


figura 21

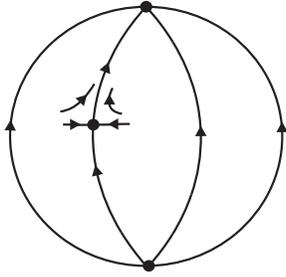


figura 22

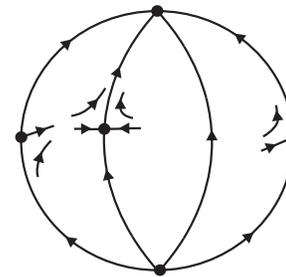


figura 23

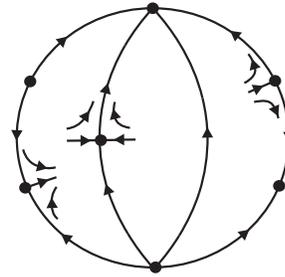


figura 24

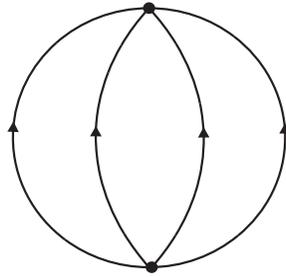


figura 25

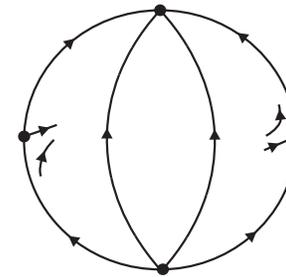


figura 26

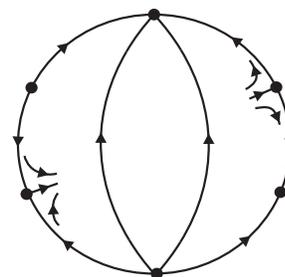


figura 27

Figura 12.7: Os 9 últimos retratos de fase local no disco de Poincaré.

A demonstração segue da observação dos resultados obtidos no teorema 12.1.1 e na seção 12.2.

■

12.4 Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré

Nesta seção almejamos explicitar os retratos de fase global no disco de

Poincaré. Contudo, quando observamos os retratos de fase local temos que, em alguns casos, podem existir mais de uma possibilidade de completar o retrato.

Para decidirmos acerca dessa possibilidade, vamos utilizar a seguinte idéia, a qual possui um grande apelo geométrico: considere a reta que une duas singularidades e calcule o produto escalar entre o vetor normal desta reta com o campo restrito a reta. Note que se o produto escalar for negativo, respectivamente positivo, temos que o ângulo entre o vetor normal e o campo restrito a reta é maior que 90° , respectivamente menor que 90° .

Como a direção do vetor normal é conhecida, poderemos decidir daí qual é a direção do fluxo e, com isso decidirmos sobre a possível existência, ou não, de um determinado caso.

Vamos dividir esta análise em três casos: nas cartas U_1 e V_1 , na parte infinita do campo e, por último na parte finita do campo.

Vamos tratar inicialmente do caso referente a carta V_1 .

Sejam $(r, 0)$ a singularidade que se encontra na carta V_1 e (u, v) a singularidade que se encontra na parte finita do campo. Temos que a reta que une estes dois pontos é dada por

$$\Sigma := \{(x, y); y = -rx + v + ru\}. \quad (12.10)$$

A qual possui o seguinte vetor normal $\vec{n} = (r, 1)$. Calculando o produto interno deste vetor com o campo restrito a esta reta, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle = & a - r + c(v + r(u - x)) + (v + r(u - x))^2 + \\ & + bx + e(v + r(u - x))x + dx^2 + rx^2. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Agora temos que substituir as coordenadas das singularidades e avaliar o sinal da expressão acima para obtermos uma resposta sobre a direção do fluxo.

Necessitamos considerar aqui os seguintes casos: 1., 2., 4., 5., 10., 11., 13.,

14., 20., 22. e 23.. Vamos detalhar um desses casos, por exemplo o caso 23.. Substituindo as coordenadas da singularidade, obtemos a seguinte expressão para (12.11):

$$\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle = \frac{1}{4} [(3 + 4a - c^2 - 2e) + 2(1 + 2b - ce)x + (4d - (1 - e)^2)x^2].$$

Observe que o termo de x^2 é $4d - (1 - e)^2 = \Delta_U$, o qual é nulo neste caso. O termo de x é $2(1 + 2b - ce) = 2 - \frac{1}{2}\Delta_+ > 0$ e, colocando $x = -1$ na expressão (12.11), temos $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle|_{\{x=-1\}} = -\frac{1}{4}\Delta_-$, o qual é nulo neste caso. Donde concluímos que $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle < 0$ para todo $x < -1$. Portanto a direção do campo sob esta reta é sempre para baixo.

A análise é análoga aos demais casos, com exceção do caso 19., o qual precisamos uma maior atenção com relação as singularidades que tomamos. Neste caso, consideramos a singularidade $\left(\frac{-(1-e) - \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ na parte infinita do campo e a singularidade $\left(-1, \frac{-(c-e) + \sqrt{\Delta_-}}{2}\right)$ na parte finita do campo.

Daí obtemos a seguinte expressão para (12.11):

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle &= \frac{1}{2} [(2b - 4d + (2 + \sqrt{\Delta_-})(1 + \sqrt{\Delta_U}) + e(-2 - c + e)) \\ &\quad + (2b - 4d + (2 + \sqrt{\Delta_-})(1 + \sqrt{\Delta_U}) + e(-2 - c + e))x]. \end{aligned}$$

Temos claramente que $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle|_{\{x=-1\}} = 0$. Vamos analisar agora o coeficiente de x . Agrupando os termos de maneira conveniente, obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\Delta_U - \frac{1}{4}\Delta_+ + \frac{1}{4}\Delta_- + 1 + 2\sqrt{\Delta_U} + \sqrt{\Delta_-} + \sqrt{\Delta_-}\sqrt{\Delta_U} \right),$$

como neste caso $\Delta_+ < 0, \Delta_- > 0$ e $\Delta_U > 0$, obtemos que $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle < 0$ para todo $x < -1$. Logo, a direção do fluxo ao longo deste reta é sempre para baixo.

Com isso conhecemos totalmente a dinâmica nesta região do disco de Poincaré.

Procedendo analogamente no caso onde a singularidade se encontra na carta V_1 , obtemos a seguinte expressão para o produto interno onde a singularidade se encontra na carta U_1

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle = & a + r + c(v + r(-u + x)) + (v + r(-u + x))^2 + \\ & + bx + e(v + r(-u + x))x + dx^2 - rx^2. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Como realizamos anteriormente, vamos substituir as coordenadas das singularidades e avaliar o sinal da expressão acima para descobrirmos a direção do fluxo.

Vamos considerar aqui os seguintes casos: 1., 2., 4., 5., 7., 8., 10., 11., 13., 14., 16. e 17.. Vamos explorar um desses casos, por exemplo o caso 16.. Substituindo as coordenadas da singularidade, obtemos a seguinte expressão para (12.12):

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle = & \left[a - \frac{c^2}{4} - d - \sqrt{\Delta_U} + \frac{1}{4}(e - 2)^2 \right] + \\ & + \left[-1 + b + 2d + \sqrt{\Delta_U} + e - \frac{1}{2}e(c + e) \right] x. \end{aligned}$$

Note que o termo de x , após uma reordenação é $\frac{1}{4}(\Delta_- - \Delta_+) - (\sqrt{\Delta_U} - 1)^2$, o qual é negativo, pois neste caso temos $\Delta_- < 0$, $\Delta_U > 0$ e $\Delta_+ = 0$. E, avaliando a expressão (12.12) em $x = 1$, obtemos $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle|_{\{x=1\}} = -2\Delta_+$, o qual é nulo neste caso. Donde concluímos que $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle < 0$ para todo $x > 1$. Portanto a direção do campo sob esta reta é sempre para baixo.

A análise será idêntica para os demais casos, com exceção do caso 7., para o qual dedicaremos uma atenção maior com relação as singularidades que tomamos e, com relação as contas para descobrirmos qual a direção do campo

ao longo da reta. Neste caso, consideramos a singularidade $\left(\frac{-(e-1) - \sqrt{\Delta_U}}{2}, 0\right)$ na parte infinita do campo e a singularidade $\left(1, \frac{-(c+e) + \sqrt{\Delta_+}}{2}\right)$ na parte finita do campo.

Daí obtemos a seguinte expressão para (12.12):

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle &= \alpha + \beta x = \frac{1}{2} [(-2b - 4d + (-2 + \sqrt{\Delta_+})(-1 + \sqrt{\Delta_U}) \\ &\quad + e(-2 + c + e)) - (-2b - 4d + (-2 + \sqrt{\Delta_+})(-1 + \sqrt{\Delta_U}) \\ &\quad + e(-2 + c + e))x]. \end{aligned}$$

Temos claramente que $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle|_{\{x=1\}} = 0$. Vamos analisar agora o coeficiente β de x . Agrupando os termos de maneira conveniente, obtemos

$$\beta = -\frac{1}{2} \left[(\sqrt{\Delta_U} - 1)^2 + \left(\frac{\sqrt{\Delta_+}}{2} - 1 \right)^2 - 1 - \frac{1}{4} \Delta_- + \sqrt{\Delta_+} \sqrt{\Delta_U} \right]. \quad (12.13)$$

Para podermos concluir que a direção do fluxo ao longo da reta é para baixo, gostaríamos que β fosse negativo para todo $x > 1$. Faremos a demonstração por absurdo. Suponhamos, que β seja positivo.

Resolvendo a equação $\beta = \xi$ em função de Δ_- , obtemos que

$$\Delta_- = 8\xi + (-2 + \sqrt{\Delta_+} + 2\sqrt{\Delta_U})^2.$$

Como estamos supondo que $\beta > 0$, temos que $\xi > 0$, donde segue que $\Delta_- > 0$. O que contradiz a hipótese, pois nesse caso temos $\Delta_- < 0$. Donde segue que β é sempre negativo para todo $x > 1$.

Para o caso onde as duas singularidades estão na parte finita do campo o processo também será análogo, com a seguinte alteração: vamos considerar as

seguintes coordenadas das singularidades $(-1, v)$ e $(1, z)$. Daí temos a seguinte expressão para o produto interno:

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle &= \frac{1}{2} [4a + v^2(-1+x)^2 + 4x(b+dx) \\ &\quad + 2(1+x)(1+c+(-1+e)x)z + (1+x)^2 z^2 \\ &\quad - 2v(-1+x)(-1+c+z+x(-1+e+z))]. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Analogamente ao processo anterior, vamos substituir as coordenadas das singularidades e avaliar o sinal da expressão acima para descobrirmos a direção do fluxo.

Vamos considerar aqui os seguintes casos: 1., 2., 3., 4., 5., 6., 10., 11., 12., 13., 14. e 15.. Detalharemos um desses casos, por exemplo o caso 12., visto que os demais são análogos. Substituindo as coordenadas da singularidade, obtemos a seguinte expressão para (12.14):

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 = \frac{1}{8} [(12a + 4b - 3c^2 - 4d + 4\sqrt{\Delta_-} - 8e - 2ce + e^2) \\ &\quad - (-8a - 8b + 2c^2 - 8d + 4ce + 2e^2)x \\ &\quad - (4a - 4b - c^2 - 12d + 4\sqrt{\Delta_-} - 8e + 2ce + 3e^2)x^2]. \end{aligned}$$

Gostaríamos que $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle < 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. Reescrevendo o termo γ , obtemos $\gamma = -4\Delta_U + (\sqrt{\Delta_-} - 2)^2$, o qual é positivo, pois neste caso temos $\Delta_U < 0$. Avaliando a expressão (12.14) em $x = \pm 1$, temos que $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle|_{\{x=\pm 1\}} = 0$.

Donde concluímos que $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle < 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. Portanto a direção do campo sob esta reta é sempre para baixo.

A análise é análoga para os demais casos, com exceção do caso 3., para

o qual dispensaremos uma atenção maior com relação as singularidades que tomamos e, com relação as contas para descobirmos qual a direção do campo ao longo da reta.

Vamos considerar as singularidades $\left(1, \frac{-(c+e) + \sqrt{\Delta_+}}{2}\right)$ e $\left(-1, \frac{-(c-e) - \sqrt{\Delta_-}}{2}\right)$ na parte finita do campo.

Daí obtemos a seguinte expressão para (12.14):

$$\begin{aligned} \langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle &= \alpha + \beta x^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[(4a - c^2 - 4d + 2\sqrt{\Delta_-} + (-4 + e)e + 2\sqrt{\Delta_+} - \sqrt{\Delta_-}\sqrt{\Delta_+}) \right. \\ &\quad \left. + (-4a + c^2 + 4d - 2\sqrt{\Delta_-} - (-4 + e)e - 2\sqrt{\Delta_+} + \sqrt{\Delta_-}\sqrt{\Delta_+}) x^2 \right]. \end{aligned}$$

Temos que $\langle \vec{n}, X|_{\Sigma} \rangle|_{\{x=\pm 1\}} = 0$. Vamos analisar agora o coeficiente β de x^2 . Agrupando os termos de maneira conveniente, obtemos

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{4} \left[-2\Delta_U - 2 + \left(\frac{\sqrt{\Delta_-}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{\Delta_+}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \right)^2 + \sqrt{\Delta_-}\sqrt{\Delta_+} \right]. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Para concluirmos que a direção do fluxo ao longo da reta é para baixo, gostaríamos que β fosse positivo para todo $x \in (-1, 1)$. Demonstramos por absurdo. Suponhamos, que β seja negativo.

Resolvendo a equação $\beta = \xi$ em função de Δ_U , obtemos que

$$\Delta_U = \frac{1}{4} (-8\xi + (-2 + \sqrt{\Delta_U} + \sqrt{\Delta_+})^2).$$

Como estamos supondo que $\beta < 0$, temos que $\xi < 0$, donde segue que $\Delta_U > 0$. O que contradiz a hipótese, pois nesse caso temos $\Delta_U < 0$. Donde segue que β é sempre positivo para todo $x \in (-1, 1)$.

Teorema 12.4.1. *O retrato de fase do campo de vetores polinomial planar*

$$X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + dx^2 + exy + y^2)$$

é topologicamente equivalente a um dos retratos listados nas Figuras 12.8, 12.9 e 12.10.

Demonstração A demonstração segue da observação do teorema 12.3.1 e das considerações feitas nesta seção. ■

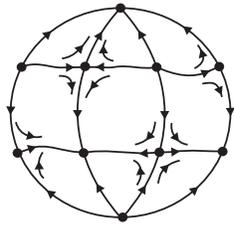


figura 1

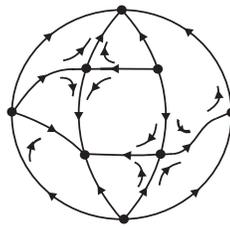


figura 2

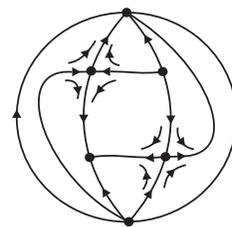


figura 3

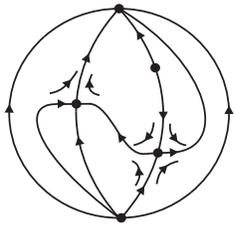


figura 4

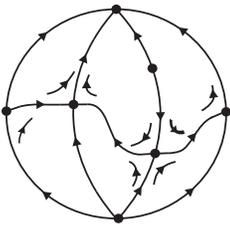


figura 5

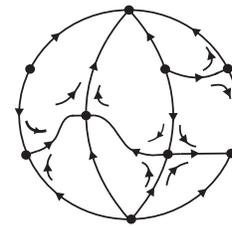


figura 6

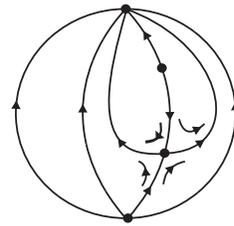


figura 7

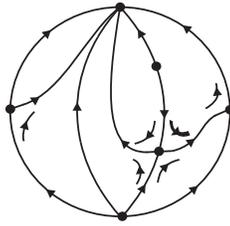


figura 8

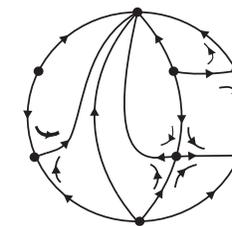


figura 9

Figura 12.8: Os 9 primeiros retratos de fase global no disco de Poincaré.

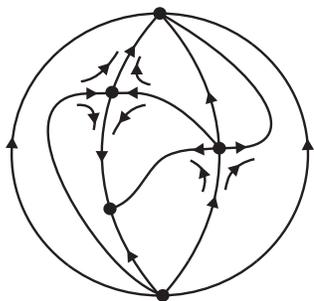


figura 10

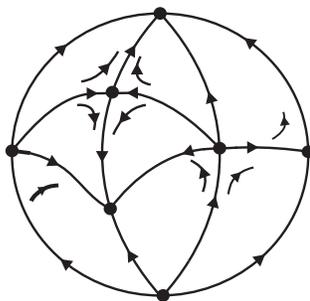


figura 11

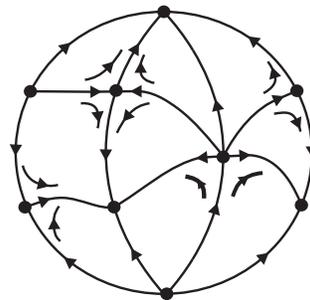


figura 12

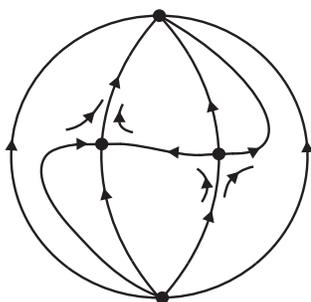


figura 13

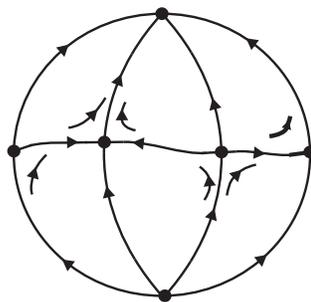


figura 14

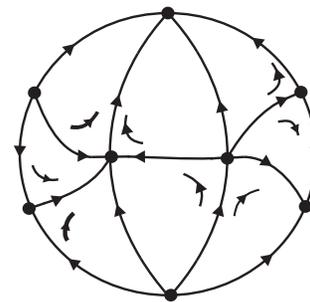


figura 15

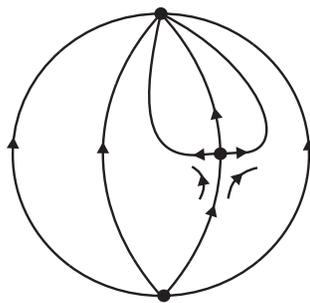


figura 16

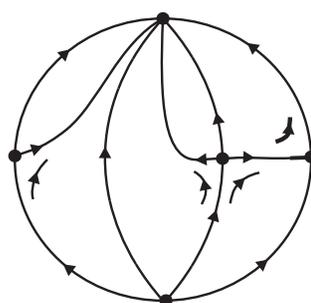


figura 17

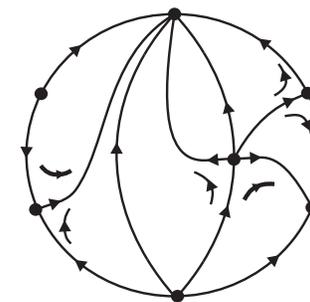


figura 18

Figura 12.9: Os 9 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré.



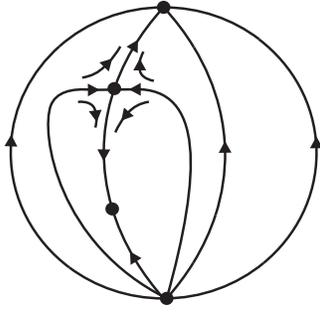


figura 19

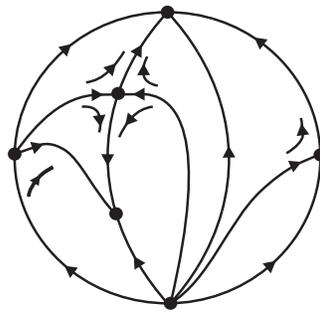


figura 20

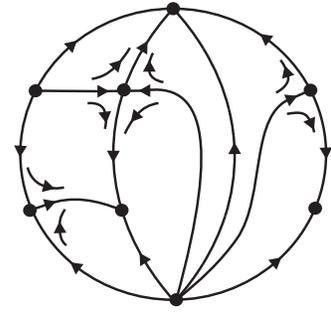


figura 21

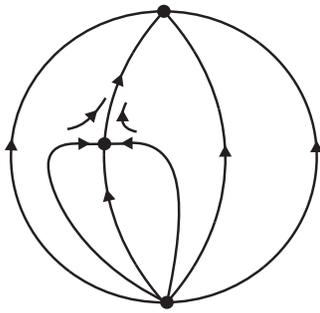


figura 22

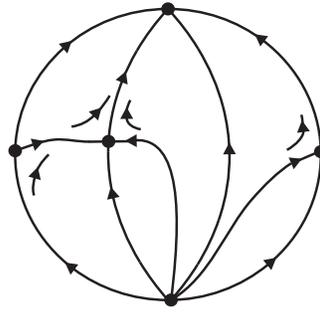


figura 23

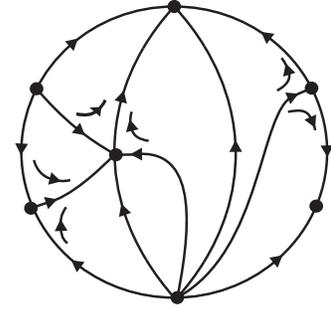


figura 24

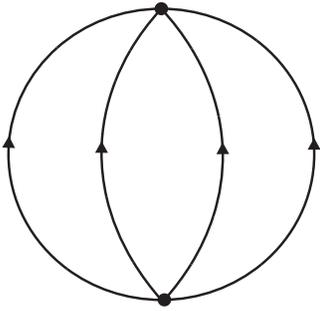


figura 25

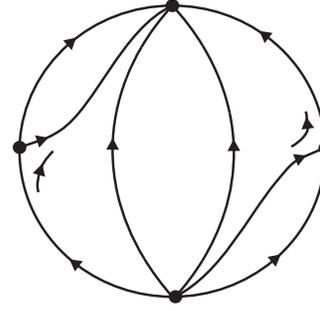


figura 26

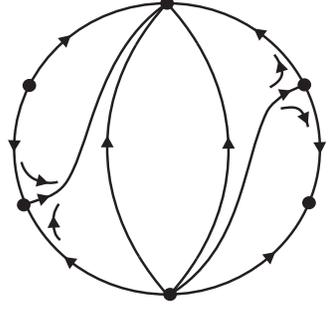


figura 27

Figura 12.10: Os 9 últimos retratos de fase global no disco de Poincaré.

Capítulo 13

Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + cy + exy)$.

Objetivamos agora estudar a estrutura topológica da seguinte família de campos de vetores

$$X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + cy + exy). \quad (13.1)$$

13.1 Singularidades na Parte Finita do Campo

Vamos partir para o estudo das singularidades na parte finita do campo. Temos as seguintes singularidades: $\left(1, -\frac{1}{c+e}\right)$ e $\left(-1, -\frac{1}{c-e}\right)$. Daí surgem três casos a serem considerados:

- (1) $c + e = 0$;
- (2) $c - e = 0$;
- (3) $c \pm e \neq 0$.

Vamos analisar a estrutura topológica das singularidades em cada um dos casos na parte finita do campo.

No caso (1) temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 + cy - cxy. \end{cases} \quad (13.2)$$

Daí temos a singularidade $\left(-1, -\frac{1}{2c}\right)$ se $c \neq 0$. Se $c = 0$, temos o campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1, \end{cases}$$

o qual não têm singularidades.

No caso (2) temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 + cy + cxy. \end{cases}$$

Daí temos a singularidade $\left(1, -\frac{1}{2c}\right)$ se $c \neq 0$. Se $c = 0$, temos o campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1, \end{cases}$$

o qual não têm singularidades.

No caso (3) temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 + cy + exy. \end{cases}$$

Daí temos as singularidades $\left(1, -\frac{1}{c+e}\right)$ e $\left(-1, -\frac{1}{c-e}\right)$.

Tratemos agora do caso (1), isto é, vamos analisar a estrutura topológica dos pontos singulares dos campos no caso (1).

Temos o campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 + cy - cxy, \end{cases}$$

cuja singularidade é $\left(-1, -\frac{1}{2c}\right)$ se $c \neq 0$.

Assumiremos que $c \neq 0$ pois como vimos no caso $c = 0$ o campo não possui singularidades na parte finita do campo. Vamos à análise da parte linear do campo. Temos

$$J\left(-1, -\frac{1}{2c}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2c \end{bmatrix}.$$

Donde segue a singularidade é um nó atrator se $c < 0$ e uma sela se $c > 0$.

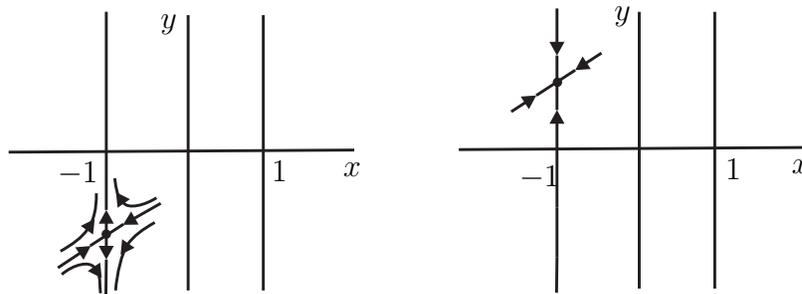


Figura 13.1: Retratos na parte finita do campo com $c > 0$ e $c < 0$, respectivamente.

Vamos analisar agora o caso (2). Temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 + cy + cxy, \end{cases}$$

cuja singularidade é $\left(1, -\frac{1}{2c}\right)$ se $c \neq 0$.

Assumiremos que $c \neq 0$ pois como já vimos no caso $c = 0$ o campo não possui singularidades na parte finita do campo.

Analisando a parte linear do campo temos,

$$J\left(1, -\frac{1}{2c}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2c \end{bmatrix}.$$

Donde segue a singularidade é um nó instável se $c > 0$ e uma sela se $c < 0$.

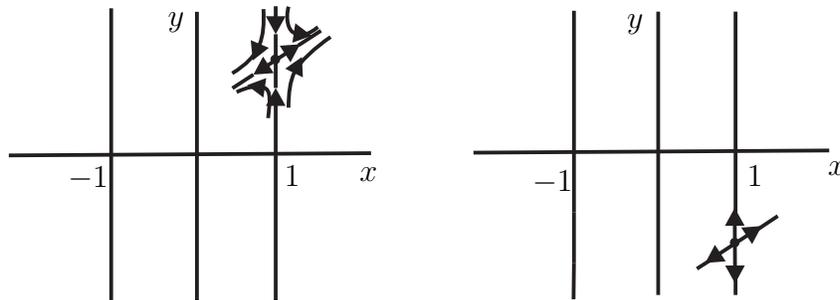


Figura 13.2: Retratos na parte finita do campo com $c < 0$ e $c > 0$, respectivamente.

Vamos analisar agora o caso (3). Temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 + cy + exy, \end{cases}$$

cujas singularidades são: $\left(1, -\frac{1}{c+e}\right)$ e $\left(-1, -\frac{1}{c-e}\right)$.

Vamos à parte linear do campo,

$$J\left(1, -\frac{1}{c+e}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{e}{c+e} & c+e \end{bmatrix}.$$

e

$$J\left(-1, -\frac{1}{c-e}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -\frac{e}{c-e} & c-e \end{bmatrix}.$$

Donde segue a singularidade $\left(1, -\frac{1}{c+e}\right)$ é um nó instável se $c+e > 0$ e uma sela se $c+e < 0$. A singularidade $\left(-1, -\frac{1}{c-e}\right)$ é um nó estável se $c-e < 0$ e uma sela se $c-e > 0$.

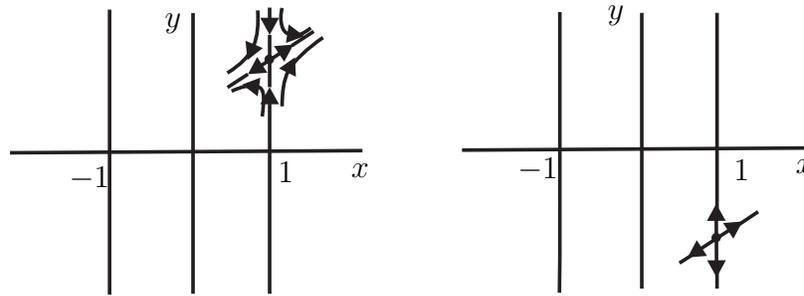


Figura 13.3: Retratos na parte finita do campo da singularidade $\left(1, -\frac{1}{c+e}\right)$ com $c+e < 0$ e $c+e > 0$, respectivamente.

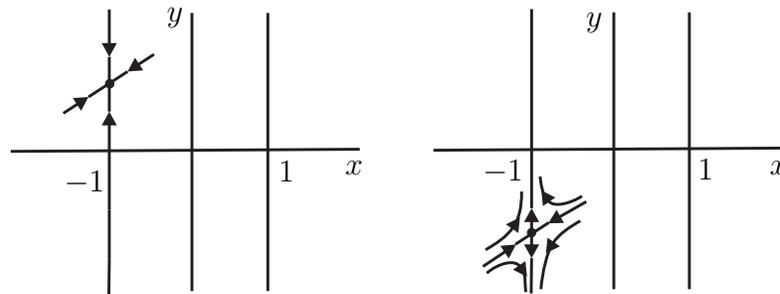


Figura 13.4: Retratos na parte finita do campo da singularidade $\left(1, -\frac{1}{c-e}\right)$ com $c-e < 0$ e $c-e > 0$, respectivamente.

13.2 Singularidades na Parte Infinita do Campo

Estudaremos agora as singularidades na parte infinita do campo. Objetivamos obter a dinâmica próximo a essas singularidades. Como no estudo da parte finita vamos dividir nossa análise em 3 casos.

Inicialmente tratemos do caso (1), isto é, onde $c = -e$. Na carta U_1 temos o seguinte campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{y} = z^2 + cyz - cy - y + yz^2 \\ \dot{z} = -z + z^3 \end{cases} \quad (13.3)$$

As singularidades desse campo é somente a origem, se $c \neq -1$. Se $c = -1$

temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{y} = z^2 - yz + yz^2 \\ \dot{z} = -z + z^3. \end{cases} \quad (13.4)$$

Daí a reta $z = 0$ é constituída de singularidades, isto é, não temos um ponto singular isolado. Tratemos esse caso posteriormente.

Analisemos a dinâmica na origem do campo (13.4). Temos,

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 - c & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donde segue que $(0,0)$ é uma sela se $c < -1$ e um nó atrator se $c > -1$.

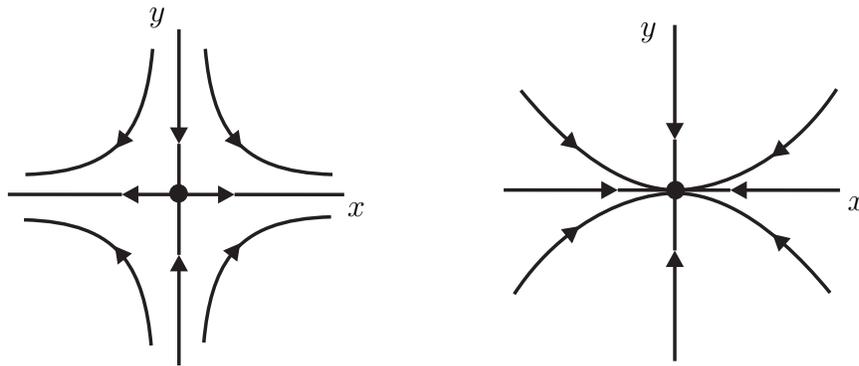


Figura 13.5: Retratos na parte infinita do campo com $c < -1$ e $c > -1$, respectivamente.

Analisemos agora a carta U_2 .

Temos o seguinte campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - z^2 - xz^2 - cxz + cx^2 \\ \dot{z} = -z^3 - cz^2 + cxz \end{cases} \quad (13.5)$$

Temos que a singularidade desse campo é somente a origem, se $c \neq -1$. Se $c = -1$ temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = -z^2 - xz^2 + xz \\ \dot{z} = -z^3 + z^2 - xz. \end{cases} \quad (13.6)$$

Donde segue que a curva $z = 0$ é constituída de singularidades. Vamos analisar esse caso posteriormente.

Analisemos a dinâmica na origem do campo (13.5). Temos,

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aqui temos um ponto singular degenerado, para que possamos entender sua dinâmica vamos precisar de um tratamento especial. Faremos uso aqui de blow-ups polares para nos auxiliar nessa tarefa.

Antes de efetuarmos as contas, observe que a reta $x = 1$ é invariante e, além disso temos $\dot{y} > 0$. De fato, estamos tratando do campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 + cy - cxy \end{cases}$$

Assim, quando $x = 1$ temos $\dot{y} = 1 > 0$. O que nos diz que o fluxo sob a reta $x = 1$ é sempre “subindo”. Veja Figura 13.6.

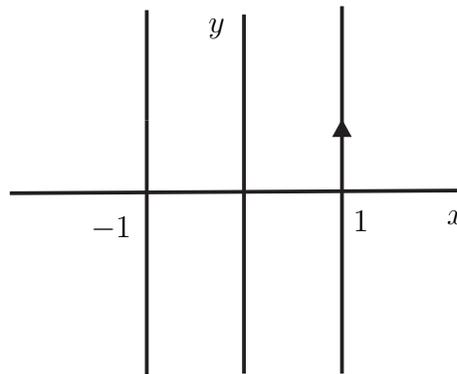


Figura 13.6: Fluxo do campo sob a reta $x = 1$.

Lembremos que estamos supondo aqui que $c \neq -1$.

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

O que caracteriza um blow-up polar. Daí obtemos o seguinte campo

$$X(r, t) = \frac{1}{2}(r(1 + 2c)\cos t + r\cos 3t - 2r\sin t(c + r\sin t), \sin t - \sin 3t).$$

Cujas singularidades são $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(0, \frac{\pi}{4})$, $(0, \frac{3\pi}{4})$, $(0, \frac{5\pi}{4})$ e $(0, \frac{7\pi}{4})$.

Dividimos nossa análise nos seguintes casos: $c < -1$, $-1 < c < 0$ e $c > 0$. Analisando a parte linear do campo em cada uma das singularidades obtemos as seguintes figuras

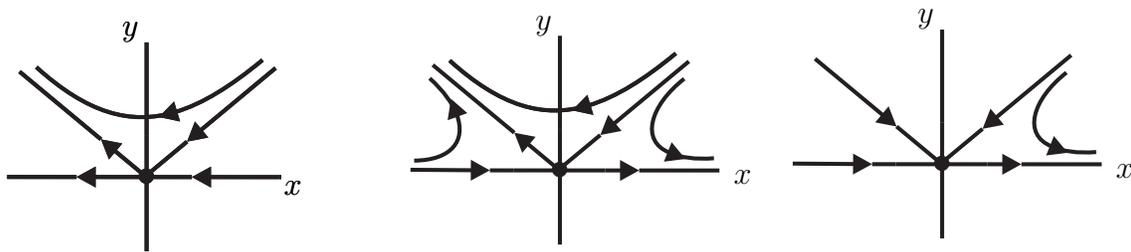


Figura 13.7: Retratos na parte infinita do campo com $c < -1$, $-1 < c < 0$ e $c > 0$, respectivamente.

Analisemos agora as cartas V_1 e V_2 . Na carta V_1 temos o seguinte campo compactificado

$$\begin{cases} \dot{y} = y - yz^2 + z^2 + cyz + cy \\ \dot{z} = z - z^3. \end{cases} \quad (13.7)$$

Temos nesta carta somente a origem como singularidade se $c \neq -1$. Se $c = -1$, temos o campo

$$\begin{cases} \dot{y} = -yz^2 + z^2 - yz \\ \dot{z} = z - z^3. \end{cases} \quad (13.8)$$

Daí $z = 0$ é constituído de singularidades. Vamos considerar este campo posteriormente.

Analisemos a singularidade $(0, 0)$ do campo (13.7).

$$\begin{bmatrix} 1+c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $c > -1$ temos que a origem é um nó instável e se $c < -1$ é uma sela.

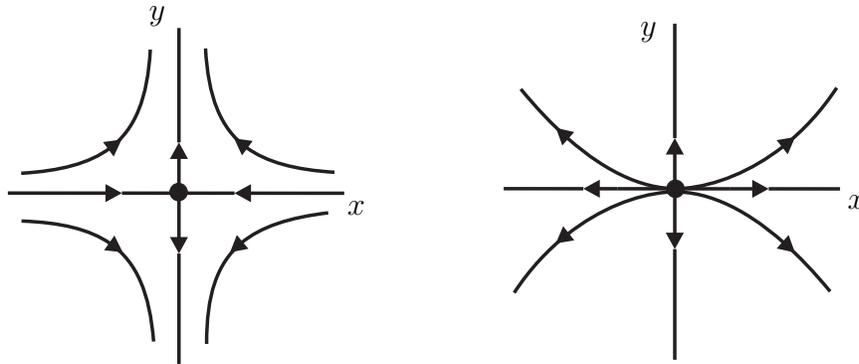


Figura 13.8: Retratos na parte infinita do campo com $c < -1$ e $c > -1$, respectivamente.

Na carta V_2 temos o seguinte campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{x} = xz^2 - cxz + cx^2 + x^2 - z^2 \\ \dot{z} = z^3 - cz^2 + cxz. \end{cases} \quad (13.9)$$

Se $c \neq -1$ temos que a origem é a única singularidade.

Para $c = -1$ temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = xz^2 + xz - z^2 \\ \dot{z} = z^3 + z^2 - xz. \end{cases} \quad (13.10)$$

Vamos considerar este campo posteriormente.

Analisemos a singularidade $(0, 0)$ do campo (13.9)

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que essa singularidade é degenerada. Para obter um entendimento dessa singularidade vamos utilizarmos de blow-ups.

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

Esta mudança caracteriza um blow-up polar, daí obtemos o campo $X(r, t) = \frac{1}{2}(r^2 + r \cos t + 2br \cos t - r^2 \cos 2t + r \cos 3t - 2cr \sin t, \sin t - \sin 3t)$.

Cujas singularidades são $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(0, \frac{\pi}{4})$, $(0, \frac{3\pi}{4})$, $(0, \frac{5\pi}{4})$ e $(0, \frac{7\pi}{4})$. Avaliando a parte linear do campo nessas singularidades teremos 3 casos a serem considerados $c < -1$, $-1 < c < 0$ e $c > 0$.

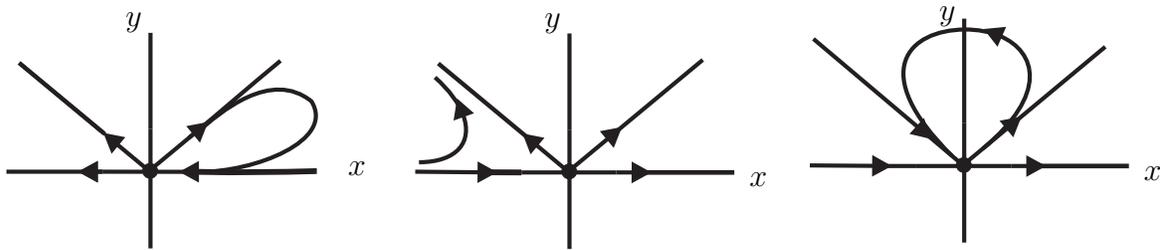


Figura 13.9: Retratos na parte infinita do campo com $c < -1$, $-1 < c < 0$ e $c > 0$, respectivamente.

Desta forma só nos resta analisarmos o caso onde o infinito é constituído de singularidades. Vamos fazê-lo futuramente.

Vamos agora à análise do caso (2). O procedimento será análogo ao caso anterior. Consideremos agora a carta U_1 . Temos o seguinte campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{y} = z^2 + cyz + cy - y + yz^2 \\ \dot{z} = -z + z^3 \end{cases} \quad (13.11)$$

A singularidade é somente a origem, se $c \neq 1$. Se $c = 1$ temos o seguinte

campo

$$\begin{cases} \dot{y} = z^2 + yz + yz^2 \\ \dot{z} = -z + z^3. \end{cases} \quad (13.12)$$

Daí teremos que a curva $z = 0$ é constituída de singularidades.

Como anteriormente, vamos considerar esse caso posteriormente.

Vamos estudar a estrutura topológica do campo (13.11) na origem. Temos,

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} c-1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donde segue que $(0,0)$ é uma sela se $c > 1$ e um nó atrator se $c < 1$.

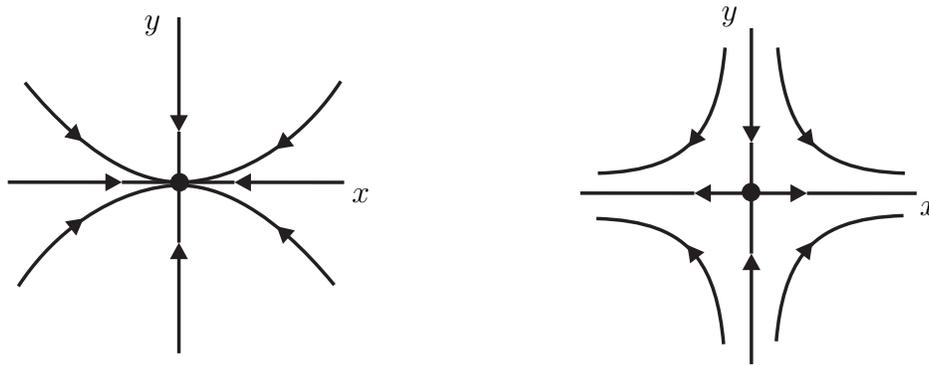


Figura 13.10: Retratos na parte infinita do campo com $c < 1$ e $c > 1$, respectivamente.

Vamos agora à carta U_2 .

Temos o campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - z^2 - xz^2 - cxz - cx^2 \\ \dot{z} = -z^3 - cz^2 - cxz \end{cases} \quad (13.13)$$

A singularidade desse campo é somente a origem, se $c \neq 1$. Se $c = 1$ temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = -z^2 - xz^2 - xz \\ \dot{z} = -z^3 - z^2 - xz. \end{cases} \quad (13.14)$$

Observe que a reta $z = 0$, como nos casos anteriores, é composta de singularidades. Analisaremos esse caso futuramente.

Estamos interessados na dinâmica na origem do campo (13.13). Temos,

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aqui temos novamente um ponto singular degenerado, faremos uso de blow-ups polares para entendermos esse caso.

Como no caso anterior, observe que a reta $x = -1$ é invariante e, além disso temos $\dot{y} > 0$. De fato, temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 + cy + cxy \end{cases}$$

Assim, quando $x = -1$ temos $\dot{y} = 1 > 0$. Donde segue que o fluxo sob a reta $x = -1$ é sempre de baixo para cima.

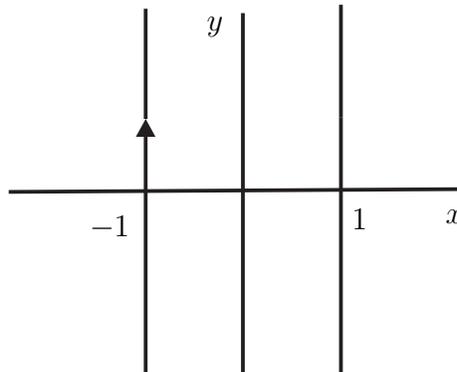


Figura 13.11: Fluxo do campo sob a reta $x = -1$.

Lembremos que estamos supondo aqui que $c \neq 1$. Faremos aqui a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

Ou seja, estamos efetuando um blow-up polar, obtendo assim o seguinte campo

$$X(r, t) = \frac{1}{2}(r(1 - 2c)\cos t + r\cos 3t - 2r\sin t(c + r\sin t), \sin t - \sin 3t).$$

Cujas singularidades são $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(0, \frac{\pi}{4})$, $(0, \frac{3\pi}{4})$, $(0, \frac{5\pi}{4})$ e $(0, \frac{7\pi}{4})$.

Dividimos nossa análise nos seguintes casos: $c > 1$, $0 < c < 1$ e $c < 0$. Analisando a parte linear do campo em cada uma das singularidades obtemos as seguintes figuras

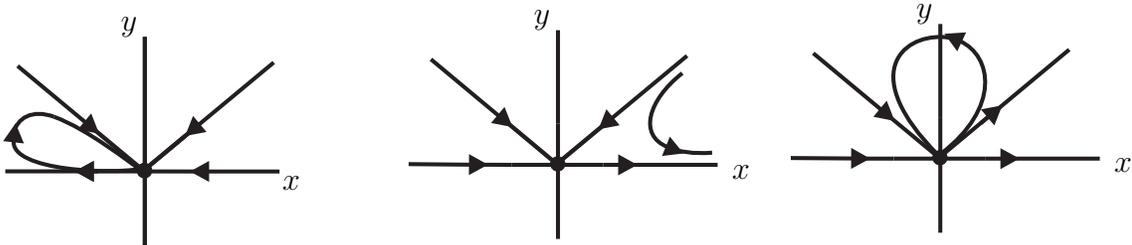


Figura 13.12: Retratos na parte infinita do campo com $c > 1$, $0 < c < 1$ e $c < 0$, respectivamente.

Vamos partir agora para analisar as cartas V_1 e V_2 . Na carta V_1 temos o seguinte campo compactificado

$$\begin{cases} \dot{y} = y - yz^2 + z^2 + cyz - cy \\ \dot{z} = z - z^3. \end{cases} \quad (13.15)$$

O único ponto singular é a origem se $c \neq 1$. Se colocarmos $c = 1$, temos

$$\begin{cases} \dot{y} = -yz^2 + z^2 + yz \\ \dot{z} = z - z^3. \end{cases} \quad (13.16)$$

Como nos casos anteriores temos que a curva $z = 0$ é constituído de singu-

laridades.

Estamos interessados na singularidade $(0, 0)$ do campo (13.15). Vamos realizar um estudo da parte linear

$$\begin{bmatrix} 1 - c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $c < 1$ temos que a origem é um nó instável e se $c > 1$ é uma sela.

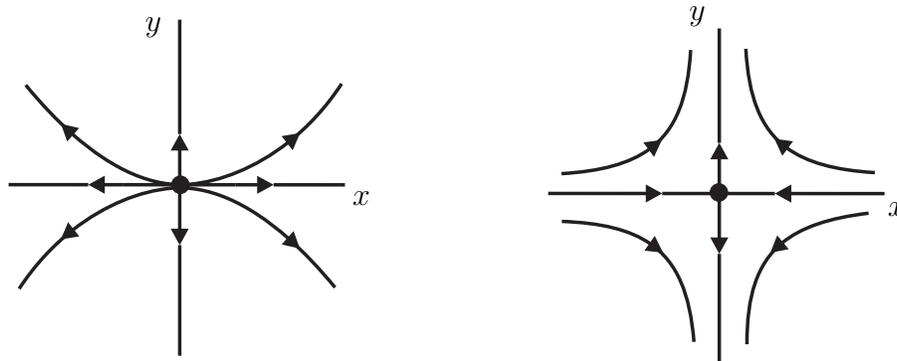


Figura 13.13: Retratos na parte infinita do campo com $c < 1$ e $c > 1$, respectivamente.

Na carta V_2 temos o campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{x} = xz^2 - cxz - cx^2 + x^2 - z^2 \\ \dot{z} = z^3 - cz^2 - cxz. \end{cases} \quad (13.17)$$

Se $c \neq 1$ temos somente a origem como ponto singular. Para $c = 1$ temos o seguinte campo

$$\begin{cases} \dot{x} = xz^2 - xz - z^2 \\ \dot{z} = z^3 - z^2 - xz. \end{cases} \quad (13.18)$$

Vamos estudar a parte linear da singularidade $(0, 0)$ do campo (13.17)

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como nos casos anteriores, temos que essa singularidade é degenerada. Utilizaremos de blow-ups polares.

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ z = r \sin t \end{cases}$$

Donde obtemos o seguinte campo $X(r, t) = \frac{1}{2}(r^2 + r \cos t - 2br \cos t - r^2 \cos 2t + r \cos 3t - 2cr \sin t, \sin t - \sin 3t)$.

Cujas singularidades são $(0, 0), (0, \pi), (0, \frac{\pi}{4}), (0, \frac{3\pi}{4}), (0, \frac{5\pi}{4})$ e $(0, \frac{7\pi}{4})$. Considerando a parte linear desse campo nessas singularidades teremos 3 casos a serem considerados $c > 1, 0 < c < 1$ e $c < 0$.

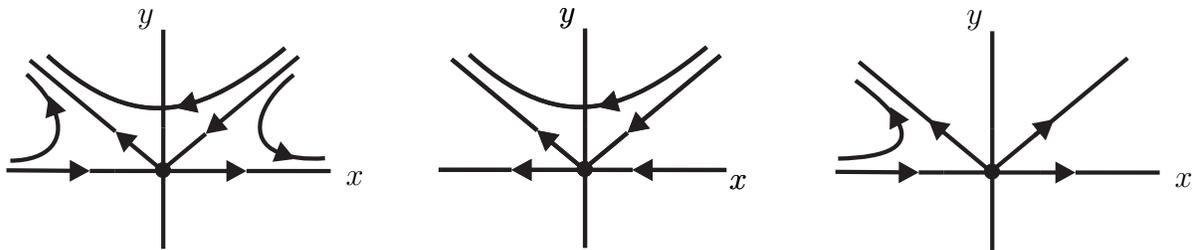


Figura 13.14: Retratos na parte infinita do campo com $0 < c < 1, c > 1$ e $c < 0$, respectivamente.

Para este caso só nos falta analisarmos o caso onde o infinito é constituído de singularidades. Tratemos deste caso posteriormente.

Vamos partir para a análise do caso (3). Novamente efetuaremos os mesmos passos que nos casos anteriores. Estamos agora tratando do seguinte campo $X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + cy + exy)$, onde $c \neq \pm e$.

Consideremos inicialmente a carta U_1 , onde temos o seguinte campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{y} = z^2 + cyz + ey - y + yz^2 \\ \dot{z} = -z + z^3 \end{cases} \quad (13.19)$$

Teremos a origem como única singularidade caso $e \neq 1$. Se $e = 1$ teremos o campo

$$\begin{cases} \dot{y} = z^2 + cyz + yz^2 \\ \dot{z} = -z + z^3. \end{cases} \quad (13.20)$$

Daí teremos que $z = 0$ é linha de singularidades. Como nos casos anteriores, consideremos esse caso posteriormente.

Partiremos para a análise da parte linear da origem do campo (13.19). Temos,

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} e - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donde segue que $(0, 0)$ é uma sela se $e > 1$ e um nó estável se $e < 1$.

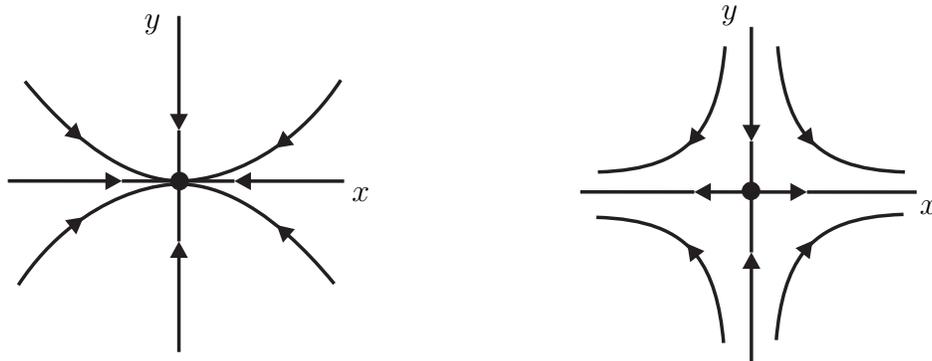


Figura 13.15: Retratos na parte infinita do campo com $e < 1$ e $e > 1$, respectivamente.

Partimos agora para a análise da carta U_2 . Temos o campo compactificado:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - z^2 - xz^2 - cxz - ex^2 \\ \dot{z} = -z^3 - cz^2 - exz \end{cases} \quad (13.21)$$

Temos somente a origem como ponto singular se $e \neq 1$. Se $e = 1$ temos o campo

$$\begin{cases} \dot{x} = -z^2 - xz^2 - cxz \\ \dot{z} = -z^3 - cz^2 - xz. \end{cases} \quad (13.22)$$

Observe que a reta $z = 0$, como nos casos anteriores, é composta de singularidades. Analisaremos esse caso futuramente.

Vamos estudar a dinâmica da origem nesse campo através da análise da parte linear do campo (13.21). Temos

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde segue que a origem é um ponto singular degenerado. Seguindo o procedimento dos casos anteriores, vamos aplicar blow-up polar na tentativa de entendermos a dinâmica neste ponto.

Estamos supondo que $e \neq 1$. Consideremos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

Obtemos daí o seguinte campo

$$X(r,t) = \frac{1}{2}(r(-r + \cos t - 2e \cos t + r \cos 2t + \cos 3t - 2c \sin t), \sin t - \sin 3t).$$

Cujas singularidades são $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(0,\frac{\pi}{4})$, $(0,\frac{3\pi}{4})$, $(0,\frac{5\pi}{4})$ e $(0,\frac{7\pi}{4})$.

Analisando a parte linear deste campo em cada uma das singularidades, e dividindo nossa análise nos seguintes casos:

- (a) $e > 1, c + e < 0$ e $e - c > 0$;
 - (b) $e > 1, c + e < 0$ e $e - c < 0$;
 - (c) $e > 1, c + e > 0$ e $e - c > 0$;
 - (d) $e > 1, c + e > 0$ e $e - c < 0$;
 - (e) $e < 1, c + e < 0$ e $e - c > 0$;
-

(f) $e < 1, c + e < 0$ e $e - c < 0$;

(g) $e < 1, c + e > 0$ e $e - c > 0$;

(h) $e < 1, c + e > 0$ e $e - c < 0$.

Obtemos assim as figuras a seguir.

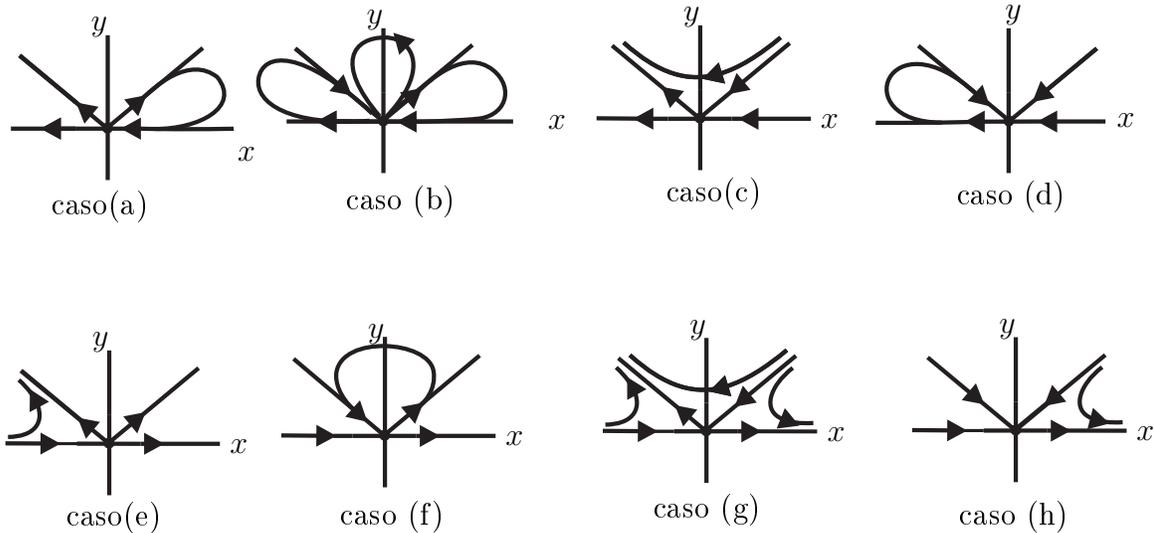


Figura 13.16: Retratos na parte infinita do campo com os referidos casos.

Estudemos agora a dinâmica nas cartas V_1 e V_2 . Na carta V_1 temos o seguinte campo compactificado

$$\begin{cases} \dot{y} = y - yz^2 + z^2 + cyz - ey \\ \dot{z} = z - z^3. \end{cases} \quad (13.23)$$

Temos que a origem é a única singularidade se $e \neq 1$. Colocando $e = 1$, obtemos o campo

$$\begin{cases} \dot{y} = -yz^2 + z^2 + cyz \\ \dot{z} = z - z^3. \end{cases} \quad (13.24)$$

Como já vimos, temos que a curva $z = 0$ é constituído de singularidades. Vamos analisar a parte linear da origem do campo (13.23)

$$\begin{bmatrix} 1 - e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $e < 1$ temos que a origem é um nó instável e se $e > 1$ é uma sela.

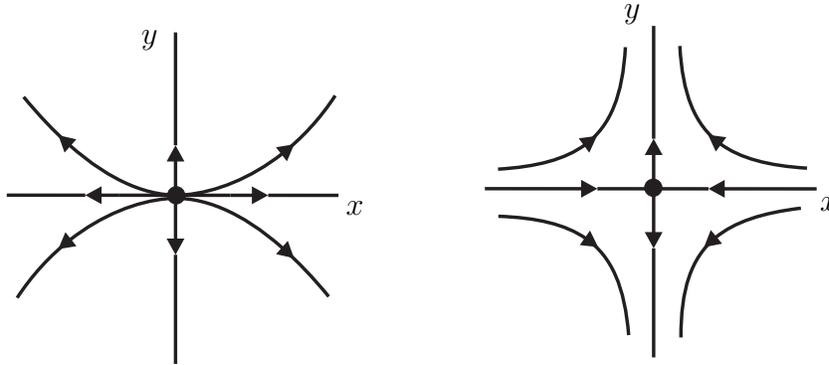


Figura 13.17: Retratos na parte infinita do campo com $e < 1$ e $e > 1$, respectivamente.

Na carta V_2 temos o seguinte campo:

$$\begin{cases} \dot{x} = xz^2 - cxz - ex^2 + x^2 - z^2 \\ \dot{z} = z^3 - cz^2 - exz. \end{cases} \quad (13.25)$$

Se $e \neq 1$ temos somente a origem como ponto singular. Para $e = 1$ temos o campo:

$$\begin{cases} \dot{x} = xz^2 - cxz - z^2 \\ \dot{z} = z^3 - cz^2 - xz. \end{cases} \quad (13.26)$$

Analisemos a parte linear da singularidade $(0,0)$ do campo (13.25)

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que essa singularidade também é degenerada. Utilizaremos blow-up polar para tentar entender a dinâmica neste ponto.

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ z = r \sin t \end{cases}$$

Obtemos assim o seguinte campo $X(r, t) = \frac{1}{2}(r(r + \cos t - 2e \cos t - r \cos 2t + \cos 3t - 2c \sin t), \sin t - \sin 3t)$.

Cujas singularidades são $(0, 0)$, $(0, \pi)$, $(0, \frac{\pi}{4})$, $(0, \frac{3\pi}{4})$, $(0, \frac{5\pi}{4})$ e $(0, \frac{7\pi}{4})$. Considerando a parte linear desse campo e avaliando nessas singularidades teremos os seguintes casos a serem considerados:

- (a) $e > 1, c + e < 0$ e $e - c > 0$;
- (b) $e > 1, c + e < 0$ e $e - c < 0$;
- (c) $e > 1, c + e > 0$ e $e - c > 0$;
- (d) $e > 1, c + e > 0$ e $e - c < 0$;
- (e) $e < 1, c + e < 0$ e $e - c > 0$;
- (f) $e < 1, c + e < 0$ e $e - c < 0$;
- (g) $e < 1, c + e > 0$ e $e - c > 0$;
- (h) $e < 1, c + e > 0$ e $e - c < 0$.

E daí obtemos a Figura 13.18.

Para completar este caso só nos resta analisar o caso onde o infinito é constituído de singularidades. Vamos considerar este caso posteriormente.

13.3 Campos com Infinitos Pontos Singulares na Parte Infinita

Vimos que na análise de singularidades realizadas anteriormente em alguns campos o “infinito” é constituído de singularidades as quais não são isoladas. Vamos agora realizar um estudo desses campos, obtendo um retrato de fase local para cada um dos campos.

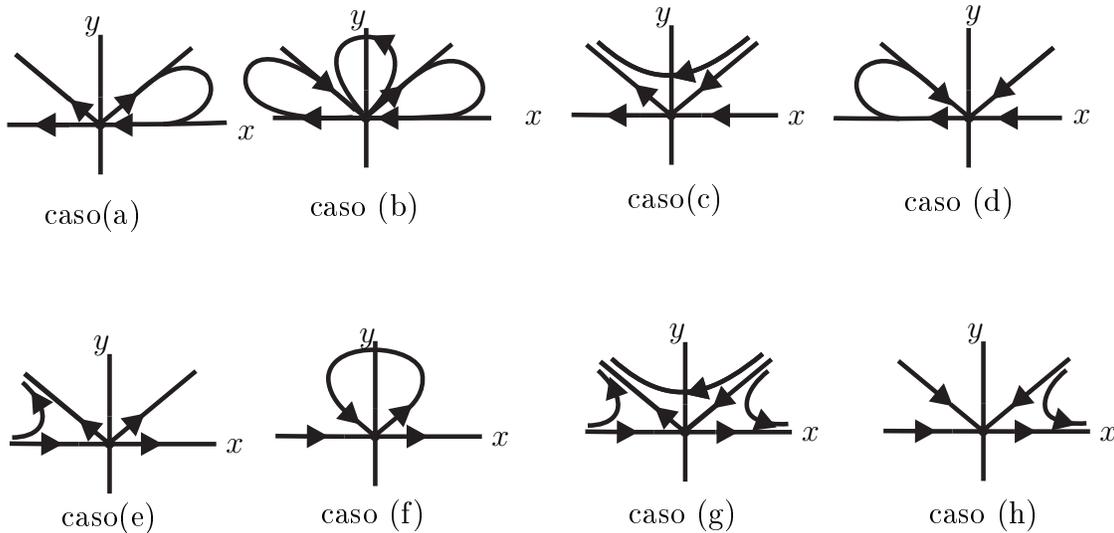


Figura 13.18: Retratos na parte infinita do campo com os referidos casos.

Inicialmente tratemos do caso (1), isto é, do campo $X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + by - bxy)$. Vimos que o “infinito”, isto é, a linha $z = 0$ constituída de pontos singulares, se $c = -1$. Daí teremos o seguinte campo $X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + y + xy)$. O campo compactificado nas cartas U_1 e U_2 são expressos nas equações (13.4) e (13.6), respectivamente.

Estamos interessados agora em compreender a dinâmica próximo a reta $z = 0$, a qual como sabemos é constituída de singularidades. Para termos um entendimento total da dinâmica próximo a esses pontos vamos analisar o campo nas cartas U_1, U_2, V_1 e V_2 . É preciso termos em mente onde estão localizadas as cartas as quais estamos analisando.

Vamos considerar inicialmente a carta U_1 . O comportamento próximo da reta $z = 0$ será dado pela análise da parte linear do campo na carta U_1 nos pontos do tipo $(y_0, 0)$. Assim, temos

$$J(y_0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -y_0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores são: 0 e -1 . Além disso, a direção associada ao autovalor nulo é $z = 0$, e a direção associada ao autovalor -1 são as curvas do tipo $z = \frac{1}{y_0}y$.

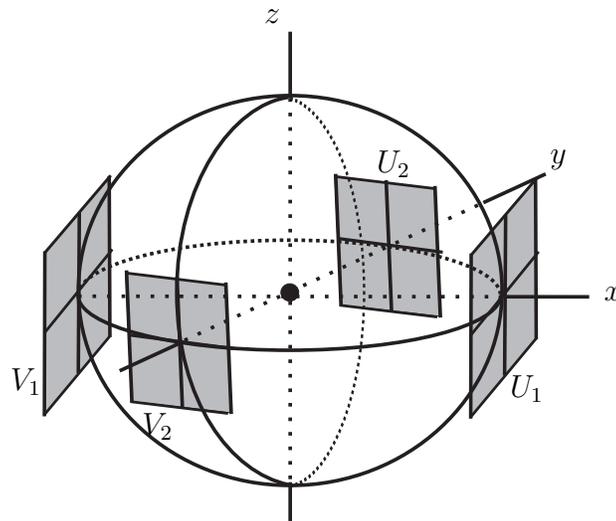


Figura 13.19: Cartas U_1, U_2, V_1 e V_2 .

Donde concluimos que a dinâmica próximo a esta reta de singularidades é dada pela Figura 13.20.

Analisemos agora a carta V_1 . A expressão do campo compactificado é dada por (13.8). Repetindo o mesmo procedimento da carta U_1 , temos que

$$J(y_0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -y_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O que nos remete a seguinte Figura 13.20.

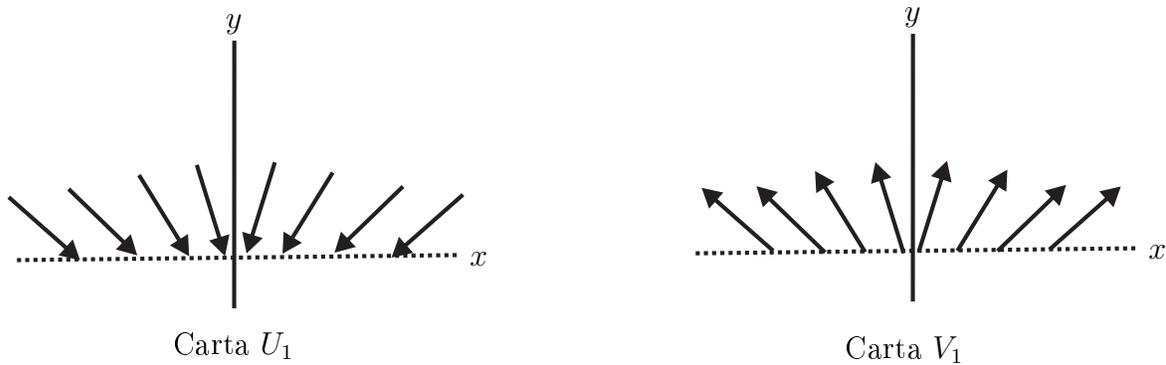


Figura 13.20:

Nos resta analisarmos somente a origem das cartas U_2 e V_2 .

Observando as equações do blow-up obtidas em (13.8) e (13.10), temos que a dinâmica na origem das cartas U_2 e V_2 é dada pela Figura 13.22.

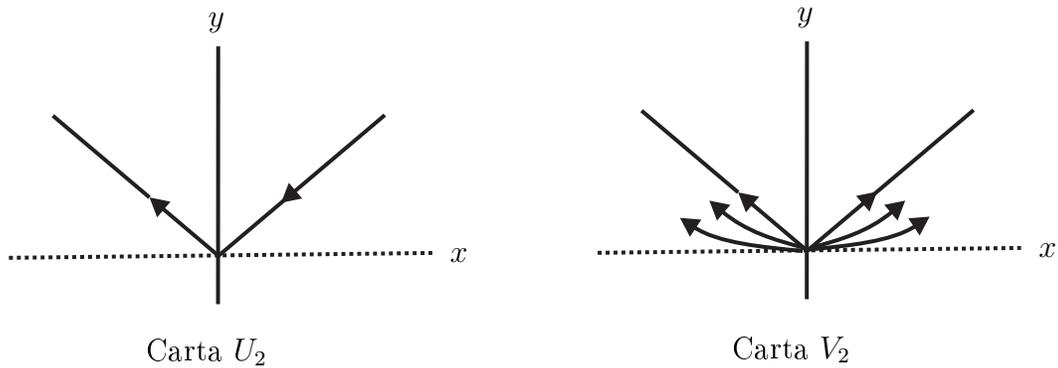


Figura 13.21:

Assim, obtemos o retrato de fase local dado na Figura 13.22 para este caso.

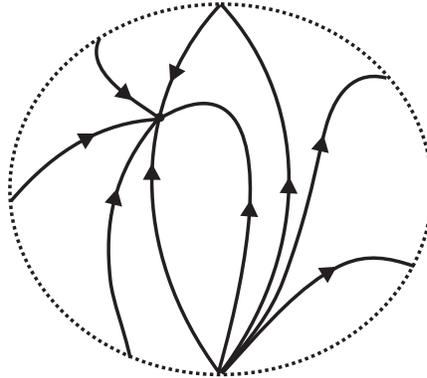


Figura 13.22: Retrato de fase global para o caso (1) com $c = -1$.

Vamos agora ao caso (2). Como no caso (1), sabemos que o “infinito”, isto é, a linha $z = 0$ constituída de pontos singulares, se $c = 1$. Estaremos estudando aqui o campo $X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + y + xy)$. O campo compactificado nas cartas U_1 e U_2 são expressos nas equações (13.12) e (13.14), respectivamente.

Como no caso (1), estamos interessados em compreender a dinâmica próximo a reta $z = 0$. Vamos novamente analisar o campo nas cartas U_1, U_2, V_1 e V_2 .

Vamos considerar inicialmente a carta U_1 . O comportamento próximo da reta $z = 0$ será dado pela análise da parte linear do campo na carta U_1 dos pontos do tipo $(y_0, 0)$. Assim, temos

$$J(y_0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & y_0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores são: 0 e -1 . Além disso, a direção associada ao autovalor nulo é $z = 0$, e a direção associada ao autovalor -1 são as curvas do tipo $z = -\frac{1}{y_0}y$.

Donde concluímos que a dinâmica próximo a esta reta de singularidades é dada pela Figura 13.23.

Vamos a carta V_1 . A expressão do campo nesta carta é dada por (13.16). Repetindo o mesmo procedimento anterior, temos

$$J(y_0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & y_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O que nos remete a Figura 13.23.

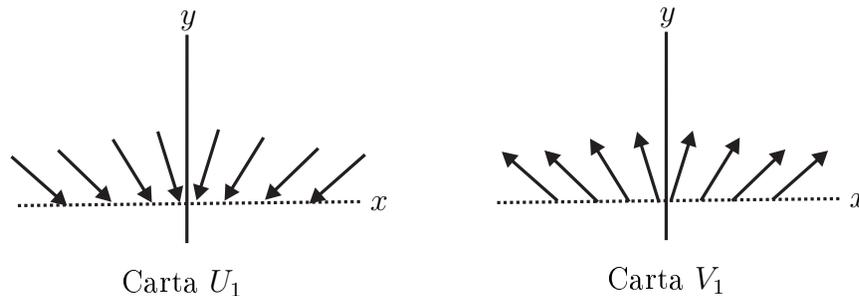


Figura 13.23:

Nos resta analisarmos somente a origem das cartas U_2 e V_2 .

Observando as equações do blow-up, temos que a dinâmica na origem das cartas U_2 e V_2 é dada pela figura 13.3 respectivamente.

Assim, obtemos o retrato de fase local dado na Figura 13.25 para este caso.

Vamos finalmente ao caso (3). Sabemos que reta $z = 0$ constituída de pontos singulares, se $e = 1$. Estaremos estudando aqui o campo $X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + cy + exy)$. O campo compactificado nas cartas U_1 e U_2 são expressos

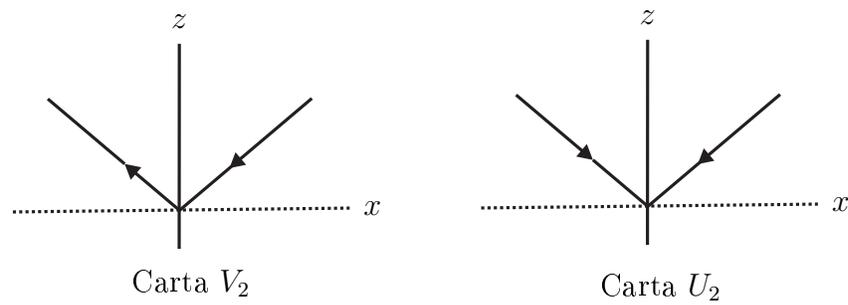
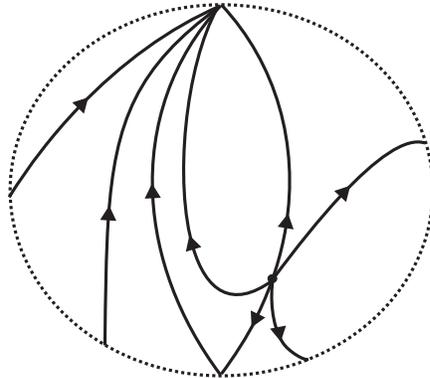


Figura 13.24:

Figura 13.25: Retrato de fase global para o caso (2) com $c = 1$.

nas equações (13.20) e (13.22), respectivamente.

Repetiremos aqui a mesma análise realizada nos casos anteriores. Vamos analisar o campo nas cartas U_1, U_2, V_1 e V_2 .

Consideremos inicialmente a carta U_1 . O comportamento próximo da reta $z = 0$ será dado pela análise da parte linear do campo na carta U_1 dos pontos do tipo $(y_0, 0)$. Assim, temos

$$J(y_0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & cy_0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores são: 0 e -1 . Além disso, a direção associada ao autovalor nulo é $z = 0$, e a direção associada ao autovalor -1 são as curvas do tipo $z = -\frac{1}{cy_0}y$ se $c \neq 0$ e, se $c = 0$ temos que esse autovalor estará associado a direção $y = 0$. Note que, em ambos os casos teremos a mesma dinâmica e,

como estamos interessados na estrutura topológica não necessitamos considerar dois casos.

A expressão do campo na carta V_1 é dada por (13.24). Repetindo o mesmo procedimento anterior, temos

$$J(y_0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & cy_0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donde concluímos que a dinâmica próximo a estas retas de singularidades é dada pela Figura 13.26.

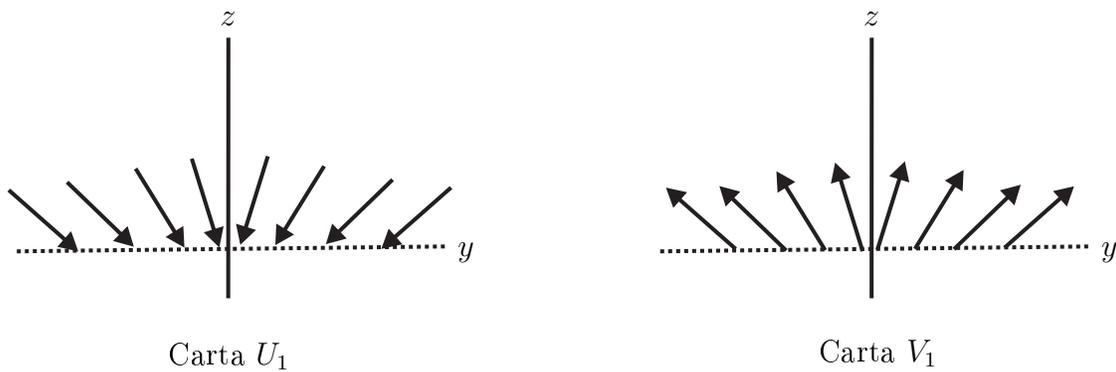


Figura 13.26: Dinâmica próximo a reta de singularidades nas cartas U_1 e V_1 .

Nos resta analisarmos somente a origem das cartas U_2 e V_2 . Observando as equações do blow-up obtidas anteriormente, temos que a dinâmica na origem das cartas U_2 e V_2 é dada pelas figuras 13.27 e 13.28, respectivamente. Observe que neste caso surgem 3 possíveis retratos de acordo com a variação do parâmetro c .

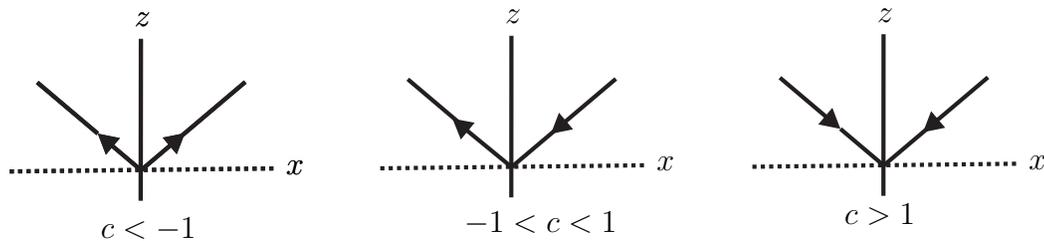


Figura 13.27: Retratos com relação à carta U_2 .

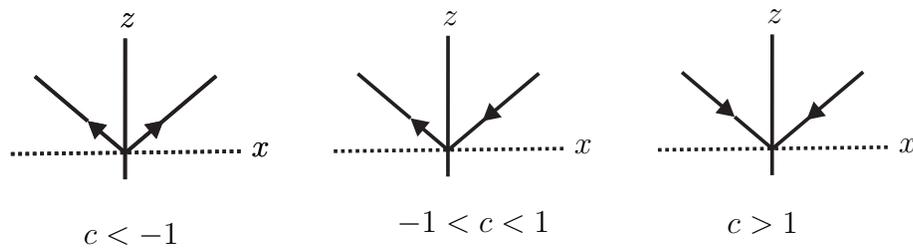


Figura 13.28: Retratos com relação à carta V_2 .

Assim, reunindo todas essas informações segue na Figura 13.29 os seguintes retratos de fase local no disco de Poincaré para este caso.

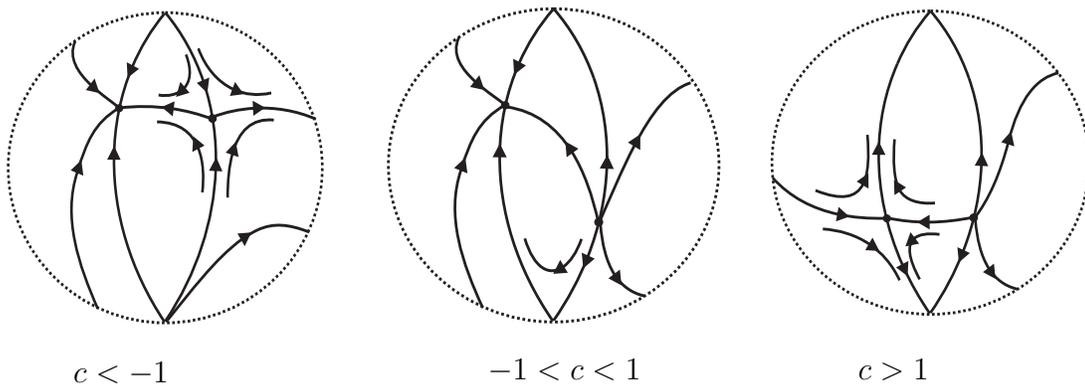


Figura 13.29: Retratos de fase global para o caso (3).

13.4 Retratos de Fase Local

Objetivamos esboçar agora todos os possíveis retratos de fase local no disco de Poincaré da família de campos

$$X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + cy + exy).$$

Da mesma forma que fizemos na análise de singularidades, vamos expor os retratos de fase local dividindo-os nos casos (1), (2) e (3). Nesta fase vamos considerar as informações obtidas até aqui nos estudos anteriores. Nessa seção temos o seguinte resultado

Teorema 13.4.1. *Os possíveis retratos de fase local do campo $X(x, y) = (x^2 -$*

$1, 1 + cy + exy$) são expressos na Figura 13.30.

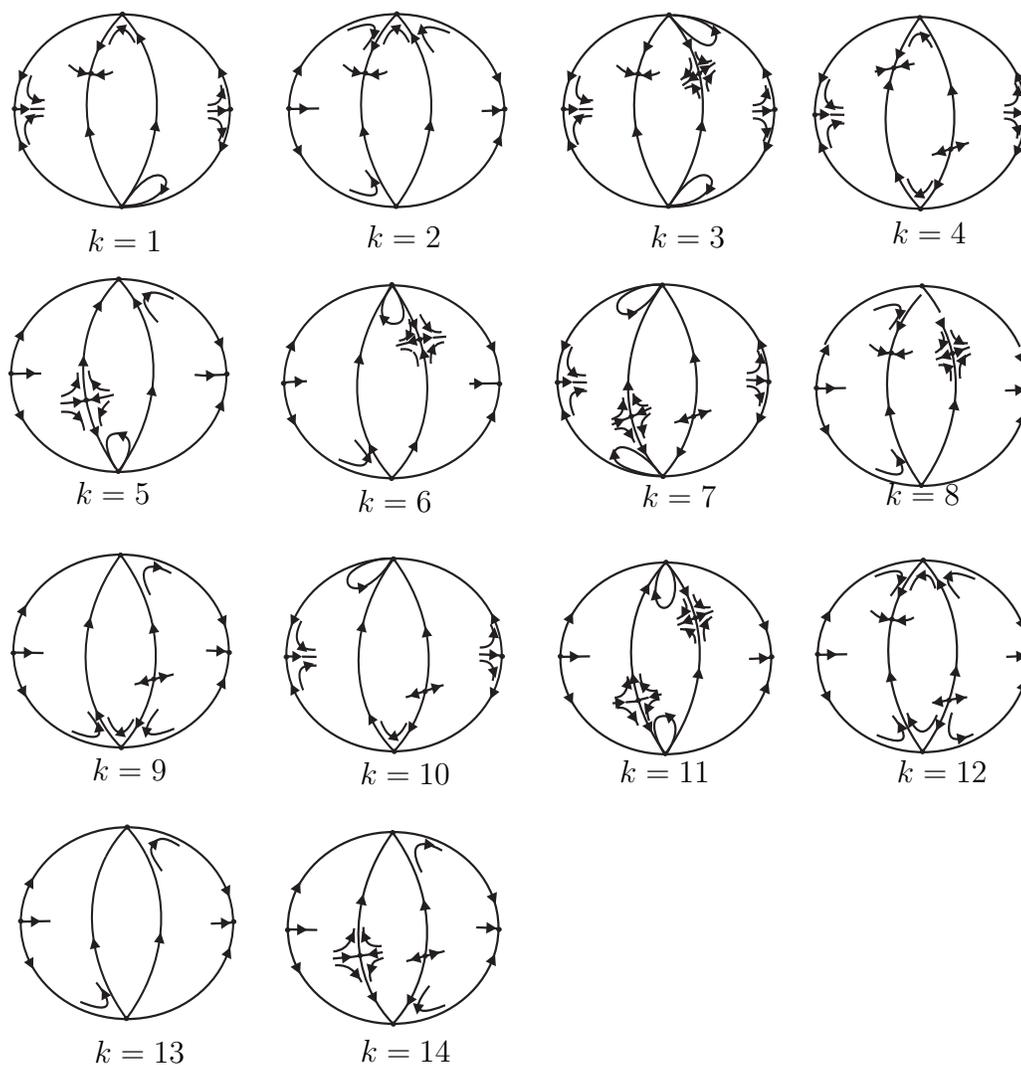


Figura 13.30: Os 14 retratos de fase local.

Demonstração A demonstração segue diretamente da observação das informações obtidas no estudo de singularidades.



13.5 Retratos de Fase Global

Nesta seção vamos exibir todos os possíveis retratos de fase global da família de campos $X(x, y) = (x^2 - 1, 1 + cy + exy)$.

Antes de esboçarmos os retratos de fase vamos fazer algumas observações com relação ao espaço de parâmetros (c, e) .

Considere a Figura 13.31, a qual representa o espaço de parâmetros (c, e) decomposto em quatro regiões.

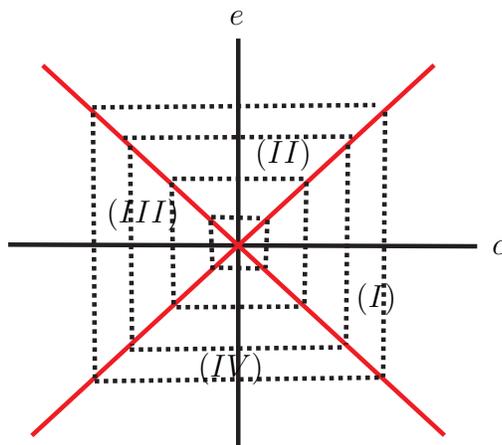


Figura 13.31: As quatro regiões que decompõem o espaço de parâmetros.

As retas $c = e$ e $c = -e$ (em vermelho na figura 13.31) separam o plano (c, e) em quatro regiões: (I) , (II) , (III) e (IV) . Podemos caracterizar essas regiões através dos seguintes conjuntos:

$$(I) = \{(c, e); -c < e < c \text{ e } c > 0\}. \quad (13.27)$$

$$(II) = \{(c, e); -e < c < e \text{ e } e > 0\}. \quad (13.28)$$

$$(III) = \{(c, e); c < e < -c \text{ e } c < 0\}. \quad (13.29)$$

$$(IV) = \{(c, e); e < c < -e \text{ e } e < 0\}. \quad (13.30)$$

Até o momento possuímos somente as informações referentes a dinâmica local dos possíveis retratos de fase. Para podermos esboçar os retratos global precisaremos levar em conta a dinâmica local e, utilizaremos o Teorema de Neumann para obter o número mínimo de retratos de fase global.

Cada um dos retratos de fase local nos fornece somente um retrato de fase global, observando apenas a estrutura topológica das singularidades em cada um dos casos.

Apresentemos agora o resultado referente a dinâmica global da família de campos que estamos estudando.

Teorema 13.5.1. *Os possíveis retratos de fase no disco de Poincaré da família*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 + cy + exy \end{cases} \quad (13.31)$$

são dados na Figura 13.33.

Esse resultado pode ser resumido de uma maneira mais didática através da Figura 13.32 que representa o espaço de parâmetros. Em cada uma dessas regiões ocorre somente uma das figuras apresentadas no teorema 13.5.1.

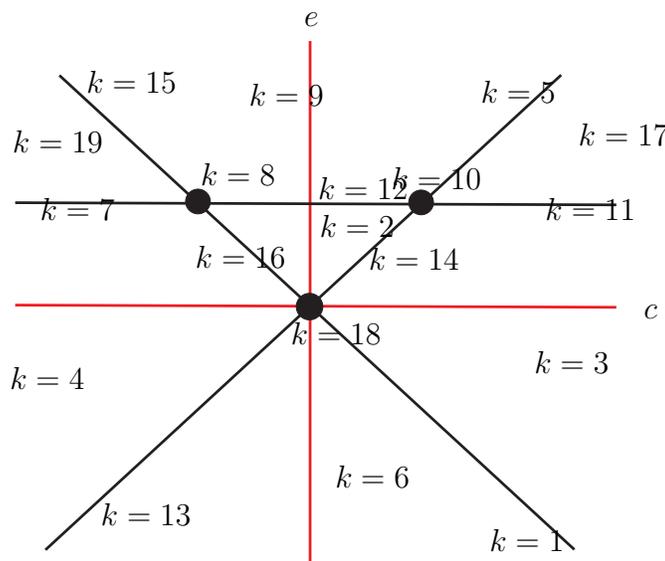


Figura 13.32: Os possíveis retratos de fase que podem ocorrer em cada uma das regiões do espaço de fase.

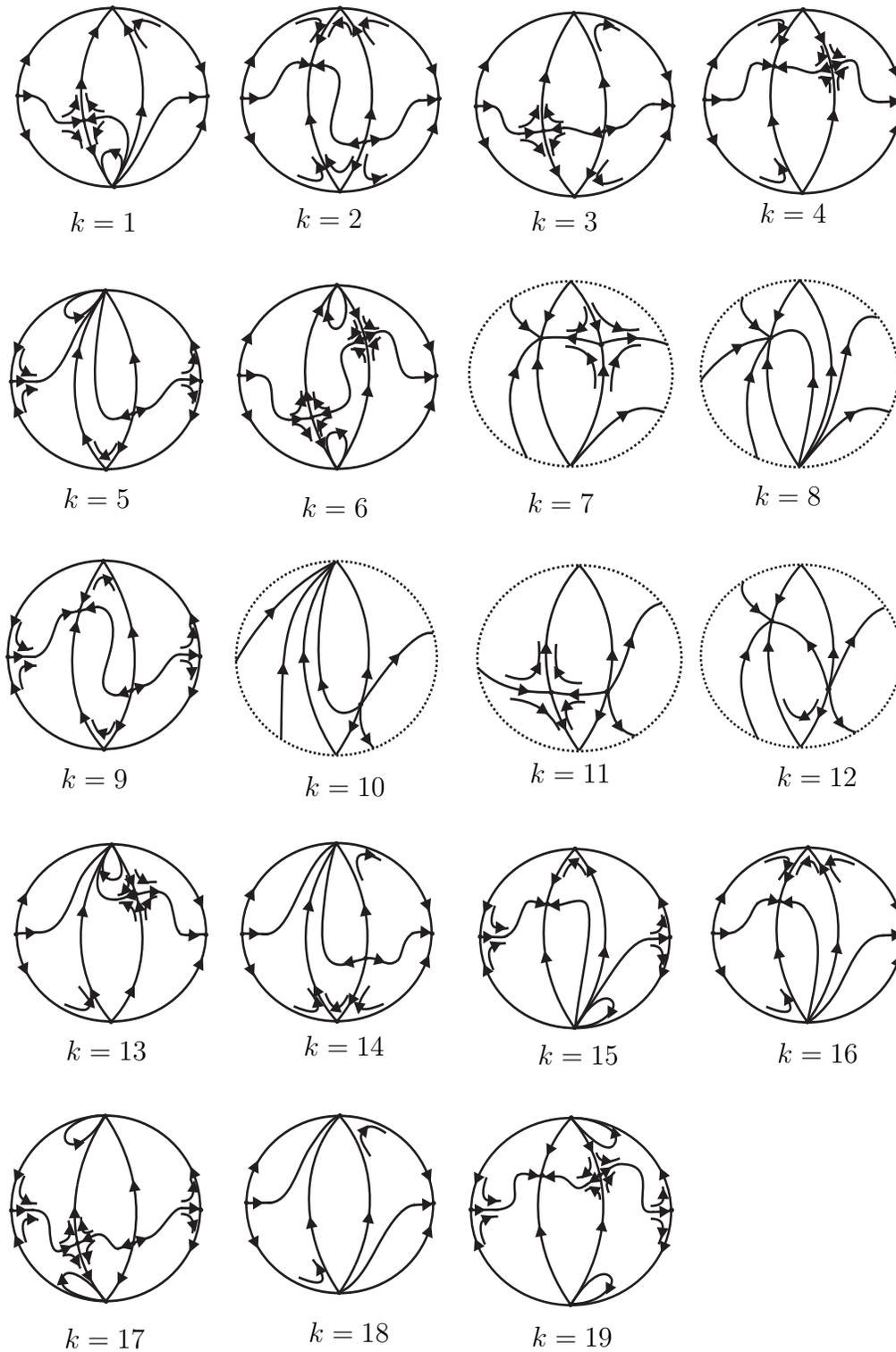


Figura 13.33: Os retratos de fase global.

Capítulo 14

Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + x^2 + exy)$.

Vamos considerar neste capítulo a análise dos campos de vetores da seguinte família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + x^2 + exy)$. Exporemos aqui todos os possíveis retratos de fase global desta família.

14.1 Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré

Explicaremos nesta seção os retratos de fase no disco de Poincaré do campo em consideração. O resultado principal será condensado no seguinte teorema

Teorema 14.1.1. *Considere a família de campos $X(x, y) = (x^2 - 1, a + bx + cy + x^2 + exy)$, temos que os possíveis retratos de fase global são topologicamente equivalentes a um dos retratos apresentados nas Figuras 14.1, 14.2 e 14.3.*

Demonstração A demonstração deste resultado segue exatamente as mesmas etapas das realizadas nos capítulos anteriores, por isso não a faremos aqui. ■

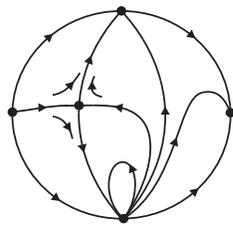


figura 1

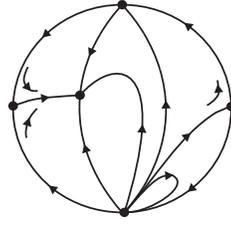


figura 2

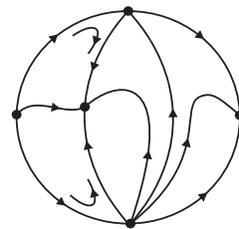


figura 3

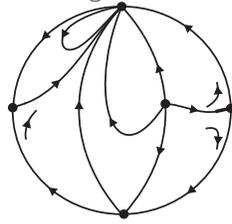


figura 4

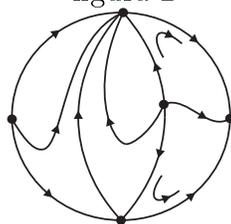


figura 5

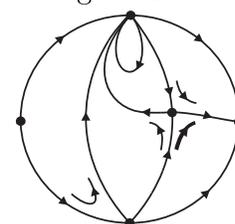


figura 6

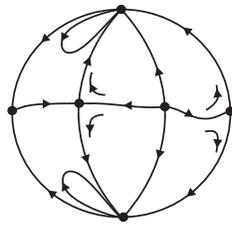


figura 7

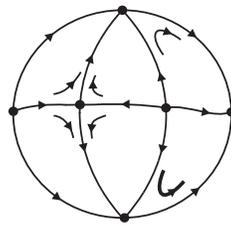


figura 8

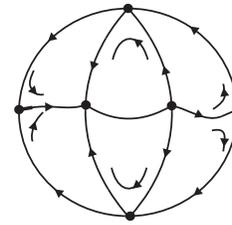


figura 9

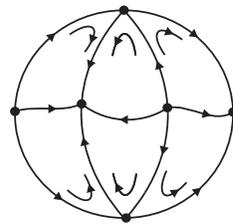


figura 10

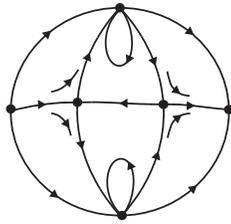


figura 11

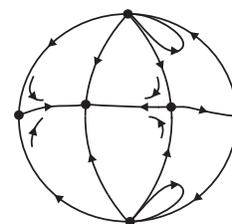


figura 12

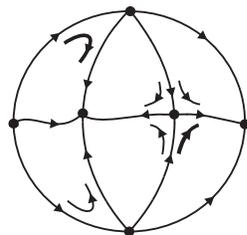


figura 13

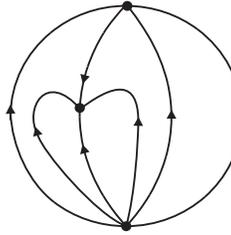


figura 14

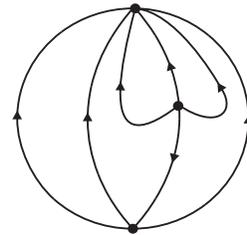


figura 15

Figura 14.1: Os 15 primeiros retratos de fase global no disco de Poincaré.

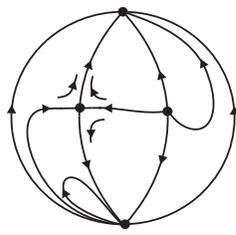


figura 16

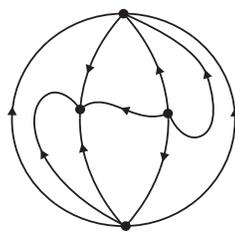


figura 17

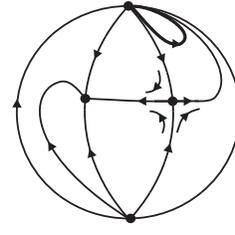


figura 18

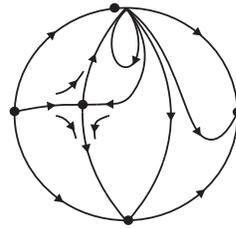


figura 19

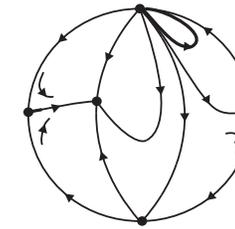


figura 20

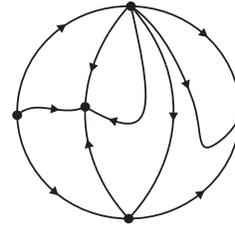


figura 21

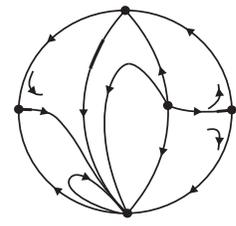


figura 22

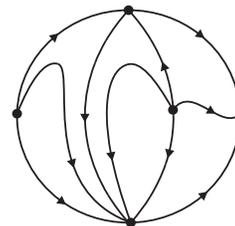


figura 23

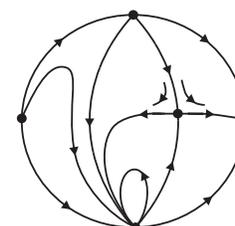


figura 24

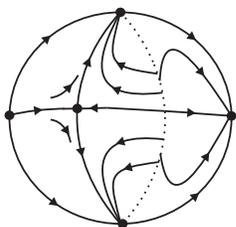


figura 25

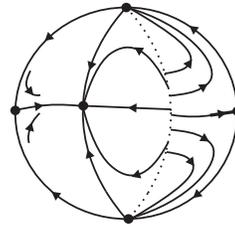


figura 26

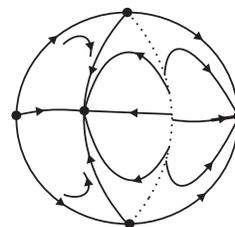


figura 27

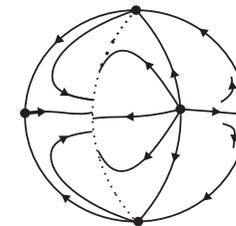


figura 28

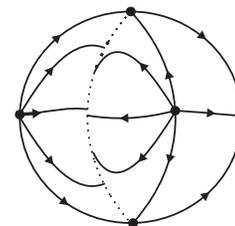


figura 29

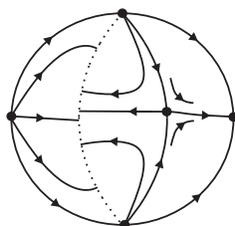


figura 30

Figura 14.2: Os 15 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré.

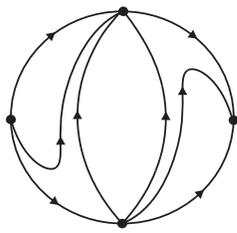


figura 31

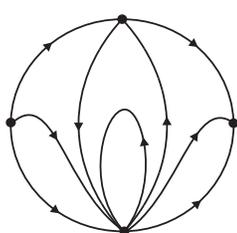


figura 32

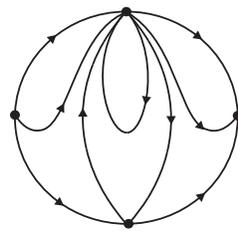


figura 33

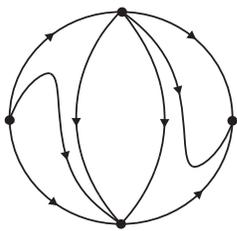


figura 34

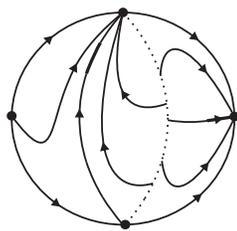


figura 35

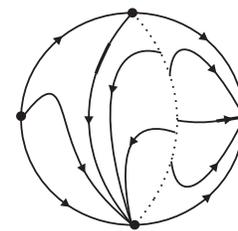


figura 36

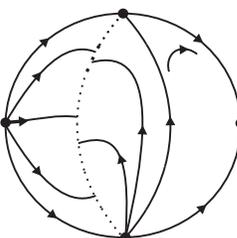


figura 37

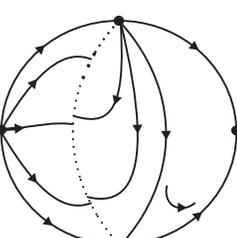


figura 38

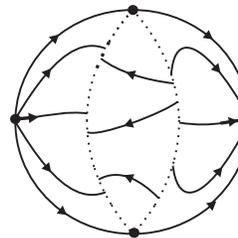


figura 39

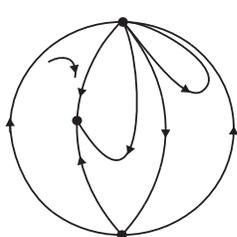


figura 40

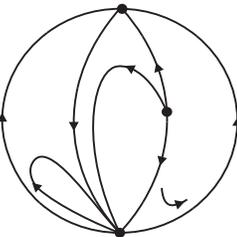


figura 41

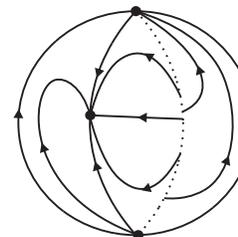


figura 42

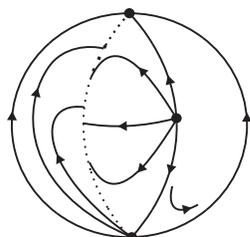


figura 43

Figura 14.3: Os 13 últimos retratos de fase global no disco de Poincaré.

Capítulo 15

Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + x + cy + exy)$.

Analogamente ao realizado no capítulo anterior, consideremos aqui a análise dos campos de vetores da família $X(x, y) = (x^2 - 1, a + x + cy + exy)$.

Explicitaremos todos os possíveis retratos de fase global desta família.

15.1 Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré

Vamos exibir nesta seção os retratos de fase global do campo $X(x, y) = (x^2 - 1, a + x + cy + exy)$. Resumiremos o resultado principal no seguinte teorema

Teorema 15.1.1. *Considere a família de campos $X(x, y) = (x^2 - 1, a + x + cy + exy)$, temos que os possíveis retratos de fase global são topologicamente equivalentes a um dos retratos nas Figuras 15.1, 15.2 e 15.3.*

Demonstração Como no capítulo anterior não apresentaremos a demonstração deste resultado, pois esta segue analogamente aos casos anteriores. ■

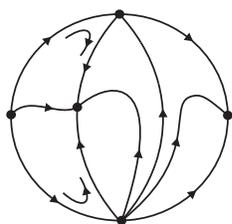


figura 1

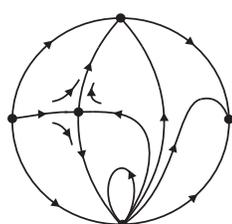


figura 2

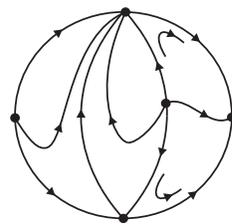


figura 3

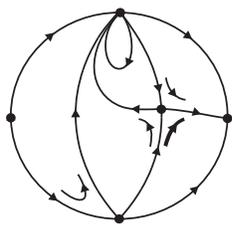


figura 4

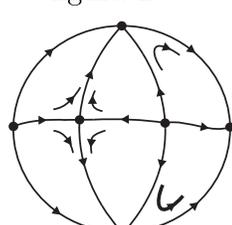


figura 5

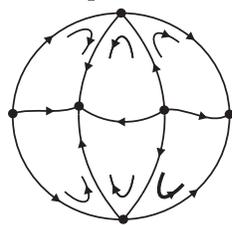


figura 6

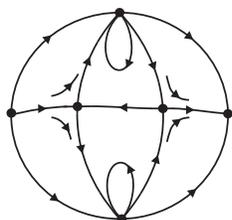


figura 7

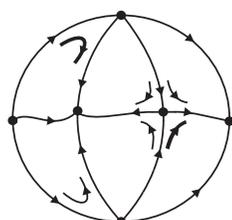


figura 8

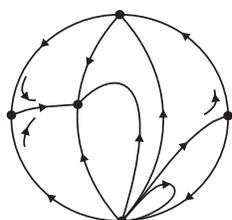


figura 9

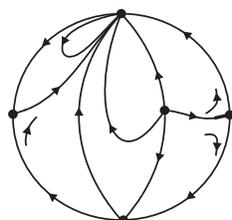


figura 10

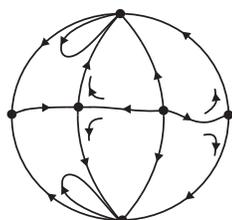


figura 11

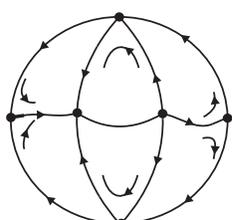


figura 12

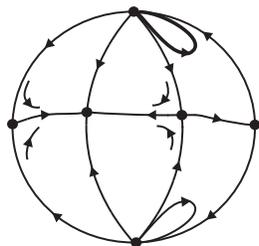


figura 13

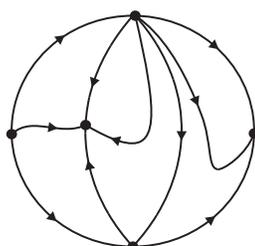


figura 14

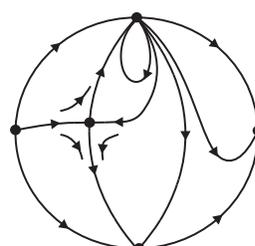


figura 15

Figura 15.1: Os 15 primeiros retratos de fase global no disco de Poincaré.

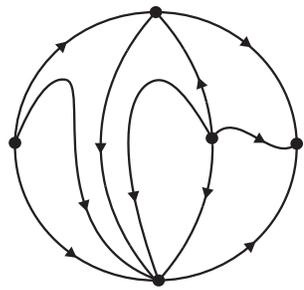


figura 16

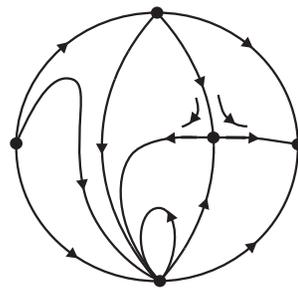


figura 17

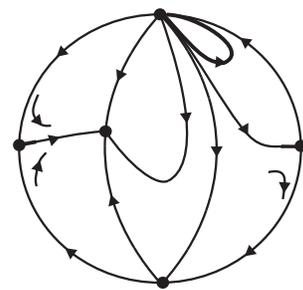


figura 18

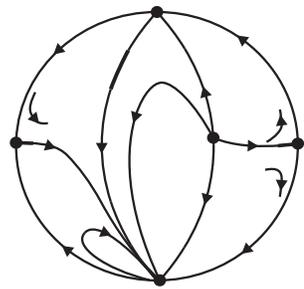


figura 19

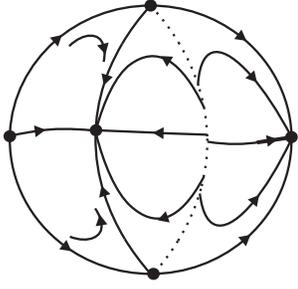


figura 20

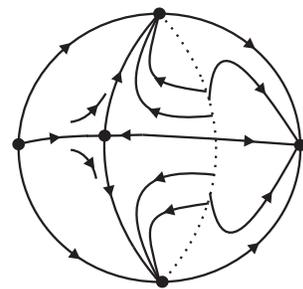


figura 21

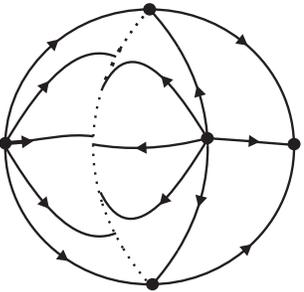


figura 22

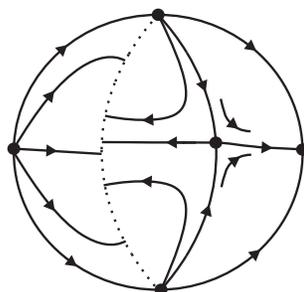


figura 23

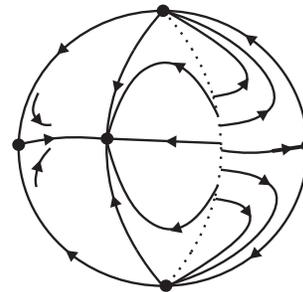


figura 24

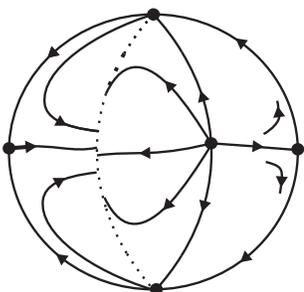


figura 25

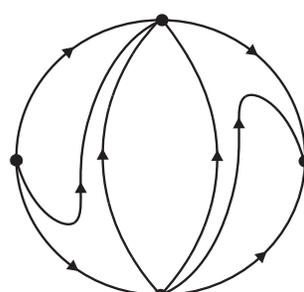


figura 26

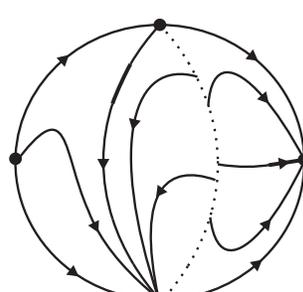


figura 27

Figura 15.2: Os 12 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré.

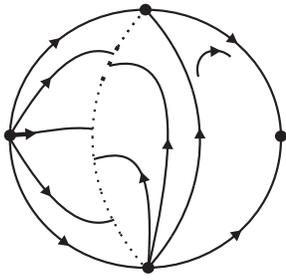


figura 28

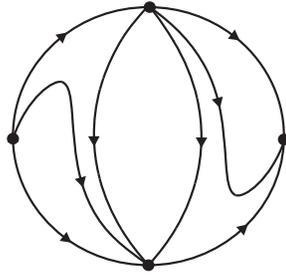


figura 29

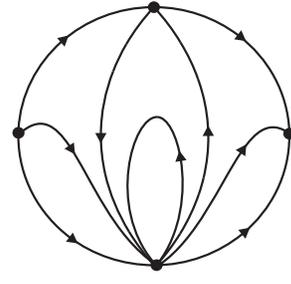


figura 30

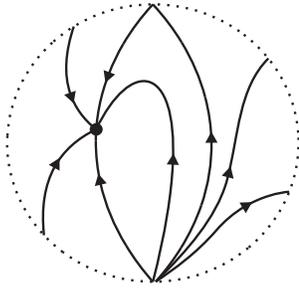


figura 31

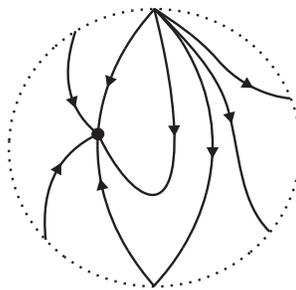


figura 32

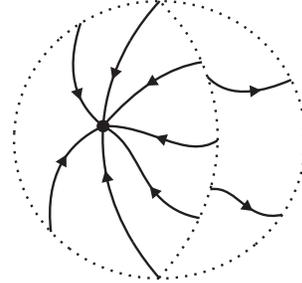


figura 33

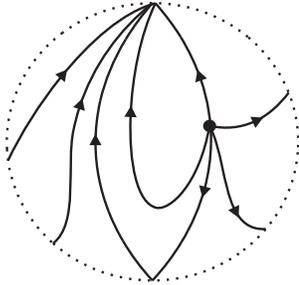


figura 34

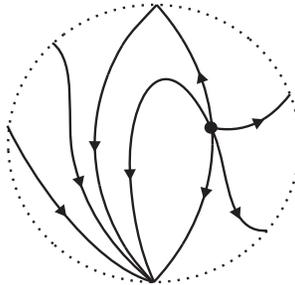


figura 35

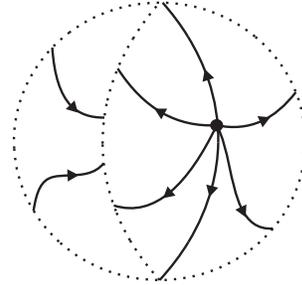


figura 36

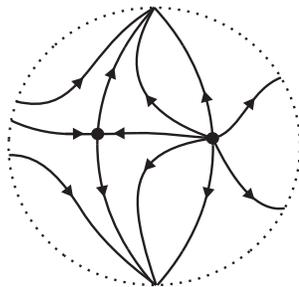


figura 37

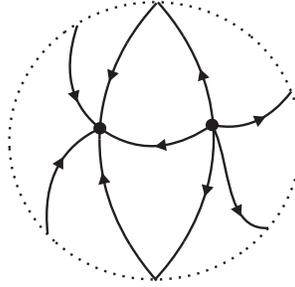


figura 38

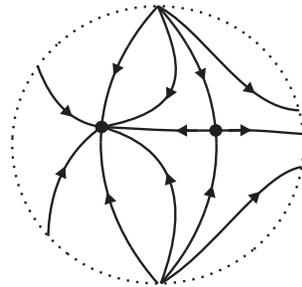


figura 39

Figura 15.3: Os 12 últimos retratos de fase global no disco de Poincaré.

Capítulo 16

Estudo da Família $X(x, y) = (x^2 - 1, cy + exy)$.

Como procedemos nos últimos capítulos, vamos tratar da análise de estrutura topológica da família $X(x, y) = (x^2 - 1, cy + exy)$. Objetivamos expor todos os possíveis retratos de fase global desta família.

16.1 Retratos de Fase Global no Disco de Poincaré

O objetivo desta seção é apresentar todos os possíveis retratos de fase global da família de campos $X(x, y) = (x^2 - 1, cy + exy)$. O resultado principal deste capítulo é o seguinte teorema

Teorema 16.1.1. *Considere a família de campos $X(x, y) = (x^2 - 1, cy + exy)$, temos que os possíveis retratos de fase global são topologicamente equivalentes a um dos retratos nas Figuras 16.1 e 16.2.*

Demonstração Seguindo o procedimento adotado nos capítulos anteriores, não apresentaremos a demonstração deste resultado. ■

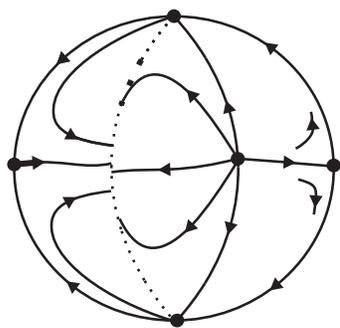


figura 1

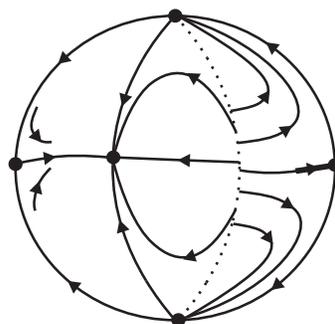


figura 2

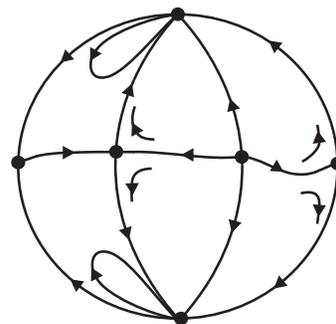


figura 3

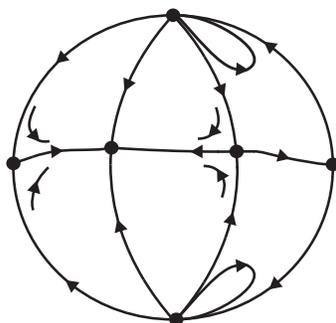


figura 4

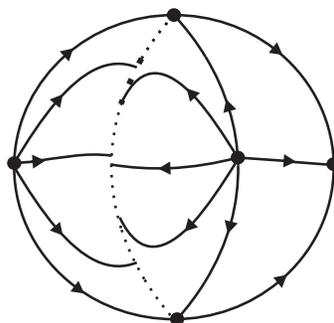


figura 5

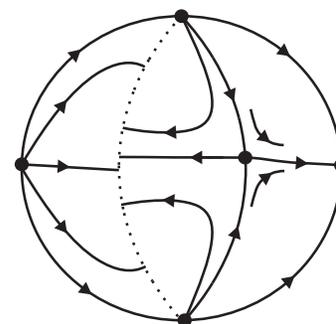


figura 6

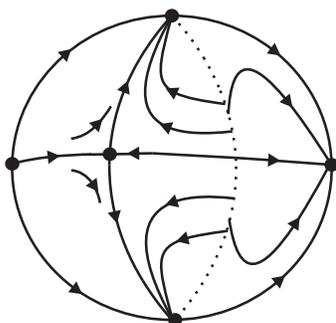


figura 7

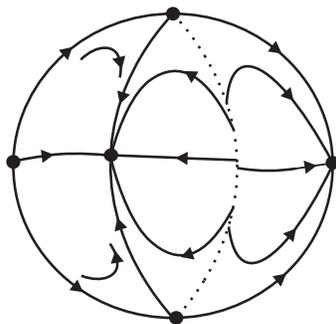


figura 8

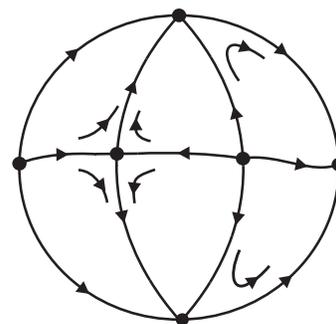


figura 9

Figura 16.1: Os 9 primeiros retratos de fase global no disco de Poincaré.

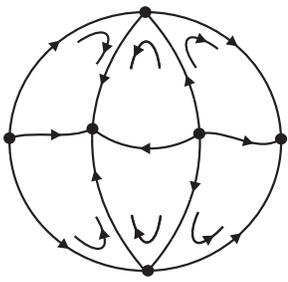


figura 10

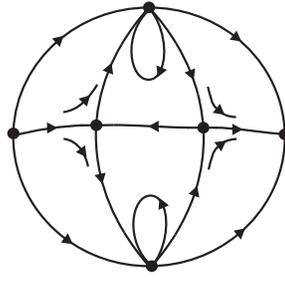


figura 11

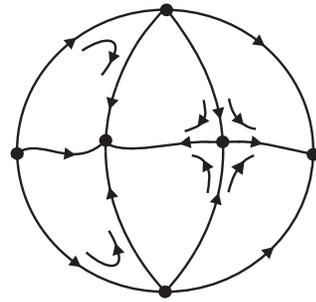


figura 12

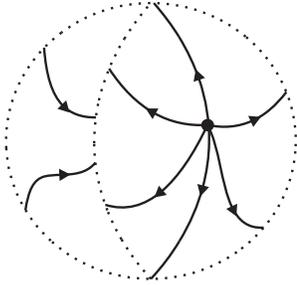


figura 13

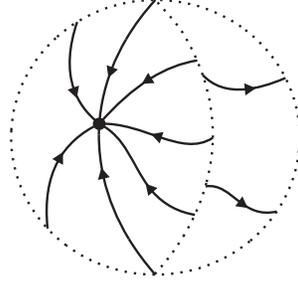


figura 14

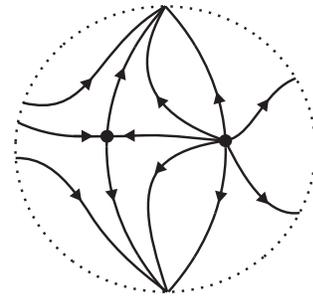


figura 15

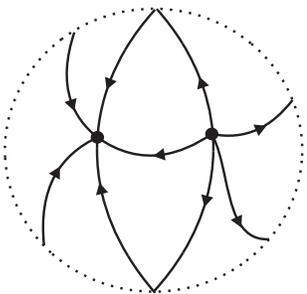


figura 16

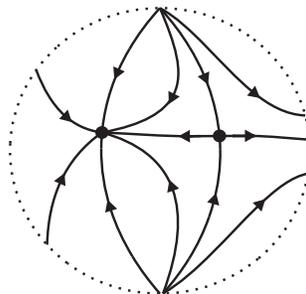


figura 17

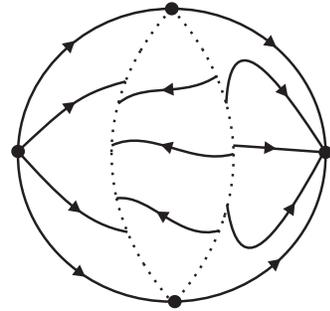


figura 18

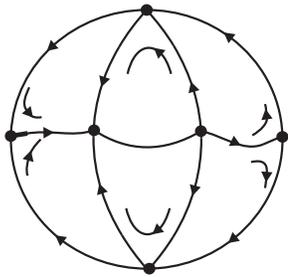


figura 19

Figura 16.2: Os 10 seguintes retratos de fase global no disco de Poincaré.

Capítulo 17

Demonstração do Teorema 0.0.2

A demonstração do Teorema 0.0.2 segue diretamente dos Teoremas 12.4.1, 13.5.1, 14.1.1, 15.1.1 e 16.1.1.



Bibliografia

- [1] Cairó, L. e Llibre, J., Phase portraits of planar semi-homogeneous vector fields-I. *Nonlinear Analysis. Theory Meth. and Appl.*, vol. 29, 1997, **7**, 783-811.
- [2] Hirsch, M.W. e Smale, S., *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Pure and Applied Mathematics, **60**, Academic Press, New York-London, 1974.
- [3] Andreev, A. F., Investigation of the behaviour of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point. *Trans. Am. math. Soc.*, 1958,8, 183-207.
- [4] Perko, L., *Differential equations and dynamical systems*. Texts in Applied Mathematics, **7**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] Rudin, W., *Principles of mathematical analysis*. Second edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
- [6] A.A.Andronov, E.A.Leontovich,I.I. Gordon and A.G. Maier, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*, John Wiley and Sons, New York,1973.
- [7] A.A.Andronov, et. al.,*Theory of Bifurcation of Systems on a Plane*, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1971.
- [8] J.Guckenheimer and P.Holmes, *Nonlinear Oscilations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.

-
- [9] E.G.Velasco, *Generic Properties of Polynomial Vector Fields at Infinity*, transactions of the American Mathematical Society, volume 143, páginas 201-222, 1969.
- [10] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1964.
- [11] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [12] W. A. Coppel, *A survey of quadratic systems.*, J. diff. Eqns, 1962, 2, 293-304.
- [13] D. Neumann, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Am. math. Soc., 1975, 48, 73-81.
- [14] Lyagina, L. S., The integral curves of the equation $y' = (ax^2 + bxy + cy^2)/(dx^2 + exy + fy^2)$ (em russo). *Usp. mat. Nauk.*, 1951, **6-2**(42), 171-183.
- [15] Markus, L., Quadratic differential equations and non-associative algebras. In *Annals of Mathematics Studies*, vol. 45. Princeton University Press, 1960, 185-213.
- [16] Korol, N. A., The integral curves of a certain differential equation (em russo). *Minsk. Gos. Ped. Inst. Minsk*, 1973, 47-51.
- [17] Sibirskii, K. S. e Vulpe, N. I., Geometric classification of quadratic differential systems. *Differential Equations*, 1977, **13**, 548-556.
- [18] Newton, T. A., Two-dimensional homogeneous quadratic differential systems. *SIAM Review*, 1978, **20**, 120-138.
- [19] Date, T., Classification and analysis of two-dimensional homogeneous quadratic differential equations systems. *J. diff. Eqns*, 1979, **32**, 311-334.
-

-
- [20] Vdovina, E. V., Classification of singular points of the equation $y' = (a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2)/(b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2)$ by Forster's method (em russo). *Diff. Uravn.*, 1984, **20**, 1809-1813.
- [21] Cima, A. e Llibre, J., Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. *J. Math. Analysis Applic.*, 1990, **147**, 420-448.
- [22] Argemí, J., Sur les points singuliers multiples de systmes dynamiques dans \mathbb{R}^2 . *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Serie IV, 1968, **79**, 35-70.
- [23] Collins, C. B., Algebraic classification of homogeneous polynomial vector fields in the plane. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 1996, **13**, no. 1, 63-91.
- [24] Llibre, J., Perez del Rio, J. S. e Rodriguez, J. A., Structural stability of planar homogeneous polynomial vector fields. Applications to critical points and to infinity. *J. diff. Eqns*, 1996, **125**, 490-520.
-

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)