UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

O Número de Lefschetz e Teoremas do Tipo Borsuk-Ulam

Cibele Cristina Trinca

Orientadora: Professora Doutora Maria Gorete Carreira Andrade

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto - SP

Março - 2007

COMISSÃO JULGADORA

Titulares

Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade - Orientador

Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Profa. Dra. Denise de Mattos

Suplentes

Prof. Dr. João Peres Vieira

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos

A DEUS, aos meu pais,
Eurides Martins Trinca e
Nair Queiroz Trinca,
e à minha orientadora,
Maria Gorete Carreira
Andrade.
dedico.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a DEUS por todas as oportunidades maravilhosas que obtive em minha vida. Aprendi muito, em todos os sentidos, estudando no Ibilce e conheci pessoas maravilhosas.

Agradeço aos meus pais pelo grande incentivo, amor, paciência, respeito e confiança. Meu pai não está, hoje, presente entre nós, mas sempre confiou em mim e me mostrou o significado das palavras dignidade e perseverança.

Agradeço à minha família, pois todos estiveram sempre presentes durante este meu objetivo de vida, me incentivando e me guiando.

Agradeço muito à minha orientadora, Maria Gorete Carreira Andrade, pois desde quando comecei a graduação, foi uma das primeiras pessoas a me dar grande incentivo. Sempre me ensinou muito, teve grande paciência e hoje é uma pessoa por quem sinto grande admiração e respeito.

Aos meus amigos ("miguxos"), pessoas que também merecem todo o meu respeito e admiração, sempre dando força nas horas difíceis. Quando achava que algo não iria dar certo, vocês sempre me estenderam as mãos.

Agradeço à banca examinadora: Profa. Dra. Denise de Mattos, pela disponibilidade, e à Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, também pela disponibilidade e pela convivência nestes meus seis anos de Ibilce.

E, claramente, não poderia deixar de agradecer à todos os professores do departamento de matemática do Ibilce, pois todos, de alguma forma, me deram grande incentivo.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“Arriscar-se é perder o pé por algum tempo. Não se arriscar é perder a vida...”

(Soren Kiekegaard)

Resumo

Neste trabalho, estudamos o Teorema clássico de Borsuk - Ulam e também outros Teoremas do tipo Borsuk - Ulam. Para isto, consideramos aplicações contínuas $f : (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \to \mathbb{C}^n$. Uma raíz primitiva k - ésima da unidade ξ nos fornece uma $\mathbb{Z}_k$-ação livre sobre $\mathbb{C}^n$. Um teorema nos diz que a equação $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \overline{\xi^i} f(\xi^i x) = 0$ sempre tem uma solução $x \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$. Este resultado produz várias aplicações. Por exemplo, se p é um número primo, $f : S^n \to \mathbb{R}^r$ uma aplicação contínua, com $n \geqslant r(p-1)$, então alguma órbita da $\mathbb{Z}_p$-ação deve ser aplicada em um ponto.

Palavras chave: Número de Lefschetz, Teorema de Borsuk-Ulam.

Abstract

In this work, we study the Classical Borsuk-Ulam Theorem and also other Borsuk-Ulam Theorems. For that, we consider continuous maps $f : (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \to \mathbb{C}^n$. A primitive k-root of unity ξ gives rise to a free $\mathbb{Z}_k$-action on $\mathbb{C}^n$. A result states that the equation $\sum_{i=0}^{k-1} \overline{\xi^i} f(\xi^i x) = 0$ always has a solution $x \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$. This result provides several aplications. For example, if p is a prime number, $f : S^n \to \mathbb{R}^r$ a continuous map and $n \geqslant r(p-1)$, then some orbit of the $\mathbb{Z}_p$-action must be mapped into a point.

Key words: Lefschetz Number, Borsuk-Ulam's Theorem.

Sumário

Introdução

O Teorema de Borsuk-Ulam é uma das ferramentas mais usadas da topologia algébrica e tem sido muito útil em diferentes áreas.

Uma razão importante é que existem várias versões do teorema e muitas demonstrações conhecidas de cada versão. As técnicas de demonstração são variadas: métodos geométricos elementares, técnicas algébricas, topologia algébrica e muitas outras ferramentas.

O artigo original de Borsuk ([1]) dá três variantes do teorema. Borsuk menciona que o teorema foi primeiro conjecturado por St. Ulam. O artigo de Borsuk apareceu em 1933. A partir daí, numerosos resultados têm sido publicados sobre versões diferentes do teorema, várias demonstrações, generalizações e aplicações.

Agora, neste trabalho, estudamos o Teorema clássico de Borsuk-Ulam e também outros Teoremas do tipo Borsuk-Ulam. Este trabalho aborda os teoremas clássicos de Borsuk-Ulam que tratam da existência de pontos de $\mathbb{Z}_2$ - coincidência de uma aplicação $f : S^n \to \mathbb{R}^k$ $(n \geq k)$ e teoremas do tipo Borsuk-Ulam que tratam da existência de pontos de Z_p - coincidência de uma aplicação $f : S^{2k-1} \to \mathbb{R}^r$, $(2k - 1 > r(p - 1))$.

Resultados do tipo aqui apresentados aparecem em outros trabalhos da literatura, tais como [18] e [14]. As técnicas são diferentes, usam diretamente as maquinarias da topologia algébrica, tais como o $\mathbb{Z}_2$-índice, sequências espectrais, sequências de Gysin e entre outras. Tais resultados garantem mais do que a existência de pontos de G - coincidência ($G = \mathbb{Z}_2$ ou $G = \mathbb{Z}_p$). Eles também estimam a dimensão do conjunto de tais pontos.

Existem outros trabalhos que substituem a esfera S^n por espaços topológicos mais gerais e obtém o mesmo resultado em termos destas estimativas.

O trabalho está dividido da seguinte forma. O capítulo 1 apresenta alguns pré-requisitos que são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, como por exemplo, ações de grupos, CW - complexos, espaços de recobrimento, o número de Lesfschetz e grau de uma aplicação.

O capítulo 2 apresenta o teorema devido a Borsuk e Ulam. Vemos a sua demonstração para o caso particular de aplicações contínuas $f : S^n \to S^{n-1}$, onde $n = 1$ ou $n = 2$. Em seguida damos uma idéia da demonstração deste teorema para o caso geral e vemos algumas consequências interessantes do mesmo. Para este capítulo utilizamos fortemente as referências [12] e [15].

Os capítulos 3 e 4 foram elaborados a partir do estudo do artigo de D.H. Gottilieb ([8]). No capítulo 3 vemos um teorema que fornece uma relação interessante entre ações livres de grupos finitos em variedades fechadas e o número de Lefschetz. Este teorema nos diz que, se M é uma variedade fechada, que também é um CW - complexo finito, G um grupo finito atuando livremente em M e $f : M \to M$ uma aplicação equivariante, então $o(G)$ divide Λ_f (número de Lefschetz da aplicação f). Para estudarmos este teorema, que é de grande importância no capítulo 4, foi necessário recordarmos alguns resultados da Teoria de Pontos Fixos.

No capítulo 4 vemos alguns teoremas do tipo Borsuk-Ulam. Mas antes disto, sob certas hipóteses, estudamos a relação entre ações basicamente livres de grupos finitos no $\mathbb{R}^n$ e o determinante da matriz de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Como consequência desta relação, vemos um resultado que nos diz que, se ξ é uma raíz k - ésima primitiva da unidade e $f : (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação contínua, então existe $x \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \overline{\xi^i} f(\xi^i x) = 0$. Com esta equação estudaremos certos teoremas do tipo Borsuk-Ulam. O principal resultado estudado é o seguinte: *Seja p um número primo e $f : S^n \to \mathbb{R}^r$ uma aplicação contínua. Se $n \geqslant r(p-1)$, então alguma órbita da $\mathbb{Z}_p$ - ação deve ser aplicada em um ponto.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo recordaremos alguns conceitos e resultados que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Ações de Grupos

Definição 1.1.1. *Sejam $(G, *)$ um grupo e X um espaço topológico. Dizemos que G* ***atua à esquerda*** *em X ou que* ***existe uma ação*** *de G em X se existir uma aplicação, denominada de G-ação,*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longmapsto & \phi(g, x) \end{array}$$

tal que:

(1) $\phi(1, x) = x$, para todo $x \in X$.

(2) Para todo $x \in X$ e quaisquer $g_1, g_2 \in G$, tem-se $\phi(g_1 * g_2, x) = \phi(g_1, \phi(g_2, x))$.

Denotemos $\phi(g, x)$ por $g \cdot x$. O espaço topológico X, munido de uma G-ação, é chamado de G-espaço.

Definição 1.1.2. *Seja X um G espaço. Dizemos que G* **atua livremente** *em X se, para quaisquer dois elementos $g, h \in G$ e para qualquer $x \in X$, tem-se que $g.x \neq h.x$, ou equivalentemente, se dado $g \in G$ e qualquer $x \in X$, com $g.x = x$, tem-se $g = 1$.*

Definição 1.1.3. *Seja X um G-espaço. Dizemos que G* **atua fielmente** *ou* **efetivamente** *em X se, para quaisquer dois elementos $g, h \in G$, existe $x \in X$ tal que $g.x \neq h.x$. Equivalentemente, se $g \neq 1$, $g \in G$, então existe $x \in X$ tal que $g.x \neq x$.*

Observação 1.1.1. *Claramente ação livre implica ação fiel.*

Definição 1.1.4. *Seja X um G-espaço. Dizemos que a ação de G em X é* ***propriamente descontínua*** *se, para qualquer $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$, para qualquer $g \in G$, com $g \neq 1$ e onde $g \cdot U = \{g \cdot u \mid u \in U\}$. Neste caso dizemos que X é* ***propriamente descontínuo.***

Observação 1.1.2. *Se G atua propriamente descontinuamente em X, então a ação de G em X é livre.*

Definição 1.1.5. *Seja $\varphi : X \to Y$ uma aplicação contínua, onde X e Y são G-espaços. Dizemos que φ é uma* **G-aplicação** *(ou aplicação* **equivariante***) se $\varphi(g.x) = g.\varphi(x)$, para qualquer $x \in X$ e $g \in G$.*

Seja X um G-espaço. Dois elementos $x, y \in X$ são chamados G-equivalentes se, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Esta relação é uma relação de equivalência e o conjunto de todos os $g \cdot x$, com $g \in G$, denotado por $G \cdot x$, é a classe de equivalência determinada por $x \in X$. Este conjunto $G \cdot x$ é chamado de **órbita** de x.

Definição 1.1.6. *O conjunto $\dfrac{X}{G}$ é constituído por todos os $G \cdot x$, onde $x \in X$. Este conjunto é munido da topologia quociente, ou seja, a maior topologia tal que a projeção $\pi : X \to \dfrac{X}{G}$ seja contínua. Esta projeção é definida da seguinte forma, $\pi(x) = G \cdot x$.*

Teorema 1.1.1. *Se X é um G-espaço, com G compacto, então:*

1) $\dfrac{X}{G}$ é um espaço de Hausdorff.

2) $\pi : X \to \dfrac{X}{G}$ é uma aplicação fechada.

3) X é compacto se, e somente se, $\dfrac{X}{G}$ é compacto.

Demonstração: Ver [2], página 38, teorema 3.1. □

Proposição 1.1.1. *Seja X um G-espaço. A aplicação $x \to g.x$, com $g \in G$ fixado, é um homeomorfismo e a projeção $\pi : X \to \dfrac{X}{G}$ é uma aplicação aberta.*

Demonstração: Ver [10], página 40, proposição 1.4. □

1.2 CW-complexos

Definição 1.2.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e, considere A um subespaço de Y. Dada uma função contínua $f : A \longrightarrow X$, defina o espaço $Z := X \cup_f Y$ como sendo o espaço quociente $X \coprod Y/ \sim$, onde o símbolo $\coprod$ significa união disjunta e a relação de equivalência $\sim$ é dada por*

$$y \sim f(y), \text{ para todo } y \in A.$$

*Z é chamado uma **adjunção** de Y em X através da aplicação f (ou através de A, se a aplicação f estiver implícita). Esta construção tem o efeito de colar o subespaço A de Y na sua imagem em X através da f.*

Definição 1.2.2. *Sejam X um espaço topológico, Y a adjunção $Y := X \cup_\varphi D^k$, onde D^k é um k-disco fechado, e $\varphi : S^{k-1} \longrightarrow X$ é uma aplicação contínua, com S^{k-1} a (k-1)-esfera, fronteira de D^k. Então dizemos que Y é obtido de X colando uma k-célula, através da aplicação φ. A imagem σ^k de D^k em Y é chamada de **k-célula fechada**, e a imagem int(σ^k) de $int(D^k) := D^k \backslash S^{k-1}$ é a correspondente **k-célula aberta**.*

Observação 1.2.1. *Se $k = 0$, então a definição anterior reduz-se a afirmação de que Y é a união disjunta de X com um espaço unitário.*

*Mais geralmente, dizemos que Y é obtido de X **colando células** se Y é homeomorfo a uma adjunção $X \cup_{\{\varphi_i\}} D^{K_i}$, onde as aplicações $\{\varphi_i\}$ de X são definidas no bordo de esferas de discos fechados $\{D^{k_i}\}$.*

Definição 1.2.3. *Um espaço topológico Hausdorff X é dito um **CW-complexo** se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Existe uma relação de inclusão dos subespaços*

$$X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq X^{(2)} \subseteq ...$$

com $X = \bigcup_{n \geq 0} X^{(n)}$.

2. *$X^{(0)}$ é um espaço discreto e, para $n \geq 1$, $X^{(n)}$ é obtido de $X^{(n-1)}$ colando uma coleção $\{\sigma_i^n : i \in I_n\}$ de n-células.*

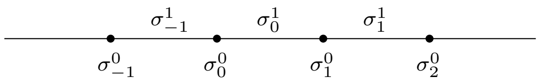
3. *Toda célula fechada está contida numa união finita de células abertas.*

4. X *tem a topologia fraca com relação à coleção de todas as células. Isto é,* $A \subset X$ *é fechado em* X *se, e somente se, a interseção de* A *com toda célula fechada* σ *é fechada em* σ *com relação ao subespaço topológico.*

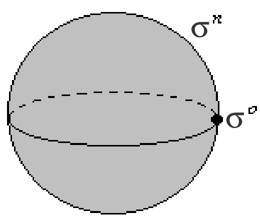
O subespaço $X^{(n)}$ *é chamado* ***n-esqueleto*** *de* X. *Os pontos de* X^0 *são chamados de* **vértices** *ou* **0-células** . *Uma escolha particular de esqueleto e aplicações de colagem para as células é chamada uma estrutura CW no espaço. Um CW-complexo é dito* **finito** *ou* **infinito** *se o número de células é finito ou infinito, respectivamente. Se* $X = X^n$, *para algum* n, *o CW-complexo é dito de* **dimensão finita** *e quando isto ocorrer, diremos que a dimensão de* X *é* n.

Observação 1.2.2. *Intuitivamente,* X *é um CW-complexo se este pode ser construído, começando de um espaço discreto, primeiramente colando 1-células, depois 2-células e assim sucessivamente. Note que a definição acima não permite colar k-células antes de h-células, se* $k > h$.

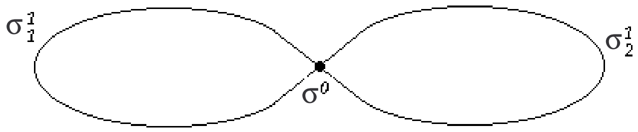
Exemplo 1.2.1. *Dado* $X = \mathbb{R}$, *podemos considerar em* $\mathbb{R}$ *uma estrutura natural de CW-complexo, tomando as 0-células e 1-células como sendo, respectivamente,* $\sigma_n^0 = \{n\}$ *e* $\sigma_n^1 = [n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$.



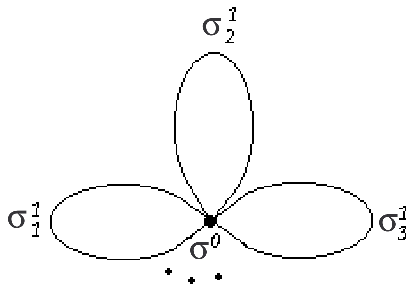
Exemplo 1.2.2. *Seja* $X = S^n$. *Temos uma estrutura de CW-complexo sobre* S^n *dada por uma 0-célula e uma n-célula, ou seja,* $S^n = \sigma^0 \cup \sigma^n$.



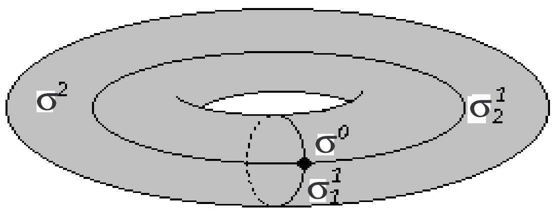
Exemplo 1.2.3. *Seja X a figura oito. Uma estrutura de CW-complexo 1-dimensional para X é dada tomando-se uma única 0-célula e duas 1-células* $(X = \sigma^0 \cup \sigma^1_1 \cup \sigma^1_2)$.



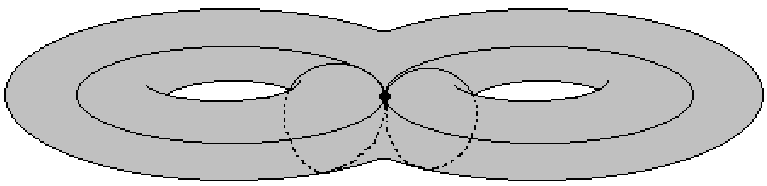
Exemplo 1.2.4. *Seja* $X = \bigvee_{s\in S} S^1_s$ *o bouquet de c¶rculos indexado por um conjunto* S. *Podemos dar a* X *uma estrutura de CW-complexo* 1*-dimensional, com uma ¶nica 0-c¶lula e uma 1-c¶lula para cada elemento de* S $\left(X = \sigma^0 \bigcup \left(\bigcup_{s\in S} \sigma^1_s\right)\right)$.



Exemplo 1.2.5. *O toro* (T^2) *admite uma estrutura de CW-complexo 2-dimensional, com uma 0-c¶lula, duas 1-c¶lulas e uma 2-c¶lula* $(T^2 = \sigma^0 \cup \sigma^1_1 \cup \sigma^1_2 \cup \sigma^2)$.



Exemplo 1.2.6. *Consideremos* $X = T_2\# \cdots \# T_2$ *a soma conexa de n toros. Podemos dar a* X *uma estrutura de CW-complexo do seguinte modo: uma 0-c¶lula, 2n 1-c¶lulas e 1 2-c¶lulas, isto ¶,* $X = \sigma^0 \cup \sigma^1_1 \cup \sigma^1_2 \cup \ldots \cup \sigma^1_{2n-1} \cup \sigma^1_{2n} \cup \sigma^2$.



Exemplo 1.2.7. *Seja* $X = P^2\#\ldots\#P^2$ *a soma conexa de* n*-planos projetivos. Então* X *¶ um CW-complexo 2-dimensional contendo uma 0-c¶lula,* n *1-c¶lulas e uma 2-c¶lula:*

$X = \sigma^0 \cup \sigma_1^1 \cup \ldots \cup \sigma_n^1 \cup \sigma^2$

1.2.1 Alguns resultados sobre CW-complexos

(I.1) Se X e Y são CW-complexos finitos, então $X \times Y$ é um CW-complexo.

De fato, se (σ_j^q) e (γ_i^p) são decomposições celulares de X e Y, respectivamente, então $(\sigma_j^q \times \gamma_i^p)$ é uma decomposição celular de $X \times Y$.

(I.2) Um CW-complexo é paracompacto e daí é normal.

(I.3) Um CW-complexo é localmente contrátil, isto é, todo ponto possui uma família básica de vizinhanças contráteis.

(I.4) Um subconjunto compacto de um CW-complexo intercepta somente um número finito de células. Um CW-complexo é compacto se, e somente se, é finito.

(I.5) Uma função f definida sobre um CW-complexo é contínua se, e somente se, a restrição de f a cada célula σ_q é contínua.

Definição 1.2.4. *Uma aplicaçao contínua $f : X \longrightarrow Y$, onde X e Y sao CW-complexos, é chamada **celular** se $f(X^n) \subset Y^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ (X^n e Y^n sao os n-esqueletos de X e Y, respectivamente).*

J.H.C Whitehead provou que toda aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ é homotópica a uma aplicação celular.

1.2.2 A Homologia de um CW-complexo

Teorema 1.2.1. *Seja X um CW-complexo e $\{X^n \,|\, n = 0, 1, \ldots\}$ a estrutura de CW-complexo de X. Entao $H_q(X^n, X^{n-1}) = 0$, se $q \neq n$, e $H_n(X^n, X^{n-1})$ é o grupo abeliano livre com uma base em correspondência $1-1$ com as n-células de X.*

Demonstração: Ver [13], página 84. □

Lema 1.2.2. *$H_q(X^n) = 0$, para todo $q > n$.*

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre n.

Para $n = 0$ o Lema é trivial.

Agora, para $n > 0$ suponhamos, por hipótese de indução, que $H_q(X^{n-1}) = 0$ para $q > n-1$. Suponha agora $q > n$. Usando a seqüência exata para o par (X^n, X^{n-1}), temos

$$0 \longrightarrow H_{q+1}(X^n) \xrightarrow{j_*} H_{q+1}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_q(X^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_q(X^n) \longrightarrow 0.$$

Considerando apenas parte da seqüência, temos que

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_q(X^n) \longrightarrow 0$$

e, sabendo por hipótese de indução que $H_q(X^{n-1}) = 0$, para $q > n-1$, obtemos

$$0 \xrightarrow{i_*} H_q(X^n) \longrightarrow 0.$$

Logo $H_q(X^n) = 0$, para todo $q > n$. □

Observação 1.2.3. *Segue do lema anterior que, se X é um CW-complexo de dimensão finita n, então $H_q(X) = 0$, para $q > n$.*

Vamos associar agora a um CW-complexo X um complexo de cadeias $C_*^{CW}(X)$.

Seja $C_n^{CW}(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$.

Pelo Teorema 1.2.1, temos que $C_n^{CW}(X)$ é o grupo abeliano livre gerado pelas n-células de X. Um elemento de $C_n^{CW}(X)$ é escrito na forma

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i^n, \text{ com } n_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \sigma_i^n \text{ n-célula em } X.$$

Vamos definir um operador bordo

$$d_n : C_n^{CW}(X) \longrightarrow C_{n-1}^{CW}(X).$$

Considere a composição

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1*}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

onde Δ_n é o homomorfismo conexão da seqüência exata do par (X^n, X^{n-1}) e j_{n-1*} é induzida da aplicação inclusão

$$j_{n-1} : (X^{n-1}, \emptyset) \longrightarrow (X^{n-1}, X^{n-2}).$$

Definimos $d_n := j_{n-1*} \circ \Delta_n$.

Temos que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ e assim $(C_*^{CW}(X), d_n)$ é um complexo de cadeia, chamado de **complexo de cadeia celular** do CW-complexo X.

Sejam $Z_n^{CW}(X) = Ker\ d_n$ e $B_n^{CW}(X) = Im\ d_{n+1}$.

Definição 1.2.5. *O n-ésimo* ***grupo de homologia celular*** *de X é definido por:*

$$H_n^{CW}(X) = \frac{Z_n^{CW}(X)}{B_n^{CW}(X)}.$$

Veremos agora a relação entre a homologia celular de um CW-complexo X e a homologia singular de X.

Teorema 1.2.3. *Seja X um CW-complexo e seja $H_*(X)$ o grupo de homologia singular de X. Então*

$$H_n^{CW}(X) \simeq H_n(X)\,,\ \forall n \geq 0.$$

Demonstração: Ver [13], página 85, teorema 4.2. □

Observação 1.2.4. *Por simplicidade, denotaremos $H_n^{CW}(X)$ simplesmente por $H_n(X)$.*

Observação 1.2.5. *Segue dos resultados anteriores que se X é um CW - complexo com um número finito de células de dimensão n, então $H_n(X)$ é finitamente gerado. Se X não tem células de dimensão n, então $H_n(X) = 0$.*

1.3 Espaços de Recobrimento

Definição 1.3.1. *Seja X um espaço topológico. Um* ***espaço de recobrimento*** *de X é um par $(\tilde{X}, p)$, onde $\tilde{X}$ é um espaço topológico conexo por caminhos, e $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação contínua tal que a seguinte condição é satisfeita:*

Cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança U aberta e conexa por caminhos tal que cada componente conexa por caminhos de $p^{-1}(U)$ é aplicada homeomorficamente sobre U.

A vizinhança U é chamada ***vizinhança elementar*** *ou* ***vizinhança admissível*** *e a aplicação p é chamada* ***projeção de recobrimento.*** *O espaço X é chamado* ***espaço base.***

Definição 1.3.2. *Sejam* $(\tilde{X}, p)$ *um espaço de recobrimento de* X *e* $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$*, com* $x \in X$*. Se* $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ *é normal em* $\pi_1(X, x)$*, onde* $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, x)$ *é o homomorfismo induzido, dizemos que* $(\tilde{X}, p)$ *é um* ***recobrimento regular*** *de* X*.*

Definição 1.3.3. *Uma aplicação contínua* $p : E \to B$ *tem a* ***propriedade de levantamento de homotopia com respeito a um espaço*** X *se, dadas as aplicações contínuas* $f' : X \to E$ *e* $F : X \times I \to B$*, onde* $F(x, 0) = (p \circ f')(x)$*, para todo* $x \in X$*, existe uma aplicação contínua* $F' : X \times I \to E$ *tal que* $F'(x, 0) = f'(x)$*, para todo* $x \in X$*, e* $(p \circ F') = F$*.*

Daí segue o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, "F'"] & B \end{tikzcd}$$

onde $i : X \to X \times I$ *aplica o ponto* x *em* $(x, 0)$*.*

Lema 1.3.1. *Sejam* $(\tilde{X}, p)$ *um espaço de recobrimento de* X*,* $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ *e* $x_0 = p(\tilde{x}_0)$*. Então para cada caminho* $f : [0, 1] \to X$ *com ponto inicial* x_0*, existe um único caminho* $g : [0, 1] \to \tilde{X}$ *com ponto inicial* $\tilde{x}_0$ *tal que* $(p \circ g) = f$*.*

Demonstração: Ver [12], página 151, lema 3.1. □

Lema 1.3.2. *Seja* $(\tilde{X}, p)$ *um espaço de recobrimento de* X *e sejam* $g_0, g_1 : [0, 1] \to \tilde{X}$ *caminhos em* $\tilde{X}$ *os quais têm o mesmo ponto inicial. Se* $(p \circ g_0) \sim (p \circ g_1)$*, então* $g_0 \sim g_1$*; em particular,* g_0 *e* g_1 *têm o mesmo ponto final.*

Demonstração: Ver [12], página 152, lema 3.3. □

Lema 1.3.3. *Se* $(\tilde{X}, p)$ *é um espaço de recobrimento de* X*, então os conjuntos* $p^{-1}(x)$*, para todo* $x \in X$*, têm a mesma cardinalidade (número de elementos).*

Demonstração: Ver [12], página 153, lema 3.4. □

Este número cardinal comum dos conjuntos $p^{-1}(x)$, com $x \in X$, é chamado **número de folhas** do espaço de recobrimento $(\tilde{X}, p)$. Por exemplo, dizemos um espaço de recobrimento de n **folhas** ou um espaço de recobrimento de **infinitas folhas**.

Definição 1.3.4. *Sejam* $(\tilde{X}_1, p_1)$ *e* $(\tilde{X}_2, p_2)$ *espaços de recobrimento de* X. *Um homomorfismo de* $(\tilde{X}_1, p_1)$ *em* $(\tilde{X}_2, p_2)$ *é uma aplicação contínua* $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Ou seja, $(p_2 \circ \varphi) = p_1$.

Observação 1.3.1. *Note que a composição de dois homomorfismos é novamente um homomorfismo, e que se* $(\tilde{X}, p)$ *é um espaço de recobrimento, então a aplicação identidade* $id : \tilde{X} \to \tilde{X}$ *é um homomorfismo.*

Definição 1.3.5. *Um homomorfismo* $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *é chamado um* ***isomorfismo*** *se existe um homomorfismo* $\psi : \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ *tal que ambas as composições* $(\psi \circ \varphi)$ *e* $(\varphi \circ \psi)$ *são aplicações identidade. Dois espaços de recobrimento são chamados* ***isomorfos*** *se existe um isomorfismo de um espaço ao outro. Um* ***automorfismo*** *é um isomorfismo de um espaço de recobrimento nele mesmo; este pode ser ou não a aplicação identidade.*

Automorfismos de espaços de recobrimento são geralmente chamados de **transformações de recobrimento**. Observe que um homomorfismo de espaços de recobrimento é um isomorfismo se, e somente se, é um homeomorfismo no senso usual. O conjunto de todos os automorfismos de um espaço de recobrimento $(\tilde{X}, p)$ de X é obviamente um grupo, munido da operação composição. Usemos a notação $A(\tilde{X}, p)$ para denotar este grupo.

Proposição 1.3.1. *Seja* G *um grupo de homeomorfismos operando livremente no espaço* X. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) X *é propriamente descontínuo.*

2) A projeção canônica $p : X \to \dfrac{X}{G}$ *é uma projeção de recobrimento.*

Demonstração: Ver [11], página 127, proposição 5. $\square$

Definição 1.3.6. *Uma aplicação contínua* $p : E \to B$ *é chamada uma* ***fibração*** *se* p *tem a propriedade de levantamento de homotopia com respeito a qualquer espaço.* E *é chamado o* ***espaço total*** *e* B *o* ***espaço base*** *da fibração. Para* $b \in B$, $p^{-1}(b)$ *é chamado de* ***fibra*** *em* b.

Teorema 1.3.4. *Uma projeção de recobrimento é uma fibração.*

Demonstração: Ver [16], página 67, teorema 3. □

Proposição 1.3.2. *Sejam Y um espaço topológico conexo e localmente conexo por caminhos, G um grupo de homeomorfismos de Y, Y sendo propriamente descontínuo e $p : Y \to Y/G$ a projeção natural de Y em seu espaço quociente. Então (Y, p) é um recobrimento regular de Y/G e $G = A(Y, p)$.*

Demonstração: Ver [12], página 165, proposição 8.2. □

1.4 O número de Lefschetz

Sejam X um espaço topológico e $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Então, para cada k, existe o homomorfismo induzido na homologia de X com coeficientes racionais, $f_{*k} : H_k(X, \mathbb{Q}) \to H_k(X, \mathbb{Q})$.

Como $\mathbb{Q}$ é um corpo, temos que $H_k(X, \mathbb{Q})$ pode ser visto como um $\mathbb{Q}$ - espaço vetorial.

Se, para cada $k \in I\!N$, $H_k(X, \mathbb{Q})$ é finitamente gerado, temos que $H_k(X, \mathbb{Q})$ possui uma base finita.

Desta forma, para cada k, podemos escolher uma base para o espaço vetorial racional $H_k(X, \mathbb{Q})$ e associar à f_{*k} uma matriz relacionada à sua base.

Denotaremos por $tr(f_{*k})$ o traço desta matriz.

Definição 1.4.1. *Seja X um CW - complexo finito de dimensão n. Para uma aplicação $f : X \to X$ contínua, o* **número de Lefschetz** *Λ_f é definido como*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k tr(f_{*k}),$$

onde, para cada $k \geq 0$, $f_{*k} : H_k(X, \mathbb{Q}) \to H_k(X, \mathbb{Q})$ é o homomorfismo induzido na homologia de X com coeficientes racionais.

Observação 1.4.1. *É evidente que Λ_f depende somente da classe de homotopia de f, pois se f e g são aplicações homotópicas, temos que as aplicações induzidas f_* e g_* são iguais. Logo seus respectivos números de Lefschetz são iguais, ou seja, $\Lambda_f = \Lambda_g$.*

Definição 1.4.2. *Para um CW - complexo finito X, a* **característica de Euler** $\chi(X)$ *é definida como sendo* $\sum_n (-1)^n c_n$*, onde* c_n *é o número de* n *- células de* X.

O seguinte resultado mostra que $\chi(X)$ *pode ser definida puramente em termos de homologia e daí depende somente do tipo de homotopia de* X*. Em particular,* $\chi(X)$ *é independente da escolha da estrutura de* CW *em* X.

Teorema 1.4.1. *Seja* X *um* CW *- complexo finito. Então*

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n dim H_n(X, \mathbb{Q}) = \Lambda_{id},$$

onde $id : X \to X$ *é a aplicação identidade.*

Demonstração: Ver [9], página 146, teorema 2.44. $\square$

Se M é uma variedade fechada (compacta e sem bordo), então $H_k(M, \mathbb{Q})$ é finitamente gerado, para todo $k \geq 0$. Assim podemos também definir o número de Lefschetz para aplicações contínuas $f : M \to M$ e a característica de Euler de M.

Definição 1.4.3. *Sejam* M *uma variedade fechada de dimensão* n *e* $f : M \to M$ *uma aplicação contínua. Para cada* $k \geq 0$*, seja* $f_{*k} : H_k(M, \mathbb{Q}) \to H_k(M, \mathbb{Q})$ *o homomorfismo induzido em homologia com coeficientes racionais.*

a) O **número de Lefschetz** *de* f *é definido por*

$$\Lambda_f = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k tr(f_{*k}).$$

b) Se $f = id : M \to M$*, então a característica de Euler de* M *é definida por*

$$\chi(M) = \Lambda_{id} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k dim H_k(M, \mathbb{Q}).$$

Observação 1.4.2. *Podemos também computar o número de Lefschetz usando homologia com coeficientes inteiros. Se* $f : X \to X$

1.5 Grau de uma aplicação

Definição 1.5.1. *Sejam* $n \geq 1$ *e* $f : S^n \rightarrow S^n$ *uma aplicação contínua. Escolha um gerador* α *de* $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$*. Seja* $f_{*n} : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ *o homomorfismo induzido. Temos que* $f_{*n}(\alpha) = m.\alpha$*, onde* $m \in \mathbb{Z}$*. O número real* m *é o* **grau** *de* f *e é denotado por* $\mathbf{deg(f)}$*.*

Este número real é independente da escolha do gerador, pois

$$f_{*n}(-\alpha) = -f_{*n}(\alpha) = -m.\alpha = m.(-\alpha).$$

Citaremos abaixo algumas propriedades do grau de uma aplicação:

(1) $deg(id) = 1$, onde id é a aplicação identidade;

(2) Se $f, g : S^n \rightarrow S^n$ são aplicações contínuas, então $deg(f \circ g) = deg(f)\ .\ deg(g)$;

(3) $deg(c) = 0$, onde c denota a aplicação constante;

(4) f e g são aplicações homotópicas $\Leftrightarrow$ $deg(f) = deg(g)$;

(5) Se f é uma equivalência de homotopia, então $deg(f) = \pm 1$.

Proposição 1.5.1. *Seja* $n > 0$ *e defina* $f : S^n \rightarrow S^n$ *por* $f(x_1, ..., x_{n+1}) = (-x_1, x_2, ..., x_{n+1})$*. Então* $deg(f) = (-1)$*.*

Demonstração: Ver [17], página 26, proposição 1.19. $\square$

Capítulo 2

O Teorema Clássico de Borsuk-Ulam

Neste capítulo veremos um teorema muito importante, demonstrado por K-Borsuk e S-Ulam. Na primeira seção, veremos a demonstração deste teorema para o caso particular de aplicações contínuas $f : S^n \to S^{n-1}$, onde $n = 1$ ou $n = 2$.

Na segunda seção, daremos uma idéia da demonstração deste teorema para o caso geral e veremos algumas consequências interessantes do mesmo.

2.1 O caso particular

Definição 2.1.1. *Seja S^n a esfera n-dimensional. Para quaisquer inteiros positivos m e n, seja $f : S^m \to S^n$ uma aplicação. Dizemos que esta aplicação **preserva pontos antipodais** se $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in S^m$.*

Teorema 2.1.1. *Não existe aplicação contínua $f : S^n \to S^{n-1}$ que preserve pontos antipodais para $n = 1$ ou $n = 2$.*

Demonstração: Para o caso $n = 1$. Suponha que exista aplicação contínua $f : S^1 \to S^0$ que preserve pontos antipodais. Temos que S^1 é conexo e

$$S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\} = \{-1, 1\}.$$

Observe que f é sobrejetora, pois se $x \in S^1$ e supondo $f(x) = 1$, temos

$$f(-x) = -f(x) = -1.$$

Analogamente, se $f(x) = -1$, temos $f(-x) = 1$.

Como f é contínua e S^1 é conexo, segue que S^0 é conexo. Mas isto é um absurdo, pois S^0 não é conexo.

Portanto não existe tal aplicação contínua para $n = 1$.

Agora veremos a demonstração para o caso $n = 2$. Suponha que exista uma aplicação contínua $f : S^2 \to S^1$ que preserve pontos antipodais. Considere agora os espaços quocientes de S^2 e S^1 obtidos pela identificação de pontos antipodais. Estes espaços são, respectivamente, o plano projetivo real P^2 $(S^2/\sim)$ e o espaço projetivo P^1, o qual é homeomorfo a S^1.

Denotemos por $p_2 : S^2 \to P^2$ e $p_1 : S^1 \to P^1$ as aplicações naturais de cada espaço em seu espaço quociente. Logo $p_2(x) = \overline{x} = \{x, -x\}$, com $x \in S^2$ e

$$p_1(x') = \overline{x'} = \{x', -x'\}, \text{ com } x' \in S^1.$$

Seja $G = \{id, \alpha\}$, onde $id : S^n \to S^n$ é a aplicação identidade e $\alpha : S^n \to S^n$ é a aplicação tal que $\alpha(x) = -x$, com $n \leq 2$. Temos que id e α são homeomorfismos. Observe que G é um grupo de homeomorfismos e ainda $G \simeq \mathbb{Z}_2$, pois $(\alpha \circ \alpha) = id$.

Definimos agora uma ação de G em S^n da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} G \times S^n & \longrightarrow & S^n \\ (id, x) & \longmapsto & id \cdot x = id(x) = x \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha \cdot x = \alpha(x) = -x \end{array}$$

Dado $x \in S^n$. Observe que a órbita $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} = \{x, -x\}$ e portanto

$$(S^n/G) = (S^n/\sim) \cong P^n, n \leq 2.$$

Mostremos que a ação de G em S^n é propriamente descontínua, $n = 1, 2$. Dado $x \in S^n$, temos $\alpha \cdot x = \alpha(x) = -x$. Como x e $-x$ são pontos antipodais em S^n, claramente existe uma vizinhança U de x tal que $\alpha \cdot U \cap U = \emptyset$, pois $\alpha \cdot U = \{-y \mid y \in U\}$.

Portanto a ação de G em S^1 e S^2 é propriamente descontínua.

Assim, usando a Proposição 1.3.2, segue que (S^1, p_1) e (S^2, p_2) são espaços de recobrimento regular. Observe ainda que estes espaços de recobrimento são de duas folhas (pontos antipodais pertencem à mesma classe).

Seja $g : P^2 \to P^1$ tal que $g(\overline{x}) = \overline{f(x)}$. Mostremos que g está bem definida.

De fato, dados $\overline{x}, \overline{y} \in P^2$. Se $\overline{x} = \overline{y}$, então $\{x, -x\} = \{y, -y\}$. Logo $x = y$ ou $x = -y$. Assim $f(x) = f(y)$ ou $f(x) = f(-y) = -f(y)$. Ou seja,

$$\overline{f(x)} = \{f(x), -f(x)\} = \{f(y), -f(y)\} = \overline{f(y)}.$$

Portanto g está bem definida. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_2"'] & S^1 \arrow[d, "p_1"] \\ P^2 \arrow[r, "g"'] & P^1 \end{tikzcd}$$

Mostremos que este diagrama é comutativo. Dado $x \in S^2$, temos

$$(p_1 \circ f)(x) = p_1(f(x)) = \overline{f(x)} \text{ e}$$

$$(g \circ p_2)(x) = g(p_2(x)) = g(\overline{x}) = \overline{f(x)}.$$

Assim $(p_1 \circ f) = (g \circ p_2)$.

Agora temos que g é uma aplicação contínua. De fato, seja U um subconjunto aberto em P^1. Como p_1 é contínua, segue que $p_1^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto em S^1. Como f é uma aplicação contínua, temos que $f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = (p_1 \circ f)^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto em S^2.

Pela comutatividade do diagrama, $(g \circ p_2)^{-1}(U) = (p_1 \circ f)^{-1}(U)$. Portanto

$$f^{-1}(p_1^{-1}(U)) = (p_1 \circ f)^{-1}(U) = (g \circ p_2)^{-1}(U) = p_2^{-1}(g^{-1}(U)).$$

Daí, segue que $p_2^{-1}(g^{-1}(U))$ é um subconjunto aberto em S^2. Logo, como p_2 é aplicação quociente, $g^{-1}(U)$ é um subconjunto aberto em P^2. Portanto g é uma aplicação contínua.

Considere então o homomorfismo induzido no grupo fundamental,

$$g_* : \pi_1(P^2) \to \pi_1(S^1).$$

Sabemos que $\pi_1(P^2) \simeq \mathbb{Z}_2$ é cíclico de ordem 2 e $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ é cíclico infinito. Assim o homomorfismo g_* deve ser o homomorfismo trivial. De fato, seja $g_* : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ o homomorfismo. Temos que $\mathbb{Z}_2$ é gerado por um t tal que $t^2 = 1$ e $g_*(1) = 1$. Suponhamos agora que $g_*(t) = s^k$, tal que $k \neq 0$. Assim

$$g_*(1) = g_*(t \cdot t) = g_*(t) \cdot g_*(t) = s^k \cdot s^k = s^{2k} \neq 1, \text{ pois } k \neq 0,$$

o que é um absurdo.

Por outro lado, seja $[\alpha]$ uma classe de equivalência de caminhos em S^2 tal que os pontos extremos destes caminhos sejam x_0 e $-x_0$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = -x_0$.

Temos, por hipótese, que $f(-x_0) = -f(x_0)$. Logo os pontos extremos dos caminhos da classe $[(f \circ \alpha)] = f_*([\alpha])$ são $f(x_0)$ e $-f(x_0)$, que são pontos antipodais em S^1.

Seja novamente o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_2"'] & S^1 \arrow[d, "p_1"] \\ P^2 \arrow[r, "g"'] & P^1 \end{tikzcd}$$

Definamos $p_{2*}([\alpha])$ e $p_{1*}(f_*([\alpha]))$ como sendo $[(p_2 \circ \alpha)]$ e $[p_1 \circ (f \circ \alpha)]$ respectivamente.

Temos que $(p_2 \circ \alpha)(0) = p_2(x_0) = \overline{x}_0 = \{x_0, -x_0\}$ e

$$(p_2 \circ \alpha)(1) = p_2(-x_0) = -\overline{x}_0 = \{x_0, -x_0\}.$$

Portanto $p_{2*}([\alpha]) = [(p_2 \circ \alpha)]$ é uma classe de laços com ponto base $\overline{x}_0$ em P^2.

Temos também $(p_1 \circ (f \circ \alpha))(0) = p_1(f(x_0)) = \overline{f(x_0)}$ e

$$(p_1 \circ (f \circ \alpha))(1) = p_1(f(-x_0)) = p_1(-f(x_0)) = \overline{f(x_0)}.$$

Portanto $p_{1*}(f_*([\alpha])) = [p_1 \circ (f \circ \alpha)]$ é uma classe de laços com ponto base $\overline{f(x_0)}$ em S^1. Logo $p_{2*}([\alpha])$ e $p_{1*}(f_*([\alpha]))$ pertencem, respectivamente, aos grupos fundamentais $\pi_1(P^2, \overline{x}_0)$ e $\pi_1(S^1, \overline{f(x_0)})$.

Afirmamos que $p_{2*}([\alpha]) \neq 1$ e $p_{1*}(f_*([\alpha])) \neq 1$. De fato, suponhamos que $p_{2*}([\alpha]) = 1$. Logo $[(p_2 \circ \alpha)] = [c_{\overline{x}_0}]$, onde $c_{\overline{x}_0}$ é o caminho constante no ponto $\overline{x}_0$ em P^2. Daí $(p_2 \circ \alpha) \sim c_{\overline{x}_0}$.

Considere agora c_{x_0} o caminho constante no ponto $x_0 \in S^2$. Temos

$$p_{2*}([c_{x_0}]) = [(p_2 \circ c_{x_0})] = [c_{\overline{x}_0}].$$

Logo $(p_2 \circ c_{x_0}) \sim c_{\overline{x}_0}$. Como $(p_2 \circ \alpha) \sim c_{\overline{x}_0}$ e $(p_2 \circ c_{x_0}) \sim c_{\overline{x}_0}$, temos que $(p_2 \circ \alpha) \sim (p_2 \circ c_{x_0})$. Como o ponto inicial de α e c_{x_0} são iguais, segue pelo Lema 1.3.2 que $\alpha \sim c_{x_0}$ e seus respectivos pontos finais são iguais. Mas isto é um absurdo, pois $-x_0 \neq x_0$. Assim temos que $p_{2*}([\alpha]) \neq 1$.

Suponhamos agora que $p_{1*}(f_*([\alpha])) = 1$. Logo $[p_1 \circ (f \circ \alpha)] = [c_{y_0}]$, onde $y_0 = \overline{f(x_0)}$. Assim $p_1 \circ (f \circ \alpha) \sim c_{y_0}$. Observe que $(f \circ \alpha)$ é um caminho em S^1 com ponto inicial $f(x_0)$ e ponto final $-f(x_0) = f(-x_0)$.

Dado $c_{f(x_0)}$ o caminho constante no ponto $f(x_0) \in S^1$, temos $[(p_1 \circ c_{f(x_0)})] = [c_{y_0}]$. Logo $(p_1 \circ c_{f(x_0)}) \sim c_{y_0}$.

Como $p_1 \circ (f \circ \alpha) \sim c_{y_0}$ e $(p_1 \circ c_{f(x_0)}) \sim c_{y_0}$, temos que $p_1 \circ (f \circ \alpha) \sim (p_1 \circ c_{f(x_0)})$. Como o ponto inicial de $(f \circ \alpha)$ e $c_{f(x_0)}$ são iguais, segue pelo Lema 1.3.2 que $(f \circ \alpha) \sim c_{f(x_0)}$ e seus respectivos pontos finais são iguais. Mas isto é um absurdo, pois $-f(x_0) \neq f(x_0)$. Assim temos que $p_{1*}(f_*([\alpha])) \neq 1$.

Segue pela comutatividade do diagrama que $g_*(p_{2*}([\alpha])) = p_{1*}(f_*([\alpha]))$, onde

$$g_* : \pi_1(P^2, \overline{x}_0) \to \pi_1(P^1, \overline{f(x_0)}).$$

Assim g_* leva $p_{2*}([\alpha]) \neq 1$ em $p_{1*}(f_*([\alpha])) \neq 1$. Mas isto contradiz o fato de g_* ser trivial. Portanto não existe uma aplicação contínua $f : S^2 \to S^1$ que preserve pontos antipodais. $\square$

2.2 O caso geral

Nesta secção veremos uma idéia da demonstração do Teorema 2.1.1 no caso geral.

Teorema 2.2.1. *Se $f : S^n \to S^m$ é contínua e preserva pontos antipodais, então $n \leq m$. Em particular, não existe aplicação contínua $f : S^n \to S^{n-1}$ que preserva pontos antipodais.*

Idéia da demonstração: Dividiremos a idéia da demonstração em três passos.

Passo 1: Sejam $a_n = (1, 0, 0, ..., 0) \in S^n$ o ponto base de S^n e $\mathbb{Z}_2$ o corpo com 2 elementos.

Seja $p_n : S^n \to P^n$ a projeção quociente, que é uma aplicação de recobrimento.

Provaremos primeiramente que, se $\alpha : I \to S^n$ é qualquer caminho ligando a_n ao seu antipodal $-a_n$, então $(p_n \circ \alpha)$ representa o elemento não nulo de $H_1(P^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Se α é o caminho usual $\beta(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, 0, ..., 0)$, com $t \in [0, 1] = I$, então β define um homeomorfismo $\beta' : (I, \partial I) \to (E^1_+, S^0)$, onde E^1_+ denota o hemisfério superior fechado de S^1.

A projeção quociente $p_1 : S^1 \to P^1$ aplica (E^1_+, S^0) sobre (P^1, P^0), transformando S^0 em um único ponto.

Por resultados de homologia singular e de CW - complexos, pode-se mostrar que $p_{1*} : H_1(E^1_+, S^0, \mathbb{Z}_2) \to H_1(P^1, P^0, \mathbb{Z}_2)$ leva um gerador de $H_1(E^1_+, S^0, \mathbb{Z}_2)$ em um ciclo fundamental para a 1-célula de P^n. Além disso, a aplicação identidade, considerada como um 1-simplexo singular $i : \Delta_1 \to I$, gera $H_1(I, \partial I, \mathbb{Z}_2)$ e, portanto, o 1-simplexo singular $(p_1 \circ \beta \circ i) = (p_1 \circ \beta)$ gera $H_1(P^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Assim $(p_n \circ \beta)$ representa o elemento não nulo de $H_1(P^n, \mathbb{Z}_2)$.

Considere agora um caminho qualquer α de a_n a $-a_n$ e também a 1-cadeia singular $(\alpha - \beta)$, onde $\beta : I \to S^n$ tal que $\beta(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t, 0, ..., 0)$.

Como $\partial(\alpha - \beta) = 0$, temos que $(\alpha - \beta)$ é 1-ciclo singular de S^n. No caso $n > 1$, temos $H_1(S^n) = 0$, e daí existe d uma 2-cadeia singular tal que $(\alpha - \beta) = \partial(d)$. Temos então $p_{n\#}(\alpha - \beta) = (p_n \circ \alpha) - (p_n \circ \beta) = p_{n\#}(\partial(d)) = \partial(p_{n\#}(d)) = \partial(p_n \circ d)$, de modo que $(p_n \circ \alpha)$ e $(p_n \circ \beta)$ representam o mesmo elemento em $H_1(P^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$, ou seja, $(p_n \circ \alpha)$ gera $H_1(P^n, \mathbb{Z}_2)$.

Agora, se $n = 1$, usamos o fato de que a aplicação $p_1 : S^1 \to P^1$ tem grau 2. Como $(\alpha - \beta)$ é um ciclo singular de S^1, temos que o ciclo $(p_n \circ \alpha) - (p_n \circ \beta)$ representa um múltiplo par do gerador de $H_1(P^1, \mathbb{Z}_2)$. Ou seja, $(p_n \circ \alpha)$ e $(p_n \circ \beta)$ representam o mesmo elemento em $H_1(P^1, \mathbb{Z}_2)$.

Temos então que $(p_n \circ \alpha)$ gera $H_1(P^1, \mathbb{Z}_2)$.

Passo 2: Seja $f : S^n \to S^m$ uma aplicação contínua que preserva pontos antipodais. Considere $\rho : S^m \to S^m$ a rotação que leva o ponto $f(a_n)$ no ponto base a_m de S^m. Temos que $g = (\rho \circ f)$ é contínua. Além disso,

$$g(-x) = (\rho \circ f)(-x) = \rho(-f(x)) = -(\rho \circ f)(x) = -g(x).$$

Assim g preserva pontos antipodais e temos também que $g(a_n) = a_m$.

Considere a aplicação $h : P^n \to P^m$, induzida por g, como mostra o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_n"'] & S^m \arrow[d, "p_m"] \\
P^n \arrow[r, "h"'] & P^m
\end{tikzcd}$$

Temos $h(p_n(x)) = p_m(g(x))$. Mostremos que $h_* : H_1(P^n, \mathbb{Z}_2) \to H_1(P^m, \mathbb{Z}_2)$ é não trivial. Para isto, seja α um caminho em S^n de a_n a $-a_n$. Desde que g preserva pontos antipodais, temos $g(-a_n) = -g(a_n) = -a_m$. Assim $(g \circ \alpha)$ é um caminho em S^m, com $(g \circ \alpha)(0) = g(a_n) = a_m$ e $(g \circ \alpha)(1) = g(-a_n) = -a_m$.

Considere a aplicação em nível de cadeia, $h_\# : C_1(P^n, \mathbb{Z}_2) \to C_1(P^m, \mathbb{Z}_2)$.

Temos que $h_\#((p_n \circ \alpha)) = (p_m \circ g \circ \alpha)$. Assim, pelo passo 1, h_* leva o gerador de $H_1(P^n, \mathbb{Z}_2)$ no gerador de $H_1(P^m, \mathbb{Z}_2)$.

Passo 3: Seja $k = m$ ou $k = n$. Por [15], Corolário 53.6, temos que existe um isomorfismo natural

$$k^* : H^1(P^k, \mathbb{Z}_2) \to Hom_{\mathbb{Z}_2}(H_1(P^k, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2).$$

Temos então o diagrama comutativo,

$$\begin{tikzcd}
H^1(P^m, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "k^*"'] & H^1(P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[d, "k^*"] \\
Hom_{\mathbb{Z}_2}(H_1(P^m, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\varphi"'] & Hom_{\mathbb{Z}_2}(H_1(P^n, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

onde $\varphi(l) = (l \circ h_*)$, para todo homomorfismo $l : H_1(P^m, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$.

Como h_* é não trivial (pelo passo 2), temos que $h^* : H^1(P^m, \mathbb{Z}_2) \to H^1(P^n, \mathbb{Z}_2)$ é também não trivial.

Seja então $u \in H^1(P^m, \mathbb{Z}_2)$, com $u \neq 0$. Então $h^*(u) \neq 0$. Como h^* é um homomorfismo de anéis, temos que $h^*(u^n) = (h^*(u))^n$.

Por [15], Teorema 68.3, temos que $(h^*(u))^n \neq 0$. Assim $u^n \in H^1(P^m, \mathbb{Z}_2)$ é não trivial. Segue do mesmo teorema que $m \geq n$, pois caso contrário teríamos $u^n = 0$. $\square$

Corolário 2.2.2. *Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicacao contínua tal que $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in S^n$. Entao existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$.*

Demonstração: Suponha o contrário. Ou seja, $f(x) \neq 0$, para todo $x \in S^n$. Seja $x \in S^n$. Logo podemos definir uma aplicação $g : S^n \to S^{n-1}$, onde

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

Temos que g é uma aplicação contínua, pois f o é. Mostremos que g é uma aplicação que preserva pontos antipodais. De fato, seja $x \in S^n$,

$$g(-x) = \frac{f(-x)}{|f(-x)|} = \frac{-f(x)}{|-f(x)|} = \frac{-f(x)}{|f(x)|} = -\frac{f(x)}{|f(x)|} = -g(x).$$

Assim, pelo Teorema 2.2.1, temos um absurdo. Logo existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$. $\square$

O corolário seguinte é conhecido como **Teorema Clássico de Borsuk-Ulam**.

Corolário 2.2.3. *Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Então existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Em particular, f não é injetora.*

Demonstração: Vamos supor que, para cada ponto $x \in S^n$, $f(x) \neq f(-x)$. Definamos uma aplicação $g : S^n \to \mathbb{R}^n$, onde $g(x) = f(x) - f(-x)$. Então

$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x) \ e \ g(x) \neq 0,$$

para todo $x \in S^n$. Além disso g é contínua, pois f o é.

Mas o fato de $g(x) \neq 0$, para todo $x \in S^n$, contradiz o Corolário 2.2.2. Portanto existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. $\square$

Corolário 2.2.4. *Nenhum subconjunto do $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo a S^n.*

Demonstração: Suponha que exista um subconjunto A do espaço $\mathbb{R}^n$ tal que A seja homeomorfo a S^n. Logo existe uma aplicação contínua e bijetora $f : S^n \to A$. Sejam $i : A \to \mathbb{R}^n$ a aplicação inclusão e $(i \circ f) : S^n \to \mathbb{R}^n$. Claramente $(i \circ f)$ é injetora e contínua, pois f é contínua, injetora e i é contínua.

Mas, pelo Corolário 2.2.3, temos que $(i \circ f)$ não pode ser injetora. Logo temos uma contradição.

Portanto A não pode ser homeomorfo a S^n. $\square$

Capítulo 3

Ações Livres e o Número de Lefschetz

Neste capítulo veremos um teorema que fornece uma relação interessante entre ações livres de grupos finitos em variedades fechadas e o número de Lefschetz.

Antes de estudarmos este teorema, que será de grande importância no próximo capítulo, necessitamos recordar alguns resultados da Teoria de Pontos Fixos. A referência principal deste capítulo é o artigo [8], de D.H. Gottilieb.

3.1 O Índice de Pontos Fixos

Primeiramente definiremos o índice de ponto fixo de aplicações $g : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onde V é aberto.

Definição 3.1.1. *Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $g : V \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Dizemos que $(\mathbb{R}^n, g, V)$ é uma terna **admissível** se o conjunto,*

$$Fix(g) = \{x \in V \mid g(x) = x\},$$

dos pontos fixos de g é compacto.

Observe que se $i : V \to \mathbb{R}^n$ denota a aplicação inclusão, então

$$(i - g)^{-1}(0) = \{x \in V \mid (i - g)(x) = 0\} = \{x \in V \mid g(x) = x\} = Fix(g).$$

Dada a terna admissível $(\mathbb{R}^n, g, V)$, denotaremos por K o conjunto compacto $Fix(g)$. Seja D uma bola fechada em torno da origem contendo K, isto é, $K \subset D$. Considere a composta

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \overset{(\mathrm{I})}{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K) \overset{(\mathrm{II})}{\cong} H_n(V, V - K)$$

$$H_n(V, V - K) \xrightarrow{(i-g)_*} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}),$$

com (I) sendo isomorfismo, pois $\mathbb{R}^n - \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}^n - D$, j_* a induzida da inclusão $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - D) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K)$ e o isomorfismo (II) dado por excisão (ver [17], página 45, teorema 2.11).

Como $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, segue que a composta acima é, na verdade, um endomorfismo de $\mathbb{Z}$. Logo este endomorfismo é da forma

$$x \longmapsto I(\mathbb{R}^n, g, V).x,$$

onde $I(\mathbb{R}^n, g, V)$ é o único inteiro que determina o endomorfismo dado pela composta.

Definição 3.1.2. *Chamamos de **índice dos pontos fixos de** g o inteiro $I(\mathbb{R}^n, g, V)$, denotado, quando não houver perigo de confusão, simplesmente por $I(g)$.*

Proposição 3.1.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $U' \subset \mathbb{R}^{n'}$ dois subconjuntos abertos e $f : U \to \mathbb{R}^{n'}$, $g : U' \to \mathbb{R}^n$ aplicações contínuas. Considere as aplicações compostas*

$$(g \circ f) : V = f^{-1}(U') \to \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$(f \circ g) : V' = g^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{n'}$$

Então $Fix(g \circ f)$ é homeomorfo a $Fix(f \circ g)$. Além disso, se estes conjuntos forem compactos, temos também que $I(f \circ g) = I(g \circ f)$.

Demonstração: Ver [7], página 34, proposição 4.10. □

Veremos agora a definição de Índice de Pontos Fixos para aplicações definidas em espaços mais gerais.

Definição 3.1.3. *Um espaço $X \subset Y$ é dito um **retrato de vizinhança** (em Y) se existem um aberto $U \subset Y$ tal que $X \subset U \subset Y$ e uma função $r : U \to X$, chamada de **retração**, tal que $(r \circ i) = id_X$, onde i é a aplicação inclusão, $i : X \to U$, e id_X é a aplicação identidade em X.*

Definição 3.1.4. *Um espaço X é dito um **retrato de vizinhança euclidiana** (abreviadamente ENR) se X é homeomorfo a um retrato de vizinhança $Y \subset \mathbb{R}^n$, para algum n.*

Os espaços ENR são muito importantes para uma generalização da definição do índice. As variedades compactas são exemplos de espaços ENR.

Definição 3.1.5. *Uma terna (X, f, U) é dita **admissível** se $U \subset X$ é um aberto, $f : U \to X$ é uma aplicação contínua e $Fix(f)$ é um subconjunto compacto.*

Proposição 3.1.2. *Sejam Y um espaço topológico, $U \subset Y$ um aberto ENR e $h : U \to Y$ uma aplicação contínua. Então*
1) existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ (n conveniente) tal que

$$h = (\beta \circ \alpha) : U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} Y.$$

2) se $Fix(h)$ é compacto, o índice de

$$(\alpha \circ \beta) : \beta^{-1}(U) \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

está definido e é independente da fatoração de h, isto é, da escolha de α e β.

Demonstração: Ver [7], página 44, proposição 5.9. □

Definição 3.1.6. *Sejam (Y, h, U) uma terna admissível, Y um espaço topológico, $U \subset Y$ um aberto ENR e $h : U \to Y$ uma aplicação contínua. Assim temos que*

$$I(Y, h, U) = I(\mathbb{R}^n, (\alpha \circ \beta), \beta^{-1}(U)).$$

Observação 3.1.1. *Se $Y = \mathbb{R}^n$, podemos escolher o aberto $V = U$ (que é obviamente ENR) e tomarmos $\alpha = id$, $\beta = h$. Logo é visto que a definição acima coincide com a Definição 3.1.2. Portanto a definição dada realmente estende a anterior.*

Proposição 3.1.3. *Sejam (Y, h, U) uma terna admissível, Y um espaço topológico, $U \subset Y$ um aberto ENR e $h : U \to Y$ uma aplicação contínua.*
(1) Se $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, com U_i aberto, para todo i, e $U_i \cap U_j \cap Fix(h) = \emptyset$, se $i \neq j$, então

$$I(h) = \sum_{i=1}^{n} I(h_{|U_i}).$$

(2) Se $h_t : U \to Y$ é uma homotopia, com $0 \leq t \leq 1$, (Y, h_t, U) é admissível, para todo t, e $\bigcup_t$ Fix(h_t) é compacto, então $I(h_0) = I(h_1)$.

Demonstração: Ver [3], página 80, § C. □

Observação 3.1.2. *Nas hipóteses da proposição acima, ítem (1), se x_i é um ponto fixo de h, com $x_i \in U_i$, denotaremos $I(h_{|U_i})$ por $I(h, x_i)$.*

A Proposição 3.1.1 é uma propriedade do índice, chamada de **comutatividade**, o item (1), da Proposição 3.1.3, é uma outra propriedade do índice, chamada de **aditividade** e o item (2), da Proposição 3.1.3, é a propriedade chamada de **invariância homotópica**.

Teorema 3.1.1. ***(Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz)*** *Se X é um CW-complexo finito e $f : X \to X$ é uma aplicação tal que $\Lambda_f \neq 0$, então f tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [4]. □

Teorema 3.1.2. ***(Lefschetz-Hopf)*** *Sejam X um espaço ENR compacto e $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Então $I(f) = \Lambda_f$.*

Demonstração: Ver [5]. □

3.2 O Resultado Principal

O nosso objetivo, nesta secção, é demonstrar o resultado principal do capítulo que, sob certas hipóteses, relaciona a ordem de um grupo G que atua livremente em uma variedade fechada M com o número de Lefschetz de uma aplicação equivariante $f : M \to M$.

Antes disto, veremos algumas definições e resultados que serão utilizados na demonstração do teorema.

Sejam M uma variedade fechada (compacta e sem bordo), que tem a estrutura de um CW - complexo finito, e G um grupo finito atuando livremente em M. Seja $f : M \to M$ uma aplicação contínua e equivariante.

Considere o espaço de órbitas $\frac{M}{G}$ e a aplicação $\overline{f} : \frac{M}{G} \to \frac{M}{G}$ definida por $\overline{f}(G.x) = G.f(x)$. Temos que $\overline{f}$ está bem definida, pois se $G.x = G.y$, com $x, y \in M$, logo $f(G.x) = f(G.y)$.

Como f é uma aplicação equivariante, segue facilmente que $G.f(x) = G.f(y)$ e pela definição de $\overline{f}$, temos que $\overline{f}(G.x) = \overline{f}(G.y)$.

Considere agora o seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ \frac{M}{G} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \frac{M}{G} \end{tikzcd}$$

onde $\pi : M \to \dfrac{M}{G}$, definido por $\pi(x) = G.x$, é a projeção quociente.

O diagrama acima é comutativo, pois

$$(\pi \circ f)(x) = \pi(f(x)) = G.f(x) = \overline{f}(G.x) = \overline{f}(\pi(x)) = (\overline{f} \circ \pi)(x).$$

Como G é um grupo finito, temos que o grupo formado pelos homeomorfismos $g : M \to M$, onde $g(x) = g.x$ (g atuando em x), com $x \in M$, é também finito. Como G atua livremente em M, segue que M é propriamente descontínuo.

Portanto, através da Proposição 1.3.1, concluímos que $\pi : M \to \dfrac{M}{G}$, onde $\pi(x) = G.x$, com $x \in M$, é uma projeção de recobrimento. Logo, pelo Teorema 1.3.4, temos que π é uma fibração.

Daí $\dfrac{M}{G}$ tem estrutura de CW - complexo finito e por [7], página 64, teorema 8.10, segue que existe $h : \dfrac{M}{G} \to \dfrac{M}{G}$, tal que $h \sim \overline{f}$ e $Fix(h)$ é um conjunto finito.

Partindo destas considerações, demonstraremos alguns lemas:

Lema 3.2.1. *A aplicação $h : \dfrac{M}{G} \to \dfrac{M}{G}$ se levanta a uma aplicação $\tilde{h} : M \to M$ equivariante tal que $\tilde{h} \sim f$.*

Demonstração: Veremos dois modos de demonstração deste lema, um mais detalhado e a outro mais sucinto.

Primeiro modo: Seja H uma homotopia entre $\overline{f}$ e h. Logo $H : \dfrac{M}{G} \times [0,1] \to \dfrac{M}{G}$ é uma aplicação contínua, $H(\overline{x}, 0) = \overline{f}(\overline{x})$ e $H(\overline{x}, 1) = h(\overline{x})$.

Considere o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ \frac{M}{G} \arrow[r, "\overline{f}"'] & \frac{M}{G} \end{tikzcd}$$

Como π é fibração, para qualquer homotopia $H' : M\times[0,1] \to \dfrac{M}{G}$ começando em $(\pi\circ f)$ (isto é, $H'(x,0) = (\pi\circ f)(x)$, para todo $x \in M$), existe uma homotopia $\tilde{H} : M\times[0,1] \to M$ começando em f (isto é, $\tilde{H}(x,0) = f(x)$, para todo $x \in M$) tal que $\pi \circ \tilde{H} = H'$.

Seja a composta,

$$\begin{array}{ccccc} M \times [0,1] & \xrightarrow{(\pi,id)} & \dfrac{M}{G} \times [0,1] & \xrightarrow{H} & \dfrac{M}{G} \\ (x,t) & \longmapsto & (\pi(x),t) & \longmapsto & H(\pi(x),t) \end{array}$$

e tome $H' = H \circ (\pi, id)$. Observe que

$$H \circ (\pi, id)(x,0) = H(\pi(x),0) = \overline{f}(\pi(x)) = (\overline{f} \circ \pi)(x) = (\pi \circ f)(x).$$

Assim existe uma homotopia $\tilde{H} : M \times [0,1] \to M$ começando em f tal que $(\pi \circ \tilde{H}) = H \circ (\pi, id)$. Daí temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} M \times [0,1] \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "(\pi,id)"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ \dfrac{M}{G} \times [0,1] \arrow[r, "H"'] & \dfrac{M}{G} \end{tikzcd}$$

Como $\tilde{H}$ começa em f, temos que $\tilde{H}(x,0) = f(x)$, para todo $x \in M$.

Tomemos $\tilde{h}(x) = \tilde{H}(x,1)$, com $x \in M$ ($\tilde{h} : M \to M$).

Observe que $\tilde{H} : M \times I \to M$ é uma homotopia tal que $\tilde{H}(x,0) = f(x)$, para todo $x \in M$, e $\tilde{H}(x,1) = \tilde{h}(x)$, para todo $x \in M$. Logo concluímos que $f \sim \tilde{h}$.

Seja agora o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ \dfrac{M}{G} \arrow[r, "h"'] & \dfrac{M}{G} \end{tikzcd}$$

Mostremos que h se levanta a $\tilde{h}$, ou seja, que o diagrama acima é comutativo. Para todo $x \in M$ temos

$$(\pi \circ \tilde{H})(x,1) = \pi(\tilde{H}(x,1)) = \pi(\tilde{h}(x)) = (\pi \circ \tilde{h})(x),$$

$$(H \circ (\pi, id))(x,1) = H(\pi(x),1) = h(\pi(x)) = (h \circ \pi)(x).$$

Portanto segue que $(\pi \circ \tilde{h})(x) = (h \circ \pi)(x)$, para todo $x \in M$.

Sendo M um G-espaço, $f : M \to M$ uma aplicação equivariante, $\overline{f} : \dfrac{M}{G} \to \dfrac{M}{G}$, com $\overline{f}(G.x) = G.f(x)$, e $H : \dfrac{M}{G} \times [0,1] \to \dfrac{M}{G}$, com $H(\overline{x}, 0) = \overline{f}(\overline{x})$, para todo $\overline{x} \in \dfrac{M}{G}$, segue por [2], página 97, Teorema 7.3, que $\tilde{h}$ é equivariante.

Segundo modo: Seja $H : \dfrac{M}{G} \times I \to \dfrac{M}{G}$ uma homotopia entre $\overline{f}$ e h. Logo

$$H(\overline{x}, 0) = \overline{f}(\overline{x}) \text{ e } H(\overline{x}, 1) = h(\overline{x}),$$

para qualquer $\overline{x} \in \frac{M}{G}$.

Do fato de M ser variedade compacta, G um grupo finito, f uma aplicação contínua equivariante e a ação de G em M ser livre, temos que as hipóteses do Teorema 7.3 de [2] são satisfeitas. Logo, por este teorema, existe uma homotopia equivariante

$$\tilde{H} : M \times I \to M$$

com $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in X$, tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times [0,1] \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "(\pi, id)"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\
\dfrac{M}{G} \times [0,1] \arrow[r, "H"'] & \dfrac{M}{G}
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Considere $\tilde{h} : M \to M$ dada por $\tilde{h}(x) = \tilde{H}(x, 1)$, para cada $x \in M$. Temos que $\tilde{h}$ é equivariante, pois $\tilde{H}$ é homotopia equivariante, e

$$(\pi \circ \tilde{h})(x) = (\pi \circ \tilde{H})(x, 1) = (H \circ (\pi, id))(x, 1) = H(\pi(x), 1) = h(\pi(x)) = (h \circ \pi)(x).$$

Ou seja, existe $\tilde{h} : M \to M$ equivariante tal que $\tilde{h} \sim f$ e o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\
\dfrac{M}{G} \arrow[r, "h"'] & \dfrac{M}{G}
\end{tikzcd}$$

é comutativo. $\square$

Observação 3.2.1. *Como $\tilde{h} \sim f$, concluímos pelo item (2), da Proposição 3.1.3, que $I(\tilde{h}) = I(f)$.*

Lema 3.2.2. *Se $\overline{x} = G.x$ é fixo por h, ou seja, $h(\overline{x}) = \overline{x}$, e $\overline{x} = \{x, x_1, ..., x_{|G|-1}\}$ é a órbita de x, então $\overline{x} = \{x, x_1, ..., x_{|G|-1}\}$ é invariante por $\tilde{h}$.*

Demonstração: Seja x_i pertencente à órbita de x. Logo existe $g \in G$ tal que $x_i = g.x$. Daí $\tilde{h}(x_i) = \tilde{h}(g.x)$. Agora

$$\overline{\tilde{h}(x_i)} = (\pi \circ \tilde{h})(x_i) = \pi(\tilde{h}(x_i)) = \pi(\tilde{h}(g.x)) =$$

$$= h(\pi(g.x)) = h(G.(g.x)) = h(G.x) = h(\overline{x}) = \overline{x}.$$

Assim segue que $\tilde{h}(x_i) \in \overline{x}$ e portanto $\overline{x} = \{x, x_1, ..., x_{|G|-1}\}$ é invariante por $\tilde{h}$. □

Lema 3.2.3. *A aplicação contínua $\tilde{h}$ restrita à órbita de x, ou deixa todos os pontos fixos ou não deixa pontos fixos, isto é, $\tilde{h}|_{\overline{x}} = id$ ou $\tilde{h}(x_i) \neq x_i$, para qualquer $x_i \in \overline{x}$.*

Demonstração: Suponha que exista $x_k \in \overline{x}$ tal que $\tilde{h}(x_k) \neq x_k$. Temos que existe $g_k \in G$ tal que $x_k = g_k.x$. Assim $\tilde{h}(x_k) = \tilde{h}(g_k.x) = g_k.\tilde{h}(x) \neq g_k.x$ e temos então $\tilde{h}(x) \neq x$.

Seja $x_i \in \overline{x}$. Logo existe $g_i \in G$ tal que $x_i = g_i.x$. Assim

$$\tilde{h}(x_i) = \tilde{h}(g_i.x) = g_i.\tilde{h}(x) \neq g_i.x = x_i.$$

Portanto $\tilde{h}(x_i) \neq x_i$, para qualquer $x_i \in \overline{x}$. □

Vamos agora ver o resultado principal do capítulo.

Teorema 3.2.4. *Sejam M uma variedade fechada, que também é um CW - complexo finito, e G um grupo finito atuando livremente em M. Considere $f : M \to M$ uma aplicação equivariante. Então $|G|$ divide Λ_f.*

Demonstração: Nas hipóteses do teorema, de acordo com as considerações anteriores, temos $h : \dfrac{M}{G} \to \dfrac{M}{G}$, que pelo Lema 3.2.1, se levanta a $\tilde{h} : M \to M$ equivariante, com $\tilde{h} \sim f$.

Se $\tilde{h}$ não tem pontos fixos, isto é, $\tilde{h}(x) \neq x$, para todo $x \in M$, então $I(\tilde{h}) = 0$ (pelo Teorema 3.1.1 e Teorema 3.1.2). Assim, como $\tilde{h} \sim f$, temos pelo item (2), da Proposição

3.1.3, que $I(\tilde{h}) = I(f) = 0$. Daí, como $I(f) = \Lambda_f$ (ver Teorema 3.1.2), temos que $|G|$ divide Λ_f.

Agora vamos supor que $\tilde{h}$ tenha pontos fixos. Observe que, se x é ponto fixo de $\tilde{h}$, então como $(\pi \circ \tilde{h}) = (h \circ \pi)$, temos

$$h(\overline{x}) = h(\pi(x)) = \pi(\tilde{h}(x)) = \pi(x) = \overline{x}.$$

Assim h também possui pontos fixos.

Pelo Lema 3.2.3, podemos considerar $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ os pontos fixos de h, de forma que cada elemento de cada órbita $\overline{x}_i$, com $i = 1, ..., n$, seja fixado por $\tilde{h}$.

Seja $\overline{x}_i = G.x_i = \{x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{|G|}\}$ uma destas órbitas.

Dados $x_i^{i_1}$ e $x_i^{i_2}$ elementos pertencentes a $\overline{x}_i$. Temos $\tilde{h}(x_i^{i_1}) = x_i^{i_1}$, $\tilde{h}(x_i^{i_2}) = x_i^{i_2}$ e $I(\tilde{h}, x_i^{i_1}) = I(\tilde{h}, x_i^{i_2})$, pois o índice em cada ponto de uma órbita é o mesmo.

Assim seja k_i o índice de $\tilde{h}$ em cada elemento da órbita $\overline{x}_i$, com $i = 1, ..., n$. Segue que

$$I(\tilde{h}|_{\overline{x}_i}) = \sum_{j=1}^{|G|} I(\tilde{h}, x_i^j) = k_i + ... + k_i = |G|k_i.$$

Agora $I(\tilde{h}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} I(\tilde{h}|_{\overline{x}_i}) = |G|k_1 + ... + |G|k_n = |G|(k_1 + ... + k_n)$. Daí temos que $|G|$ divide $I(\tilde{h})$.

Mas $I(\tilde{h}) = I(f)$ e pelo Teorema 3.1.2, temos que $I(f) = \Lambda_f$. Logo $I(\tilde{h}) = \Lambda_f$.

Assim temos que $|G|$ divide Λ_f. $\square$

Corolário 3.2.5. *Se M ¶e uma variedade compacta, tamb¶em um CW - complexo ¯nito, e G ¶e um grupo ¯nito atuando livremente em M, ent˜ao $|G|$ divide $\chi(M)$, a caracter¶³stica de Euler de M.*

Demonstração: Seja $id : M \to M$ a aplicação identidade. Pelo item b), da definição 1.4.3, segue que $\Lambda_{id} = \chi(M)$ (M é uma variedade compacta).

Sejam $g \in G$ e $x \in M$, então $id(g.x) = g.x = g.id(x)$. Portanto id é uma aplicação equivariante contínua.

Logo, pelo Teorema 3.2.4, $|G|$ divide $\Lambda_{id} = \chi(M)$. $\square$

Corolário 3.2.6. *Sejam M ¶e uma variedade compacta, que tamb¶em ¶e um CW - complexo ¯nito, e G um grupo ¯nito n˜ao trivial atuando livremente em M. Considere $f : M \to M$*

uma aplicação contínua e equivariante. Então f não pode ser homotópica a uma aplicação constante.

Demonstração: Suponhamos que f seja homotópica à aplicação constante. Temos que, se c é a aplicação constante, então $I(c) = 1$ (ver [7], página 64, exemplo 8.9, item (b)).

Pelo Teorema 3.1.2, $\Lambda_f = I(f)$, e como $f \sim c$, segue que $I(f) = I(c) = 1$. Portanto $\Lambda_f = 1$. Mas, pelo Teorema 3.2.4, $|G|$ divide $\Lambda_f = 1$.

Daí segue um absurdo, pois G não é trivial. $\square$

Corolário 3.2.7. *Se G é um grupo finito, não trivial e atua livremente em S^{2n}, então $|G| = 2$.*

Demonstração: Como S^{2n} é um CW - complexo finito, temos

$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n dim H_n(X, \mathbb{Q}) = \Lambda_{id}.$$

Assim $\chi(S^{2n}) = 2$. Pelo Corolário 3.2.5, $|G|$ divide $\chi(S^{2n}) = 2$. Mas como G é não trivial, temos que $|G| = 2$. $\square$

Capítulo 4

Alguns Teoremas do Tipo Borsuk-Ulam

Neste capítulo veremos alguns teoremas do tipo Borsuk-Ulam. Antes disso, na seção 1, vamos estudar, sob certas hipóteses, a relação entre ações basicamente livres de grupos finitos no $\mathbb{R}^n$ e o determinante da matriz de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Como consequência desta relação, veremos, na seção 2, um teorema que será importante na demonstração de alguns teoremas do tipo Borsuk-Ulam. A referência principal deste capítulo é o artigo [8], de D.H. Gottilieb.

4.1 Ações basicamente livres e transformações lineares equivariantes

Definição 4.1.1. *Dizemos que um grupo finito G* **atua basicamente livre** *em $\mathbb{R}^n$ se ele atua fielmente em $\mathbb{R}^n$ e livremente em $(\mathbb{R}^n - \{0\})$.*

Definição 4.1.2. *Seja G um grupo atuando à esquerda no $\mathbb{R}^n$. Dizemos que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$* **comuta** *com a ação de G se $T(g \cdot x) = g \cdot T(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (ou seja, T é equivariante).*

Lema 4.1.1. *Dada qualquer transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, denote por $[T]$ a matriz de T*

em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$. Considere os conjuntos

$$GL(\mathbb{R},n)^+ = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid T \text{ é linear e } det[T] > 0\} \text{ e}$$

$$GL(\mathbb{R},n)^- = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid T \text{ é linear e } det[T] < 0\}.$$

Então $GL(\mathbb{R},n)^+$ e $GL(\mathbb{R},n)^-$ são duas componentes conexas por caminhos de

$$GL(\mathbb{R},n) = \{T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid T \text{ é linear e } det[T] \neq 0\}.$$

Demonstração: Considere a função determinante

$$\begin{array}{rccc} det: & I\!M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & M & \longmapsto & detM \end{array}$$

onde $I\!M_n(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes $n \times n$ com coeficientes reais.

Temos que $(\mathbb{R} - \{0\})$ possui duas componentes conexas, $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$. Observe que

$$det^{-1}\ (\mathbb{R} - \{0\}) = I\!M_n(\mathbb{R}) - \{M \in I\!M_n(\mathbb{R}) \mid detM = 0\},$$

$$det^{-1}\ ((0,+\infty)) = \{M \in I\!M_n(\mathbb{R}) \mid detM > 0\} \simeq GL(\mathbb{R},n)^+ \text{ e}$$

$$det^{-1}\ ((-\infty,0)) = \{M \in I\!M_n(\mathbb{R}) \mid detM < 0\} \simeq GL(\mathbb{R},n)^-.$$

Como a função determinante é contínua, segue que $GL(\mathbb{R},n)^+$ e $GL(\mathbb{R},n)^-$ são conjuntos abertos em $I\!M_n(\mathbb{R})$, pois $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$ são abertos em $\mathbb{R}$. Identifiquemos uma matriz M com uma transformação linear $T_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $[T_M] = M$.

Mostremos que $GL(\mathbb{R},n)^+$ é conexo por caminhos. Ou seja, mostremos que para qualquer $T_M \in GL(\mathbb{R},n)^+$, existe um caminho ligando T_M à transformação identidade, denotada por I.

Como $detM > 0$, segue que T_M é inversível.

Agora sejam $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a transformação identidade e $[id] = I$.

Seja $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é convexo, segue que o segmento ligando x a $T_M(x) \in \mathbb{R}^n$, denotado por $[x, T_M(x)]$, está contido em $\mathbb{R}^n$.

Assim, para cada $x = (x_1, ..., x_n)$ fixo, defina $\gamma : [0,1] \to GL(\mathbb{R},n)^+$ por

$$\gamma(t)(x) = t.T_M(x) + (1-t).x.$$

Claramente γ é contínua, para cada $t \in [0,1]$, pois qualquer transformação linear o é.

Observe que $\gamma(0)(x) = x$, para qualquer $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Logo $\gamma(0) = id$ e $\gamma(1)(x) = T_M(x)$, para qualquer $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Portanto $\gamma(1) = T_M$.

Denotemos por $[\gamma(0)]$ e $[\gamma(1)]$ as respectivas matrizes das transformações $\gamma(0) = id$ e $\gamma(1) = T_M$. Assim $det[\gamma(0)] = detI > 0$ e $det[\gamma(1)] = detM > 0$.

Mostremos agora que $det[\gamma(t)] > 0$, para qualquer $t \in (0,1)$.

Observe que $\gamma(t)(x) = t.T_M(x) + (1-t).x$, com $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Assim

$$[\gamma(t)] = \alpha.M + \beta.I,$$

com $t \in (0,1)$, $0 < \alpha, \beta < 1$ e $\alpha + \beta = 1$.

Agora temos que $det[\gamma(t)] = (\alpha^n)detM + (\beta^n)detI = (\alpha^n)detM + \beta^n$. Como $detM > 0$, $(\alpha^n) > 0$ e $(\beta^n) > 0$, segue que $det[\gamma(t)] > 0$. Portanto $det[\gamma(t)] > 0$, para todo $t \in (0,1)$. Logo γ é um caminho ligando T_M à transformação identidade. Assim $GL(\mathbb{R}, n)^+$ é conexo por caminhos.

Observe agora que

$$\begin{array}{cccc} \mu: & GL(\mathbb{R},n)^+ & \longrightarrow & GL(\mathbb{R},n)^- \\ & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

é claramente um isomorfismo ($GL(\mathbb{R},n)^+ \simeq GL(\mathbb{R},n)^-$) e portanto temos que $GL(\mathbb{R},n)^-$ é também conexo por caminhos. □

Seja agora $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Como $T(0) = 0$, considere a restrição $T : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \to (\mathbb{R}^n - \{0\})$. Do fato de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ser homotopicamente equivalente a S^{n-1}, podemos considerar $\tilde{T} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ de forma que o diagrama abaixo comute,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n - \{0\} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n - \{0\} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S^{n-1} & \xrightarrow[\tilde{T}]{} & S^{n-1} \end{array}$$

onde f é uma equivalência de homotopia.

Definimos então o grau de T como sendo $deg(T) = deg(\tilde{T})$, como na definição 1.5.1.

(1)]/TR det [T |(=

Lema 4.1.2. *Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e $[T]$ a matriz de T em relação à base canônica. Então*

$$deg(T) = \frac{det[T]}{|det[T]|} = \pm 1.$$

Demonstração: Consideremos primeiramente o caso em que

(1) $det[T] > 0$:

Temos, pelo lema 4.1.1, que $GL(\mathbb{R}, n)^+$ e $GL(\mathbb{R}, n)^-$ são duas componentes conexas por caminhos. Logo existe um caminho ligando T à id, onde id é a aplicação identidade.

Seja $\delta : [0,1] \to GL(\mathbb{R}, n)^+$ tal que $\delta(0) = id$ e $\delta(1) = T$. Considere agora $T, id : \mathbb{R}^n$

6 BT/-_TD[(Ô(- 11.95 Tf -352.63 0.58 TD.1561)]TJ/F2 11.95 Tf 5.63 0 85.63)-646([0)2

$$deg(T) = deg\ (r) = (-1) = \frac{det[T]}{|det[T]|},$$

pois $det[T] < 0$. □

Finalmente provaremos um resultado que é uma aplicação do Teorema 3.2.4.

Teorema 4.1.3. *Se G é um grupo que atua basicamente livre em $\mathbb{R}^n$ e se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear que comuta com a ação de G, então $det[T] \geq 0$ ou $|G| = 1$ ou 2, onde $[T]$ indica a matriz de T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Vamos supor que $|G| > 2$. Temos que mostrar que $det[T] \geq 0$. Suponhamos então que $det[T] \neq 0$. Então T é um isomorfismo (existe a matriz inversa de $[T]$). Logo $T : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \to (\mathbb{R}^n - \{0\})$ é um homeomorfismo equivariante.

Como $(\mathbb{R}^n - \{0\})$ tem o mesmo tipo de homotopia que S^{n-1}, segue que o número de Lefschetz de T é dado por $\Lambda_T = \sum_{k=0}^{(n-1)} (-1)^k tr(T_{*k})$, onde $T_{*k} : H_k(S^{n-1}) \to H_k(S^{n-1})$ (ver Observação 1.4.2).

Como $H_0(S^{n-1}) = H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$ e $H_k(S^{n-1}) = 0$, para $k \notin \{0, (n-1)\}$, temos que $\Lambda_T = tr(T_{*0}) + (-1)^{n-1} tr(T_{*(n-1)})$. Do fato de T_{*k} ser um isomorfismo, segue que $\Lambda_T = 1 + (-1)^{n-1} degT = 1 + (-1)^{n-1} \frac{det[T]}{|det[T]|}$.

Agora se $|G| > 2$, então n tem que ser par. De fato, se n for ímpar, temos

$$\chi(S^{n-1}) = (-1)^0.1 + (-1)^{n-1}.1 = 2.$$

Pelo Corolário 3.2.5, segue que $|G|$ divide $\chi(S^{n-1}) = 2$. Mas isto é um absurdo, pois $|G| > 2$. Portanto n deve ser par.

Temos então $\Lambda_T = 1 - \frac{det[T]}{|det[T]|}$ e assim $\Lambda(T) = 0$ ou $\Lambda(T) = 2$. Mas como $|G| > 2$, temos que Λ_T só pode ser igual a zero, pois $|G|$ divide Λ_T (pelo Teorema 3.2.4). Agora como $\Lambda_T = 0$, segue que $\frac{det[T]}{|det[T]|} = 1$. Portanto $det[T] > 0$. □

Teorema 4.1.4. *Seja G um grupo finito atuando basicamente livre em um espaço vetorial V e seja W um subespaço próprio invariante. Então qualquer aplicação equivariante*

$$f : (V - \{0\}) \to W$$

deve conter 0 na sua imagem.

Demonstração: Seja $f : (V - \{0\}) \to W$ uma aplicação equivariante. Suponhamos que $0 \notin Imf$. Logo não existe $v \in (V - \{0\})$ tal que $f(v) = 0$. Seja

$$(i \circ f) : (V - \{0\}) \to (V - \{0\})$$

a composição, onde $i : (W - \{0\}) \to (V - \{0\})$ é a aplicação inclusão.

Para todo $g \in G$, temos $(i \circ f)(g.v) = g.(i \circ f)(v)$. Portanto $(i \circ f)$ é uma aplicação equivariante.

Considere $dimV = n$. Como W é subespaço próprio de V, segue que $dimW < n$. Assim suponha $dimW = m < n$. Temos que $(V - \{0\}) \simeq (\mathbb{R}^n - \{0\})$, que tem o mesmo tipo de homotopia que S^{n-1}, e $(W - \{0\}) \simeq (\mathbb{R}^m - \{0\})$, que tem o mesmo tipo de homotopia que S^{m-1}. Portanto $f : (V - \{0\}) \to (W - \{0\})$ pode ser vista como uma aplicação $f : S^{n-1} \to S^{m-1}$.

Agora seja $f_{*(n-1)} : H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{R} \to H_{n-1}(S^{m-1}) = \{0\}$. Como

$$(i \circ f)(v) = i(f(v)) = f(v), \text{ para qualquer } v \in (V - \{0\}),$$

temos que $(i \circ f)_{*(n-1)} = f_{*(n-1)}$. Agora como

$$(i \circ f)_{*(n-1)} : H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1}),$$

com $(i \circ f)_{*(n-1)}(\alpha) = k.\alpha$, onde α é um gerador de $H_{n-1}(S^{n-1})$, segue que $k = 0$. Assim $deg(i \circ f) = 0 = deg(cte)$, onde cte denota a aplicação constante. Temos então que $(i \circ f)$ é homotópica à aplicação constante. Mas isto é um absurdo, pelo Corolário 3.2.6. Portanto existe $v \in (V - \{0\})$ tal que $f(v) = 0$. $\square$

4.2 Teoremas do tipo Borsuk-Ulam

Seja $\mathbb{Z}_2 = \{1, t\}$ o grupo cíclico de ordem 2. Considere em $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$ a $\mathbb{Z}_2$-ação definida por $1.x = x$ e $t.x = -x$, para $x \in (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$. A **órbita** de $x \in (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$ é o conjunto $\mathbb{Z}_2.x = \{1.x, t.x\} = \{x, -x\}$. Como $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$ tem o mesmo tipo de homotopia que S^n, podemos enunciar o Teorema Clássico de Borsuk - Ulam da seguinte forma: "Se $f : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, então alguma órbita da $\mathbb{Z}_2$-ação em $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$ é aplicada em um único ponto de $\mathbb{R}^n$".

Seja ξ uma raíz k-ésima primitiva da unidade e considere o grupo $\{1, \xi, \xi^2, \xi^3, ..., \xi^{k-1}\}$, que é isomorfo ao grupo cíclico finito $\mathbb{Z}_k$. Em $\mathbb{C}$ definimos uma $\mathbb{Z}_k$-ação pela multiplicação complexa $\xi^j x$, para $j = 1, 2, \ldots, k$ e $x \in \mathbb{C}$. Podemos também definir uma $\mathbb{Z}_k$-ação em $\mathbb{C}^n$. Para cada $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, definimos $\xi^i.(z_1, ..., z_n) = (\xi^i.z_1, ..., \xi^i.z_n)$ (a multiplicação usual entre números complexos em cada coordenada).

Nesta secção estudamos a situação de uma aplicação contínua $f : (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \to \mathbb{C}^n$ e em que condições uma órbita da $\mathbb{Z}_k$-ação em $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ é aplicada em um único ponto.

Teorema 4.2.1. *Seja ξ uma ra¶z k - ¶sima primitiva da unidade. Seja*

$$f : (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \to \mathbb{C}^n$$

uma aplicacao cont¶nua. Entao existe $x \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \overline{\xi^i} f(\xi^i x) = 0$.

Demonstração: Seja ξ uma raíz k - ésima primitiva da unidade. Logo $\{1, \xi, \xi^2, ..., \xi^{k-1}\}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_k$ (grupo cíclico de ordem k).

Temos que $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ é isomorfo a $(\mathbb{R}^{2n+2} - \{0\})$. Mostremos que $\mathbb{Z}_k$ atua basicamente livre em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Seja $u \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$. Logo $u = (w_1, ..., w_{n+1})$, com $w_i \in \mathbb{C}$, para todo $i = 1, ..., (n+1)$.

Se $g.u = u$, com $g \in \{1, \xi, \xi^2, ..., \xi^{k-1}\}$, pela definição usual de multiplicação entre os números complexos, claramente segue que g pode ter somente o valor 1. Logo $\mathbb{Z}_k$ atua livremente em $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$.

Agora sejam $v \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ e $g \in \{1, \xi, \xi^2, ..., \xi^{k-1}\}$ tal que $g \neq 1$. Como $g \neq 1$, temos claramente $g.v \neq v$. Portanto $\mathbb{Z}_k$ atua fielmente em $\mathbb{C}^{n+1}$. Assim $\mathbb{Z}_k$ atua basicamente livre em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Agora $\mathbb{C}^n$ pode ser visto como um subespaço próprio invariante de $\mathbb{C}^{n+1}$, pois se $w \in \mathbb{C}^n$ e $g \in \{1, \xi, \xi^2, ..., \xi^{k-1}\}$, então $g.w \in \mathbb{C}^n$.

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} F: & (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i f(\xi^i x) \end{array}$$

Vamos mostrar que F é uma aplicação equivariante. Seja $\xi^r \in \mathbb{Z}_k$. Então

$$F(\xi^r x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i f(\xi^i \xi^r x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i f(\xi^{(i+r)} x) \overset{(i+r)=l}{=} \sum_{l=(1+r)}^{(k+r)} \bar{\xi}^{(l-r)} f(\xi^l x) =$$

$$= \sum_{l=(1+r)}^{(k+r)} \xi^{(r-l)} f(\xi^l x) = \xi^r (\sum_{l=(1+r)}^{(k+r)} \xi^{(-l)} f(\xi^l x)) = \xi^r (\sum_{l=(1+r)}^{k} \xi^{(-l)} f(\xi^l x) + \sum_{l=(k+1)}^{(k+r)} \xi^{(-l)} f(\xi^l x)) =$$

$$= \xi^r (\sum_{l=(1+r)}^{k} \xi^{(-l)} f(\xi^l x) + \sum_{l=1}^{r} \xi^{(-l)} f(\xi^l x)) = \xi^r (\sum_{l=1}^{k} \xi^{(-l)} f(\xi^l x)) = \xi^r F(x).$$

Portanto F é uma aplicação equivariante e pelo Teorema 4.1.4, segue que existe $x \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ tal que $F(x) = 0$, ou seja, existe $x \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i f(\xi^i x) = 0$.
$\square$

Observação 4.2.1. *Temos que* $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \cong (\mathbb{R}^{2n+2} - \{0\})$ *e* $(\mathbb{R}^{2n+2} - \{0\})$ *tem o mesmo tipo de homotopia que* S^{2n+1}*. Assim, pelo Teorema 4.2.1, segue que*

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\xi^i} f(\xi^i x) = 0,$$

para algum $x \in S^{2n+1}$*, e* $f : S^{2n+1} \to \mathbb{C}^n$ *aplicaœao cont¶nua.*

O conjunto $\{x, \xi x, \xi^2 x, ..., \xi^{k-1} x\}$*, onde* $x \in \mathbb{C}^{n+1}$*, ser¶a denominado uma* k **- órbita** *em* S^{2n+1}*.*

Corolário 4.2.2. *Dado* $k \geq 2$ *e* $f : S^{2n+1} \to \mathbb{C}^n$ *uma aplicaœao cont¶nua, existe uma* k*-¶orbita cuja imagem por* f *pertence a um hiperplano complexo de dimensœao* $(k-2)$*.*

Demonstração: Pela Observação 4.2.1, existe $x \in S^{2n+1}$ tal que $\sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i f(\xi^i x) = 0$. Seja $x_i = f(\xi^i x) \in \mathbb{C}^n$. Considere o conjunto constituído de $(k-1)$ vetores

$$\{(x_1 - x_k), ..., (x_{k-1} - x_k)\}.$$

Este conjunto é linearmente dependente, pois

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i (f(\xi^i x) - f(\xi^k x)) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i f(\xi^i x) - \sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i f(x) = -\sum_{i=1}^{k} \bar{\xi}^i f(x) =$$

$$= -(\bar{\xi} + \bar{\xi}^2 + ... + \bar{\xi}^{k-1} + 1) f(x) = -\frac{1(1 - \bar{\xi}^k)}{1 - \bar{\xi}} f(x) = 0.$$

Como o conjunto $\{(x_1 - x_k), ..., (x_{k-1} - x_k)\}$ é linearmente dependente, estes vetores pertencem a um subespaço vetorial de dimensão $(k-2)$. Logo a translação por x_k deste subespaço é um hiperplano de dimensão $(k-2)$ que contém os pontos $x_1, ..., x_{k-1}, x_k$. $\square$

Corolário 4.2.3. *Dado $k \geq 3$ e $f : S^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, existe uma k-órbita cuja imagem por f pertence a um hiperplano real de dimensão $(k-3)$.*

Demonstração: Seja $f : S^{2n+1} \to \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n$. Logo existe $x \in S^{2n+1}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{k} \bar{\xi}^j f(\xi^j x) = 0.$$

Sejam $\bar{\xi}^j = (a_j + ib_j)$ e $f(\xi^j x) = x_j$, com $j = 1, ..., k$. Segue que

$$\sum_{j=1}^{k} \bar{\xi}^j f(\xi^j x) = \sum_{j=1}^{k} a_j x_j + i \sum_{j=1}^{k} b_j x_j = 0 + i0.$$

Portanto temos duas equações: $\sum_{j=1}^{k} a_j x_j = 0$ e $\sum_{j=1}^{k} b_j x_j = 0$.

Usando o mesmo raciocínio do Corolário 4.2.2, vemos que os pontos $x_j = f(\xi^j x)$, $j = 1, \ldots, k$, pertencem à interseccção de dois hiperplanos reais, cada um com dimensão $(k-2)$. A intersecção destes dois hiperplanos nos dá um hiperplano real de dimensão $(k-3)$. □

Corolário 4.2.4. *Uma aplicação contínua $f : S^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$ leva uma 3 - órbita em um ponto.* □

Corolário 4.2.5. *Uma aplicação contínua $f : S^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$ leva alguma 4-órbita em um ou dois pontos, de modo que dois pares de pontos antipodais são cada um levados em um ponto.*

Demonstração: Considere o conjunto $\{i = \xi, -1 = \xi^2, -i = \xi^3, 1 = \xi^4\}$ constituído por todas as raízes do polinômio $x^4 - 1$. Logo $\sum_{i=1}^{4} \bar{\xi}^i f(\xi^i x) = -ix_1 + 1x_2 + ix_3 - 1x_4 = 0$, para algum $x \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$, onde $x_i = f(\xi^i x)$, com $i = 1, ..., 4$. Assim $(x_2 - x_4) + i(x_3 - x_1) = 0$ e portanto segue que $x_2 = x_4$ e $x_1 = x_3$.

Como $x_i = f(\xi^i x)$, com $i = 1, ..., 4$, temos que $f(\xi^2 x) = f(\xi^4 x)$ e $f(\xi^1 x) = f(\xi^3 x)$. Logo $f(-x) = f(x)$ e $f(ix) = f(-ix)$.

Agora se $f(x) \neq f(ix)$, então f leva a 4-órbita $\{ix, -1x, -ix, 1x\}$ em dois pontos distintos. Mas se $f(x) = f(ix)$, então f leva a 4 - órbita $\{ix, -1x, -ix, 1x\}$ em um único ponto. □

Teorema 4.2.6. *Sejam p um número primo e $f : S^n \to \mathbb{R}^r$ uma aplicação contínua. Se $n \geq r(p-1)$, então existe uma p-órbita cuja imagem é um único ponto.*

Demonstração: Sabemos que uma p-órbita é o conjunto $\{x, \xi x, \xi^2 x, ..., \xi^{p-1} x\}$, onde $x \in S^n$. Este conjunto é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

Se $p = 2$, então $n \geq r$. Se $n = r$, temos o Teorema Clássico de Borsuk-Ulam.

Se $n > r$, então $n = r + l$, com $l \geq 1$. Tome $i : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{r+l}$ como sendo a aplicação inclusão.

Seja $g = (i \circ f) : S^{r+l} \to \mathbb{R}^{r+l}$. Como g é contínua, segue que existe $x \in S^{r+l}$ tal que $g(x) = g(-x)$. Portanto $i(f(x)) = i(f(-x))$, ou seja, $f(x) = f(-x)$. Logo vale o Teorema Clássico de Borsuk-Ulam para $n > r$, ou seja, existe uma 2-órbita cuja imagem é um único ponto.

Suponhamos agora $p > 2$. Temos que n deve ser ímpar. De fato, como $p > 2$ e p é primo, temos que p é um número ímpar. Como $\mathbb{Z}_p$ atua livremente em S^n, pelo Corolário 3.2.7, temos que n deve ser ímpar.

Como $r(p-1)$ é par e n é ímpar, temos que $n > r(p-1)$.

Seja então $n = 2k - 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo $f : S^{2k-1} \to \mathbb{R}^r$.

Observe que $\mathbb{C}^k \simeq \mathbb{R}^{2k}$. Logo $(\mathbb{C}^k - \{0\}) \cong (\mathbb{R}^{2k} - \{0\})$ e $(\mathbb{R}^{2k} - \{0\})$ tem o mesmo tipo de homotopia que S^{2k-1}.

Defina agora $g : (\mathbb{C}^k - \{0\}) \to \mathbb{R}^r$, onde $g(z) = \|z\|.f(\frac{z}{\|z\|})$. Claramente g é contínua, pois f o é.

Agora dobremos as dimensões do domínio e contra-domínio de g e definamos a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc} G: & (\mathbb{C}^{2k} - \{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^r (\mathbb{C}^r \simeq \mathbb{R}^{2r}) \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & g(z_1) + ig(z_2) \end{array}$$

onde $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^k \simeq \mathbb{C}^{2k}$.

Pelo fato de g ser uma aplicação contínua, temos que G também é uma aplicação contínua.

Definiremos agora uma outra aplicação. Seja $F : (\mathbb{C}^{2k} - \{0\}) \to \mathbb{C}^{r(p-1)}$ tal que $F(z) = (G(z), G(z)^2, ..., G(z)^{p-1})$, onde $v^j = (v_1^j, ..., v_r^j)$, com $v = (v_1, ..., v_r)$ e $v_i \in \mathbb{C}$, para todo $i = 1, ..., r$.

Temos que $2k-1 > r(p-1)$. Logo $2k > r(p-1)$. Seja ξ uma raíz p-ésima primitiva da unidade. Como podemos ver $\mathbb{C}^{r(p-1)} \subset \mathbb{C}^n$, pelo Teorema 4.2.1, segue que existe $x \in (\mathbb{C}^{2k} - \{0\})$ tal que $\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^i F(\xi^i x) = 0$.

Portanto

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^i F(\xi^i x) = (\overline{\xi}G(\xi x), \overline{\xi}G(\xi x)^2, \overline{\xi}G(\xi x)^3, ..., \overline{\xi}G(\xi x)^{p-1}) +$$

$$+(\overline{\xi}^2 G(\xi^2 x), \overline{\xi}^2 G(\xi^2 x)^2, \overline{\xi}^2 G(\xi^2 x)^3, ..., \overline{\xi}^2 G(\xi^2 x)^{p-1}) + ... +$$

$$+(\overline{\xi}^{p-1} G(\xi^{p-1} x), \overline{\xi}^{p-1} G(\xi^{p-1} x)^2, \overline{\xi}^{p-1} G(\xi^{p-1} x)^3, ..., \overline{\xi}^{p-1} G(\xi^{p-1} x)^{p-1}) +$$

$$(G(x), G(x)^2, G(x)^3, ..., G(x)^{p-1}) = (0, 0, 0, ..., 0) \ (r(p-1) \text{ coordenadas}).$$

Assim segue as seguintes equações,

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^i G(\xi^i x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^i G(\xi^i x)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^i G(\xi^i x)^3 = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^i G(\xi^i x)^{p-1} = 0$$

Ou seja, colocando $x_i = G(\xi^i x)$ e $x_i^k = G(\xi^i x)^k$, $k = 2, ..., p-1$, temos

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^i x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^{i} x_i^3 = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{\xi}^{i} x_i^{p-1} = 0$$

Desde que x_i e x_i^k, com $k = 2, ..., p-1$, são vetores. Temos que as equações acima são equações vetoriais.

Denotemos agora por $x_i^{'}$ a primeira coordenada do vetor $x_i = G(\xi^i x) \in \mathbb{C}^r$, com $i = 1, ..., p$. Logo $(x_i^{'})^k$ é a primeira coordenada do vetor $x_i^k = G(\xi^i x)^k \in \mathbb{C}^r$, com $k = 2, ..., p-1$ e $i = 1, ..., p$.

Portanto, pelas equações anteriores, temos agora as seguintes equações,

$$\overline{\xi} x_1^{'} + \overline{\xi}^2 x_2^{'} + \overline{\xi}^3 x_3^{'} + ... + \overline{\xi}^{p-1} x_{p-1}^{'} + x_p^{'} = 0$$

$$\overline{\xi} (x_1^{'})^2 + \overline{\xi}^2 (x_2^{'})^2 + \overline{\xi}^3 (x_3^{'})^2 + ... + \overline{\xi}^{p-1} (x_{p-1}^{'})^2 + (x_p^{'})^2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\overline{\xi} (x_1^{'})^{p-1} + \overline{\xi}^2 (x_2^{'})^{p-1} + \overline{\xi}^3 (x_3^{'})^{p-1} + ... + \overline{\xi}^{p-1} (x_{p-1}^{'})^{p-1} + (x_p^{'})^{p-1} = 0$$

Desta forma, podemos escrever as equações acima em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} x_1^{'} & x_2^{'} & \dots & x_{p-1}^{'} & x_p^{'} \\ (x_1^{'})^2 & (x_2^{'})^2 & \dots & (x_{p-1}^{'})^2 & (x_p^{'})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{'})^{p-1} & (x_2^{'})^{p-1} & \dots & (x_{p-1}^{'})^{p-1} & (x_p^{'})^{p-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{\xi} \\ \overline{\xi}^2 \\ \vdots \\ \overline{\xi}^{p-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $1 + \overline{\xi} + \overline{\xi}^2 + ... + \overline{\xi}^{p-1} = 0$, segue que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^{'} & x_2^{'} & \dots & x_{p-1}^{'} & x_p^{'} \\ (x_1^{'})^2 & (x_2^{'})^2 & \dots & (x_{p-1}^{'})^2 & (x_p^{'})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{'})^{p-1} & (x_2^{'})^{p-1} & \dots & (x_{p-1}^{'})^{p-1} & (x_p^{'})^{p-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{\xi} \\ \overline{\xi}^2 \\ \vdots \\ \overline{\xi}^{p-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denotemos por A a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^{'} & x_2^{'} & \dots & x_{p-1}^{'} & x_p^{'} \\ (x_1^{'})^2 & (x_2^{'})^2 & \dots & (x_{p-1}^{'})^2 & (x_p^{'})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1^{'})^{p-1} & (x_2^{'})^{p-1} & \dots & (x_{p-1}^{'})^{p-1} & (x_p^{'})^{p-1} \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz A acima é uma matriz de Vandermonde. Portanto o determinante desta matriz é dado por $\prod_{i>j}(x_i^{'} - x_j^{'})$.

Podemos perceber, através de escalonamento e argumento de indução, que a forma escalonada de uma matriz de Vandermonde consiste de colunas e linhas compostas de entradas com valores iguais a 1 ou 0.

Sabemos que ξ é uma raíz p-ésima primitiva da unidade, assim os elementos do conjunto $\{1, \xi, \xi^2, ..., \xi^{p-1}\}$ são raízes do polinômio $x^p - 1$.

Temos que $\phi_p(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$. Assim

$$\phi_p(\xi) = \frac{\xi^p - 1}{\xi - 1} = \xi^{p-1} + \xi^{p-2} + ... + \xi + 1.$$

Mas $\phi_p(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, para qualquer p primo. Portanto a única soma com as raízes $1, \xi, \xi^2, ..., \xi^{p-1}$ a qual se iguala a zero, é a soma de todas elas $(1 + \xi + \xi^2 + ... + \xi^{p-1} = 0)$.

Daí, como a forma escalonada de uma matriz de Vandermonde consiste de colunas e linhas compostas de entradas com valores iguais a 1 ou 0, segue que a forma escalonada da matriz deve ser

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mas isto acontece se, e somente se, $x_1^{'} = x_2^{'} = ... = x_{p-1}^{'} = x_p^{'}$.

Portanto segue que as primeiras coordenadas dos vetores $x_1, x_2, ..., x_p$ coincidem. Analogamente obtemos o mesmo resultado para as j-ésimas coordenadas dos vetores x_i e x_i^k, com $i = 1, ..., p$ e $k = 2, ..., p-1$. Logo concluímos que $x_1 = x_2 = ... = x_p$. Ou seja,

$$G(x) = G(\xi x) = G(\xi^2 x) = ... = G(\xi^{p-1} x) \ (*),$$

para algum $x \in \mathbb{C}^{2k} - \{0\}$.

Como $x \in (\mathbb{C}^{2k} - \{0\})$, temos que $x = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^k$ e $x = (z_1, z_2) \neq (0, 0)$.

Observe que

$$G(x) = g(z_1) + ig(z_2),$$

$$G(\xi x) = g(\xi z_1) + ig(\xi z_2), ..., G(\xi^{p-1} x) = g(\xi^{p-1} z_1) + ig(\xi^{p-1} z_2).$$

Por $(*)$ e pelo fato de $z_1 \neq 0$ ou $z_2 \neq 0$, segue que

$$g(z) = g(\xi z) = g(\xi^2 z) = ... = g(\xi^{p-1} z) \ (**),$$

para algum $z \in (\mathbb{C}^k - \{0\})$.

Temos, por definição, que

$$g(z) = \|z\| f(\frac{z}{\|z\|}), \ g(\xi z) = \|\xi z\| f(\frac{\xi z}{\|\xi z\|}), ..., \ g(\xi^{p-1} z) = \|\xi^{p-1} z\| f(\frac{\xi^{p-1} z}{\|\xi^{p-1} z\|}).$$

Ou seja,

$$g(z) = \|z\| f(\frac{z}{\|z\|}), \ g(\xi z) = \|z\| f(\xi \frac{z}{\|z\|}), ..., \ g(\xi^{p-1} z) = \|z\| f(\xi^{p-1} \frac{z}{\|z\|}).$$

Agora, por $(**)$, concluímos que

$$f(\frac{z}{\|z\|}) = f(\xi \frac{z}{\|z\|}) = f(\xi^2 \frac{z}{\|z\|}) = ... = f(\xi^{p-1} \frac{z}{\|z\|}),$$

onde $\frac{z}{\|z\|} \in S^{2k-1}$.

Portanto temos que f aplica uma p-órbita em um único ponto. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BORSUK, K. Drei sätze über die n-dimensionale euklidische sphäre. **Fund. Math.**, v.20, n.1, p.177-190, 1933.

[2] BREDON, G. E. **Introduction to compact transformation groups**. New York: Academic Press, 1972.

[3] BROWN, R. F. **The lefschetz fixed point theorem**. Los Angeles: Copyright, 1971.

[4] CROOM, F. H. **Basic concepts of algebraic topology**. New York: Springer, 1978.

[5] DOLD, A. **Lectures on algebraic topology**. New York: Springer, 1972.

[6] FRALEIGH, J. B. **A first course in abstract algebra**. New York: Addison-Wesley, 1967.

[7] GONÇALVES, D. L.; Kiihl, J. C. S. **Teoria do índice**. Rio de Janeiro: IMPA, 1983.

[8] GOTTILIEB, D. H. The Lefschetz number and Borsuk - Ulam Theorems. **Pacific Journal of Mathematics**, v.103, n.1, p.29-37, Oct. 1980.

[9] HATCHER, A. **Algebraic topology**. New York: Cambridge University Press, 2002.

[10] HUSEMOLLER, D. **Fibre Bundles**. 2. ed. New York: Springer, 1966.

[11] LIMA, E. L. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.

[12] MASSEY, W. S. **Algebraic topology: an introduction**. New York: Springer, 1967.

[13] MASSEY, W. S. **Singular homology theory**. New York: Springer, 1980.

[14] MUNKHOLM, H. J. Borsuk-Ulam type theorems for proper $\mathbb{Z}_p$-actions on (mod p homology) n-spheres. **Math. Scand.**, v.24, p.167-185, 1969.

[15] MUNKRES, J. R. **Elements of algebraic topology**. New York: Addison-Wesley, 1984.

[16] SPANIER, E. H. **Algebraic topology**. New Delhi: McGraw-Hill, 1966.

[17] VICK, J. W. **Homology theory**. 2. ed. New York: Springer, 1994.

[18] YANG, Chung-Tao. On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson. **Ann.of Math.**, v.62, n.2, p.271-283, 1955.