EDNA SANTOS DE SOUZA BARBOSA

ARGUMENTAÇÃO E PROVA NO ENSINO MÉDIO:
Análise de uma coleção didática de matemática

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2007

EDNA SANTOS DE SOUZA BARBOSA

ARGUMENTAÇÃO E PROVA NO ENSINO MÉDIO

Análise de uma coleção didática de matemática

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para a obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profª. Dra**. **Sônia Pitta Coelho**.*

PUC/SP
São Paulo
2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a produção total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura_______________________ Local e Data__________________

Á minha mãe Lídia,
A meu pai Manoel, e
A meu esposo Rogério.

AGRADECIMENTOS

A Deus agradeço por estar comigo todos os dias e por ter me abençoado e fortalecido nos momentos difíceis.

À minha orientadora, Profª. Dra. Sônia Pitta Coelho, pela análise atenciosa de cada capítulo, sugestões, esclarecimentos, que espero ter sabido aproveitar.

Às Professoras Doutoras Celi Espasandin Lopes e Janete Bolite Frant, pelas sugestões por ocasião do Exame de Qualificação.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, por aquilo que ensinaram e como o fizeram.

A todos os participantes do Projeto AProvaME pela contribuição em momentos de reflexões.

Ao Francisco Secretário da Pós-Graduação, pela eficiente ajuda ao final deste trabalho.

A Secretaria de Estado da Educação, por ter me concebido a bolsa de estudos.

A meus pais pela grande prova de amor, paciência e pelo contínuo apoio por todos esses anos.

A meu esposo Rogério, por compreender minha dedicação e conseqüente ausência durante o período de Mestrado.

Ao meu irmão Silvio. Suas idéias que muito contribuíram.

Ao meu irmão, Genildo, à sua esposa Solange e suas filhas Gabriela e Jaqueline, meu agradecimento por me ajudarem a vencer dificuldades.

A minha avó Antonia (em memória) que com seu jeito simples torcia muito pelo sucesso desse trabalho.

Ao meu primo Fábio pela ajuda técnica.

A família Picharki que muitas vezes me espelhei no exemplo de determinação e dedicação.

As amigas, Alice, Francisca, Marcela e Silvia pela ajuda e amizade.

As companheiras de Mestrado Irene e Margarete, pela grande contribuição na confecção e conclusão deste trabalho.

Aos amigos Bonifácio, Genivaldo, Judithe, Betty, Mauro, Janete, Ronaldo, Betinho, Adriana, Carvalho, Maurício, Marcelo, Luísa, Cidinha, Fátima, Soninha, pelos momentos de descontração e apoio durante este estudo.

A todas as pessoas que trabalham comigo na E.E.Prof. Vicente Peixoto.

A todas as pessoas que me ouviram, aconselharam, protegeram e que de alguma forma deram contribuição para realização deste trabalho.

RESUMO

Esta dissertação tem o objetivo de estudar como são tratadas as questões da argumentação e da prova em uma coleção didática para o Ensino Médio, e visa contribuir com o Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME). Trata-se de pesquisa documental que visa, mediante o uso de categorias da literatura disponível relacionadas a idéia de argumentação e de prova, investigar a questão: Como a coleção escolhida trata a questão da Argumentação e da Prova. Após o levantamento de provas e exercícios apresentados na coleção didática em alguns conteúdos selecionados, concluímos que, em Álgebra, a coleção apresenta uma abordagem pedagógica que enfatiza a prova intelectual. Já em Geometria, há ênfase na prova pragmática. No ponto de vista da finalidade dos exercícios, a análise mostrou que predominam as tarefas para aprendizagem da escrita, tanto para Álgebra quanto para Geometria. Observamos que as características apresentadas nas tarefas encontradas na coleção confirmam aspectos que julgamos relevantes ao escolher a coleção para análise.

Palavras-Chave: argumentação, prova, coleção didática, tratamento expositivo, exercício, Ensino Médio.

ABSTRACT

The objective of this dissertation is to study the way that matters of argumentation and tests in a didactic collection for average education are dealt, and aims to contribute with the Argumentation and Test in Scholar Mathematics Project (AProvaME). This concerns a documentary research that aims, by means of the use of categories of the available literature related to the idea of argumentation and test, to investigate the matter: How the chosen collection deals with the Argumentation and Test issue. After the survey of tests and exercises presented in the didactic collection of some selected contents, we conclude that, in Algebra, the collection presents a pedagogical boarding that emphasizes the intellectual test. When the subject is Geometry, the emphasis is in the pragmatic test. In the point of view of the purpose of the exercises, the analysis showed that the tasks for learning of the writing predominate for both Algebra and Geometry. We observed that the characteristics presented in the tasks found in the collection confirm aspects we judged relevant when choosing the collection for analysis.

Key-words: argumentation, test, didactic collection, expository treatment, exercise, average education.

SUMÁRIO

As discussões sobre argumentação e prova, no âmbito da comunidade de Educação Matemática, vêm acontecendo esporadicamente no Brasil. Este é um dos primeiros grupos de estudo que se organiza para efetuar pesquisas relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar no contexto brasileiro. Outro grupo que se dedica a examinar o tema Argumentação e Prova é do Projeto Fundão, que desde 1984, na Universidade Federal do Rio de Janeiro, apresenta atividades para o Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Neste contexto, é que se insere esta dissertação *“ARGUMENTAÇÃO E PROVA NO ENSINO MÉDIO: Análise de uma coleção didática*” cujo fim é realizar uma análise de como são tratadas as questões da Argumentação e da Prova em uma coleção didática de Matemática do Ensino Médio, recomendada pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio 2005.

Trata-se de uma pesquisa de caráter documental, que visa contribuir para uma análise de uma coleção didática.

Examinamos, especialmente, a seguinte questão: Como a coleção escolhida trata a questão da Argumentação e da Prova?

As provas apresentadas na coleção serão analisadas segundo as idéias de Nicolas Balacheff. Para análise dos exercícios, tomamos como referência uma publicação do Grupo Nacional de Pesquisa em Didática da Matemática dos IREMs de Grenoble e Rennes (França), intitulada: Prova e Demonstração.

Esperamos que o resultado obtido com a análise sobre as questões da Argumentação e da Prova, no estudo da coleção didática de Matemática do Ensino Médio, possa contribuir para o aprofundamento do tema em Educação Matemática.

A estrutura deste trabalho compõe-se de quatro capítulos. O primeiro, discorrerá sobre o Projeto AProvaME, a importância do livro didático, um breve histórico sobre o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio, critérios para a escolha da coleção analisada,sobre a coleção escolhida, observações que são apresentadas na coleção para o professor (manual do professor), temas analisados e a estrutura apresentada na coleção didática objeto de análise, e referências para análise de provas e de exercícios.

O segundo capítulo apresentará o tratamento dado aos temas de Álgebra, no que diz respeito à Argumentação e Prova e análise de provas e exercícios.

O terceiro capítulo versará sobre os temas de Geometria, obedecendo a um método análogo ao aplicado aos temas de Álgebra.

Já o quarto capítulo**,** em decorrência do trabalho realizado, apresentará nossas conclusões.

CAPÍTULO 1

O Projeto AProvaME e a pesquisa

"Nenhuma investigação merece o nome de Ciência se não passa pela demonstração matemática"; "nenhuma certeza existe onde não se pode aplicar um ramo das ciências matemáticas ou se não pode ligar com essas ciências".[1]

(Leonardo da Vinci)

1.1. O Projeto AProvaME

"Argumentação e Prova na Matemática Escolar" (AProvaME) é um Projeto apoiado financeiramente pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), elaborado pela Profª. Drª. Siobhan Victoria Healy, coordenadora do Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM) e inserido no Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática na PUC/SP.

Esse Projeto, iniciado em 2005, reúne pesquisadores e professores-colaboradores, alunos do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC/SP visando elaborar situações de aprendizagem para construção de conjecturas e provas. O Projeto se baseia no conceito de que a Prova tem um papel central na Matemática.

Pesquisas internacionais sobre dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de Prova também têm sido veiculadas na literatura. Em termos oficiais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) reconhecem que o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos.

Segundo o texto do projeto AProvaME, seus objetivos são:

[1] Tratado de Pintura - citação no livro: Conceitos Fundamentais da Matemática - Bento de Jesus Caraça, (2000, p.189)

1.efetuar um mapa das concepções sobre Argumentação e Prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo;

2.formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando em ambientes inform

Com referência ao desempenho do professor, Rico ressalta: "O professor conserva, mantém e transmite o saber institucionalizado nos manuais, onde aparece selecionado e adequadamente estruturado."[4] (apud HARO, 2002, p. 15)

Rico afirma, ainda, que “O livro didático oferece segurança e continuidade dos pontos de vista, facilita a imagem de que o conhecimento é algo localizado”. [5](apud HARO, 2002, p. 15)

Para Goetz e Lecompte:

> A análise de livros de texto serve para identificar as diferenças entre os objetivos de um programa e os meios levados até o final para ser colocada em prática [...] a correção e análise de livro de texto, guias curriculares, apontamento de classe e outros arquivos oferecem uma fonte inestimável de dados de classe. [6](apud HARO, 2002, p. 15)

Considerando todas essas observações vamos nos centrar na análise do livro didático, levando-se em conta como são apresentadas as questões que exigem argumentação e prova.

1.3. Objetivo e Questão de Pesquisa

Esta pesquisa tem caráter documental. Visa contribuir à interpretativa de uma coleção didática, dando destaque ao assunto Argumentação e Prova.

A questão norteadora desta pesquisa é:

“Como a coleção escolhida trata a questão da Argumentação e da Prova?”

[4] Texto traduzido por Edna Santos de Souza Barbosa, novembro de 2005
[5] Texto traduzido por Edna Santos de Souza Barbosa, novembro de 2005
[6] Texto traduzido por Edna Santos de Souza Barbosa, novembro de 2005

1.4. Procedimentos metodológicos e Referenciais Teóricos

Inicialmente efetuamos a leitura do Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio. Escolhemos uma coleção entre as onze indicadas pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), que com base nas resenhas apresentadas, valorizava argumentos e provas.

Recolhemos situações didáticas apresentadas na obra. Nesse levantamento verificamos que todos os temas escolhidos apresentavam algum aspecto relacionado a argumentos.

Os temas analisados na coleção foram previamente selecionados conforme decisão da equipe de formadores do AProvaME. Os temas investigados quanto à argumentação e prova são: Conjuntos numéricos; Funções afins e quadráticas; Progressão Aritmética; Progressão Geométrica; Geometria Espacial (Paralelismo e Perpendicularismo) e Geometria Analítica (Paralelismo e Perpendicularismo).

Dentro dos temas examinamos dois aspectos, o tratamento expositivo e o conjunto de exercícios. Em busca de melhor compreensão do objeto de pesquisa, adotamos como referência teórica para classificar provas, as idéias de Nicolas Balacheff (apud Gravina, 2001). Para classificar atividades que visam estimular argumentação utilizamos a classificação de tarefas relacionadas a objetivos, introduzida pelo Grupo Nacional de Pesquisa em Didática da Matemática dos IREMs de Grenoble e Rennes (França), para isso selecionamos os exercícios cujos enunciados continham algum dos termos: analisar, justificar, validar, por quê?, classificar em V ou F, mostrar, explicar, corrigir erros e escrever.

Neste trabalho, nos propomos a analisar se a estrutura voltada para o tratamento expositivo apresenta prova pragmática ou prova intelectual relacionando com as idéias de Balacheff (apud Gravina, 2001), e se o conjunto de exercícios estimulam apresentação de argumentos, usando para isso os resultados dos trabalhos desenvolvidos pelo Grupo Nacional de Pesquisa em Didática da Matemática dos IREMs de Greonble e Rennes (França) denominadas tarefas.

A partir da análise, produzimos planilhas de provas e exercícios apresentados na coleção didática e suas respectivas tipologias e classificações.

1.5. O Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio

O Ministério da Educação (MEC), por intermédio da Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC), em parceria com o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), implantou em 2004 o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM), cujo objetivo básico é a distribuição gratuita de livros didáticos de Língua Portuguesa e Matemática para alunos do Ensino Médio de todo o país. Inicialmente o Programa atendeu, por meio de uma versão piloto, alunos da região Norte e Nordeste.

É importante ressaltar que há efetiva e sistemática avaliação pedagógica das obras inscritas no PNLEM desde 2004. Esse processo é coordenado pela Secretaria de Educação Básica e realizado por meio de recrutamento de pareceristas, numa relação de parceria com universidades.

Ao final de cada processo, é elaborado o Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (CNLEM-2004). Nele são apresentados os critérios que nortearam a avaliação dos livros, bem como as resenhas das obras recomendadas, passíveis de escolha por parte dos professores.

O Fundo de Desenvolvimento da Educação (FNDE) vem lançando, a cada três anos, um edital para que os detentores de direito autoral possam inscrever suas obras didáticas. O edital estabelece as regras para inscrição e apresenta os critérios pelos quais os livros serão avaliados.

Em 2005, o Catálogo foi enviado às escolas como instrumento de apoio para que diretores e professores analisassem e escolhessem as obras que serão utilizadas.

No ano de 2006. as escolas receberam livros de Português e Matemática, dos quais cada aluno teve direito a um exemplar. O livro deve ser reutilizado por três anos consecutivos, beneficiando mais de um estudante.

1.6. A escolha da coleção

Esta seção está destinada a esclarecer os critérios que utilizamos para a escolha da coleção didática do Ensino Médio. A fim de realizarmos essa escolha, utilizamos como referência o Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio em sua versão de 2004 (CNLEM-2004) de Matemática, que apresentamos na seção anterior.

O Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio de 2004, foi um dos elementos utilizados para elaborar as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCPEM – Brasil, 2006). Essas Orientações é parte das várias ações de fortalecimento do Ensino Médio organizadas pelo MEC, a elaboração dessas Orientações têm como objetivo contribuir para o diálogo entre professor e escola, no que diz respeito à prática docente. Foram elaboradas por professores que atuam em linhas de pesquisa voltadas para o ensino. Ao longo do processo de construção dessas Orientações, ocorreu ampla discussão entre equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, professores e alunos da rede pública. Consideramos esse fato as definições, propriedades, procedimentos e regras são apresentados formalmente sem que o aluno participe da construção.

Consideramos também as críticas quanto à metodologia de ensino-aprendizagem; dentre elas, citamos: demonstrações importantes são evitadas, mesmo algumas bem simples; o aluno tem poucas oportunidades de inferir conceitos ou procedimentos, pois estes em geral, já são apresentados de forma sistematizada; são pouco freqüentes as atividades que propiciam o desenvolvimento de competências mais elaboradas, tais como conjecturar, argumentar, validar, enfrentar desafios; não é solicitado ao discente o papel ativo no seu processo de aprendizagem.

Entre as características que desperta

A coleção escolhida foi: “Matemática - Ensino Médio”[7], Essa coleção destacou-se pela for competências que levem o aluno a compreender o mundo em que vive, bem como o processo científico e tecnológico.

Os conceitos matemáticos são organizados, sempre segundo o manual, evidenciando o valor científico da Matemática e o caráter formativo e instrumental.

Entendem a Matemática no Ensino Médio como etapa final da escolaridade básica . Sua organização deve proporcionar ao aluno aquisição de conhecimento para que possa ler e interpretar a realidade e desenvolver capacidades necessárias para atuação na sociedade e na sua vida profissional.

Nesta etapa da escolaridade, consideram a Matemática como ciência com linguagem própria e com importante papel integrador junto às demais Ciências da Natureza. Indicam que o jovem necessitará, no prosseguimento de seus estudos, no trabalho e no exercício da cidadania, de mobilização de conhecimentos e habilidades. Reproduzem o seguinte trecho dos PCNEM-2002:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (apud SMOLE; DINIZ, 2005, p.4)

As autoras acrescentam que, para o aluno decidir sobre a melhor estratégia para resolver uma situação, tomar decisões, argumentar, expressar-se e fazer registros, é necessário analisar e compreender a situação por inteiro. Quanto a isso, citam os PCNEM-2002:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Esta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (apud SMOLE e DINIZ, 2005, p.5)

As autoras afirmam que mesmo possuindo informações e conceitos, os alunos apresentam dificuldades para combiná-los eficientemente na apresentação de uma resolução, e que priorizar a resolução de problemas oferece ao aluno oportunidade de desenvolver a autonomia de raciocínio, construir estratégias de argumentação, relacionar conhecimentos.

Os conteúdos específicos e a aquisição das competências são dimensões da aprendizagem, que segundo Smole e Diniz (2005) devem ocorrer conjuntamente. Os conteúdos fragmentados e sem significado, transmitidos ao aluno para que ele possa ouvir e repetir, levam a um distanciamento das competências.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM-1999), apresentam a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias onde três competências são apresentadas como metas para a escolaridade básica e são assim resumidas por Smole e Diniz (2005):

- **representação e comunicação:** envolve leitura, interpretação e produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características desta área de conhecimento.

- **investigação e compreensão:** marcada pela capacidade de enfrentamento de situações-problema, utilizando os conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências.

- **contextualização** das ciências no âmbito sociocultural: análise crítica das idéias e recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas através do conhecimento científico.(p.6)

A partir dessas competências Smole e Diniz (2005) concluem que cabe à escola e sua equipe docente refletir e decidir sobre quais significados trabalhar e de que forma o fazer. Para auxiliar os professores, as autoras explicitam o que esperam do aluno em cada competência com exemplos, atividades ou temas.

As autoras afirmam que os critérios utilizados para a seleção dos conteúdos foram as competências descritas no PCNEM-2002. Acrescentam que a distribuição dos conteúdos ao longo dos três volumes busca atender à possibilidade de conexão entre diferentes conceitos e idéias em Matemática.

As autoras esclarecem também que os temas estruturadores para o ensino de Matemática seguem a proposta dos PCNEM-2002 e estão divididos em três eixos: Números e Álgebra, Geometria e Medidas e Análise de dados. O trabalho por eixo, segundo Smole e Diniz (2005), privilegia várias formas de pensar em matemática. Por esse motivo, propõem que em cada semana sejam contemplados dois ou três eixos e apresentam uma tabela com a distribuição dos conteúdos específicos por série do Ensino Médio.

As habilidades e competências priorizadas por Smole e Diniz (2005) no primeiro eixo estruturador – Números e Álgebra, no que diz respeito a argumentação e prova, estão assim descritas:

> - Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar as relações entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da Matemática.
>
> - Ler e interpretar diferentes linguagens e representações.
>
> - Identificar regularidades e estabelecer relações.(p.28)[8]

As habilidades e competências priorizadas por Smole e Diniz (2005) no segundo eixo estruturador – Geometria e Medidas, no que diz respeito a argumentação e prova, estão assim descritos:

> - [...] domínio do conhecimento científico, estabelecer relações e identificar regularidades, invariantes e transformações.
>
> - [...] elaborar hipóteses e interpretar resultados.(p.29)[9]
>
> - Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolve-la. (p.30)[10]

Sobre a geometria de posição, Smole e Diniz (2005) declaram ter optado por uma abordagem mais intuitiva, dosando a demonstração de teoremas. Priorizam posições relativas entre retas, planos e as relativas a retas e planos. As demonstrações dos teoremas fundamentais da geometria de posição, foram destacadas como conteúdos opcionais. Para apoiar o trabalho do professor, caso

---

[8] Encontra-se no volume 1 da coleção Matemática - Ensino Médio
[9] Encontra-se no volume 2 da coleção Matemática - Ensino Médio
[10] Encontra-se no volume 3 da coleção Matemática - Ensino Médio

este veja necessidade de aprofundar esses aspectos, remetem a um anexo. Propõem como “novidade” nesta edição, diferentes atividades visando ampliar a compreensão dos alunos acerca do que seja um sistema dedutivo e citam a demonstração de um teorema lúdico. Dedicamos uma seção a comentários sobre a apresentação desse sistema dedutivo.

Smole e Diniz (2005), afirmam que o desenvolvimento de competências exige coleta de informações sobre o aluno, e a esse respeito citam: registros do professor, suas observações sobre cada aluno, registros dos alunos, suas produções, textos, exercícios, argumentações, relatos orais, provas. Concluem que essas informações permitem aproximar o ensino da aprendizagem.

1.8. Os temas investigados e a estrutura da coleção

A coleção é dividida em três volumes, os quais por sua vez se subdividem em partes e estas em unidades. No anexo II, apresentamos a estrutura da coleção em detalhes.

Conforme decisão da equipe de formadores do AProvaME, apenas alguns assuntos são investigados.

Abaixo, apresentamos em uma tabela esses assuntos e sua posição na estrutura da coleção.

Tema:	Livro:	Parte:	Unidade:
Conjuntos Numéricos	1	1	1
Função do 1º grau	1	1	4
Função do 2º grau	1	1	5
Progressão aritmética	1	1	6
Progressão geométrica	1	1	6
Geometria espacial (paralelismo e perpendicularismo)	2	3	7
Geometria analítica (paralelismo e perpendicularismo)	3	2	3

Metodologicamente, Smole e Diniz (2005) apresentam, no manual do professor, a estrutura da obra, sugestões de utilização e as competências envolvidas nas seções: texto acompanhado de exercícios resolvidos, problemas e exercícios, jogos, Invente Você, Saia Dessa, Para recordar, Projeto, Calculadora, Palavras-chave, O elo, Flash Matemático e Testes de Vestibulares. Além disso sugerem recursos de ampliação como: trabalho em grupo, livros paradidáticos, uso de computador, indicação de sites.

Dentre as seções, identificamos as que fazem referência a provas e argumentos. Texto acompanhado de Exercícios Resolvidos, Jogos, Problemas e Exercícios, Flash Matemático, Invente Você, Saia Dessa, Para Recordar.

Abaixo, explicitamos os objetivos dessas seções, conforme mencionados por Smole e Diniz (2005) na apresentação da coleção. A seção "Texto acompanhado de Exercícios Resolvidos" tem como objetivo:

> [...] auxiliar o professor no desenvolvimento das suas aulas, especialmente no que diz respeito à fundamentação teórica de cada tema, quanto para permitir ao aluno desenvolver autonomia em relação à leitura e à compreensão dos assuntos abordados no texto.
>
> Escrito para permitir que o aluno possa obter informações a partir do próprio livro, o texto procura adotar uma linguagem precisa, sem os exageros do formalismo excessivo. Os exemplos e exercícios resolvidos complementam as explicações dadas no texto e permitem ao aluno refletir sobre a teoria apresentada. (p.14)

Na seção "Jogos", Smole e Diniz (2005) justificam que no processo de jogar o aluno busca melhores jogadas, planejamento, utiliza conhecimentos adquiridos que propiciam o surgimento de novas idéias, aquisição de novos conhecimentos. Mencionam como habilidades de raciocínio lógico a investigação, tentativa, erro, levantamento e checagem de hipóteses.

As características apresentadas nos jogos escolhidos por Smole e Diniz (2005) para compor a coleção são:

- O jogo deve contemplar dois ou mais jogadores;
- Deverá haver um vencedor;

- Deverá haver regras e cooperação para cumpri-las;
- As regras devem ser cumpridas até o final do jogo e qualquer alteração deve ser discutida e ter concordância geral para ser imposta daí em diante;
- O jogo deve ter significado para os jogadores.

Os objetivos da seção “Problemas e Exercícios” são:

> [...] que os alunos desenvolvam habilidades resolvendo uma grande variedade de problemas, essa parte do livro traz diversas atividades para proporcionar a eles reflexão e exercitação dos temas abordados no texto, permitir que façam relações entre os diferentes assuntos do livro e, progressivamente, desenvolvam raciocínios mais elaborados e originais. Essa série de problemas pode ser mais ou menos longa, dependendo da profundidade exigida pelo referencial teórico. Sempre que o assunto permite, o material apresenta problemas relacionados com outras áreas do conhecimento ou com assuntos do cotidiano.(IBIDEM, 2005,p.15)

O “Flash Matemático” tem como função “explicitar o desenvolvimento histórico do conceito, ou ampliar determinados aspectos do assunto desenvolvido na teoria”.(SMOLE e DINIZ, 2005, p.18).

Já a seção “Para Recordar”, para as autoras, permite trabalhar nos três volumes os temas mais centrais da Matemática no Ensino Médio.

1.9. Argumentação nas séries iniciais

Buscando entender o processo de leitura e escrita nas aulas de Matemática provocadas por Smole e Diniz (2005) na coleção escolhida, resolvemos buscar na bibliografia o título que mais se aproximasse deste contexto, no livro de Klüener et al.(orgs) (2006) encontramos textos escritos por diversos autores, que discutem como desenvolver as competências de leitura e escrita nas aulas de Artes Visuais, Ciências, Educação Física, Geografia, História, Língua Estrangeira, Música e Matemática.

Cada disciplina tem suas competências. Detivemo-nos à Matemática e classificamos pontos que julgamos pertinente à discussão sobre argumentação e prova, embora o que se apresente neste livro esteja mais na perspectiva da linguagem matemática. Consideramos oportuno levantar essa questão, pois, de certa forma Smole e Diniz (2005) utilizam essas idéias em exercícios que exigem argumentação e foram classificados por nós como tarefas para aprendizagem de escrita.

No texto intitulado: Ler, escrever e compreender a matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos, Klüsener (2006) propõe uma discussão sobre o resgate na prática pedagógica de tarefas envolvendo as diferentes expressões da linguagem.

A autora considera que a origem de algumas dificuldades para ensinar e aprender matemática está associada à busca do rigor relacionada à ciência o que a torna complexa e excessivamente teórica, reforçando o modo como vem sendo trabalhada nas escolas, sem preocupação em estabelecer vínculos com a realidade.

Klüsener (2006) esclarece que as linguagens matemáticas estão presentes em quase todas as áreas do conhecimento e dominá-las passa a ser necessário considerando o contexto do dia-a-dia.

Danyluk acrescenta que ler e escrever não diz respeito unicamente à nossa língua materna. Temos que compreender todas as formas humanas de interpretar, explicar e analisar o mundo.(apud Klüsener, 2006, p.179)

A autora evidencia o fracasso da escola na tarefa de ensinar matemática, e afirma que estudantes não conseguem transpor as dificuldades e acabam abandonando a escola. Quanto a isso, Paulos acrescenta que alguns estudantes, mesmo incapazes de lidar com as noções elementares de matemática, chegam a alcançar um alto nível de escolarização, fato comum das ciências humanas. (apud Klüsener, 2006, p.179)

Danyluk afirma que ser alfabetizado em matemática é entender o que se lê e escreve, é buscar o significado do ato de ler e de escrever presentes na prática cotidiana. (apud Klüsener, 2006, p.180)

Já para D’Ambrósio a passagem da etnomatemática para a matemática pode ser vista como a passagem da linguagem oral para a escrita.Acrescenta que a criança possui o conhecimento da expressão oral e a linguagem escrita (ler e escrever) e a introdução da linguagem escrita não deve suprimir a oral. Completa que, qualquer ação pedagógica deve levar em conta a etnomatemática: “comportamento de cada indivíduo para explicar, entender e desempenhar-se na sua realidade, comportamento esse desenvolvido ao longo de sua história de vida”. (apud Klüsener, 2006, p.180)

A respeito do processo de indução na construção de conceitos matemáticos, Klüsener (2006) afirma, que a primeira aproximação aos conceitos matemáticos é realizada, pelas crianças, intuitivamente através de operações concretas. A partir da manipulação e percepção, passam a elaborar as primeiras imagens mentais iniciando o processo da construção do conceito, levando-os a necessidade de adquirir um vocabulário adequado aproximando da utilização dos símbolos, permitindo o desenvolvimento do processo de abstração e formalização de um sistema dedutivo.

Por outro lado, a autora esclarece que quando a criança entra na escola é levada a escrever utilizando a linguagem simbólica da matemática sem considerar a possibilidade de desenvolver as expressões e noções matemáticas através de uma linguagem natural - formas descritivas que substituem, num primeiro momento, termos próprios da linguagem matemática por meio de símbolos.

A autora afirma que os problemas evidenciados na aprendizagem da matemática não são os mesmos da aprendizagem da língua materna, já que a linguagem matemática não se adquire de maneira natural, não é utilizada constantemente e necessita ser apreendida e praticada em diferentes contextos.

Diante do exposto, entendemos que ao trabalhar desde as séries iniciais atividades que levem o aluno a registrar, relacionar, comparar, indagar, interpretar, explicar o aluno poderá chegar ao Ensino Médio com um nível de argumentação mais satisfatório.

1.10. Os termos demonstração e prova

Segundo Bicudo (2002) a matemática tem linguagem própria em relação às outras ciências; em vez de lançar mão da observação, como as ciências empíricas, faz uso do chamado método dedutivo. Por exemplo, a biologia, a física, química se apóiam fortemente em observações para fazer a teoria e Pietropaolo (2005) justifica os fenômenos observados por meio de uma verdade aproximada que pode ser corrigida, ou abandonada por outra mais satisfatória. Já a matemática pode se inspirar na observação, mas ela ganha autonomia e torna-se abstrata.

Pietropaolo argumenta nesse sentido:

> Um matemático [...] poderá, por exemplo, experimentar e verificar para tantos casos quantos queira que o quadrado de um número ímpar subtraído de uma unidade é um número múltiplo de 8. No entanto ele só aceitará esse fato como uma lei depois de demonstrá-lo, ou seja, após obter esse resultado por meio de uma prova rigorosa. (p. 60)

Ian Stewan e David Tall ponderam que a demonstração matemática aceita pela comunidade permite termos da língua portuguesa, omite alguns passos como, por exemplo, quando hipóteses são introduzidas ou quando deduções são feitas. (apud, Bicudo,2002, p.85). Assim, podemos discernir a demonstração formal da chamada prova escolar. Existem diferenças entre a linguagem matemática utilizada para registros do conhecimento científico que se concentra no aspecto formal e na sua linguagem simbólica, e a linguagem matemática utilizada em Educação Matemática, que tem a tendência de considerar a linguagem comum utilizada pelos alunos para expressar suas vivências e suas primeiras idéias sobre as coisas.– distinção que tem sido útil em Educação Matemática.

Segundo Pietropaolo (2005), em artigos sobre a História da Matemática, especificamente sobre a Educação Matemática, há controvérsias quanto ao uso dos termos demonstração e prova. Essas palavras aparecem em situações que assumem o mesmo significado e em outros significados distintos, nesse caso principalmente por educadores matemáticos.

Esclarecemos que em nosso trabalho utilizaremos_o termo “prova” por ser o termo usual adotado pela comunidade de Educação Matemática.

1.11. Referências para análise de provas (Balacheff)

As provas apresentadas nas coleções serão analisadas segundo as idéias de Balacheff (apud, Gravina, 2001)[11]. Ele categoriza as provas produzidas por alunos em pragmáticas e intelectuais.

As provas pragmáticas utilizam recursos de ação, como por exemplo: desenhos, envolvendo habilidades de observação de figuras, estando os conhecimentos necessários implícitos no pensamento de quem prova.

A esse respeito, Gravina (2001) , citando Balacheff, apresenta em sua tese quatro formas de validação, são elas:

> - o *empirismo ingênuo (empirism naif)* toma, para validação de uma propriedade, a sua verificação em alguns poucos casos, sem questionamento quanto a particularidades: este modo de validação rudimentar, reconhecidamente insuficiente, é uma dam

para explicação caracterizada como demonstração matemática, que considera os princípios de organização do modelo teórico[12]. O nível genérico é uma fase intermediária em que, quando a ação ainda depende de concretização particular, assume a categoria de prova intelectual, e quando a ação usa a concretização apenas como suporte para expressar raciocínio, assume a categoria de prova pragmática.

Em nosso trabalho faremos a classificação do tratamento expositivo da coleção escolhida em provas pragmáticas e provas intelectuais.

1.12. Referências para análise de

O terceiro trata da construção da fase heurística e traz o questionamento de como e porque exercitar a descoberta e a invenção em classe. Trata também da articulação entre resolução de problemas e sua demonstração.

O quarto documento trata da questão geral da racionalidade, no contexto do ensino da demonstração: trata-se de convencer o aluno da necessidade de provar e de dar sentido a uma nova forma de texto: a demonstração.

O quinto documento apresenta um panorama da literatura sobre as atividades para o ensino da demonstração classificadas segundo seus objetivos.

O sexto documento examina referências obtidas na literatura sobre a significação dos termos: explicar, provar, demonstrar, que varia de uma publicação a outra. É dada maior importância sobre as diferenças entre argumentação e demonstração.

Nossa pesquisa fará referência principalmente ao quinto documento. Este apresenta uma classificação de atividades destinadas a alunos, que se intitulam:

- tarefa tradicional;
- tarefas de iniciação à prova;
- tarefas para dar sentido a uma frase;
- tarefas relativas aos enunciados de teoremas;
- tarefas para dar sentido à demonstração;
- tarefas sobre a utilização das palavras de ligação;
- tarefas para encontrar um encadeamento dedutivo;
- tarefas para aprendizagem da escrita;
- tarefas para tentar descobrir a estrutura de textos de demonstração;
- e tarefas para vencer certos obstáculos.

Apresentamos a seguir essa classificação. Fizemos uma seleção das categorias que efetivamente utilizamos em nossas análises de atividades. Estas são:

1. **Tarefas de iniciação à prova** – As atividades levam a "encontrar argumentos de várias naturezas a favor ou contra uma conjectura". Essas

atividades exigem produções de textos que são divididas em duas categorias:

a) enunciar ou validar uma conjectura: Para que se tenha produção de provas próximas da demonstração, a atividade deve exigir a produção de um texto;

b) tarefas de construção em que é precis

b) comparar quadros do tipo “eu sei que”, “conforme a propriedade”, “eu concluo disso que”, colocando-os num encadeamento lógico;

c) construir planos de resolução de problemas.

5. Tarefas para aprendizagem da escrita – Neste caso, o objetivo é favorecer a escrita de verdadeiros textos de escrita matemática. Exemplos:

a) pedir ao aluno para escrever a seqüência de ações que ele realizou durante a resolução de um problema de matemática;

b) tarefas que se voltam para o domínio de enunciado; por exemplo: colocar as letras em uma figura a partir de um enunciado;

c) escrever um programa de construção de uma figura para um terceiro, que deve refazê-la a partir do texto.

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRA

Quando jovem, ao ouvir falar de invenções engenhosas, tentei inventá-las eu próprio, sem nada ter lido dos seus autores. Ao fazê-lo, percebi, gradualmente, que estava a utilizar certas regras.[14]

(Descartes)

2.1. O estudo da Álgebra

As novas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCPEM – Brasil, 2006), sugerem nesta etapa de escolarização no estudo da Álgebra retomar de forma intencional os assuntos já tratados no Ensino Fundamental. Esclarecem que o aluno nessa fase tem maturidade para entender explicações sobre conceitos e idéias da matemática. Quanto a forma de trabalhar conteúdos sugerem o detalhamento sempre que possível, " destacando-se o valor formativo agregado e descartando-se as exigências de memorização, as apresentações de "regras" desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de "fixação" ou a aplicação direta de fórmulas." (p.70, grifo do autor)

As OCPEM (Brasil, 2006), recomendam nesse momento, no estudo de Números e Operações, que se retome às "regras de sinais" para multiplicação de números inteiros acompanhadas de justificativas e também as explicações que fundamentam os algoritmos da multiplicação e da divisão de números inteiros e decimais.

Essas orientações ainda esclarecem que nessa fase o aluno tem maior maturidade para entender argumentos que explicam essas operações e algoritmos, propõem o entendimento dos números irracionais, como uma necessidade matemática que resolve a relação de medidas entre dois segmentos incomensuráveis, e indicam o caso dos segmentos lado e diagonal de um quadrado apropriado como ponto de partida.

---

[14]Citado no livro: A arte de resolver problemas - G. Polya, o autor afirma que essa observação de Descartes parece descrever a origem das regras (1978, p.58)

No estudo de funções, as OCPEM (Brasil, 2006) recomendam algumas sugestões, tais como:

- iniciar com uma exploração das relações entre duas grandezas em diferentes situações contextualizadas;
- provocar os alunos para que apresentem outras relações funcionais.
- expressar em palavras uma função dada de forma algébrica;
- esboçar gráficos registrando os tipos de crescimento e decrescimento;
- identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando se altera seus coeficientes;
- discutir o modelo de crescimento e decrescimento relacionando respectivamente com proporcionalidade direta $\left(f(x) = a.x\right)$ e proporcionalidade inversa $f(x) = \frac{a}{x}$, ilustrando com situações do cotidiano;
- trabalhar situações em que se faz necessária a função afim $\left(f(x) = a.x + b\right)$.

Para o estudo de funções qu

Nos critérios específicos de matemática, que se encontram no CNLEM-2004, os pareceristas, quanto à articulação com a história da matemática, fazem o seguinte destaque:

> A História oferece um outro âmbito de contextualização importante do conhecimento matemático. Um livro didático deve fazer referências aos processos históricos de produção do conhecimento matemático e utilizar esses processos como instrumento para auxiliar a aprendizagem da Matemática. Há vários temas em que a articulação com a história da Matemática pode ser feita com essa perspectiva, tais como a crise dos irracionais no desenvolvimento da ciência grega.(p.80)

Quanto a ampliação e a apresentação da estruturação lógica de Matemática, para o aluno no Ensino Médio, neste mesmo documento os pareceristas destacam que não deve ser sistemática e nem conter demonstrações rigorosas e sim a organização do assunto respeitando sua lógica interna. Acrescentam que o livro didático deve valorizar os vários recursos do pensamento didático e nesse sentido há um destaque nas OCPEM (Brasil, 2006):

> [...] colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.(p.70)

2.2. Conjuntos Numéricos

Na coleção “Matemática Ensino Médio”[15], as autoras, iniciam o tema Conjuntos Numéricos enfocando a presença dos números em diversas situações do nosso dia-a-dia.

Para tanto, apresentam um exemplo retirado de jornal, mostrando informações numéricas contidas em tabelas, gráficos e textos, declarando que uma revisão dos números, retomando algumas propriedades e operações, se faz

[15] Coleção de três livros, um para cada série. Os temas referentes à Álgebra estudados nesse capítulo encontram-se no livro 1.

necessárias e Smole e Diniz (2005) justificam: “Precisamos estar preparados para enfrentar e compreender situações envolvendo informações numéricas relacionadas a medidas, comparações, dados de pesquisas, etc”. (p.9)

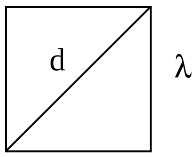
A revisão é apresentada dentro de um contexto histórico, no qual são descritos Antigos Sistemas de Numeração. A par disso, esclarecem a predominância do sistema indo-arábico e comentam a notação posicional, evidenciando o papel essencial do zero, além de apresentarem as idéias fundamentais relacionadas aos números naturais e a sua representação.

Com base em situações concretas, onde fazem indicação de altitudes, saldo bancário, temperaturas, resultados financeiros, mostram a necessidade de números negativos para explicar relações que não podem ser representadas com números naturais. Apresentam as idéias fundamentais relacionadas aos números inteiros e sua representação.

A definição de número racional é associada à noção de medidas. São mostrados exemplos de representação fracionária e notação decimal com número finito de casas e com grupos de algarismos que se repetem infinitamente.

A prova de que $\sqrt{2}$ é irracional

A única prova apresentada por Smole e Diniz (2005) dentro desse tema é a de que a $\sqrt{2}$ é irracional. A $\sqrt{2}$ surge no contexto do problema: “Como medir a diagonal do quadrado, utilizando seu lado como unidade de medida?”(p.14)



O texto informa que há segmentos incomensuráveis. Estes são apresentados por Smole e Diniz (2005) como: “segmentos cuja razão entre as medidas não pode ser expressa como divisão entre dois números inteiros. Ou seja, **existem razões que não expressam números racionais**, isto é, têm representação decimal infinita não periódica”. (p.14, grifo das autoras)

Usando o Teorema de Pitágoras, as autoras, apresentam o valor $\sqrt{2}$ da diagonal. Em seguida expõem a prova de que a $\sqrt{2}$ é um número irracional, como abaixo reproduzida:

> I. Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional, isto é, que $\sqrt{2}$ possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in Z$ e $q \in Z^*$, de modo que $\frac{p}{q}$ seja irredutível (**p** e **q** são primos entre si). Temos, então, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
>
> II. Elevando os dois membros ao quadrado, obtemos $2 = \frac{p^2}{q^2}$ ou $p^2 = 2q^2$. Isso significa que p^2 é par, logo **p** é **par**.
>
> III. Por outro lado, como a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível e **p** é par, então **q** tem de ser **ímpar**.
>
> IV. Se **p** é par, existe um númer

Segundo Polya (1995): “A demonstração por absurdo mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante.”(p.52). Apesar de ser um instrumento eficaz da descoberta há objeções contra tal demonstração:

> Encontrar uma demonstração não muito óbvia constitui um grande sucesso intelectual, mas para aprender essa demonstração, ou mesmo para compreendê-la perfeitamente, é necessário um certo esforço mental. É bastante natural que desejamos obter algum lucro de nosso esforço e, para isso, é claro, aquilo que ficar retido em nossa memória deverá ser verdadeiro e correto, não falso ou absurdo. (POLYA, 1977, p.56)

Polya (1995) afirma que ao resolver um problema devemos nos familiarizar com ele, aperfeiçoar a compreensão, procurar idéias proveitosas e a partir daí executar um plano. Se o plano executado parte de uma suposição falsa deduz conseqüências igualmente falsas, isso até a última conseqüência flagrante falsa. E continua:

> Se não desejarmos guardar falsidade na memória, deveremos esquecer tudo, o mais depressa possível, o que não é, porém viável, pois todos os pontos devem ser relembrados, com nitidez e correção, no decorrer do estudo da demonstração. (p. 56)

Numéricos, para isso selecionamos os exercícios cujos enunciados continham algum dos termos: analisar, justificar, validar, por quê?, classificar em V ou F, mostrar, explicar, corrigir erros, escrever.

A seguir, apresentamos o levantamento desses exercícios. Doze exercícios da unidade Conjuntos Numéricos continham alguma das palavras citadas. Seis deles foram classificados como tarefa para aprendizagem da escrita, três como tarefa para aprendizagem da escrita e também como tarefa de iniciação à prova, um como tarefa para dar sentido a uma frase e também como tarefa para aprendizagem da escrita, um como tarefa para dar sentido a uma frase e um como tarefa de iniciação à prova e também como tarefa para dar sentido a uma frase, conforme mostram as tabelas:

Conjuntos Numéricos				
Palavras	Página	Exercício	Freqüência	Finalidade
justificar	13 31	1 34	2	Tarefa para aprendizagem da escrita
corrigir erros	13 24 24 32	2 12 16 45	4	Tarefa para aprendizagem da escrita
escrever	13 27 31	3 32 33	3	Tarefa para aprendizagem da escrita e tarefa de iniciação à prova.
analisar	32	44	1	Tarefa para dar sentido a uma frase e tarefa para aprendizagem da escrita
classificar em V ou F	25	28	1	Tarefa para dar sentido a uma frase
validar	25	2a	1	Tarefa de iniciação à prova e tarefa para dar sentido a uma frase
Freqüência			12	

Resumo por tipo de tarefas (Conjuntos Numéricos)	
Tarefa para aprendizagem da escrita	10
Tarefa para dar sentido a uma frase	3
Tarefa de iniciação à prova	4
Freqüência	17

Faremos a apresentação de alguns exercícios classificados na categoria das **tarefas para aprendizagem da escrita***:*

- Um professor encontrou entre os cálculos de seus alunos quatro diferentes formas de efetuar a adição de duas frações:

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$

> c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$
>
> d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{5+4}{10} = \frac{9}{10}$
>
> **Analise** cada uma dessas formas, verifique se os alunos acertaram ou não e, depois, **justifique** o raciocínio desenvolvido por eles.(SMOLE e DINIZ, 2005, p.13, grifo nosso)

A partir das adições já resolvidas espera-se que o aluno escreva que o item **a**, **b** e **d** estão corretos e que **c** está errado, justificando cada uma das respostas.

O que se pretende nessa atividade é que o aluno compreenda o raciocínio exposto e escreva o raciocínio utilizado para chegar às respostas. Eis uma possível solução, apresentada no texto:

> a) Correto. O aluno escreveu as frações em notação decimal e, depois, efetuou a adição.
>
> b) Correto. Esse aluno trocou as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{5}$ por frações equivalentes de mesmo denominador (10) e, depois, efetuou a adição.
>
> c) Errado. Aqui o aluno adicionou os numeradores das parcelas e os denominadores das parcelas, encontrando, erroneamente o numerador e o denominador do total.
>
> d) Correto. O aluno substituiu as duas frações por outras equivalentes com o mesmo denominador e adicionou os numeradores. (IBIDEM, 2005, p.392)

A resolução apresentada sugere que o aluno utilize a linguagem matemática como expressão de linguagem simbólica e opere no nível sintático – em que regras, propriedades e estruturas podem ser operadas sem a referência direta a nenhum significado, (isso acontece quando opera-se focado nas regras e propriedades) - e são apresentados na linguagem aritmética. Esta atividade previne recorrentes erros na resolução de problemas que envolvam essas manipulações aritméticas e abre a possibilidade de desenvolver noções matemáticas através de uma linguagem natural -- formas descritivas que substituem, num primeiro momento, termos próprios da linguagem matemática por meio de símbolos.

A esse respeito Klüsener (2006) apresenta um esquema onde descreve as diferentes linguagens matemáticas, com o objetivo de direcionar a discussão para uma situação mais específica. São elas:

A linguagem NATURAL/ORDINÁRIA/HABITUAL como forma de descrever e expressar o conhecimento matemático através da expressão ORAL, ESCRITA e VISUAL.

A linguagem MATEMÁTICA como expressão da linguagem SIMBÓLICA opera em dois níveis:

SEMÃNTICO – onde SÍMBOLOS, SINAIS e as NOTAÇÕES são associados a significados.

SINTÁTICO – Em que REGRAS, PROPRIEDADES e ESTRUTURAS podem ser operadas sem a referência direta a nenhum significado.

A NOTAÇÃO FORMAL - A matemática como ciência e sua notação própria universal que pode ser evidenciada em diferentes linguagens: A linguagem aritmética, algébrica, geométrica, gráfica.

- Agora, observe outros cálculos feitos por esses alunos e procure identificar os **erros** cometidos, **corrigindo-os**:

A) $1{,}5-\left(\frac{1}{5}+1\frac{1}{4}\right)=1{,}5-(0{,}2+1{,}25)=1{,}5-0{,}2+1{,}25=2{,}55$

B) $2\frac{1}{3}\cdot\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}\ =\ \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\ =\ \frac{5}{3}\cdot\frac{2}{4}\ =\ \frac{10}{12}\ =\ \frac{5}{6}$

(SMOLE e DINIZ, 2005, p.13, grifo nosso)

A partir das adições já resolvidas espera-se que o aluno responda: a)0,05 e b) $\frac{3}{2}$.” (IBIDEM, 2005, p.392)

Espera-se que o aluno reescreva os cálculos e compreenda a solução apresentada.

- A quais dos intervalos abaixo pertence $\sqrt{2}$? **Justifique** sua resposta.

a) $]0\,;1{,}41]$

b) $]0\,;1{,}41[$

c) $]0\,;1{,}42[$

d) $]1{,}41\,;1{,}42[$ (IBIDEM, 2005, p.31,grifo nosso)

Espera-se que o aluno conclua que: "$\sqrt{2}$ pertence aos intervalos **c** e **d**."(IBIDEM, 2005, p.393, grifo das autoras).

Por meio de expansões decimais o aluno localizará esse número na reta numérica, e criará uma escrita para explicar o que pensou.

Eis o exercícios classificado na categoria de **tarefa para dar sentido a uma frasrmerca**

Apresentamos abaixo o exercício da categoria das **tarefas para dar sentido a uma frase**.

- **Classifique** cada sentença em **verdadeira (V) ou falsa (F)**:

a) Todo número natural é inteiro.

b) Todo número inteiro é racional.

c) Todo número racional é real.

d) Todo número real é irracional.

e) O número zero é racional.

f) Número racional é todo número que pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$, com b não-nulo. (IBIDEM, 2005, p.25, grifo nosso)

A partir de reflexão sobre cada uma das frases espera-se que o aluno responda verdadeiro para as questões **a**, **b**, **c**, **e** e falso para **d** e **f**.(IBIDEM, 2005, p.393, grifo nosso)

O que se pretende nessa atividade é que o aluno compreenda o sentido preciso da frase. Ao classificar frases quanto à sua veracidade, o aluno se inicia no vocabulário preciso da matemática.

Quanto a **tarefa de iniciação à prova e a tarefa para dar sentido a uma frase** será apresentado um exercício encontrado na seção denominada "Flash Matemático":

- Usando uma calculadora, copie e complete a tabela abaixo:

a	b	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a-b}$	$\sqrt{a}.\sqrt{b}$	$\sqrt{a.b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
3	2								
5	3								
17	10								
49	34								
135	121								
68	32								
500	212								
1428	386								
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

> a) Observe os resultados obtidos na tabela
>
> - Compare os resultados das colunas I e II. Que relação você acha que existe entre eles?;
> - Compare os resultados das colunas III e IV. Que relação existe entre eles?;
> - Compare os resultados obtidos nas colunas V e VI e nas colunas VII e VIII. O que você pode dizer sobre eles?
>
> Tente expressar as conclusões a que você chegou nos itens anteriores na forma de uma igualdade ou desigualdade, usando os símbolos que aparecem na primeira linha da tabela.
>
> b) Essas conclusões ainda serão **válidas** se a ou b forem iguais a zero? O que muda em suas conclusões se *a* = 0? E se *b*=0?(IBIDEM, 2005, p.25, grifo nosso)

Espera-se, portanto, que a partir dos resultados obtidos na tabela o aluno conclua: os resultados da coluna I e da coluna II, bem como os da coluna III e da coluna IV são diferentes; e os da coluna V e da coluna VI, bem como os da coluna VII e da coluna VIII são iguais.

Ainda, espera-se que os alunos enunciem suas conclusões na forma de igualdade e desigualdade. As respostas apresentadas na seção de respostas são respectivamente:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

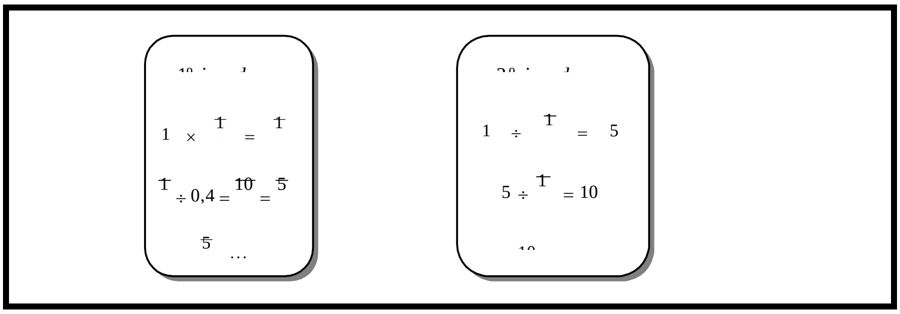
$$\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$ (IBIDEM, 2005, p.394)

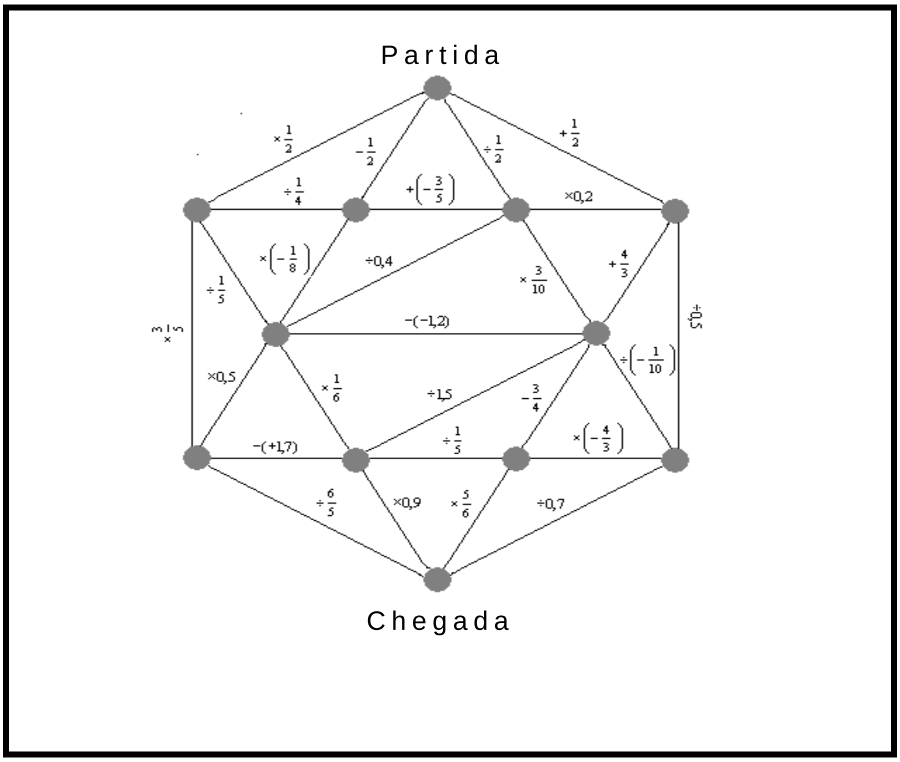
Essas conclusões estariam encaminhando o aluno a desenvolver a linguagem simbólica e operar no nível semântico, em que os símbolos, sinais e notações são associados a significados (isso acontece quando ele reflete sobre a igualdade ou desigualdade pois leva a compreensão do sentido da frase), e são finalmente apresentados numa notação formal na linguagem algébrica. Por esse motivo classificamos a atividade como tarefa para dar sentido a uma frase. E ainda, ao mencionar por exemplo que: $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ o aluno estaria formulando conjecturas. Devido a esta última característica, a atividade foi também classificada como tarefa de iniciação a prova.

Classificamos três atividades apresentadas por Smole e Diniz (2005) em forma de jogo no tema Conjuntos Numéricos, como **tarefas para aprendizagem de escrita e tarefas de iniciação a prova**. Apresentaremos um deles, chamado "Labirinto", situado no apêndice do livro 1:

> - No apêndice ao final do livro encontra-se um jogo chamado **Labirinto.** (grifo das autoras)
>
> Junte-se a um colega e joguem pelo menos três partidas. Depois, discutam e **escrevam** o que vocês aprenderam com esse jogo. (IBIDEM, 2005, p.13,grifo nosso).
>
> Número de participantes: 2
>
> Material necessário: um tabuleiro, um marcador (como um peão de xadrez ou um grão de feijão) e uma folha para cada jogador registrar seus cálculos.
>
> Regras:
>
> -Os jogadores registram o número 1 em suas folhas e decidem quem começa.
>
> -O primeiro jogador desloca, à sua escolha, o marcador da posição de PARTIDA para outra adjacente e efetua a operação indicada no segmento percorrido , registrando o resultado em sua folha. O resultado representa seu total de pontos na jogada.
>
> -O segundo jogador faz o mesmo, iniciando sua jogada com o valor 1, mas partindo da nova posição do marcador.
>
> -O jogo continua sucessivamente assim, com cada participante, na sua vez, usando o valor de pontos de jogada anterior para efetuar o novo cálculo.
>
> -O percurso pode ser feito em qualquer direção e em qualquer sentido, mas cada segmento não pode ser percorrido duas vezes consecutivas.
>
> -Todas as jogadas devem ser registradas.
>
> -O jogo acaba quando um dos jogadores alcançar a posição CHEGADA e ganha o que tiver o maior número de pontos.
>
> Simulação do registro das jogadas e dos resultados



Tabuleiro



(IBIDEM, 2005, p.383)

Smole e Diniz (2005) consideram que o jogo cria situações que podem ser comparadas com problemas que exigem soluções originais. Citam o levantamento e checagem de hipóteses como habilidade de raciocínio lógico envolvido no processo de jogar.

Pretende-se nessa atividade propiciar oportunidade de desenvolvimento lógico, pois as habilidades envolvidas nesse processo exigem, tentar, observar, concentrar, generalizar, analisar, conjecturar, elaborar, reelaborar. Ao registrar as jogadas o aluno estará produzindo textos utilizando a linguagem aritmética.

No anexo III, apresentamos os exercícios classificados que não foram apresentados nessa seção.

2.4. Funções Afins

Comecemos nossa análise sobre o tratamento expositivo do tema Função Afim. As autoras apresentam uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas numa situação cotidiana envolvendo tempo e velocidade, em seguida, definem a função afim da seguinte forma: "Uma função **f**, de $\Re$ em $\Re$, que a todo número **x** associa o número ax+b, com **a** e **b** reais, $a \neq 0$, é denominada **função de 1º grau**. $f : \Re \to \Re$, $x \alpha \ y = ax + b, a \neq o$". (SMOLE e DINIZ, 2005, p.106, grifo das autoras)

Em seguida passam ao estudo do gráfico. Para isso estudam a função y=2x + 3.

Após atribuir alguns valores à variável x e encontrar alguns pontos do gráfico, concluem que é impossível marcar todos os pontos, uma vez que a função está definida em $\Re$. Prosseguem da seguinte forma:

> "Sendo assim, escolhemos apenas alguns pontos, que marcamos no plano cartesiano, e tentamos ver como eles delineiam o gráfico. Em nosso exemplo, a localização dos pontos sugere que o gráfico será uma reta." (IBIDEM, 2005, p.106)

Validação de que o gráfico de y = 2x +3 é uma reta.

Para justificar essa afirmação, mostram que os segmentos determinados pelos pontos (-1, 1), (0,3) e (0,3), (1,5), todos do gráfico de y = 2x + 3, estão contidos numa mesma reta, medindo seus ângulos de inclinação em relação ao eixo Ox. Smole e Diniz (2005) afirmam em seguida que: "Como os ângulos de inclinação desses dois segmentos são iguais e eles possuem o ponto (0,3) em comum, podemos concluir que os segmentos estão contidos numa mesma reta". (p.106)

Segundo a categoria de Balacheff (apud Gravina, 2001), a validação apresentada constitui uma **prova pragmática,** ou seja, atesta a veracidade por meio de casos particulares, esse nível de forma de validação é identificada como **empirismo ingênuo**.

Desta forma, a partir do estudo da função y = 2x + 3, Smole e Diniz (2005) sugerem que os gráficos de funções do 1º grau são retas.

A prova de que o gráfico da função y = ax + b é uma reta.

Para isso, Smole e Diniz (2005) consideram dois pontos quaisquer, $P_1(x_1, ax_1 + b)$ e $P_2(x_2, ax_2 + b)$ do gráfico da função geral de 1º grau y = ax+b, com a $\neq$ 0, sendo *a* o coeficiente angular da reta (inclinação do gráfico) e *b* o coeficiente linear da reta (translação vertical do gráfico). Tomam um ponto qualquer $P(x_o, ax_o + b)$ do gráfico. Ainda, *r* é a reta paralela ao eixo x passando por P_1 e *s* a reta paralela ao eixo y passando por P. A é o ponto de intersecção entre as retas *r* e *s*; *t* é a reta paralela ao eixo x passando por P e *u* a reta paralela ao eixo y passando por P_2, B é o ponto de intersecção entre as retas *t* e *u.* Consideram os triângulos P_1AP e PBP_2 e mostram que estes são semelhantes, usando um dos casos de semelhança, em seguida, observam que a semelhança de triângulos só é possível se os pontos P_1, P_2 e P estiverem numa mesma reta.

Concluem, que "o gráfico de uma função do 1º grau é sempre uma reta." (IBIDEM, 2005, p.107)

Segundo a categoria de Balacheff (apud Gravina, 2001), a validação apresentada é uma **prova intelectual;** ou seja, é apresentada uma construção lingüística específica que considera os princípios de organização do modelo teórico; esse nível de forma de validação é identificada como **experiência mental**.

Validação da relação entre o coeficiente angular *a* e o ângulo do gráfico de f(x) = ax + b com o eixo x.

A partir desse gráfico, observam que na função do 1º grau f(x) = ax + b, a é chamado de coeficiente angular ou declividade, pois determina a inclinação da reta.

Afirmam que pretendem dar uma idéia intuitiva do significado da expressão "inclinação da reta" . Mostram então, para os gráficos y = 2x, y = 2x+3, que não há variação no ângulo de inclinação da reta com o eixo x, o que é constatado visualmente por meio da figura.

Procedem da mesma forma para y = 3x, y = 3x+3.

Na seqüência, o assunto não é mais mencionado. Smole e Diniz (2005), mostram por meio de observação de um pequeno número de casos o significado geométrico do coeficiente angular. Nas categorias de Balacheff, (apud Gravina, 2001) classificamos esse nível de forma de validação como **empirismo ingênuo**.

O coeficiente angular e o crescimento e decrescimento da função afim

O crescimento e decrescimento de uma função são introduzidos a partir da análise do comportamento dos gráficos de f(x) = 2x e g(x) = -2x, respectivamente. Observa-se o que ocorre com as imagens f(x) quando se aumenta o valor de x. Em seguida introduzem as definições de função crescente e decrescente:

"Função crescente é aquela em que, aumentando o valor de **x**, o valor de **y** aumenta, e **função decrescente** é aquela em que, aumentando o valor de **x**, o valor de **y** diminui.'' (IBIDEM, 2005, p.115, grifo das autoras)

Para $f: \Re \to \Re$, definem:

"**f** é crescente em $\Re$ se, para quaisquer valores x_1 e x_2 em $\Re$ com $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$, e **f** é decrescente em $\Re$ se, para quaisquer valores x_1 e x_2 em $\Re$ com $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$."(IBIDEM, 2005, p.115, grifo das autoras)

Após isso, examinam e justificam os casos em que a função afim é crescente ou decrescente segundo o sinal do coeficiente angular. Eis as provas apresentadas:

> Na função do 1º grau f(x) = ax + b:
>
> - se **a > 0** e $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ e $ax_1 + b < ax_2 + b$, ou seja,. $f(x_1) < f(x_2)$ e **f é crescente em seu domínio** $\Re$ **.**
> - se **a < 0** e $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$ e $ax_1 + b > ax_2 + b$, daí, $f(x_1) > f(x_2)$ e **f é decrescente em seu domínio** $\Re$ **.(**IBIDEM, 2005, p.115, grifo das autoras)

Segundo as categorias de Balacheff (apud Gravina, 2001), classificamos as provas acima apresentadas como **provas intelectuais**, devido à organização, ao uso de definições, regras de dedução, pois neste caso a validade é socialmente compartilhada.

2.5. Exercícios no tema Funções Afins

De forma análoga ao que fizemos no tema Conjuntos Numéricos, vamos apresentar o levantamento dos exercícios no tema Funções Afins.

Encontramos três exercícios que continham algum dos termos: analisar, justificar, validar, por quê?, classificar em V ou F, mostrar, explicar, corrigir erros, escrever. Classificamos um como tarefa de iniciação a prova e tarefa para aprendizagem da escrita, um como tarefa para encontrar um encadeamento dedutivo e outro como tarefa para aprendizagem da escrita e tarefa para dar sentido a uma frase. Conforme relacionados na tabela abaixo:

Funções Afins				
Palavras	Página	Exercício	Freqüência	Finalidade
por quê	121	29	1	Tarefa de iniciação a prova e tarefa para aprendizagem de escrita
explicar e por quê	121	30	1	Tarefa para encontrar encadeamento dedutivo
analisar e explicar	48(livro 3)	1	1	Tarefa para aprendizagem de escrita e tarefa para dar sentido a uma frase
Freqüência			3	

Resumo por tipo de tarefas (Funções Afins)	
Tarefa de iniciação a prova	1
Tarefa para aprendizagem da escrita	2
Tarefa para encontrar encadeamento dedutivo	1
Tarefa para dar sentido a uma frase	1
Freqüência	5

Os dois exercícios que contém a palavra “mostre” não se adaptam à nossa classificação. Começamos por apresentar um deles, para ilustração:

- **Mostre** que f é função do 1º grau:

a)$f(x) = (x – 6)^2 – (x – 3)(x-12)$

b)$f(x) = \frac{2x^3 + 2x}{3x^2 + 3}$ (SMOLE e DINIZ, 2005,p.112, grifo nosso)

Eis o exercício que cabe nas categorias: **tarefa de iniciação a prova e tarefa para aprendizagem da escrita**.

A atividade ainda leva o aluno a elaborar e reelaborar suas hipóteses sempre que necessário, assim desenvolverá o processo de abstração e formalização de um sistema dedutivo, o que nos levou a classificar como tarefa de iniciação à prova.

Eis o exercício que classificamos na categoria de **tarefa para encontrar um encadeamento dedutivo***:*

- Organize uma tabela para mostrar o perímetro de cada figura indicada no problema anterior (considere 1 palito como unidade de medida):

Nº.de triângulos	Perímetro da figura
1	3
2	4
3	5
4	
5	
6	
7	
n	

a) Copie e complete a tabela
b) Expresse a lei que dá o perímetro em função do número de triângulos.
c) Dê o domínio e a imagem da função.
d) A função é crescente ou decrescente? **Por quê**?
e) Construa um gráfico para a função e **explique** por que ele será formado apenas por pontos. (SMOLE e DINIZ, 2005, p.121, grifo nosso)

A partir do preenchimento da tabela o aluno deve reconhecer a lei de formação $f(x) = x + 2$, em que x é o número de triângulos e $f(x)$ é o perímetro da figura. Ainda, o aluno deve reconhecer que f é crescente, pois à medida que o número de triângulos aumenta o perímetro também aumenta. A solução do item **e** envolve argumentos semelhantes aos da resolução do exercício anterior, já comentados.

Quanto à **tarefa para aprendizagem de escrita e tarefa para dar sentido a uma frase***,* será apresentado um exercício encontrado na seção denominada “Para Recordar”:

> - **Analise** as definições e as propriedades das funções do 1º grau (p.46 e 47)[16]. **Explique** cada uma delas, com suas palavras e dê dois exemplos para cada uma das propostas a seguir:
>
> a)função afim
> b)coeficiente angular e coeficiente linear
> c)raiz da função afim
> d)gráfico e estudo das funções de 1º grau. (IBIDEM, 2005, p.48, grifo nosso)[17]

A atividade levaria o aluno a justificar, dando sentido preciso as definições e propriedades e aproximando a escrita de verdadeiros textos de escrita matemática. As páginas onde se encontram as funções estão no anexo IV.

2.6. Funções Quadráticas

Smole e Diniz (2005) apresentam a função quadrática estabelecendo vínculos com a realidade; por meio de um problema de movimento de projéteis, em seguida, definem a função quadrática da seguinte forma:

> Uma função **f**, de $\Re$ em $\Re$, que a todo número **x** associa o número ax^2+bx+c, com **a**, **b** e **c** reais e $a \neq 0$, é denominada **função do 2º grau** ou **função quadrática.**
>
> $f : \Re \to \Re,\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c,\quad a \neq o$ (p. 131,grifo das autoras)

Em seguida, Smole e Diniz (2005) afirmam que "o gráfico de uma função de 2^o grau corresponde a uma curva muito especial em Matemática, chamada **parábola**." (p. 132, grifo das autoras)

Elas apresentam as principais noções associadas a essa curva: concavidade, eixo de simetria, raízes da função. Entretanto, nenhuma justificativa é apresentada para a afirmação acima.

Os conceitos são enunciados, precedidos os exemplos de aplicação, nos casos particulares das funções $f(x) = x^2 - 4x + 4$ e $f(x)= -x^2 + 2x -2$.

---

[16] Indicado no exercício. Refere-se às páginas onde encontram-se as funções citadas.
[17] Exercício encontrado no livro 3 na seção "para recordar" durante o tratamento do assunto Geometria Analítica.

A prova da fórmula para as raízes da equação do 2º grau

Essa prova é apresentada numa das seções denominada “Flash Matemático”, que comentamos no capítulo 1.

As autoras procedem à prova da fórmula da equação do 2º grau algebricamente, pelo método de completar os quadrados. Reproduzimos o exemplo que elas apresentaram colocando lado a lado um caso particular e a situação geral, como no texto.

O caso particular apresentado foi: $3x^2 + 5x + 1 = 0$. O trinômio, na situação geral, era: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

Dividiram todos os termos da equação por **a**, ($a \neq 0$), resultando respectivamente em: $x^2 + \frac{5x}{3} + \frac{1}{3} = 0$ e $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$.

Isolaram o termo independente : $x^2 + \frac{5x}{3} = -\frac{1}{3}$, $x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$

Acrescentaram aos dois membros da equação o quadrado da metade do coeficiente de x para transformar o 1º membro em um quadrado perfeito. Veja:

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \quad , \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 = 2.\frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36} \quad , \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Adicionaram as duas frações ao 2º membro:

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36} \quad , \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

E finalmente extraíram a raiz quadrada dos dois membros e isolaram x.

$$x + \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6} \quad , \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5+\sqrt{13}}{6} \text{ ou } x = \frac{-5-\sqrt{13}}{6} \;,\; x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A articulação da observação empírica de uma equação do 2º grau específica lado a lado à prova desenvolvida favorece a construção das argumentações formais; o aluno vai se familiarizando com as estruturas da matemática para dominar o processo dedutivo. Classificamos essa prova, segundo as categorias de Balacheff (apud Gravina, 2001), como **prova intelectual**.

Para o estudo das raízes, foi relatado o que ocorre com as raízes, segundo os três casos: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$, em que: $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais e a parábola intercepta o eixo x em dois pontos; $\Delta = 0$, a equação tem uma raiz real e a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto; $\Delta < 0$, a equação não tem uma raiz real e a parábola não intercepta o eixo x.

A prova da fórmula das coordenadas do vértice

Smole e Diniz (2005) introduziram anteriormente a noção de vértice e de eixo de simetria nos exemplos $f(x) = x^2 - 4x + 4$ e $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ em que introduziram as primeiras noções associadas à parábola. O eixo de simetria foi introduzido como a reta perpendicular ao eixo x que passa pelo vértice.

As autoras calculam inicialmente os pontos do gráfico de ordenada igual a **c**. Algebricamente, consideram $y = c$, $c = ax^2 + bx + c$, e descobriram que $x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$. A partir daí explicitam os pontos no gráfico correspondentes à ordenada c. São eles: $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$ e $(0, c)$; se $b \neq 0$, estes pontos são distintos. Como esses dois pontos estão na mesma reta paralela ao eixo x, eles devem ser eqüidistantes do eixo de simetria. Portanto a média aritmética das abscissas é o valor da abscissa dos pontos do eixo de simetria: $\frac{\left(0 + \left(-\frac{b}{a}\right)\right)}{2} = -\frac{b}{2a}$. Concluem que $x_V = -\frac{b}{2a}$. Atribuindo esse valor à abscissa na situação geral, elas determinam a ordenada: $y_V = \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$. Para b=0, encontram $V(0,c)$.

Segundo as categorias de Balacheff (apud Gravina, 2001), classificamos a prova apresentada como **prova intelectual**, pois a linguagem inclui elementos simbólicos e as relações para o desenvolvimento da fórmula estão explicitadas.

Relações entre o coeficiente de x^2 e a concavidade da parábola

Como Smole e Diniz (2005) assumem que o gráfico da função quadrática é uma parábola, ocorre que $V(x_V , y_V)$ é um ponto de mínimo ou de máximo.

Apresentam um método para decidir, em cada caso, em que situação o vértice se encontra. Eis um resumo: Calculam o valor de f na abscissa: $x_V + 1$. Concluem que $f(x_V + 1) = y_V + a$. A partir daí, concluem que se $a > 0$, V é ponto de mínimo e se $a < 0$, V é ponto de máximo.

2.7. Exercícios no tema Funções Quadráticas

Apresentamos o levantamento

Funções Quadráticas				
Palavras	Página	Exercício	Freqüência	Finalidade
analisar	143 147	10 18	2	Tarefa para aprendizagem da escrita
por quê	143 143 (livro3)	12c 24	2	Tarefa para aprendizagem da escrita
validar	147	19	1	Tarefa para dar sentido a uma frase
escrever	148	30	1	Tarefa para aprendizagem da escrita e tarefa de iniciação à prova.
Freqüência			6	

Resumo por tipo de tarefas (Funções Quadráticas)	
Tarefa para aprendizagem da escrita	5
Tarefa para dar sentido a uma frase	1
Tarefa de iniciação à prova	1
Freqüência	7

O exercício que contém a palavra “mostre” não se adapta à nossa classificação. Em seguida apresentamos, para ilustração:

- **Mostre** que:

a)f(x) = (2x – 1)(x-3)-x(x+1) é uma função quadrática.

b)f(x) = (2x +1)(3x-1) – (3x – 2)(2x + 1) não é uma função quadrática.

(SMOLE e DINIZ, 2005, p.143, grifo nosso)

Eis os quatro exercícios que classificamos na categoria das **tarefas para aprendizagem da escrita***:*

- Releia o texto sobre concavidade e **analise** as concavidades das parábolas :

a) $y = x^2 - 2x - 8$,
b) $y = -2x^2 + 5x - 2$,
c) $y = 2x^2 - 4x + 3$,
d) $y = -x^2 + 4x - 2$ (SMOLE e DINIZ, 2005, p.143, grifo nosso)

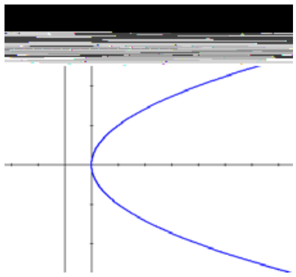
A partir de reflexão sobre cada uma das funções espera-se que o aluno responda “concavidade voltada para cima, porque a > 0: **a** e **c**” e “concavidade voltada para baixo, porque a < 0: **b** e **d**” (IBIDEM, 2005, p.407)

Cabe ressaltar que no exercício anterior foi solicitado o esboço do gráfico de cada uma dessas funções. Espera-se que o aluno faça o esboço do gráfico da função e o estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função.

•

Como deveria ser a parábola para que sua equação representasse uma função? (IBIDEM, 2005, p.143, grifo nosso)[18]

As autoras apresentam a seguinte resposta:



a)Sim, pois os pontos da forma $\left(\frac{y^2}{2}, y\right)$, $y \in \Re$, eqüidistam de $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e de $d: x + \frac{1}{2} = 0$.

b)Não, pois a cada valor de **x** correspondem dois valores de **y**.

c)De forma $(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$. (SMOLE e DINIZ, 2005.p.339, grifo das autoras)

A atividade levaria o aluno a rever a definição de função e obter melhor compreensão por meio

Pretende-se com essa atividade que os alunos compreendam o sentido da frase.

Classificamos o jogo (anexo V) apresentado neste tema como **tarefa para aprendizagem de escrita e tarefa de iniciação a prova.** Essa atividade envolve habilidades de raciocínio lógico e leva o aluno a discutir idéias e produzir textos com argumentos convincentes.

2.8. Progressão Aritmética

Smole e Diniz (2005) apresentam uma longa introdução de seqüências, onde os termos são obtidos somando o mesmo valor ao número anterior, propiciando ao aluno definir regularidades. Afirmam que "uma seqüência numérica é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais não-nulos."(p. 160). Apresentam o gráfico de uma seqüência relacionando com uma função afim. Definem Progressão Aritmética (P.A.) da seguinte forma:

> **Progressão Aritmética (P.A)** é toda seqüência de números na qual cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante.
> $(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ é uma P. A. $\Leftrightarrow a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2$
> (SMOLE e DINIZ, 2005, p.167)

Indicam a constante por ***r*** e a denominam razão da progressão aritmética.

A prova de que em toda P. A., cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre os termos anterior e posterior.

As autoras apresentam a seguinte prova:

Consideram a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r, e ainda, consideram os termos a_{j-i}, a_j, a_{j+1} não nulos. Daí vem, a partir da fórmula do termo geral da P.A ., que:

$$\left.\begin{array}{l} a_j = a_{j-1} + r \\ a_{j+1} = a_j + r \end{array}\right\} \Rightarrow a_j - a_{j+1} = a_{j-1} - a_j \Rightarrow a_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2}$$

Concluem que: “em toda P.A. cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre os termos anterior e posterior.” (IBIDEM,2005, p.167)

Prova da fórmula do termo geral de uma P. A.

Smole e Diniz (2005) aplicam a definição de progressão aritmética à P.A. de razão r. Daí vem que: o valor do segundo termo é igual ao primeiro mais a constante ; o valor do terceiro termo é igual ao segundo mais a constante ,e assim sucessivamente. Como a partir de alguns casos, vê-se que o número multiplicado pela constante é s

2.9. Exercícios no tema Progressão Aritmética

Apresentamos o levantamento dos exercícios no tema Progressão Aritmética.

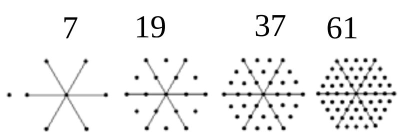
Encontramos dois exercícios que continham algum dos termos: analisar, justificar, validar, por quê?, classificar em V ou F, mostrar, explicar, corrigir erros, escrever. Classificamos os dois como tarefa para aprendizagem da escrita.

Progressão Aritmética				
Palavras	Página	Exercício	Freqüência	Finalidade
explique	164	8b	1	tarefa para aprendizagem da escrita
justifique	164	13	1	tarefa para aprendizagem da escrita
Freqüência			2	

Resumo por tipo de tarefas (Progressão Aritmética)	
Tarefa para aprendizagem da escrita	2
Freqüência	2

Eis os dois exercícios que cabem na categoria*:* **tarefa para aprendizagem da escrita***.*

- Os 5 primeiros termos de uma seqüência estão apresentadas a seguir:



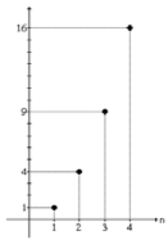
a) Sem fazer o desenho, determine quantos pontos haverá nos dois próximos elementos dessa seqüência.
b) **Explique** como são marcados os pontos em cada elemento da seqüência a partir do 3º.(IBIDEM,2005, p.164, grifo nosso)

Espera-se que o aluno explique que "acrescenta-se ao desenho anterior um número de pontos que é o múltiplo de seis indicado pela posição daquele desenho." (SMOLE e DINIZ, 2005, p.410)

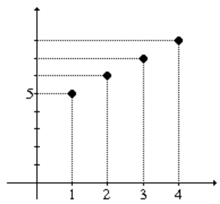
O que se pretende nessa atividade que o aluno centre sua atenção na seqüência e escreva detalhadamente o que entendeu.

> • Observe os gráficos do exercício anterior [19] e responda: Qual deles corresponde a uma seqüência crescente? **Justifique** sua resposta com base no gráfico e no que você já sabe sobre crescimento de funções. (p.164, grifo nosso).

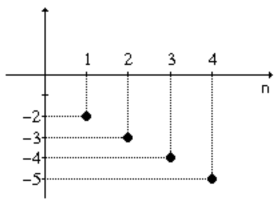
$a_n = n^2$



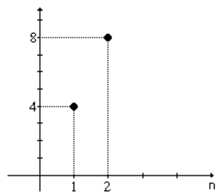
$a_n = n + 4$



$a_n = -n - 1$



$a_n = 4n$



A partir de uma reflexão sobre as funções, espera-se que o aluno estabeleça relações com o tema Progressão Aritmética e explique-se por meio de escrita. Uma possível resposta apresentada por Smole e Diniz dizem que: "correspondem a seqüências crescentes os gráficos dos itens **a**, **b** e o 2º do **c**, pois pode-se verificar que os valores numéricos dos termos (a_n) aumentam à medida que aumentam os valores dos seus índices (**n**)." (IBIDEM, 2005, p.410, grifo das autoras)

2.10. Progressão Geométrica

Smole e Diniz (2005) definem Progressão Geométrica (P.G.) da seguinte forma:

____

> Toda seqüência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicando por uma constante é chamada **progressão geométrica (P.G.).** [...] $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ é uma P.G. $\Leftrightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q, n \geq 2$ (p.176, grifo das autoras)

Indicam a constante por **q** e a denominam razão da progressão geométrica.

Prova de que em toda P. G., o valor absoluto de cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética do termo anterior e do posterior.

Smole e Diniz (2005) apresentam a seguinte prova:

Consideram a P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, ..., a_n, ...)$ de razão q, e a partir da fórmula do termo geral da P.G., obtém $a_j = a_{j-i} . q$ e $a_{j+1} = a_j . q$.

E ainda, consideram os termos a_{j-i}, a_j, a_{j+1} não nulos, daí vem:

$\frac{a_j}{a_{j-i}} = \frac{a_{j+1}}{a_j} \Rightarrow (a_j)^2 = a_{j-1} \cdot a_{j+1}$, como essa ultima igualdade é valida também para termos nulos e a partir dela calculam que: $|a_j| = \sqrt{a_{j-1} . a_{j+1}}$.

Concluem que "em toda P.G., o valor absoluto de cada termo, a partir do segundo, é a **média geométrica** do termo anterior e do posterior."(p.177, grifo das autoras)

Prova da fórmula do termo geral de uma P. G.

Smole e Diniz (2005) aplicam a definição de Progressão Geométrica à P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ de razão q, daí vem que: o valor do segundo termo é igual ao primeiro vezes a constante $a_2 = a_1 . q$; o valor do terceiro termo é igual ao segundo vezes a constante $a_3 = a_2 . q = a_1 . q^2$,e assim sucessivamente, como o expoente da constante é sempre a posição do termo menos 1 resulta: $a_n = a_{n-1} . q = a_1 . q^{n-1}$. Concluem que se multiplicarmos membro a membro as igualdades chegaremos à fórmula do termo geral de uma P.G. $a_n = a_1 . q^{n-1}, n \geq 2$. (p.180).

Prova da soma dos n primeiros termos de uma P.G.

As autoras apresentam um exemplo empírico da soma dos números de uma P.G e esclarecem que caso seja finita é possível calcular a soma de seus termos.

Deduzem uma fórmula geral para essa soma considerando a P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$. Após indicar como S_n a soma das n primeiros termos: $.S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ e multiplicar os membros dessa soma pela razão q, q $\neq 0$, obtém-se:

$$q\,.\,.S_n = a_1\,.\,q + a_2\,.\,q + a_3\,.\,q + ... + a_{n-1}\,.\,q + a_n\,.\,q$$

$$q\,.\,.S_n = a_2 \quad + \quad a_3 \quad + \quad a_4 \quad + ... + \quad a_n \quad + a_n\,.\,q$$

Subtraem esses resultados obtendo:

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$ com q$\neq$1 ou para q=1 e considerando a PG $\left(a_1, a_1, a_1, ...a_{1,...}\right)$

$S_n = n\,.\,a_1$

Essas provas foram classificadas como **provas intelectuais,** segundo Balacheff. (apud Gravina, 2001)

Soma dos termos de uma P.G. infinita

Smole e Diniz (2005) iniciam com um exemplo para este caso. Para isso, destacam o estudo do gráfico das funções $a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}*$, e introduzem a idéia de limite quando observam, ao comparar os gráficos, que à medida que aumentam o valor de n, os pontos vão se aproximando do eixo horizontal e não ultrapassam o limite zero. Concluem que $-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tendem a zero ou têm limite zero quando **n** tende a infinito e representam da seguinte forma: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0$.

Outros exemplos são apresentados. Concluem que, de forma geral, se $-1 < q < 1$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, ou os termos da seqüência $(1, q, q^2, ...)$, $-1 < q < 1$, convergem para zero. A partir dessa conclusão, analisam o que ocorre com $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ quando $n \to +\infty$ e –1<q<1. Citam o raciocínio desenvolvido para $q = \frac{1}{2}$ e concluem que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, logo, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$.

Registram então que:

> Em toda P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, -1 < q < 1:
>
> $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$
>
> O valor dessa expressão é definido como a soma dos termos de uma P.G. infinita.
>
> $S = \frac{a_1}{1-q}$ para -1 < q < 1. (IBIDEM, 2005, p.187, grifo das autoras)

As autoras completam ainda que se $q \leq 1$ ou $q \geq 1$, não existe um número real que corresponda a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Essa apresentação é muito próxima da forma de validação denominada por Balacheff (apud Gravina, 2001) de experiência mental, a menos do detalhe de que a noção de limite é introduzida intuitivamente.

Classificamos como **prova intelectual**, pois usam-se relações para desenvolvimento da demonstração num discurso lógico dedutivo.

2.11. Exercícios no tema Progressão Geométrica

Os exercícios encontrados no tema Progressão Geométrica eram do tipo: “calcule a soma...”, “qual a soma dos 2º primeiros termos...”. Ou seja, não encontramos exercícios que exigissem do aluno argumentação e prova.

2.12 - Outros exercícios que envolvem argumentos

Reunimos aqui os dois exercícios que aparecem nas unidades estudadas referentes à Álgebra que, embora não se relacionem aos temas analisados, são exercícios que na sua resolução envolvem argumentos.

Eis o exercício que consta na unidade de Conjuntos Numéricos. O exercício foi encontrado na seção Saia Dessa:

> - Pereira, Oliveira, Silva e Santos são quatro homens com as seguintes ocupações: açougueiro, bancário, padeiro e policial. Utilizando as informações a seguir, descubra qual é a ocupação de cada homem.
>
> a) Pereira e Oliveira são vizinhos e revezam-se levando um ao outro para o trabalho.
> b) Oliveira ganha mais dinheiro que Silva.
> c) Pereira vence Santos, regularmente, no boliche.
> d) O açougueiro vai sempre a pé para o trabalho.
> e) O policial não mora perto do bancário.
> f) A única vez que o padeiro encontrou o policial foi quando este o multou por excesso de velocidade.
> g)O policial ganha mais dinheiro que o bancário e que o padeiro. (SMOLE e DINIZ, 2005, p.34)

Espera-se que o aluno organize as informações em um encadeamento dedutivo, de modo a responder que ''Pereira é bancário, Oliveira é padeiro, Silva é açougueiro e Santos é policial.'' (SMOLE e DINIZ, 2005, p.395)

Smole e Diniz apresentam uma forma de resolução:

> Pela informação **d** (O açougueiro vai sempre a pé para o trabalho) nem Pereira nem Oliveira podem ser açougueiros, pois isso invalidaria a afirmação **a** (Pereira e Oliveira são vizinhos e revezam-se levando um ao outro para o trabalho). Assim Pereira pode ser policial (PO), padeiro (Pa) ou bancário (B).
>
> Pelo item **f** (A única vez que o padeiro encontrou o policial foi quando este o multou por excesso de velocidade) e pelo item **a** , temos o esquema:

Pereira	Oliveira
1) Po	B
2) Pa	B
B	Pa 3)
	Po 4)

> Pelo item **e** (O policial não mora perto do bancário) descartamos as possibilidades 1 e 4, pois por **a** Pereira e Oliveira são vizinhos.
>
> Restará as possibilidades:

Pereira	Oliveira
(I) Pa	B
(II) B	Pa

Por **b** Oliveira ganha mais dinheiro que Silva, e **g** (O policial ganha mais dinheiro que o bancário e que o padeiro) Silva deve ser açougueiro e Santos policial. Então:

Pereira	Oliveira	Silva	Santos
(*) Pa	B	A	Po
B	Pa	A	P0

Por **c** (Pereira vence Santos, regularmente, no boliche) e **f** (A única vez que o padeiro encontrou o policial foi quando este o multou por excesso de velocidade) a possibilidade (*) fica descartada.
Temos, então: Pereira é bancário, Oliveira é padeiro, Silva é açougueiro e Santos é policial. (p.46, grifo das autoras)

Essa atividade levaria o aluno a construir um plano desenvolvendo a escrita e o raciocínio dedutivo , necessários para argumentar durante a permuta de informações. O aluno parte de experimentação a fim de compreender o problema, sem muita ordem ou direção. Após essa fase, coleta informações, formula hipóteses que precisam ser testadas. Reformula as hipóteses, até identificar a resposta correta. Por este motivo classificamos a atividade como **tarefa para encontrar um encadeamento dedutivo e tarefa para aprendizagem da escrita**.

Eis o exercício que consta na unidade de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica. O exercício foi encontrado na seção Saia Dessa:

- No desenvolvimento da igualdade abaixo, há um engano.**Explique-o**.

$$
\begin{aligned}
&x = y\\
&x^2 = xy\\
&x^2 - y^2 = x.y - y^2\\
&(x - y)(x + y) = y(x - y)\\
&x + y = y\\
&y + y = y\\
&2y = y\\
&2 = 1
\end{aligned}
$$

(SMOLE e DINIZ, 2005, p.192, grifo nosso)

Espera-se que o aluno leia com atenção e faça as devidas correções. A resposta apresentada por Smole e Diniz foi: “Na passagem da 4ª para a 5ª igualdade , os dois membros da igualdade foram divididos por (x-y); como x = y, foi feita a divisão por 0, que não tem resultado em $\Re$.” (IBIDEM, 2005, p.412)

Esta atividade foi classificada como **tarefa para aprendizagem de escrita**.

2.13. Planilhas de provas e exercícios apresentadas na coleção referentes à Álgebra

Abaixo apresentamos planilha discriminativa de provas apresentadas neste capítulo, segundo as idéias de Balacheff (apud Gravina, 2001):

Álgebra				
Descrição	Pág.	Livro	Tipologia	Tema
A prova de que $\sqrt{2}$ é irracional	15	1	Prova Intelectual	Conjuntos Numéricos
Validação de que o gráfico de $y = 2x + 3$ é uma reta. $y = ax + b$	106	1	Prova Pragmática	Funções Afins
A prova de que o gráfico da função $y = ax + b$ é uma reta.	107	1	Prova Intelectual	Funções Afins
Validação da relação entre o coeficiente angular *a* e o ângulo do gráfico de $f(x) = ax + b$ com o eixo x.	108	1	Prova Pragmática	Funções Afins
O coeficiente angular e o crescimento e decrescimento da função afim	115	1	Prova Intelectual	Funções Afins
A prova da fórmula para as raízes da equação do 2º grau	135	1	Prova Intelectual	Funções Quadráticas
A prova da fórmula das coordenadas do vértice	138	1	Prova Intelectual	Funções Quadráticas
A prova de que em toda P. A., cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre os termos anterior e posterior.	167	1	Experiência mental	Progressão Aritmética (P.A)
Prova da fórmula do termo geral de uma P. A.	169	1	Experiência mental	P.A.
Prova da soma dos termos de uma P. A.	172	1	Experiência mental	P.A.
A prova de que em toda P. G., o valor absoluto de cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética do termo anterior e do posterior.	177	1	Experiência mental	Progressão Geométrica (P.G)
Prova da fórmula do termo geral de uma P. G.	179	1	Experiência mental	P.G.
Prova soma dos **n** primeiros termos de a P.G.	183	1	Experiência mental	P. G.
Soma dos termos de uma P.G. infinita	186	1	Experiência mental	P. G.

Discriminamos também os exercícios que encontramos relativo à álgebra segundo a classificação de tarefas adotadas pelo Grupo Nacional de Pesquisa em Didática da Matemática dos IREMs de Grenoble e Rennes (França), conforme segue

TAREFAS PARA APRENDIZAGEM DA ESCRITA					
Palavras	Página	Exercício	Livro	Tema	Seção
justificar	13 31 164	1 34 13	1 1 1	Conjuntos Numéricos Conjuntos Numéricos Progressão Aritmética	Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios
corrigir erros	13 24 24 32	2 12 16 45	1 1 1 1	Conjuntos Numéricos Conjuntos Numéricos Conjuntos Numéricos Conjuntos Numéricos	Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios
escrever	13 27 31 148	3 32 33 30	1 1 1 1	Conjuntos Numéricos Conjuntos Numéricos Conjuntos Numéricos Funções Quadráticas	Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios
analisar	32 143 143 147	44 10 24 18	1 1 3 1	Conjuntos Numéricos Funções Quadráticas Funções Quadráticas Funções Quadráticas	Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios
por quê	121 143	29 12c	1 1	Funções Afins Funções Quadráticas	Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios
analisar e explicar	48	1	3	Funções Afins	Para recordar
explicar	164 192	8b 2	1 1	Progressão Aritmética Outros	Problemas e Exercícios Saia Dessa
mostrar	175	36	1	Progressão Aritmética	Problemas e Exercícios
outras	34	1	1	Outros	Saia Dessa

TAREFAS DE INICIAÇÃO A PROVA					
Palavras	Página	Exercício	Livro	Tema	Seção
escrever	13 27 31 148	3 32 33 30	1 1 1 1	Conjuntos Numéricos Conjuntos Numéricos Conjuntos Numéricos Funções Quadráticas	Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios
validar	25	2a	1	Conjuntos Numéricos	Flash Matemático
por quê?	121	29	1	Funções Afins	Problemas e Exercícios

TAREFAS PARA DAR SENTIDO A UMA FRASE					
Palavras	Página	Exercício	Livro	Tema	Seção
analisar	32 48	44 1	1 3	Conjuntos Numéricos Funções Afins	Problemas e Exercícios Para Recordar
classificar em V ou F	25	28	1	Conjuntos Numéricos	Problemas e Exercícios
validar	25 147	2a 19	1 1	Conjuntos Numéricos Funções Quadráticas	Flash Matemático Problemas e Exercícios

TAREFAS DE ENCADEAMENTO DEDUTIVO					
Palavra	Página	Exercício	Livro	Tema	Seção
explicar e por quê?	121	30	1	Funções Afins	Problemas e Exercícios
explicar	192	3	1	outros	Saia Dessa

CAPÍTULO 3

GEOMETRIA

Para Tales...a questão primordial não era o que sabemos, mas como o sabemos.[20]
(Aristóteles)

3.1. O estudo da Geometria

As novas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCPEM – Brasil, 2006) citam que nesta etapa de escolar

de ter oportunidade de apreciar teoremas e argumentações dedutivas. Acrescentam que o aluno já apresenta nessa fase condições necessárias para a compreensão de certas demonstrações que resultem em algumas fórmulas.

Neste sentido os Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio do MEC 2002 (PCNEM-2002) apresentam as seguintes indicações:

> O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades [...]. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática (p.123-124).

3.2. Geometria Espacial - paralelismo e perpendicularismo

Smole e Diniz (2005) apresentam inicialmente uma gravura em perspectiva feita pelo artista gráfico holandês Maurits Escher (1808-1972), ilustrando relações

[20] Citação no livro: História da Matemática – Carl B. Boyer (1974, p.33)

especiais entre planos e retas no espaço. Comentam que a geometria surgiu da necessidade dos seres humanos medir terras e demarcar propriedades, e como atualmente este estudo está voltado para as figuras, suas propriedades e relações preocupam-se com a posição, forma e tamanho das figuras.

3.2.1. O conceito de sistema dedutivo

Uma das seções denominadas “flash matemático”, presentes na coleção toda, é dedicada a introduzir o conceito de sistema dedutivo. Smole e Diniz (2005) explicam que a matemática, enquanto ciência, utiliza como recurso os sistemas dedutivos para provar fatos.

As autoras esclarecem que para provar alguma coisa de forma lógica, é preciso partir de elementos que fazem parte da base de uma teoria (noções, ou conceitos primitivos) e de fatos supostos verdadeiros que relacionam esses elementos (postulados). Afirmam ainda que os fatos que podem ser provados por dedução lógica são os teoremas. O conjunto das noções primitivas, postulados e teoremas é denominado sistema dedutivo.

O recurso utilizado para explicação do sistema dedutivo é caracterizado como uma “brincadeira lógica”, que passamos a apresentar. Consideram as letras M, U, I como conceitos primitivos e a noção de palavra seria qualquer sucessão composta com essas letras.

As autoras destacam como postulados:

> **M1** – Toda palavra pode ser triplicada.
> **M2** – Uma letra U pode ser substituída por II.
> **M3** – Quatro letras I seguidas podem ser eliminadas.
> **M4** – Depois de uma letra M é permitido colocar uma letra U.
> **M5** –Se Em uma palavra aparece IMU, a letra M pode ser eliminada. (IBIDEM, 2005, p.200)

A partir dos elementos expostos como base teórica (letras e noções de palavras) e dos fatos verdadeiros (postulados), Smole e Diniz (2005) afirmam que partindo da palavra MI, outras palavras podem ser escritas e esclarecem com um exemplo,

$$MI \xrightarrow[M1]{} MIMIMI \xrightarrow[M4]{} MIMUIMI \xrightarrow[M5]{} MIUIMI \xrightarrow[M2]{} MIIIIMI \xrightarrow[M3]{} MMI$$

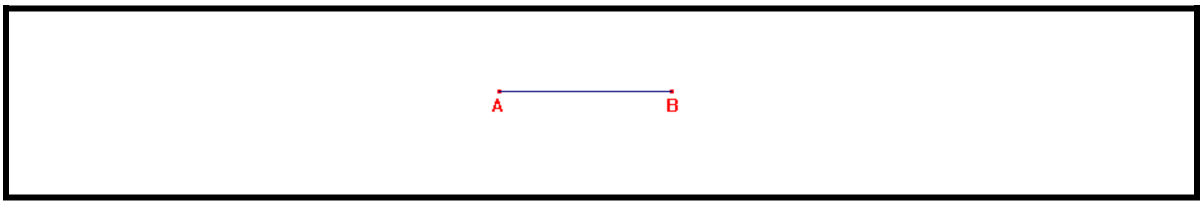
(IBIDEM, 2005, p.200)

Em seguida, com base no exemplo afirmam que podem provar alguns teoremas, sendo um deles o seguinte: “Todas as palavras construídas a partir da palavra MI começam com a letra **M.”** (IBIDEM, 2005, p.200, grifo das autoras)

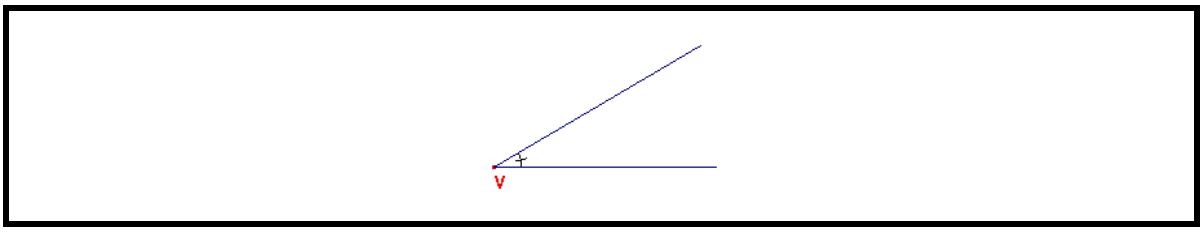
3.2.2. As primeiras noções

As concepções de ponto, reta e plano são introduzidas tendo em vista a necessidade de tentar compreender a realidade; são consideradas idealizações da mente humana. Por exemplo, a noção de ponto é assim apresentada: “Um **ponto** é concebido como algo sem dimensão, sem massa e sem volume”. (SMOLE e DINIZ, 2005, p.197)

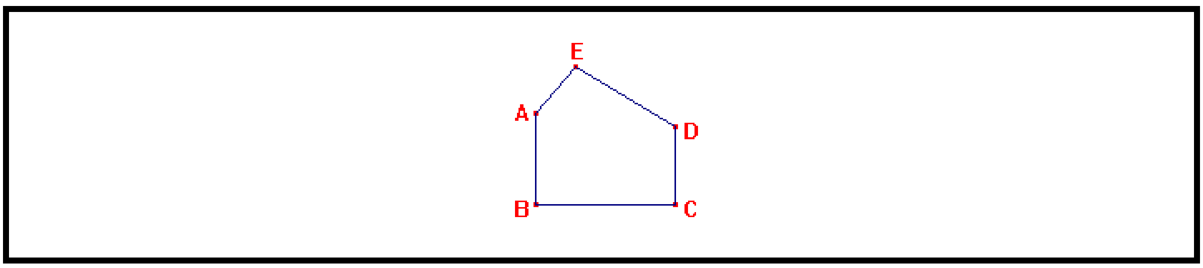
São mencionados exemplos:



A e **B** são as extremidades de um segmento.



V é o vértice de um ângulo.



A, **B**, **C**, **D**, **E** são vértices de um polígono.

3.2.3. Os postulados

Antes da apresentação dos primeiros postulados foi introduzida a noção de pontos pertencentes e não pertencentes a uma reta, bem como alinhamento de três pontos. Apesar da primeira noção ter característica de primitiva o texto apresentado diz: "precisamos definir alguns termos" (SMOLE e DINIZ, 2005, p.200); o que está sendo exposto não é uma definição e sim uma notação.

Smole e Diniz (2005) consideram os pontos **A** e **B** pertencentes à reta **r**, e **C** não pertencente à reta **r** , e a notação apresentada é: $A \in r$, $B \in r$, $C \notin r$. Outra situação ocorre quando os pontos **A, B** e **E,** pertencentes à mesma reta **s**, que são ditos **colineares** ou **alinhados** e a notação apresentada é: $E \in s$, $A \in s$, $B \in s$.

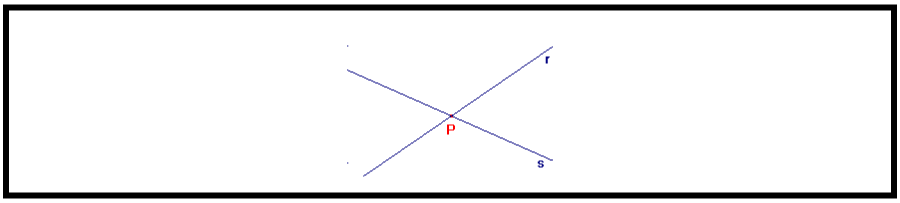
Após essas considerações Smole e Diniz (2005) apresentam o conjunto de postulados; fizemos uma seleção daqueles que ajudarão na organização da idéia de paralelismo e perpendicularismo. Apresentamos os postulados usados para a geometria de posição:

> P1 – Retas e planos são conjuntos de pontos.
> P2 – Dados dois pontos, existe uma única reta que os contém.
> P3 – Dados três pontos não-colineares, existe um único plano que os contém.
> P4 – Se dois pontos estão em um plano, então a reta que passa por eles está contida nesse plano.
> P5 – Se dois planos se interceptam, sua intersecção é uma reta.
> P6 – No espaço existem infinitos pontos. Toda reta tem infinitos pontos e todo plano tem infinitos pontos. (IBIDEM, 2005, p.201)

3.2.4 Provas de alguns teoremas

A partir dos postulados Smole e Diniz (2005) provam três teoremas; e esclarecem que o objetivo é exemplificar como um sistema dedutivo funciona. Para ilustração apresentaremos uma das demonstrações:

Teorema 1: Se duas retas se interceptam, sua intersecção é um único ponto.



Se duas retas **r** e **s** se interceptam, existe um ponto **P** que pertence às duas. Resta provar que esse ponto é único. Vamos supor que existisse um outro ponto **Q** pertencente a **r** e a **s**. Pelo postulado P2, a reta que passa por **P** e **Q** é única. Isso implica que **r** e **s** são a mesma reta, o que é absurdo pois **r** e **s** são duas retas. Logo, a intersecção das retas só pode ter um ponto. (p.201)

Smole e Diniz (2005) fazem uso da demonstração por absurdo, que já foi comentada na seção 2.2. Classificamos a validação como uma *prova intelectual*, segundo Balacheff (apud Gravina, 2001).

As autoras utilizam a mesma estratégia para provar os seguintes teoremas:

Teorema 2: Se uma reta **r** intercepta um plano α e não está contida nele, a intersecção é um único ponto.
Teorema 3: Dada uma reta **s** e um ponto **P** fora dela, existe um único plano que contém o ponto e a reta.(IBIDEM, 2005, p. 201-202, grifo das autoras)

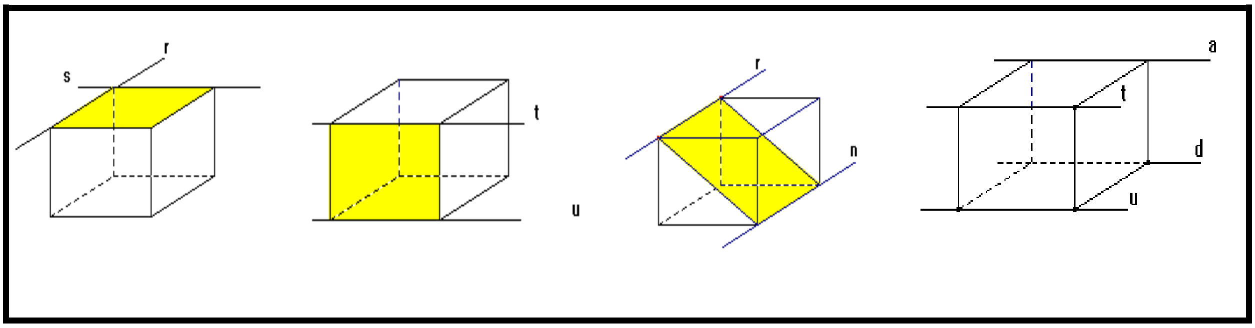
Após essa apresentação definem retas coplanares da seguinte forma: “Dados duas retas **r** e **t** contidas em α e duas retas **m** e **n** não contidas em α, temos: $A \in \alpha,\ t \subset \alpha,\ r \subset \alpha,\ m \not\subset \alpha\ \text{e}\ n \not\subset \alpha$. Por estarem num mesmo plano, **r** e **t** são chamados coplanares” (IBIDEM, 2005, p.202, grifo das autoras)

3.2.5. Paralelismo: definições

Nesta seção incluímos todas as definições de **posições relativas** entre duas retas, dois planos e entre reta e plano.

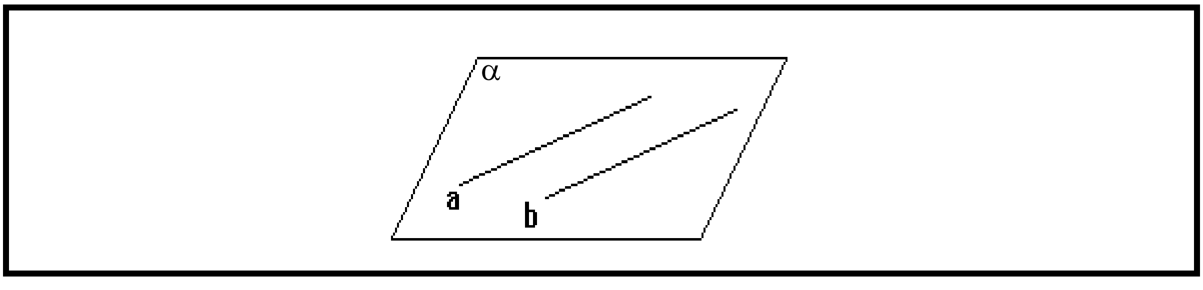
- **entre duas retas**

Smole e Diniz (2005) partem do formato de uma sala e consideram alguns pares de retas que estão no mesmo plano:



Observando essas figuras, introduzem as noções de retas paralelas, concorrentes e reversas, na forma usual.

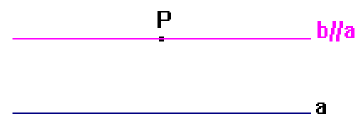
A definição apresentada por Smole e Diniz (2005) para retas paralelas, conforme o texto, é: "Duas retas **a** e **b** são **paralelas** se são coplanares e não têm ponto comum."(p.208, grifo das autoras). Indicam que **a** e **b** são paralelas por a//b.



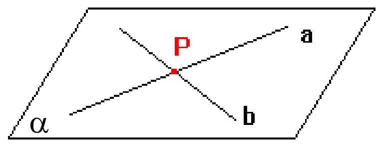
$\exists\, \alpha \,/\, a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b =$ (p.208)

A partir dessa definição, Smole e Diniz (2005) enunciam o postulado que elas denominam Postulado de Euclídes:

"Por um ponto **P** fora de uma reta **a** existe uma e uma só reta paralela à reta **a**". (p.208, grifo das autoras)

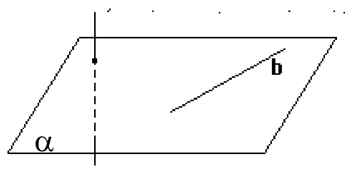


A outra definição apresentada é: “Duas retas **a** e **b** são **concorrentes** (ou **secantes**) se elas têm ponto em comum” (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 209, grifo das autoras)



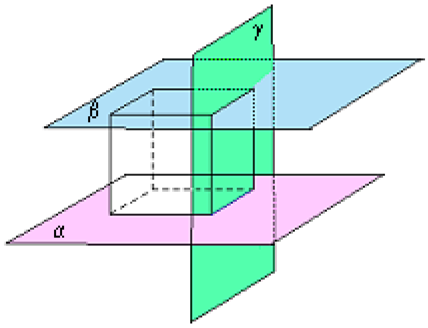
$a \cap b = \{P\}$

E ainda as autoras definem: “Duas retas **a** e **b** são **reversas** se não existe plano que as contenha”. (p.209,grifo das autoras)



- **entre dois planos**

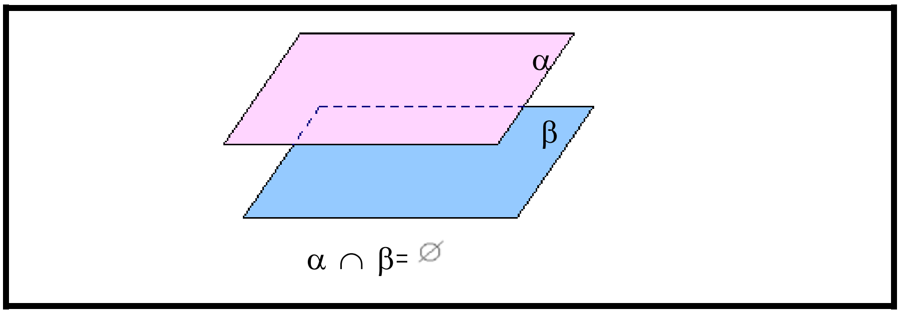
As autoras partem do formato de um cubo e consideram os planos $\alpha, \beta\ e\ \gamma$ passando por algumas de suas faces:



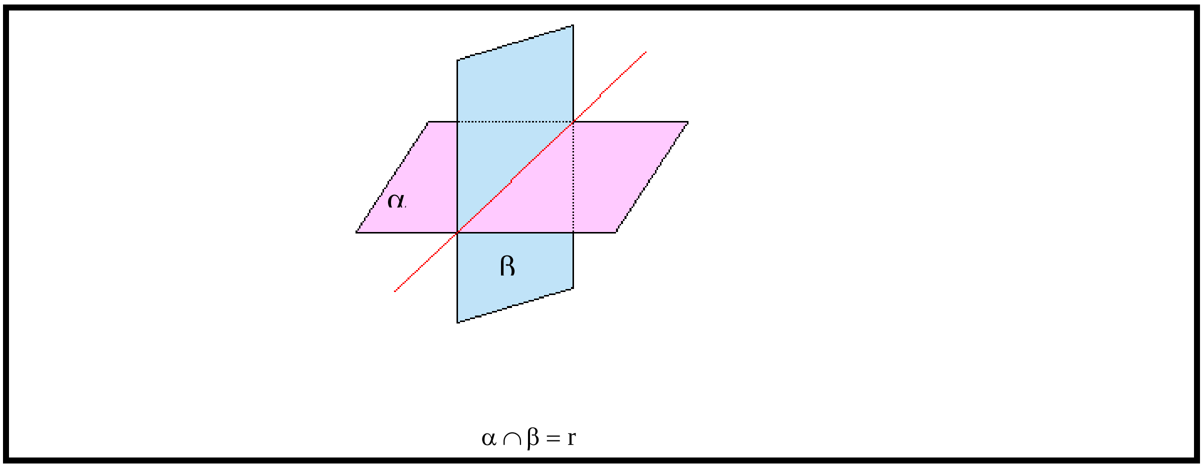
Em seguida, observando esse desenho, definem planos paralelos, concorrentes e coincidentes.

Apresentamos as definições conforme o texto:

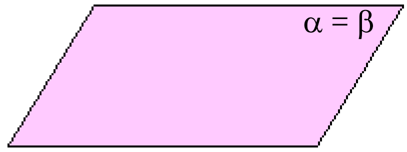
> Os planos α e β são **paralelos** se α e β não tem ponto comum. Simbolicamente , escrevemos $\alpha // \beta$ ou $\beta // \alpha$ para indicar que α e β são paralelos (SMOLE e DINIZ, 2005, p.213, grifo das autoras)



Smole e Diniz (2005) destacam que α e γ têm pontos comuns, assim como β e γ. Daí afirmam que α e γ e β e γ são concorrentes; logo após dão a definição: "dois planos são **concorrentes** (ou **secantes**) se têm pelo menos um ponto comum". (p.213, grifo das autoras). Complementam que, pelo postulado P5, a intersecção de dois planos é uma reta.

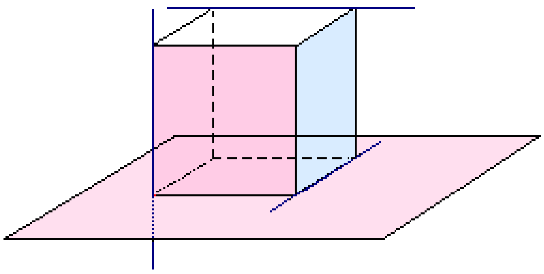


As autoras definem que: "os planos α e β são **coincidentes** se $\alpha = \beta$, ou seja, se α e β são o mesmo conjunto de pontos".(IBIDEM, 2005, p.213)



- **entre reta e plano**

Smole e Diniz (2005) consideram o formato de um cubo apoiado num plano α e as retas **r, s** e **t** passando por algumas de suas arestas.

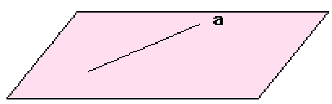


Nesta ilustração destacam:

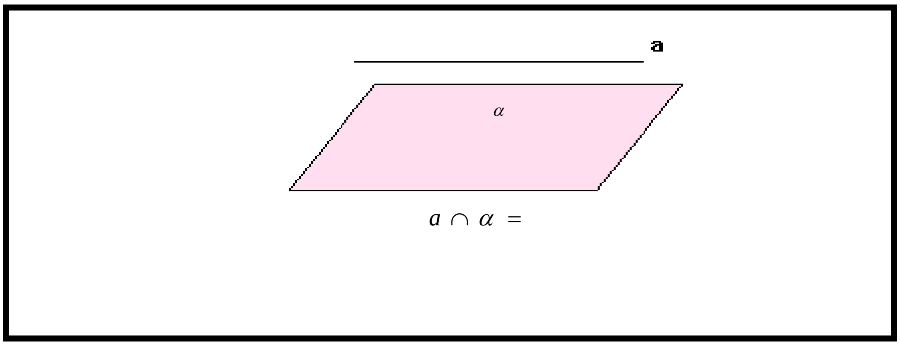
> Notamos que:
> - **r** está situada em α;
> - **s** e α não se interceptam;
> - **t** e α têm um único ponto comum.
>
> Dizemos que;
> - **r** está contida em α;
> - **s** é paralela a α;
> - **t** é concorrente com α**.**
>
> (SMOLE e DINIZ, 2005, p.214, grifo das autoras)

As autoras definem, após esta explanação, reta contida num plano, reta e plano paralelos e reta e plano concorrentes. Apresentamos as definições conforme o texto:

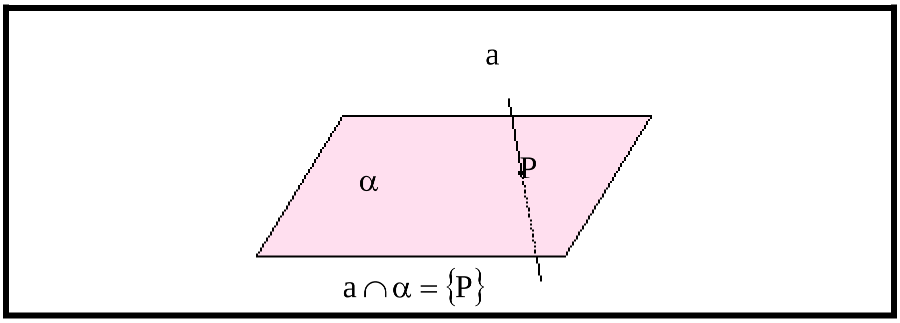
> Uma reta **a** está **contida** em um plano α se todos os pontos de **a** pertencem a α.



Uma reta **a** e um plano α são **paralelos** se **a** e α não têm ponto comum.



Uma reta **a** e um plano α são **concorrentes** (ou **secantes**) se **a** e α têm um único ponto comum.

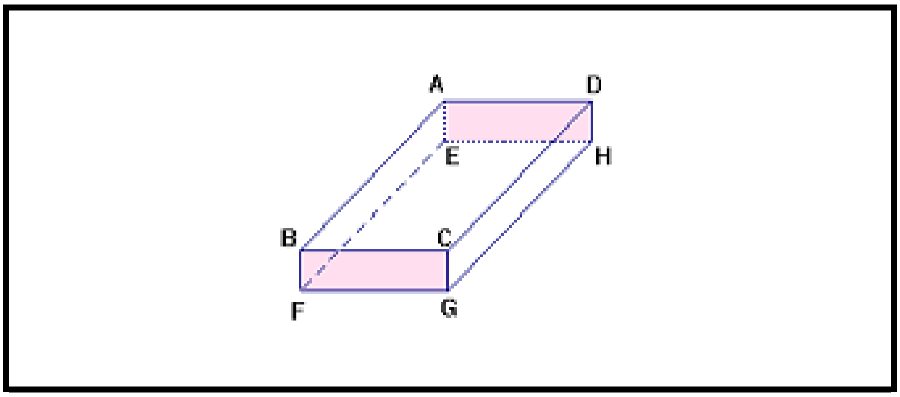


(SMOLE e DINIZ, 2005, p. 214, grifo das autoras)

3.2.6. Paralelismo

As propriedades relacionadas a paralelismo de retas são enunciadas a partir da observação de figuras particulares. As autoras nomeiam essas propriedades como Teoremas. Faremos apresentação de uma das cinco das propriedades enunciadas:

1ª propriedade:
Observe, no paralelepípedo, que os planos BCG e ADH são paralelos e que qualquer reta de BCG ($\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BF}, \overleftrightarrow{FG}, \overleftrightarrow{CG}, \overleftrightarrow{BG}, \overleftrightarrow{CF}...$) é paralela ao plano ADH.



Teorema: Quando dois planos são paralelos, qualquer reta contida em um deles é paralela ao outro. (IBIDEM, 2005, p.217)

Trata-se de um caso particular, por isso classificamos a validação como **empirismo ingênuo**, essa validação apresentada constitui uma **prova pragmática** segundo Balacheff (apud Gravina, 2001). Examinando o paralelepípedo da figura e apenas os planos BCG e ADH, pretende-se concluir que toda a reta contida num dos planos é paralela ao outro plano.

Smole e Diniz (2005) fazem ainda a seguinte observação: “observando um paralelepípedo, é possível descobrir algumas outras propriedades envolvendo planos e retas.” (p.217). Apontam para o mesmo tipo de estratégia para validar os seguintes teoremas:

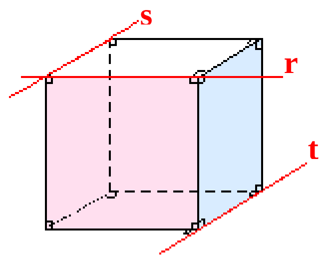
> Quando uma reta é paralela a um plano, existe pelo menos uma reta desse plano à qual a reta dada é paralela.
>
> Quando uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, ela é paralela ao plano.
>
> Se um plano intercepta dois outros planos paralelos, essa intersecção dá origem a duas retas paralelas.
>
> Quando um plano contém duas retas concorrentes, paralelas a outro plano, então os planos em questão são paralelos.(IBIDEM, 2005. p.218-219).

3.2.7. Perpendicularismo e ortogonalidade: definições

Nesta seção incluímos todas as definições de **posições relativas** entre duas retas, reta e plano e dois planos.

- **entre duas retas**

Para tratar perpendicularismo e ortogonalidade, a estratégia utilizada é semelhante. Smole e Diniz partem de um cubo e consideram as retas r, s e t, passando por algumas arestas.



Nesta ilustração Smole e Diniz (2005) destacam que:

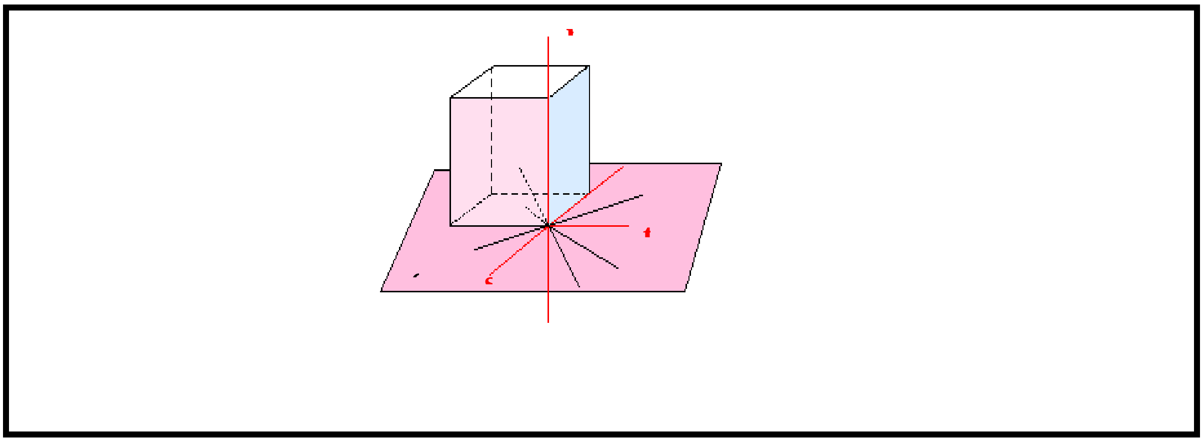
> Notamos que:
> - **r** e **s** são concorrentes e formam um ângulo reto;
> - **r** e **t** são reversas e **r** forma uma ângulo reto com a reta **s,** paralela a **t.**
>
> Dizemos que:
> - **r** e **s** são perpendiculares entre si;
> - **r** e **t** são ortogonais entre si. (IBIDEM, 2005, p.220, grifo das autoras)

Smole e Diniz (2005) definem, após esta explanação, retas perpendiculares e retas ortogonais. Apresentamos definições conforme o texto:

> Duas retas **r** e **s** são **perpendiculares** se forem concorrentes entre si e formarem ângulos retos (90º).
>
> Duas retas **r** e **t** são **ortogonais** se forem reversas e existir uma reta paralela a uma delas e perpendicular à outra.(p.221)

- **entre reta e plano**

Smole e Diniz (2005) consideram o formato de um cubo apoiado num plano α e as retas **r, s** e **t** passando cada uma por uma aresta, as quais são concorrentes num ponto:

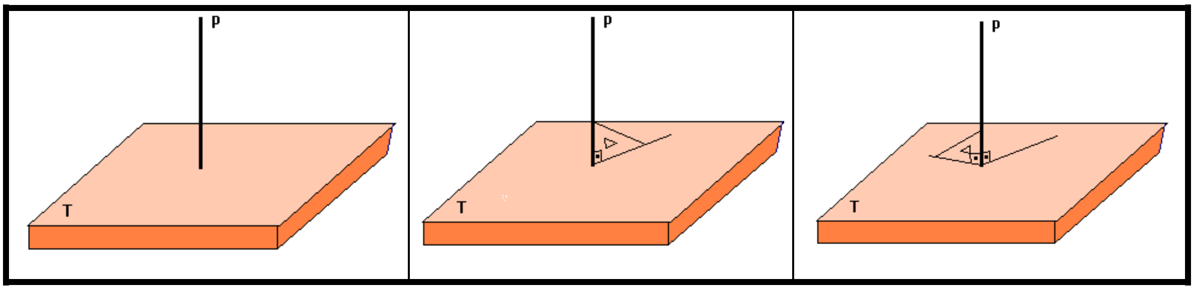


Nesta ilustração, Smole e Diniz (2005), destacam que **r** forma ângulo reto com **s** e **t**, que estão contidas em α; seguem observando que r forma ângulo reto com qualquer reta contida em α, que passa pela intersecção de **r** com α, concluem que r é perpendicular a α. Afirmam então que:

"Uma reta **r** e um plano α são **perpendiculares** se **r** é concorrente com α e é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto de intersecção de **r** e α." (IBIDEM, 2005, p.222, grifo das autoras). Complementam com a indicação simbólica: $r \perp \alpha$ (r e α são perpendiculares).

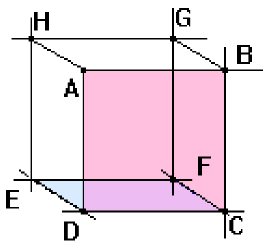
O único teorema apresentado nessa situação é o seguinte: "Se uma reta **r** é perpendicular a duas retas distintas de um plano α que passam por $r \cap \alpha$, então **r** é **perpendicular** a α. "(IBIDEM, 2005, p.222, grifo das autoras).

Neste caso, as autoras não se apóiam apenas em figuras, mas numa situação prática. Afirmam que para verificar se um pino **p** está fincado perpendicularmente à uma superfície de uma tábua **T**, usa-se um esquadro para constatar se o pino forma ângulo reto em duas direções diferentes em **T**.



- **entre planos**

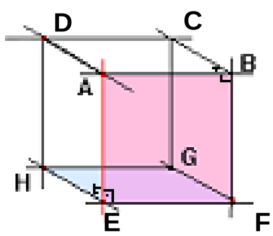
Smole e Diniz (2005), consideram o formato de um cubo e indicam; AD está contida no plano ABC, sendo perpendicular ao plano CDE. Em seguida afirmam que o plano ABC é perpendicular ao plano CDE.



Em seguida, Smole e Diniz (2005) definem que: “Dois planos α e β são **perpendiculares** se α é concorrente com β e um deles contém uma reta perpendicular ao outro.” (p.222, grifo das autoras). Complementam com a indicação simbólica: $\alpha \perp \beta$ (α e β são perpendiculares).

3.2.8. Perpendicularismo

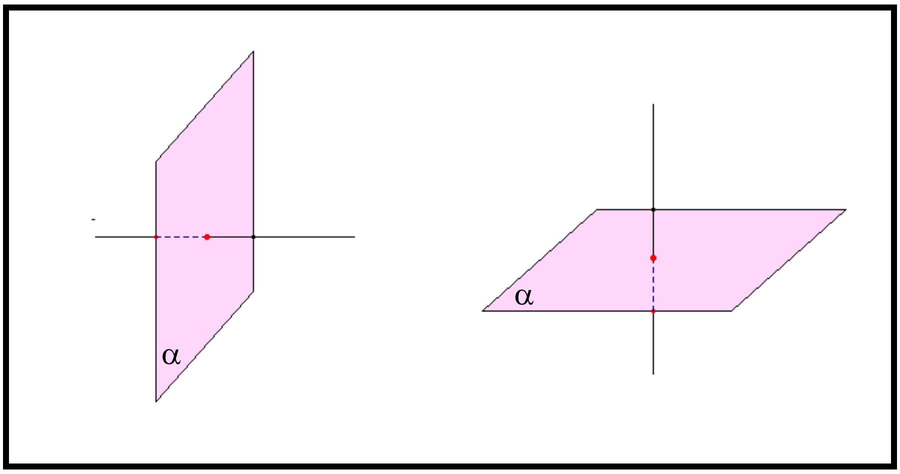
As propriedades relacionadas a perpendicularismo são enunciadas por Smole e Diniz (2005) a partir de observação de figuras particulares. Faremos apresentação de um exemplo, entre seis das propriedades enunciadas:



1ª propriedade:

Vemos que pelo ponto **B** da reta AB passa um único plano (BCG) perpendicular a essa reta. Outras situações como esta podem ser observadas no cubo. Isso sempre é verdade e podermos escrever:

> **Teorema:** Por um ponto de uma reta existe um e somente um plano perpendicular a essa reta.(p.224)



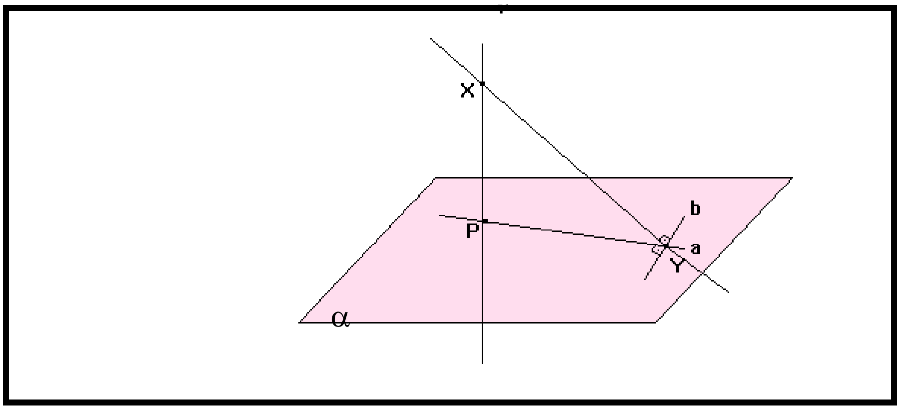
Trata-se de uma validação por meio da verificação em um caso particular, por isso classificamos como validação pelo **empirismo ingênuo,** que constitui uma **prova pragmática** segundo Balacheff (apud Gravina, 2001).

Smole e Diniz (2005) usam o mesmo tipo de estratégia para enunciar os seguintes teoremas:

> Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer reta paralela a essa reta também é perpendicular ao plano.
>
> Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer plano paralelo ao primeiro é perpendicular a essa reta.
>
> Se uma reta **r** e um plano α são ambos perpendiculares a um plano β , a reta **r** está contida no plano α ou é paralela ao plano α .
>
> Se dois planos α e β interceptam-se segundo uma reta **r** e se γ é outro plano perpendicular a cada um dos planos α e β, então γ é perpendicular à reta **r**. (p.225-227, grifo das autoras)

A exceção é o próximo teorema, para o qual apresenta-se uma **prova intelectual,** segundo as categorias de Balacheff (apud Gravina, 2001).

> Se uma reta **r** é perpendicular a um plano α no ponto **P**; uma reta **b** está contida em α e não passa por **P**; uma reta **a** está contida em α , passa por **P** e é perpendicular a **b** no ponto **Y**; e **X** é um ponto de r; então a reta XY é perpendicular à reta **b**.



$$\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha,\ r \cap \alpha = \{P\} \\ b \subset \alpha,\ P \notin b \\ a \subset \alpha,\ P \in a,\ a \perp b,\ a \cap b = \{Y\} \\ X \in r \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{XY} \perp b$$

(SMOLE e DINIZ, 2005 p.226)

3.3. Exercícios resolvidos do tema Geometria Espacial - paralelismo e perpendicularismo.

A seguir, apresentamos o levantamento dos exercícios resolvidos no tema Geometria Espacial – paralelismo e perpendicularismo.

Encontramos quatro exercícios que continham algum dos termos: analisar, justificar, validar, por quê?, classificar em V ou F, mostrar, explicar, corrigir erros, escrever.

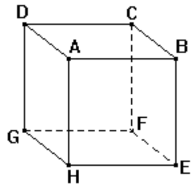
Três deles foram classificados como tarefa de aprendizagem da escrita e um como tarefa para dar sentido a uma frase e também como tarefa para utilização das palavras de ligação, conforme mostram as tabelas:

Geometria Espacial – Paralelismo e perpendicularismo				
Palavras	Página	Exercício	Freqüência	Finalidade
por quê?	210 221 223	ER4 ER7 ER8	3	Tarefa de aprendizagem da escrita-
classificar em V ou F	223	ER9	1	Tarefa para dar sentido a uma frase e tarefa para utilização das palavras de ligação.
Freqüência			4	

Resumo por tipo de tarefas (Geometria Espacial)

O que se pretende no exercício ER4 é que o aluno interprete a situação geométrica apresentada e tire conclusões sobre as questões.

ER7. No cubo ao lado:



a) classifique em ortogonais, perpendiculares ou paralelos os seguintes pares de retas:

$\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{CF}$

b) determine duas retas que contenham uma aresta do cubo e que sejam ortogonais a $\overleftrightarrow{EF}$.

Resolução:

a) $\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são perpendiculares porque são coplanares, concorrentes e formam entrre si um ângulo de 90º.

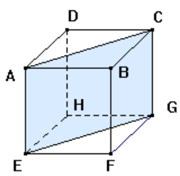
$\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são ortogonais porque são reversas e $\overleftrightarrow{AB}$, paralela a $\overleftrightarrow{CD}$, é perpendicular a $\overleftrightarrow{AH}$.

$\overleftrightarrow{AH}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ são paralelas porque são coplanares e não possuem ponto de intersecção.

b) Por exemplo: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. (IBIDEM,2005,p. 221)

A resolução apresentada em ER7 mostra aplicação de definições, apresentadas anteriormente, o que levaria o aluno a utilizar adequadamente a linguagem geométrica.

ER8. Observando a figura ao lado, responda:

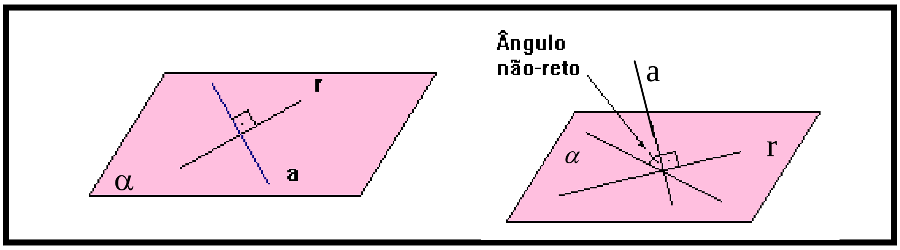


a) A reta AB é perpendicular ao plano BCG. Há outro plano perpendicular a essa reta?
b) Dê exemplos de planos perpendiculares dois a dois.
c) O plano diagonal ACE é perpendicular ao plano EFG?**Por quê?**
Resolução:
a) Sim, o plano ADE.
b) Por exemplo: ABC e BCF ou ABC e ABE.
c) Sim, porque $\overleftrightarrow{AE}$ pertence ao plano ACE e é perpendicular ao plano EFG. (IBIDEM, 2005, p.223, grifo nosso)

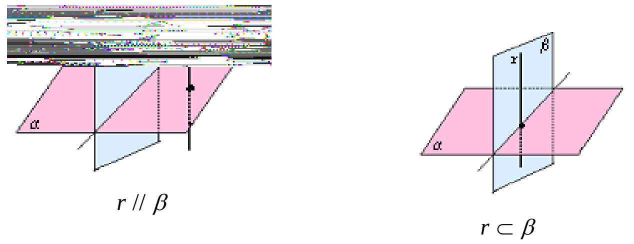
Espera-se que o aluno se familiarize com a visualização de uma figura geométrica e organize a escrita.

Eis o exercício classificado na categoria de **tarefa para dar sentido a uma frase e tarefa para utilização das palavras de ligação.**

ER9. **Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa**:
a) **Se** uma reta a forma ângulo reto com uma reta r de um plano α , **então** a é perpendicular a .
b) **Se** uma reta r é perpendicular a um plano α , **então** todo plano que contém r é perpendicular a α
c) **Se** os planos α e β são perpendiculares e uma reta r é perpendicular a α **então** r é paralela a β .(grifo nosso)
Resolução:
a) a pode ser contida em α ou a pode ser concorrente com α e, eventualmente, neste último caso, pode ser ou não perpendicular a α, como no desenho à direita.



b) Lembrando que dois planos são perpendiculares se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro, a sentença é verdadeira.
c) r pode estar ou não contida em β :



(SMOLE e DINIZ, p.223. grifo nosso)

Espera-se que o aluno perceba como utilizar em suas justificativas as definições apresentadas anteriormente. Além disso, as sentenças apresentam a forma "se...então" , as tarefas para verificar a veracidade de afirmações com esse formato foram classificados no documento: Prova e demonstração, **como tarefas para utilização de palavras de ligação**.

3.4. Exercícios no tema Geometria Espacial-paralelismo e perpendicularismo

Apresentamos o levantamento de exercícios do tema acima.

Encontramos onze exercícios cujos enunciados continham algum dos termos: analisar, justificar, validar, por quê?, classificar em V ou F, mostrar, explicar, corrigir erros, escrever. Classificamos três como tarefas para dar sentido a uma frase e também tarefas para utilização das palavras de ligação, uma como tarefas para dar sentido a uma frase e também como tarefa para aprendizagem de escrita, duas como tarefas para dar sentido a uma frase e também como tarefas para aprendizagem da escrita e ainda tarefas para utilização das palavras de ligação, uma como tarefa de iniciação a prova e quatro como tarefas para aprendizagem de escrita. Estão relacionados nas tabelas abaixo:

Geometria Espacial – paralelismo e perpendicularismo				
Palavras	Página	Exercício	Freqüência	Finalidade
Classificar em V ou F	211 220 224	13 28 30	3	Tarefas para dar sentido a uma frase e tarefa para utilização das palavras de ligação.
classificar em V ou F justificar	228	34	1	Tarefas para dar sentido a uma frase e Tarefas para aprendizagem de escrita.
classificar em V ou F justificar	220 227	26 32	2	Tarefas para dar sentido a uma frase, tarefas para aprendizagem de escrita e tarefas para utilização das palavras de ligação.
por quê	216	23	1	Tarefa de iniciação a prova
justificar	216 227 228 228	24 33 35 INVENTE	4	Tarefa para aprendizagem de escrita.
Freqüência			11	

Resumo por tipo de tarefas (Geometria Espacial)	
Tarefa para dar sentido a uma frase	6
Tarefa de aprendizagem da escrita	7
Tarefa para utilização das palavras de ligação	5
Tarefa de iniciação a prova	1
Freqüência	19

Apresentamos cada um dos exercícios mencionados acima. Eis os três exercícios que classificamos na categoria das *tarefas para dar sentido a uma frase e tarefas para utilização das palavras de ligação*:

> - **Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa**. Para as afirmações que você considerar falsas, faça um desenho em seu caderno que ilustre o **porquê**.
>
> a)Duas retas que não se interceptam são paralelas entre si.
>
> b)Duas retas que não se interceptam são reversas entre si.
>
> c)Duas retas que têm apenas um ponto comum são concorrentes entre si.
>
> d)Três retas, concorrentes duas a duas, são coplanares.
>
> e)**Se** três retas são coplanares, **então** elas são paralelas duas a duas ou são concorrentes duas a duas em três pontos distintos ou concorrem num mesmo ponto. (SMOLE e DINIZ, 2005, p.211, grifo nosso)

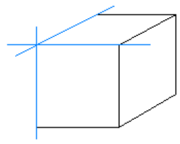
As autoras apresentam como resposta para a questão:

a)**F**, as retas podem ser reversas.

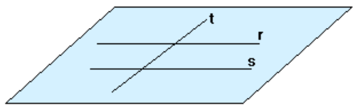
b)**F**, as retas podem ser paralelas.

c)**V**, definição de retas concorrentes.

d)**F**, as retas relativas às arestas de um cubo que passam por um mesmo vértice não são coplanares.



e)F,as retas **r**, **s** e **t** são coplanares e não satisfazem nenhuma das condições.



(IBIDEM, 2005, p.462, grifo das autoras)

- **Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa**:

a)**Se** as retas **r** e **s** são perpendiculares a uma reta **t**, **então r** e **s** são paralelas entre si.

b)**Se** as retas **r, s** e **t** são coplanares com **r** e **s** perpendiculares a **t**, **então r** e **s** são paralelas entre si.

c)**Se** duas retas formam ângulo reto, **então** elas são perpendiculares entre si.

d)**Se** as retas distintas **r** e **s** são paralelas entre si e a reta **t** é perpendicular a **r** , **então** t e **s** são perpendiculares ou ortogonais entre si. (SMOLE e DINIZ, 2005, p.224, grifo nosso)

A partir de reflexão sobre cada uma das frases espera-se que o aluno responda falso para a questão **a** e verdadeiro para **b, c** e **d**.

- (Puccamp-SP) Considere as afirmações abaixo:

I.Duas retas distintas determinam um plano.

II.**Se** duas retas distintas são paralelas a um plano, **então** elas são paralelas entre si.

III.**Se** dois planos são paralelos, **então** toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.

É correto afirmar que:
a)apenas II é verdadeira.

b)apenas III é verdadeira.

c)apenas I e II são verdadeiras.

d)apenas I e III são verdadeiras.

e)I, II e III são verdadeiras.(IBIDEM, 2005, p.220, grifo nosso)

A partir de reflexão sobre argumentos usados nas afirmações espera-se que o aluno interprete corretamente cada uma das frases quanto a sua veracidade e responda **b**.

As atividades levarão o aluno a utilizar material concreto para representação e compreensão ou a procurar representar a situação. Ao classificar frases quanto à sua veracidade, o aluno se inicia no vocabulário preciso da matemática, as frases que contêm as palavras “se... então” serão úteis para dar domínio a essa locução que é, muito utilizada em estrutura de textos de demonstração.

Eis o exercício classificado na categoria *de* **tarefa para dar sentido a uma frase e tarefa para aprendizagem de escrita**.

- **Analisando** as afirmações abaixo. Alberto disse que apenas a frase b era verdadeira. Você concorda com ele? **Por quê**?

a) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles que for perpendicular à intersecção será perpendicular ao outro.

b) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.

c) Dados um plano α e uma reta **r**, existe um plano β que contêm **r** e é perpendicular a α .(SMOLE e DINIZ, 2005, p.228, grifo nosso)

A resposta apresentada para a questão foi “Não. A alternativa **b** é a única falsa.” (IBIDEM, 2005, p.463)

Espera-se que o aluno analise a veracidade de cada situação e apresente argumentos para concluir que a questão b é falsa.

Abaixo, relacionamos os exercícios classificados na categoria das **tarefas para dar sentido a uma frase, tarefas para aprendizagem de escrita e tarefas para utilização das palavras de ligação**.

- **Identifique as afirmações verdadeiras**:

a)Se dois planos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.

b)Se dois planos são paralelos, qualquer reta que intercepta um deles intercepta o outro.

c)Se dois planos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.

d)Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.

e)Uma reta **a** não está contida num plano α e é tal que a// α . Então, existe uma reta **b**, contida em α , tal que b//a.

f)**Se** um plano intercepta dois planos paralelos, **então** as intersecções são retas paralelas.

g)**Se** dois planos são paralelos, **então** toda reta que é paralela a um deles é paralela ou está contida no outro.

h)Por um ponto P fora de um plano α , podemos passar um único plano β tal que $\alpha // \beta$.

i)Se uma reta é paralela a cada um de dois planos secantes, então **r** é paralela à reta-intersecção dos planos.

j)Se dois planos são paralelos, uma reta de um deles pode ser reversa a uma reta do outro.

l)Os segmentos de retas paralelas compreendidos entre planos paralelos são congruentes (têm a mesma medida).

m)**Se** uma reta é paralela a dois planos, **então** esses planos são paralelos.

n)Se dois planos são paralelos, toda reta paralela a um deles é paralela ao outro.

o)Se duas retas são paralelas e cada uma dela pertence a um plano, então esses planos são paralelos.
Faça um desenho ou elabore uma **justificativa para explicar as sentenças que você considerou falsas.** (SMOLE e DINIZ, 2005, p. 220, grifo nosso)

Espera-se que o aluno apresente como respostas verdadeiras os itens: **b**, **c**, **e**, **f**, **g**, **h**, **i**, **j**, **l**.

- **Quais das afirmações abaixo são falsas? Por quê?**

a) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são coplanares.

b) Por um ponto passa uma única reta perpendicular a um plano dado.

c) Se uma reta está contida em um plano, toda perpendicular a ela será perpendicular ao plano.

d) **Se** dois planos distintos α e β são paralelos, **então** toda reta **r** perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.

e) Por um ponto passa um único plano perpendicular a uma reta dada.

f) Se uma reta é perpendicular a um plano, ela é perpendicular a todas as retas desse plano.

g) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.

h) Duas retas reversas têm uma única perpendicular comum.

i) Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.(IBIDEM, 2005, p.227,grifo nosso)

Espera-se que o aluno apresente como respostas falsas os itens: **c**, **f**, **i.**

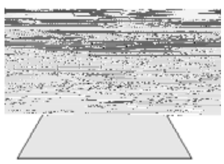
O que se pretende nessas atividades é que o aluno compreenda o sentido preciso da frase. Espera-se que o aluno justifique as sentenças falsas utilizando argumentos que envolvam as definições apresentadas por Smole e Diniz (2005). A utilização das palavras de ligação "Se... então" reforçam o uso de expressões específicas de um texto de demonstração.

Eis o exercício classificado na categoria de **tarefa de iniciação a prova.**

- Sabe-se que a reta que contém os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado.

Um plano passa pelos pontos médios de dois lados de um triângulo. Que posição tem esse plano em relação ao outro lado? **Por quê?** (2005, p.216, grifo nosso)

As autoras apresentam como resposta a seguinte explicação:



Há duas possibilidades:

- Se o plano que passa pelos pontos médios é coincidente com o plano do triângulo, então o 3º lado do triângulo pertence ao plano.
- Se o plano que passa pelos pontos médios é distinto do plano do triângulo, então, como a reta que passa pelos pontos médios é paralela ao 3º lado, a reta e o 3º lado não têm ponto em comum e os vértices do triângulo não estão nesse plano, pois estão no plano do triângulo. Logo, o 3º lado é paralelo ao plano por não ter ponto em comum com ele.

Podemos, então, concluir que o plano contém o 3º lado ou é paralelo a ele. (SMOLE e DINIZ, 2005, p.58)

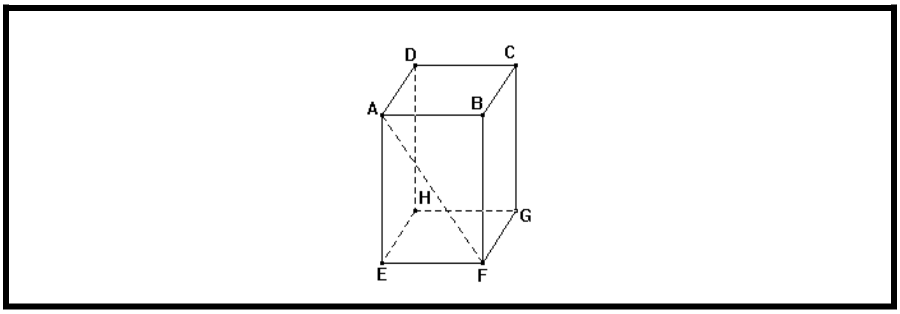
A atividade incita o aluno a buscar uma prova daquilo que ele constata, buscando encontrar argumentos, formulando e reformulando conjecturas utilizando as verdadeiras e descartando as falsas.

Eis os exercícios classificados na categoria de *tarefas para aprendizagem de escrita.*

> - ABCD é um retângulo. Pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ passam dois planos que se interceptam segundo uma reta **r** distinta de $\overleftrightarrow{AB}$ e de $\overleftrightarrow{CD}$. Qual é a posição dessa reta em relação aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$? **Justifique** sua resposta. (SMOLE e DINIZ, 2005, p.216, grifo nosso)

A resposta apresentada pelas autoras é que a reta é paralela.

> - A figura seguinte é um paralelepípedo retângulo:

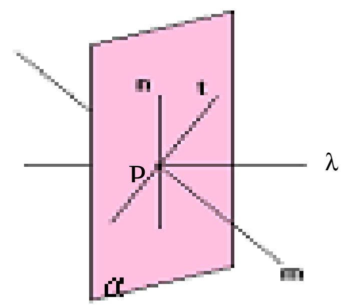


> a) Indique duas retas que sejam perpendiculares ao plano EFG, que é a base inferior do paralelepípedo.
>
> b) A reta AB é perpendicular ao plano determinado por BCG. **Justificando a resposta,** indique outro plano perpendicular à reta AB.
>
> c) A reta AF é perpendicular à reta FG? **Justifique sua resposta.**
>
> d) Invente mais duas perguntas a partir da figura e responda-as.(IBIDEM, 2005, p.227,grifo nosso)

Smole e Diniz (2005) apresentam como resposta:

> a) $\overleftrightarrow{AE}$ *e* $\overleftrightarrow{BF}$ (Há outras respostas)
>
> b) ADH, pois $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AE}$.
>
> c) Sim, teorema das três perpendiculares ou ADGF é um retângulo. (p.463)

- Na figura seguinte, as relas λ e **m** interceptam o plano α no ponto **P**. As retas **n** e **t** estão contidas no plano: (grifo das autoras)



Responda, **justificando** cada resposta: (grifo nosso)

a)Se $\lambda \perp$ n, podemos dizer que $\lambda \perp \alpha$?

b)Se $\lambda \perp \alpha$, podemos dizer que $\lambda \perp$ t?

c)As retas **n** e **t** podem ambas ser perpendiculares a λ?

d)Se **m** não é perpendicular a α , pode ser perpendicular a **t**?

e)Se **m** não é perpendicular a α , que nome recebe a relação entre eles? (SMOLE e DINIZ, 2005, p.228, grifo das autoras)

As respostas apresentadas por Smole e Diniz (2005) foram:

a)Sim, pois $n \subset \alpha$.
b)Sim, pois $P \in l \;\; e \;\; P \in t$
c)Sim, pois $P \in l, P \in t \; e \; P \in n$
d)Não, $m \cap t = P,$ então m e l deveriam formar um ângulo reto e $m \subset \alpha$.
e)Concorrente.” (IBIDEM, 2005, p.463)

- Seção Invente você

Invente um problema como o anterior para a figura: (IBIDEM, 2005, p.228)

As atividades foram classificadas como tarefas de aprendizagem de escrita pois, espera-se que o aluno produza textos e exponha suas idéias com clareza, utilizando a escrita geométrica.

3.5. O estudo da Geometria Analítica

As novas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCPEM-2006), citam a origem da geometria analítica, introduzida por Descartes no século XVII, como "a criação de um sistema de coordenadas que identifica um ponto P do plano com um par de números reais (x, y)." (OCPEM, 2006, p.76). Partem dessa idéia para sugerir a articulação entre a geometria e a álgebra, trabalho esse que a geometria analítica permite, para isso caracterizam a geometria analítica como:

> a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra); b) o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria)." (OCPEM, 2006, p.77)

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCPEM-2006). destacam a importância de trabalhar o significado de uma equação e que estas devem ser deduzidas e não simplesmente apresentadas ao aluno, principalmente no sentido geométrico de seus parâmetros. A memorização de fórmulas é substituída pelo conhecimento básico da geometria analítica. As autoras acrescentam que "as relações entre os coeficientes de pares de retas paralelas ou coeficientes de pares de retas perpendiculares devem ser construídas pelos alunos." (p.77)

O texto não recomenda o uso de determinantes para o estudo de paralelismo e perpendicularismo considerando-o custoso e geralmente apresentado sem demonstração.

3.6. Geometria Analítica - paralelismo e perpendicularismo

Provas

As autoras iniciam o estudo analítico da reta apresentando as provas formais dos enunciados abaixo:

A cada reta **r** do plano cartesiano associamos uma equação da forma $ax + bx + c = 0$, onde **a**, **b** e **c** são números reais, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x,y) são as coordenadas de um ponto qualquer de **r.**

A toda equação da forma ax + by + c = 0, com **a**, **b** e **c** reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, corresponde uma única reta **r** do plano cartesiano, cujos pontos têm coordenadas satisfazendo a equação.
A equação $ax + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, é denominada equação geral da reta **r**."(IBIDEM, 2005, p. 51-52, grifo das autoras)

Para isso, utilizam elementos da teoria de sistemas lineares.

3.6.1. Posições relativas entre duas retas - paralelismo

Smole e Diniz (2005) apresentam as retas $r : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, observando:

As coordenadas dos pontos de **r** e **s** satisfazem as equações, respectivamente, de **r** e **s**; essas equações formam o sistema de equações simultâneas:

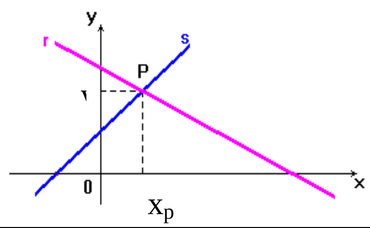
$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

(SMOLE e DINIZ, 2005, p.56)

Elas apresentam as três possibilidades de posições entre duas retas, que reproduziremos conforme o texto:

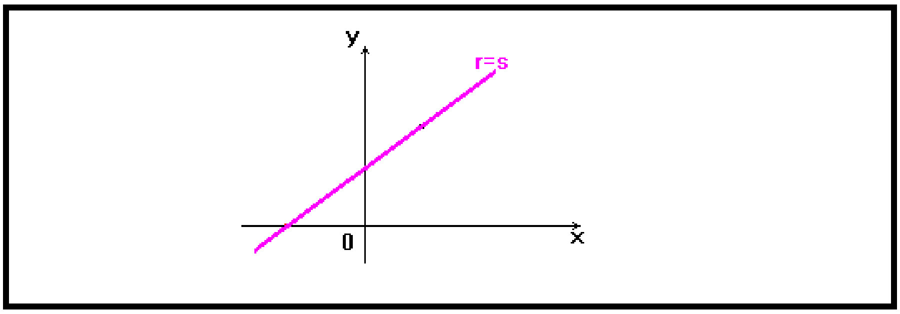
1º) **r** e **s** são **concorrentes entre si**
Existe um único ponto P(x_p , y_p) intersecção de r e s; logo, pela regra de Cramer, o sistema (S) é **possível** e **determinado** e (x_p , y_p) é a solução de (S).

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



2º) **r** e **s** são **coincidentes**
Todos os pontos de r estão em s e vice-versa; logo, (S) é **possível** e **indeterminado:**

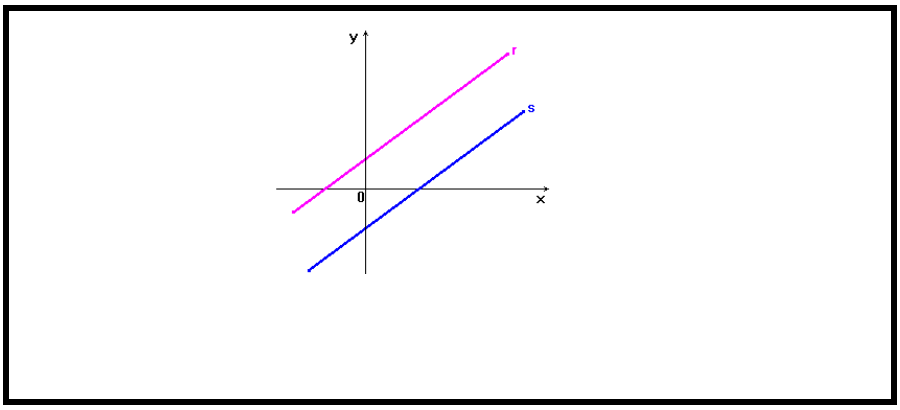
$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



Além disso, as equações de r e s devem ser equivalentes, pois correspondem aos mesmos pontos; daí $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

3º) **r** e **s** são **paralelas**
Não há pontos comuns a **r** e **s**; logo, (S) é **impossível**:

$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



Nesse caso, as equações de r e s não podem ser equivalentes, porque correspondem a conjuntos de pontos distintos; daí,
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.(SMOLE e DINIZ, 2005, p.56-57)

Classificamos essas provas apresentadas como **provas intelectuais,** segundo Balacheff (apud Gravina, 2001). Essas provas são justificadas por Smole e Diniz (2005) utilizando "uma única idéia e suas conseqüências", mencionadas na seção "Flash Matemático" , que reproduzimos abaixo:

Vimos na Unidade 2 que a área de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é igual à metade do valor do módulo do determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

A partir daí foram extraídas duas conseqüências.

A primeira delas: se **A**, **B**, **C** estão alinhados, a figura formada unindo-se os três pontos por segmentos tem área nula e, reciprocamente, se **D=0**, não formam um triângulo e só podem estar alinhados.

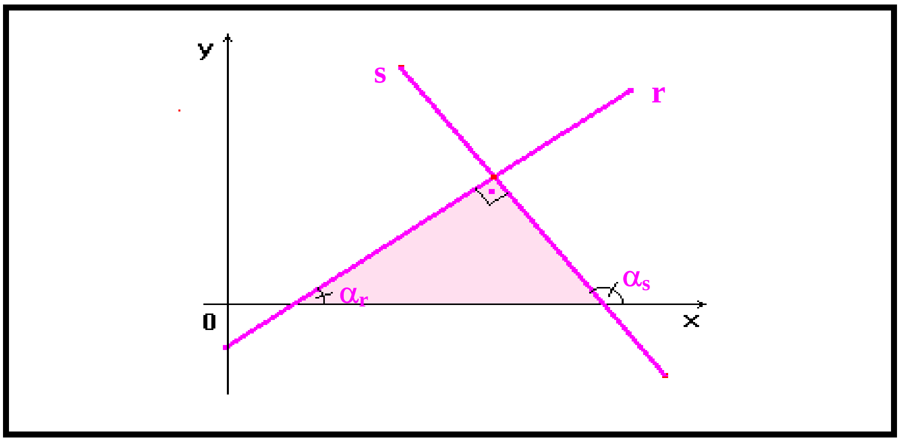
A segunda conseqüência é a dedução da equação de uma reta, conhecidos dois de seus pontos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Porque, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da reta , ele deve estar alinhado com **A** e **B**, e teremos determinantes **D** nulo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_{|B} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(IBIDEM, 2005, p.54)

3.6.2. Posições relativas entre duas retas - perpendicularismo

Smole e Diniz (2005) utilizam argumentos geométricos, que reproduzimos, para provar a condição de perpendicularismo de duas retas.



Sejam as retas **r** e **s**, não-paralelas a nenhum dos eixos coordenados, de coeficientes angulares $m_r = tg\alpha_r$ e $m_s = tg\alpha_s$.

Se **r** e **s** são perpendiculares entre si, então, no triângulo assinalado, temos:

$$\alpha_S = \frac{\pi}{2} + \alpha_r \Rightarrow tg\alpha_S = tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_r\right)$$

Mas

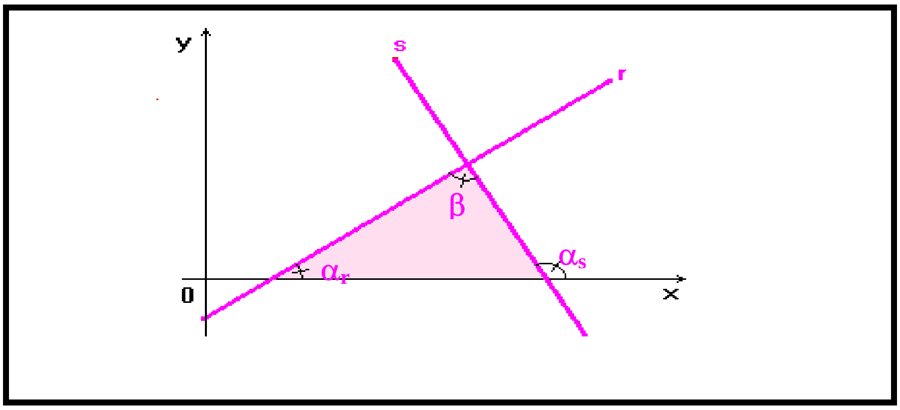
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_r\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_r\right)=-\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_r\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_r\right)}=-\frac{\cos\alpha_r}{\operatorname{sen}\alpha_r}$$

$$=\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\alpha_r}{\cos\alpha_r}}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_r}.$$

Logo, $\operatorname{tg}\alpha_s=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_r}\Rightarrow m_s=-\frac{1}{m_r}\Rightarrow m_r.m_s=-1$

Portanto, $r\perp s\Rightarrow m_r\cdot m_s=-1$ (1)

Analisemos a recíproca, isto é, se $m_r\cdot m_s=-1$, vamos ver o que ocorre com o ângulo formado por **r** e **s**.



Sendo β um dos ângulos formados por r e por s, temos:

$\alpha_s=\alpha_r+\beta$ (A)

De $m_r\cdot m_s=-1$, vem:

$$m_s=\frac{1}{m_r}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_r=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_r}$$

Repetindo os cálculos anteriores:

$$\operatorname{tg}\alpha_s=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_r}=-\frac{\cos\alpha_r}{\operatorname{sen}\alpha_r}=-\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_r\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_r\right)}=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_r\right)=\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_r\right)$$

Como $\frac{\pi}{2}<\alpha_s<\pi$ e $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\alpha_r<\pi$, vem: $\alpha_s=\frac{\pi}{2}+\alpha_r$ (B)

De (A) e (B), vem $\beta=\frac{\pi}{2}$.

Portanto, $m_r\cdot m_s=-1\Rightarrow r\perp s$ (2)

De (1) e (2) podemos escrever:

$r\perp s\Leftrightarrow m_r\cdot m_s=-1$ (IBIDEM, 2005, p.69-70)

Trata-se de uma **prova intelectual** segundo Balacheff (apud Gravina, 2001), baseada nos conhecimentos da geometria.

Smole e Diniz (2005) fizeram um estudo de paralelismo também para planos no caso de geometria de posição, mas não abordam esse tema na geometria analítica.

3.7. .Exercícios no tema Geometria Analítica paralelismo e perpendicularismo

Não encontramos exercícios cujos enunciados contivessem algum dos termos: analisar, justificar, validar, por quê?, classificar em V ou F, mostrar, explicar, corrigir erros, escrever.

3.8. Planilhas de provas e exercícios apresentadas na coleção referentes à Geometria

Abaixo apresentamos planilha discriminativa de provas apresentadas neste capítulo, segundo as idéias de Balacheff (apud Gravina, 2001):

Provas apresentadas no texto de Álgebra				
Descrição	Pg.	Livro	Tipologia	Tema
Teorema 1: Se duas retas se interceptam, sua intersecção é um único ponto.	201	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial
Teorema 2: Se uma reta r intercepta um plano α e não está contida nele, a intersecção é um único ponto.	201	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial
Teorema 3: Dada uma reta s e um ponto P fora dela, existe um único plano que contém o ponto e a reta.	201	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial

Provas apresentadas no texto de Álgebra				
Descrição	Pg.	Livro	Tipologia	Tema
Teorema 1:Quando dois planos são paralelos, qualquer reta contida em um deles é paralela ao outro	217	2	Prova Pragmática	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema 2: Quando uma reta é paralela a um plano, existe pelo menos uma reta desse plano à qual a reta dada é paralela.	218	2	Prova Pragmática	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema 3: Quando uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta do plano, ela é paralela ao plano.	218	2	Prova Pragmática	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema 4:Se um plano intercepta dois outros planos paralelos, essa intersecção dá origem a duas retas paralelas.	219	2	Prova Pragmática	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema 5: Quando um plano contém duas retas concorrentes, paralelas a outro plano, então os planos em questão são paralelos.	219	2	Prova Pragmática	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema : Se uma reta r é perpendicular a duas retas distintas de um plano α , que passam por $r \cap \alpha$, então r é perpendicular a α .	222	2	Prova Pragmática	Geometria Espacial Perpendicularismo
Teorema 1: Por um ponto de uma reta existe um e somente um plano perpendicular a essa reta.	224	2	Prova Pragmática	Geometria Espacial Perpendicularismo
Teorema 2: Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer reta paralela a essa reta também é perpendicular ao plano.	225	2	Prova Pragmática	Geometria Espacial Perpendicularismo

Provas apresentadas no texto de Álgebra				
Descrição	Pg.	Livro	Tipologia	Tema
Teorema 3: Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer plano paralelo ao primeiro é perpendicular a essa reta.	225	2	Prova Pragmática	Geometria Espacial Perpendicularismo
Teorema 4: Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P; uma reta b está contida em α e não passa por P; uma reta a está contida em α, passa por P e é perpendicular a b no ponto Y; e X é um ponto de r; então a reta XY é perpendicular à reta b.	226	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Perpendicularismo

Teorema 5: .8092 0 12 151.08493 -15.1 50 0 12 512.00301P4 0 12 (a)T(al)Tj12 0 0 12 64 m(

Apresentamos também a planilha discriminativa de provas demonstradas e apresentadas como sugestão no manual do professor .

Provas apresentadas no manual do professor				
Descrição	Pg.	Livro	Tipologia	Tema
Teorema: Se três planos são dois a dois secantes segundo três retas distintas, então essas retas são concorrentes num só ponto ou são paralelas duas a duas	36	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema: Se um plano intercepta dois outros planos paralelos, essa intersecção dá origem a duas retas paralelas	37	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema: Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a uma reta desse plano.	38	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema: Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta desse plano, então ela é paralela a esse plano.	39	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema: Se um plano α é determinado por duas retas concorrentes, ambas paralelas a um plano β, então α e β são paralelos.	39	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Paralelismo
Teorema: Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.	40	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Perpendicularismo
Teorema: Se uma reta forma ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a esse plano.	41	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Perpendicularismo

Provas apresentadas no manual do professor				
Descrição	Pg.	Livro	Tipologia	Tema
Teorema das três perpendiculares: Se uma reta **r** é perpendicular a um plano α em **P**, **a** é uma reta qualquer de α que passa por **P**, **b** é uma reta de α perpendicular a **a** em **Y**, Y $\neq$ P, e **X** é um ponto qualquer de **r**, então $\overleftrightarrow{XY}$ é perpendicular a **b**. (grifo das autoras)	42	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Perpendicularismo
Teorema: Se dois planos são perpendiculares e uma reta de um deles é perpendicular a intersecção desses planos, então essa reta é perpendicular ao outro plano.	42	2	Prova Intelectual	Geometria Espacial Perpendicularismo

Os exercícios que encontramos relativos à Geometria segundo a classificação de tarefas adotadas pelo Grupo Nacional de Pesquisa em Didática da Matemática dos IREMs de Grenoble e Rennes (França), também foram discriminadas em planilhas conforme segue:

TAREFAS PARA DAR SENTIDO A UMA FRASE					
Palavras	Página	Exercício	Livro	Tema	Seção
V ou F	223 211 220 224 205 205 206	9 13 28 30 2 1 4	2 2 2 2 2 2 2	Geometria Espacial-Paralelismo e Perpendicularismo	Exercícios Resolvidos Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Exercício Resolvido Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios
V ou F Justifique	220 227 228	26 32 34	2 2 2	Geometria Espacial-Paralelismo e Perpendicularismo	Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios

TAREFAS DE APRENDIZAGEM DA ESCRITA					
Palavras	Página	Exercício	Livro	Tema	Seção
Por quê?	210 221 223 216 228 206	4 7 8 23 34 2	2 2 2 2 2 2	Geometria Espacial- Paralelismo e Perpendicularismo GE - Outros	Exercícios Resolvidos Exercícios Resolvidos Exercícios Resolvidos Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios
V ou F Justifique	220 227	26 32	2 2	Geometria Espacial- Paralelismo e Perpendicularismo	Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios
Justifique	216 227 228 228	24 33 35 5	2 2 2 2	Geometria Espacial- Paralelismo e Perpendicularismo	Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Problemas e Exercícios Invente Você
Indique outro significado	211	10	2	Geometria Espacial- Paralelismo e Perpendicularismo	Problemas e Exercícios
Analise	58 59	3 13	3 3	Geometria Analítica- Paralelismo e Perpendicularismo - Outros	Exercícios Resolvidos Problemas e Exercícios

TAREFA DE INICIAÇÃO A PROVA					
Palavras	Página	Exercício	Livro	Tema	Seção
Prove	204	1	2	Geometria Espacial- Outros	Exercício Resolvido

TAREFA PARA UTILIZAÇÃO DAS PALAVRAS DE LIGAÇÃO					
Palavras	Página	Exercício	Livro	Tema	Seção
V ou F	216	23	2	Geometria Espacial-Paralelismo e Perpen	

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

"*Argumentação e Prova no Ensino Médio: análise de uma coleção didática"* insere-se no conjunto dos objetivos a serem alcançados pelo *"Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar"* (AProvaME), que se baseia no conceito de que a Prova tem um papel central na Matemática e visa contribuir para esse Projeto com a análise da coleção didática "Matemática – Ensino Médio".

Encadeamos esta pesquisa, que tem caráter documental, de forma descritiva por meio de análise e interpretação, tendo por objetivo obter informações sobre o modo de como são tratadas pelas autoras as questões da argumentação e da prova na Coleção.

Utilizamos os resultados dos trabalhos desenvolvidos por Balacheff (apud Gravina, 2001), para análise de provas apresentadas no tratamento expositivo. Os resultados dos trabalhos desenvolvidos pelo Grupo Nacional de Pesquisa em Didática da Matemática dos IREMs de Grenoble e Rennes (França), embasaram a análise de exercícios.

Os temas analisados quanto à argumentação e prova em Álgebra são: Conjuntos Numéricos, Funções Afins, Funções Quadráticas, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.

Obtivemos da análise desses temas os seguintes resultados:

Nos Conjuntos Numéricos, verificamos que a única prova apresentov

telectual, s egundo a

classificação inspirada em Balacheff (apud Gravina, 2001).

Porém a análise dos exercícios nesse tema apontou tarefas com os seguintes objetivos:

- Tarefas para aprendizagem da escrita, com objetivo de favorecer esta escrita em textos de Matemática;

- Tarefa de iniciação de prova, cuja atividade leva a encontrar argumentos de várias naturezas a favor ou contra uma conjectura;

- Tarefa para dar sentido a uma frase, onde a atividade é destinada a levar à compreensão do sentido de uma frase;

Por vezes, um mesmo exercício foi classificado em mais de uma dessas categorias. Essa observação é válida para exercícios em vários dos temas examinados.

Já em Funções Afins, verificamos o uso tanto de prova pragmática quanto de prova intelectual, segundo a classificação para análise de prova de Balacheff (apud Gravina, 2001).

Já a análise dos exercícios desse tema, revelou os seguintes objetivos:

- Tarefa para aprendizagem de escrita;

- Tarefa para encontrar encadeamento dedutivo

- Tarefa para dar sentido a uma frase.

Em Funções Quadráticas, as provas apresentadas se enquadram na categoria de prova intelectual.

Quanto aos exercícios do tema funções quadráticas, obtivemos as seguintes classes:

- Tarefa para aprendizagem de escrita;

- Tarefa para dar sentido a uma frase;

- Tarefa para iniciação de prova.

Na Progressão Aritmética (P.A), e na Progressão Geométrica (P.G), as provas são identificadas como prova intelectual, segundo a classificação de Balacheff (apud Gravina, 2001).

Os exercícios de P.A. solicitam apresentação de argumentos que foram considerados como tarefas para aprendizagem da escrita. Já no tema P.G não encontramos exercícios que exigissem a argumentação.

Os temas analisados quanto a argumentação e prova em Geometria são: Geometria Espacial – Paralelismo e Perpendicularismo e Geometria Analítica - Paralelismo e Perpendicularismo.

Obtivemos da análise desses temas os seguintes resultados:

Na Geometria Espacial-Paralelismo, as provas apresentadas são pragmáticas, segundo a classificação de referências para análise de prova de Balacheff (apud Gravina, 2001).

Em Geometria Espacial-Perpendicularismo as provas apresentadas em sua grande maioria são também provas pragmáticas e há apenas uma apresentação de prova intelectual.

Cabe ressaltar que Smole e Diniz (2005) fizeram uma opção metodológica de uma abordagem mais intuitiva do que a demonstração de teoremas. No entanto, apesar das autoras afirmarem que as demonstrações dos chamados teoremas fundamentais da geometria de posição " não é um conhecimento imprescindível ao aluno do Ensino Médio" (p.32), as autoras apresentam num anexo tais demonstrações.

Na análise dos exercícios nesses temas, há tarefas classificadas como:

- Tarefas para aprendizagem da escrita;
- Tarefas de iniciação de prova;
- Tarefas para dar sentido a uma frase;
- Tarefas para utilização das palavras de ligação.

Constatamos em Geometria Analítica, que as provas apresentadas em paralelismo e perpendicularismo se caracterizam como provas intelectuais.

Entretanto, nos exercícios do tema Geometria Analítica – Paralelismo e Perpendicularismo - não encontramos exercícios que se constituíssem como tarefas que estimulassem à escrita de argumentos.

Obtivemos como resultado geral da análise da Coleção Didática em Álgebra, quanto ao uso das categorias de Balacheff (apud Gravina, 2001), que suas autoras apresentam uma abordagem pedagógica que enfatiza a prova intelectual. Já em Geometria apresentam uma abordagem pedagógica que enfatiza a prova pragmática.

Do ponto de vista dos exercícios, a análise mostrou que suas autoras apresentam uma abordagem pedagógica em que predominam as tarefas de aprendizagem de escrita tanto para Álgebra quanto para Geometria.

Observamos também que as características apresentadas nas tarefas encontradas na coleção, corroboram aspectos que julgamos relevantes ao escolher a coleção para análise, tais como: justificativas bem apresentadas; competências relacionadas ao desenvolvimento de generalizações; conjecturas que utilizam raciocínios lógicos dedutivos; oportunidades de se formular conjecturas e decidir sobre sua validade; desenvolver a habilidade de justificar, argumentar e provar em Matemática.

Portanto, concluímos que suas autoras apresentam uma abordagem pedagógica que visa introduzir o leitor na prova em Matemática.

No ponto de vista dos exercícios, no desenvolvimento do tema Álgebra e Geometria (Espacial e Analítica), a análise mostrou que suas autoras apresentam uma abordagem pedagógica que busca estimular a apresentação de argumentos válidos.

Concluímos, também, que a Coleção Didática “Matemática – Ensino Médio” constitui uma ajuda para o desenvolvimento da Educação Matemática, uma vez que busca dar ênfase e tratar com importância adequada às questões da argumentação e da prova em Matemática, estimulando a apresentação de argumentos (análise de exercícios) e a validação de propriedade Matemática (análise de provas).

Obtivemos, assim, como resultado da análise da Coleção Didática "Matemática – Ensino Médio" a comprovação de orientação voltada à argumentação e prova em Matemática, permitindo continuidade dos trabalhados a partir desta análise.

Acreditamos, ainda, que o "Projeto AProvaME" tenderá a ser um marco referencial no desenvolvimento da Educação Matemática, no que diz respeito à temática Argumentação e Prova.

Poderão, ainda ser encaminhadas pesquisas para complementação de atividades sobre Argumentação e Prova que a coleção didática analisada não contemplou, por exemplo: investigar como se dá na prática, o ensino sobre Argumentação e Prova de Matemática; avaliar as situações de aprendizagem, em termos de compreensão, sobre Argumentação e Prova no Ensino Médio de Matemática.

Finalmente, esperamos que esta pesquisa possa contribuir com os propósitos do "Projeto AProvaME". Terminamos citando *Jean Marie Barbier* ***"O projeto não é uma simples representação do futuro, mas um futuro para fazer, um futuro a construir, uma idéia a transformar em ato"*** [21]

[21] Epígrafe do livro Projecto educativo de Angelina Carvalho & Fernando Diogo . Porto: Afrontamento, 1994..

REFERÊNCIAS

BICUDO, I. *Demonstração em Matemática*. Bolema (Boletim de Educação Matemática), Rio Claro: Unesp, ano 15, n.18 Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, p.79-90, 2002.

BITTENCOURT C. M. F.. *Em Foco: História, produção e memória do livro didático.* Educação e Pesquisa revista da faculdade de educação da USP, 3(30), p.471-473, set/dez 2004.

BOYER, C.. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação / Secretaria de Educação Básica / Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natura, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília:MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica / PCN + Ciências de Natureza, Matemática e suas Tecnologias. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica / Plano Nacional do livro do Ensino Médio. *Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio - Matemática*. Brasília: MEC / SEMTEC / PNLEM , 2005.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Gradiva Publicações L., 2000.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *formação de professores: Investigação em educação matemática*. São Paulo: Autores associados. 2006.

GRAVINA, M.A. *Os Ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. Tese de Doutorado. Porto Alegre: UFRGS, 2001. 277 f.

Grupo Nacional de equipes de Pesquisa em Didática da Matemática - IREMS DE GRENOBLE E DE RENNES, França. *Prova e demonstração,* p.84-99, s/d.

HARO, J. J. O... *La probabilidad en los libros de texto*. Departamento de Didáctica de la Matemática . Universidad de Granada. Espanha:ed.Carmen Batanero y Luis Serrano.2002.

HEALY S. V.(Coord.). Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AprovaME).Ponfifícia Universidade Católica de São Paulo. Disponível em:

http://www/www.teleduc.pucsp.br/pagina_inicial/cursos_all.php?&tipo_curso=A&cod_pasta=23, consulta em 16/08/2005).

KLÜSENER, R. et.al. (org). *Ler e escrever: compromisso de todas as áreas*. Porto Alegre: UFRGS. 2006.

LEANDRO, E.J.

ANEXO I

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Adilson Longen	Editora Nova Didática LTDA	Os tópicos são, em geral, introduzidos com base em situações-problema e o desenvolvimento dos conteúdos é conduzido gradualmente e de maneira a envolver o aluno no processo. No entanto, faltam as devidas justificativas em grande parte das explanações contidas no texto. (CNLEM, 2004, p.17)	As seções Em equipe, Desafio e Pesquise propiciam o desenvolvimento das habilidades de explorar, estabelecer relações, generalizar, criticar e se expressar. No entanto, demonstrações, importantes nessa fase de ensino, são evitadas, mesmo algumas bem simples. (CNLEM, 2004, p.21)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Edwaldo Roque Bianchini / Herval Paccola	Editora Moderna LTDA.	Todo o conteúdo é, geralmente, sistematizado por meio de exemplos numéricos e, muitas vezes, com base em um único exemplo. Assim, muitas proposições *matemáticas são apresentadas sem justificativas nem discussão sobre a possibilidade* de se demonstrar o que está enunciado. A maioria dos exercícios limita-se à aplicação de regras e fórmulas vistas na parte teórica *do livro. Situações-problema são pouco presentes na coleção*. (CNLEM,2004, p.23)	O aluno tem poucas oportunidades de inferir conceitos ou procedimentos, pois stes, em geral, já são apresentados em forma sistematizada, mas é chamado a uma participação ativa na construção do seu conhecimento em quadros como: Atenção, Agora resolva e Revisão de conceitos*.* (CNLEM, 2004, p.26)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Luiz Roberto Dante	Editora Ática LTDA.	Os conteúdos são introduzidos, muitas vezes, por meio de situações-problema, e depois sistematizados. Estimula-se, portanto, o aluno a desempenhar papel ativo na construção do conhecimento. As atividades são organizadas de modo a proporcionar a construção de conceitos, procedimentos e algoritmos, com equilíbrio e de modo significativo, contemplando *momentos de ação, reflexão e de validação de resultados e processos, particularmente no volume da 1a série.* (CNLEM,2004, p.27)	As atividades favorecem o desenvolvimento dos raciocínios indutivo e dedutivo, com pouca ênfase na memorização de fórmulas prontas. No entanto, são raras as atividades que exploram cálculo mental, estimativa, formulação de problemas pelo aluno e problemas com nenhuma ou várias soluções. (CNLEM,2004, p.31)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Manoel Rodrigues Paiva	Editora Moderna LTDA.	*A linguagem empregada é, em geral, clara e objetiva e se busca o rigor matemático na exposição dos conceitos e procedimentos, objetivo quase sempre atingido. A ligação dos temas apresentados com as questões de outras áreas do conhecimento e de outras práticas sociais recebe razoável atenção na obra e é realizada, ora nos exercícios envolvendo aplicação da Matemática, ora nas seções especiais de leitura de textos.* (CNLEM,2004, p.33)	Entre as atividades propostas são pouco freqüentes as que propiciam o desenvolvimento de competências mais elaboradas, tais como conjecturar, argumentar, validar, enfrentar desafios, realizar cálculo mental e estimativas, resolver e elaborar problemas e desenvolver estratégias diferenciadas. Além disso, na coleção, não se demanda o uso de recursos tecnológicos ou de materiais concretos. (CNLEM,2004, p.37)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Maria José Couto de Vasconcelos Zampirolo / Maria Terezinha Scordamaglio / Suzana Laino Cândido	Editora do Brasil LTDA.	A valorização da intuição, da visualização e da experimentação é um ponto positivo da obra. Porém isso é feito em prejuízo do desenvolvimento de raciocínios dedutivos. A coleção se organiza em módulos autônomos, cuja seqüência pode ser modificada *pelo professor. Mas a falta de articulação entre eles leva a um tratamento fragmentado do conhecimento matemático.* (CNLEM,2004, p.39)	As atividades propostas privilegiam o desenvolvimento das competências relacionadas à exploração, ao estabelecimento de relações, à tomada de decisões, à imaginação e à criatividade, à expressão e ao registro de idéias e procedimentos. No entanto, são menos exploradas as competências relacionadas ao desenvolvimento de generalizações e conjecturas, particularmente aquelas que utilizam raciocínios lógico dedutivos. Não se valorizam situações envolvendo desafios e problemas sem solução. (CNLEM,2004, p.43)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Oscar Augusto Guelli Neto	Editora Ática LTDA.	*É característico da obra expor os conceitos e procedimentos, com alguns exemplos e problemas resolvidos, e propor exercícios de aplicação sem estimular a participação ativa do aluno na aquisição do conhecimento. O enfoque dado aos conteúdos é, essencialmente, algébrico, com ênfase na simbologia matemática, em particular, nos blocos temáticos relativos às funções e à trigonometria. Essa opção pode dificultar a aprendizagem do aluno.* (CNLEM,2004, p.45)	consiste na exposição dos conceitos e procedimentos já sistematizados, com alguns exemplos e problemas resolvidos, seguida de exercícios de aplicação da teoria apresentada. São raras as situações em que o aluno é estimulado a refletir de maneira autônoma. Fica a cargo do professor incentivá-lo a desempenhar um papel mais ativo na aquisição do conhecimento. A coleção é caracterizada pela ênfase na apresentação de regras, propriedades e algoritmos, em muitos casos, sem justificativas. (CNLEM,2004, p.48)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Kátia Cristina Stocco Smole / Maria Ignez de Sousa Vieira /	Saraiva Livreiros Editores S/A	*A exposição dos conteúdos tem origem em situações-problema e percorre estratégias variadas para chegar à sistematização. A metodologia adotada caracteriza-se por uma diversidade de enfoques e representações matemáticas, articulando conhecimentos de modo a favorecer um processo de retomada e aprofundamento.* Estimula o pensar lógico, a criatividade, a comunicação, a pesquisa e a produção de textos. Incentiva e orienta o emprego da calculadora científica nas atividades que envolvem o cálculo mental e por estimativa. (CNLEM,2004, p.51)	O aluno encontra diversas atividades que o desafiam a pensar. Por serem de boa qualidade, elas contribuem para a formulação de questões e problemas; para a criação e o emprego de estratégias de resolução; para a verificação de processos e demonstrações e de validações empíricas e matemáticas.(CNLEM,2004, p.54)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Cláudio Xavier da Silva / Benigno Barreto Filho	Editora FTD S/A	*A opção metodológica da obra é centrada na transmissão de definições, propriedades, rocedimentos e regras. Dessa forma, afasta-se de uma abordagem, com base em problemas, que estimule maior participação dos alunos. A obra caracteriza-se por uma linguagem carregada de simbologia matemática, com um enfoque essencialmente algébrico. O livro do professor, muito resumido, não oferece subsídios ao docente para trabalhar, de forma significativa, os diferentes conteúdos e a avaliação.* (CNLEM,2004, p.55)	observa-se que o aluno é pouco estimulado a explorar, a analisar situações diversas, a conjecturar, a generalizar, a usar a imaginação ou a criatividade. Estratégias para promover o desenvolvimento de tais competências também não são muito utilizadas. As atividades, em sua maioria, são exercícios de aplicação direta de fórmulas e procedimentos. Além disso, são poucos os desafios propostos na seção *Desenvolva a Criatividade*. Também, não é incentivada a discussão de diferentes estratégias de resolução de um mesmo problema. (CNLEM,2004, p.58)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Gelson Iezzi / Osvaldo Dolce / Hygino Hugueros Domingues / Roberto Périgo / David Mauro Degenszajin / Nilze Silveira de Almeida	Saraiva Livreiros Editores S/A	*A apresentação dos conteúdos já formalizados, seguidos de exemplos e exercícios é predominante na obra, o que pode levar o aluno a uma atitude passiva e pouco autônoma em relação à Matemática. No entanto, a qualidade e a diversidade das atividades propostas atenuam essa limitação.* (CNLEM,2004, p.60)	pauta-se pela apresentação dos conteúdos já sistematizados, entremeados de questões resolvidas, sem uma participação mais ativa do aluno nessa fase. O texto é impessoal e, praticamente, não há diálogo com o leitor. Contudo, a apresentação de pequenas cadeias lógicas auxilia o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. (CNLEM,2004, p.63)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Márcio Cintra Goulart	Editora Scipione LTDA.	*Os conteúdos são, em geral, apresentados de forma direta e pronta, seguidos de exercícios resolvidos, e sempre de grande quantidade de exercícios propostos. As atividades, na sua grande maioria, são de leitura e resolução de exercícios. Tal escolha metodológica não favorece uma autonomia maior do aluno na construção do conhecimento matemático.* (CNLEM,2004, p.65)	A apresentação dos conteúdos é, quase sempre, feita de forma já estruturada, seguida de exemplos e exercícios propostos. (CNLEM,2004, p.68)

Livros recomendados pelo CNLEM-2004 e informações sobre Argumentação e Prova			
Autor	Editora	Síntese avaliativa da obra	Metodologia do ensino-aprendizagem
Adilson Longen	Base Editora e Gerenciamento Pedagógico	*Os conteúdos são introduzidos por meio de uma situação-problema interna ou externa à Matemática, ou a partir de conhecimentos prévios, o que pode facilitar a atribuição de significados aos conceitos matemáticos. As demonstrações apresentadas na coleção são de fácil compreensão, embora seu número seja reduzido.* (CNLEM,2004, p.69)	verifica-se que, em geral, os conteúdos são apresentados de forma adequada. As demonstrações, embora em número reduzido, são de fácil compreensão. Em alguns momentos são sugeridos trabalhos de pesquisa. CNLEM,2004, p.72)

ANEXO II

Apresentaremos a coleção “Matemática Ensino Médio” que é composta de três livros e cada livro é dividido em partes e cada parte em unidades. Mencionaremos aqui todas as unidades detalhando apenas o conteúdo dos temas: Conjuntos numéricos, PA e PG, Funções de 1º e 2º graus, Geometria Espacial (paralelismo e perpendicularismo) e Geometria Analítica (paralelismo e perpendicularismo).

Primeira coleção:

Parte1 - Números, Estatística e Funções

Unidade 1 – Conjuntos numéricos e intervalos na reta real

1. A importância dos números;
2. Os números naturais;
3. Os números inteiros;
4. Os números racionais;
5. Os números irracionais;
6. Os números reais;
7. A reta real;
8. Notação científica;
9. Intervalos;
10. Intersecção, reunião e diferença de conjuntos.

Unidade 2 – Estatística

Unidade 3 – Relações entre grandezas: funções

Unidade 4 – Funções do 1º grau

1. Funções do 1º grau
2. Gráfico Cartesiano da função do 1º grau
3. Função identidade
4. Função crescente e função decrescente
5. Inequações do 1º grau e estudo do sinal da função do 1º grau
6. Inequação-produto e inequação-quociente

Unidade 5 – Funções do 2º grau

1. Funções do 2º grau
2. Gráfico cartesiano da função do 2º grau
3. Pontos importantes do gráfico da função do 2º grau
4. Valor máximo ou mínimo e conjunto imagem da função do 2º grau
5. Inequações do 2º grau

Unidade 6 – Seqüências, progressão aritmética e progressão geométrica

1. Seqüências
2. Lei de formação ou expressão geral
3. Termos eqüidistantes dos extremos
4. Progressão aritmética (P.A)
5. Progressão geométrica (P.G)

Unidade 7 – Função exponencial, equação exponencial e inequação exponencial

Unidade 8 – Logaritmo e função logarítmica

Unidade 9 – Módulo de um número real e função modular

Unidade 10 – Função composta e função inversa

Parte 2 - Trigonometria

Unidade 11 – Trigonometria do triângulo retângulo

Unidade 12 – Arcos de circunferência, ângulos e círculo trigonométrico

Unidade 13 – Funções trigonométricas: definição, periodicidade e gráfico

Unidade 14 – Relações trigonométricas num triângulo qualquer

Segunda coleção:

Parte1 – Estatística, Contagem e Probabilidade

Unidade 1 – Estatística

Unidade 2 - Contagem

Unidade 3 – Probabilidade

Parte 2 – Estatística, Contagem e Probabilidade

Unidade 4 –Sistemas lineares

Unidade 5 – Matrizes

Unidade 6 – Determinantes

Parte 3 – Geometria espacial

Unidade 7 – Geometria de posição

1. A Geometria
2. Ponto, reta, plano e suas representações
3. Posições relativas entre duas retas
4. Posições relativas entre dois planos

5. Posições relativas entre dois planos
6. Posições relativas entre reta e plano
7. Propriedades intuitivas: paralelismo
8. Projeções ortogonais
9. Distâncias no espaço
10. Ângulos

Unidade 8 – Sólidos geométricos: poliedros

Unidade 9 – Sólidos geométricos: corpos redondos

Unidade 10 – Geometria métrica espacial

Parte 4 – Trigonometria

Unidade 11 – Funções trigonométricas:redução ao 1º quadrante

Unidade 12 – Equações trigonométricas e inequações trigonométricas

Unidade 13 – Funções trigonométricas da soma

Unidade 14 – Funções trigonométricas inversas

Terceira coleção:

Parte1 – Matemática financeira

Unidade 1 – Noções de Matemática financeira

Parte 2 – Geometria analítica

Unidade 2 – Estudo analítico do ponto

Unidade 3 – Estudo analítico da reta

1. Geometria analítica: Álgebra e Geometria

ANEXO III

Exercícios que não foram apresentados na seção 2.3. Exercícios do tema Conjuntos Numéricos[1]**:**

Faremos a apresentação dos exercícios classificados na categoria das **tarefas para aprendizagem de escrita:**

- Alguns cálculos envolvendo números racionais são constantemente usados. Calcule mentalmente os resultados abaixo e depois confira e **analise** seus **possíveis erros**:

a) –

- Sendo $A = \{x \in \Re / -\sqrt{5} < x \leq 10\}$ e $B = \{x \in \Re \; / \; x < -\sqrt{3} \text{ ou } x \geq \sqrt{10}\}$, dê uma resolução incorreta para $A \cap B$ e $A \cup B$. Depois troque sua resolução com a de um colega. Um deve descobrir e **corrigir os erros** do outro. (SMOLE e DINIZ,2005, p.32, grifo nosso)
-

Tivemos também atividades classificadas como **tarefas para aprendizagem de escrita e tarefas de inciação a prova:**

- No apêndice ao final do livro encontra-se o jogo Scino. Junte-se a um ou dois colegas e joguem pelo menos três partidas.

Depois, discutam e **escrevam** o que vocês aprenderam com esse jogo.

(SMOLE e DINIZ,2005, p.27, grifo nosso)

SCINO

Número de participantes: 2 ou 3

Material necessário: um tabuleiro, 3 dados comuns, marcadores diferentes para cada jogador (como fichas de cores diferentes ou com sinais do tipo X, O e V) e uma folha para cada jogador registrar suas jogadas.

Regras:

- Os jogadores decidem a ordem em que cada um irá jogar.
- Na sua vez , cada jogador lança os 3 dados e usa os números que saíram para substituir cada um dos símbolos no registro abaixo:

  □ ○ X 10 ▭

Em seguida registre a sua jogada, calcule o resultado e coloca uma de suas marcas no tabuleiro, na casa cujo intervalo corresponde ao valor obtido , anotando em sua folha de cálculo a letra nela marcada. Por exemplo, se nos dados saíram os números 1, 3 e 5 o jogador poderá fazer:

$3{,}5 \times 10^1$ e marcar a letra **A**

ou $\mathbf{1{,}3 \times 10^5}$ e marcar a letra I

ou $5{,}1 \times 10^3$ e marcar a letra **F**

- O jogo prossegue dessa forma sem que uma casa do tabuleiro ocupada por um jogador possa também ser por outro. Caso todas as casas possíveis com os números tirados por um jogador já estiverem ocupadas, ele perde a vez.

- Ganha o jogo aquele que em primeiro lugar alinhar 3 de suas marcas na horizontal ou na vertical, sem nenhuma marca de seu(s) oponente(s) intercalada.

Tabuleiro

A Entre 1 e 50	B Entre 51 a 100	C Entre 101 e 500	D Entre 501 e 1000
E Entre 1001 e 5000	F Entre 500001 e 1000000	G Entre 10001 e 50000	H Entre 50000 e 100000
I Entre 100001 e 500000	J Entre 500001 e 1000000	L Entre 1000001 e 5000000	M Entre 5000001 e 10000000

(SMOLE e DINIZ,2005, p.384, grifo das autoras)

ANEXO IV

Função utilizada em exercício da seção 2.5 Exercícios do tema Função Afim.

Função do 1º grau ou afim

Toda função de $\Re$ em $\Re$ $x \to y = ax + b$ (com **a** e **b** reais e $a \neq 0$) e denominada **função do 1º grau ou função afim.**

a é o coeficiente angular de **f** e **b** é o coeficiente linear de **f**.

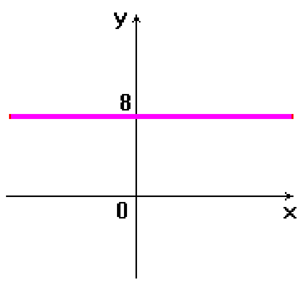
o gráfico de f é sempre uma reta que pode ser traçada a partir de dois pontos (x,y) que satisfaçam y = ax+b

Raíz de f é o valor de **x** para o qual f(x)=0, ou seja ax+b=0 e $x = -\frac{b}{a}$.

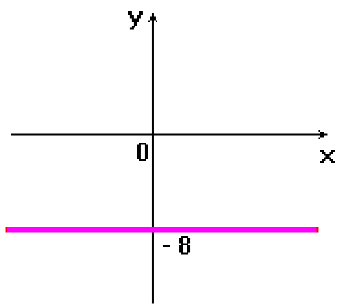
A função f(x)=b, $x \in \Re$, é chamada de **função constante** e a função $g(x) = 0, x \in \Re$, é chamada de **função nula.**

Seus gráficos também são retas.

$y = 8$



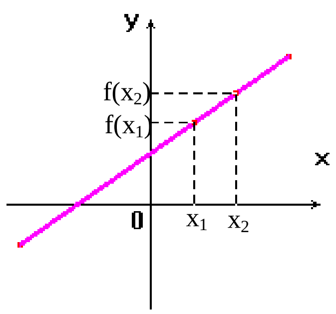
$y = -8$



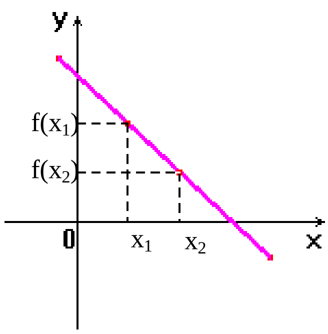
Estudo da função do 1º grau

Seja f(x) = ax + b, com **a** e **b** reais, $a \neq 0$ e $x \in \Re$, temos:

a>0



A<0



f é crescente em $\Re$, ou seja
x_1 e x_2 em $\Re$, com
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$f(x) > 0 \text{ se } x > -\frac{b}{a}$$

$$f(x) < 0 \text{ se } x < -\frac{b}{a}$$

f é decrescente em $\Re$, ou seja
x_1 e x_2 em $\Re$, com
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$f(x) > 0 \text{ se } x < -\frac{b}{a}$$

$$f(x) < 0 \text{ se } x > -\frac{b}{a}$$

(SMOLE e DINIZ, 2005, p.46 e 47)

ANEXO V

TIRAS DE PROPRIEDADES PARA FUNÇÕES

Número de participantes: 3 ou 4
Material necessário: uma cópia das tiras de propriedades e das cartas de funções. As tiras e cartas dessa cópia devem ser recortadas.

Regras:

- As cartas de funções são embaralhadas e, com as faces voltadas para baixo, dispostas sobre uma mesa ou carteira formando um monte.
- As tiras de propriedades também são embaralhadas e distribuídas em número igual por entre os jogadores. Cada um deve receber pelo menos 4 tiras. Nem todas precisam ser distribuídas.
- Para a primeira função retirada do monte, cada jogador seleciona, entre suas tiras, aquelas que correspondem a propriedades selecionadas são realmente válidas para a função em questão.
- Cada tira de propriedade corretamente escolhida representa um ponto para o jogador.
- Posteriormente, as tiras de propriedades são novamente juntadas, embaralhadas e distribuídas para os jogadores e outra função é retirada do monte. Os jogadores mais uma vez escolhem, entre suas tiras, as que apresentam propriedades de função selecionada.
- O jogo continua sucessivamente assim durante 4 ou 5 vezes, conforme combinado pelos jogadores.
- O ganhador será aquele que ao final tiver obtido o maior número de pontos.

Tiras de propriedades:

Possui uma raiz positiva.
Possui uma raiz negativa.
Não tem raízes.
É decrescente em seu domínio
Tem concavidade para baixo.
Assume um valor de mínimo.
É crescente à esquerda do vértice e decrescente à direita desse ponto.
Corta o eixo Oy abaixo do eixo Ox.
Possui duas raízes com sinais distintos.
Seu valor máximo é positivo.
Seu valor mínimo é positivo.

Possui duas raízes com o mesmo sinal.

Tem raiz única..

Seu valor máximo é negativo.

Possui uma raiz nula.

.Possui duas raízes distintas.

É crescente em seu domínio.

Tem concavidade para cima.

Assume um valor máximo.

É crescente à direita do vértice e decrescente à esquerda desse ponto.

Corta o eixo Ou acima do eixo Ox..

Cartas de fun**ções**

$y = 2x + 1$

$y = 2x - 1$

$y = 3x - \frac{1}{4}$

$y = -x^2 - 3x - 2$

$y = \frac{1}{2}x + 1$

$y = \frac{1}{2}x - 1$

$y = x^2 + 3x + 2$

$y = 2x^2 - 5x + 2$

$y = x^2 - 2x + 5$

$y = -2x + 1$

$y = -2x - 1$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x - 3}$$

$$\boxed{y = -x^2 - 3x + 4}$$

$$\boxed{y = -x^2 - 2x - 4}$$

$$\boxed{y = 4x^2 - 4x + 1}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x - 1}$$

$$\boxed{y = x^2 + 3x - 4}$$

$$\boxed{y = -2x^2 + 5x - 2}$$

$$\boxed{y = -4x^2 + 21x - 9}$$

(SMOLE e DINIZ, 2005, p.386-389)