



---

# Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

---

## Sistemas Dinâmicos e Substituições

Aline Gobbi Dutra

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

Dissertação apresentada ao Instituto de Biologia, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São José do Rio Preto

Fevereiro - 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# COMISSÃO JULGADORA

## Titulares

---

**Ali Messaoudi**

Professor Doutor - IBILCE - UNESP

Orientador

---

**Salvador Addas Zanata**

Professor Doutor - IME - USP

1º Examinador

---

**Cláudio Aguinaldo Buzzi**

Professor Doutor - IBILCE - UNESP

2º Examinador

## Suplentes

---

**Daniel Smania Brandão**

Professor Doutor - ICMC - USP

1º Suplente

---

**Luciana de Fátima Martins Brito**

Professora Doutora - IBILCE - UNESP

2ª Suplente

Aos meus pais,  
Neilton e Aparecida  
e à minha querida irmã,  
Lílian  
*dedico.*

# Agradecimentos

Se à presença de Deus em minha vida eu pudesse associar uma função, com certeza esta seria contínua e munida das melhores propriedades matemáticas. Por isso, meu primeiro e maior agradecimento é a Ele e à Virgem Maria, minha Mãe do céu.

Agradeço profundamente à minha família, meus pais, Neilton e Aparecida, e à minha irmã Lílian, por serem meu porto seguro durante esta fase difícil e, ao mesmo tempo, maravilhosa. Dudu, meu cunhadinho, meus avós, Sebastião e Teodora, obrigada por todas as orações e carinho. Amo todos vocês.

Obrigada, Prof. Dr. Ali Messaoudi, pela orientação e acolhida, pela paciência e amizade durante este período, por todo o aprendizado e conselhos acadêmicos, profissionais e humanos.

Agradeço à banca examinadora: Prof. Dr. Salvador Addas Zanata, pela disponibilidade e ao Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi, também pela disponibilidade, por toda a ajuda nestes meus três anos de Rio Preto e por ser um exemplo de professor e amigo.

Aos professores Drs. Vanderlei Minori Horita e Luciana de Fátima Martins Brito, pela valiosa colaboração nesta tese.

Aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce, em especial aos professores Drs. Waldemar Donizete Bastos, pelos primeiros contatos e Maria Gorete Carreira Andrade, pela simpatia e acolhida desde o início.

Ao super quarteto Michele, Miriam, Anderson e Júlio, pela grande amizade. Mi, obrigada por ser presença humana de Deus em minha vida, pela cumplicidade, pelas

partilhas e risadas, por ter me apresentado ao MUR, por tudo! Mirião, obrigada pela grande paciência, por estar sempre pronta a me ajudar, a me ouvir e, juntas, armarmos as maiores “bagunças” e apelidos malucos para os amigos! Super (Anderson) e Julinho, obrigada pelo companheirismo. Obrigada, Maira e Fer Diniz, amigas da última e inesquecível república do mestrado.

Aos amigos da pós-graduação, Marcos (Fortinho), Juliana (Jujú), Pedro e Alexandre, pela agradável convivência. À Cibele, minha “miguxa” pra todas as horas, tristes e alegres. Ao Durval, meu novo grande amigo, pelos papos de alta qualidade matemática, espiritual e filosófica. Ao Rafa (Cabeça), pela grande amizade, por “quebrar a cabeça” comigo nessa dissertação e por ser sempre companheiro. Aos “amiguinhos” peruanos Rodiak, Patty e Javier, que apesar do curto tempo de convívio, me trouxeram muitos momentos de alegria.

Aos meus amados irmãos do Ministério Universidades Renovadas (MUR-RCC) e ao Grupo de Oração Universitário (Gou) Unesp, por me ajudarem a discernir que tipo de profissional quero ser, por serem minha família rio-pretense durante todo o tempo, por todos os momentos maravilhosos, confraternizações. Agradeço muito a Deus por ter-me dado vocês. Em especial, agradeço-lhes pela inesquecível convivência do núcleo.

A todos os amigos do Grupo de Oração São Padre Pio, por todo o apoio e cuidado.

À Comunidade Mar a Dentro (Dilben, Silvio, ...), pela fraterna ajuda no final dessa etapa da minha vida, meus amigos e anjos. Ao Pe. Douglas, por todas as orientações e conversas, por me ajudar a amadurecer em todos os sentidos.

Aos professores da UEMG, campus de Ituiutaba-MG, pelo importante incentivo e a todos os amigos de Ituiutaba, pelo apoio e torcida.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“Há pessoas que desejam saber só por saber, e isso é curiosidade; outras, para alcançarem fama, e isso é vaidade; outras, para enriquecerem com a sua ciência, e isso é um negócio torpe; outras, para serem edificadas, e isso é prudência; outras, para edificarem os outros, e isso é caridade”

(São Tomás de Aquino)

# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b>  | <b>10</b> |
| <b>1 Sistemas Dinâmicos</b>                              | <b>13</b> |
| <b>2 Sistemas Dinâmicos Simbólicos e Substituições</b>   | <b>22</b> |
| 2.1 Palavras, Linguagens e Cilindros . . . . .           | 22        |
| 2.2 Distância sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . . . . . | 23        |
| 2.3 Deslocamento . . . . .                               | 27        |
| 2.4 Sistemas Dinâmicos Simbólicos . . . . .              | 28        |
| 2.4.1 Relação com a rotação no círculo . . . . .         | 28        |
| 2.5 Substituições . . . . .                              | 32        |
| <b>3 Sistemas Dinâmicos associados a Substituições</b>   | <b>35</b> |
| 3.1 Resultados sobre primitividade . . . . .             | 35        |
| 3.2 Matriz da Substituição . . . . .                     | 37        |
| 3.3 Ergodicidade . . . . .                               | 39        |
| <b>Apêndice</b>  | <b>53</b> |
| <b>Bibliografia</b>                                      | <b>58</b> |

# Resumo

Uma substituição é uma aplicação de um conjunto finito  $\mathcal{A}$  (alfabeto) ao conjunto das palavras finitas sobre  $\mathcal{A}$ . Neste trabalho, estudaremos propriedades

# Abstract

A substitution is a map from a finite set  $\mathcal{A}$  (alphabet) to the set of finite words whose letters belong to  $\mathcal{A}$ . In this work, we study some topological and metrical properties of the dynamical system associated to a substitution. In particular, we prove that for a class of substitutions, the associated dynamical system is minimal and ergodic.

**Key words:** Substitutions, Minimality, Ergodicity.

# Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos começou com o estudo do comportamento dos planetas. Desde então houve um grande avanço desta teoria. Ela foi usada em outras áreas como Química, Economia, Telecomunicações entre outras.

Um sistema dinâmico é um par  $(X, T)$  onde  $X$  é o espaço dos estados e  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação que leva um estado a um outro estado seguindo uma lei de evolução (tempo).

Uma maneira de obter sistemas dinâmicos simples e interessantes é discretizando o tempo e o espaço de estados (exemplo: tempo =  $\mathbb{N}$  e  $X = A^{\mathbb{N}}$  onde  $A$  é um conjunto finito). Estes sistemas são chamados *sistemas dinâmicos simbólicos*. O interessante destes sistemas é que eles têm aplicações significantes nas telecomunicações e envolvem várias áreas da matemática como a teoria dos números, teoria ergódica, dinâmica complexa entre outras.

Uma classe importante dos sistemas dinâmicos simbólicos é a chamada classe dos *sistemas dinâmicos substitutivos*. Uma substituição é uma aplicação de um conjunto finito  $A$  (alfabeto) ao conjunto das palavras finitas escritas com o alfabeto  $A$ . Exemplo:  $A = \{a, b\}, \sigma : a \mapsto ab, b \mapsto a$ .

Dada uma substituição  $\sigma$  sobre um alfabeto  $A$ , podemos estender  $\sigma$  a  $A^{\mathbb{N}}$  (o conjunto das palavras infinitas sobre  $A$ ) por concatenação:

$$\sigma(a_1 \cdots a_n \cdots) = \sigma(a_1) \cdots \sigma(a_n) \cdots, \forall a_1, \dots, a_n, \dots \in A^{\mathbb{N}}.$$

Uma boa propriedade das substituições é que elas têm pontos periódicos, isto é, existem  $k \in \mathbb{N}$  e  $u \in A^{\mathbb{N}}$  tais que  $\sigma^k(u) = u$ .

Definimos um sistema dinâmico associado a  $\sigma$  como um par  $(\Omega, S)$  onde  $S$  é

---

a aplicação deslocamento (shift) e  $\Omega = \overline{\{S^n(u), n \in \mathbb{N}\}}$  é o fecho (com respeito a topologia produto das topologias discretas sobre  $A$ ) da órbita de  $u$  por  $S$  onde  $u$  é um ponto periódico da substituição  $\sigma$ .

A teoria dos sistemas dinâmicos substitutivos começou com A. Hedlund e M. Morse [9]. Eles foram os primeiros a falarem de substituição. Usaram seqüências infinitas de símbolos associadas a uma substituição (chamada substituição de Morse-Hedlund) para investigar as geodésicas sobre superfícies com curvatura negativa. Desde então esta teoria começou a se desenvolver e foi ligada a vários tópicos em diversas áreas da matemática, tais como teoria dos sistemas dinâmicos, fractais, azulejamento do plano, automorfismos hiperbólicos do toro, frações contínuas multidimensionais, aproximações diofantinas, permutações de intervalos e sistemas de numerações em base complexa. Para uma resenha sobre estes tópicos ver [1], [2], [4], [10], [11], [15], [16], [5].

As substituições foram usadas em outras áreas como a Química, Física Teórica, Genoma, etc. Por exemplo, na física teórica elas foram usadas devido ao fato das seqüências definidas pelas substituições fornecerem um ótimo modelo unidimensional dos quase cristais. Particularmente alguns físicos estudaram as propriedades de operador de Shrödinger discreto com o potencial dado pelas substituições [5]. Atualmente, há vários grupos trabalhando em sistemas dinâmicos simbólicos substitutivos, principalmente na França, Estados Unidos, Rússia e Japão.

As substituições que consideraremos neste trabalho são as chamadas *substituições primitivas* (existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $a, b \in A$ , a letra  $a$  aparece na palavra  $\sigma^k(b)$ ). A vantagem de uma substituição primitiva é que o sistema dinâmico associado não depende do ponto periódico, além do mais ele é minimal, de entropia nula e unicamente ergódico.

Neste trabalho estudaremos propriedades topológicas e dinâmicas dos sistemas dinâmicos associados a substituições. Em particular, mostraremos que se a substituição é primitiva, então o sistema dinâmico é minimal, ergódico e unicamente ergódico.

O trabalho é dividido em três capítulos e um apêndice. No primeiro capítulo

---

definimos os sistemas dinâmicos de acordo com as características do espaço  $X$ , por exemplo, sistema dinâmico topológico ou mensurável, e também definimos ergodicidade e unicidade ergódica, para posteriormente mostrarmos as vantagens destes conceitos, através de dois teoremas, dentre eles, o teorema de Poincaré. Para mostrarmos estes teoremas, utilizamos alguns resultados de teoria da medida e enunciaremos o Teorema Ergódico de Birkhoff. Ao final do capítulo, demos um exemplo de sistema dinâmico minimal e ergódico.

No segundo capítulo, definimos sistemas dinâmicos simbólicos e para isso, definimos o conjunto das palavras infinitas  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , linguagens, cilindros, uma métrica para este conjunto  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  e a aplicação deslocamento (*shift*), com o intuito de estudar propriedades topológicas dos sistemas dinâmicos simbólicos. Abordamos as substituições e alguns resultados relacionados a elas.

No terceiro capítulo, definimos primitividade de uma substituição e matriz da substituição, para iniciar o estudo da ergodicidade. Finalmente, demonstramos que dada uma substituição primitiva, o sistema dinâmico associado a ela é minimal e unicamente ergódico.

O apêndice traz a prova do Teorema de Perron Frobenius, muito útil no terceiro capítulo para a prova da ergodicidade e da unicidade ergódica.

# Capítulo 1

## Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo veremos algumas definições e resultados necessários ao estudo dos sistemas dinâmicos, como a minimalidade, a ergodicidade e a unicidade ergódica.

Um **Sistema Dinâmico** é um par  $(X, T)$  onde  $X$  é um conjunto não vazio e  $T : X \rightarrow X$  é uma aplicação. Se  $X$  for um espaço topológico e  $T$  uma aplicação contínua, dizemos que  $(X, T)$  é um **Sistema Dinâmico Topológico**. Se  $X$  é munido de uma  $\sigma$ -álgebra e  $T : X \rightarrow X$  é mensurável, dizemos que  $(X, T)$  é um **Sistema Dinâmico Mensurável**.

Dado  $x \in X$ , chamamos de **órbita** de  $x$  sobre  $T$  o conjunto definido por  $O(x) = \{T^n(x); n \in \mathbb{N}\}$  onde  $T^0(x) = x$ ,  $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Um dos objetivos dos sistemas dinâmicos é o estudo do comportamento das órbitas.

### Exemplo 1.0.1 : Rotação no círculo

Seja  $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Tome  $R_\theta(z) = ze^{i\theta}$ .

$(S^1, R_\theta)$  é um sistema dinâmico topológico e mensurável.

Um subconjunto  $E \subset X$  é dito  **$T$ -invariante** se  $T(E) \subset E$ . Dizemos que o sistema topológico  $(X, T)$  é **minimal** se os únicos conjuntos  $T$ -invariantes fechados são  $X$  e  $\emptyset$ .

A importância da minimalidade vem do seguinte teorema:

**Teorema 1.0.1** : *O sistema  $(X, T)$  é minimal se, e somente se,  $O(x)$  é densa em  $X$ , para todo  $x \in X$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que o sistema  $(X, T)$  é minimal. Temos

$$T(O(x)) = \{T^{n+1}(x); n \in \mathbb{N}\} \subset O(x)$$

logo, o fecho de  $T(O(x))$  em  $X$  está contido no fecho de  $O(x)$  em  $X$ , isto é,  $\overline{T(O(x))} \subset \overline{O(x)}$ . Como  $T$  é contínua, temos que  $T(\overline{O(x)}) \subset \overline{T(O(x))} \subset \overline{O(x)}$ . Assim,  $\overline{O(x)} = X$

Vamos mostrar a implicação recíproca. Suponhamos que existe  $E \subset X$  tal que  $E$  é  $T$ -invariante, fechado e  $E \neq \emptyset$ . Sejam  $x \in E$  e  $y \in X \setminus E$ . Como  $T(E) \subset E$ , então  $O(x) \subset E$ . Assim,  $(X \setminus E) \cap O(x) = \emptyset$ . Como  $E$  é fechado,  $X \setminus E$  é aberto. Como  $y \in X \setminus E$ ,  $y$  não está em  $\overline{O(x)}$ . Portanto, a órbita de  $x$  não é densa.

□

Seja  $(X, T)$  um sistema dinâmico mensurável e  $\mu$  uma medida sobre  $X$ . Dizemos que  $\mu$  é **invariante por  $T$**  se para qualquer conjunto  $B$  mensurável, tivermos  $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ . Se existe uma única medida de probabilidade invariante por  $T$ , dizemos que o sistema é **unicamente ergódico**. Dizemos ainda que o sistema  $(X, T)$ , munido de uma medida de probabilidade  $\mu$  invariante é **ergódico** se, para todo  $B$  mensurável,  $T^{-1}(B) = B$  implicar em  $\mu(B) = 0$  ou  $1$ .

A vantagem de termos uma medida invariante é devido ao seguinte teorema:

**Teorema 1.0.2 (Poincaré)** *Seja  $(X, T)$  um sistema dinâmico mensurável e  $\mu$  uma medida invariante finita. Seja  $E \subset X$  um conjunto mensurável qualquer com  $\mu(E) > 0$ . Então,  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in E$  tem algum iterado  $T^n(x)$ ,  $n \geq 1$ , que também está em  $E$ .*

**Demonstração:** Seja  $E_0 = \{x \in E ; T^n(x) \in E \text{ para algum } n \in \mathbb{N}^*\}$  e considere

$$\Omega = E \setminus E_0 = \{x \in E ; T^n(x) \notin E, \forall n \geq 1\}$$

Se  $x \in X$  e  $T^n(x) \notin E$ , então  $x \in T^{-n}(E^c) = T^{-n}(X \setminus E)$ . Assim, se  $x \in \Omega$ , temos  $x \in T^{-n}(E^c)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . Logo,

$$\Omega = E \cap \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(E^c) \right)$$

Portanto,  $\Omega$  é mensurável, conseqüentemente  $E \setminus \Omega = E_0$  também é mensurável. Assim,  $(\{T^{-n}(\Omega)\})$  é uma seqüência de conjuntos mensuráveis tal que  $\mu(\Omega) = \mu(T^{-n}(\Omega))$ , para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . Além disso, os conjuntos  $T^{-n}(\Omega)$  são dois a dois disjuntos. De fato, se existissem  $y \in X$ ,  $r, s \in \mathbb{N}^*$  tais que  $y \in T^{-r}(\Omega) \cap T^{-s}(\Omega)$ , então  $T^r(y) \in \Omega$  e  $T^s(y) \in \Omega$ . Logo,  $T^n(T^r(y)) \notin E$ , para  $\forall n \geq 1$ . Podemos supor sem perda de generalidade,  $s > r$ . Assim,  $T^s(y) = T^{s-r}(T^r(y))$ , ou seja,  $T^r(y) \in E_0$ , pois  $T^s(y) \in \Omega \subset E$ . Mas isto contradiz o fato de  $T^r(y) \in \Omega = E \setminus E_0$ .

Portanto,

$$\mu(X) \geq \mu \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\Omega) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(\Omega)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\Omega)$$

Como  $\mu$  é finita e  $\mu(E) > 0$ , temos que  $\mu(\Omega) = 0$ . Logo,  $\mu(E_0) = \mu(E)$ , ou seja, a menos de um conjunto de medida nula, todo ponto  $x$  de  $E$  tem algum iterado  $T^n(x)$  em  $E$ .

□

O interesse de termos um sistema dinâmico ergódico vem do seguinte teorema:

**Teorema 1.0.3** : *Seja  $(X, T)$  um sistema dinâmico mensurável e  $\mu$  uma medida de probabilidade invariante. Então  $(X, T)$  é ergódico se, e somente se, para todo conjunto  $A \subset X$  mensurável, para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in X$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \mu(A)$$

onde  $\chi_A$  é a função característica de  $A$  em  $X$ .

Para provarmos o teorema (1.0.3), precisamos dos seguintes resultados:

**Proposição 1.0.1** : Seja  $(X, T)$  um sistema dinâmico mensurável e  $\mu$  uma medida de probabilidade invariante. Se  $T$  é ergódica, então para todo  $B$  mensurável tal que  $\mu(T^{-1} B \Delta B) = 0$ , tem-se que  $\mu(B) = 0$  ou  $\mu(B) = 1$ , onde  $T^{-1} B \Delta B = [T^{-1} B \cap B^c] \cup [(T^{-1} B)^c \cap B]$  é a diferença simétrica.

**Demonstração:** Seja  $B$  um conjunto mensurável tal que  $\mu(T^{-1} B \Delta B) = 0$ . Vamos construir um conjunto  $B_\infty$  tal que  $T^{-1}(B_\infty) = B_\infty$  e  $\mu(B_\infty \Delta B) = 0$ .

Para cada  $n \geq 0$ , temos que

$$T^{-n} B \Delta B \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-(i+1)} B \Delta T^{-i} B = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}(T^{-1} B \Delta B)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mu(T^{-n} B \Delta B) &\leq \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}(T^{-1} B \Delta B)\right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i}(T^{-1} B \Delta B)) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-1} B \Delta B) = 0 \end{aligned}$$

Logo, para cada  $n \geq 0$ , temos  $\mu(T^{-n} B \Delta B) = 0$ .

Seja

$$B_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i} B$$

Como  $B \Delta \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i} B \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} B \Delta T^{-i} B$ , temos

$$\mu\left(B \Delta \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i} B\right) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu(B \Delta T^{-i} B) = 0, \text{ para cada } n \geq 0$$

Como os conjuntos  $\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i} B$  decrescem em  $n$  e cada um tem medida igual à medida de  $B$ , temos que  $\mu(B_\infty \Delta B) = 0$ , logo  $\mu(B_\infty) = \mu(B)$ . Além disso,

$$T^{-1}(B_\infty) = T^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i} B\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-(i+1)} B = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n+1}^{\infty} T^{-i} B = B_\infty$$

Portanto, obtivemos um conjunto  $B_\infty$  com  $T^{-1}(B_\infty) = B_\infty$  e  $\mu(B_\infty) = \mu(B)$ . Pela ergodicidade,  $\mu(B_\infty) = 0$  ou  $\mu(B_\infty) = 1$ , logo  $\mu(B) = 0$  ou  $\mu(B) = 1$ .

□

**Teorema 1.0.4** : Seja  $(X, T)$  um sistema dinâmico mensurável,  $\mu$  uma medida de probabilidade invariante e  $L^2(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ mensurável e } \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

(i)  $T$  é ergódica.

(ii) Se  $f$  é mensurável e  $(f \circ T)(x) = f(x), \forall x \in X$ , então  $f$  é constante  $\mu$ -quase sempre.

(iii) Se  $f$  é mensurável e  $(f \circ T)(x) = f(x), \mu$ -quase sempre, então  $f$  é constante  $\mu$ -quase sempre.

(iv) Se  $f \in L^2(\mu)$  e  $(f \circ T)(x) = f(x), \forall x \in X$ , então  $f$  é constante  $\mu$ -quase sempre.

(v) Se  $f \in L^2(\mu)$  e  $(f \circ T)(x) = f(x), \mu$ -quase sempre, então  $f$  é constante  $\mu$ -quase sempre.

**Demonstração:** Trivialmente temos  $(iii) \Rightarrow (ii)$ ,  $(ii) \Rightarrow (iv)$ ,  $(v) \Rightarrow (iv)$  e  $(iii) \Rightarrow (v)$ . Resta mostrar apenas  $(i) \Rightarrow (iii)$  e  $(iv) \Rightarrow (i)$ . Primeiramente, vamos mostrar  $(i) \Rightarrow (iii)$ . Seja  $T$  ergódica e suponha que  $f$  é mensurável e  $f \circ T = f$ ,  $\mu$ -quase sempre. Podemos assumir que  $f$  é uma função que assume valores reais, pois se  $f$  assume valores complexos, consideramos as partes real e imaginária separadamente. Definimos, para  $k \in \mathbb{Z}$  e  $n > 0$ ,

$$X(k, n) = \left\{ x \in X ; \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\} = f^{-1} \left( \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right)$$

Temos que

$$T^{-1} X(k, n) \Delta X(k, n) \subset \{x \in X ; (f \circ T)(x) \neq f(x)\}$$

pois se  $x \in T^{-1} X(k, n) \Delta X(k, n)$ , então  $x \in T^{-1} X(k, n) \setminus X(k, n)$  ou  $x \in X(k, n) \setminus T^{-1} X(k, n)$ , isto é,  $T(x) \in X(k, n)$  e  $x \notin X(k, n)$  ou  $x \in X(k, n)$  e  $T(x) \notin X(k, n)$ . Isto quer dizer que,

$$(f \circ T)(x) \in f(X(k, n)) \subset \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \text{ e } f(x) \notin \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$$

ou

$$f(x) \in \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \text{ e } (f \circ T)(x) \notin \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$$

Portanto,  $(f \circ T)(x) \neq f(x)$ .

Assim,  $\mu(T^{-1} X(k, n) \triangle X(k, n)) = 0$  e pela proposição anterior,  $\mu(X(k, n)) = 0$  ou  $\mu(X(k, n)) = 1$ . Para cada  $n$  fixo,  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} X(k, n) = X$  é disjunta, logo existe um único  $k_n$  tal que  $\mu(X(k_n, n)) = 1$ .

Seja  $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X(k_n, n)$ . Temos que  $X = X(k_n, n) \cup R_n = G_n$  com  $\mu(R_n) = 0$ . Logo,

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X(k_n, n) \cup R_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} X(k_n, n) \cup R = Y \cup R$$

onde  $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ . Assim,

$$1 = \mu(X) \leq \mu(Y \cup R) \leq \mu(Y) + \mu(R) = \mu(Y) \leq 1$$

Portanto,  $\mu(Y) = 1$ .

Além disso, se  $x \in Y$ , então

$$\frac{k_n}{2^n} \leq f(x) < \frac{k_n + 1}{2^n}, \quad \forall n \geq 1$$

Afirmamos que  $f$  é constante em  $Y$ . De fato:

Suponhamos que  $f$  não seja constante em  $Y$ . Então existem  $x, y \in Y$ ,  $x \neq y$ , tais que  $f(x) \neq f(y)$ . Podemos supor  $f(x) > f(y)$ . Então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f(x) - f(y) > \frac{1}{2^{n_0}}$ . Por outro lado,

$$\frac{k_{n_0}}{2^{n_0}} \leq f(x), \quad f(y) < \frac{k_{n_0} + 1}{2^{n_0}}$$

Daí,

$$f(x) - f(y) < \frac{k_{n_0} + 1 - k_{n_0}}{2^{n_0}} = \frac{1}{2^{n_0}}$$

o que é uma contradição. Assim,  $f$  é constante em  $Y$ , logo  $f$  é constante em  $\mu$ -quase todo ponto.

Mostremos (iv)  $\Rightarrow$  (i). Suponha que  $T^{-1}(E) = E$ ,  $E$  mensurável. Então  $\chi_E \in L^2(\mu)$  e  $(\chi_E \circ T)(x) = \chi_E(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Logo  $\chi_E$  é constante  $\mu$ -quase sempre. Como  $\chi_E = 0$  ou  $\chi_E = 1$ , então  $\mu(E) = \int \chi_E d\mu = 0$  ou  $\mu(E) = 1$ .

□

**Teorema 1.0.5 (Teorema Ergódico de Birkhoff)** (ver [17], pg 34-35)

Seja  $T : X \rightarrow X$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida de probabilidade invariante por  $T$ . Dado qualquer conjunto mensurável  $E \subset X$ , o  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(T^j(x))$  existe em  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in X$ . Além disso,

$$\int_X \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(T^j(x)) \right] d\mu = \mu(E).$$

**Demonstração: (Teorema 1.0.3)**

Vamos mostrar que a função

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x))$$

é invariante. De fato:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ T)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(T(x))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi_A(T^j(x)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) - \frac{1}{n} [\chi_A(x) - \chi_A(T^n(x))] = \varphi(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\chi_A(x) - \chi_A(T^n(x))] \end{aligned}$$

Como a função característica é limitada, o último limite é igual a zero. Portanto,  $(\varphi \circ T)(x) = \varphi(x)$ . Assim, pelo teorema (1.0.4),  $\varphi(x)$  é constante em  $\mu$ -quase todo ponto, logo  $\int_X \varphi(x) d\mu = \varphi(x)$ . Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff,

$$\varphi(x) = \int_X \varphi(x) d\mu = \mu(A)$$

isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \mu(A)$ , para  $\mu$ -quase todo ponto.

Reciprocamente, se  $A$  é um conjunto mensurável tal que  $T^{-1}(A) = A$ , então  $x \in A$  se, e somente se,  $T^j(x) \in A$ , para todo  $j \geq 0$ . Isso implica que  $\chi_A(T^j(x)) = \chi_A(x)$ , para todo  $j \geq 0$ . Por hipótese,

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x))$$

Assim,

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(x) = \chi_A(x), \quad \forall x \in X$$

Como a função característica só toma valores 0 e 1, temos  $\mu(A) = 0$  ou 1. Portanto, o sistema é ergódico. □

**Teorema 1.0.6** : *Seja  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Se  $\frac{\theta}{\pi}$  é irracional, então  $(S^1, R_\theta)$  é minimal e ergódico.*

**Demonstração:** Mostremos inicialmente que o sistema  $(S^1, R_\theta)$  é minimal. Como  $\frac{\theta}{\pi}$  é irracional, então pelo teorema de Weyl, a seqüência  $\left(\frac{n\theta}{\pi}\right)_{n \geq 0} \pmod{1}$  é densa em  $[0, 1[$ . Logo,  $\forall x \in [0, 1[$ , existem duas seqüências  $(n_k)_{k \geq 0}$  e  $(p_k)_{k \geq 0}$ , onde  $n_k \in \mathbb{N}$  e  $p_k \in \mathbb{Z}$  tais que  $n_k \frac{\theta}{\pi} + p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ . Logo,  $2n_k \theta + 2\pi p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2\pi x$ .

Portanto,

$$e^{i(2n_k \theta + 2\pi p_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^{2i\pi x}$$

e conseqüentemente,

$$e^{2in_k \theta} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^{2i\pi x}$$

Seja  $y \in S^1$ . Então existe  $x \in [0, 1[$  tal que  $y = e^{2i\pi x}$ . Logo existe  $(n_k)_{k \geq 0}$  tal que  $e^{2in_k \theta} \rightarrow y$ . Assim,

$$\overline{\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{N}\}} = S^1$$

Seja  $z \in S^1$ . Então,

$$\overline{\{R_\theta^n(z), n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\{ze^{in\theta}, n \in \mathbb{N}\}} = z \overline{\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{N}\}} = zS^1 = S^1$$

Portanto,  $(S^1, R_\theta)$  é minimal.

Mostremos agora a ergodicidade do sistema. Como  $\frac{\theta}{\pi}$  é irracional, então  $e^{in\theta} \neq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Seja  $a = e^{i\theta}$ . Então  $a^n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Seja  $\lambda$  a medida de Lebesgue sobre  $S^1$  e  $f \in L^2(\lambda)$  tal que  $f \circ R_\theta = f$ . Logo,  $f(R_\theta(z)) = f(az) = f(z)$ . Considere  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$  a série de Fourier de  $f$ . Então  $f(az) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n a^n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ .

Daí,  $b_n a^n z^n = b_n z^n$  para cada  $n \neq 0$ , logo  $b_n(a^n - 1) = 0$ . Como  $a^n \neq 1$ , temos  $b_n = 0$ , com  $n \neq 0$ . Assim,  $f$  é constante  $\mu$ -quase sempre. Pelo teorema (1.0.4),  $R_\theta$  é ergódica.

□

**Observação 1.0.1** : Se  $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ , então teremos  $\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}$ , onde  $p, q \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $2q\theta = 2p\pi$ . Seja  $z \in S^1$ . Temos

$$O(z) = \{z, ze^{i\theta}, \dots, ze^{i(2q-1)\theta}\}$$

Portanto,  $(S^1, R_\theta)$  não é minimal.

Além do mais, dado  $f(z) = z^{2q}$ , temos que

$$(f \circ R_\theta)(z) = z^{2q} \cdot e^{2iq\theta} = z^{2q} \cdot e^{2ip\pi} = z^{2q} = f(z)$$

Como  $f$  não é constante, então  $(S^1, R_\theta)$  não é ergódico.

# Capítulo 2

## Sistemas Dinâmicos Simbólicos e Substituições

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades dos sistemas dinâmicos simbólicos e introduziremos o conceito de substituição, com alguns exemplos e resultados.

### 2.1 Palavras, Linguagens e Cilindros

Seja  $n \in \mathbb{N}$  e  $\mathcal{A} = \{w_0, \dots, w_n\}$  um conjunto finito. Chamamos  $\mathcal{A}$  de **alfabeto** e cada elemento  $w_i$  de **letra** do alfabeto  $\mathcal{A}$ .

Uma **palavra finita** (resp. infinita) em  $\mathcal{A}$  é uma seqüência finita (resp. infinita) de letras de  $\mathcal{A}$ . O conjunto de todas as palavras finitas (resp. infinitas) sobre  $\mathcal{A}$  será denotado por  $\mathcal{A}^*$  (resp.  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ).

**Exemplo 2.1.1 :**

$$\mathcal{A} = \{1,2\} \quad 121 \in \mathcal{A}^* \quad ; \quad 121111 \dots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

O **comprimento** de uma palavra  $w$  é o número de letras de  $w$ , denotado por  $|w|$ .

Dada uma palavra  $w = w_0w_1 \dots$  em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , dizemos que a palavra finita  $u$  é um **fator** de  $w$ , se existir  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $u = w_kw_{k+1} \dots w_{k+|u|-1}$ .

A **linguagem** de uma palavra  $w$  em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é o conjunto de todos os fatores de  $w$ , sendo denotada por  $\mathcal{L}(w)$  e, por  $\mathcal{L}_n(w)$ , o conjunto de todos os seus fatores de comprimento  $n$ , onde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Observação 2.1.1** : Identificamos o conjunto das palavras infinitas  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  com o conjunto das seqüências com termos em  $\mathcal{A}$ .

Sejam  $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ . Dizemos que o conjunto

$$\mathcal{C} = [a_0, \dots, a_n] = \{(x_i)_{i \geq 0}; x_i = a_i, \forall 0 \leq i \leq n\}$$
 é um **cilindro** em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$

## 2.2 Distância sobre $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$

Definimos a aplicação  $d : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  por

$$(u, v) \mapsto \begin{cases} e^{-\min\{i; u_i \neq v_i\}}, & \text{se } u \neq v; \\ 0, & \text{se } u = v \end{cases}$$

onde  $u = (u_i)_{i \geq 0}$  e  $v = (v_i)_{i \geq 0}$ .

**Proposição 2.2.1** :  $d$  é métrica.

**Demonstração:** Sejam  $x, y, z \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Temos que:

(i)  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ , pela própria definição da métrica;

(ii)  $d(x, y) = e^{-\min\{i; x_i \neq y_i\}} = e^{-\min\{i; y_i \neq x_i\}} = d(y, x);$

(iii) Mostremos a desigualdade triangular:

- Se  $x \neq y, y = z$ , então  $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y) + d(y, y) = d(x, y) \geq d(x, y)$
- Se  $x = y, y \neq z$ , então  $d(x, y) = d(x, x) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- Se  $x \neq y, x = z$ , então  $d(x, z) + d(z, y) = d(x, x) + d(x, y) = d(x, y) \geq d(x, y)$

- Se  $x \neq y$ ,  $y \neq z$ ,  $x \neq z$ , considere:

$$n_0 = \min\{i; x_i \neq y_i\} ; n_1 = \min\{i; x_i \neq z_i\} ; n_2 = \min\{i; y_i \neq z_i\}$$

Temos então que  $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ , logo  $x_{n_0} \neq z_{n_0}$  ou  $z_{n_0} \neq y_{n_0}$ . Assim, se  $x_{n_0} \neq z_{n_0}$  temos que  $n_1 \leq n_0$  (pois  $n_1 = \min\{i; x_i \neq z_i\}$ ). Se  $z_{n_0} \neq y_{n_0}$  temos que  $n_2 \leq n_0$  (pois  $n_2 = \min\{i; y_i \neq z_i\}$ ). Logo,  $-n_1 \geq -n_0$  ou  $-n_2 \geq -n_0$  e então  $e^{-n_0} \leq e^{-n_1}$  ou  $e^{-n_0} \leq e^{-n_2}$ . Portanto,  $e^{-n_0} \leq e^{-n_1} + e^{-n_2}$ , isto é,  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

□

A partir de agora, consideraremos  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  como sendo um espaço métrico com a métrica  $d$ .

**Proposição 2.2.2** : *Os cilindros são conjuntos abertos e fechados.*

**Demonstração:** Considere o cilindro

$$\mathcal{C} = [a_0, \dots, a_n] = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} ; x_i = a_i, \forall 0 \leq i \leq n\}$$

com  $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ .  $\mathcal{C}$  é aberto. De fato:

Seja  $x \in \mathcal{C}$  e considere  $\epsilon = \frac{1}{e^n}$ . Vamos mostrar que  $B(x, \epsilon) \subset \mathcal{C}$ . Seja  $y \in B(x, \epsilon)$ . Então  $d(x, y) < \epsilon$ , ou seja,  $\frac{1}{e^{\min\{i; x_i \neq y_i\}}} < \frac{1}{e^n}$ . Logo,  $\min\{i; x_i \neq y_i\} > n$ . Assim,  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq n$ , ou seja,  $y_0 = a_0, \dots, y_n = a_n$  e portanto  $y \in \mathcal{C}$ .

$\mathcal{C}$  é fechado. De fato:

Considere  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{C} = \mathcal{C}^c = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} ; x_i \neq a_i \text{ para algum } i \in \{0, \dots, n\}\}$  e  $k_0 = \min\{i \in \{0, \dots, n\} ; x_i \neq a_i\}$ . Tome  $\epsilon = \frac{1}{e^{k_0}}$  e  $x \in \mathcal{C}^c$ . Vamos mostrar que  $B(x, \epsilon) \subset \mathcal{C}^c$ . Com efeito, seja  $y \in B(x, \epsilon)$ . Logo  $d(x, y) < \epsilon$ , ou seja,  $\frac{1}{e^{\min\{i; x_i \neq y_i\}}} < \frac{1}{e^{k_0}}$ . Assim,  $\min\{i; x_i \neq y_i\} > k_0$  e então  $x_i = y_i$  para  $0 \leq i \leq k_0$ , em particular,  $x_{k_0} = y_{k_0}$ . Como  $x_{k_0} \neq a_{k_0}$ , temos que  $y_{k_0} \neq a_{k_0}$  e portanto  $y \in \mathcal{C}^c$ . Logo  $\mathcal{C}^c$  é aberto e assim,  $\mathcal{C}$  é fechado.

□

**Proposição 2.2.3** : *Os cilindros geram a topologia  $\tau_d$ .*

**Demonstração:** Seja  $G$  um aberto não vazio de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Vamos mostrar que para todo  $x \in G$ , existe um cilindro  $\mathcal{C} = [a_0, \dots, a_n]$  com  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in \mathcal{C} \subset G$ . Seja  $x \in G$ . Como  $G$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset G$ . Considere  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $e^{-p} < r$ . Logo,  $B(x, e^{-p}) \subset B(x, r) \subset G$ . Seja o cilindro  $\mathcal{C} = [x_0, \dots, x_p]$  e  $y \neq x$  tal que  $y \in \mathcal{C}$ . Temos que  $\min\{i; x_i \neq y_i\} \geq p + 1$ . Logo,  $d(x, y) = \frac{1}{e^{\min\{i; x_i \neq y_i\}}} \leq \frac{1}{e^{p+1}} \leq \frac{1}{e^p} < r$ , ou seja,  $y \in B(x, r) \subset G$ . Portanto,  $\mathcal{C} \subset G$  e  $x \in \mathcal{C}$ .  $\square$

**Proposição 2.2.4 :** *Todo aberto se escreve como uniao enumerável de cilindros.*

**Demonstração:** Seja  $G$  um aberto não vazio de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Pela proposição anterior, para todo  $x \in G$ , existe um cilindro  $\mathcal{C}_x$  tal que  $x \in \mathcal{C}_x \subset G$ . Além do mais,  $\mathcal{C}_x \neq \mathcal{C}_y$  para todo  $x, y \in G$  tal que  $x \neq y$ . Logo,  $\{x\} \subset \mathcal{C}_x \subset G$  e portanto  $G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} \mathcal{C}_x \subset G$ , ou seja,  $G = \bigcup_{x \in G} \mathcal{C}_x$ .

Por outro lado, o conjunto dos cilindros de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n, \text{ onde } I_n = \{[a_0, \dots, a_n], a_i \in \mathcal{A}\}$$

Como  $I_n$  é finito, para todo  $n$ , então  $\mathcal{C}$  é enumerável. Portanto,  $G$  é uma união enumerável de cilindros.  $\square$

**Corolário 2.2.1 :** *A  $\sigma$ -álgebra gerada pelos abertos (boreleana) é igual a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros.*

**Demonstração:** Vamos denotar por  $\mathcal{B} = \{O \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}; O \text{ é aberto}\}$  e seja  $\mathcal{C}$  o conjunto dos cilindros em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Seja  $\sigma_{\mathcal{B}}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos abertos e  $\sigma_{\mathcal{C}}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros.

Sabemos que os cilindros são abertos, logo  $\mathcal{C} \subset \sigma_{\mathcal{B}}$ . Mas como  $\sigma_{\mathcal{C}}$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que contém  $\mathcal{C}$ , temos  $\sigma_{\mathcal{C}} \subset \sigma_{\mathcal{B}}$ .

Reciprocamente, temos que  $O = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ , onde  $O \in \mathcal{B}$  e  $C_i \in \mathcal{C}$ . Logo, para todo  $O \in \mathcal{B}$ ,  $O$  pertence à  $\sigma_{\mathcal{C}}$ . Assim,  $\mathcal{B} \subset \sigma_{\mathcal{C}}$  e portanto  $\sigma_{\mathcal{B}} \subset \sigma_{\mathcal{C}}$ .  $\square$

**Proposição 2.2.5** : A topologia induzida pela distância  $d$  é igual à topologia produto das topologias discretas sobre  $\mathcal{A}$ .

**Demonstração:** Denotaremos por  $\tau_d$  a topologia induzida por  $d$  e por  $\tau$  a topologia produto das topologias discretas sobre  $\mathcal{A}$ .

(i)  $\tau_d \subset \tau$ . De fato:

Considere o cilindro  $\mathcal{C} = [u_0 \dots u_n]$  que é um aberto básico de  $\tau_d$ .

Temos que  $\mathcal{C} = \{u_0\} \times \dots \times \{u_n\} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots$  e portanto  $\mathcal{C} \in \tau$ .

(ii)  $\tau \subset \tau_d$ . De fato:

Seja  $n \in \mathbb{N}$  e  $\mathcal{O}_n = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ , onde  $\begin{cases} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}, & \text{se } i > n; \\ \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}, & \text{se } 0 \leq i \leq n \end{cases}$ , um aberto básico de  $\tau$ .

Seja  $x = x_0 x_1 \dots \in \mathcal{O}_n$ . Então  $x \in \mathcal{C} = [x_0 \dots x_n]$  e claramente  $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_n$ . Logo,  $\mathcal{O}_n \in \tau_d$ .

□

**Proposição 2.2.6** :  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é um espaço compacto.

**Demonstração:** Seja  $(x^{(n)})_{n \geq 0}$  uma seqüência de elementos de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , onde  $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $x^{(n)} = x_0^{(n)} x_1^{(n)} x_2^{(n)} \dots$ .

Considere  $\mathcal{C}_a = \{k \in \mathbb{N}; x_0^{(k)} = a\}$ ,  $a \in \mathcal{A}$ . Temos que  $\mathbb{N} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{C}_a$ , pois dado  $k \in \mathbb{N}$  consideramos o elemento  $x^{(k)}$  da seqüência  $(x^{(n)})_{n \geq 0}$ . Então existe  $a_k \in \mathcal{A}$  tal que  $x_0^{(k)} = a_k$ , logo  $k \in \mathcal{C}_{a_k} \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{C}_a$ .

Como  $\mathcal{A}$  é finito e  $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{C}_a$  é infinito, existe  $a_0 \in \mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{C}_{a_0} = \{k \in \mathbb{N}; x_0^{(k)} = a_0\}$  é infinito. Escolhemos  $k_0 \in \mathcal{C}_{a_0}$ .

Considere  $\mathcal{C}_{a_0 b} = \{k \in \mathcal{C}_{a_0}; x_1^{(k)} = b\}$ , com  $b \in \mathcal{A}$ . Pelo mesmo argumento acima,  $\mathcal{C}_{a_0} = \bigcup_{b \in \mathcal{A}} \mathcal{C}_{a_0 b}$  e portanto  $\bigcup_{b \in \mathcal{A}} \mathcal{C}_{a_0 b}$  é infinito. Logo, existe  $a_1 \in \mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{C}_{a_0 a_1} = \{k \in \mathcal{C}_{a_0}; x_1^{(k)} = a_1\}$  é infinito. Escolhemos  $k_1 \in \mathcal{C}_{a_0 a_1}$ . Procedendo desta maneira, construiremos uma seqüência  $(a_i)_{i \geq 0}$  tal que  $x_0^{(k_0)} = a_0$ ,  $x_1^{(k_1)} = a_1$ ,  $\dots$ ,  $x_n^{(k_n)} = a_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e também uma subseqüência  $(x^{(k_n)})_{n \geq 0}$  de  $(x^{(n)})_{n \geq 0}$  onde cada elemento  $x^{(k_i)}$  pertence a  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  e tal que os  $i$ -ésimos primeiros termos são

$x_0^{(k_0)} x_1^{(k_1)} \dots x_i^{(k_i)} = a_0 a_1 \dots a_i$ . Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{(k_n)}) = (a_i)_{i \geq 0}$ , isto é, a subsequência converge. Portanto, qualquer seqüência possui subsequência convergente, ou seja,  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é compacto.

□

**Observação 2.2.1** : O fato de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  ser um espaço compacto segue também do Teorema de Tychonoff, pois  $\tau_d$  é a topologia produto das topologias discretas sobre  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}$  é compacto pela topologia discreta, pois finito.

## 2.3 Deslocamento

O **deslocamento** (*shift*) é a aplicação  $S : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  definida por

$$S(a_0 a_1 a_2 \dots) = a_1 a_2 \dots$$

Uma palavra  $w$  em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é dita **periódica pelo deslocamento** (S-periódica) se existir um inteiro positivo  $h$  tal que  $S^h(w) = w$ .

Seja  $w \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . A **órbita** de  $w$  sobre  $S$  é o conjunto definido por

$$O(w) = \{S^n(w) : n \in \mathbb{N}\}$$

**Proposição 2.3.1** : O deslocamento  $S : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é uma aplicação sobrejetora e contínua.

**Demonstração:** Seja  $w = w_0 w_1 \dots$  uma palavra em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Considere  $u = w_0 w_0 w_1 \dots$  outra palavra em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Temos que  $S(u) = w$ . Portanto,  $S$  é sobrejetora.

$S$  é contínua. De fato:

Sejam  $x = x_0 x_1 \dots$  e  $y = y_0 y_1 \dots$  em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ .

Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) = d(S(x), S(y)) = 0$ . Suponhamos então  $x \neq y$  e  $d(x, y) = e^{-(n+1)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $x_0 \dots x_n = y_0 \dots y_n$  e  $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ . Temos que  $S(x) = x_1 x_2 \dots$  e  $S(y) = y_1 y_2 \dots$  com  $x_1 \dots x_n = y_1 \dots y_n$ . Portanto,  $d(S(x), S(y)) = e^{-n}$ . Assim, para todo  $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ,  $d(S(x), S(y)) = e \cdot d(x, y)$ , logo  $S$  é contínua.

□

**Proposição 2.3.2** : Se  $w$  é  $S$ -periódica, então o fecho da órbita de  $w$  pelo shift é finito, isto é,  $\overline{O(w)}$  é finito.

**Demonstração:** Se  $w$  é  $S$ -periódica, então existe  $k > 0$  tal que  $S^k(w) = w$ , logo  $O(w) = \{w, S(w), \dots, S^{k-1}(w)\}$ , ou seja,  $O(w)$  é finita. Como num espaço métrico todo conjunto finito é fechado, então  $O(w)$  é fechada e assim  $\overline{O(w)} = O(w)$  é finito.  $\square$

**Observação 2.3.1** : A recíproca não é verdadeira. De fato:

Considere a palavra  $w = 1222\dots$ . Temos que  $S^k(w) = 222\dots$ , para qualquer  $k > 0$ , ou seja,  $O(w) = \{w, S(w)\}$  que é finita e portanto  $\overline{O(w)}$  é finito. No entanto,  $w$  não é  $S$ -periódica pois não existe  $k > 0$  tal que  $S^k(w) = w$ .

## 2.4 Sistemas Dinâmicos Simbólicos

Seja  $\Omega_w = \overline{O(w)}$  o fecho da órbita de  $w$  pelo *shift*. Então:

**Proposição 2.4.1** :  $S(\Omega_w) \subset \Omega_w$ .

**Demonstração:** Seja  $x \in \Omega_w$ . Então existe uma seqüência  $(z_k)_{k \geq 0}$  de elementos de  $O(w)$  tal que  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$ . Como  $z_k \in O(w)$ , para cada  $k \geq 0$ , então  $z_k = S^{n_k}(w)$ , com  $n_k \in \mathbb{N}$ . Assim,  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} S^{n_k}(w)$ . Logo,  $S(x) = S(\lim_{k \rightarrow \infty} S^{n_k}(w)) = \lim_{k \rightarrow \infty} S^{n_k+1}(w)$ , ou seja,  $S(x) \in \Omega_w$  e portanto  $S(\Omega_w) \subset \Omega_w$ .  $\square$

O sistema dinâmico simbólico gerado por uma palavra  $w \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é o par  $(\Omega_w, S)$ . Como  $\Omega_w = \overline{\{S^n(w); n \in \mathbb{N}\}}$  é um subconjunto fechado de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , que é compacto, então  $\Omega_w$  é compacto.

### 2.4.1 Relação com a rotação no círculo

Seja  $(S^1, R_\theta)$  onde  $R_\theta(z) = ze^{i\theta}$ . Particionamos o círculo em  $d$  arcos conexos

$$S^1 = \bigcup_{i=1}^d A_i$$

Seja  $\mathcal{A} = \{1, \dots, d\}$  e considere

$$\begin{aligned} f : S^1 &\longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \\ x &\longmapsto u_0 u_1 u_2 \dots \end{aligned}$$

onde  $R_\theta(x) \in \mathcal{A}_{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Temos

$$S \circ f(x) = f \circ R_\theta(x) \quad \forall x \in S^1$$

isto quer dizer que o shift em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é equivalente a aplicar a rotação em  $S^1$ .

Por outro lado, se  $f(u) = u = u_0 u_1 u_2 \dots$ , então

$$f(\overline{\{R_\theta^n(x), n \in \mathbb{N}\}}) = \Omega_u.$$

**Observação 2.4.1 :** A aplicação  $f$  não é injetora e nem sobrejetora.

**Proposição 2.4.2 :** Seja  $u$  uma palavra em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Então,

$$\Omega_u = \{w \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \mathcal{L}(w) \subseteq \mathcal{L}(u)\}$$

**Demonstração:** Seja  $w \in \Omega_u$ . Então existe uma seqüência  $(n_k)_{k \geq 0}$  tal que  $w = \lim_{k \rightarrow \infty} S^{n_k}(u)$ . Logo, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $k_n \in \mathbb{N}$  tal que  $w_0 \dots w_n = u_{k_n} \dots u_{k_n+n}$  e  $(k_n)_{n \geq 0}$  é crescente.

Seja  $v = w_p \dots w_{p+m} \in \mathcal{L}(w)$ , com  $p, m \in \mathbb{N}$ . Tomando  $n > p + m$ , temos que  $v = w_p \dots w_{p+m}$  é um fator de  $w_0 \dots w_n$ . Como  $w = \lim_{k \rightarrow \infty} S^{n_k}(u)$ , temos que  $w_p \dots w_{p+m}$  é um fator de  $u$ . Logo,  $v \in \mathcal{L}(u)$  e portanto  $\mathcal{L}(w) \subseteq \mathcal{L}(u)$ . Donde,

$$\Omega_u \subseteq \{w \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \mathcal{L}(w) \subseteq \mathcal{L}(u)\}$$

Agora seja  $w \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  tal que  $\mathcal{L}(w) \subseteq \mathcal{L}(u)$ . Como  $w_0 \dots w_n \in \mathcal{L}(w)$ , então para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $p_n \in \mathbb{N}$  tal que  $w_0 \dots w_n = u_{p_n} u_{p_n+1} \dots u_{p_n+n}$ . Sabemos que  $S^{p_n}(u) = u_{p_n} u_{p_n+1} \dots$ , logo para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe uma seqüência  $(p_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{N}$  tal que  $S^{p_n}(u)$  coincide com  $w$  em  $w_0 \dots w_n$ , ou seja,  $w = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{p_n}(u)$ , pois  $d(S^{p_n}(u), w) \leq e^{-(n+1)}$ . Como  $(S^{p_n}(u))_{n \geq 0}$  é uma seqüência de elementos de  $O(u)$ , temos que  $w \in \overline{O(u)} = \Omega_u$ .  $\square$

Seja  $w^{(n)}$  uma seqüência de elementos de  $\mathcal{A}^*$  e sejam  $x \in \mathcal{A}$ ,  $w \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Dizemos que  $w^{(n)}$  **converge** para  $w$ , e denotamos por  $\lim_{n \rightarrow \infty} w^{(n)} = w$ , se a seqüência  $(w^{(n)}) = w^{(n)}xxx\dots$  de elementos de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  converge para  $w$ , com respeito à distância  $d$ .

**Exemplo 2.4.1** :  $w^{(n)} = u_1 \dots u_{2n} = 1212 \dots 12$  converge para  $w = 121212 \dots$

**Observação 2.4.2** : Podemos definir  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  como o conjunto das palavras bi-infinitas sobre  $\mathcal{A}$ , isto é,  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} = \dots x_{-2}x_{-1} \cdot x_0x_1x_2 \dots$ . Da mesma maneira, podemos definir uma métrica  $d: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  por:

$$(u, v) \mapsto \begin{cases} e^{-\min\{n \in \mathbb{N}; u_{[-n, n]} \neq v_{[-n, n]}\}}, & \text{se } u \neq v; \\ 0, & \text{se } u = v \end{cases}$$

onde  $u_{[-n, n]}$  é o cilindro  $[u_{-n} \dots u_{-1} \cdot u_0 \dots u_n]$ .

Considerando os cilindros  $[a_{-n} \dots a_{-1} \cdot a_0 \dots a_p]$ ,  $n, p \in \mathbb{N}$ , podemos mostrar as mesmas propriedades que no caso  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . A vantagem que temos em  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  é que o shift  $S$  definido por  $S((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$  é um homeomorfismo em  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . Além do mais, a recíproca da proposição (2.3.2) também vale.

Uma palavra infinita  $u$  é **minimal** (ou uniformemente recorrente) se toda palavra finita ocorrendo em  $u$ , ocorre em um número infinito de posições com lacunas limitadas, isto é, para todo fator  $W$  de  $u$ , existe  $s \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n$ ,  $W$  é um fator de  $u_n \dots u_{n+s-1}$ .

**Lema 2.4.1** : Se  $u$  é minimal e  $w \in \Omega_u$ , então  $u \in \Omega_w$ .

**Demonstração:** Como  $u$  é minimal, então para todo  $p \in \mathbb{N}$ , temos que  $u_0 \dots u_p$  aparece infinitas vezes em  $u$ , com lacunas limitadas. Como  $w \in \Omega_u$ , então pela proposição (2.4.2),  $\mathcal{L}(w) \subseteq \mathcal{L}(u)$ . Assim, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $k_n \in \mathbb{N}$  tal que

$$w_0 \dots w_n = u_{k_n} \dots u_{k_n+n}$$

Logo, tomando  $n$  suficientemente grande temos que  $u_0 \dots u_p$  é um fator de  $u_{k_n} \dots u_{k_n+n} = w_0 \dots w_n \in \mathcal{L}(w)$ , para todo  $p \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $\mathcal{L}(u) \subseteq \mathcal{L}(w)$ , o que implica que  $u \in \Omega_w$ .

□

**Proposição 2.4.3** : *O sistema  $(\Omega_u, S)$  é minimal se, e somente se, a palavra  $u$  é minimal.*

**Demonstração:** Se  $u$  é uma seqüência minimal em  $\Omega_u$ , vimos no lema anterior que para todo  $w \in \Omega_u$ , temos  $u \in \Omega_w$ . Como  $S(\Omega_w) \subset \Omega_w$  e  $u \in \Omega_w$ , então  $S(u) \in \Omega_w$ . Logo,  $S^n(u) \in \Omega_w, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Temos então que,  $\{S^n(u); n \geq 0\} \subset \Omega_w$ . Logo,  $\overline{\{S^n(u); n \geq 0\}} \subset \overline{\Omega_w} = \Omega_w$  e portanto  $\Omega_u \subset \Omega_w$ .

Como  $\Omega_w \subset \Omega_u$ , para todo  $w \in \Omega_u$ , segue que  $\Omega_w = \Omega_u$  e concluímos assim que todas as órbitas são densas. Logo,  $(\Omega_u, S)$  é minimal.

Reciprocamente, se  $(\Omega_u, S)$  é minimal, então para todo  $w \in \Omega_u$ , temos que  $\Omega_w = \Omega_u$ . Logo,  $u \in \Omega_w$  e  $\mathcal{L}_n(u) \subset \mathcal{L}_n(w)$ , para todo  $n$ .

**Afirmativa 1:** Seja  $W$  um fator de  $u$ . Então  $W$  deve aparecer em todo  $w \in \Omega_u$ .

De fato:

Como  $W$  aparece em  $u$ , então  $W = u_i \dots u_{i+n-1} \in \mathcal{L}_n(u)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  e como  $\mathcal{L}_n(u) \subset \mathcal{L}_n(w)$ , logo  $W \in \mathcal{L}_n(w)$ , isto é,  $W$  é um fator de  $w$ , para todo  $w \in \Omega_u$ .

**Afirmativa 2:**  $\Omega_u = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}([W])$ .

Claramente  $\bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}([W]) \subset \Omega_u$ , pois  $S : \Omega_u \rightarrow \Omega_u$  é uma aplicação.

Seja  $w \in \Omega_u$ . Pela afirmativa 1,  $W$  aparece em  $w$ . Daí existem  $n, p \in \mathbb{N}$  tal que  $W = w_n \dots w_{n+p}$ . Como  $w = w_0 w_1 \dots$ , então  $S^n(w) = w_n w_{n+1} \dots \in [W]$ . Portanto,  $w \in S^{-n}([W])$ .

Pela compacidade de  $\Omega_u$  e como  $\bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}([W])$  é uma cobertura aberta para  $\Omega_u$ , temos que existe  $p$  tal que  $\Omega_u = \bigcup_{i=1}^p S^{-n_i}([W])$ . Assim, para todo  $k \geq 0$ ,

$S^k(u) \in \bigcup_{i=1}^p S^{-n_i}([W])$ . Logo, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n_{i_k}$  tal que  $S^{n_{i_k}+k}(u) \in [W]$ .

Portanto,  $W$  aparece uma infinidade de vezes em  $u$  pois  $\{n_{i_0}, n_{i_1} + 1, n_{i_2} + 2, \dots, n_{i_k} + k, \dots\}$  é infinito. Temos também que as lacunas são limitadas pois:

$$(n_{i_k} + k) - (n_{i_{k-1}} + k - 1) = n_{i_k} - n_{i_{k-1}} + 1 \leq \max_{i=1, \dots, p} \{n_i\} - \min_{i=1, \dots, p} \{n_i\} + 1 \leq \max_{i=1, \dots, p} \{n_i\} + 1$$

Portanto,  $u$  é minimal.

□

## 2.5 Substituições

Uma substituição é uma aplicação  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$  que a cada letra  $a \in \mathcal{A}$  associa uma palavra  $\sigma(a) \in \mathcal{A}^*$ . Podemos estender uma substituição  $\sigma$  ao conjunto das palavras finitas (resp. infinitas) por concatenação, isto é,  $\sigma(w_0w_1 \dots w_n) = \sigma(w_0)\sigma(w_1) \dots \sigma(w_n)$  (resp.  $\sigma(w_0w_1 \dots) = \sigma(w_0)\sigma(w_1) \dots$ ). Além do mais, numa substituição temos que ter  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n(a)| = +\infty$ , para todo  $a \in \mathcal{A}$ , sendo  $|\sigma^n(a)|$  o comprimento do  $n$ -ésimo iterado de  $a$  por  $\sigma$ .

Seja o alfabeto  $A = \{1, 2\}$ . A substituição de Fibonacci  $\sigma$  é definida por  $\sigma(1) = 12$  e  $\sigma(2) = 1$  e a substituição de Morse  $\tau$  é definida por  $\tau(1) = 12$  e  $\tau(2) = 21$ .

Seja  $w$  uma palavra em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . Dizemos que  $w$  é um **ponto periódico** da substituição  $\sigma$  se existir  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\sigma^k(w) = w$  e dizemos que  $w$  é um **ponto fixo** da substituição  $\sigma$  se  $\sigma(w) = w$ .

**Exemplo 2.5.1 :** *Seja  $\sigma(1) = 12$ ,  $\sigma(2) = 1$ . Temos, para todo  $n \in \mathbb{N}$  que  $\sigma^{n+1}(1) = \sigma^n(\sigma(1)) = \sigma^n(1)\sigma^n(2)$ . Logo,  $\sigma^n(1)$  converge para um ponto fixo de  $\sigma$  e assim um ponto fixo é  $12112 \dots$*

**Exemplo 2.5.2 :** *Seja  $\sigma(1) = 21$ ,  $\sigma(2) = 12$ . Temos  $u = 1221 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{2n}(1)$  e  $v = 2112 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{2n}(2)$  são pontos periódicos, pois  $\sigma^2(u) = u$  e  $\sigma^2(v) = v$ .*

**Proposição 2.5.1 :** *Uma substituição  $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  é uma aplicação contínua.*

**Demonstração:** Sejam  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  e  $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  e  $\sigma$  uma substituição. Suponhamos que  $x \neq y$  e que  $d(x, y) = e^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Então,  $x_0 \dots x_{n-1} = y_0 \dots y_{n-1}$ . Seja  $\sigma(x) = x'_0 x'_1 \dots$  e  $\sigma(y) = y'_0 y'_1 \dots$ . Logo,  $\sigma(x_0) \dots \sigma(x_{n-1}) = \sigma(y_0) \dots \sigma(y_{n-1})$ . Como  $|\sigma(a)| \geq 1, \forall a \in \mathcal{A}$ , então  $|\sigma(x_0) \dots \sigma(x_{n-1})| = |\sigma(y_0) \dots \sigma(y_{n-1})| \geq n$ . Assim,

$$\min\{i; x'_i \neq y'_i\} \geq n + 1$$

Portanto,  $d(\sigma(x), \sigma(y)) = e^{-\min\{i; x'_i \neq y'_i\}} \leq e^{-(n+1)} = e^{-1}d(x, y)$ . Logo,  $\sigma$  é contínua.  $\square$

**Proposição 2.5.2** : *Seja  $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ . A palavra  $u$  é periódica para  $\sigma$  se, e somente se,  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{nk}(a)$ , onde  $a \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $\sigma^k(a)$  começa com  $a$ .*

**Demonstração:** Seja  $u = u_0u_1 \dots$  um ponto periódico de  $\sigma$ . Então existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\sigma^k(u) = u$ . Logo existe  $v \in \mathcal{A}^*$  tal que  $\sigma^k(u_0) = u_0v$ . Vamos mostrar que  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^{nk}(u_0)$ . De fato, para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sigma^{nk}(u) = \sigma^{(n-1)k} \sigma^k(u) = \sigma^{(n-1)k}(u) = \sigma^{(n-2)k} \sigma^k(u) = \sigma^{(n-2)k}(u) = \dots = \sigma^k(u) = u.$$

Logo,  $u = \sigma^{nk}(u) = \sigma^{nk}(u_0)\sigma^{nk}(u_1) \dots$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^n(a)| = \infty$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma^{nk}(u_0)| = \infty$ . Portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{nk}(u_0) = u$ .

Reciprocamente, se  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{nk}(a)$  com  $\sigma^k(a)$  começando com  $a$ , então

$$\sigma^k(u) = \sigma^k\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{nk}(a)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{(n+1)k}(a) = u$$

Portanto,  $\sigma^k(u) = u$ , ou seja,  $u$  é periódico.  $\square$

**Exemplo 2.5.3** : *Seja  $\sigma(1) = 21$   $\sigma(2) = 12$ . Temos  $\sigma^2(1) = 1221$  e  $\sigma^2(2) = 2112$ , portanto  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{2n}(1)$  e  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{2n}(2)$  são pontos periódicos de período 2.*

**Proposição 2.5.3** : *Toda substituição tem pelo menos um ponto periódico.*

**Demonstração:** Seja  $\sigma$  uma substituição. Suponha que  $\sigma$  não possua um ponto periódico. Então, pela proposição anterior, para todo  $a \in \mathcal{A}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sigma^k(a)$  não começa com  $a$ . Assim, para todo  $a \in \mathcal{A}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ , temos  $\sigma^{nk}(a) = x_nv_n$ , onde  $x_n \neq a$ ,  $x_n \in \mathcal{A}$  e  $v_n \in \mathcal{A}^*$ .

**Afirmativa:**  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ , com  $n \neq m$ , temos  $x_n \neq x_m$ . De fato:

Suponha  $n < m$ , então  $x_mv_m = \sigma^{mk}(a) = \sigma^{(m-n)k}(\sigma^{nk}(a)) = \sigma^{(m-n)k}(x_nv_n)$ , ou seja,  $x_mv_m = \sigma^{(m-n)k}(x_nv_n)$ . Daí segue que  $x_n \neq x_m$ , pois pela hipótese inicial  $\sigma^{(m-n)k}(x_nv_n)$  não começa com  $x_n$  e portanto está provada a afirmativa. Como

$\mathbb{N}$  é um conjunto infinito, então  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  é infinito, mas isto é absurdo pois  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ , que é finito.

□

# Capítulo 3

## Sistemas Dinâmicos associados a Substituições

Neste capítulo estudaremos o sistema dinâmico associado a uma substituição primitiva. Em particular, mostraremos que esse sistema é minimal e não depende do ponto periódico. Além do mais, o sistema é ergódico. Para mostrar esta última propriedade, usaremos o teorema de Perron Frobenius.

### 3.1 Resultados sobre primitividade

Uma substituição  $\sigma$  definida sobre um alfabeto  $\mathcal{A}$  é dita **primitiva** se existir  $k > 0$  tal que para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ , a letra  $a$  aparece em  $\sigma^k(b)$ .

**Exemplo 3.1.1** *Na substituição de Fibonacci temos que 1 e 2 aparecem em  $\sigma^2(1)$  e em  $\sigma^2(2)$ . Logo esta substituição é primitiva.*

**Proposição 3.1.1** : *Se  $\sigma$  é uma substituição primitiva, então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq N$  e para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $a$  aparece em  $\sigma^k(b)$ .*

**Demonstração:** Como  $\sigma$  é primitiva, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $a$  aparece em  $\sigma^N(b)$ . Seja  $k \geq N$ . Então existe  $p \geq 0$  tal que  $k = N + p$ . Logo,  $\sigma^k(b) = \sigma^{N+p}(b) = \sigma^N(\sigma^p(b))$ .

Seja  $c \in \mathcal{A}$  tal que  $c$  aparece em  $\sigma^p(b)$ . Então  $\sigma^N(c)$  aparece em  $\sigma^N(\sigma^p(b))$ . Pela hipótese inicial, temos que  $a$  aparece em  $\sigma^N(c)$ . Logo,  $a$  aparece em  $\sigma^N(\sigma^p(b)) = \sigma^k(b)$ .

□

**Proposição 3.1.2** : *Se  $\sigma$  é primitiva, então qualquer um dos seus pontos periódicos é minimal.*

**Demonstração:** Seja  $u = u_0u_1u_2\dots$  um ponto periódico de  $\sigma$ . Então existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tal que  $u = \sigma^k(u)$ . Como  $\sigma$  é primitiva, pela proposição anterior, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq N$  e para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $a$  aparece em  $\sigma^k(b)$ . Logo, para todo  $i \in \mathbb{N}$  temos que  $u_0$  aparece em  $\sigma^{kN}(u_i)$ .

Sabemos que  $u = \sigma^{kN}(u) = \sigma^{kN}(u_0)\sigma^{kN}(u_1)\dots$ . Assim,  $u_0$  aparece uma infinidade de vezes em  $u$ . Fazendo  $M = \max\{|\sigma^{kN}(a)|; a \in \mathcal{A}\}$ , temos então que  $u_0$  aparece infinitas vezes com lacunas limitadas por  $2M$ .

Seja  $V$  uma palavra finita que aparece em  $u$ . Como  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{nk}(u_0)$ , existe  $n$  suficientemente grande tal que  $V$  aparece em  $\sigma^{nk}(u_0)$  e como  $\sigma^{nk}(u_0)$  aparece infinitas vezes em  $u$  (pois  $u_0$  aparece), também  $V$  aparece infinitas vezes em  $u$  com lacunas limitadas por  $2M'$ , onde  $M' = \max\{|\sigma^{nk}(a)|; a \in \mathcal{A}\}$ . Portanto,  $u$  é minimal.

□

**Proposição 3.1.3** : *Se  $\sigma$  é primitiva e  $u$  e  $v$  dois pontos periódicos da substituição  $\sigma$ , então  $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v)$ .*

**Demonstração:** Como  $u$  e  $v$  são pontos periódicos da substituição  $\sigma$ , existem  $k$  e  $k'$  em  $\mathbb{N}^*$  tais que  $u = \sigma^k(u)$ ,  $v = \sigma^{k'}(v)$ . Seja  $m = kk'$ . Então:

$$\sigma^m(u) = \sigma^{kk'}(u) = \sigma^{(k'-1)k}\sigma^k(u) = \sigma^{(k'-1)k}(u) = \dots = \sigma^k(u) = u$$

Da mesma maneira,  $\sigma^m(v) = v$ . Denotemos  $\tau = \sigma^m$ . Então  $\tau(u) = u$  e  $\tau(v) = v$ .

Sabemos ainda que:

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n(a) \text{ onde } a \text{ é uma letra tal que } \tau(a) \text{ começa com } a.$$

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n(b) \text{ onde } b \text{ é uma letra tal que } \tau(b) \text{ começa com } b.$$

Mostremos que  $\mathcal{L}(u) \subset \mathcal{L}(v)$ . Com efeito:

Seja  $W \in \mathcal{L}(u)$ . Como  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^n(a)$ , existe  $N$  suficientemente grande tal que  $W$  aparece em  $\tau^n(a) = \sigma^{mn}(a)$ , para todo  $n \geq N$ . Como  $\sigma$  é primitiva, existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tal que  $a$  aparece em  $\sigma^p(b)$ . Pela proposição (3.1.1), temos então que  $a$  aparece em  $\sigma^{pm}(b)$ . Logo,  $\sigma^{mn}(a)$  aparece em  $\sigma^{mn+pm}(b) = \sigma^{m(n+p)}(b)$ . Assim  $W$  aparece em  $\sigma^{m(n+p)}(b)$ , ou seja,  $w \in \mathcal{L}(v)$ .

Analogamente, mostra-se que  $\mathcal{L}(v) \subset \mathcal{L}(u)$

□

O teorema seguinte é um dos resultados mais importantes deste trabalho:

**Teorema 3.1.1** : Se  $\sigma$  é primitiva e  $u$  um ponto periódico, então o sistema  $(\Omega_u, S)$  é minimal e não depende do ponto periódico  $u$ , isto é, se  $v$  é um outro ponto periódico, então  $\Omega_u = \Omega_v$ .

**Demonstração:** A minimalidade do sistema segue das proposições (2.4.3) e (3.1.2) e o fato de que  $(\Omega_u, S)$  não depende de  $u$  vem da proposição anterior e da proposição (2.4.2). □

**Observação 3.1.1** : A partir de agora, se  $\sigma$  é primitiva, denotaremos  $\Omega_u$  por  $\Omega$ .

## 3.2 Matriz da Substituição

Antes de estudar a ergodicidade, vamos dar algumas definições e resultados.

Seja  $\sigma$  uma substituição definida no alfabeto  $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, s-1\}$ . Se  $B$  e  $C$  são duas palavras em  $\mathcal{A}^*$ , denotamos por  $L_C(B)$  o número de ocorrências de  $C$  em  $B$ . Em particular, se  $i \in \mathcal{A}$ ,  $L_i(B)$  é o número de ocorrências de  $i$  em  $B$ . Chamamos de  **$\sigma$ -matrix**, e denotamos por  $M = M_\sigma$ , a matriz cujas entradas são  $l_{ij} = L_i(\sigma(j))$ ,  $i, j \in \mathcal{A}$ .  $M$  é uma matriz  $s \times s$  **positiva** (com entradas não-negativas, não todas iguais a zero) cujas entradas são inteiros  $\geq 0$ .

**Exemplo 3.2.1** : Se  $\sigma$  é a substituição de Fibonacci, então  $M_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

A vantagem da matriz da substituição é devido às duas proposições:

**Proposição 3.2.1** : Para todo  $a \in \mathcal{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L(\sigma^n(a)) = M^n(L(a))$ , onde para todo  $B \in \mathcal{A}^*$ ,  $L_B = (L_0(B), \dots, L_{s-1}(B))^t$ .

**Demonstração:** A prova será por indução sobre  $n$ .

No caso  $n = 1$ , temos que mostrar que  $L(\sigma(a)) = M(L(a))$ , onde

$$M = M_\sigma = \begin{pmatrix} \ell_{00} & \cdots & \ell_{0(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{(s-1)0} & \cdots & \ell_{(s-1)(s-1)} \end{pmatrix}$$

e  $\ell_{ij} = L_i(\sigma(j))$ , com  $0 \leq i, j \leq s-1$ .

$L(a)$  é o vetor  $s$ -dimensional de coordenadas todas nulas, com exceção da posição  $(a+1)$ , onde aparece 1.

Portanto,  $M(L(a))$  é a coluna  $(\ell_{0a}, \ell_{1a}, \dots, \ell_{(s-1)a})^t$ , que é exatamente o vetor  $L(\sigma(a))$ .

Suponhamos então que  $L(\sigma^{n-1}(a)) = M^{n-1}(L(a))$ . Assim,

$$L(\sigma^n(a)) = L(\sigma^{n-1}(\sigma(a))) = M^{n-1}(L(\sigma(a))) = M^{n-1}(M(L(a))) = M^n(L(a)).$$

□

**Proposição 3.2.2** :  $\sigma$  é primitiva se, e somente se,  $M_\sigma$  é primitiva, isto é,  $\exists k > 0$  tal que todas as entradas da matriz  $M_\sigma^k$  são estritamente positivas.

**Demonstração:**  $\sigma$  é primitiva se, e somente se, existe  $k > 0$  tal que para quaisquer  $a, b \in \mathcal{A}$ , a letra  $a$  aparece em  $\sigma^k(b)$ , o que equivale a dizer que o vetor  $s$ -dimensional

$$L(\sigma^k(a)) = (L_0(\sigma^k(a)), \dots, L_{s-1}(\sigma^k(a)))$$

tem todas as coordenadas positivas, para todo  $a \in \mathcal{A}$ .

Mas os  $s$  vetores  $L(\sigma^k(a))$  são exatamente as  $s$  colunas da matriz  $M_\sigma^k$ , pois pela proposição anterior,  $L(\sigma^n(a)) = M_\sigma^n(L(a))$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Portanto, isto equivale a dizer que existe  $k > 0$  tal que a matriz  $M_\sigma^k$  tem todas as entradas estritamente positivas, isto é,  $M_\sigma$  é primitiva.

□

### 3.3 Ergodicidade

Nosso objetivo agora é provar o teorema seguinte que, juntamente com o teorema (3.1.1), representam os teoremas principais do trabalho.

**Teorema 3.3.1** : *Se  $\sigma$  é primitiva, então existe uma única medida  $\mu$  invariante por  $S$ , tal que o sistema  $(\Omega, S, \mu)$  é ergódico, isto é, o sistema é unicamente ergódico.*

Seja  $\sigma$  uma substituição primitiva. Então existe um ponto periódico  $u$  tal que  $\sigma^k(u) = u$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Considere  $\tau = \sigma^k$ . Temos que  $\tau$  é uma substituição primitiva (vem da prop. 3.1.1) e  $u$  um ponto fixo de  $\tau$ . Além do mais,  $\Omega_\sigma = \Omega_\tau$ . Logo, para mostrar a ergodicidade, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\sigma$  é uma substituição primitiva que tem um ponto fixo, isto é, existe pelo menos uma letra  $a$  tal que  $\sigma(a)$  começa com  $a$ . Um teorema muito útil será o teorema de Perron Frobenius (apêndice):

**Teorema 3.3.2 (Perron-Frobenius)** *Seja  $M$  uma matriz não negativa e primitiva. Então:*

1. *Existe um autovalor  $\theta > 0$  tal que  $\theta > |\lambda|$  para todo  $\lambda$  autovalor de  $M$ ;*
2. *O autovalor  $\theta$  tem multiplicidade algébrica 1.*

Antes de provarmos o teorema (3.3.1), vejamos alguns resultados:

**Proposição 3.3.1** : *Para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , a sequência  $S$ -dimensional de vetores  $\left(\frac{L(\sigma^n(\alpha))}{\theta^n}\right)$  converge a um autovetor  $v(\alpha)$  estritamente positivo correspondente a  $\theta$ .*

**Demonstração:** Como  $\sigma$  é primitiva, então pela proposição (3.2.2), a matriz  $M_\sigma$  é primitiva. Logo, pelo teorema de Perron Frobenius, temos um autovalor  $\theta$  simples e dominante.

O Teorema de decomposição primária (ver [12], pg 271) nos diz que podemos decompor  $\mathbb{R}^s$  como soma direta de subespaços  $M_\sigma$ -invariantes  $V_1, \dots, V_r$ , onde  $V_1$  é o  $\ker(M_\sigma - \theta I)$  e  $V_i$ , com  $2 \leq i \leq r$  são os auto-espaços associados aos demais autovalores:

$$\mathbb{R}^s = V_1 \oplus \dots \oplus V_r = V_1 \oplus W_2$$

onde  $W_2 = V_2 \oplus \dots \oplus V_r$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}^s$ . Então  $x = x_1 + x_2$  com  $x_1 \in V_1$  e  $x_2 \in W_2$ . Considere as aplicações:

$$\begin{aligned} P_1 : \mathbb{R}^s &\longrightarrow V_1 \\ x &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_2 : \mathbb{R}^s &\longrightarrow W_2 \\ x &\longmapsto x_2 \end{aligned}$$

onde  $P_1$  é a aplicação projeção na primeira coordenada e  $P_2$  a projeção na segunda coordenada.

Temos que

$$M_\sigma x = M_\sigma x_1 + M_\sigma x_2 = \theta x_1 + M_\sigma x_2 = \theta P_1(x) + M_\sigma P_2(x)$$

logo,  $M_\sigma = \theta P_1 + N$ , onde  $N = M_\sigma P_2$ . Além do mais,  $P_1 N = N P_1 = 0$ . De fato:

$$P_1 N(x) = P_1(M_\sigma P_2(x)) = P_1(M_\sigma(x_2)) = P_1(0 + M_\sigma(x_2)) = 0$$

$$N P_1(x) = N(x_1) = M_\sigma P_2(x_1) = M_\sigma P_2(x_1 + 0) = M_\sigma(0) = 0$$

Deduzimos da decomposição  $M = M_\sigma = \theta P_1 + N$  que  $M^n = \theta^n P_1 + N^n$ . Com efeito, provando por indução sobre  $n$ , temos que para  $n = 2$  é válido, pois

$$M^2 = (\theta P_1 + N)^2 = \theta^2 P_1^2 + N^2 + 2\theta P_1 N = \theta^2 P_1 + N^2$$

Suponhamos então que  $M^n = \theta^n P_1 + N^n$ . Assim,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M(M^n) = M(\theta^n P_1) + M(N^n) = (\theta P_1 + N)(\theta^n P_1) + (\theta P_1 + N)(N^n) = \\ &= \theta^{n+1} P_1^2 + N(\theta^n P_1) + \theta P_1 N^n + N^{n+1} = \theta^{n+1} P_1 + N^{n+1} \end{aligned}$$

ou seja,  $M^{n+1} = \theta^{n+1} P_1 + N^{n+1}$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^n}{\theta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta^n P_1}{\theta^n} + \frac{N^n}{\theta^n} = P_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N^n}{\theta^n}$$

Vamos provar que:

**Lema 3.3.1** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N^n}{\theta^n} = 0$

**Demonstração:** Seja  $\beta$  um autovalor de  $N$ . Então existe  $x \in \mathbb{R}^s \setminus \{0\}$  tal que

$$Nx = M_\sigma P_2(x) = \beta x$$

logo,  $M_\sigma P_2(x) - \beta P_2(x) = \beta P_1(x)$  e ambos os membros pertencem a  $V_1 \cap W_2$ . Assim,

$$M_\sigma P_2(x) = \beta P_2(x)$$

Agora, se  $P_2(x) = 0$ , então  $P_1(x) = 0$ , logo  $x = 0$ , o que é absurdo. Portanto,  $P_2(x) \neq 0$  e  $\beta$  é autovalor de  $M_\sigma$ . Como  $P_2(x) \in W_2$ , então  $P_2(x) \notin \ker(M_\sigma - \theta I)$ , logo  $\beta \neq \theta$ . Portanto, pelo Teorema de Perron-Frobenius, os autovalores de  $N$  têm módulo menor que  $\theta$ .

Por outro lado, usando a forma canônica de Jordan, existe uma matriz  $P$  tal que

$$P^{-1}NP = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & B_k \end{bmatrix}$$

onde os  $B'_k$ s são blocos da forma  $\begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_k I + Q$  e  $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

com  $Q^s = 0$ . Logo, para todo  $n > s$ ,

$$B_K^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \lambda_k^{n-i} Q^i = \sum_{i=0}^{s-1} C_n^i \lambda_k^{n-i} Q^i$$

Seja  $0 \leq i \leq s-1$ . Temos

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!} < n^s$$

Como  $Q^i$  é uma matriz formada apenas por 0 e 1 e  $|\lambda_k| < \theta$ , temos  $\frac{B_K^n}{\theta^n} \rightarrow 0$ , para todo  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Daí,  $\frac{(P^{-1}NP)^n}{\theta^n} = \frac{P^{-1}N^nP}{\theta^n} \rightarrow 0$ . Portanto  $\frac{N^n}{\theta^n} \rightarrow 0$ .

□

Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^n}{\theta^n} = P_1$

Seja  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Temos que  $\left(\frac{L(\sigma^n(\alpha))}{\theta^n}\right) = \left(\frac{M^n L(\alpha)}{\theta^n}\right)$  tende a  $P_1(L(\alpha))$ . O vetor  $v(\alpha) = P_1(L(\alpha))$  é um autovetor estritamente positivo correspondente a  $\theta$ .

□

**Proposição 3.3.2** : Sejam  $\alpha, j \in \mathcal{A}$ . Quando  $n \rightarrow \infty$ , a seqüência de números reais  $\frac{L_j(\sigma^n(\alpha))}{|\sigma^n(\alpha)|}$  admite um limite  $d_j > 0$ , o qual é independente de  $\alpha$ .

**Demonstração:** Aplicando a proposição (3.3.1), observamos que a seqüência de vetores  $s$ -dimensional  $\left(\frac{L(\sigma^n(\alpha))}{|\sigma^n(\alpha)|}\right)$  converge ao vetor limite  $\frac{v(\alpha)}{\langle v(\alpha), \ell \rangle}$ , onde  $\ell = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^s$ , pois

$$\frac{L(\sigma^n(\alpha))}{|\sigma^n(\alpha)|} = \frac{\frac{L(\sigma^n(\alpha))}{\theta^n}}{\frac{|\sigma^n(\alpha)|}{\theta^n}} = \frac{\frac{L(\sigma^n(\alpha))}{\theta^n}}{\langle L(\sigma^n(\alpha)), \ell \rangle} = \frac{\frac{L(\sigma^n(\alpha))}{\theta^n}}{\langle \frac{L(\sigma^n(\alpha))}{\theta^n}, \ell \rangle} \rightarrow \frac{v(\alpha)}{\langle v(\alpha), \ell \rangle}$$

que é precisamente o autovetor estritamente positivo associado a  $\theta$ , cuja soma das coordenadas é 1. O número  $d_j = v_j$  é portanto maior que zero, e independe de  $\alpha$ .

□

**Proposição 3.3.3** : *Seja  $u$  um ponto  $\bar{x}$ o de  $\sigma$ . Entao para toda letra  $\alpha$  de  $u$  e toda palavra  $B$  de  $u$ , a seqüência de reais*

$$\frac{L_B(\sigma^n(\alpha))}{|\sigma^n(\alpha)|}$$

*admite um limite  $d_B > 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração:** Seja  $B$  uma palavra em  $u$  de comprimento  $\ell \geq 1$ . Se  $\ell = 1$ , o resultado está provado pela proposição (3.3.2). Suponhamos  $\ell \geq 2$  e escrevemos  $\mathcal{A}_\ell$  como o conjunto de todas as palavras de comprimento  $\ell$ . Se  $\mathcal{A}_\ell$  puder ser identificado com o conjunto de todas as letras de algum ponto fixo de uma substituição primitiva  $\sigma_\ell$ , definida em  $\mathcal{A}_\ell$ , a proposição (3.3.3) pode ser derivada da proposição (3.3.2).

Seja  $w$  uma “letra” do alfabeto  $\mathcal{A}_\ell$ . Definimos uma substituição  $\sigma_\ell$  da seguinte maneira:

Se

$$\sigma(w) = \sigma(w_0 \dots w_{\ell-1}) = y_0 \dots y_{|\sigma(w_0)|-1} y_{|\sigma(w_0)|} \dots y_{|\sigma(w)|-1}$$

colocamos

$$\sigma_\ell(w) = (y_0 \dots y_{\ell-1}) (y_1 \dots y_\ell) \dots (y_{|\sigma(w_0)|-1} \dots y_{|\sigma(w_0)|+\ell-2}) \quad (3.1)$$

Definido desta maneira, temos  $|\sigma_\ell(w)| = |\sigma(w_0)|$  e estendemos  $\sigma_\ell$  a  $\mathcal{A}_\ell^*$  e  $\mathcal{A}_\ell^{\mathbb{N}}$  por concatenação.

Antes de completar a prova, vejamos dois lemas:

**Lema 3.3.2** :  *$\sigma_\ell$  admite como um ponto  $\bar{x}$ o a seqüência  $U_\ell$ , onde*

$$U_\ell = (u_0 \dots u_{\ell-1}) (u_1 \dots u_\ell) (u_2 \dots u_{\ell+1}) \dots$$

*cujas “letras” são todas as palavras de comprimento  $\ell$  em  $u$ , ocorrendo na mesma ordem que em  $u$ .*

**Demonstração:** Iteramos a substituição  $\sigma_\ell$  na primeira palavra em  $u$  de comprimento  $\ell$ ,  $w = u_0 u_1 \dots u_{\ell-1}$ .

$\sigma(w) = u_0 u_1 \dots u_{|\sigma(w)|-1}$ , pois  $u = \sigma(u)$ . De (3.1), temos

$$\sigma_\ell(w) = (u_0 \dots u_{\ell-1}) (u_1 \dots u_\ell) \dots (u_{|\sigma(u_0)|-1} \dots u_{|\sigma(u_0)|+\ell-2})$$

Logo,  $\sigma_\ell(w)$  começa com  $w$ . Portanto, pela proposição (2.5.2),  $U_\ell = (u_0 \dots u_{\ell-1}) \dots$  é um ponto fixo de  $\sigma_\ell$ .

□

**Lema 3.3.3** : Se  $\sigma$  é primitiva, então  $\sigma_\ell$  é primitiva.

**Demonstração:** Sejam  $w$  e  $B$  em  $\mathcal{A}_\ell$ . Como  $u = \sigma^n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(\alpha)$  para algum  $\alpha \in \mathcal{A}$ , então existe  $p \geq 1$  tal que  $B$  é um fator de  $\sigma^p(\alpha)$ . Como  $\sigma$  é primitiva, existe  $m_0 \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\sigma^m(w_0)$  contém  $\alpha$  para todo  $m \geq m_0$ . Logo,  $\sigma^p(\alpha)$  é um fator de  $\sigma^{m+p}(w_0)$  e  $B$  é um fator de  $\sigma^{m+p}(w_0)$ . Escrevendo

$$\sigma^n(w) = \sigma^n(w_0) \sigma^n(w_1 \dots w_{\ell-1}) = y_0 y_1 \dots y_{|\sigma^n(w_0)|-1} \alpha_0 \alpha_1 \dots$$

temos, iterando (3.1),

$$\sigma_\ell^n(w) = (y_0 \dots y_{\ell-1}) (y_1 \dots y_\ell) \dots (y_{|\sigma^n(w_0)|-1} \alpha_0 \dots \alpha_{\ell-2}) \quad (3.2)$$

Notamos que  $\sigma_\ell^n(w)$  tem como “letras” todas as palavras de comprimento  $\ell$  em  $\sigma^n(w_0)$ . Tomando  $m$  suficientemente grande e  $n = m + p$ , vemos que  $\sigma_\ell^n(w)$  contém  $B$ . Logo, para todo  $w$  e  $B$  em  $\mathcal{A}_\ell$ , existe  $n \in \mathbb{N}^*$ , tal que  $\sigma_\ell^n(w)$  contém  $B$ .

Provemos que  $\sigma_\ell$  é primitiva. Com efeito, pelo lema (3.3.3), sabemos que existe  $w \in \mathcal{A}_\ell$  tal que  $\sigma_\ell(w)$  começa com  $w$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_\ell^n(w) = U_\ell$  é um ponto fixo de  $\sigma_\ell$ .

**Afirmativa 1:** Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $c \in \mathcal{A}_\ell$ ,  $\sigma_\ell^{n_0}(w)$  contém  $c$ .

De fato, pelo que provamos, para todo  $a \in \mathcal{A}_\ell$ , existe  $n_a \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\sigma_\ell^{n_a}(w)$  contém  $a$ . Seja  $n_0 = \max_{a \in \mathcal{A}_\ell} n_a$ , então para todo  $a \in \mathcal{A}_\ell$ ,  $\sigma_\ell^{n_0}(w)$  é um prefixo de  $\sigma_\ell^{n_0}(w)$ . Assim,  $\forall c \in \mathcal{A}_\ell$ ,  $\sigma_\ell^{n_0}(w)$  contém  $c$ .

**Afirmativa 2 :** Existe  $m \in \mathbb{N}$ , tal que para todo  $b \in \mathcal{A}_\ell$ ,  $\sigma^m(b)$  contém todas as letras de  $\mathcal{A}_\ell$ .

De fato, seja  $b \in \mathcal{A}_\ell$ . Então existe  $n_b \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\sigma_\ell^{n_b}(b)$  contém  $w$ . Logo,  $\sigma_\ell^{n_0+n_b}(b)$  contém  $\sigma_\ell^{n_0}(w)$ . Seja  $n_1 = \max_{b \in \mathcal{A}_\ell} n_b$ . Então,

$$\sigma_\ell^{n_0+n_1}(b) = \sigma_\ell^{(n_1-n_b)+(n_0+n_b)}(b) = \sigma_\ell^{(n_1-n_b)} \sigma_\ell^{(n_0+n_b)}(b)$$

Como  $\sigma_\ell^{n_0+n_1}(b)$  contém  $\sigma_\ell^{n_0}(w)$ , então  $\sigma_\ell^{n_0+n_1}(b)$  contém  $\sigma_\ell^{n_1-n_0}(\sigma_\ell^{n_0}(w))$  que contém  $\sigma_\ell^{n_0}(w)$ . Assim, pela afirmação (1), deduzimos que existe  $m = n_0 + n_1$  tal que para todo  $b, c \in \mathcal{A}_\ell$ ,  $\sigma_\ell^m(b)$  contém  $c$ .

□

Vamos completar agora a prova da proposição (3.3.3). Aplicando à substituição  $\sigma_\ell$ , a proposição precedente, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_B(\sigma_\ell^n(w))}{|\sigma_\ell^n(w)|} = d_B > 0$$

independente de  $w$ . Mas por (3.2),  $|\sigma_\ell^n(w)| = |\sigma^n(w_0)|$  e  $L_B(\sigma_\ell^n(w)) \sim L_B(\sigma^n(w_0))$  quando  $n \rightarrow \infty$  (isto é, têm a mesma ordem de grandeza). Finalmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_B(\sigma^n(w_0))}{|\sigma^n(w_0)|} = d_B > 0$$

independente de  $w_0$  e a prova está completa.

□

**Proposição 3.3.4** : *Para toda palavra  $B$  de  $u = u_0u_1\dots$ , temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_B(u_k \dots u_{k+n})}{n+1}$$

*existe e não depende de  $k$ .*

**Demonstração:** A fim de usar a proposição (3.3.3), vamos tentar comparar  $u_k \dots u_{k+N}$  com uma palavra  $\sigma^n(w)$  para algum  $w \in \mathcal{A}^*$  e  $n \geq 1$ . Como  $u = \sigma(u) = \sigma^p(u)$ , para todo  $p \in \mathbb{N}^*$ , então se  $N$  é suficientemente maior que  $n$ , podemos decompor:

$$u_k \dots u_{k+N} = B_0 \sigma^n(u_j \dots u_{j+\ell}) B_1 \tag{3.3}$$

onde  $B_0$  e  $B_1$  são palavras de  $u$ , cujo comprimento é menor ou igual ao  $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} |\sigma^n(\alpha)| = r_n$ . Portanto,

$$N+1 = |B_0| + |B_1| + \sum_{i=j}^{j+\ell} |\sigma^n(u_i)| \tag{3.4}$$

e

$$L_B(u_k \dots u_{k+N}) - (N+1)d_B = L_B(u_k \dots u_{k+N}) - d_B(|B_0| + |B_1|) - d_B \sum_{i=j}^{j+\ell} |\sigma^n(u_i)|.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_B(\sigma^n(u_i))}{|\sigma^n(u_i)|} = d_B$ , para todo  $i$ , então, para todo  $\epsilon > 0$  fixado,

$$|L_B(\sigma^n(u_i)) - |\sigma^n(u_i)| d_B| \leq \epsilon |\sigma^n(u_i)| \quad (3.5)$$

para  $n$  suficientemente grande.

De acordo com (3.4), deduzimos de (3.5),

$$\begin{aligned} L_B(\sigma^n(u_i)) < d_B |\sigma^n(u_i)| + \epsilon |\sigma^n(u_i)| &\implies \sum_{i=j}^{j+\ell} L_B(\sigma^n(u_i)) < \sum_{i=j}^{j+\ell} d_B |\sigma^n(u_i)| + \epsilon \sum_{i=j}^{j+\ell} |\sigma^n(u_i)| \leq \\ &\leq d_B \sum_{i=j}^{j+\ell} |\sigma^n(u_i)| + \epsilon(N+1) \implies -d_B \sum_{i=j}^{j+\ell} |\sigma^n(u_i)| \leq - \sum_{i=j}^{j+\ell} L_B(\sigma^n(u_i)) + \epsilon(N+1) \end{aligned}$$

Logo,

$$\left| L_B(u_k \dots u_{k+N}) - d_B \sum_{i=j}^{j+\ell} |\sigma^n(u_i)| \right| \leq \left| L_B(u_k \dots u_{k+N}) - \sum_{i=j}^{j+\ell} L_B(\sigma^n(u_i)) \right| + \epsilon(N+1)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} L_B(u_k \dots u_{k+N}) &= L_B(B_0 \sigma^n(u_j \dots u_{j+\ell}) B_1) \leq \\ &\leq L_B(B_0) + L_B(B_1) + \sum_{i=j}^{j+\ell} L_B(\sigma^n(u_i)) + \sum_{i=j-1}^{j+\ell} L_B(\sigma^n(u_i u_{i+1})) \end{aligned}$$

onde a última soma leva em conta as ocorrências de  $B$  sobre palavras consecutivas, admitindo que  $\sigma^n(u_{j-1})$  intersecta  $B_0$  e  $\sigma^n(u_{j+\ell+1})$  intersecta  $B_1$ .  $B$  pode intersectar as palavras  $\sigma^n(u_i)$  e  $\sigma^n(u_{i+1})$  no máximo  $|B|$  vezes, portanto, finalmente obtemos a majoração:

$$|L_B(u_k \dots u_{k+N}) - (N+1)d_B| \leq \left| L_B(u_k \dots u_{k+N}) - d_B \sum_{i=j}^{j+\ell} |\sigma^n(u_i)| \right| + |d_B(|B_0| + |B_1|)| \leq$$

$$\leq \left| L_B(u_k \dots u_{k+N}) - \sum_{i=j}^{j+\ell} L_B(\sigma^n(u_i)) \right| + \epsilon(N+1) + 2d_B r_n \leq \left| \sum_{i=j-1}^{j+\ell} L_B(\sigma^n(u_i u_{i+1})) \right| + 2r_n + \epsilon(N+1) + 2d_B r_n \leq (2+2d_B)r_n + \epsilon(N+1) + |B|(\ell+1)$$

Escolhemos  $n$  a fim de obter (3.5) e também  $N$  suficientemente maior que  $n$ , para termos a decomposição (3.3) de  $u_k \dots u_{k+N}$ , como também a estimativa:

$$|B| \leq \epsilon \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} |\sigma^n(\alpha)|$$

Aplicando (3.4), obtemos

$$|B|(\ell+1) \leq \epsilon \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} |\sigma^n(\alpha)|(\ell+1) \leq \epsilon \sum_{i=j}^{j+\ell} |\sigma^n(u_i)| \leq \epsilon(N+1)$$

Assim,

$$|B|(\ell+1) \leq \epsilon(N+1)$$

e

$$\left| \frac{L_B(u_k \dots u_{k+N})}{N+1} - d_B \right| \leq \frac{2d_B r_n + 2r_n}{N+1} + 2\epsilon \leq \frac{4r_n}{N+1} + 2\epsilon$$

pois  $0 < d_B < 1$ . Portanto,

$$\left| \frac{L_B(u_k \dots u_{k+N})}{N+1} - d_B \right| \leq \frac{4r_n}{N+1} + 2\epsilon$$

uniformemente em  $k$  e o teorema está provado.  $\square$

**Observação 3.3.1** : O número  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_B(u_k \dots u_{k+n})}{n+1}$  é a frequência de aparição da palavra  $B$  em  $u$ , denotada por  $f_B$ .

Vamos provar a ergodicidade:

**Demonstração: (Teorema 3.3.1)**

Seja  $\sigma$  uma substituição primitiva. Relembramos que supomos que  $\sigma$  tem um ponto fixo. Seja  $v$  um ponto fixo de  $\sigma$  e  $\Omega = \Omega_v$ . Para todo fator  $W$  de  $v$ , definimos a medida do cilindro associado por

$$\mu([W]) = f_W$$

Temos que o conjunto formado pelas uniões finitas de cilindros dois a dois disjuntos é uma álgebra  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $\Omega$ . Logo, extendemos  $\mu$  a esta álgebra, fazendo  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i)$ . Pelo Teorema de Extensão, existe uma única função finita, finitamente aditiva, que é uma extensão de  $\mu$  à  $\sigma$ -álgebra gerada pela álgebra  $\mathcal{B}$ . Além do mais, esta  $\sigma$ -álgebra é igual à  $\sigma$ -álgebra boreleana. Portanto, podemos estender essa medida  $\mu$  a todos os conjuntos mensuráveis.

Temos que  $\mu$  é uma medida  $S$ -invariante. Com efeito,  $S^{-1}[W] = \bigcup_{i=0}^{s-1} [iW]$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mu(S^{-1}[W]) &= \sum_{i=0}^{s-1} \mu([iW]) = \sum_{i=0}^{s-1} f_{iW} = \sum_{i=0}^{s-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{iW}(v_k \dots v_{k+n})}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{L_{iW}(v_k \dots v_{k+n})}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_W(v_k \dots v_{k+n})}{n+1} = f_W = \mu([W]) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que para todo cilindro  $[W]$ ,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{[W]}(S^{n+j}(v)) \rightarrow f_{[W]} = \mu([W]) = \int_{\Omega} \chi_{[W]} d\mu \quad (3.6)$$

onde  $\chi_{[W]}$  é a função característica de  $[W]$  em  $\Omega_v$ .

Com efeito, temos

$$L_W(v_j \dots v_{j+N}) = \chi_{[W]} S^j(v) + \chi_{[W]} S^{j+1}(v) + \dots + \chi_{[W]} S^{j+N-|W|}(v)$$

tendendo  $N$  para infinito e usando o fato que o limite não muda se trocarmos  $N - |W|$  por  $N - 1$  e a proposição (3.3.4), obtemos a relação (3.6).

Como os cilindros geram a  $\sigma$ -álgebra boreleana, temos para todo  $x \in \Omega$ ,  $A \subset \Omega$  mensurável,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_A(S^n(x)) \rightarrow \mu(A).$$

Logo, pelo teorema (1.0.4),  $(\Omega, S)$  é ergódico em relação a  $\mu$ .

□

**Observação 3.3.2 :** *Temos que  $\mu$  é uma medida de probabilidade. Com efeito, se  $\mathcal{A} = \{0, \dots, d\}$ , então  $\Omega = [0] \cup \dots \cup [d]$  (uniao disjunta). Daí,*

$$\mu(\Omega) = \mu([0]) + \dots + \mu([d]) = f_0 + \dots + f_d$$

*i*

Mas, por definição,  $f_i$  é o limite da sequência  $\frac{L_i(v_k \dots v_{k+n})}{n+1}$ . Como

$$\sum_{i=0}^d \frac{L_i(v_k \dots v_{k+n})}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1,$$

temos  $\mu(\Omega) = 1$ .

Resta-nos mostrar que a medida  $\mu$ , definida no teorema (3.3.1), é única. Dada uma função simples  $\varphi$ , então  $\varphi = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{[W_i]}$ , onde  $p \in \mathbb{N}$  e  $c_i \in \mathbb{C}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, p\}$ , temos que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{[W_i]}(S^{n+j}(v)) \rightarrow \int_{\Omega} \chi_{[W_i]} d\mu$$

uniformemente em  $j$ . Logo,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_i \chi_{[W_i]}(S^{n+j}(v)) \rightarrow \int_{\Omega} c_i \chi_{[W_i]} d\mu$$

uniformemente em  $j$ . Assim,

$$\sum_{i=1}^p \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_i \chi_{[W_i]}(S^{n+j}(v)) \right) \rightarrow \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} c_i \chi_{[W_i]} d\mu$$

Portanto,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{i=1}^p c_i \chi_{[W_i]}(S^{n+j}(v)) \right) \rightarrow \int_{\Omega} \sum_{i=1}^p c_i \chi_{[W_i]} d\mu$$

ou seja,

**Demonstração:** (a) Se  $g(x) \geq 0$  para todo  $x \in \Omega$ , então existe uma seqüência  $(\varphi_k)$  de funções simples mensuráveis tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = g$  e  $0 \leq \varphi_k \leq \varphi_{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Logo, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , temos por (3.7) que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k(S^{n+j}(v)) = \int_{\Omega} \varphi_k d\mu$$

uniformemente em  $j$ . Por outro lado,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k(S^{n+j}(v)) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi_k d\mu = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k d\mu = \int_{\Omega} g d\mu$$

Como  $(\varphi_k)_{k \geq 0}$  converge uniformemente para  $g$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k(S^{n+j}(v)) \right) = \int_{\Omega} g d\mu$$

Portanto,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^{n+j}(v)) \rightarrow \int_{\Omega} g d\mu \quad (3.8)$$

uniformemente em  $j$ .

(b) Se existe  $x \in \Omega$  tal que  $g(x) < 0$ , então  $g = g^+ - g^-$ , onde  $g^+(u) = \max\{g(u), 0\}$  e  $g^-(u) = \max\{-g(u), 0\}$ . Como  $g^+$  e  $g^-$  são funções não negativas, por (a) temos que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g^+(S^{n+j}(v)) \rightarrow \int_{\Omega} g^+ d\mu$$

e

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g^-(S^{n+j}(v)) \rightarrow \int_{\Omega} g^- d\mu$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} g^+(S^{n+j}(v)) - \sum_{n=0}^{N-1} g^-(S^{n+j}(v)) \right] &\rightarrow \int_{\Omega} g^+ d\mu - \int_{\Omega} g^- d\mu = \\ &= \int_{\Omega} g^+ - g^- d\mu = \int_{\Omega} g d\mu \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{N} \left( \sum_{n=0}^{N-1} g(S^{n+j}(v)) \right) \rightarrow \int_{\Omega} g d\mu \quad (3.9)$$

Temos então de (3.8) e (3.9) que para toda função contínua  $g$ ,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^{n+j}(v)) \rightarrow \int_{\Omega} g d\mu$$

uniformemente em  $j$ .

□

Assim, para qualquer seqüência de inteiros  $n_k$ , temos que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^{n+n_k}(v)) \rightarrow \int_{\Omega} g d\mu \quad (3.10)$$

uniformemente em  $k$ , para qualquer  $g$  contínua.

Seja  $w \in \Omega = \overline{\{S^n(v); n \in \mathbb{N}\}}$ . Então existe uma seqüência  $(n_k)_{k \geq 0}$  de números naturais tal que  $S^{n_k}(v) \rightarrow w$ . Seja  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} S^{n+n_k}(v) = S^n(w)$ . Assim,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^n(w)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\lim_{k \rightarrow \infty} S^{n+n_k}(v)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^{n+n_k}(v)) \right]$$

Mas por (3.10), o último limite converge para  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g d\mu = \int_{\Omega} g d\mu$ . Portanto,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^n(w)) \rightarrow \int_{\Omega} g d\mu \quad (3.11)$$

para todo  $w \in \Omega$  e para toda função contínua  $g$ .

Finalmente, suponhamos que existe outra medida de probabilidade  $S$ -invariante  $\nu$ , isto é,  $\nu(B) = \nu(S^{-1}(B))$ , para qualquer  $B$  mensurável. Então, para todo  $n$ ,  $\nu(S^{-n}(B)) = \nu(B)$ , o que quer dizer que

$$\int_{\Omega} g(S^n(w)) d\nu = \int_{\Omega} g(w) d\nu$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{N} \int_{\Omega} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^n(w)) d\nu = \int_{\Omega} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^n(w)) d\nu \quad (3.12)$$

Seja  $M = \max\{|g(x)|, x \in \Omega\}$ . Temos

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^n(w)) \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |g(S^n(w))| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} M = M$$

Em virtude de (3.11) e (3.12) e pelo Teorema da Convergência Limitada, temos

$$\frac{1}{N} \int_{\Omega} \sum_{n=0}^{N-1} g(S^n(w)) d\nu \rightarrow \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} g(w) d\mu \right) d\nu$$

e

$$\int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} g(w) d\mu \right) d\nu = \int_{\Omega} g(w) d\mu \int_{\Omega} d\nu = \int_{\Omega} g(w) d\mu \cdot \nu(\Omega) = \int_{\Omega} g(w) d\mu$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} g(w) d\mu = \int_{\Omega} g(w) d\nu$$

para toda função contínua  $g$ .

Temos ainda que  $\chi_{[W]}$  é contínua. De fato:

$\chi_{[W]} : \Omega \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ . Seja  $A$  um aberto em  $\mathbb{R}$ .

(i) Se 0 e 1 pertencem a  $A$ , então  $(\chi_{[W]})^{-1}(A) = \Omega$  que é aberto.

(ii) Se  $0 \in A$  e  $1 \notin A$ , então  $(\chi_{[W]})^{-1}(A) = \Omega \setminus [W]$ . Como  $[W]$  é fechado, então  $\Omega \setminus [W]$  é aberto.

(iii) Se  $1 \in A$  e  $0 \notin A$ , então  $(\chi_{[W]})^{-1}(A) = [W]$  que é aberto.

Tomando então  $g = \chi_{[W]}$ , temos

$$\int_{\Omega} \chi_{[W]} d\nu = \int_{\Omega} \chi_{[W]} d\mu,$$

ou seja,  $\nu([W]) = \mu([W])$  para todo cilindro  $[W]$ . Como os cilindros geram a  $\sigma$ -álgebra boreleana, obtemos que  $\nu = \mu$ .

# Apêndice

Neste apêndice vamos enunciar e provar o Teorema de Perron-Frobenius. Esse teorema se refere a matrizes  $d \times d$  cujos elementos são positivos. Resumidamente, o teorema afirma que tal matriz possui um autovalor positivo que tem multiplicidade algébrica um e que é o maior autovalor em módulo.

**Teorema 3.3.3 (Perron-Frobenius)** *Seja  $M$  uma matriz não negativa e primitiva. Então:*

1. *Existe um autovalor  $\theta > 0$  tal que  $\theta > |\lambda|$  para todo  $\lambda$  autovalor de  $M$ ;*
2. *O autovalor  $\theta$  tem multiplicidade algébrica 1.*

Antes de apresentar a prova do Teorema de Perron Frobenius vamos enunciar e provar o seguinte lema:

**Lema 3.3.5 :** *Sejam  $y_1, \dots, y_n$  números complexos não nulos. Se  $|y_1 + \dots + y_n| = |y_1| + \dots + |y_n|$ , então*

$$\arg y_1 = \dots = \arg y_n$$

*onde  $\arg y_i$  é o argumento de  $y_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .*

**Demonstração:** A demonstração será feita por indução sobre  $n$ . É válido para  $n = 2$ . De fato, sejam  $y_1, y_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tais que  $|y_1 + y_2| = |y_1| + |y_2|$ . Temos que:

$$|y_1 + y_2|^2 - (|y_1| + |y_2|)^2 = y_1 \cdot \bar{y}_2 + \bar{y}_1 \cdot y_2 - 2|y_1||y_2| = 0 \quad (3.13)$$

Colocando  $y_1 = r_1 e^{i\theta}$  e  $y_2 = r_2 e^{i\phi}$ , onde  $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$ , obtemos de (3.13),

$$e^{i(\theta-\phi)} + e^{i(\phi-\theta)} = 2$$

Logo,  $e^{i(\theta-\phi)} + \frac{1}{e^{i(\theta-\phi)}} = 2$  e, portanto,  $e^{i(\theta-\phi)} = 1$ . Logo,  $\theta = \phi$ .

Suponhamos que a propriedade seja válida para  $n = 2, \dots, k$ . Sejam  $y_1, \dots, y_k, y_{k+1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tais que  $|y_1 + \dots + y_{k+1}| = |y_1| + \dots + |y_{k+1}|$ . Como,

$$|y_1| + \dots + |y_{k+1}| = |y_1 + \dots + y_{k+1}| \leq |y_1 + \dots + y_k| + |y_{k+1}|$$

então,

$$|y_1| + \dots + |y_k| \leq |y_1 + \dots + y_k|$$

Logo,  $|y_1 + \dots + y_k| = |y_1| + \dots + |y_k|$ . Pela hipótese de indução, obtemos que  $\arg y_1 = \arg y_2 = \dots = \arg y_k$ . Portanto,  $\arg(y_1 + \dots + y_k) = \arg y_1$ .

Vamos mostrar que  $\arg y_1 = \arg y_{k+1}$ .

Como  $|y_1 + \dots + y_{k+1}| = (|y_1| + \dots + |y_k|) + |y_{k+1}|$  e  $|y_1| + \dots + |y_k| = |y_1 + \dots + y_k|$ , então  $|y_1 + \dots + y_{k+1}| = |y_1 + \dots + y_k| + |y_{k+1}|$ . Pela hipótese de indução para  $n = 2$ , temos que  $\arg(y_1 + \dots + y_k) = \arg y_{k+1}$  e assim,  $\arg y_1 = \arg y_{k+1}$ .

Portanto,  $\arg y_1 = \dots = \arg y_k = \arg y_{k+1}$ .

□

Vamos à demonstração do Teorema de Perron Frobenius.

**Demonstração:** (i) Seja  $\tau$  um autovalor de  $M$  tal que  $|\tau| \geq |\lambda|$ , para todo  $\lambda$  outro autovalor de  $M$  e seja  $y$  o autovetor de  $M$  associado a  $\lambda$ . Logo, para todo  $i$ , temos

$$\tau y_i = \sum_j m_{ij} y_j$$

onde  $m_{ij}$  são os coeficientes da matriz  $M$ . Logo,  $|\tau y_i| = \left| \sum_j m_{ij} y_j \right|$  implica que

$|\tau| |y_i| \leq \sum_j m_{ij} |y_j|$ , pois  $M > 0$ . Daí, temos que

$$|\tau| \leq \min_i \frac{\sum_j m_{ij} |y_j|}{|y_i|}$$

Note que se  $y_i = 0$ , então  $|\tau| \leq +\infty$ . Seja a função  $r$  definida, para  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$ , por

$$r(x) = \min_i \frac{\sum_j m_{ij} x_j}{x_i}$$

A função  $r(x) = \min_i \frac{M_x}{x_i}$  é contínua, para todo  $x$  no conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^s : x > 0\}$ . Logo,  $\sup_{x \neq 0, x > 0} r(x)$  é atingido. De fato, como  $r(cx) = r(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^s$ , para todo  $c$  elemento de  $r$ , então  $\sup_{x \neq 0, x > 0} r(x) = \sup_{|x|=1, x \geq 0} r(x)$ . Como  $r$  é contínua e o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^s : \|x\| = 1\}$  é compacto, então  $\sup_{|x|=1, x \geq 0} r(x)$  é alcançado.

Seja  $\theta = \sup_{|x|=1, x \geq 0} r(x)$ . Daí,  $0 < |\tau| < \theta$ . Como  $\min_i \frac{\sum_j m_{ij} x_j}{x_i} \leq \theta$ , para todo  $x \geq 0$ , então vamos mostrar que  $\theta$  também é um autovalor. Com efeito, seja  $\theta = \min_i \frac{\sum_j m_{ij} |y_j|}{|y_i|}$ , para algum  $y \geq 0$ , com  $\|y\| = 1$  e seja  $z = My - \theta y \neq 0$ . Como  $M^k > 0$  para algum  $k$ , então

$$M^k z = M(M^k y) - \theta M^k y > 0$$

Se  $x = M^k y$ , então  $\theta x < Mx$  e isso implica que  $\theta x_i < \sum_j m_{ij} x_j$ , para todo  $i$ , ou

seja,  $\theta < \frac{\sum_j m_{ij} x_j}{x_i}$ , para todo  $i$ , o que é uma contradição.

Portanto, mostramos que  $\theta > 0$  é também um autovalor e que  $\theta \geq |\lambda|$ , para qualquer outro autovalor  $\lambda$  de  $M$ .

Suponhamos agora que exista  $\lambda$  autovalor de  $M$  tal que  $\theta = |\lambda|$ . Como  $My = \lambda y$ , então  $M|y| = \theta|y|$ . Daí segue que

$$M^k |y| = \theta^k |y| = |M^k y|$$

e que para todo  $i$

$$\left| \sum_j m_{ij}^k y_j \right| = \sum_j m_{ij}^k |y_j|$$

Daí pelo lema (3.3.5), temos que os argumentos de  $y_i$  são todos idênticos e seja  $y_j = |y_j|e^{i\phi}$  sua representação polar. Como  $y$  é autovetor associado a  $\lambda$  então,  $ye^{-i\phi}$  também o é. Logo, para todo  $j$

$$y_j e^{-i\phi} = |y_j| e^{i\phi} e^{-i\phi} = |y_j| > 0$$

e isso implica que  $ye^{-i\phi}$  é autovetor, estritamente positivo, associado a  $\lambda$ .

Assim,  $0 < Mye^{-i\phi} = \lambda ye^{-i\phi}$  implica que  $\lambda > 0$ , necessariamente. Logo, concluímos que  $\lambda = \theta$ . Portanto,  $\theta > |\lambda|$ , para todo  $\lambda$  autovalor de  $M$ .

Para a prova do restante do teorema, temos o seguinte lema que vamos apenas enunciar:

**Lema 3.3.6 :** *Seja  $\theta$  o autovalor dominante da matriz primitiva  $M$ . Se  $x$   $\notin$  um autovetor correspondente a  $\theta$ , então  $|x|$   $\notin$  um autovetor estritamente positivo associado a  $\theta$ .*

(ii) O auto-espço associado a  $\theta$ ,  $\ker(M - \theta I)$  tem dimensão 1. De fato, se não tivesse, consideremos  $x$  e  $y$  vetores linearmente independentes em  $\ker(M - \theta I)$ . Pelo lema (3.3.6) temos que  $x_i$  e  $y_i$  são diferentes de zero, para todo  $i$ . Seja  $z = x - \frac{x_1}{y_1}y$ . Desta forma,  $z$  tem que ser identicamente nulo.

Vamos mostrar agora que  $\ker(M - \theta I) = \ker(M - \theta I)^2$ , o que implica que  $\theta$  é simples.

Suponhamos que  $x_0 \in \ker(M - \theta I)^2 \setminus \ker(M - \theta I)$ . Temos que  $Mx_0 = \theta x_0 + x$ , onde  $x \in \ker(M - \theta I)$ .

Vamos mostrar, por indução, que para todo  $n \geq 1$ ,  $M^n x_0 = \theta^n x_0 + n\theta^{n-1}x$ . Com efeito, é válido para  $n = 1$ , pois  $Mx_0 = \theta x_0 + x$ . Suponhamos válido para  $n$ . Logo,

$$\begin{aligned} M(M^n x_0) &= M\theta^n x_0 + Mn\theta^{n-1}x \\ M^{n+1}x_0 &= \theta^n Mx_0 + n\theta^{n-1}Mx \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}M^{n+1}x_0 &= \theta^n(\theta x_0 + x) + n\theta^{n-1}\theta x \\M^{n+1}x_0 &= \theta^{n+1}x_0 + (n+1)\theta^n x\end{aligned}$$

Temos que existe  $n_0$  suficientemente grande e existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$M^{n_0}|x_0| \geq |M^{n_0}x_0| \geq n_0\theta^{n_0-1}c \geq \theta^{n_0}|x_0| \quad (3.14)$$

Logo,  $M^{n_0}$  é matriz primitiva com autovalor dominante  $\theta^{n_0}$ . De (3.14), deduzimos que  $M^{n_0}|x_0| = \theta^{n_0}|x_0|$  e então,  $M^{n_0}x_0 = \theta^{n_0}x_0$ , como no item (i). Isso contradiz nossa suposição e portanto,  $\ker(M - \theta I) = \ker(M - \theta I)^2$ .

□

# Referências Bibliográficas

- [1] Arnoux, P. e Rauzy, G., *Représentation géométrique de suites de complexité  $2n + 1$* , Bull. Soc. math. France, 119, 1991, p.101-117.
- [2] Barnsley, M. , *Fractals everywhere*, Ac. Press (1988).
- [3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, New York, Wiley Classics Library, 1995.
- [4] Bedford T. , *Generating special Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms using fractals*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (1986), 6, p. 325-333.
- [5] Bellissard, J. , *Gap labelling theorems for Schrodinger's operators*, Numb. Theo. and Physics, J.M. Luck, P.Moussa and M. Waldschmidt (Eds.), Springer proceedings in Physics, 47 (1990).
- [6] Fogg, N.P., *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, 1794, New York, Springer-Verlag, 2002.
- [7] Gomes, C.R., *Propriedades Algébricas, Geométricas e Topológicas das Substituições*, Tese de Mestrado, IM/UFRJ, 2004.
- [8] Host, B., *Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable*, Ergod. Th. and. Dynam. Sys. (1986), 6, 529-540.

- 
- [9] Morse, M. e Hedlund, G. A., *Symbolic Dynamics*, Amer.J. Math., 60(1938) 815-866.
- [10] Kenyon, R. e Vershik, A. M., *Arithmetic construction of sofic partitions of hyperbolic toral automorphisms*. Prépublicação de l'Umpa - ENS Lyon, (1996), número 0178.
- [11] Lind, D. e Marcus, B., *An introduction to Symbolic Dynamics and coding*, Cambridge University Press, 1995.
- [12] Lipschutz, S., *Algebra Linear*, Resumo da teoria, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1973.
- [13] Oliveira, K., *Um Primeiro Curso sobre Teoria Ergódica com Aplicações*, 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, Rio de Janeiro-RJ, 2005.
- [14] Queffélec, M. *Substitution Dynamical Systems-Spectral Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1294, Springer-Verlag, 1987, Berlin.
- [15] Rauzy, G., *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France , 110, (1982), 147-178.
- [16] Thurston, W.P., *Groups, tilings, and finite state automata*, AMS Colloquim lectures, 1990.
- [17] Walters, P., *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)