LOURIVAL JUNIOR MENDES

UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM SOBRE ARGUMENTAÇÕES E PROVAS NUMA COLEÇÃO DO ENSINO MÉDIO

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2007

LOURIVAL JUNIOR MENDES

UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM SOBRE ARGUMENTAÇÕES E PROVAS NUMA COLEÇÃO DO ENSINO MÉDIO

*Dissertação de Mestrado apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da Professora Doutora Janete Bolite Frant.*

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

À minha família:
Aos meus pais, Francisco e Maria
Meus irmãos Francisco,
Erizangela e Elen

AGRADECIMENTOS

Este trabalho, além de esforço pessoal, contou com força de diversas pessoas e entidades às quais sou extremamente grato.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pela bolsa de estudo.

À minha orientadora Janete Bolite Frant por ter me acolhido como orientando e por seu apoio em todo este trabalho.

A todos os meus Professores do mestrado profissional por terem me oferecido suas visões sobre o ensino de matemática.

Às Professoras Doutoras Sônia Pitta e Celi Lopes, membros da banca, pelos comentários e sugestões dadas na qualificação.

Aos colegas de Mestrado pela amizade e companheirismo, em especial, aos meus amigos Luiz Friolani e Humberto Todesco por sua colaboração e amizade durante o mestrado.

Aos colegas da Escola Romeu Montoro.

A toda a minha família.

Meu muito obrigado!

O Autor

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi investigar o papel que assume as provas e demonstrações no livro didático de matemática do Ensino Médio. O trabalho contribui com o projeto AProvaME[1] cujo objetivo é investigar, analisar e propor atividades para a aprendizagem de provas e demonstrações na matemática escolar.

Minha investigação se pautou na coleção de Manoel Paiva aprovada pelo PNLEM/2005[2] e distribuída para as escolas públicas de Ensino Médio do estado de São Paulo que optaram por adotá-la, entre elas a que leciono.

Uma vez que o livro didático é uma fonte quase que única para o apoio do professor, vários estudos apontam a influência do mesmo no ensino do professor e consequentemente influencia a aprendizagem dos alunos, investigar se existe e de que modo trata provas e demonstrações em sua coleção contribui para apontar novos caminhos para tal ensino.

Os temas investigados foram: Conjuntos Numéricos, Funções, Progressões Aritméticas e Geométricas, Paralelismo e Perpendicularismo.

Analisando os três volumes, relativos às três séries do Ensino Médio, segundo Balacheff, Villiers e do grupo IREM, foi possível classificar os tipos de provas que são privilegiados na coleção.

Discuto e apresento algumas sugestões para complementar o ensino de provas relativas aos tópicos analisados.

Palavras chaves: Prova, Argumentação, Livro Didático, Educação Matemática, Ensino Médio.

[1] Projeto financiado pelo CNPq, coordenado por Lulu Healy.
[2] Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio

ABSTRACT

The purpose of this study was to investigate the role of proofs and demonstration on textbooks of high school. This work contributes with APROVA ME, a project that aims to investigate, analyze and propose activities for the learning of proofs and demonstration in school mathematics.

The text books from Manoel Paiva was analyzed; three volumes constituted his collection and it was approved by the National Program that evaluate high school text books. It was distributed among public schools in the state of Sao Paulo, including the one I teach.

Since text books are, in general, the solely source for classroom teachers, and many studies point out the impact of text books on teacher's way of teaching and consequently impact on students' learning, to investigate how it deals with proofs and demonstration may help to show new ways of teaching proofs in schools.

Our investigation focused on the topics: Number sets; functions; arithmetic and geometric progressions; parallelism and perpendiculars.

After analyzing the three volumes, based on Balacheff, Villiers and IREM group, it was possible to classify the proofs that were privileged by the author.

I discuss and present suggestions to enhance the teaching of proofs related to the analyzed topics.

Keywords: Proof, Argumentation, Textbook, Mathematics Education, High School

SUMÁRIO

LISTA DE QUADROS

LISTA DAS FIGURAS RETIRADAS DA COLEÇÃO

CAPÍTULO I

1. Apresentação

A idéia de pesquisar sobre o tema “argumentações e provas” surgiu após meu contato com o projeto “Argumentações e Provas na Matemática Escolar”, desenvolvido pelos membros do Grupo de Pesquisa de Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TECMEM) da Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP. Esse projeto pesquisa o papel do que se entende por argumentações e provas:

a) No campo institucional – PCN; Programas Nacionais e estrangeiros; Livros Didáticos; Exames Nacionais;

b) No campo docente - professores dos Ensinos Superior, Médio e Fundamental e

c) No campo discente - alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio.

No meu caminhar, em 1988, conclui o Ensino Médio em uma escola pública da capital de São Paulo. As aulas de Matemática durante este período foram ministradas por diferentes professores, mas, invariavelmente, todos usavam a mesma didática: escreviam na lousa as definições de um dado tópico matemático, apresentavam alguns exemplos; em seguida, explicavam a matéria escrita na lousa e indicavam alguns exercícios a serem resolvidos em classe. Passado o tempo predeterminado para a resolução, o professor corrigia na lousa e indicava uma série de exercícios semelhantes para serem feitos em casa; a este modelo de ensino chamo de didática tradicional do Ensino de Matemática.

Nessa época, enquanto estudante do Ensino Médio, eu acreditava que a aplicação correta das regras e procedimentos nas resoluções dos exercícios propostos pelo professor garantiria minha compreensão dos assuntos e, conseqüentemente, bons resultados nas provas e trabalhos. Por isso, estudar se resumia em fazer, mecanicamente, os exercícios de acordo com a correção feita pelo professor na lousa. Sendo assim, era considerado pela turma “o crânio” em Matemática, por ter, aparentemente, facilidade com os cálculos da disciplina.

Iludido pelo que pensava ser “fazer Matemática” e pela idéia de que era conhecedor da matéria, resolvi ingressar em um curso superior nessa área do saber. Assim, em 1989, ingressei no curso de Bacharelado em Ciências com Habilitação em Matemática, na Universidade São Judas Tadeu. Durante a graduação, deparei-me com uma metodologia semelhante à que estava acostumado: teoria, exercícios resolvidos e exercícios propostos.

Como experiência pessoal, devo mencionar que quando estudei na graduação tive algum contato com provas e demonstrações, mas acredito que foram apresentadas como informação a ser decorada, memorizada, com passos inflexíveis e numa linguagem formal, fazendo-me crer que eram algo extremamente técnico e restrito aos matemáticos.

Ingressei no ensino no ensino público como professor de matemática em 1994, e em 2000 tornei-me efetivo no magistério por meio de um concurso público.

Em 2003, surgiu a oportunidade de cursar a Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP, graças à obtenção de bolsa de estudos da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. O que possibilitou meu aprimoramento como professor do ensino público através do contato com pesquisas em Educação Matemática.

No segundo semestre de 2005, comecei a participar do Grupo de Pesquisa de Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TECMEM) e, enquanto cursava Tópicos de Geometria, soube que haveria a criação de um grupo de pesquisa relacionado a argumentações e provas; a partir daí, interessei-me e comecei a freqüentar os encontros do novo grupo no semestre posterior.

Posteriormente, atuando na sala de aula, por coincidência, no segundo semestre de 2005 (primeira fase do AProvaME), uma aluna de 3º ano do Ensino Médio me questionou o seguinte:

"Professor, por que eu posso multiplicar raízes e não posso somar raízes?".

Essa pergunta feita por uma aluna, em questão de décimos de segundos, levou-me a pensar sobre que tipo de prova eu deveria apresentar a ela, já que, segundo Rezende e Nasser (1994), uma das fontes de argumentação para prova do ponto de vista do aluno (quando possível ser feita) é a recorrência a uma autoridade, e neste caso, minha aluna confiava plenamente no que eu ia lhe dizer. Não se trata aqui de excluir uma prova mais "rigorosa", e sim de uma opção mais criteriosa de acordo com a situação. Optei por exemplos numéricos, o que Balacheff chamaria de empirismo ingênuo, como ponto de partida para argumentações posteriores mais sofisticadas. Transcorrida a explicação, fiquei satisfeito com alguns "ah!" na sala de aula, fazendo-me crer que boa parte da turma havia entendido o que eu havia explicado. O passo seguinte seria verificar se tal afirmação era válida sempre.

Professor do Ensino Médio, convencido da importância das argumentações e provas para este nível de ensino; decidi a partir das leituras propostas pelos membros do projeto, investigar a forma de apresentação nos livros didáticos de Matemática destinados a esse nível de escolaridade. A escolha dos livros didáticos foi feita entre as 11 coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM/2005).

O objetivo deste trabalho é investigar e analisar a abordagem conferida no livro didático para provas, demonstrações e argumentações no Ensino Médio. Esta investigação visa a contribuir com o projeto de pesquisa "Argumentação e Prova na Matemática Escolar", que doravante será chamado apenas de AProvaME, desenvolvido pelo Grupo G3 - Grupo de Pesquisa de Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TECMEM), do programa de Estudos de Pós-Graduação Matemática da PUC-SP. Para isso, baseamo-nos nas orientações e pareceres fornecidos pelo PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio), no que se relacionam as argumentações e provas no livro didático.

Sabendo que o livro didático de Matemática foi fornecido em 2006 para todas as escolas no âmbito do estado de São Paulo e considerando que Silva (2006) aponta que o livro didático é para muitos professores a única fonte de preparação de aulas, temos que o professor, quando utiliza o livro didático, acaba por influenciar a maneira como seus alunos aprendem Matemática, inclusive no que se refere a argumentações e provas nas aulas de Matemática. Portanto, levantar e analisar como, em uma mesma coleção, o autor aborda a questão das argumentações e provas nos três anos de Ensino Médio, pode contribuir para entender melhor e formular recomendações de atividades para este nível escolar, conforme objetivos do projeto AProvaME.

Sendo assim, minhas questões de pesquisa surgiram: Os livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio abordam as argumentações e provas? De que maneira isto é feito? Que aspectos são ou não são privilegiados?

No próximo item explicaremos como se desenvolveu o projeto AProvaME, pois o mesmo acabou por dar indicações sobre o assunto a ser analisado em uma coleção de livros didáticos e qual seria esta coleção para meu trabalho. Faremos agora um resumo da estrutura dada a este trabalho para melhor clareza do seu desenvolvimento:

No capítulo 2 trataremos da metodologia de pesquisa deste trabalho, esclarecendo como ele foi desenvolvido.

No capítulo 3 investigamos as argumentações e provas em Álgebra apresentadas na coleção mencionada.

No capítulo 4 analisaremos as argumentações e provas em Geometria apresentadas na coleção mencionada.

Apresentamos também sugestões de resolução para o professor trabalhar em sala de aula nos casos em que analisamos os exercícios propostos que envolvam provas, além de nossas considerações finais no capítulo 5 deste trabalho.

1.1 O projeto AProvaME - Argumentação e Prova na Matemática Escolar

O projeto AProvaME, com apoio do CNPq, iniciou em 2005 coordenado por Lulu Healy. As equipes de trabalho foram compostas por 6 professores doutores da PUC/SP do curso de pós-graduação e com participação de cerca de vinte e seis alunos; sendo vinte e cinco alunos do mestrado profissional e uma doutoranda. Estes alunos, por terem contato com as escolas em que atuam como professores, nos níveis de ensino iriam aplicar os questionários nas escolas as quais tivessem acesso e colher resultados para serem analisados.

Uma vez que a Matemática não é uma ciência experimental, tal como são a Química e a Física, porque, ao contrário do que ocorre com estas disciplinas, a Matemática está entremeada de fatores abstratos que podem ser compreendidos por meio das suas provas e argumentações teóricas. Deste modo é importante que provas e argumentações figurem no currículo escolar.

Estudos na Inglaterra mostraram que os estudantes consideram o uso de alguns exemplos numéricos suficiente para provar uma conjectura ou uma afirmação e desprezam as generalizações por ignorância, por acharem desnecessárias ou ainda por acreditarem que o uso de generalizações somente deva ser usado por gênios da comunidade acadêmica de Matemática, professores e cientistas. Consideram ainda, que o uso das provas generalizadas não contribui para o entendimento do assunto a que se refere a prova, conforme pesquisa de Healy e Hoyles (2000).

Foram realizadas reuniões semanais com 5 equipes contendo cerca de 5 participantes, tais reuniões eram realizadas de segunda à sexta-feira nas dependências da PUC/SP e visavam adaptar os questionários, rever a literatura e criar os critérios para a tabulação dos resultados. Foi então gerada uma tabela com 1998 alunos de escolas publicas de diferentes regiões de São Paulo.

Originalmente, foi realizado na Inglaterra um projeto voltado às argumentações e provas na Matemática escolar, que com adaptações para a realidade brasileira resultou neste projeto (AProvaME).

Cabe ressaltar que tivemos no Brasil um projeto baseado nos questionários usados na Inglaterra, realizado pelo grupo do PROJETO FUNDÃO-RJ, com publicações a partir de 1996. Ao analisar o desempenho de licenciandos de Matemática e professores, em relação às argumentações e provas, os pesquisadores obtiveram respostas similares às respostas obtidas com os estudantes ingleses.

Os objetivos do projeto AProvaME constituíram-se em:

- Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo;
- Formar grupos colaborativos, compostos por pesquisadores e professores, para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados;
- Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática;
- Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática;
- Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova;
- Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar e
- Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e a aprendizagem de prova em Matemática. (Conforme manual descritivo do projeto).

O AProvaME foi dividido em três fases:

1. Adaptação do questionário aplicado na Inglaterra e aplicação de um questionário inicial para os alunos do Estado de São Paulo;
2. Elaboração de seqüências de atividades pelo grupo;
3. Aplicação das atividades e análise dos resultados.

A primeira fase foi voltada para analisar as concepções dos alunos e realizada por meio de questionários que contemplavam os domínios da Álgebra e da Geometria. Foram distribuídos 1998 questionários, que propunham questões a alunos da 8ª série e da 1ª série do Ensino Médio de diversas escolas do Estado de São Paulo tanto no âmbito público como privado. A análise preliminar das respostas dos alunos foi feita primeiramente por meio de um questionário piloto onde foi utilizada a classificação idealizada por Balacheff (1988). Posteriormente, percebendo que a classificação dada por Balacheff não seria suficiente para analisarmos satisfatoriamente as respostas dos alunos nos questionários, o grupo do AProvaME elaborou novos critérios que estão apresentados abaixo:

Quadro 1. Critérios usados na classificação dos questionários:

Critério	**Tipo de resposta**
0	Quando as respostas estiverem totalmente erradas, respostas que não apresentam justificativas ou exemplos, ou respostas que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um ciclo vicioso.
1	Havendo alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, respostas que são completamente empíricas.
2	Quando houver alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem, contudo trazer todos os passos necessários para uma prova.
2a	Quando falta muito para chegar à prova (mais próxima de 1).
2b	Quando julgarmos que a resposta está muito perto de chegar à prova.
3	Quando ocorrer da prova estar correta.
3p	Correta com apresentação de propriedades.
3c	Correta com apresentação de cálculos.

Os questionários apresentavam, em algumas questões, vários argumentos apresentados como provas de alunos para uma dada afirmação. Os alunos deviam apontar quais tipos de provas consideravam mais adequadas ou parecidas com as que eles próprios apresentariam; e ainda quais seus professores apontariam como mais adequadas ou corretas como provas. Em outra parte do questionário, tanto em Álgebra como em Geometria, os alunos eram incentivados a propor conjecturas, justificar como julgassem melhor e provar determinadas afirmações colocadas como verdadeiras (o modelo destes questionários está nos anexos ao final da dissertação).

Se fizermos uma comparação entre os questionários da pesquisa original na Inglaterra e os questionários brasileiros, observaremos que, os primeiros dados de coleta dos questionários do projeto AProvaME, no 2º semestre de 2005, apresentaram grande quantidade de respostas em branco, apontando para uma situação inadequada do entendimento de questões referentes às provas e argumentações nos ensinos fundamental e Médio. Nossos resultados indicam que a maioria dos alunos trabalhou empiricamente com as afirmações/conjecturas apresentadas, o que deixa muito a desejar no sentido de propor argumentações e provas. Sendo assim, a análise dos questionários elaborados e implementados pelo projeto AProvaME registrou grandes dificuldades dos alunos quanto às argumentações e provas, no que se refere às questões que contemplam os domínios da Álgebra e da Geometria.

Na segunda fase, o projeto passou a se preocupar com a criação e análise de atividades ou tarefas relacionadas às provas e argumentações, baseadas nos trabalhos já elaborados em projetos semelhantes na Inglaterra, Europa, Israel e Taiwan. Nesta fase, as equipes se debruçaram em elaborar atividades para auxiliar professores e alunos a trabalharem com argumentações e provas.

Os focos das atividades são:

- Conjuntos Númericos;
- Funções de 1º e 2º grau;
- Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas;
- Paralelismo e Perpendicularismo na Geometria espacial e
- Paralelismo e Perpendicularismo na Geometria analítica.

Na terceira fase, tendo disponíveis as atividades elaboradas na segunda fase (2006), fizemos uma depuração dessas atividades para entender melhor os problemas quanto a sua aplicação com alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio.

Iniciamos o projeto com leituras de Balacheff (1988). Balacheff é um pesquisador francês que dirigiu suas pesquisas focando as argumentações e provas em Matemática, escreveu artigos e livros referentes às argumentações e provas.

Balacheff classifica os tipos de provas (que serão comentados mais à frente, na fundamentação teórica) da seguinte forma:

- O empirismo ingênuo;
- A experiência crucial;
- O exemplo genérico e
- A experiência mental.

Ao longo do desenvolvimento do projeto AProvaME, outros autores foram se incorporando à leitura, feita durante os encontros ou mesmo entre esses encontros, por meio do ambiente virtual, www.teleduc.pucsp.br, e serão comentados mais adiante na fundamentação teórica. Cabe ressaltar a importância deste ambiente virtual.

Enquanto transcorriam as atividades do AProvaME, houve entre mestrandos participantes do grupo a distribuição de tarefas ligadas às suas dissertações, sejam a respeito de análise dos questionários para os alunos, análise dos livros didáticos ou a proposição de atividades que visem à melhoria do aprendizado dos alunos a respeito de argumentações e provas.

No meu caso, dediquei-me a análise de uma coleção de livros didáticos. Sendo assim, passei a ler o PNLEM, considerando sua análise e indicação de coleções de livros didáticos a serem distribuídos em todo o Brasil e as Orientações Curriculares do Ministério da Educação e Cultura; documentos estes que comentaremos nos próximos itens.

1.2 Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – PNLEM/2005

O MEC, a partir de 1985, passou a distribuir livros didáticos para alunos do Ensino Fundamental de escolas públicas. Nessa época, foi criado o Programa

Nacional do Livro Didático (PNLD) que previa somente a distribuição de livros de acordo com as escolhas feitas pelos próprios professores.

A partir de 1995, além da distribuição de livros, o plano teve um incremento com a publicação do primeiro GNLD (Guia Nacional do Livro Didático) elaborado por especialistas e voltado para o Ensino Fundamental.

Em 2004, o MEC, por intermédio da Secretaria da Educação Média e Tecnológica (SEMTEC), começou a implantação do PNLEM, através de uma parceria firmada entre a SEMTEC e o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Primeiramente, foram distribuídos livros de Matemática e Língua Portuguesa para alunos de escolas públicas das regiões norte e nordeste. Juntamente com a implantação do projeto, foi elaborado um catálogo que usamos para a escolha de nossa coleção dentre as coleções aprovadas pelo PNLEM.

Para realizar a análise da coleção, iniciamos por consultar o catálogo oriundo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM/2005): Matemática, na versão de coleções de livros didáticos distribuídos em 2006. No que se segue, iremos nos referir ao catálogo mencionado acima como CNLEM (Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio).

Os critérios utilizados pelos pareceristas do CNLEM respeitavam os objetivos do Ensino Médio de Matemática, buscando maior ênfase à sistematização dos conhecimentos. O assunto nos é particularmente caro, pois procuramos, em nosso trabalho, enfatizar o papel das argumentações e provas nesse processo de sistematização do conhecimento.

Para os autores do CNLEM, o excesso de formalização pode ser um obstáculo para o entendimento das idéias, atentando a que, o nível de sistematização do Ensino Médio em Matemática é maior que no Ensino Fundamental. Nessa fase, espera-se que os alunos compreendam com mais facilidade o caráter generalizador da Matemática e se apropriem de conceitos abstratos e/ou sistematizados. Sendo assim, neste processo de formalizações e sistematizações, as argumentações e provas podem servir de instrumento para atingir esta apropriação.

No CNLEM são apontadas certas expectativas em relação ao aprendizado no Ensino Médio:

> *"A formação dos alunos no ensino médio deve levar em conta fatores diversos, como o respeito ao contexto social, à diversidade e à pluralidade; deve promover o desenvolvimento das capacidades de inferir, argumentar, pesquisar, produzir e deve estar em consonância com as múltiplas finalidades do ensino médio, estabelecidas pela Lei de Diretrizes e bases da Educação:"* (PNLEM, 2005, p. 9).

Considerando que, o nível de maturidade dos alunos do Ensino Médio requer estratégias adequadas a esta fase e que competências como inferir e argumentar estão apontados pelo CNLEM/2005, a apresentação e o estudo das argumentações podem tornar-se formas de desenvolvimento destas competências.

Como nosso trabalho se refere, especificamente, às provas e argumentações, expomos a seguir os critérios relacionados somente à formação de conceitos, habilidades e atitudes.

O livro didático deve:

- *Estimular a utilização dos vários processos envolvidos no pensamento matemático, tais como: intuição, visualização, indução, dedução e a distinção entre validação Matemática e a validação empírica;*
- *Favorecer o desenvolvimento de competências complexas, tais como: explorar, estabelecer relações e generalizar, conjecturar, argumentar, provar, tomar decisões e criticar, utilizar a imaginação e a criatividade, expressar e registrar idéias e procedimentos.*

No próximo item comentaremos as relações entre a coleção analisada e PNLEM/2005).

1.2.1 A Coleção e o PNLEM

De acordo com o documento em questão, a articulação entre os tópicos da Matemática está presente em poucos casos de exercícios e em algumas leituras. Além disso, as ligações entre o conhecimento novo e o que já foi abordado não são mencionadas ao longo da coleção.

O CNLEM cita que as formas de se apresentar um conceito na coleção são variadas, contudo, atenta para a valorização da linguagem simbólica, em detrimento da língua portuguesa; atesta que o nível de rigor matemático atingido é satisfatório e informa que, no livro da 1ª série as demonstrações são raras; os conceitos são justificados poucas vezes e que tais conceitos são menos valorizados que os procedimentos.

Aponta que são poucas as atividades que permitem desenvolver algumas competências, tais como: conjecturar, argumentar, validar, enfrentar desafios; realizar cálculo mental e estimativas; resolver e elaborar problemas; e desenvolver estratégias diferenciadas. Sendo assim, de acordo com o CNLEM, já teríamos uma hipótese de que tal estudo nesta coleção seria esparso e, portanto, necessitaria de intervenções do professor para ter efeito no aprendizado dos alunos. São estas intervenções que aparecem nas minhas considerações finais.

Além das sugestões aqui oferecidas, outros mestrandos do grupo AProvaME também desenvolverão atividades para que o professor na sua sala de aula tente mostrar a importância das argumentações e provas aos seus alunos, não no sentido de formar matemáticos, mas no sentido de permitir que, aqueles que se interessam pela ciência Matemática conheçam esse aspecto e não utilizem, tão somente, procedimentos e técnicas.

A importância dessa diferenciação é exposta no PNLEM:

> *"Invocam-se, especialmente a ampliação e o aprofundamento da explicitação da estruturação lógica da Matemática, para o aluno, nesse período de escolarização. O livro-texto deve valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação Matemática e validação empírica e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática".* (PNLEM, 2005, p. 75)

No próximo item veremos o que as Orientações Curriculares propõem para o Ensino de Matemática no que diz respeito a argumentação e provas.

1.3 As Orientações Curriculares Nacionais

Posteriormente ao PNLEM, o Ministério da Educação e Cultura elaborou as Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Nos interessa mencionar as relacionadas à disciplina de Matemática, contidas no exemplar das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Quanto à organização curricular, abaixo resumimos:

> *"...Base nacional comum e uma parte diversificada de acordo com características regionais; organização do currículo voltada para evitar disciplinas estanques; apresentação do conhecimento por processos de interdisciplinaridade e contextualização; proposta pedagógica dos estabelecimentos de ensino de acordo com regras do seu sistema de ensino e participação dos docentes na elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino".* (2006, p. 7)

O documento aponta que devem ser consideradas competência e habilidades a serem desenvolvidas pelo conjunto das disciplinas e que as Orientações Curriculares se destinam a dar algum suporte para a escolha de conteúdos, a forma de trabalhar os conteúdos, o projeto pedagógico e a organização curricular. Por meio da escolha dos conteúdos, espera-se que o aluno do Ensino Médio seja capaz de usar a Matemática no cotidiano, modelar fenômenos de outras áreas e que perceba que a Matemática é uma ciência com feições próprias; organizada por teoremas e demonstrações que compõe um conhecimento que evoluiu histórica e socialmente e sua importância no meio científico e tecnológico.

Quanto à forma de trabalhar os conteúdos, as orientações sugerem que se incentive o aluno a questionar, criar hipóteses e tirar conclusões. Sugerem também, que alguns números racionais e irracionais sejam destacados e que as regras de sinais sejam apresentadas, mas também justificadas, mesmo que já tenham sido estudadas no Ensino Fundamental. Quanto ao Conjunto dos Números Complexos, o conteúdo deve apontar para a necessidade de ampliar os Conjuntos Numéricos para a solução da equação $x^2 + 1 = 0$.

No estudo de Funções, as Orientações Curriculares sugerem dar maior importância às relações entre grandezas em diferentes situações; que os alunos sejam inquiridos e incentivados a apresentarem outras situações onde existam funções; e que expressem com suas palavras o que elas representam. Nas orientações é citada a função f(x) = 2x + 3) e a preocupação com o significado dos coeficientes nestas funções. As Orientações Curriculares destacam que o tópico funções deve estar relacionado com diversificadas formas de conhecimento e aplicações.

No tópico de Progressões, as Orientações Curriculares sugerem que o simples uso de fórmulas deve ser evitado, que as mesmas podem ser estudadas por problemas, mas adverte para não usar problemas do tipo: "determine a soma..." ou "calcule o 5º termo...". Na parte de Geometria, novamente mencionam a importância de relacioná-la com questões do cotidiano e destacam a ligação entre argumentações, provas e a Geometria:

> *"...Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas."* (2006, p. 75)

Sugerem também que os alunos têm condições para compreender demonstrações que resultam em fórmulas e que se evite a simples apresentação das fórmulas e que as equações da reta devem ser deduzidas.

1.3.1 A Coleção e as Orientações Curriculares

Em cada tópico de estudo, para atender às Orientações Curriculares, o autor coloca leituras pulverizadas tentando apresentar visões do cotidiano usando diferentes textos de Biologia, Física, Ecologia e acrescenta biografias de grandes matemáticos, mencionando seus principais trabalhos relativos ao conteúdo estudado. Por exemplo, podemos citar a história de Gauss e o cálculo da soma de termos de uma P.A. .

Cabe observar que, embora tal coleção não atente para as Orientações Curriculares, a mesma foi indicada pelo PNLEM, distribuída nas escolas de Ensino Médio e, por isso, alvo de nossa investigação.

1.4 Fundamentação Teórica: olhares para Argumentações e Provas

Temos considerado em nosso trabalho, dois autores e uma publicação de artigo, cujos estudos comentaremos a seguir:

Quando iniciei as leituras para o desenvolvimento deste trabalho, acreditava que conseguiria dar conta de analisar o que estava escrito na coleção de Manoel Rodrigues Paiva, no que ela fosse relacionada às argumentações e provas, fundamentado em um único autor, Balacheff. Qual não foi minha surpresa, quando no decorrer do trabalho percebi ser muito difícil relacionar o trabalho à teoria de Balacheff, pois o mesmo só dá conta dos casos onde a prova é explícita e não dos casos onde existem apenas enunciados de prova.

Sendo assim, utilizo as classificações de Villiers e o grupo IREM da França.

A seguir, teceremos maiores comentários sobre as diferentes classificações para as provas e argumentações:

1.4.1 Balacheff

Balacheff é um pesquisador francês que dirigiu suas pesquisas focando as argumentações e provas em Matemática, escreveu artigos e livros sobre este assunto.

Nos estudos de Balacheff (1988) são considerados quatro tipos de validação:

- O empirismo ingênuo (empirism naif): aponta para a exemplificação constante que os alunos utilizam para validar as afirmações ou conjecturas, as quais são levados a provar.

Esta definição corrobora na grande maioria dos casos onde conseguimos uma resposta dos alunos nos questionários do AProvaME, pois, as respostas consistiam de exemplificações das conjecturas propostas.

- A experiência crucial (expérience cruciale): É o caso onde, na validação já existe uma tentativa de generalização com um único caso, contudo não se consegue ainda generalizar.

Durante as discussões do AProvaME chegou-se a comentar que seria, por exemplo, o momento quando o aluno utiliza-se de uma tentativa empírica com um valor numérico muito alto, como se esse valor (considerado alto) valesse para todos os valores anteriores e, conseqüentemente, para os valores posteriores também.

- O exemplo genérico (exemple gènèrique): consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade mesmo, fazendo uso de um representante particular do objeto.

Balacheff (1988) comenta que o exemplo genérico permanece oscilando entre a prova intelectual e a prova pragmática.

- A experiência mental (expérience mentale) O nível de experiência mental marca claramente a transição entre a prova pragmática e a prova intelectual; de acordo com o artigo de Balacheff, é o momento onde o aluno passa a argumentar em linguagem natural, como, por exemplo, no caso da determinação da quantidade de diagonais de um polígono:

> *"... em cada vértice o número de diagonais é o número de vértices menos os dois vértices vizinhos, é preciso multiplicar isto que encontramos pelo número de vértices porque em cada vértice parte o mesmo número de diagonais. Mas estamos contando cada diagonal duas vezes; o número de diagonais que procuramos se encontra dividindo por 2 e obtemos uma vez cada diagonal".* (Balacheff (1988), Apud Gravina)

O grupo APRovaME apontou que o aluno comenta e analisa suas conclusões, chegando a expor suas conjecturas na linguagem natural, na forma escrita ou verbalmente, enfim, o aluno consegue generalizar a situação pedida, utilizando propriedades e seqüências algébricas, além de explicá-las.

Gravina (2001) destaca também dois tipos de prova baseada em Balacheff:

1. A **Prova Pragmática,** que corresponderia às experiências empíricas e tentativas práticas que levam o aluno a concluir e acreditar em algumas afirmações;

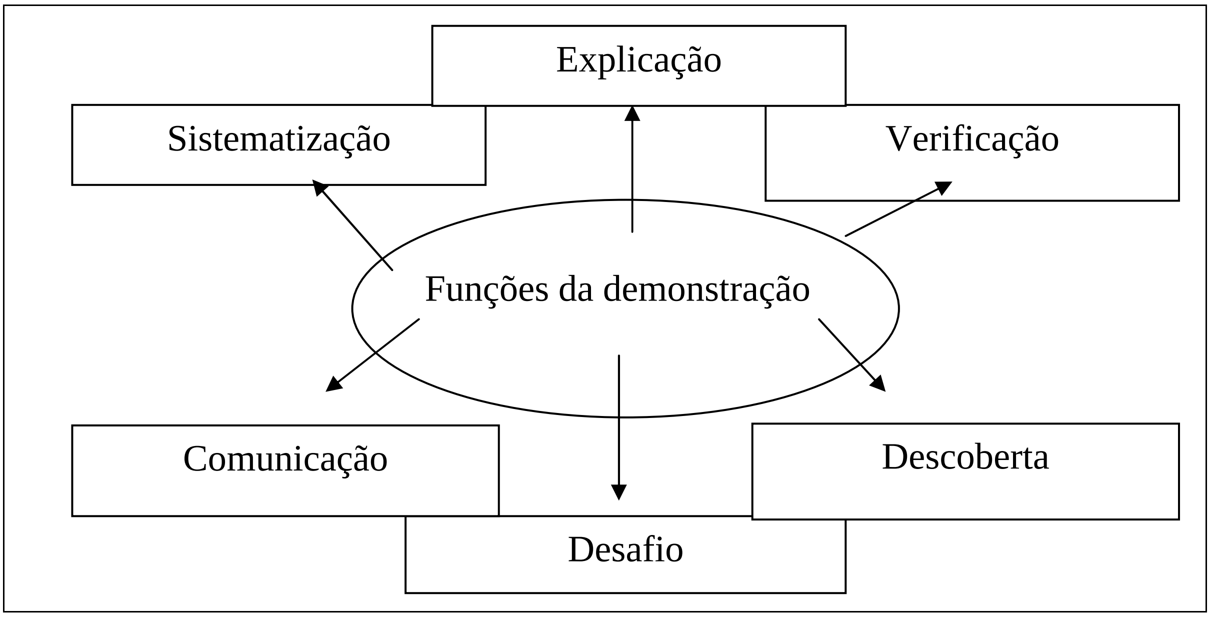
2. A **Prova Intelectual,** que corresponderia a uma prova com dedução e a presença de seqüências de raciocínio lógico, expressas corretamente

pelo aluno. Essas provas estão elaboradas de forma a serem aceitas e apresentadas para outras pessoas - da comunidade Matemática ou não - de maneira clara para seu entendimento.

1.4.2 Michael D. de Villiers

Enquanto Balacheff classifica as argumentações e provas por níveis, Michael Villiers apresenta seis diferentes classificações para os diferentes papéis e funções das demonstrações. Suas idéias podem ser resumidas no diagrama que se segue juntamente com nossos comentários:

Quadro 2. Funções da demonstração



Fonte: Revista de Educação Matemática nº 162 – Março/Abril de 2001 (Villiers, 2001)

Importante ressaltar que o autor afirma que não existe nenhuma preponderância de uma função sobre a outra, pois dependendo para que ou para quem se destine a demonstração, ela já se torna a mais adequada à situação ou à pessoa.

As demonstrações podem assumir, segundo Villiers, as seguintes funções:

Verificação: A partir do momento que acreditamos que um teorema ou proposição é verdadeiro, é neste momento que nos lançamos para prová-lo que estamos no processo de verificação do teorema ou proposição. Uma conjectura pode ser tida como verdadeira e esta certeza é apenas o início da demonstração e cita o comentário de Polya:

> *"...quando se está convencido que o teorema é verdadeiro, começamos a demonstrá-lo (Polya, 1954, p. 83-84)".*

Explicação: Mesmo existindo verificações com medições ou substituições numéricas, este tipo de demonstração vem a confirmar uma afirmação ou ainda pela quantidade de exemplos aumentamos nossa confiança. Afirma que nos casos onde o resultado é evidente ou pode ser apoiado por fundamentos empíricos a função não é de "verificação, e sim de explicação". Como, por exemplo, no caso do Teorema das 4 cores que já pode ser provado por meios tecnológicos usando todas as possibilidades de combinações entre as cores, é um processo explicação.

Descoberta: O autor destaca que algumas vezes durante a demonstração não se verifica somente algo já descoberto, mas que a demonstração é um processo de análise e surgimento de novos resultados. Ele cita que na demonstração de que o quadrilátero definido pelos pontos médios de um papagaio ou pipa é um retângulo constata algo de novo:

> *"...Contudo se fizermos uma demonstração dedutiva desta conjectura notamos imediatamente que a perpendicular das diagonais é a característica essencial de que depende essa conjectura".*

Sistematização: O objetivo principal neste processo é organizar as afirmações de forma coesa e coerente. Durante o processo de sistematização podemos identificar argumentos falhos, circulares ou redundantes, hipóteses escondidas, integrar e ligar afirmações entre si.

Comunicação: A demonstração funciona como um discurso ou texto e serve como meio de estabelecer um debate crítico sobre uma informação ou informações. A importância da comunicação está no processo social e na disseminação do conhecimento. Durante este processo, pela interação entre os indivíduos podemos encontrar erros e rejeitar a demonstração por contra-exemplos.

Desafio intelectual: A demonstração pode ter então um caráter atraente como tem para alguns matemáticos ao resolver quebra-cabeças. Villiers menciona a satisfação que resulta do fato de se conseguir demonstrar algo, como realização própria e gratificação, após ter se desgastado mentalmente e dependendo do tempo gasto, fisicamente para atingir determinado resultado na demonstração.

Observe que apesar dessas 6 funções apresentarem características distintas, muitas vezes nas tarefas tais funções podem aparecer misturadas. Além disso não se trata de uma lista completa, pois, poderíamos acrescentar, segundo Renz (1981) e Van Asch (1993), a função estética, de memorização ou ainda de desenvolvimento algorítmico.

Antes de tomar conhecimento da classificação de Villiers eu só entendia como função da demonstração: o de sistematizar um conhecimento, construir fórmulas ou saber de onde elas vieram. Tal leitura permitiu ampliar o conhecimento para as cinco funções da demonstração das quais nunca tinha pensado existirem ou que teria dificuldade de classificar.

1.4.3 Classificando tarefas: Proposta do Grupo IREM[1]

Como vimos anteriormente, Balacheff nos forneceu subsídios para a análise das argumentações e provas quando estas foram realizadas pelos alunos, ou seja, a teoria de Balacheff não da conta dos casos onde só existe o enunciado de tarefas. A teoria de Villiers analisa as funções das demonstrações realizadas pelos alunos e já aponta para seu uso possível nas tarefas depois que a prova é explicitada.

[1] Groupement National D'equipes De Recherche En Didactique Des Mathematiques (2003). Prouve et Demonstration. Ministère De La Jeunesse, De L'éducation Nationale Et De La Recherche Direction De L'enseignement Scolaire Bureau De La Valorisation Des Innovations Pédagogiques (IREMs de Grenoble et de Rennes) - *Prova e Demonstração* Uma Publicação Do Grupo Nacional De Equipes De Pesquisa Em Didática Da Matemática Irems De Grenoble E De Rennes PPS. 84 A 99

Pensando no professor, o Grupo IREM ofereceu uma classificação para as tarefas de provas e argumentações de modo que pudessem servir para o desenvolvimento das mesmas. Destacam a diversidade de classificações que podem ser dadas às tarefas, visto que existe uma variedade enorme de atividades que podem ser propostas aos alunos, sendo assim, o grupo resolveu classificar as atividades de forma que permitisse ao professor escolher uma atividade adaptada aos seus objetivos em relação às argumentações e provas, tais como:

Tarefa tradicional "Demonstrar que": É aquela na qual o autor inicia a tarefa com dizeres tais como: "prove que", "demonstre que" e "mostre que", no enunciado da prova em questão. Requer que o aluno já saiba um conteúdo para que possa aplicá-lo em uma demonstração.

Tarefas de iniciação à prova: São situações que fazem com que os alunos busquem uma prova daquilo que eles constatam, não necessariamente uma demonstração, a tarefa pretende fazer com que o aluno busque argumentos a favor ou contra uma determinada afirmação para validar ou refutar argumentos.

O artigo do IREM sustenta que algumas provas por meio de figuras, por exemplo, são aceitas numa determinada série, entretanto, na série seguinte , quando se supõe que os alunos já tenham um maior domínio das demonstrações, este tipo de prova já não é mais aceito. São tarefas que solicitam aos alunos, por exemplo, completar lacunas no enunciado de uma conjectura ou tarefas que envolvam construções geométricas respeitando um enunciado para esta construção.

Tarefas para dar sentido a uma frase: São tarefas nas quais os alunos respondem se uma questão é verdadeira, falsa ou nada se pode afirmar. Podem ser propostas também duas afirmações e por meio dos conflitos entre as opiniões dos alunos sobre essas afirmações, o professor passe a agir para que as afirmações fiquem claras para todos os alunos, levando ao fim do conflito e ao entendimento da frase.

Tarefas relativas aos enunciados de teoremas: São tarefas que visam validar ou não um determinado teorema. È importante ressaltar aqui que o próprio artigo do IREM adverte que é difícil fazer nascer nos alunos uma verdadeira conjectura e é preciso *"... criar um verdadeiro conflito na classe..."* para que tenham vontade de procurar uma prova para validá-lo ou não.

Tarefas para dar sentido à demonstração: São tarefas que provoquem no aluno o desejo de escrever a demonstração, pois, segundo o artigo, os alunos enxergam a demonstração como um texto novo. Atenta também para que sejam apresentadas situações suficientemente problemáticas para que os alunos percebam a necessidade de serem demonstradas, tomando cuidado para que nesta busca o interesse pela conjectura não seja perdido pelos alunos.

Tarefas referentes ao uso de palavras de ligação: São tarefas que visam mostrar a importância de algumas palavras de ligação nas demonstrações tais como "se... então", por exemplo. O artigo destaca que as observações durante as aulas e as sentenças criadas individualmente pelos alunos tornam-se de maior valia quando analisadas pela classe toda onde se procura as melhores e que a classe consegue encontrar as boas e refutar as ruins com facilidade pela observação do conjunto de respostas e a procura pela boa estrutura.

Tarefas para encontrar um encadeamento dedutivo: São tarefas que visam à organização das idéias de forma encadeada. Tarefas como quebra-cabeças com o objetivo de colocar as sentenças da demonstração em ordem correta ou escrever os passos de uma construção geométrica.

Tarefas para aprendizagem da escrita: Escrever uma demonstração é uma tarefa complexa, mas existem algumas atividades que podem facilitar tais procedimentos. Uma das tarefas consiste que os alunos escrevam os procedimentos que os levaram a resolver determinado problema e outra pressupõe a importância da leitura para desenvolver procedimentos obedecendo a um enunciado.

Tarefas para tentar descobrir a estrutura de textos de demonstração: São tarefas que priorizam a organização dos passos que compõem uma demonstração. Reconhecendo que as demonstrações possuem hipóteses, teoremas, dados. Uma tarefa proposta com este sentido é aquela voltada para destacar algum desses componentes dentro do texto de uma demonstração.

Tarefas para vencer certos obstáculos: É o último tipo de tarefa mencionada no artigo. São tarefas para vencer obstáculos tais como diferenciar condição necessária e suficiente, teorema direto e recíproco, a contrapositiva.

Com o que foi visto, utilizaremos a classificação de Balacheff no caso onde as demonstrações estejam resolvidas, enquanto que a classificação de Villiers será utilizada para fundamentar a função das argumentações e provas investigadas tanto na teoria, como nas tarefas. Tarefas estas que são aquelas propostas pelo autor na própria coleção investigada. Sendo que as que foram propostas pelo autor serão analisadas também pela classificação dada pelo grupo IREM, de acordo com seu objetivo levando em conta o aprendizado de argumentações e provas resolvidas como sugestão de contribuição aos professores.

CAPÍTULO II

2 Metodologia da pesquisa

Considerando a distribuição de livros didáticos no Estado de São Paulo, fizemos a escolha de coleções a serem analisadas para efeito de assunto de dissertação de mestrado profissional entre alguns participantes do grupo AProvaME.

Tínhamos 11 coleções (com maiores detalhes no próximo item) voltadas para o Ensino Médio e aprovadas pelo PNLEM. Considerando minha prática de ensino voltada para este nível de ensino, foram escolhidas 4 coleções distribuídas entre 4 mestrandos.

Os tópicos de Álgebra e de Geometria analisados são:

- Conjuntos Númericos;
- Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas;
- Funções de 1º e de 2º Grau;
- Paralelismo e Perpendicularismo na Geometria de Posição;
- Paralelismo e Perpendicularismo na Geometria Analítica.

Além da forma como as provas e as argumentações são apresentadas, investiguei se os tópicos são tratados no mesmo capítulo ou se tais argumentações e provas são retomadas posteriormente, com alguma evolução no seu desenvolvimento, em outros capítulos dos livros.

2.1 A escolha da coleção para análise

No final do segundo semestre de 2005, as escolas da rede estadual do estado de São Paulo foram solicitadas a escolher coleções de livro didáticos aprovadas dentre as 11 coleções do PNLEM/2005, discriminadas no quadro a seguir:

Quadro 3. Coleções aprovadas pelo PNLEM/2005

Coleção	Autor
Matemática	Adilson Longen
Matemática	Edwaldo Roque Bianchini e Herval Paccola
Matemática	Luiz Roberto Dante
Matemática	Manoel Rodrigues Paiva
Matemática	Maria José Couto de Vasconcelos Zampirolo e Maria Terezinha Scordamaglio e Suzana Laino Cândido
Matemática	Oscar Augusto e Guelli Neto
Matemática Ensino Médio	Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Sousa Vieira e Rokusaburo Kiyukawa
Matemática Aula por Aula	Cláudio Xavier da Silva e Benigno Barreto Filho
Matemática Ciência e Aplicações	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Hygino Hugueros Domingues, Roberto Perigo, David Mauro Degenszajin e Nilze Silveira de Almeida
Matemática no Ensino Médio	Márcio Cintra Goulart
Matemática: Uma Atividade Humana	Adilson Longen

As coleções aprovadas deviam, obrigatoriamente, ser compostas por 3 volumes, destinados, cada um, para uma série específica do Ensino Médio.

A Secretaria da Educação recebeu a indicação das coleções para se preparar para futura compra mesmas e a diretoria escolar, num momento posterior, optou por alguma das coleções de Ensino Médio.

A diretoria da escola na qual atuo como professor ofereceu as 11 coleções de livros de Matemática, apresentados no quadro anterior, para serem analisados por todos os professores de Matemática e, após leituras dos livros e discussões entre os professores da disciplina dos 3 períodos de funcionamento da escola - e considerando suas experiências em sala de aula, a coleção escolhida pela direção dentre as apontadas pelos professores foi a de Manoel Paiva. Sendo assim, a coleção é a mesma coleção adotada na escola em que dou aula, Escola Estadual Romeu Montoro – São Paulo.

Podemos destacar que não há uma homogeneidade na escolha dos livros pelas escolas dentro do Estado de São Paulo, pois cada escola pôde optar por sua coleção, desde que fossem aprovadas pelos pareceristas do PNLEM e que constassem do CNLEM/2005.

CAPÍTULO III

3. Investigando argumentações e provas na parte de Álgebra

3.1 Introdução

Inicialmente fiz uma análise geral da coleção tentando captar as idéias e concepções do autor com relação às argumentações e as provas nas aulas de Matemática no suplemento ao professor.

No suplemento do professor, o autor afirma que nem todos os teoremas foram demonstrados, mas que alguns devem ser para que o aluno perceba o significado de uma demonstração e o método da ciência Matemática. Afirma também que, em Matemática, com exceção de definições e postulados, todo o resto é teorema e pode ser demonstrado dando um caráter diferenciado para a Matemática. Cabe observar entretanto que esta afirmação não é levada a sério na coleção, parece ter sido colocada para atender às Orientações Curriculares.

Quanto à estrutura dos livros, o autor organiza cada um de seus temas iniciando com a teoria a respeito do assunto, seguida de exercícios resolvidos que segundo o autor servem como ajuda na compreensão dos conceitos. Em seguida temos blocos de atividades, exercícios propostos e de questões de vestibulares e, finalizando cada capítulo temos exercícios complementares. Em síntese, temos uma estrutura tradicional do tipo teoria, exemplo e exercícios.

Analisando especificamente o que o autor apresenta em sua obra sobre argumentações e provas encontramos no suplemento para o professor os seguintes objetivos gerais:

> *"Propiciar a compreensão da evolução do pensamento científico, através da ampliação de conceitos e/ou da construção de objetos abstratos.*

Para atender a este objetivo o autor apresenta, no início de cada tópico ou ainda na parte de leituras relacionadas ao tema apresentado, uma explanação histórica mostrando os primórdios e evolução de cada assunto da Matemática, são mostrados também os primeiros estudiosos do assunto em pauta. Isto é mencionado no suplemento do professor, contudo no decorrer da análise da coleção observamos que na prática isto não acontece.

Ainda no suplemento, o autor cita uma atividade que julga propícia para a compreensão sobre o que é uma demonstração Matemática :

Um tabuleiro de xadrez é composto de 64 casas quadradas, 32 pretas e 32 brancas. Cada dominó cobre exatamente 2 casas adjacentes, podendo ser colocado com seu lado maior paralelo a qualquer lado do tabuleiro. Nessas condições, 32 peças cobrem o tabuleiro. Retirando-se duas casas diagonalmente opostas, pode-se afirmar que 31 dominós cobrem totalmente essa parte remanescente?

Figura 1 – Suplemento do professor página 9

O autor enuncia que tal problema pode ser resolvido por tentativas de movimentação das peças que levem a uma conclusão, ou ainda, por meio de uma demonstração que, apesar de não testar todas as disposições das peças, garanta a possibilidade ou a impossibilidade da cobertura. Aqui o autor em suas orientações para o professor deixa transparecer que aceita tanto tentativas empíricas de resolução de problemas como uma argumentação lógica, não necessariamente usando uma resolução algébrica. Observamos, entretanto, que este tipo de prova não aparece no corpo da coleção, nem esta proposta de tarefa aparece nos volumes da coleção.

O autor, em suas considerações sobre o primeiro volume, coloca que um dos seus objetivos é oferecer aos estudantes os rudimentos do pensamento científico, porém, isto não é verdade, pois, logo após apresentar as representações de números pares e impares, parte para demonstrações relacionadas a teoremas envolvendo números inteiros. Cabe aqui destacar que as provas referentes aos Conjunto dos Números Reais se resumem somente a duas, uma resolvida e outra para o aluno resolver, como veremos no próximo item que trata das demonstrações ligadas a temas da Álgebra.

Para nossa análise foram considerados somente os casos em que o autor explicita que irá realizar uma demonstração, justificativa, prova ou mostra. Sempre que encontramos alguma referência sobre a mesma em enunciados, ou ainda quando o autor apresenta uma prova para determinado teorema, afirmação ou conjectura, genérica ou empiricamente, quer mencione ou não que está sendo feita uma prova Matemática.

O autor da coleção investigada elaborou alguns exercícios propostos envolvendo provas e argumentações (8 exercícios), tais exercícios em nossa investigação serão chamados de tarefas. Podemos antecipar que as tarefas existentes na coleção investigada são do tipo “Demonstrar que”, e algumas poucas podemos considerar como de iniciação a prova, os demais objetivos das tarefas não são apresentados na coleção. Não encontramos exemplos de tarefas relacionados às provas e argumentações em Geometria e todas as tarefas de demonstrações eram restritas à Álgebra, o que contrariou nossas leituras que davam ênfase às demonstrações aparecerem freqüentemente em Geometria conforme Pietropaolo (2005), Balacheff (1988) e Villiers (2001).

Quando o autor apresenta as propriedades dos Conjuntos Numéricos ele o faz de 2 maneiras diferentes, como veremos durante a análise:

1. Apresenta as propriedades do conjunto numérico de forma axiomática e sem nenhum exemplo ou explicação acompanhando as propriedades.
2. Apresenta as propriedades do conjunto de modo axiomático juntamente com algum exemplo empírico que comprova a propriedade.

O autor enuncia as propriedades para os Conjuntos Numéricos e às vezes usa tais propriedades, como veremos, para alguma demonstração de um teorema ou de uma afirmação. Tais demonstrações de teoremas ou afirmações podem estar na explanação teórica do assunto, em exercícios resolvidos ou em exercícios propostos, tais exercícios que envolvem argumentações e provas estão apresentados algumas vezes com alguma sugestão de resolução, outras vezes não.

Nenhuma das propriedades do Conjunto dos Números Reais foi demonstrada de modo formal pelo autor. Raramente encontramos uma tentativa de esclarecimento por meio de exemplos empíricos. A priori, o autor sempre faz uma explanação teórica sobre o conteúdo programático dos capítulos, contudo nem sempre menciona que no momento seguinte fará uma demonstração, justificativa, prova ou verificação.

O autor identifica as provas, na maioria das vezes, como demonstração ou justificativa e nos exercícios solicita aos alunos que demonstrem ou justifiquem alguma conjectura ou teorema, portanto em alguns casos explicita que o conteúdo que se está estudando se refere a uma prova. Entretanto, outras vezes o autor prova uma afirmação sem informar que já está provando tal conjectura ou afirmação.

A seguir construímos um quadro resumindo algumas informações referentes às argumentações ou provas presentes na coleção analisada.

O primeiro volume é usado pela primeira série, o segundo volume na segunda série e o terceiro volume na terceira série, claro que por iniciativa do professor alguns assuntos podem ser adiantados ou adiados dependendo da sua percepção em relação ao nível de entendimento dos alunos e a relação dos conteúdos a serem estudados com o conteúdo que já foi estudado.

Quadro 4. Distribuição de provas nos tópicos mencionados

Tópico	**Temas**	**Tipologia do Enunciado**	**Série**
Conjuntos Numéricos	Números inteiros Z Operações entre números pares e ímpares	Prove que	Primeira Série
	Números Complexos C: Soma Subtração Conjugado Radiciação Multiplicação Divisão	Demonstre que Demonstração Mostre que	Terceira Série
PA e PG	Termo geral, propriedade, soma de termos	Demonstração Justificativa	Primeira série
Funções	Função de primeiro grau e funções do segundo grau	Afirma mas não demonstra	Primeira Série
Geometria	Perpendicularismo	Demonstração	Terceira Série

Observa-se que não existe uma preocupação com o ensino de provas e argumentações uma vez que na segunda série a coleção não apresenta nenhum caso nos tópicos analisados. Os alunos não entendem a necessidade das provas e o professor que utiliza o livro também. Embora no suplemento do professor o autor aponte sua importância.

Podemos verificar na análise que o autor utiliza as provas e argumentações mais na teoria inicial dos tópicos dos capítulos estudados, bem menos em exercícios resolvidos e pouco é deixado para os alunos.

De modo geral, observamos nos 3 volumes, um total de 25 ocorrências nos tópicos analisados, assim distribuídas:

Quadro 5. Distribuição resumida das provas analisadas

Autor	Demonstrações	Mostras	Justificativa	Prove	Total
Manoel Paiva	16	6	1	2	25

Na análise qualitativa buscamos estabelecer relações entre as questões do questionário do AprovaME, o tratamento dado para as provas encontradas no livro didático, bem como as conexões com os autores considerados como base da nossa fundamentação teórica.

3.2 Conjuntos Numéricos

Nesta sessão, buscamos identificar como o autor distribui as provas e argumentações no tópico de Conjuntos Numéricos nos três volumes analisados.

O autor inicia esta coleção com o estudo dos Conjuntos Numéricos no primeiro volume concentrando as argumentações e provas no Conjunto dos Números Naturais e Inteiros.

O Conjunto dos Números Reais é estudado pelo autor no primeiro volume e o Conjunto dos Números Complexos é abordado no terceiro volume. No segundo volume, nada foi abordado a respeito de Conjuntos Numéricos.

No Conjunto dos Números Naturais duas de suas propriedades são mencionadas sem provas:

P.1 A soma de dois números naturais quaisquer é um numero natural.
P.2 O produto de dois números naturais quaisquer é um número natural.

Figura 2. Coleção Matemática - página 15 do 1º volume

No Conjunto dos Números Inteiros o autor apresenta três propriedades de forma axiomática:

P.3 A soma de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.
P.4 A diferença de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro
P.5 O produto de dois números inteiros quaisquer é um número natural.

Figura 3. Coleção Matemática – página 15 do 1º volume

Estas propriedades serão utilizadas quando da resolução do exercício resolvido e sugeridas para o exercício proposto referente a números inteiros que analisamos a seguir:

3.3 A soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar

Após a apresentação dos Conjuntos dos Números Naturais e Inteiros, o autor apresenta a seguinte tarefa:

R4
Definição 1 - Número par é todo número que pode ser expresso da forma 2n, com $n \in Z$
Definição 2 - Número ímpar é todo número que pode ser expresso da forma 2k + 1, com $k \in Z$
De acordo com essas definições, provar que a soma de um número par qualquer com um número ímpar qualquer é um número ímpar.

Figura 4. Coleção Matemática – página 16 do 1º volume

O autor utiliza as duas definições chegando à expressão 2(n+k) +1 e conclui dizendo que como n+k é inteiro logo 2(n+k)+1 é ímpar. Aqui o autor utiliza P3, a propriedade de fechamento do Conjunto dos Números inteiros.

Chama ainda a atenção para o fato de que poderia ter usado a mesma letra para um número par e um ímpar, mas isto levaria ao caso particular de um número e seu consecutivo. Ao fazer esta observação troca o Conjunto dos Números Inteiros pelo Conjunto dos Números Naturais.

O autor percebe que tal demonstração, por si só, não seria suficiente ao entendimento do aluno, necessita dar maiores explicações, e complementa a demonstração usando a linguagem natural:

"Como n + k é um número inteiro, concluímos que 2(n + k) + 1 é ímpar".

"Logo a soma de um número par com um número ímpar é sempre ímpar".

Podemos usar a classificação de Balacheff (1988), pois se trata de uma apresentação formalizada da demonstração e não apenas de seu enunciado. Podemos classificá-la como uma prova no nível de experiência mental, conseqüentemente, podemos considerá-la também uma prova intelectual.

Se procurarmos relacionar esta prova com o trabalho de Villiers (2001), podemos concluir que esta prova tem a função de verificar ou de explicar a afirmação que a soma de um número par qualquer com um número ímpar qualquer é um número ímpar.

Apresentada esta prova na página 16 aos alunos como um exercício resolvido, a mesma será utilizada novamente na página 25. O exercício a resolver pede para "provar que o produto de um número par qualquer por um número ímpar qualquer é um número par" e traz a indicação para consultar o R4. Deste modo, entendemos que o aluno pode utilizar a demonstração feita em R4 como exemplo para resolver o que está sendo pedido. Parece existir uma hierarquia, primeiro é apresentado ao aluno um problema que serve como modelo para resolver o segundo problema. Assim, poderíamos entender esta estratégia como uma iniciação a prova, no entanto, não há outras tarefas envolvendo provas nos Conjuntos Naturais e Inteiros, logo esta atividade não estimula o aprendizado de argumentações e provas. A falta de continuidade aponta que ensinar a valorizar as provas e argumentar não está entre as prioridades da coleção como apontado pelas Orientações Curriculares Nacionais.

A seguir, analisaremos os conjuntos dos Números Racionais e dos Irracionais, onde o autor apresenta axiomaticamente suas propriedades ou juntamente com estas propriedades o autor usa exemplos empíricos para validar tais propriedades.

O livro apresenta as propriedades do Conjunto dos Números Racionais de forma axiomática, sem exemplos empíricos, também não encontramos nenhum exercício resolvido ou proposto com relação a este assunto.

Propriedades

P.1 A soma de dois números racionais quaisquer é um número racional.

P.2 A diferença de dois números racionais quaisquer é um número racional.

P.3 O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

P.4 O quociente de dois números racionais quaisquer, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional.

Figura 5. Coleção Matemática – página 17 do 1º volume

Quando o livro aborda o Conjunto dos Números Irracionais, ele acrescenta exemplos empíricos junto a cada propriedade deste conjunto que podem ser classificadas, de acordo com Balacheff (1988), como uma prova caracterizada pelo empirismo ingênuo.

Observamos ainda, que os números racionais que o autor usa para exemplificar suas afirmações são sempre números naturais e que as propriedades demonstradas por meio de exemplos empíricos são todas referentes a uma mescla de números racionais com números irracionais nas diferentes operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação).

Propriedades

P.1 Se o número $\sqrt[n]{a}$, com n $\in \mathbb{N}^*$, não é inteiro, então esse número é irracional.

Exemplos

a) $\sqrt{2} \in Q'$

b) $\sqrt[6]{5} \in Q'$

c) $\sqrt[5]{3} \notin Q'$

d) $\sqrt[7]{1} \notin Q'$, pois $\sqrt[7]{1}$ = 1 é inteiro.

e) $\sqrt[3]{8} \notin Q'$, pois $\sqrt[3]{8}$ = 2 é inteiro.

P.2 A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Exemplo $\underbrace{1}_{\textit{racional}} + \underbrace{3{,}14159265...}_{\textit{irracional}} = \underbrace{4{,}14159265...}_{\textit{irracional}}$

P.3 A diferença de um número racional e um número irracional, em qualquer ordem, é um número irracional.

Exemplo $\underbrace{1}_{\textit{racional}} - \underbrace{3{,}14159265...}_{\textit{irracional}} = \underbrace{-2{,}14159265...}_{\textit{irracional}}$

P.4 O produto de um número racional, não-nulo, por um número irracional é um número irracional.

Exemplo $\underbrace{2}_{\textit{racional}} \cdot \underbrace{\sqrt{3}}_{\textit{irracional}} = 2\sqrt{3} = \underbrace{\sqrt{12}}_{\textit{irracional}}$

P.5 O quociente de um número racional, não-nulo, por um número irracional é um número irracional.

Exemplo $\underbrace{12}_{\textit{racional}} : \underbrace{\sqrt{6}}_{\textit{irracional}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6} = \underbrace{\sqrt{24}}_{\textit{irracional}}$

Figura 6. Coleção Matemática – página 18 do 1º volume

Cabe ressaltar que nos questionários respondidos do AProvaME em 2006, aproximadamente 85% dos alunos se apoiou em exemplos empíricos para responder a questão relativa ao Conjunto dos Números Inteiros, o que nos leva a concordar com Silva (2006) sobre o grande impacto do livro didático na aprendizagem.

Quando o autor do livro amplia seu estudo para o Conjunto dos Números Reais ele faz um tipo de mescla entre as apresentações das propriedades deste conjunto, conforme veremos a seguir:

Para as propriedades da adição, subtração, multiplicação e divisão no Conjunto dos Números Reais o autor não acrescenta nenhum exemplo empírico, entretanto, para a propriedade de radiciação o autor oferece apenas exemplos numéricos, ou seja, tenta mostrar que a mesma é válida de modo empírico.

Propriedades

P.1 A soma de dois números reais quaisquer é um número real.

P.2 A diferença de dois números reais quaisquer é um número real.

P.3 O produto de dois números reais quaisquer é um número real.

P.4 O quociente de dois números reais quaisquer é um número real.

P.5 Se n é um número natural ímpar e $a \in$ I**R**, então $\sqrt[n]{a} \in$ I**R.**

Exemplos

a) $\sqrt[5]{6} \in$ I**R** b) $\sqrt[7]{0} \in$ I**R** c) $\sqrt[3]{-8} \in$ I**R**

P.6 Sendo n um número natural par diferente de zero, e a um número real, $\sqrt[n]{a}$ é um número real se, e somente se, a não é negativo.

a) $\sqrt[4]{3} \in$ I**R** b) $\sqrt[8]{0} \in$ I**R** c) $\sqrt[2]{-1} \notin$ I**R**

Figura 7. Coleção Matemática – página 19 do 1º volume

A partir deste ponto da coleção, o autor não menciona nem exemplifica mais nenhuma propriedade dos racionais e reais na coleção.

No terceiro volume faz um paralelo entre o Conjunto dos Números Reais e o Conjunto dos Números Complexos explicando que as operações básicas dos números complexos foram definidas como extensões das operações em IR, acarretando que as propriedades das operações foram mantidas, sendo assim:

1. Para adição foram mantidas: a propriedade associativa, comutativa, elemento neutro e o elemento oposto.
2. Para a multiplicação foram conservadas: a propriedade associativa, comutativa, elemento neutro e elemento inverso. Neste caso temos também a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

O autor afirma em seu trabalho que utilizará as propriedades operatórias, enunciadas, para agilizar as operações rotineiras com números complexos. Podemos entender que a prioridade é a técnica.

Inicialmente, propõe a seguinte tarefa:

Demonstre que o conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados desses complexos, isto é, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, para quaisquer números complexos z_1 e z_2.
Sugestão: Indique os números complexos por $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset R$

Figura 8. Coleção Matemática – página 102 do 3º volume

Considerando que o autor apresentou esta demonstração como uma tarefa a ser resolvida, podemos classificá-la como uma tarefa do tipo "Demonstre que" (IREM, 2002). Aqui o autor sente necessidade de acrescentar a sugestão para que o aluno tenha um ponto de partida. Quanto à classificação dada por Villiers podemos considerar que ambas as possibilidades de resolução que apresentaremos buscam a verificação ou explicação da igualdade presente na propriedade algébrica: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

A resolução desta e das demais tarefas dos números complexos da coleção encontram-se no capítulo final deste trabalho como sugestões de contribuição ao trabalho do professor do Ensino Médio. A partir daqui, pude observar que o autor dá grande ênfase às demonstrações no Conjunto dos Números Complexos, fato que destacamos não ser recomendado pelas normas e Orientações Curriculares Nacionais.

Mais três exercícios do tipo "demonstre que" são deixados aos alunos:

39 Demonstre que o conjugado da diferença de dois números complexos é igual à diferença dos conjugados desses complexos, isto é, $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$, para quaisquer números complexos z_1 e z_2.

Figura 9. Coleção Matemática – página 109 do 3º volume

40 Demonstre que o conjugado do produto de dois números complexos é igual ao produto dos conjugados desses complexos, isto é, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, para quaisquer números complexos z_1 e z_2.
Sugestão: Faça $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset R$, e desenvolva cada uma das expressões $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, mostrando que ambas têm o mesmo resultado.

Figura 10. Coleção Matemática – página 109 do 3º volume

41 Demonstre que o conjugado do quociente de dois números complexos é igual ao quociente dos conjugados desses complexos, isto é, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, para quaisquer números complexos z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$.

Figura 11. Coleção Matemática – página 109 do 3º volume

Seriam necessários, segundo o autor, dois cálculos em separado e em seguida a comparação dos valores ou conclusões obtidas em separado, o que satisfaria a demonstração. Na realidade, a sugestão na fig. 10 é a mesma fornecida para a demonstração da fig. 08, acrescenta-se somente que ambos os resultados, calculados separadamente, têm o mesmo valor.

Observamos que tais tarefas poderiam ser apresentadas ao aluno como uma nova "estratégia" para provas em Matemática. Esperando com isto, que o aluno se apropriasse desta estratégia para resolver outras provas. Entretanto, não atende tal propósito, pois, mais uma vez, não houve continuidade na apresentação e no estudo das argumentações e provas.

Seguindo, o autor apresenta as seguintes propriedades em relação à potência de i:

Propriedades

Para quaisquer números complexos w e v e quaisquer números inteiros m e n, satisfeitas as condições de existência, temos:

P.1 $w^n \cdot w^m = w^{n+m}$

P.2 $w^n : w^m = w^{n-m}$

P.3 $(w^n)^m = w^{nm}$

P.4 $(wv)^n = w^n v^m$

P.5 $\left(\frac{w}{n}\right)^n = \frac{w^n}{v^n}$

Figura 12. Coleção Matemática – página 102 do 3º volume

E demonstra a seguinte afirmação:

Existem quatro e somente quatro, valores para potências de i com expoentes inteiros, são eles:

$i^0 = 1 \quad i^1 = 0 \quad i^2 = -1 \quad i^3 = - i$

Demonstração: Calculemos a potência i^n, com inteiro. Primeira parte: $n \geq 4$

Dividindo n por 4, obtemos um quociente inteiro q e um resto r, sendo r inteiro e $0 \leq r < 4$; isto é, $n = 4q + r$. Assim temos:

$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} . i^r = (i^4)^q . i^r = 1^q . i^r = 1 . i^r = i^r$

Como r é inteiro e $0 \leq r \leq 4$, temos que i^n é um destes quatro valores: i^0, i^1, i^2 ou i^3.

Segunda parte: $n < 0$

Temos: $i^n = (i^{-1})^{-n}$. Note que $i^{-1} = \frac{1}{i}$. Multiplicamos o numerador e o denominador dessa fração por –i: $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1.(-i)}{i.(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$. Assim, temos: $i \;= (-i)^{-n} = (-1)^{-n}.i^{-n}$

Como n < 0, então –n > 0; logo, i^{-n} é um destes quatro valores: $i^0 = 1$, $i^1 = 0$, $i^2 = -1$ ou $i^3 = - i$, e portanto, $(-1)^{-n} \cdot i^{-n}$ também assume esses quatro valores.

Conseqüência: Para o cálculo da potência i^n, com n inteiro e $n \geq 4$. divide-se n por 4, obtendo-se o resto inteiro r. Tem-se então $i^n = i^r$.

Figura 13. Coleção Matemática – página 103 do 3º volume

Podemos classificar tal demonstração como uma prova intelectual, pois já esta no nível de experiência mental.

Após esta demonstração o autor introduz o conceito de representação geométrica dos números complexos no plano complexo ou plano de Argand-Gauss mostrando similaridades com a representação no plano cartesiano dos números reais.

Temos a seguir uma tarefa do tipo "demonstre que", onde os alunos aplicam conhecimentos já adquiridos de demonstração para satisfazer o exercício (IREM,2002). Trata-se de um exercício com dois itens a resolver, a seguir reproduzimos o texto do item que nos interessa por usar a palavra "mostre".

Um número complexo w é uma raiz quadrada de um número complexo z se, e somente se, $w^2 = z$.

a) Mostre que os números $w_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ são raízes quadradas do número complexo z = 4i.

Figura 14. Coleção Matemática – página 104 do 3º volume

Propriedade $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

O tópico referente ao módulo de um número complexo é iniciado através da definição:

Definição

O módulo de um número complexo z= x + yi, com { x, y } C R, é a distância do ponto (x,y) ao ponto (0,0) do plano de Argand-Gauss.

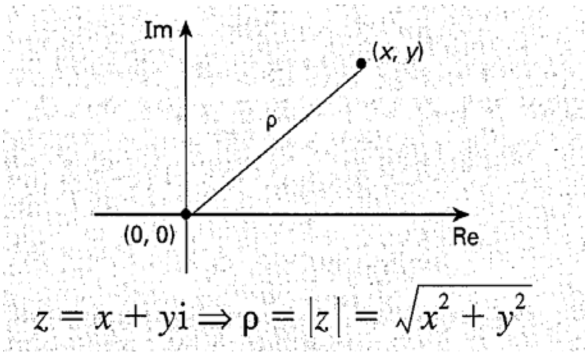


Figura 15. Coleção Matemática – página 106 do 3º volume

Em seguida, algumas propriedades dos números complexos que envolvem o módulo são apresentadas:

M.1 $|z| \geq 0$

M.2 $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

M.3 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|.|z_2|$

M.4 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, com\ z_2 \neq 0$

M.5 $|z|^n = |z^n|$, para todo n, se z ≠ 0; ou para n > 0, se z = 0

Figura 16. Coleção Matemática – página 107 do 3º volume

Tendo enunciado estas 5 propriedades, o autor apresenta a demonstração da propriedade $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

R11 Demonstrar a propriedade M.2, isto é, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, para qualquer número complexo z.

Resolução

Seja z = x + yi, com { x,y } $\subset$ R .

$z \cdot \overline{z} =$ (x + yi).(x – yi) = $x^2 + y^2$ = $(\sqrt{x^2+y^2})^2 = |z|^2$

Figura 17. Coleção Matemática – página 107 do 3º volume

Observamos que a demonstração pode ser considerada segundo Balacheff como uma prova intelectual, no nível de experimento mental devido à formalização apresentada.

Após a demonstração da fig. 17, diversos exercícios são propostos para que os alunos resolvam. Dentre eles, temos as 3 demonstrações das fig. 09, 10 e 11 envolvendo argumentações e provas que já foram alvo de análise e são demonstrações referentes às propriedades das operações envolvendo o conjugado de números complexos (adição, subtração, multiplicação e divisão) e que serão resolvidas no capítulo final deste trabalho.

Antes de chegar à forma trigonométrica de um número complexo ou forma polar: $z = \rho.(\cos\varphi + i.sen\varphi)$; o autor explica conceitos de coordenadas polares e argumento de um número complexo mostrado geometricamente e algebricamente.

De acordo com o autor, os cálculos de algumas operações com números complexos podem ser feitos de forma mais simples, não na forma algébrica e sim, pela forma trigonométrica. É neste momento que temos mais 4 demonstrações apresentadas pelo autor referentes a 4 teoremas de operações algébricas dos números complexos na forma trigonométrica (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação).

O autor apresenta a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica:

Se $z = \rho.(\cos\varphi + i.sen\varphi)$ e $w = \beta.(\cos\alpha + i.sen\alpha)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, então: $z.w = \rho.\beta.[\cos(\varphi+\alpha) + i.sen(\varphi+\alpha)]$

Figura 18. Coleção Matemática – página 116 do 3º volume

Em seguida, o autor faz uma demonstração, uma prova intelectual conforme Balacheff (1988), utilizando a forma polar recém introduzida.

Demonstração

$$z.w = \rho.(\cos\varphi + i.sen\varphi).\beta.(\cos\alpha + i.sen\alpha) = \rho.\beta.(\cos\varphi + i.sen\varphi).(\cos\alpha + i.sen\alpha) =$$

$$= \rho.\beta(\cos\varphi.\cos\alpha + i.sen\alpha.\cos\varphi + i.sen\varphi.\cos\alpha + i^2.sen\varphi.sen\alpha) =$$

$$= \rho.\beta.[\cos\varphi.\cos\alpha - sen\varphi.sen\alpha + (sen\varphi.\cos\alpha + sen\alpha.\cos\varphi).i] =$$

$$= \rho.\beta.[\cos(\varphi+\alpha) + i.sen(\varphi+\alpha)]$$

Figura 19. Coleção Matemática – página 117 do 3º volume

Apresenta também, um exemplo de aplicação da fórmula envolvendo dois números complexos na forma trigonométrica:

Exemplo

Sendo z_1 = 3(cos 15º + i sen 15º) e z_2= 4(cos 45º + i sen 45º), temos

$z_1.z_2$ = 3(cos 15º + i sen 15º) . 4(cos 45º + i sen 45º)=

= 12[cos(15º+45º)+ i.sen(15º+45º)] = 12. (cos 60º +i sen 60º)=

$$=12.\left(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6 + 6\sqrt{3}.i$$

Figura 20. Coleção Matemática – página 117 do 3º volume

No caso da divisão, o teorema é mais uma vez demonstrado formalmente numa prova intelectual. Observamos que na 3ª série espera-se que os alunos já trabalhem com provas intelectuais, entretanto a falta de continuidade em relação às provas e argumentações na coleção não favorece tal uso.

Se $z = \rho.(\cos\varphi + i.sen\varphi)$ e $w = \beta.(\cos\alpha + i.sen\alpha)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, então: $\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\beta}.[\cos(\varphi-\alpha) + i.sen(\varphi-\alpha)]$

Figura 21. Coleção Matemática – página 117 do 3º volume

Como no caso da multiplicação, o autor expõe uma demonstração rigorosa do teorema:

Demonstração

$$\frac{z}{w}=\frac{z.\overline{w}}{w.\overline{w}}=\frac{\rho.(\cos\varphi+i.sen\varphi).\beta.(\cos\alpha+i.sen\alpha)}{\beta^2}=$$

$$=\frac{\rho.(\cos\ \varphi+i.sen\ \varphi).\beta.[\cos(\ -\alpha\ )+i.sen\ (-\alpha\ )]}{\beta^2}=$$

$$=\frac{\rho.\beta}{\beta^2}.[(\cos(\varphi-\alpha)+i.sen(\varphi-\alpha)]=\frac{\rho}{\beta}.[(\cos(\varphi-\alpha)+i.sen(\varphi-\alpha)]$$

Figura 22. Coleção Matemática – página 117 do 3º volume

E depois propõe um exemplo de aplicação da fórmula encontrada:

Exemplo

Sendo z_1 = 12(cos 40º + i sen 40º) e z_2= 2(cos 10º + i sen 10º), temos:

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{12}{2}$. [cos (40º - 10º) + i.sen (40º- 10º)]= 6.(cos 30º + i.sen 30º)

= 6.$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i.\frac{1}{2}=3\sqrt{3}+3i$

Figura 23. Coleção Matemática – página 117 do 3º volume

Para a operação de potência o autor, diferentemente do que ocorreu na multiplicação e na divisão, primeiro apresenta uma explicação com utilização de 3 exemplos empíricos para depois chegar a generalização, como vemos no próximo quadro, em seguida, informa que a demonstração completa foi feita por Moivre, não a apresenta e enuncia o teorema:

Dado o número complexo $z=\rho.(\cos\varphi+i.sen\varphi)$, temos:

$$z^2=z\,.\,z=\rho.(\cos\varphi+i.sen\varphi).\rho.(\cos\varphi+i.sen\varphi)=\rho^2.(\cos 2\varphi+i.sen2\varphi)$$
$$z^3=z^2.z=\rho^2.(\cos 2\varphi+i.sen2\varphi).\rho.(\cos\varphi+i.sen\varphi)=\rho^3.(\cos 3\varphi+i.sen3\varphi)$$
$$z^4=z^3.z=\rho^3.(\cos 3\varphi+i.sen3\varphi).\rho.(\cos\varphi+i.sen\varphi)=\rho^4.(\cos 4\varphi+i.sen4\varphi)$$
$$etc.$$

Teorema

Se $z=\rho.(\cos\varphi+i.sen\varphi)$ é a forma trigonométrica do número complexo z e n é um inteiro, então: $z^n=\rho^n.(\cos n\varphi+\mathrm{i.sen\ n}\varphi)$

Figura 24. Coleção Matemática – página 118 do 3º volume

O autor finaliza mostrando um exemplo numérico, invertendo a ordem dos níveis propostos por Balacheff(1988) que propõe partir do empírico para a generalização. O livro parte do geral para o empírico, que funciona como aplicação da fórmula. Privilegia a técnica, embora o termo demonstração apareça com freqüência neste tópico.

Exemplo

Sendo z = 2(cos 60º + i sen 60º), temos:

$$z^8 = 2^8.[\cos(8.60^o) + i.sen(8.60^o)] = 256.[\cos 480^o + i.sen 480^o]$$

Eliminando a volta completa de 480º, concluímos que 480º é côngruo a 120º e, portanto:

$$z^8 = 256.[\cos 120^o + i.sen 120^o] = 256.\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -128 + 128\sqrt{3}i$$

Figura 25. Coleção Matemática – página 118 do 3º volume

O autor continua apresentando uma definição seguida de um exemplo:

Definição

Sejam z e w números complexos e n um número inteiro positivo, tal que:

$$w^n = z$$

Nessas condições, o número w é uma raiz n-ésima de z

R5

Devemos mostrar que $w^4 = z$. Temos

$w^4 = (1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = [1 + 2.1.i + i^2]^2 = [1 + 2i - 1]^2 = 4i^2 = -4 = z$

Logo, 1 + i é uma raiz quarta de -4

Figura 26. Coleção Matemática – página 119 do 3º volume

Em seguida, temos uma tarefa tradicional do tipo "Demonstre que":

Mostre que 2i é uma das raízes sextas de -64

Figura 27. Coleção Matemática – página 121 do 3º volume

O exercício da fig. 27 é deixado para o aluno. Como sugestão, o professor pode resolvê-lo assim (empiricamente):

$(2i)^n = -64$, como $(2i)^6 = -64$ então 2i é uma raiz sexta de -64

Quanto à função desta prova, teríamos a função de verificar um argumento.

Finalizando o capítulo temos 3 tarefas do tipo “demonstre que” e suas sugestões na fig.52 e fig. 53 como contribuição ao professor estão no capítulo final deste trabalho:

Mostre que o número $\cos\frac{\pi}{20} + i.sen\frac{\pi}{20}$ é uma das raízes décimas de i.

Figura 28. Coleção Matemática – página 121 do 3º volume

Quanto à função desta prova, temos a função de verificar um argumento.

As provas a seguir, tratam de casos empíricos relacionados aos teoremas ou definições de operações nos números complexos que o autor apresenta na parte teórica e conceitual do tema.

Mostre que o número complexo $\cos\frac{\pi}{24} + i.sen\frac{\pi}{24}$ é a raiz da equação:

$z^{36} - z^{12} + 2i = 0$

Figura 29. Coleção Matemática – página 124 do 3º volume

O professor pode estimular o aluno a resolver este caso empírico como se segue:

Substituindo z por $\cos\frac{\pi}{24} + i.sen\frac{\pi}{24}$*, temos:*

$$\left(\cos\frac{\pi}{24} + i.sen\frac{\pi}{24}\right)^{36} - \left(\cos\frac{\pi}{24} + i.sen\frac{\pi}{24}\right)^{12} + 2i =$$

$$=\left(\cos\frac{36\pi}{24} + i.sen\frac{36\pi}{24}\right) - \left(\cos\frac{12\pi}{24} + i.sen\frac{12\pi}{24}\right) + 2i =$$

$$=\cos\frac{3\pi}{2} + i.sen\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} - i.sen\frac{\pi}{2} + 2i =$$

=0+i.(-1)- 0 - i.1+ 2i= -2.i + 2.i = 0

Logo, $\cos\frac{\pi}{24} + i.sen\frac{\pi}{24}$ *é a raiz da equação* $z^{36} - z^{12} + 2i = 0$

A última prova apresentada também como uma tarefa do tipo “demonstre que” dos números complexos refere-se à radiciação e aqui o autor apresenta uma sugestão para a resolução do aluno e ao final do trabalho apresentamos uma sugestão de contribuição ao professor:

Mostre que o número complexo $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ é uma das raízes quintas do número $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. **Sugestão**: Represente na forma trigonométrica o número w

Figura 30. Coleção Matemática – página 124 do 3º volume

Algumas observações a respeito das operações com os números complexos:

- O autor enunciou o teorema, provou formalmente tal teorema e o exemplificou nas operações de multiplicação e divisão.
- Na operação de potenciação, o autor que informa apenas que a prova completa originalmente foi feita por Moivre, em seguida apresenta o teorema e aplica a fórmula num exemplo empírico.
- Na radiciação o autor apresenta somente a definição não comentando nada a respeito de demonstrações.

Com exceção da radiciação, onde o autor somente enuncia a definição, nas demais operações mencionadas o autor prova tanto formalmente, como empiricamente as operações com o objetivo de sistematizar um conhecimento. Temos então, provas com validações utilizando a experiência mental formalmente apresentada e em seguida o empirismo ingênuo sendo aplicado por meio de exemplos específicos. Tais provas se referem às operações de números complexos e são apresentadas em tarefas do tipo “demonstre que”, como publicado pelo grupo IREM, são exercícios de aplicação de conhecimentos já adquiridos sobre este modelo de prova.

Verificamos que quando passou a abordar os números complexos, o autor aumentou a quantidade de demonstrações, tanto as apresentadas (5) como as que foram colocadas como tarefa para o aluno resolver (6).

Podemos entender tal opção observando que o Conjunto dos Números Reais é abordado nas séries anteriores no Ensino Fundamental ao passo que os Números Complexos surgem no Ensino Médio. No entanto, as Orientações Curriculares não enfatizam tal escolha.

3.4 Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

Este tema é tratado apenas no 1º volume.

Em relação às argumentações e provas se apresentam nos tópicos de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica, podemos antecipar que o autor, ao contrário do que ocorreu nos Conjuntos Numéricos, não apresentou nenhuma tarefa referente à argumentação e provas para os alunos trabalharem. As provas foram apresentadas como demonstrações nas introduções teóricas do tema seguidas de exercícios resolvidos e atividades, engatando em seguida outro tópico contendo outra demonstração, seguindo o esquema:

Título ⟶ Demonstração ⟶ Exercício Resolvido ⟶ Atividades

Abreviaremos Progressões Aritméticas com P.A. e Progressões Geométricas com P.G., como já é utilizado no livro didático investigado e no cotidiano das aulas de Matemática.

O autor aborda e comenta, primeiramente, o conceito de seqüências, em seguida faz um comentário histórico sobre Fibonacci e o problema sobre a procriação de coelhos relacionado à sua seqüência para somente então se referir à progressão aritmética. Neste caso, parece seguir as Orientações Curriculares.

O autor classifica as progressões aritméticas em crescente, decrescente e constante e então demonstra apenas a propriedade do termo médio da P.A. que comentaremos a seguir.

3.4.1 Propriedade do termo médio da P.A.

A propriedade focalizada: “Uma seqüência de 3 termos é P.A., se e somente se, o termos médio é igual à média aritmética entre os outros dois”.

$$\text{(a,b,c) é P.A.} \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

O autor parte da definição de P.A.:

"*Progressão aritmética é uma seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente (anterior) com uma constante r".*

Figura 31. Coleção Matemática – página 124 do 3º volume

Simbolicamente, se b - a = r e c -b = r, então $b - a = c - b$

Demonstração

$$\begin{cases} \text{(a,b,c) é P.A.} \Leftrightarrow b - a = c - b \quad \text{(Isolando b)} \\ b - a = c - b \Leftrightarrow b = \dfrac{a+c}{2} \end{cases}$$

Logo: (a,b,c) é P.A. $\Leftrightarrow \ b = \dfrac{a+c}{2}$

Figura 32. Coleção Matemática – página 200 do 1º volume

Essa demonstração sistematiza e verifica a definição dada (Villiers, 2001).

3.4.2 Fórmula do Termo Geral de uma P.A.

O autor inicia relacionando-o com a vazão de água num reservatório. Finaliza com a apresentação da fórmula.

Temos uma P.A.: (5,9,13,17,21,25,29,33,37,41,45) que se refere a uma

... quantidade de água, em m^3, contida num reservatório, de hora em hora, a partir do instante em que foi atingida a quantidade mínima.

... podemos calcular a quantidade de água contida no reservatório, no final de cada hora, adicionando à quantidade mínima ($5m^3$) o produto do número de horas pela vazão do registro ($4m^3/h$)

Figura 33. Coleção Matemática – página 201 do 1º volume

Parte de um exemplo empírico e conclui com a fórmula:

> Por exemplo, para calcular a quantidade de metros cúbicos de água contida no reservatório, 6 horas após a abertura do registro, basta efetuar:
>
> 5 + 6 . 4
>
> Note que o resultado é o 7º termo da P.A.em que: $a_1 = 5$ e $r = 4$, isto é,
>
> $a_7 = a_1 + 6r$
>
> $a_8 = a_1 + 7r$; $a_9 = a_1 + 8r$; etc
>
> A P.A.em função de a_1 e r ($a_1 + 0r$, $a_1 + 1r$, $a_1 + 2r$, $a_1 + 3r$,...)
>
> Isto é, qualquer termo a_n é igual à soma de a_1 com o produto (n – 1) r , ou seja, a fórmula do termo geral da P.A.pode ser expressa por : $a_n = a_1 + (n-1)r$

Figura 34. Coleção Matemática – página 201 do 1º volume

Deste modo segue os níveis propostos por Balacheff (1988) partindo do nível empírico para o intelectual. Mas como temos observado, a falta de continuidade nos demais volumes aponta para uma falta de foco no ensino de provas

3.4.3 Termos eqüidistantes dos extremos de uma P.A.

Desta vez o autor valeu-se primeiramente de generalizações e apresentou um exemplo empírico para constatação do afirmado.

> Numa P.A. finita a soma dos termos eqüidistantes de uma P.A é igual à soma dos extremos .
>
> Demonstração: Seja a P.A.(a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_k , a_{k+1} , ..., a_{n-k}, ..., a_n) de razão r.Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são eqüidistantes dos extremos.
>
> Calculando a soma desses termos, temos: $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + (k + 1 - 1)r + a_1 + (n – k – 1)r = a_1 + kr + a_1 + (n-1)r – kr =$
>
> $= a_1 + a_1 + (n – 1)r = a_1 + a_n$

Figura 35. Coleção Matemática – página 204 do 1º volume

O autor utilizou na demonstração, deste último quadro, o que Balacheff classificaria como uma prova apresentada no nível de experiência mental o que caracteriza uma prova intelectual.

Posteriormente, o autor se vale do que Balacheff chamaria de empirismo ingênuo, mostrando um exemplo onde usa o mesmo raciocínio com números de uma outra P.A. e abaixo fazemos sua reprodução:

Exemplo: (3, 8, 13, 18, 23, **28**, 33, **38**, 43, 48, 53, 58, 63)

28 + 38 = 66

23 + 43 = 66

18 + 48 = 66

13 + 53 = 66

8 + 58 = 66

3 + 63 = 66

Figura 36. Coleção Matemática – página 205 do 1º volume

3.4.4 Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

O autor conta a história de Gauss para apresentar a propriedade dos termos eqüidistantes e a soma de termos de uma P.A.. Apresenta o raciocínio de Gauss como exemplo empírico e enuncia o teorema da soma de termos da P.A. , como veremos abaixo:

"... O cálculo efetuado foi simples e elegante; ele percebeu que a soma do primeiro número , 1, com o último, 100, é igual a 101; a soma do segundo número, 2, com o penúltimo, 99, é igual a 101; também a soma do terceiro número, 3, com o antepenúltimo, 98, é igual a 101; e assim por diante a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos:"

1 2 3 4 ... 97 98 99 100

Figura 37. Coleção Matemática – página 15 do 1º volume

E após isso o autor enunciou o teorema :

A soma S_n dos n primeiros termos da P.A. (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Em seguida faz a demonstração:

Demonstração

Vamos descrever a soma S_n duas vezes, do seguinte modo:

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ e

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_1$

Somemos, membro a membro, essas igualdades:

$2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Note que, em cada expressão entre parêntesis, temos a soma dos extremos (a_1 $+a_n$) ou a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos. Pela propriedade dos termos eqüidistantes dos extremos, podemos escrever:

$$2.S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{\text{n parcelas iguais a } (a_1 + a_n)} \Rightarrow 2.S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Figura 38. Coleção Matemática – página 206 do 1º volume

De acordo com Balacheff podemos classificá-la como uma prova intelectual porque foi feita na forma de uma prova rigorosa, simbólica para a obtenção da fórmula da soma dos n termos de uma progressão aritmética.

Trata-se de uma prova que visa sistematizar e explicar o raciocínio feito por Gauss (Villiers, 2001).

Como foi realizada após o exemplo empírico poderia facilitar a compreensão do aluno, caso outras provas e demonstrações fossem contempladas ao longo da coleção.

3.4.5 Propriedade dos termos médios da P.G.

Após a seguinte definição de P.G.:

"Uma seqüência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é P.G., se e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois, isto é, sendo $a \neq 0$, temos: (a, b, c) é P.G. $\Leftrightarrow$ $b^2 = a .c$ "

O autor pela primeira vez nos tópicos analisados, usa a palavra hipótese ao demonstrar a propriedade. Aqui observamos que o autor espera que os alunos sejam capazes de compreender uma demonstração no nível de experiência mental. E inverte a ordem proposta por Balacheff, pois apresenta primeiro a fórmula e depois nos exercícios sua aplicação. Deste modo, o aluno pode privilegiar a técnica em detrimento da compreensão. A fórmula não surge da necessidade, mas da definição pronta, acabada.

Demonstração

Vamos analisar duas hipóteses: $b \neq 0$ ou $b = 0$

1ª hipótese: $b \neq 0$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos: $\begin{cases} \text{(a,b,c) é P.G.} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \text{ e} \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = a.c \end{cases}$

Logo: (a, b, c) é P.G. $\Leftrightarrow$ $b^2 = a.c$

2ª hipótese: $b = 0$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos: $\begin{cases} \text{(a,b,c) é P.G.} \Leftrightarrow c = 0 \text{ e} \\ c = 0 \Leftrightarrow b^2 = a.c \end{cases}$

Logo: (a, b, c) é P.G. $\Leftrightarrow$ $b^2 = a.c$

Figura 39. Coleção Matemática – página 209 do 1º volume

3.4.6 Fórmula do Termo Geral da P.G.

Mais uma vez o autor parece seguir as Orientações Curriculares e a proposta de Balacheff. Antes da demonstração apresenta uma contextualização do assunto. Em seguida, é feito um cálculo obtendo um resultado e pouco depois temos a generalização do cálculo e finaliza-se com a apresentação da fórmula.

(10.000, 12.000, 14.400, 17.280, 20.736)

...apresenta os montantes em reais, ano a ano, a partir do inicio da aplicação.

Podemos calcular o 2º montante em cada ano, multiplicando o capital inicial por potências de 1,2. Por exemplo, para calcular o montante, basta efetuar $10.000.(1,2)^1$

O resultado é o 2º termo da P.G. onde $a_1 =10.000$ e $q =1,2$, isto é

$a_2 =a_1 . q^1$

Analogamente, temos $a_3 = a_1.q_2$; $a^4 = a_1.q^3$ e $a5 = a_1.q^4$

Ao final, generaliza o raciocínio como a seguir:

$$(a_1 . q^0, a_1 . q^1, a_1 . q^2, a_i q^3, ...),$$

Isto é, qualquer termo a_n é igual ao produto de a_1 pela potência q^{n-1}, ou seja, a fórmula do termo geral da P.G. pode ser expressa por:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Figura 40. Coleção Matemática – página 210 do 1º volume

Daqui, segue para a fórmula da soma de uma P.G.

3.4.7 Fórmula da Soma de termos de uma P.G.

Nesta demonstração o autor inicia com a contextualização do assunto, fazendo com que o mesmo seja relacionado com um problema sobre a produção de soja através de um exemplo empírico.

A taxa de crescimento anual na produção de soja de um estado brasileiro é de 5%. Para estimar o total da soja produzida nesse estado em trinta anos, de 2001 a 2030, o secretario da agricultura supôs que essa taxa permaneça constante a partir da produção de 2001, que foi de 4 milhões de toneladas. Essa estimativa é a soma dos termos da seguinte P.G., de trinta termos e razão 1,05: (4; 4,2; 4,41; ... ; 4. $(1,05)^{27}$; 4.$(1,05)^{28}$; 4.$(1,05)^{29}$) em que cada termo representa a quantidade de soja produzida anualmente, em milhões de toneladas.

Mesmo dispondo de uma calculadora, o secretário não somou os termos um a um, pois o trabalho seria longo e tedioso. Ele usou a fórmula a seguir, que calcula a soma dos n primeiros termos de uma P.G., não constante, com o primeiro termo a_1 e a razão q: $S_n = \dfrac{a_1 . (1 - q^n)}{1 - q}$

Em seguida, temos a demonstração propriamente dita:

Indiquemos por S_n a soma dos n primeiros termos da P.G.(a_1, a_2, a_3, ..., a_n , ...) com razão $q \neq 1$, ou seja, uma P.G. não-constante.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, ou seja:

$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$ (I)

Multiplicando por q ambos os membros da igualdade (I), obtemos:

$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n$ (II)

Subtraindo, membro a membro, as igualdades (I) e (II), temos:

$S_n - S_nq = a_1 - a_1q^n \Rightarrow S_n . (1 - q) = a_1 (1 - q^n)$

Como $q \neq 1$, podemos escrever: $S_n = \dfrac{a_1 . (1 - q^n)}{1 - q}$

Figura 41. Coleção Matemática – página 213 do 1º volume

Vemos que aqui, assim como no caso da P.A., o aluno tem um exemplo contextualizado para depois entender a demonstração mais geral, simbólica. O que pode ajudar sua compreensão.

3.4.8 Soma dos infinitos termos de uma P.G.

O contexto é apresentado:

Uma empresa reservou 1 milhão de reais para aplicar em obras sociais. No primeiro ano será aplicada metade dessa verba, e em cada ano seguinte será aplicada metade do que sobrou da verba no ano anterior. A P.G. infinita a seguir representa os valores, em milhões de reais, aplicados ano a ano:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

Observe que , a cada ano que passa, o total aplicado em obras sociais aumenta e se aproxima cada vez mais de 1 milhão de reais:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875$$

etc.

O limite S_∞ da soma dos infinitos termos de uma P.G. (a_1 , a_2 , a_3 , ...,), de razão q, com $-1 < q < 1$, é dado por : $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

O autor introduz a idéia de limite, pois afirma que o limite dessa soma é 1 e em seguida busca justificar uma fórmula a partir de outra fórmula.

Em seguida anuncia sua justificativa:

Vamos justificar essa fórmula a partir da soma S_∞ dos n primeiros termos da P.G., isto é: $S_n = \frac{a_1 . (1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}$

Quando n aumenta indefinidamente (tende ao infinito), a potência q^n se aproxima indefinidamente de zero (tende a zero), q está entre -1 e 1.

Assim, a expressão S_n se aproxima indefinidamente do limite $S_n = \frac{a_1}{1 - q}$

Indicando esse limite por S_∞, temos: $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$

Figura 42. Coleção Matemática – página 215 do 1º volume

Destacamos que o autor chama a atenção do aluno que parte de uma fórmula conhecida para outra, ainda desconhecida. Como observamos anteriormente, se o autor desse a mesma atenção às demonstrações nos demais tópicos, o professor e o aluno também poderiam focar mais o ensino e a aprendizagem das argumentações e provas em matemática.

3.4 Funções

Considerando que o estudo das funções de 1º e 2º grau são componentes curriculares comuns ao Ensino de Matemática no final do nível fundamental e início do nível médio, seja em escolas públicas ou privadas, investigamos como o autor apresenta as provas e argumentações sobre estes temas, verificando se foram apresentadas num mesmo volume, se foram retomadas em outros capítulos ou em outros volumes ou se o autor se valeu de argumentos empíricos ou generalizados para fornecer elementos de argumentação e provas para os estudos de Matemática na sala de aula onde exista a utilização do livro didático.

Ao contrário do que ocorreu na análise de Conjuntos Numéricos e de progressões na coleção, o autor não efetuou nenhuma prova a respeito de função de 1º grau, limitando-se a escrever que:

Demonstra-se que o gráfico de uma função polinomial f qualquer do 1º grau é uma reta. Esse gráfico é obtido representando-se dois pontos distintos de f e traçando-se a reta que passa por eles.

Figura 43. Coleção Matemática – página 119 do 1º volume

E semelhante ao que ocorreu na análise das funções polinomiais de 1º grau, o autor não efetuou provas fazendo referência às palavras-chaves que mencionamos no início do capítulo, a respeito de função de 2º grau, limitando-se a escrever esta única referência em todo capítulo:

Demonstra-se que o gráfico de um a função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{ a, b, c \} \subset R$ e $a \neq 0$, é uma parábola.

Figura 44. Coleção Matemática – página 136 do 1º volume

Deste modo, vemos que não fez parte do planejamento do autor apresentar as argumentações e provas no que diz respeito ao estudo de funções de 1º e 2º grau nos 3 volumes. Conseqüentemente, os professores que utilizam tal coleção também não valorizam as argumentações e provas nestes tópicos.

CAPÍTULO IV

4. Investigando argumentações e provas na parte de Geometria

Pelas leituras e discussões no grupo de pesquisa, eu esperava que o campo da Geometria estivesse repleto de provas e argumentações com generalizações das muitas representações geométricas existentes. Fato que pode ser reforçado pela leitura da dissertação de Pietropaolo que apresenta a seguinte questão:

> *"... há motivos para que as provas matemáticas na Educação Básica apareçam - quando aparecem - quase sempre na Geometria?" (capítulo 3, item 1.4 - Demonstração e ensino de Geometria).*

No tocante aos tópicos escolhidos para nossa investigação – Paralelismo e Perpendicularismo na Geometria de Posição e na Geometria Analítica. Podemos rapidamente apresentar um único caso apresentado de argumentação e prova apresentado ou discutidos nos livros da coleção analisada.

Constatamos durante nossa leitura que o autor apresentou os tópicos de Geometria de posição no 2º volume, enquanto que os tópicos de Geometria analítica foram investigados no 3º volume da coleção.

O autor deu destaque à argumentação e provas apenas no tópico de Geometria Analítica na parte teórica do tema sobre perpendicularismo.

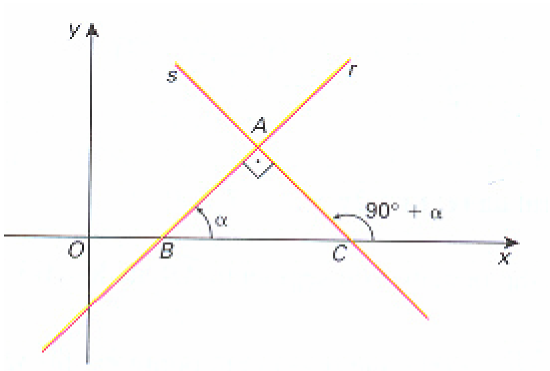
O tópico Paralelismo e Perpendicularismo na Geometria de Posição foi abordado pelo autor apenas no livro da 2ª série e não localizamos nenhuma prova referente a este assunto. O que existe é uma explicação em linguagem natural sobre o que vem a ser perpendicularidade entre retas, entre reta e plano e entre planos.

Existe um único teorema apresentado no capítulo de Geometria de posição, porém, não é apresentado nenhuma prova a respeito dele: *"Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano".*

O autor inicia o estudo da Geometria Analítica mencionando René Descartes e sua importância, estuda os elementos - distância entre pontos, ponto médio, coeficiente angular, alinhamento, equação geral da reta.

O autor apresenta a seguinte demonstração:

O gráfico a seguir mostra duas retas perpendiculares, r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente. Note que a inclinação de s é a medida do ângulo externo relativo ao vértice C do triângulo ABC, por isso essa inclinação é a soma das medidas dos ângulos internos $\hat{A}$ e B.



Da trigonometria temos:

$$tg(90º+\alpha)=\frac{sen(90º+\alpha)}{\cos(90º+\alpha)}=\frac{sen90º.\cos\alpha+sen\alpha.\cos 90º}{\cos 90º.\cos\alpha-sen90º.sen\alpha}=\frac{\cos\alpha}{-sen\alpha}=-\frac{1}{tg\alpha}$$

e, portanto, os coeficientes angulares dessas retas são:

$$\begin{cases} m_r = tg\ \alpha \\ m_s = tg(90º+\alpha)=-\dfrac{1}{tg\alpha} \end{cases} \Rightarrow m_r=-\frac{1}{m_s}$$

Duas retas r e s não-verticais são perpendiculares se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra.

Figura 45. Coleção Matemática – página 44 do 3º volume

E depois afirma que desta maneira podemos demonstrar a perpendicularidade entre retas.

Podemos classificá-la como sendo uma demonstração do nível de experiência mental, segundo Balacheff. Mais uma vez, a ordem didática foi invertida, pois primeiro apresenta uma fórmula que decorre de uma “calculeira” simbólica para depois nos exercícios aplicá-la.

CAPÍTULO V

5. Considerações finais

5.1 Resolução de exercícios propostos na coleção

Considerando a falta de tarefas voltadas para o desenvolvimento de argumentações e provas na coleção investigada e a título de complementação do trabalho, para que um professor reflita sobre os tipos de prova resolvi algumas tarefas. Comentamos os tipos de provas de acordo com as classificações de Balacheff. A primeira a seguir, é uma prova intelectual.

A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Podemos demonstrar esta propriedade utilizando uma prova por absurdo. A prova por absurdo é um tipo de prova onde usamos uma informação tida como verdadeira, mas durante a demonstração que utiliza esta informação chega-se a um resultado contraditório inexistente na Matemática. No exemplo a seguir a contradição encontrada é*: "...não existe número irracional (i) que seja igual a um número racional (k – r)".*

P.2 *A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.* *Sejam os números r racional e* ***i irracional*** *Seja k a soma de r e i, analisando as possibilidades e* ***supondo que k seja racional,*** *portanto r + i = k (racional) temos então : i = k - r* *Como já visto nas propriedades dos números racionais, a diferença de dois números racionais quaisquer é um número racional.* *(k - r) é racional, assim : i = k - r* *Essa igualdade é absurda, pois não existe* ***número irracional (i)*** *que seja igual a um número racional* ***(k - r).*** *Portanto k é irracional.*

Figura 46. Coleção Matemática – página 213 do 1º volume

Observamos que a prova por absurdo é muitas vezes esquecida principalmente nos livros didáticos e, conseqüentemente, pelo professor e oferece uma oportunidade para discutir o sentido das provas na Matemática.

Demonstração: $\overline{z_1 + z_2}$ = $\overline{z_1}$ + $\overline{z_2}$

Demonstre que o conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados desses complexos, isto é, $\overline{z_1 + z_2}$ = $\overline{z_1}$ + $\overline{z_2}$, para quaisquer números complexos z_1 e z_2 .

Sugestão: Indique os números complexos por z_1 = a + bi e z_2 = c + di, com $\{a,b,c,d\} \subset R$

Figura 47. Coleção Matemática – página 102 do 3º volume

Deixamos 2 sugestões para esta atividade:

Que o professor comece por exemplos empíricos para que o aluno verifique que pode ser verdadeiro:

Somamos dois números complexos, por exemplo:

(5 + 3i) + (2 + 4i) obtemos (7 +7i) cujo conjugado é (7 – 7i)

(5 + 3i) cujo conjugado é (5 – 3i) e (2 + 4i) cujo conjugado é (2 – 4i)

Efetuando a soma dos conjugados, temos (7 – 7i) que conclui nossa explicação.

Depois do exemplo empírico o professor pode usar a sugestão do autor e generalizar:

Sabendo que: z_1 = a + bi e z_2 = c + di

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d).i e cujo conjugado é (a + c) - (b + d).i

Soma dos Conjugados: (a – bi) + (c – di) = (a+c) - (b – d).i

Como queríamos demonstrar, o complexo da soma de dois números complexos quaisquer é igual à soma dos conjugados destes números complexos.

Demonstração: $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

Demonstre que o conjugado da diferença de dois números complexos é igual a diferença dos conjugados desses complexos, isto é, $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$, para quaisquer números complexos z_1 e z_2 .

Figura 48. Coleção Matemática – página 109 do 3º volume

Oferecemos as seguintes possibilidades para provar esta igualdade:

Utilizando exemplos empíricos:

Fazendo a diferença entre dois números complexos, como por exemplo: (3 + 4i) - (2 + 3i) obtemos (1 + i) cujo conjugado é (1 – i) (3 + 4i) cujo conjugado é (3 – 4i) (2 + 3i) cujo conjugado é (2 – 3i) Efetuando a diferença dos conjugados, temos (1 – i).

Generalizando:

Sabendo que: z_1 = a + bi e z_2 = c + di (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d).i e cujo conjugado é (a - c) - (b - d).i Diferença dos Conjugados: (a - bi) - (c - di)=a - bi - c + di= (a - c) - (b - d)i Como queríamos demonstrar, o conjugado da diferença de dois números complexos é igual à diferença dos conjugados destes números complexos.

Demonstração: $\overline{z_1 \,.\, z_2} = \overline{z_1} \,.\, \overline{z_2}$

Demonstre que o conjugado do produto de dois números complexos é igual ao produto dos conjugados desses complexos, isto é, $\overline{z_1 \,.\, z_2} = \overline{z_1} \,.\, \overline{z_2}$, para quaisquer números complexos z_1 e z_2 . **Sugestão**: Faça z_1 = a + bi e z_2 = c + di, com {a,b,c,d} $\subset$ R, e desenvolva cada uma das expressões $\overline{z_1 \,.\, z_2} = \overline{z_1} \,.\, \overline{z_2}$, mostrando que ambas têm o mesmo resultado.

Figura 49. Coleção Matemática – página 109 do 3º volume

O professor pode ter as seguintes possibilidades para provar esta propriedade:

Partindo de exemplos empíricos:

Multiplicando dois números complexos, por exemplo:
(1 + 3i).(5 + 4i) obtemos (5 +4i +15i -12) ou (-7 +19i) cujo conjugado é (-7 – 19i)
(1 + 3i) cujo conjugado é (1 – 3i)
(5 + 4i) cujo conjugado é (5 – 4i)
Efetuando a multiplicação dos conjugados, temos (- 7 - 19i).

Depois, antes de generalizar, perguntar: Será que vale sempre?

Deixar os alunos responderem e se necessário colocar na lousa.

Sabendo que $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$
Multiplicando dois números complexos genéricos quaisquer e encontrando o conjugado deste produto:
(a + bi) . (c + di) = (ac + adi + bci - bd), ou seja:
(ac – bd) + (ad + bc).i cujo conjugado é (ac – bd)-(ad + bc).i
Calculando o produto dos conjugados:
(a – bi)(c – di) = ac - adi – bci – bd =(ac – bd)+(-ad –bc)i = (ac – bd)-(ad + bc).i
Como queríamos demonstrar, o conjugado do produto de dois números complexos quaisquer é igual ao produto dos conjugados destes números complexos.

Demonstração: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Demonstre que o conjugado do quociente de dois números complexos é igual ao quociente dos conjugados desses complexos, isto é, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, para quaisquer números complexos z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$.

Figura 50. Coleção Matemática – página 109 do 3º volume

Em sala de aula o professor pode apresentar as seguintes possibilidades:

Primeira possibilidade, utilizando exemplos empíricos:

Dividindo dois números complexos:

Para dividir o número complexo z = 2 + 3i por w = 5 + 12i, basta multiplicar o numerador e também o denominador da fração $\frac{z}{w}$ pelo conjugado de w:

$$\frac{z}{w} = \frac{2+3i}{5+12i}.\frac{5-12i}{5-12i}$$

Efetuando a propriedade distributiva obtemos o resultado da divisão:

$\frac{46-9i}{169}$ então, o conjugado desta divisão vale $\frac{46+9i}{169}$(I)

Calculando o conjugado de z e w temos: $\bar{z} = 2-3i$ e $\bar{w} = 5-12i$ efetuando a divisão entre estes conjugados de maneira análoga ao que fizemos anteriormente em (I) temos então: $\frac{\bar{z}}{\bar{w}} = \frac{2-3i}{5-12i}.\frac{5+12i}{5+12i}$

Efetuando a propriedade distributiva obtemos o resultado da divisão entre os conjugados:

$\frac{46+9i}{169}$ (II)

Confrontando os dois resultados constatamos que (I) e (II) têm os mesmos valores, conseqüentemente, como queríamos explicar: o conjugado do quociente de dois números complexos é igual ao quociente do conjugado de dois números complexos.

Segunda possibilidade, após perguntar aos alunos como mostrariam que é sempre válida. Só depois, usar a sugestão do autor:

Sabendo que: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$

Dividindo dois números complexos quaisquer e encontrando o conjugado:

(I)

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\left[\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\right]} = \overline{\left[\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right]} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$ e

(II)

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{\overline{a+bi}}{\overline{c+di}} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{(a-bi)(c+di)}{(c+di)(c+di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Por (I) e (II), concluímos que $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Raiz quadrada de um número complexo z:

Um número complexo w é uma raiz quadrada de um número complexo z se, e somente se, $w^2 = z$.

a) Mostre que os números $w_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ são raízes quadradas do número complexo z = 4i.

Figura 51. Coleção Matemática – página 104 do 3º volume

O professor tem a seguinte possibilidade para resolver este exercício:

Nos números reais temos que ±3 são raízes quadradas de 9 porque -3 . -3 = 9 e 3 . 3 = 9, logo com um raciocínio análogo podemos obter z:

Com $(w_1)^2$ temos : $(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ = 2 + 2i + 2i - 2 = 4i

Com $(w_2)^2$ temos: $(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2} - i\sqrt{2})$ = 2 +2i +2i - 2 = 4i

Neste caso, a prova é empírica, visto que não esgota todos os casos de números complexos e sua função é a de verificar a afirmação.

Este é um exemplo que quando explorado pode mostrar ao aluno a importância do processo para se chegar ao produto final (Pietropaolo, 2005, capítulo 3, item 1.3), pois neste exercício o produto final já está dado (z = 4i). O exercício poderia ser expresso da forma calcule, mas passaria a ser mais um exercício de procedimentos matemáticos do tipo "efetue o cálculo..." e não ofereceria a oportunidade de explorar seu aspecto como prova.

Raiz décima de um número complexo i:

14 Mostre que o número $\cos\frac{\pi}{20} + i.sen\frac{\pi}{20}$ é uma das raízes décimas de i.

Figura 52. Coleção Matemática – página 121 do 3º volume

Temos uma tarefa que se fosse apresentada resolvida para os alunos seria uma prova que segundo Balacheff (1988) estaria classificada como empirismo ingênuo, visto que, não esgota todos os casos e serve apenas para estes números complexos desta tarefa.

Resolução:

Agora w= $\cos\frac{\pi}{20}+i.sen\frac{\pi}{20}$ e de forma semelhante ao exercício 13 usando w^n onde n é 10 e calculando por meio de regras de potência dos números complexos, um professor tem a seguinte possibilidade de resolução com o exemplo empírico do próprio exercício:

$$\left(\cos\frac{\pi}{20}+i.sen\frac{\pi}{20}\right)^{10}=\cos\frac{10\pi}{20}+i.sen\frac{10\pi}{20}=\cos\frac{\pi}{2}+i.sen\frac{\pi}{2}=i;$$

$$;logo,\left(\cos\frac{\pi}{20}+i.sen\frac{\pi}{20}\right)$$

é uma das raízes décimas de i.

Mostrar que um número complexo w é uma das raízes 5ª de um número z:

Mostre que o número complexo $w=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ é uma das raízes quintas do número $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$. **Sugestão**: Represente na forma trigonométrica o número w

Figura 53. Coleção Matemática – página 124 do 3º volume

O professor pode chamar a atenção para a sugestão dada:

Sendo ρ e φ, respectivamente, o módulo e o argumento de w, temos:

$$\rho=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1}=1$$

$\cos\varphi=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\varphi=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$ então: $\varphi=150^o$

Logo, na **forma trigonométrica (sugestão)** temos: $w=1.(\cos150^o+i.sen150^o)$

Calculando w^5, temos:

$w^5=1.(\cos750^o+i.sen\,750^o)=1.(\cos30^o+i.sen\,30^o)$ = 1.$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$ = z

Como w^5 = z, concluímos que w é uma das raízes quintas de z

Após a análise, constatei que quando a coleção apresenta provas o faz de forma pulverizada e sem continuidade. O autor apresenta algumas provas na primeira série, não apresenta o uso de argumentações e provas na segunda série e temos um “boom” de demonstrações no volume da terceira série.

Outra particularidade que percebemos é que em nenhum tópico encontramos questões voltadas para as argumentações em linguagem natural, sendo dada ênfase às argumentações em linguagem simbólica (já foi apontado pelo CNLEM/2005).

Por ter feito uma análise das coleções aprovadas em minha escola, tenho condições de saber que existem outros autores que apresentam muitas demonstrações em Geometria, o que não foi o caso da nossa análise, onde a quantidade maior apareceu em Álgebra.

A valorização dada ao PNLEM pelos professores pode acarretar uma extrema confiança nos livros indicados. Acreditando nas observações do PNLEM, os professores podem acabar por não considerar as observações contidas em outros documentos, tais como as Orientações Curriculares do MEC.

Creio que não basta apresentar as demonstrações como foi feito na coleção analisada, pois a apropriação de processos de argumentação e prova passa por atividades voltadas para este assunto desde as séries do ensino fundamental através de tarefas (como sugerido pelo IREM) tendo o objetivo de servir à iniciação científica, evoluindo suas exigências em cada série, num trabalho longo e gradual.

Nos documentos oficiais é dado destaque à prova e argumentações, mas, é importante levar em consideração a motivação e o entendimento da necessidade de provar em matemática que são citados como fator relevante para que se evite o desinteresse pelo assunto ou torne as demonstrações um conjunto de procedimentos memorizados, sem utilidade e considerados desnecessárias pelos alunos (Villiers).

Atividades que visem colocar os alunos em contato com argumentações que possam ser expressas por meio de linguagens próximas à coloquial podem ajudar a formar um pensamento matemático e auxiliarem na compreensão do aluno no que tange à importância das demonstrações nesta ciência (Rama, 2005 pág. 15).

Fazendo uma reflexão sobre minha participação no AProvaME, posso dizer que antes de ter investigado o assunto, meu comportamento era de pouca preocupação e pouco destaque tanto para aplicá-lo em sala de aula como para analisar sua presença ou forma de apresentação em livros didáticos. Acreditava, também, que as provas só seriam provas se fossem provas intelectuais e necessitassem de diversas folhas para serem resolvidas. Acabei percebendo através da bibliografia, que isto não é verdade. As provas empíricas podem ser o ponto de partida para se chegar à prova intelectual ou mesmo no sentido inverso para melhor clareza (da prova intelectual para o empirismo). Percebi também que as argumentações deviam ser mais valorizadas, algo que foi pouco explorado na coleção investigada, considerando sua ligação com a linguagem coloquial dos leitores.

Enfim, tenho certa inquietação a respeito do assunto e sua influência em minhas aulas...

BIBLIOGRAFIA

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, p.147-176.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics in Pimms D. (Eds). *Mathematics, Teachers and Children: A Reader*, Hodder & Stoughton, London.

Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve em mathématique chez des élèves de collège (tesis doctoral), 2 vols.Grenoble, Francia: Univ. J. Fourier – Grenoble.

Balacheff, N. (1999). Es la argumentación un obstáculo? [On-line] Disponível:(http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/result2.html)

BRASIL (2000). Ministério da Educação / Secretaria de Ensino Médio e Tecnológico. *Parâmetros curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília.

BRASIL (2005). Ministério da Educação /Secretaria de Ensino Médio e Tecnológico. Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005: Matemática / [coordenação Paulo Figueiredo Lima]. – Brasília: MEC, SEMTEC, FNDE, 80 p.

BRASIL (2006). Ministério da Educação / Secretaria de Educação Básica. –. *Orientações curriculares para o ensino médio;* volume 2 - Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília

Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad (2001). Educação e Matemática, June, nº 63, pp. 31-36. (A PDF copy, requiring Adobe Acrobat Reader, of this paper can be directly downloaded from (http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofc.pdf).

Garnica, A. V. M. (2002). *As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio*. Boletim de Educação Matemática Bolema. Rio Claro (SP): 15 (18), pp. 91 – 99.

Gravina, M. A. (2001) *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. 2001. Tese de Doutorado PGIE, UFRGS. Co-orientador: Liane Margarida Rockenbach Tarouco.

Groupement National D'equipes De Recherche En Didactique Des Mathematiques. Prouve et Demonstration. Ministère De La Jeunesse, De L'éducation Nationale Et De La Recherche Direction De L'enseignement Scolaire Bureau De La Valorisation Des Innovations Pédagogiques (IREMs de Grenoble et de Rennes) - *Prova e Demonstração* Uma Publicação Do Grupo Nacional De Equipes De Pesquisa Em Didática Da Matemática Irems De Grenoble E De Rennes PPS. 84 A 99

Healy, S. V. (L.) & Hoyles, C. (2001). *Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, pp. 235-256.

Nasser, L. e Tinoco, L. A. A. (2000) *Argumentação e Provas no Ensino da Matemática*, (pp. 1-10)

Pietropaolo, R. C. (2005). *(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.*

Silva, A. R. (2006). *O livro didático e o discurso do professor no ensino das operações com números inteiros para alunos do ensino de jovens e adultos. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.*

Rama, A. J. (2005). *Números Inteiros nos ensinos Fundamental e Médio. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.*

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:.......................................

Data de nascimento: .... Data de hoje:...............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas.

Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Uso exclusivo do projeto

escola	
turma	
aluno	

Projeto AprovaMe

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
2*a* e 2*b* são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 = 6
2 + 4 = 6   4 + 4 = 8
2 + 6 = 8   4 + 6 = 10

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

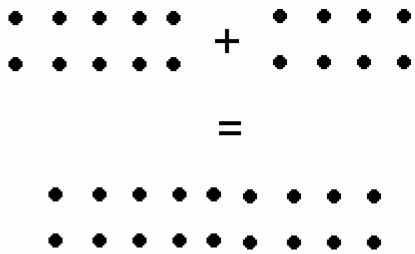
Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai

ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par? Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ? Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ? Justifique

e) Pedro calculou **23! S**em calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

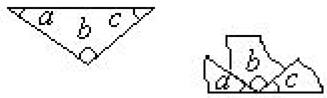
Justifique

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer,
o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

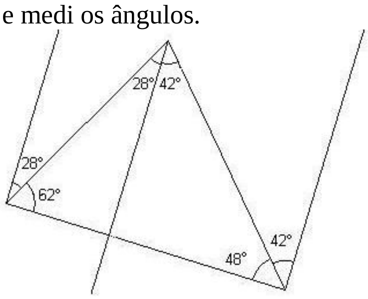
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180º.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

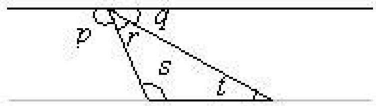
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^o - 28^o) + 28^o + 42^o + (90^o - 42^o) = 180^o$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

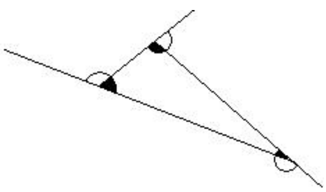


Afirmações	Justificativa
$p = s$..........................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^o$..........	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180^o$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360º. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540º. 540º – 360º = 180º.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer,
o resultado é sempre 180º

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns triângulos.		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

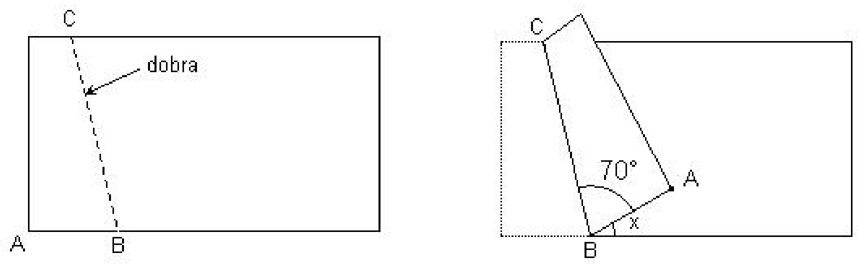
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer,
o resultado é sempre 360^o.

Justifique sua resposta:

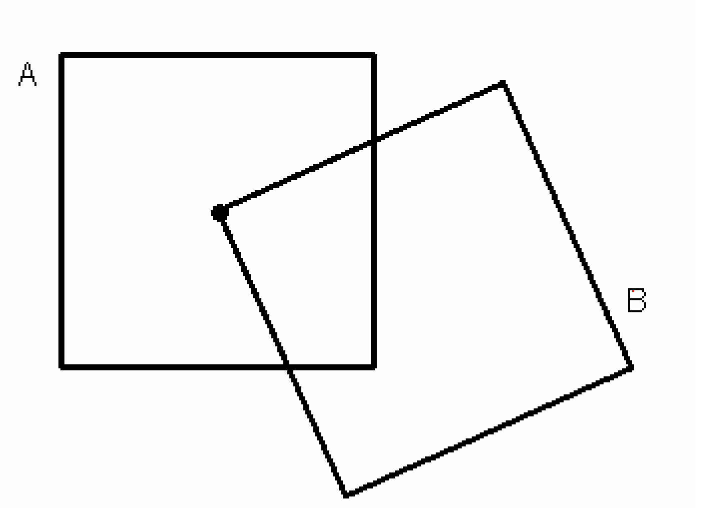
G4: **Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.**



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta