ANDREA GOMES NAZUTO GONÇALVES

UMA SEQÜÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS VIA FRACTAIS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2007

ANDREA GOMES NAZUTO GONÇALVES

UMA SEQÜÊNCIA DE ENSINO PARA O ESTUDO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS VIA FRACTAIS

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni.***

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

DEDICATÓRIA

Ao meu pai, por tudo que fez por mim.

À minha mãe e às minhas irmãs, pelo que elas representam.

Ao meu marido Rogério, pelo seu companheirismo.

AGRADECIMENTO

A Deus, por me permitir alcançar um de meus maiores desejos.

Ao Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni, por sua orientação, sapiência, dedicação e compreensão que permearam todos os momentos da construção deste sonho.

À Profa. Dra. Janete Bolite Frant e ao Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros, por participarem da banca examinadora e por suas valiosas e enriquecedoras contribuições a este trabalho.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica, pelos seus ensinamentos.

Aos colegas de Mestrado pelos momentos recompensadores passados na busca de um aprendizado, em especial a Amarildo, Anderson e Eline, amigos de sempre.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, por ter me concedido a bolsa de estudos. Às supervisoras da Diretoria de Ensino de Mauá, Denise e Isabel, pelas informações e atenção dispensada.

Ao meu marido, por todas as horas em que foi trocado pela leitura, pela pesquisa e pela confecção destas páginas; por toda a sua colaboração e pela compreensão sem fim.

Aos meus pais por terem sempre me incentivado a estudar. Ao meu pai, que onde está, tenho certeza que continua acreditando n

A toda a minha f[illegible]ília, por entenderem os meus afastamentos em alguns momentos.

Aos meus sobrinhos, [illegible]ação menor, Eduardo, João Víctor, Pedro Henrique, Nayara, [illegible]uilherm[illegible] Helo[illegible] Natália, Letícia, e aos afilhados Mariana e Gustavo, para [illegible]e inspirar[illegible]n nos e[illegible]dos.

Às amigas Marle[illegible]e, Nicéia [illegible]Cleusa, [illegible]la ajuda que sempre dispensam a minha família.

À Lola, pela gra[illegible]ça q[illegible]tem na minha vida profissional. À Larissa, minha irmãzinha.

Aos professores Alcione Gomes Nazuto e Cícero Antônio dos Santos, pela grande colaboração co[illegible] observadores da aplicação desta seqüência de ensino.

Aos meus amigo[illegible]ne Camargo Ribeiro, em especial à amiga-irmã Simone e ao R[illegible]rios na busca do título de mestre.

Aos meus amigos [illegible]o Colég[illegible] Barão [illegible]e Mauá, em especial aos amigos Denise, Valdério, Cícer[illegible] Mirlane e [illegible]Sandra. [illegible] grande amiga Osmarina, que até hoje faz muita falta e qu[illegible]partilhava[illegible]omigo o[illegible]nho de ser mestre.

À Amiga Miss S[illegible], por s[illegible] pala[illegible] sempre positivas e pela ajuda na tradução do resumo.

A todos os meus alu[illegible], em especial aos que me ajudaram na pesquisa e na aplicação desta seqüência, por serem o moti

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é investigar o aprendizado de Progressões Geométricas via fractais e as suas influências sobre a construção do conhecimento deste assunto.

A partir deste objetivo emergem as nossas questões de pesquisa: **Como a utilização dos fractais pode ser motivadora na percepção da auto-semelhança? Como a auto-semelhança pode contribuir no processo de generalização das fórmulas da progressão geométrica para alunos do Ensino Médio?** Para isto, desenvolvemos uma seqüência de ensino, utilizando alguns elementos da metodologia de pesquisa denominada engenharia didática. A seqüência concebida é constituída por três blocos, sendo que no primeiro, trabalhamos a construção de fractais; no segundo utilizamos a Geometria Dinâmica para representá-los; e no terceiro enfocamos as generalizações.

Empregamos em nossa pesquisa os pressupostos teóricos de **Parzysz** para o ensino de geometria, no que concerne aos seus quatro níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico; as idéias de **Machado** que sugere na construção de um objeto geométrico uma articulação entre quatro processos: *percepção*, *construção física*, *representação* e *organização conceitual*; as situações de resoluções de problemas para desenvolvimento de conceitos significativos propostas por **Vergnaud**; e também a **Geometria Dinâmica** para incentivar o espírito investigativo do aluno.

A análise dos resultados obtidos na aplicação da seqüência didática mostrou que a construção, a manipulação e a observação levam à percepção da auto-semelhança, esta, por sua vez, facilita o processo de generalização dos elementos matemáticos que compõem o estudo de Progressões Geométricas. Não obstante, o número de alunos utilizado na seqüência (22 duplas) nos trouxe grandes dificuldades na aplicação das atividades, porém, refletiu um ambiente semelhante ao encontrado em sala de aula.

Palavras-Chave: Fractais, Progressões Geométricas, Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

The objective of this research is to investigate the learning of Geometric Progressions by fractals and their influences on the construction of the knowledge of this subject.

Starting from this objective our research questions emerge: **How the use of the fractals motivate can be in the perception of the solemnity-similarity? How can the solemnity-similarity contribute in the process of generalization of the formulas of the geometric progression to High School students?** So, we developed a teaching sequence, using some elements of the methodology of research denominated engineering didacticism. The conceived sequence is constituted by three blocks, and in the first, we worked the fractals construction; in the second we used the Dynamic Geometry to represent them; and in the third party we focused the generalizations.

We used in our research the theoretical presuppositions of **Parzysz** for the geometry teaching, in what it concerns at their four levels of development of the geometric thought; **Machado**'s ideas that suggest in the construction of a geometric object an articulation among four processes: perception, physical construction, representation and conceptual organization; the situations of resolutions of problems for development of significant concepts proposed by **Vergnaud**; and also the **Dynamic Geometry** to motivate the student to investigate.

The analysis of the results obtained in the application of the didactic sequence showed that the construction, the manipulation and the observation take to the perception of the solemnity-similarity this, has the aim to facilitate the process of generalization of the mathematical elements that compound the study of Geometric Progressions. In spite of, the number of students used in the sequence (22 couples) brought us great difficulties in the application of the activities, however, it reflected an atmosphere similar to the found at classroom.

Key-words: Fractals, Geometric Progressions, Dynamic Geometry.

SUMÁRIO

Capítulo 1:

PROBLEMÁTICA

1.1 Introdução

A imagem negativa que se tem da profissão de professor me fez protelar uma opção que em mim era latente: o gosto pelos números, cálculos e desafios matemáticos e o desejo de ser professora. Em março de 1993, deixando-me levar pelas m

Na busca de soluções para os problemas anteriormente apresentados, iniciei em 2000 uma especialização em Educação Matemática. O curso possibitou-me um contato com softwares matemáticos para o ensino de funções, trigonometria, geometria, etc., e, também, um conhecimento mais atualizado sobre as novas pesquisas em Matemática.

Em 2002, busquei na Graduação em Letras, uma ajuda para entender as dificuldades apresentadas pelos alunos na interpretação de textos, em especial, textos matemáticos. Gerenciei estudos sobre os caminhos percorridos na construção e desenvolvimento do raciocínio lógico na Língua Materna e na Matemática, apoiada em um livro de Nilson José Machado, intitulado *Língua Materna e Matemática: análise de uma impregnação mútua*.

Nesses anos de magistério, percebi que há muitas dificuldades para se ensinar e aprender Matemática, dentro desta realidade, passei a buscar formas de como contribuir com um ensino que leve em consideração as pesquisas da área da Educação Matemática, de forma a minimizar as dificuldades detectadas.

Nos últimos três anos, é o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) que me situa no mundo das pesquisas acadêmicas, mostrando-me quais trabalhos estão sendo desenvolvidos e o quê os pesquisadores têm trilhado no vasto campo do ensino da Matemática.

As minhas preocupações estão, agora mais do que nunca, voltadas para como o aluno aprende, porque ele aprende e como esta aprendizagem pode ser feita de modo mais efetivo.

Aliando a pesquisa que desenvolvi sobre o raciocínio lógico à idéia de que os alunos precisam experimentar a Matemática por caminhos diferentes, além dos algoritmos e dos exercícios rotineiros, procurei um conteúdo a ser trabalhado que, de modo “mágico”, permitisse explorar os conceitos matemáticos.

Paralelamente, como um dos trabalhos para a disciplina de Tópicos de Geometria, ministradas pelo Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni, tive a oportunidade de pesquisar sobre a Geometria Fractal. Desde o princípio das leituras, tive a certeza de que aquele era o elo que eu procurava para

Quadro 1 - Atividades aplicadas para justificar a pesquisa

Pergunta 1: O que é uma Progressão Geométrica?

Pergunta 2:
a) (1, 3, 9, 27, …) é uma Progressão Geométrica? Justifique a sua resposta.
b) Sabendo que 1 é o 1º termo dessa seqüência, 3 é o 2º termo, etc., qual é o milésimo termo dessa seqüência?

Pergunta 3:
$$\begin{cases} 4+2=6 \\ 4+2+1=7 \\ 4+2+1+\frac{1}{2}=\frac{15}{2} \\ 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{31}{4} \\ (...) \end{cases}.$$

Se continuarmos esse processo indefinidamente o que acontecerá com as somas? Escolha uma das alternativas abaixo e justifique-a.

a) Elas se aproximarão de algum valor.
b) Elas ultrapassarão qualquer valor fixado.

As respostas obtidas foram as seguintes:

- Com relação à **Pergunta 1**, 41% dos alunos sabiam o que era uma Progressão Geométrica, 34% deram respostas que atestam não saber o que é uma progressão geométrica e 25% não responderam ou disseram que não sabiam;
- Quando, na **Pergunta 2 – item a**, demos um exemplo de uma progressão e perguntamos se a mesma era uma Progressão Geométrica, o número de acertos foi de 46% e o de erros 37%, e 17% dos alunos não responderam ou afirmaram que não sabiam;
- Notamos que quando pedimos uma generalização do milésimo termo da progressão dada como exemplo, na **Pergunta 2 – item b,** apenas 1 pessoa acertou a questão, 27% responderam de forma imprecisa, 28% não responderam ou afirmaram não compreender o questionamento e 44% dos estudantes responderam que não sabiam;
- Com relação à última questão, verificamos que 27% dos alunos escolheram acertadamente a alternativa **a**, sendo que destes, 9% justificaram

corretamente e 18% erroneamente; 24% escolheram a alternativa **b**, portanto, erraram; 30% não sabiam a resposta e 19% não responderam ou não compreenderam a questão.

A partir desses dados fizemos a hipótese de que o ensino de Progressões Geométricas não foi nem eficaz e nem concretizado, uma vez que, questões básicas como "O que é uma Progressão Geométrica?" foram pouco acertadas, mostrando que não foram aprendidas pelos alunos.

Mediante as colocações anteriormente por nós observadas, faremos uso delas para justificar a real necessidade em uma seqüência de ensino para as Progressões Geométricas que permita ao aluno um entendimento mais sólido sobre o assunto, e que, através de descobertas e estímulos com a utilização dos fractais, feito ora por meio de material concreto, ora por via computacional, o leve a perceber e a compreender as generalizações para o termo geral, a soma de termos e a soma infinita desta seqüência que é objeto de estudo deste trabalho.

Também como forma de justificar o nosso trabalho, procedemos ao estudo de trabalhos pertinentes ao nosso tema, como uma tentativa de responder perguntas deixadas em aberto dentro desses, ou como forma de ratificar conclusões por eles elaboradas e validadas.

Dentro deste contexto, a leitura da dissertação de mestrado de Seiji Isotani, da Universidade de São Paulo, intitulada ***Desenvolvimento de ferramentas no iGeom: utilizando a geometria dinâmica no ensino presencial e a distância***, apresentado em abril de 2005, foi uma das que mais nos interessou. O trabalho citado contribui para o desenvolvimento de novos recursos didáticos no programa iGeom, recursos estes que facilitam sua utilização efetiva em sala de aula e em ambientes de educação à distância, tendo como foco o aperfeiçoamento do iGeom de uma maneira geral e, em particular, a implementação de recursos de comunicação, publicação, autoria e validação automática de exercícios. Este trabalho permitiu uma visão clara da Geometria Dinâmica, bem como, nos mostrou a facilidade da construção de fractais com o uso do iGeom, o que nos levou a ratificar a opção pelo uso deste software na seqüência didática.

O artigo ***Algoritmos e Fractais com programas de GD*** de Leônidas de Oliveira Brandão, do Departamento de Ciência da Computação, IME-USP, publicado na Revista do Professor de Matemática, número 49, em que apresenta exemplos de atividades para estudos de geometria, algoritmos e *progressões geométricas* a partir de fractais, também foi bastante utilizado como base para concepção da nossa seqüência. As atividades visam mostrar como o computador pode catalisar o processo de aprendizagem, principalmente num ensino que privilegie o pensar, construir, testar. Uma parte das investigações sugeridas pelo artigo foram utilizadas por nós na confecção da seqüência de ensino, com algumas modificações, mais precisamente nas atividades do *Bloco 3*.

1.2 Descrição do trabalho

Este trabalho constituir-se-á de quatro capítulos descritos a seguir:

No Capítulo 1, apresentamos o tema desta pesquisa, sua justificativa e relevância, e o referencial teórico através de concepções de *Parsysz*, que classifica o ensino de Geometria em quatro níveis de aprendizagem; de *Machado,* que traz a representação do conhecimento substituindo *"a imagem da cadeia pela idéia de rede de significações, com seus feixes de relações causais ou não causais, em permanentes transformações"* (Machado, 2005); de *Vergnaud*, que toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem; e da *Geometria Dinâmica*, que é a implementação do computador à geometria de régua e compasso, sendo representada pelos softwares Cabri-Géomètre e iGeom. Em seguida formulamos nossa questão de pesquisa e os meios utilizados para respondê-la.

No Capítulo 2, deixamos reservado o trato aos Fractais e às Progressões Geométricas, com o objetivo de subsidiar a concepção das atividades do próximo capítulo.

No Capítulo 3, discorremos sobre a concepção das atividades, narrando minuciosamente as escolhas para a confecção da seqüência de atividades, assim como, descrevemos o porquê de cada parte da mesma, a quem chamamos de *Bloco*. Também trazemos a análise *a priori*, mostrando um estudo detalhado de cada uma das atividades, suas respostas, suas estratégias de resolução e as prováveis interferências da professora-pesquisadora em relação aos problemas que surgirão.

Dedicamos o Capítulo 4 à descrição de todo o processo de aplicação da seqüência, e à análise *a posteriori*, fazendo sempre uma comparação com a análise *a priori*.

Finalmente, o Capítulo 5 é dedicado à apresentação dos resultados da pesquisa.

1.3 Fundamentação teórica

1.3.1 Parzysz

O desenvolvimento do pensamento geométrico apresenta-se essencial para a construção desta pesquisa, assim sendo, incorporaremos a ele os pensamentos de Bernard Parzysz, expostos no artigo *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique em PE1* (2001) (que nós traduzimos como *Articulação entre percepção e dedução num ambiente geométrico de professores da escola elementar*). No artigo, Parzysz discorre sobre a hipótese de que os professores da França das séries iniciais do Ensino Fundamental não distinguem claramente validações perceptivas de validações teóricas. O modelo para o quadro teórico apresentado por Parzysz neste artigo situa o desenvolvimento do pensamento geométrico em quatro níveis, nomeados de G_0, G_1, G_2 e G_3, como descritos a seguir:

- **Nível G_0** – Geometria concreta, onde as figuras (modelos, digramas, imagens de computador) são identificadas unicamente por seu aspecto geral. Os objetos são concretos e as validações perceptivas.
- **Nível G_1** – Geometria espaço-gráfica, que é a geometria das representações figurais e gráficas. Neste nível o indivíduo começa a discernir as propriedades das figuras, mas ainda sem poder explicá-las. As técnicas utilizadas para a resolução de exercícios podem ser relacionadas à utilização de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor. É possível representar situações reais com objetos da geometria, relacionados aos elementos físicos, mas a validação ainda é feita de forma perceptiva.
- **Nível G_2** – Geometria proto-axiomática, onde as demonstrações dos teoremas são feitas a partir de premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo. Por exemplo, para se provar que a soma das medidas dos três ângulos internos de um triângulo é igual a 180º utiliz

matemática e a língua materna também foram alvo de investigação, sempre objetivando a concepção das idéias.

Paulatinamente seus trabalhos rumaram para questões epistemológicas mais amplas, perpassando os terrenos da matemática, da língua e de praticamente todas as disciplinas. Caminhou, então, para a caracterização das concepções de conhecimento e inteligência, para o reconhecimento de imagens metafóricas hegemônicas e na representação de tais concepções, bem como a associação entre tais imagens e as correspondentes ações docentes, como a avaliação e o planejamento.

Com relação à inteligência, Machado descarta a visão ocidental de grandeza a ser medida, quantificada quase sempre pelos testes de QI, ou do conhecimento como um encadeamento de relações causais, onde idéias como as de pré-requisitos ocupam uma posição de destaque.

Apresenta a idéia de inteligência ligada às competências e o conhecimento como uma rede de significações, formadas por feixes de relações em permanente transformação.

Em *Epistemologia e Didática*, os estudos de Machado sugerem uma mudança no verbo relativo ao conhecimento, deixando de ser *possuir* para ser *apropriar*, *adquirir* ou *construir*. Esta permuta de significados deve-se muito à Descartes com sua idéia de cadeia de conhecimento, onde

> *"os elos deveriam ser construídos linear e paulatinamente, ordenados por uma bem definida hierarquia que conduziria do mais simples ao mais complexo, não hesitando em delimitar com nitidez critérios de simplicidade/complexidade".* (Machado, 2005)

A idéia de conhecimento estreita-se com a idéia de significado; conhecer é, cada vez mais, conhecer o significado.

> *"Compreender é apreender a significação... Apreender a significação de uma coisa, de um acontecimento ou situação é ver a coisa em suas relações com outras coisas... Contrariamente, aquilo a que chamamos de coisa bruta, a coisa sem sentido para nós, é algo cujas relações não foram apreendidas".* (Dewey, apud Machado, 2005)

A concepção de significado emerge naturalmente da concepção de linguagem. Segundo Machado (2005), *se as palavras representam etiquetas estáveis, resultantes de classificações bem definidas, estruturadas a partir de categorias universais, então se pode pretender equacionar o significado do significado, bem como as distinções entre língua corrente e as linguagens científicas (...).*

A construção do significado é sempre uma ação de significar, de transformar um signo, de representar um signo, através de um processo de significação.

O abstrato e o concreto, no processo de construção do conhecimento, conduziriam a duas opções: uma ascensão do concreto para o abstrato ou abstrações como referência inicial, e *representação* e a *concepção*. Metaforicamente, ele associa estas etapas às quatro faces de um tetraedro,

> *"com elementos comuns e multiplamente articuladas, configurando uma estrutura a partir da qual, de modo metafórico, podem-se apreender não apenas o significado e as funções do ensino de geometria, como também alguns elementos básicos na dinâmica dos processos cognitivos de uma maneira geral."* (Machado, 2005)

Também diz que as quatro faces – percepção, construção, representação e concepção – são como átomos de uma estrutura molecular, que não pode ser dissociada sem que a substância seja destruída.

Ilustração 1 – Tetraedro representativo da construção do conhecimento geométrico.

De modo geral, temos as faces do tetraedro assim representadas:

resolução de problemas que tornam os conceitos significativos para os alunos podem estar, pelo menos inicialmente, *muito distantes do formalismo apresentado pelo professor*. Mas, apesar disso, tais situações são essenciais para o desenvolvimento de conceitos. Quer dizer, ao mesmo tempo em que as situações formais são necessárias é preciso levar em consideração que o aluno pode estar ainda muito longe delas.

Vergnaud toma como premissa que o conhecimento está org

1.3.4 Geometria Dinâmica

Entende-se por *Geometria Dinâmica* a implementação do computador à geometria de régua e compasso, dita tradicional. O vocábulo “dinâmico” aparece para se opor à estrutura estática dessa geometria citada anteriormente. Na Geometria Dinâmica, o aluno pode alterar as posições dos objetos iniciais, após ter feito uma construção, e ainda ter as propriedades originais da figura inabaladas.

Com os programas de GD podemos facilitar a verificação da validade de formalização das construções.

Os programas de GD podem ser comparados a laboratórios virtuais nos quais os estudantes podem manipular, investigar e aprender matemática.

> *“A contribuição dos programas de Geometria Dinâmica segue em dois ramos. Primeiro, provêem um ambiente no qual estudantes podem experimentar livremente. Dessa forma, eles podem facilmente verificar suas intuições e conjecturas durante o processo de procura de padrões, propriedades, etc. Segundo, estes programas provêem formas não tradicionais para os estudantes aprenderem e entenderem os métodos e conceitos matemáticos... permitindo construir figuras complexas e facilmente realizar, em tempo real, uma quantidade enorme de transformações nestas figuras, proporcionando ao estudante o acesso a uma grande variedade de exemplos que dificilmente seriam possíveis em ambientes não computacionais ou em ambiente computacionais estáticos”.* (Marrades & Gutiérrez, apud Isotani, 2004)

Segundo Gravina (1996), a GD proporciona uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos matemáticos. Deste modo, podemos introduzir o conceito matemático dos objetos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa de GD, surgindo naturalmente daí o processo de argumentação e dedução.

A GD possibilita visualizar uma mesma figura construída de várias formas, facilitando a compreensão da geometria envolvida. Nesse aspecto, o professor pode incentivar o espírito investigativo do aluno, solicitando ao final uma justificativa para as relações encontradas, ou seja, a prova matemática.

Como a tarefa do professor é a de “parceiro” do aluno, encaminhando-o para descobertas e desafios, o uso do computador por meio da Geometria Dinâmica torna-se um grande aliado no ensino de Matemática. O uso desta tecnologia trás grandes benefícios ao ensino, não apenas pelas inovações, mas, acima de tudo, pela troca de experiências e parceria entre o aluno e o professor.

As atividades com GD oferecem ao professor ferramentas para trabalhar a capacidade de visualizar, transformar, generalizar, refletir e se comunicar com a informação. Já para o aluno, a GD torna o aprendizado mais ativo fazendo-o buscar conhecimento e produzir resultados positivos.

Um dos softwares de geometria dinâmica mais difundido é o **CABRI** Géometrè (de **CA**hier **BR**ouillon **I**nteractif pour l`aprentissage de la géométrie), que é o resultado das pesquisas conjuntas entre a Universidade Joseph Fourier de Grenoble e o Centro Nacional de Pesquisa Científica (CNRS) realizadas no Laboratório de estruturas discretas e didáticas, e posteriormente, seguida pelo laboratório Leibninz, ambos do IMSG – Institut d’Informatiqe et de Mathematiques Appliquees (Instituto de Informática e de Matemática Aplicada), sob a liderança de Jean-Marie Laborde.

O Cabri-Géomètre é um software que permite construir todas as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso. Uma vez construídas, as figuras podem se movimentar conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Essa possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a todos os casos, constituindo-se numa ferramenta rica de validação experimental de fatos geométricos. Ele tem outros aspectos que vão muito além da manipulação dinâmica e imediata das figuras.

O Cabri dispõe de um conjunto de comandos de criação de objetos, de construção e um menu diversos onde é possível marcar e medir ângulos, recuperar o histórico de uma construção, fazer macro-construções etc.

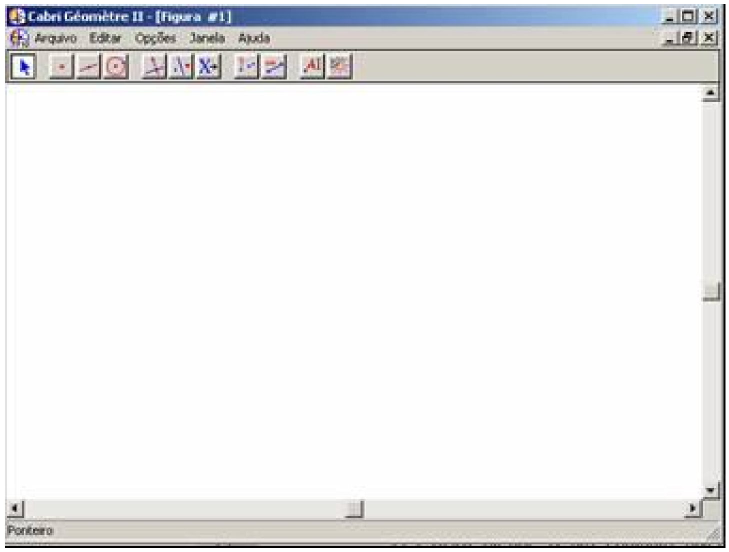


Ilustração 2 - Interface principal do Cabri-Géomètre

O Cabri atende a um conjunto diverso de objetivos didáticos que contribuem para que os alunos desenvolvam seu pensamento geométrico, com destaque para atividades relacionadas a: planejar, explorar, modelar, *conjecturar,* definir, argumentar e demonstrar.

Um outro programa de geometria dinâmica é o iGeom, que começou a ser desenvolvido no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP) em 2000, coordenado pelo professor Leônidas de Oliveira Brandão. O objetivo inicial do projeto era disponibilizar um programa de GD gratuito e que pudesse ser utilizado via Web.

Com o intuito de facilitar a inserção do iGeom nos cursos de Geometria, o foco principal para sua construção foi desenvolver e implementar novas ferramentas neste programa, de tal forma que fosse possível auxiliar tanto o professor em sua tarefa de criar exercícios e validar as respostas obtidas, quanto ao aluno oferecendo-lhe respostas rápidas para cada exercício realizado. Além disso, estes recursos precisavam funcionar como aplicativo e também via Internet (através do uso dos *applets*).

O **iGeom – Geometria Interativa na Internet** é disponibilizado gratuitamente, seja para uso direto na Internet ou para ser descarregado a partir do Site iMática: *http://www.matematica.br*. Lá também será encontrado um pequeno roteiro para o uso do programa e exemplos, incluindo cursos de

Geometria produzidos por alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP.

A interface do iGeom é estruturada a partir das opções de menus, um menu de botões, dividido em menu principal e secundário, a área de desenho e uma barra de mensagens.

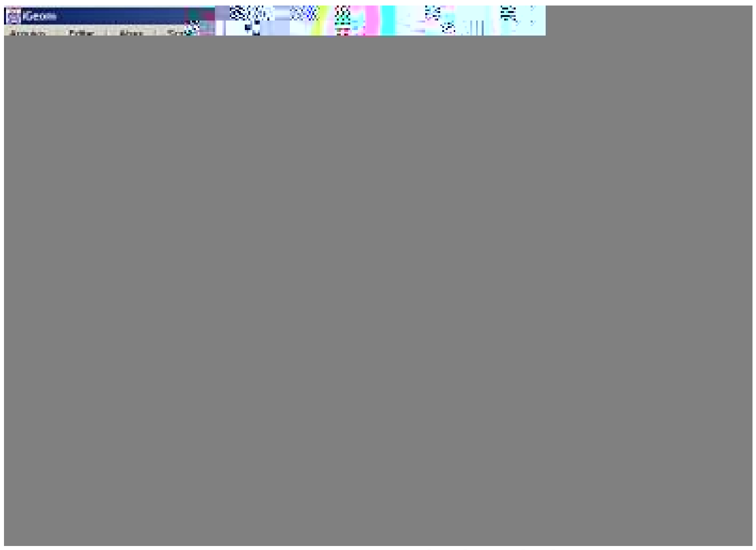


Ilustração 3 - Interface principal do iGeom

Assim como os demais programas de GD, a versão atual do iGeom permite realizar todas as operações básicas de Geometria Dinâmica, como por exemplo:

a) criar objetos geométricos como pontos, retas, semi-retas, segmentos, circunferências, polígonos, áreas, medidas dinâmicas como ângulos e distâncias;
b) opções de edição: esconder/mostrar, remover ou desfazer remoção, criar textos, rastrear e modificar as características dos objetos;
c) opções de gravação/recuperação de arquivos em diferentes formatos;
d) outros recursos “avançados” como isometrias, perpendiculares e paralelas.

Além das características usuais dos programas de GD, o iGeom possui algumas características que não são encontradas freqüentemente em outros programas de GD. Entre elas destacamos: a geração de “scripts” (ou “macros”) recorrentes, a fácil exportação para Web, a abertura de múltiplas áreas de desenho, a autoria e validação automática de exercícios e a comunicação com servidores (visando seu emprego em sistemas gerenciadores de cursos Web).

1.4 Questão de pesquisa

O estudo do aprendizado de Progressões Geométricas via fractais e a verificação de suas influências sobre a construção do conhecimento deste assunto é o foco desta dissertação. Baseado nos levantamentos bibliográficos sobre a história das progressões geométricas e dos fractais, investigaremos, através de uma seqüência de ensino, como se dá o processo da construção de generalizações, observadas sob o prisma de atividades concretas – via dobraduras; atividades em ambiente computacional e atividades dedutivas.

A partir deste foco emerge a nossa questão de pesquisa: **Como a utilização dos fractais pode ser motivadora na percepção da auto-semelhança? Como a auto-semelhança pode contribuir no processo de generalização das fórmulas da progressão geométrica para alunos de Ensino Médio?**

Para responder à questão de pesquisa pretendemos desenvolver uma seqüência de ensino utilizando alguns elementos da metodologia de pesquisa denominada engenharia didática.

1.5 Metodologia

6 Tm 1 Tm (o) Tj 1 0 .44 467.52 Tm (e Tm ( ) Tj 1 0 05Tj 1 0 0 1 505.285.6 T 0 1 Tm (m61 44

A constr5.92 Tm (o) Tj 160.32 201.36 Tm (o) Tj 1 0 1 177.36 2013232 28548.8 266.1 Tm

Essa analogia é esclarecida por **Artigue** (1988) quando menciona que, tal como o engenheiro, o professor necessita de um conjunto de conhecimentos teóricos, ter planejamento de todas as etapas da pesquisa, aí prevendo as possíveis dificuldades e soluções para os problemas encontrados, até a aplicação da seqüência.

A engenharia didática fundamenta-se pela execução de quatro fases sucessivas: análises preliminares; concepção das atividades e análise *a priori*; aplicação da seqüência didática e análise *a posteriori*.

As *análises preliminares* compõem-se de referências ao quadro teórico que fundamenta a pesquisa de um estudo histórico e epistemológico do objeto a ser tratado, das concepções dos sujeitos envolvidos e da compreensão das condições reais a qual a experiência será realizada.

Segundo Artigue (1988), as análises prévias que dão sustentação a investigação da engenharia didática são:

- *a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;*
- *a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;*
- *a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;*
- *a análise do campo de limitações no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;*
- *e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação.*

Estas análises são feitas para darem suporte à concepção de engenharia didática, porém elas são retomadas e aprofundadas durante todo o transcorrer do trabalho.

A *concepção* e a *análise a priori* consistem na delimitação de um certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, chamadas de variáveis de comando. Nesta fase o pesquisador é norteado pelas análises preliminares.

Artigue (1988) diferencia as variáveis de comando como:

- *as* variáveis macrodidáticas *ou* globais*, que dizem respeito à organização global da engenharia;*

- *as* variáveis microdidáticas *ou* locais *que dizem respeito à organização local de uma engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo umas e outras ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado.*

Na *análise a priori* temos duas partes, a primeira caracteriza-se pela descrição das atividades e a última, pelas características de uma situação a-didática que se quis criar e que se quer aplicar aos alunos visados pela experimentação.

A aplicação da seqüência didática é a fase da experimentação propriamente dita, e é nela que se dá o contato entre o pesquisador/professor/observador(es) com os alunos que serão alvo da investigação. Segundo Artigue (1988), a experimentação supõe:

- *a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;*
- *o estabelecimento do contrato didático;*
- *a aplicação dos instrumentos de pesquisa;*
- *o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros individuais, etc.).*

É na análise *a posteriori* que se faz o tratamento das informações obtidas na experimentação. É de suma importância que essa análise retrate bem a realidade, enriqueça e complemente os dados obtidos por outras técnicas, como questionários, entrevistas, diálogos, etc. Os dados para a análise *a posteriori* podem ser obtidos pela observação do pesquisador ou dos observadores, devidamente registrados nos protocolos da experiência.

Para finalizar a engenharia didática é feita uma confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori* para validação ou refutação das hipóteses levantadas no início do processo.

Pretendemos desenvolver a nossa engenharia didática por meio de uma seqüência de ensino sobre Progressões Geométricas, usufruindo da beleza e da possibilidade de recursão que os Fractais proporcionam, identificando as dificuldades e propondo soluções na construção do ensino deste conteúdo a alunos do Ensino Médio.

Capítulo 2:

ESTUDO DOS OBJETOS MATEMÁTICOS – PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FRACTAL

2.1 As Progressões Geométricas na história

A história usa constantemente material de origem astronômica e cerimonial de vários povos para “voltar ao passado” e também prever como eram os seus hábitos e costumes. Porém, se ficássemos na dependência apenas desse material as informações seriam muito imprecisas. Felizmente temos outras fontes de informação.

A civilização egípcia contribuiu com a história, e ainda contribui, com uma grande herança para a humanidade, como podemos destacar: os papiros egípcios, que “sobreviveram” ao desgaste do tempo.

Dentre esses papiros, o mais extenso no aspecto matemático é o *Papiro Rhind*, com cerca de 30 cm de altura por 5 m de comprimento, que foi descoberto em 1858, por um antiquário escocês, A. Henry Rhind, em visita ao Egito, que o comprou em uma cidade próxima ao Rio Nilo; daí a origem de seu nome. Hoje o papiro se encontra no British Museum (com exceção de alguns fragmentos que estão no Brooklin Museum). Escrito em hierático, o papiro consta de 87 problemas e sua resolução. Muitos dos problemas têm por base problemas do cotidiano, como a medida de cerveja e a divisão de pão.

No que se refere às Progressões Geométricas, há um único problema, o 79. Trata-se de um problema de matemática recreativa, onde se tem uma progressão geométrica em que o primeiro termo e a razão são ambos 7. O enunciado do problema está exposto da seguinte forma:

"7 casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16807 hecates"

Supõe-se que Ahmes se referia a um problema, possivelmente já conhecido, em que cada casa há 7 gatos, cada gato comeu 7 ratos, cada rato comeu 7 espigas de trigo, cada espiga produziu 7 medidas de grãos de trigo. Segundo Boyer (1996), este divertimento no Papiro de Ahmes (ou Rhind) parece um antepassado do versinho infantil:

"Quando eu ia a S.^{to} Ives,
encontrei um homem com sete mulheres;
cada mulher tinha sete sacos.
cada saco tinha sete gatos,
cada gato tinha sete gatinhos.
Gatinhos, gatos e sacos e mulheres,
Quantos iam a S.^{to} Ives?"
(Boyer, 1996)

Para responder a pergunta *"Quantos iam a S.^{to} Ives?"*, observe a tabela a seguir:

Casas	7		
Gatos	49		
Ratos	343	1	2801
Espigas de trigo	2401	2	5602
Medidas de grãos de trigo	16807	4	11204
TOTAL	19607	TOTAL	19607

Tabela 1 – "Quantos iam a S.^{to} Ives?"

A segunda coluna mostra a soma (na última linha) dos cinco termos da progressão geométrica de razão sete: $7+7^2+7^3+7^4+7^5$. (Segundo Eves, devido a essa representação em potências de 7, pensou-se que o escriba talvez estivesse introduzindo a terminologia simbólica *casas, gatos, ratos,* etc. para representar *primeira potência, segunda potência* e assim por diante.) As duas últimas colunas mostram o método egípcio de multiplicar 7 por 2801. Podemos notar, nas duas últimas colunas, uma relação tendo em conta a fórmula para a soma dos primeiros n termos $\{1, q, q^2, \cdots, q^n\}$ de uma progressão geométrica de razão *q*, tendo como primeiro termo 1, que é dada por $1+q+q^2+q^n=\frac{q^n-1}{q-1}$. Temos 7 vezes este valor com razão sete e 4 termos. Logo, $7.\frac{7^4-1}{7-1}=7.\frac{16807-1}{6}=7.2801=19607$. Portanto, vê-se que este problema exibe a fórmula da *soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica.*

Outra progressão interessante que aparece no Papiro de Rhind é formada pelas frações $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$, $1/64$ do hecate, (unidade comum do volume usada para medir quantidade de grãos). Os termos dessa seqüência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.

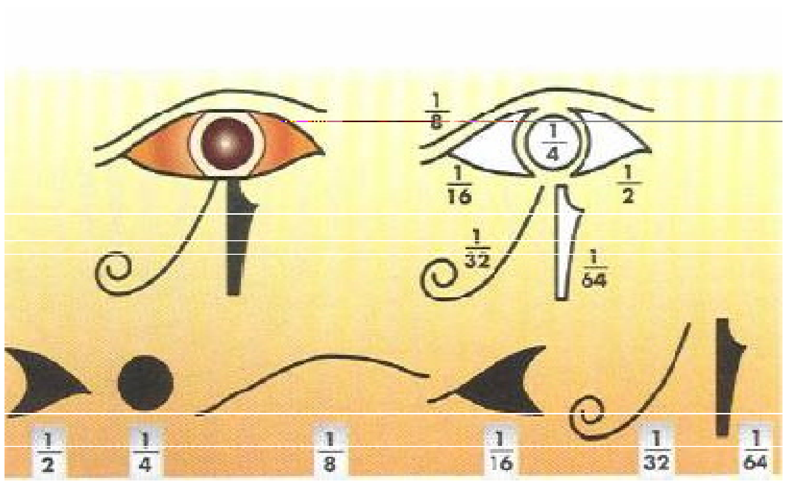


Ilustração 4 - Extraída do livro *Padrões Numéricos e Seqüências*

Os egípcios sabiam somar progressões geométricas com 6 elementos:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$$

Eles multiplicavam todos os elementos por 64 (o último denominador), encontrando: $64.S=64.\frac{1}{2}+64.\frac{1}{4}+64.\frac{1}{8}+64.\frac{1}{16}+64.\frac{1}{32}+64.\frac{1}{64}$

Então: $64.S=32+16+8+4+2+1=63$

Daí: $S=\frac{63}{64}$

Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes, mas nenhuma delas foi tão extraordinária quanto à tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.).

Os babilônicos também utilizavam seqüências. Foram encontrados 2 problemas interessantes sobre seqüência numa tábua de Louvre, datando por volta de 300 a.C. Um deles afirma que:

$$1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^8+2^9=2^9+2^9-1$$

Segundo Boyer (1998), a progressão geométrica $1+2+2^2+...+2^9$ somada em outra série de quadrados $1^2+2^2+3^2+...+10^2$ é achada numa tableta. A pergunta que é feita é se os babilônicos conheciam as fórmulas gerais para a soma de uma progressão geométrica e a soma dos *n* primeiros quadrados perfeitos. Há grande possibilidade, porém, estas tabletas se assemelham aos papiros egípcios, pois neles só aparecem casos específicos e nenhuma formulação geral.

A história das progressões na Grécia remete a Pitágoras, que viveu entre 585 e 500 a.C. e viajou pelo Egito e Babilônia, e possivelmente foi até a Índia. Durante suas viagens, compilou informações sobre Matemática, Astronomia e Religião. Voltou à Grécia, estabelecendo-se e

Outro grande matemático que desenvolveu estudos que envolviam os conceitos de progressões foi Euclides. Pouco se sabe sobre sua vida. Viveu por volta de 300 a.C. Visto a natureza de seu trabalho, presume-se que tenha estudado com os discípulos de Platão.

Mais da metade do que escreveu foi perdido. Dentre suas obras, a de maior expressividade, sem dúvida é *Os Elementos*. Uma vez que esta obra não trouxe nenhuma descoberta, o sucesso da mesma é atribuído à grande capacidade de ensinar de Euclides, conhecido pela sua habilidade em expor. Segundo Eves (2004),

> *“nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico”.*

Os Elementos não tratam apenas de Geometria (em oposição ao que se pensa), nele também encontramos teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). *Os Elementos* se compõem de 465 proposições distribuídas em treze livros.

Ilustração 5 - Os Elementos, extraída de www.unostiposduros.com em 03/04/06

É no livro VIII que encontramos as proporções contínuas e *Progressões Geométricas* relacionadas, de forma que, se temos uma proporção contínua 230.4j 1 0 0 633
a : b = b : c = c : d, en44 230.4 Tm (u)8 504.72 Tm (0 0 1 398.64 264) T350 1 211.44 256.32 Tm

> *"Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem".*

O enunciado acima equivale à fórmula:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1},$$

que por sua vez equivale a

$$S_n = \frac{a_1 - a_1.r^n}{1 - r}$$

Os hindus também foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra, somando Progressões Aritméticas e Geométricas e resolvendo problemas envolvendo juros simples e compostos, descontos e regras de sociedade. Os problemas de aritmética hindus comumente envolviam irracionais quadráticos, o teorema de Pitágoras, Progressões Aritméticas e permutações.

Dentre os matemáticos que a Índia produziu na segunda metade da Idade Média, o mais importante foi Bhaskara (1114 - 1185). Ele foi também o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores. O seu tratado mais conhecido, o *Lilavati*, recebeu o nome de sua filha, para consolar a moça que perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas profecias astrológicas. Tanto o *Lilavati* quanto o V*ija-Ganita*, contém numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, mensuração simples, progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.

A Matemática na Europa conta a história de Michael Stiefel (1486-1567), considerado o maior algebrista alemão do século XVI. Sua obra matemática mais conhecida é *Arithmética Integra*, publicada em 1944 e dividida em três partes, números racionais, números irracionais e álgebra. Na primeira parte, ou seja, na parte dos números racionais, Stiefel salienta as vantagens de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica prenunciando assim, de quase um século, a invenção dos logaritmos.

Outro grande matemático europeu é o escocês John Napier (1550 – 1617). Napier estudava Matemática e Ciência para se descontrair de suas polêmicas políticas e religiosas: era violentamente anticatólico e profeticamente escreveu sobre "máquinas de guerra infernais" que vaticinados pela metralhadora, o submarino e o tanque de guerra.

Segundo Eves (2004), quatro foram as suas grandes invenções que entraram para a história:

1. a invenção dos logaritmos;
2. um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como *regra das partes circulares*, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos;
3. pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro conhecidas como *analogias de Napier*, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos;
4. a invenção de um instrumento, conhecido como *barras de Napier* ou *ossos de Napier*, usado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números.

Por volta de 1590, Napier revelou possuir completo conhecimento da correspondência entre progressões aritméticas e geométricas, que o levou aos logaritmos gerando em conseqüência de sua descoberta, e passando diligentemente, a construção das tabelas de logaritmos que foram publicadas vinte e quatro anos após.

Como sabemos hoje, o poder dos logaritmos como instrumento de cálculo repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração. No entanto, na alvorada da matemática moderna, a abordagem de John Napier para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões difere consideravelmente das longas prostaférese (palavra grega que significa “adição e subtração”), e se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica: $b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...$ aos da progressão aritmética: 1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ..., então o produto $b^m.b^n = b^{m+n}$ de dois termos de primeira progressão está associado à soma m+n dos termos correspondentes da segunda progressão. Para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos do modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos da correspondência precedente, deve-se escolher o número b bem próximo de 1.

As progressões também se mostram presentes na biologia, com Charles Robert Darwin, naturalista britânico que alcançou fama ao convencer a comunidade científica da ocorrência da evolução e propor uma teoria para explicar como ela se dá por meio da seleção natural e sexual. Esta teoria se desenvolveu no que é agora considerado o paradigma central para explicação de diversos fenômenos na Biologia.

Num dos quatro itens fundamentais da doutrina de Darwin, podemos encontrar uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, por influência das idéias de Thomas Malthus, famoso economista. Diz o item:

“As populações crescem em P.G. ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em P.A.”

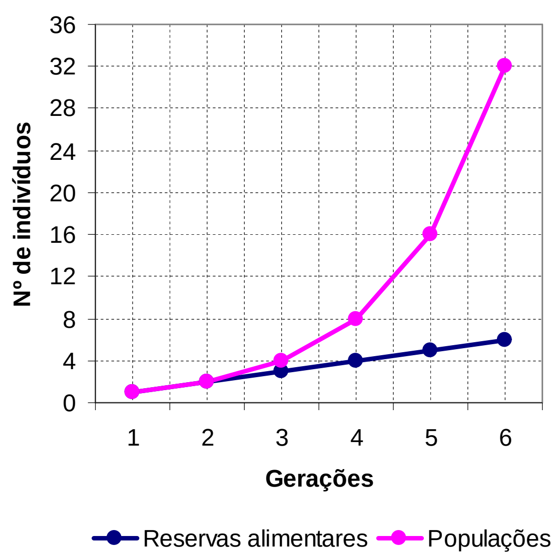


Gráfico 1 – Progressão Geométrica X Progressão Aritmética

Conseqüentemente, Darwin afirmou que

> *"devido a tal desproporção, os indivíduos empenhar-se-iam numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos – a seleção natural – de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros"*.

A comparação de Malthus entre o crescimento populacional e as reservas alimentares não é mais aceita atualmente, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande como mostra o gráfico.

2.2 Os Fractais

> **fractal** *adj2g. sm.* Diz-se de, ou forma geométrica que pode ser subdividida indefinidamente em partes, as quais, de certo modo, são cópias reduzidas do todo. [Pl: *-tais*.]

O termo *Fractal* foi selado pelo matemático polonês, naturalizado francês, Benoit Mandelbrot, em 1967. Com a publicação de *A Geometria Fractal na Natureza,* em 1982, Mandelbrot conseguiu popularizar a palavra recém criada chamando a atenção da comunidade científica para o novo conceito que ela trazia. Etimologicamente, o vocábulo provém do verbo latino *frangere* (que significa quebrar, dilacerar, rachar, reduzir a partículas), de onde se deriva o adjetivo *fractus*, cujo sentido é o de algo diminuto, fragmentado.

A Geometria Fractal de Mandelbrot oferece modelo para a compreensão das formas complexas de que a natureza é dotada, seja na estrutura do átomo, nos arranjos moleculares das proteínas e dos aminoácidos, nas células do organismo, sejam nos recortes geográficos das linhas costeiras, nas efêmeras imagens abstraídas do movimento das nuvens, no sólido e harmônico contorno das montanhas, no inusitado trajeto percorrido pela fumaça de incenso, nas fantásticas formações estalactites e estalagmites encontradas no mundo das cavernas...

A natureza inteira é fractal, e foi esta a motivação original de Mandelbrot. Ele desenvolveu estudos sobre a geometria da natureza visando representar o contorno de uma nuvem, as costas marítimas, o contorno de uma folha ou um floco de neve. A geometria clássica fornece apenas uma primeira aproximação para a estrutura física dos objetos. A Geometria Fractal é uma extensão da primeira, e pode se reutilizada para construir modelos capazes de representar os aspectos mais complexos das formas da natureza.

A Geometria Fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação e vem para descrever o que a Geometria Euclidiana não consegue.

> *"As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, e o latido do cão não é contínuo, nem os relâmpagos se propagam em linha reta".* (Mandelbrot, 1983, tradução nossa)

A natureza exibe não apenas um grau mais elevado, mas também um nível de complexidade completamente diferente.

A Geometria Fractal tornou-se muito importante, porque veio explicar padrões que aparecem em várias áreas do conhecimento, nas ciências exatas, humanas, sociais e biológicas. Se fizermos um pequeno retrocesso na história, veremos diversas situações que fugiam ao padrão existente dentro da física, da matemática, da biologia; contudo, não podem ser resolvidas ou explicadas, por não estarem relacionadas com toda a matemática conhecida na época. Apenas com o desenvolvimento dos fractais, inicia-se uma nova era, quando se torna possível compreender alguns sistemas. O imenso avanço tecnológico na área da informática foi de grande importância para o desenvolvimento da teoria dos fractais. Como o aperfeiçoamento crescente dos computadores, a Geometria Fractal passou a se destacar. O desenvolvimento da teoria dos fractais, ao lado do avanço da informática, permitiu o estudo e visualização de muitas situações e comportamentos – desde a ecologia, economia, astronomia, metereologia, até medicina – os quais não eram possíveis anteriormente.

Os fractais podem ser encontrados em todo o universo e em todas as ciências, desde o aspecto das nuvens, montanhas, árvores e relâmpago, até a distribuição das galáxias e à economia de lojas e mercados.

A importância da Geometria Fractal é bem evidente, quer na engenharia, nas comunicações telefônicas, na química, na metalúrgica, na arte, na matemática e, até no estudo de doenças crônicas e noutros campos da medicina. Por exemplo, alguns estudos revelaram que um coração saudável bate a um ritmo fractal e, que um batimento cardíaco quase periódico é um sintoma de insuficiência.

Para conceber a idéia de fractais, Mandelbrot utilizou as bases matemáticas de dois franceses: Pierre Fatou (1878-1929) e Gaston Julia (1893-1978). Mandelbrot soube aproveitar e desenvolver as idéias precursoras dos franceses com a utilização de recursos computacionais, e criou seus famosos conjuntos, que hoje conhecemos por *Conjunto de Mandelbrot* e os *Conjuntos de Julia*.

> *"Em particular, é digno de se narrar que Julia, servindo como soldado na primeira grande guerra, infelizmente foi gravemente ferido, perdendo seu nariz. Consta que sua pesquisa foi desenvolvida quando internado num hospital, resultando no seu principal trabalho publicado de 199 páginas, apenas com 25 anos".* (Barbosa, 2002)

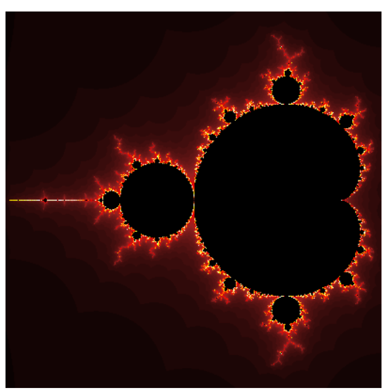


Ilustração 6 - Conjunto de Mandelbrot

Outra fonte de inspiração para Benoit Mandelbrot foi o matemático russo Georg Cantor (1845 – 1918) que dedicou seus estudos às pesquisas relativas à fundamentação da matemática, principalmente no tocante à parte hoje conhecida como *Teoria dos Conjuntos*.

O *Conjunto de Cantor* ou *Polvo de Cantor* ou *Poeira de Cantor* foi publicado em 1883 como exemplo de conjunto excepcional, um dos “monstros fig. I

fig. II

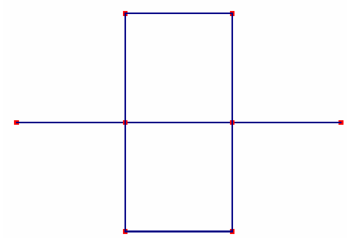


fig. III

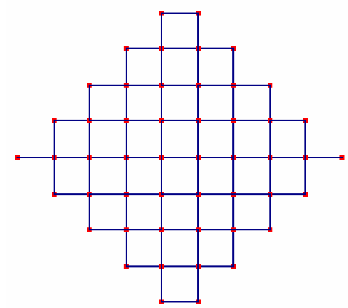


Ilustração 8 – Curva de Peano

Existem alguns fractais que são importantes devido à sua construção, à sua história ou à sua aplicação, como por exemplo: o Triângulo de Sierpinski, a Curva de Koch e a Ilha Quadrangular de Koch.

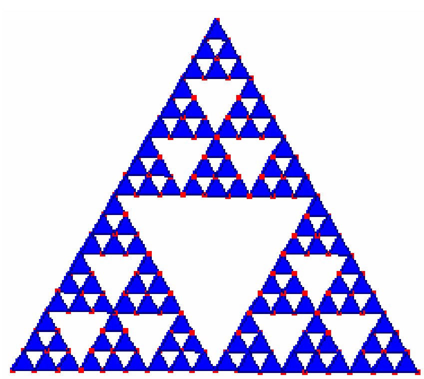


Ilustração 9 - Triângulo de Sierpinski

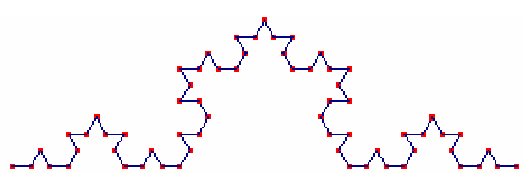


Ilustração 10 - Curva de Koch

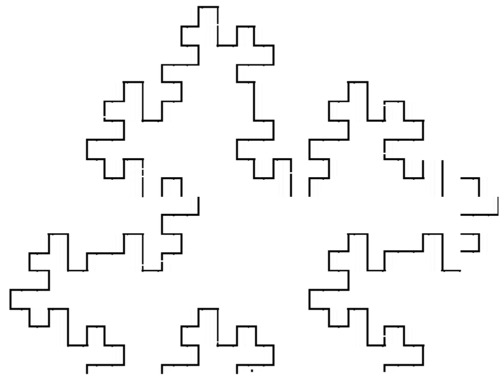


Ilustração 11 - Ilha Quadrangular de Koch

Os fractais são muitas vezes feitos por um processo chamado de *iteração*. Para fazer um fractal constrói-se uma figura geométrica familiar, por exemplo, um segmento de reta e trabalha-se nela de modo que a nova figura seja mais complexa. Depois, da mesma forma, trabalha-se a nova figura tornando-a ainda mais complexa. Continua assim até não poder continuar mais.

A característica principal dos fractais é a **auto-semelhança**. Isto significa que estruturas semelhantes são observadas em várias escalas. Na Curva de Koch (ilustração 12), de **a** até **d**, o fractal é construído adicionando sucessivamente cópias de suas estruturas em escalas cada vez menores. Um verdadeiro fractal matemático ocorre desta maneira, *ad infinitum*, de forma que qualquer que seja a ampliação usada, uma estrutura menor semelhante será observada.

A Curva de Koch reproduz cópias exatas de sua estrutura em várias escalas. Este característica refere-se a auto-semelhança geométrica. As partes fracionadas do fractal são semelhantes às partes maiores.

A auto-semelhança implica numa relação de proporcionalidade. Isto significa que a nova figura dependerá de um fator de aumento. Referindo-nos novamente à ilustração 12, o comprimento da Curva de Koch é aumentado em 4/3 a cada iteração. Então, dependendo do fator de aumento o seu comprimento mudará. Como a Curva de Koch é uma iteração *ad infinitum*, a distância entre quaisquer dois pontos é infinita.

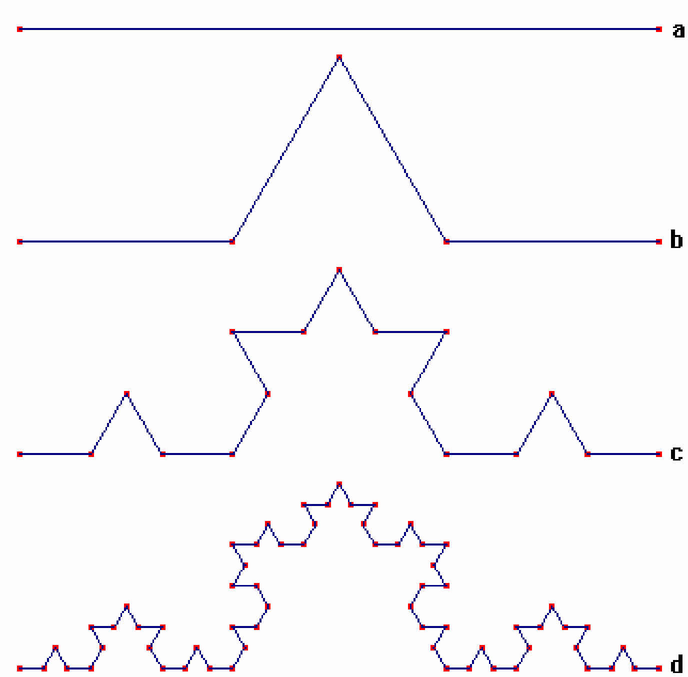


Ilustração 12 - Construção da Curva de Koch

Os fractais na natureza exibem uma dependência semelhante a este fator de aumento. Um exemplo comum são os litorais. Não há nenhum valor correto para o comprimento de um litoral. Ele será determinado cada vez maior quanto mais detalhada e rigorosa for a resolução de medida usada. Com uma resolução de medida mais fina são obtidas medidas mais próximas da realidade, uma vez que serão incluídas pequenas reentrâncias e fendas no seu comprimento total.

A auto-semelhança dos fractais po

dt 3 48( ) Tj 1 0 0

Mas por que um segmento de reta é uni-dimensional e uma figura plana é bidimensional? Note que ambos os objetos são auto-semelhantes. Nós podemos fracionar um segmento de reta em 4 intervalos auto-semelhantes, cada um com o mesmo comprimento, e cada um pode ser aumentado por um fator 4 para voltar ao segmento original. Nós também podemos fracionar um segmento de reta em 7 pedaços auto-semelhantes, cada um com fator de aumento 7, ou 20 pedaços auto-semelhantes com fator de aumento 20. Em geral, nós podemos fracionar um segmento de linha em **N** pedaços auto-semelhantes, cada um com um fator de aumento **N**.

Com uma figura plana é diferente. Por exemplo, nós podemos decompor um quadrado em 4 quadrados menores auto-semelhantes, com um fator de aumento 2. Do mesmo modo, nós podemos fracionar um quadrado em 9 pedaços auto-semelhantes com fator de aumento 3, ou 25 pedaços auto-semelhantes com fator de aumento 5. Nota-se, que o quadrado pode ser fracionado em $\mathbf{N^2}$ cópias auto-semelhantes de si mesmo, e cada uma das quais deve ser aumentada por um fator **N** para voltar à figura original. (Observe a ilustração 13.) Finalmente, podemos decompor um cubo em $\mathbf{N^3}$ pedaços auto-semelhantes, cada um dos quais com fator de aumento **N**.

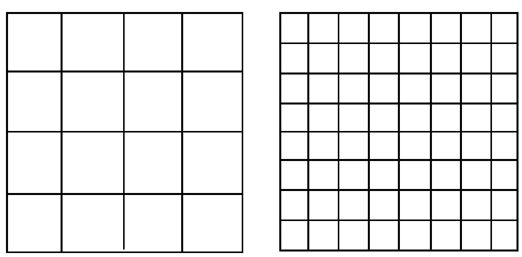


Ilustração 13 - Quadrado pode ser fracionado em $\mathbf{N^2}$ pedaços auto-semelhantes, cada com fator de aumento N

Logo, percebemos que a dimensão de um objeto auto-semelhante é simplesmente o expoente do número de pedaços auto-semelhantes com fator de aumento N na qual a figura pode ser fracionada.

Então, qual é a dimensão do triângulo de Sierpinski? Como achamos o expoente neste caso? Para isto, precisamos dos logaritmos. Note que, para o quadrado, nós temos N^2 pedaços auto-semelhantes, cada um com fator de aumento N. Assim, nós podemos escrever:

Dimensão = log (nº de peças auto-semelhantes)/log (fator de aumento)

Dimensão = $\log N^2/\log N = 2\log N/\log N = 2$

Semelhantemente, a dimensão de um cubo é:

Dimensão = log (nº de peças auto-semelhantes)/log (fator de aumento)

Dimensão = $\log N^3/\log N = 3\log N/\log N = 3$

Deste modo, a definição da dimensão de fractal de um objeto auto-semelhante é:

Dimensão fractal = log (nº de peças auto-semelhantes)/log (fator de aumento)

Retornando à determinação da dimensão do Triângulo de Sierpinski, observe três de suas iterações a seguir.

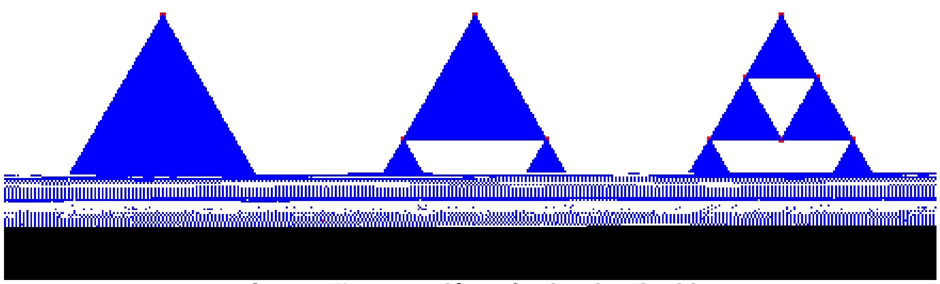


Ilustração 14 - Triângulo de Sierpinski

Chamando de S a dimensão fractal e observando o triângulo de Sierpinski, temos que esta figura consiste em 3 pedaços auto-semelhantes, cada um com fator de aumento 2, então, a sua dimensão fractal é:

S = log (nº de peças auto-semelhantes)/log (fator de aumento)

S = $\log 3/\log 2 \approx 1,58$

Por outro lado, S também consiste em 9 pedaços auto-semelhantes com fator de aumento 4. Do mesmo modo, temos:

Dimensão fractal = $\log 9/\log 4 = \log 3^2/\log 2^2 = 2\log 3/2\log 2 = \log 3/\log 2 \approx 1,58$

Semelhantemente, S é fracionado em 3^N pedaços auto-semelhantes com um fator de aumento 2^N. Assim, temos novamente:

Dimensão fractal = $\log 3^N/\log 2^N = N\log 3/N\log 2 = \log 3/\log 2 \approx 1{,}58$

As ilustrações 15 e 16 ilustram como é o efeito da dimensão fractal na densidade do preenchimento de um espaço.

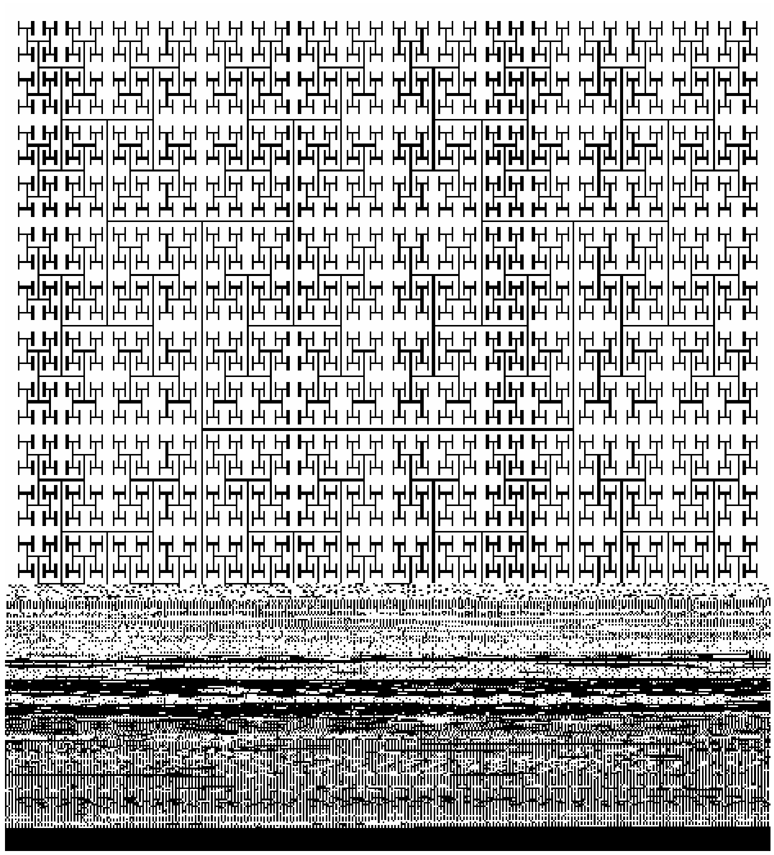


Ilustração 15 - Objeto com dimensão de fractal igual a 2. Cinco iterações mostradas

O objeto inicial da ilustração 15, que é um “H”, sofre 5 iterações. Uma vez que estamos considerando o próprio fractal matemático, é necessário imaginar iterações de objetos *ad infinitum*. Neste “H” são produzidas quatro cópias novas e exatas em cada iteração e o “H” fica dobrado. Então, a dimensão de fractal é determinada por:

$$D = \log(4)/\log(2) = 2{,}0$$

Assim, a ilustração 15 é uma linha com dimensão euclideana 1 e dimensão fractal 2. A linha é tão densa que preenche completamente a área, o espaço. Note que a dimensão fractal dá uma descrição apropriada das características de preenchimento espacial da linha.

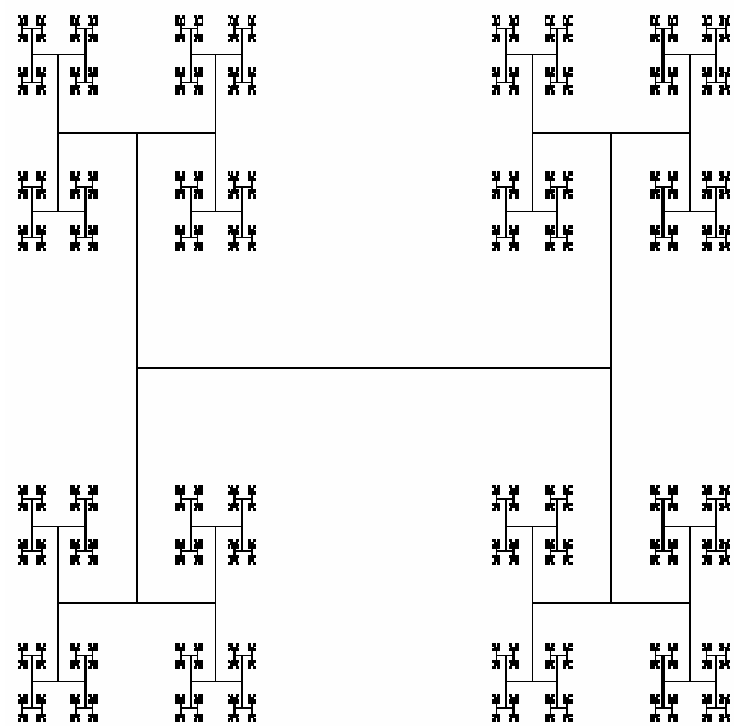


Ilustração 16 - Objeto com dimensão de fractal igual a 1,26 têm uma baixa densidade de preenchimento do espaço

Em comparação, na ilustração 16, é necessário um fator de aumento 3 para ver as quatro cópias menores reproduzidas a cada iteração. Isto resulta em uma mais baixa densidade de preenchimento do espaço e uma correspondente diminuição da dimensão fractal:

$$D = \log(4)/\log(3) \approx 1{,}26$$

É importante notar o que a dimensão fractal não descreve: ela não especifica exclusivamente um objeto. Por exemplo, a Curva de Koch da ilustração 8 e a linha da ilustração 16, ambas têm a mesma dimensão fractal ($\approx$1,26).

Os fractais têm dimensões diferentes e próprias de cada imagem. Uma curva irregular tem dimensão entre um e dois, enquanto uma superfície irregular tem dimensões entre dois e três.

A dimensão fractal é a medida de quão *complicada* é uma figura auto-semelhante. De forma grosseira, ela mede *quantos pontos* você deixou pendentes em um determinado espaço.

Apesar de bastante recentes, o *Caos* e os *Fractais* já se espalharam por quase todos os domínios da atividade humana e as suas aplicações parecem não ter limites.

Na Matemática, a análise de dados caoticamente dispersos impulsionou a evolução do tratamento estatístico e da noção de probabilidade. Por outro lado, a geometria fractal aprofundou a idéia intuitiva de limite.

Na Física, o conceito de Caos traz nova luz sobre a entropia, que mede também a complexidade de um sistema, e sobre os fundamentos da Mecânica Quântica, nomeadamente o *Princípio da Incerteza* de Heinsenberg.

Na Astronomia, sabe-se há muito tempo que o Sistema Solar não funciona com a precisão de um "relógio suíço". Poincaré foi o primeiro a demonstrar a dificuldade em determinar órbitas de astros a longo prazo. Recentemente, revelou-se que essas órbitas (no estudo realizado, da Terra e de Marte) têm uma evolução caótica, num intervalo de tempo da ordem das centenas de milhões de anos.

Na Sismologia, o estudo da distribuição caótica da localização e intensidade dos sismos tem contribuído para a cartografia de falhas sísmicas.

Na Biologia, o Caos está sendo usado para identificar processos evolutivos que permitem um novo entendimento do código genético, simulações realistas de formas de vida artificiais e uma nova abordagem da atividade cerebral.

Na Medicina, descobertas recentes indicam que o coração bate a um ritmo fractal e que um batimento cardíaco periódico é sintoma de insuficiência cardíaca.

No campo das Ciências Humanas e mesmo da Ciências Políticas, o Caos tem sido aplicado ao estudo do comportamento de multidões.

Na Economia, a análise das bolsas tem indicado que os valores das ações se comportam de forma aparentemente aleatória a curto prazo, mas que apresentam um certo padrão a médio e longo prazo. É interessante notar que, se olharmos para a evolução da Bolsa no período de um mês, uma semana, um dia ou algumas horas, o gráfico não perde a sua característica, tal como o fractal. Em 1997, dois americanos ganharam o Prêmio Nobel de Economia, após terem encontrado uma fórmula que permite prever aplicações financeiras.

Na Lingüística, a evolução dos dialetos tem sido estudada com base na Teoria do Caos.

Na arte, as influências estéticas são ainda difíceis de determinar, tal é a ruptura com os padrões clássicos que estas descobertas potenciam. A Geometria Fractal revolucionou o realismo visual, sendo usada na criação de imagens espetaculares e de mundo bizarros para jogos, animações e filmes, com detalhe variável de acordo com a escala, evitando pixelização. Este realismo sem precedentes inspira artistas de todas as áreas, introduzindo novos símbolos que acompanham as novas mentalidades.

2.3 Como os livros didáticos apresentam as progressões geométricas?

Para situar nossa pesquisa dentro do aspecto pedagógico, analisaremos a seguir três livros didáticos de Ensino Médio, no que tange à forma como o conteúdo *Progressões Geométricas* é tratado.

A análise será baseada nos livros *Matemática – volume único*, de Gelson Iezzi [et al.], Atual Editora, 2005; *Matemática – 1ª série*, de Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2004; *Matemática – Ensino Médio – 1ª série*, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, Editora Saraiva, 2005.

Ao estudar os livros encontramos muitos pontos comuns com relação às seqüências, às progressões aritméticas e às progressões geométricas. Apesar de ser as progressões geométricas o foco deste trabalho, não poderíamos deixar de avaliar os conteúdos citados há pouco, uma vez que eles antecedem o assunto principal. As semelhanças estão representadas na tabela a seguir:

Quadro 2 - Comparação entre os livros de Iezzi, Dante e Smole

Aspectos analisados		Autores		
		Iezzi	Dante	Smole
Seqüências	Inicia por exemplo numérico	X	X	X
	Contextualiza	X	X	X
	Utiliza fractais na contextualização			X
	Utiliza fractais em exercícios			X
P. A.	Inicia por exemplo numérico	X	X	X
	Contextualiza		X	X
	Utiliza fractais na contextualização			
	Utiliza fractais em exercícios			
P. G.	Inicia por exemplo numérico	X	X	X
	Contextualiza		X	X
	Utiliza fractais na contextualização			X
	Utiliza fractais em exercícios		X	X

Como podemos observar no quadro, a nossa análise foi calcada em distinguir os livros mais diretos, tido como tradicionais, e os livros contextualizados, tido como mais atuais.

Classificado como extremamente tradicional, o livro de Gelson Iezzi não traz nenhuma atualidade aos conteúdos seqüências, P.A. e P.G. Introduz os conceitos através de exemplos numéricos e quando apresenta contextualização esta não traz muita profundidade e nem relação com o cotidiano. O livro não faz referência à aplicação destes conteúdos, não apresenta aspectos históricos e não os vincula à tecnologia.

Já o livro de Luiz Roberto Dante apresenta-se mais preocupado com a contextualização, porém, a utiliza apenas como suporte à introdução de conteúdos. Nota-se uma atenção especial com a parte histórica quando cita algumas leituras e curiosidades, tais como a lenda do xadrez; texto sobre aproximações; leitura sobre a soma dos números naturais ímpares – uma interpretação geométrica; e a seqüência de Fibonacci. Não faz referências à tecnologia e nem à aplicabilidade destes conceitos. Cita os fractais em dois exercícios (apesar de ser a mesma figura nos dois, apenas há modificação dos números) sem dar às figuras esta nomenclatura. A figura que segue foi extraída do livro.

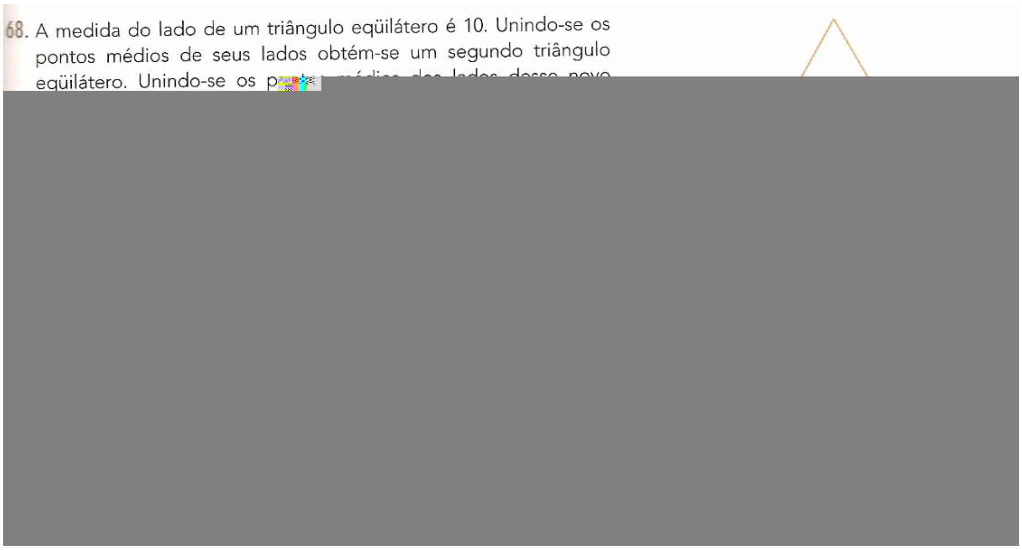
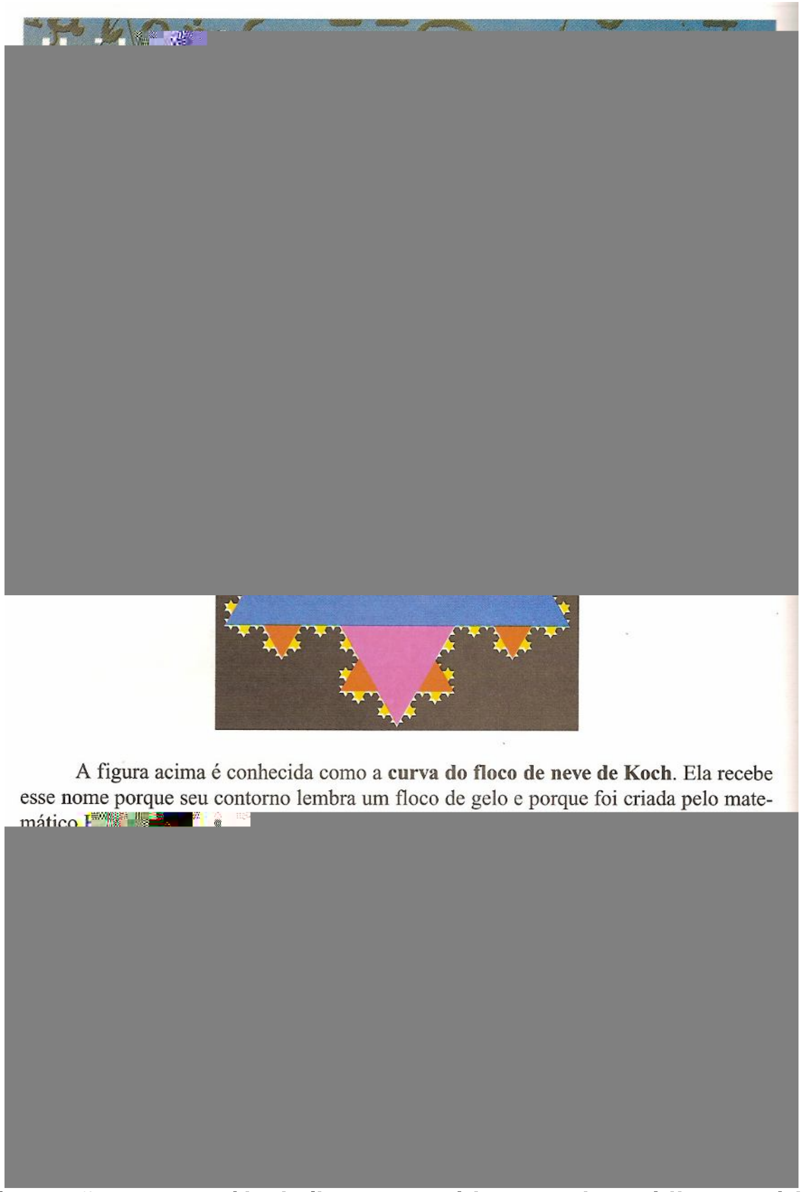

68. A medida do lado de um triângulo eqüilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um segundo triângulo eqüilátero. Unindo-se os

Ilustração 17 - Extraída do livro *Matemática – Ensino Médio – 1ª série*

O livro que mais nos surpreendeu foi o de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Ele traz aspectos que consideramos interessantes e essenciais, como a vinculação com o cotidiano, com a história, com a aplicabilidade e com a tecnologia. Introduz o conceito de seqüência através da *curva do floco de neve de Koch*, para a percepção de seu comportamento geração a geração, sem nomear a figura como fractal. No fechamento dos conteúdos traz um flash matemático, que para as seqüências foi a *Seqüência de Fibonacci* e para as progressões, *Seqüência na era do computador* – tópico que apresenta os fractais, ilustrando, exemplificando e trazendo aplicações. Traz um item que não esteve presente em nenhum outro livro: a interdisciplinaridade, traduzida pelo tópico *O Elo Matemática-Biologia – P.A. e P.G. na doutrina de Darwin* (este tópico é descrito no fim da seção 2.1 deste trabalho).

Ratificando a nossa preocupação de como os livros didáticos apresentam as progressões geométricas, ilustraremos através de extratos do livro de Smole, como esse conceito foi tratado de forma dinâmica e abrangente. A introdução do conceito de seqüências neste livro foi assim representada:



A figura acima é conhecida como a **curva do floco de neve de Koch**. Ela recebe esse nome porque seu contorno lembra um floco de gelo e porque foi criada pelo matemático

Ilustração 18 - Extraída do livro *Matemática – Ensino Médio – 1ª série*

Há também um exercício que inclui a idéia fractal, como mostra a próxima ilustração.

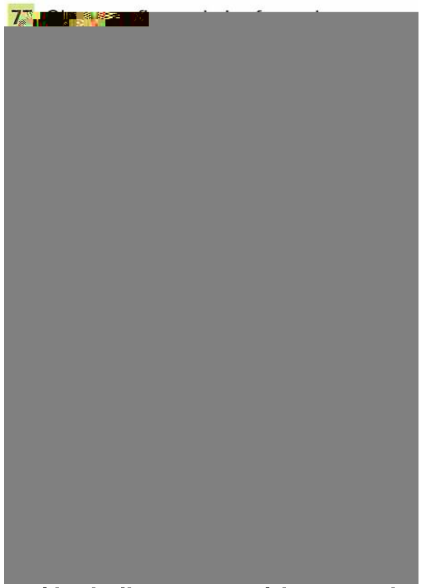


Ilustração 19 - Extraída do livro Matemática – Ensino Médio – 1ª série

A citação que fizemos da presença da tecnologia está explícita neste trecho do livro:

Ilustração 20 - Extraída do livro *Matemática – Ensino Médio – 1ª série*

Unidade 6 — Seqüências, progressão aritmética e progressão geométrica 195

De seqüências de imagens como estas, definidas por regras muito simples, quando desenhadas a mão conseguimos obter apenas meia dúzia de termos, mesmo recorrendo aos melhores instrumentos de desenho. Mas, com um computador, o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se figuras com pormenores invisíveis a olho nu. Ora, aí entra em cena a enorme capacidade de ampliação dos mo- [redacted]

Detalhe de um fractal de Mandelbrot.

Uma imagem obtida por técnicas fractais pode se parecer com coisas estranhas — um vírus ao microscópio ou paisagens de outro planeta —, mas é sempre estranhamente bela.

As aplicações da noção d [redacted]

Ilustração 21 - Extraída do livro Matemática – Ensino Médio – 1ª série

Capítulo 3:

CONCEPÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE *A PRIORI*

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos o processo que nos levou à concepção da seqüência didática, assim como, a análise *a priori* das atividades, identificando as possíveis estratégias de resolução que os alunos poderão utilizar, assim como, mostraremos comentários inerentes às atividades.

3.2 Concepção das atividades

A seqüência de atividades apresentada foi elaborada com o intuito de levar os fractais para a sala de aula de modo a tornar o ensino de matemática mais interessante e motivador com o auxílio da beleza e da curiosidade que estes despertam.

O nosso maior desafio era o de encontrar um conteúdo que permitisse explorar os fractais dando a eles relevância, fazendo com que fossem percebidos como instrumento facilitador para o aprendizado de Matemática. Tínhamos em mãos dois cartões de fractais (cartões feitos de dobraduras, conforme ilustram as fotografias da próxima seção) que para nós era claro que deveriam ser o ponto de partida deste estudo, uma vez que, ali estava muito presente algo que queríamos provocar nos alunos: a visualização da simetria como meio de percepção do belo, permitindo à Matemática uma forma de expressão, que não é uma constante nesta disciplina.

> *"Ver e sentir o belo e apresentar um senso estético é talvez propriedade inerente a alguns poucos temas da Matemática; entre outros, muito são áridos ou desinteressantes.*
> *O despertar e desenvolver do senso estético pode muito bem ser cuidado e aproveitado com o tema fractais, quer apreciando o belo irradiante, quer observando a regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades."*
> (Barbosa, 2002)

Havia também o desejo de trazer a tecnologia para a sala de aula, que sem dúvida, apresenta-se como uma nova protagonista para o ensino de Matemática, pois os recursos tecnológicos dão ao aluno uma mobilidade que o lápis e o papel não permitem.

Outra provocação que queríamos por em prática era a percepção de relações matemáticas presentes nos fractais, na busca pela construção do conhecimento.

Foi por meio da dualidade Fractais X Matemática que começaram a surgir idéias de conteúdos que poderiam servir como objeto de estudo, tais como: funções (de primeiro grau e exponencial), áreas e volumes (já que os fractais permitem uma visão tridimensional) e as seqüências, mas especificamente, as *progressões geométricas*.

Partimos, então, para a análise de qual dos conteúdos anteriores se encaixaria melhor em nossas escolhas e decidimos pelo estudo de *Progressões Geométricas*, visto que elas se mostram presentes de forma clara e harmoniosa nos fractais.

Desta forma, procedemos a confecção da nossa seqüência de ensino, que deveria associar todas as idéias colocadas anteriormente, usufruindo dos fractais como elo relevante para o ensino de *Progressões Geométricas*.

Concluída a fase de escolha do melhor conteúdo, passamos à fase de definição do que pretendíamos ensinar e como seria esse processo. Para esclarecer nossas preferências, retornaremos às três questões que gerenciaram nossas ações:

- a percepção do belo;

- o uso da tecnologia;
- a emergência de relações matemáticas.

Essas questões foram motivadoras para a divisão da seqüência de ensino em três blocos, descritos a seguir.

. . .

O primeiro bloco de atividades constitui-se para enfatizar a *percepção do belo* por meio do senso estético. Acreditamos que proporcionar aos alunos contato com as manifestações do belo, permitindo-lhes o desenvolvimento da estética e do ato criativo, é imprescindível para formar seres mais harmônicos, sensíveis e afetivos, visto que, a liberdade de vivenciar as emoções nos faz mais humanos e renova a esperança de transformação.

> *"Todo aquele que deseja seguir o caminho certo deve conhecer, desde a juventude, as formas belas; e, quando bem orientado, aprende a amar somente essas formas — esse amor o levará a criar pensamentos sensatos; e logo perceberá que a beleza de uma forma relaciona-se com a beleza de outra, e que a beleza das formas é uma só."* (Platão)

O prazer inerente ao belo é algo que se fará presente no Bloco 1 de atividades, fazendo com que o educando vivencie o encanto da contemplação da beleza do cartão assim sendo, segundo Parzysz, encontramo-nos no nível empírico do pensamento geométrico.

Para facilitar o entendimento, separamos este *Bloco* em 5 atividades:

- **Atividades 1** e **2** referentes à construção e ao estabelecimento de relações para o Fractal Central;
- **Atividades 3** e **4** referentes à construção e ao estabelecimento de relações para o Fractal Árvore;
- **Atividade 5** referente ao estabelecimento de relações nos dois fractais citados.

Estas atividades têm em comum o manuseio do cartão de fractal, apresentando uma geometria num nível mais concr

> *geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento."* (Gravina,1996)

Neste bloco utilizaremos a Geometria Dinâmica como forma de possibilitar uma harmonia entre os aspectos conceituais e figurais da geometria euclidiana.

Iremos utilizar dois Softwares de Geometria Dinâmica: Cabri-Géomètre, um programa computacional educativo, para construir o fractal Triângulo de Sierpinski utilizando o instrumento da *macro-construção*; e o iGeom – Geometria Interativa na Internet, um programa de Geometria Dinâmica desenvolvido pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), para confeccionar um Fractal de Circunferência, o Tetra-Círculo, aproveitando a ferramenta *script* (ferramenta semelhante à da macro-construção do Cabri).

O objetivo deste bloco de atividades é auxiliar o processo de generalização das fórmulas da Progressão Geométrica, usando o dinamismo dos softwares.

As atividades deste bloco serão divididas da seguinte forma:

- **Atividade 1**: utilização do Cabri Géomètre para construção do Triângulo de Sierpinski;

- **Atividade 2**: utilização do iGeom para a construção e observação do Tetra-Círculo.

. . .

Para propiciar *a emergência de relações matemáticas* criamos o Bloco 3, que foi concebido para o fechamento das idéias desenvolvidas ao longo dos Blocos 1 e 2. Este bloco apresenta grande relevância, pois nele encontramos as generalizações de todas as atividades feitas, trazendo à tona o nosso instrumento de pesquisa - as progressões geométricas -, e a identificação dos conceitos que permeiam este conteúdo, tendo assim, a institucionalização.

Todo o processo de constituição das atividades foi pensado de forma a fazer com que o aluno construa o seu conhecimento. Com isso, possibilitamos aos alunos atividades que conduzam às abstrações presentes nas generalizações (atividades1, 2 e 3); institucionalizamos os conceitos (atividade 4); reinterpretamos os dados de atividades anteriores sob o prisma da institucionalização (atividade 5); oferecemos atividades para prática do conhecimento adquirido (atividade 6) e retornamos à atividade que foi nosso ponto de partida para a pesquisa (atividade 7).

> *"Na construção do conhecimento, as abstrações não constituem, portanto, o início ou o fim do processo; são mediações indispensáveis, condição de possibilidade do conhecimento em qualquer área. A própria percepção já representa um primeiro momento de abstração."* (Machado, 2005)

. . .

Resumidamente, a seqüência de atividades foi distribuída em 3 blocos e apresentados aos alunos da seguinte maneira:

- *Bloco 1*: favorecimento do processo de construção das fórmulas da Progressão Geométrica via confecção de fractais de dobraduras;
- *Bloco 2*: favorecimento do processo de construção das fórmulas da Progressão Geométrica via Geometria Dinâmica, com a utilização dos softwares Cabri-Géomètre e iGeom;
- *Bloco 3*: construção das fórmulas do *termo geral*, *soma dos* ***n*** *primeiros termos* e *soma dos infinitos termos* das *Progressões Geométricas* envolvidas nos exemplos dos blocos anteriores, bem como, institucionalização dos conceitos que permeiam o seu estudo e aplicabilidade das idéias envolvidas.

Antes de iniciarmos a análise *a priori*, achamos por bem, explicitar que a divisão desta seqüência de ensino em três blocos tem fundamentação em:

a) **Parzysz** (2001), no que cerne aos seus quatro níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico - a geometria concreta, identificada pelo uso dos cartões de fractais, em que ocorrem apenas validações perceptivas; a geometria espaço-gráfica (da representação), em que o aluno constrói os fractais nos programas Cabri Géomètre e iGeom percebendo suas propriedades, mas sem explicitá-las; a geometria proto-axiomática, em que se iniciam as deduções, sem explicitar a parte axiomática, através de premissas aceitas pelo aluno de modo intuitivo; e o último nível, da geometria axiomática, que nós não abordamos. Então, fundamentado em Parsysz (2001), nós ficamos com três blocos:

I. Bloco 1: concreto;
II. Bloco 2: o Cabri e o iGeom, com as representações;
III. Bloco3: o mais o dedutivo, com as generalizações.

b) **Machado** (2005), que segundo a sua *Metáfora do Tetraedro*, diz que é preciso, na construção de um objeto geométrico, articular quatro faces de um tetraedro:

I. Face 1: *percepção* – em que é preciso haver manipulação do objeto;
II. Face 2: *construção física* – é necessário construir algo (vide ativ.1);
III. Face 3: *representação*;
IV. Face 4: *organização conceitual*.

Observe que, se juntarmos as teorias de Parzysz (2001) e de Machado (2005), o que fala acompanharão a experimentação da seqüência, fazendo observações em questionário previamente entregue.

3.3.1 Bloco 1: FRA$_{\text{que}}$TAL?

A primeira atividade foi assim proposta aos alunos:

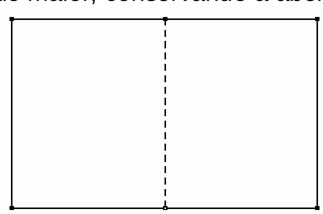
Quadro 3 - Atividade 1/Bloco 1

Atividade 1

Objetivo: *Confeccionar o* Fractal Central.

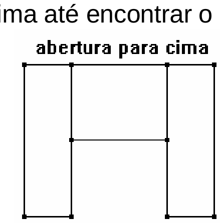
➲ **Geração 1: utilize uma folha.**

a) Dobre a folha ao meio no lado maior, conservando a abertura para cima;



b) Sob o lado dobrado faça quatro divisões em partes iguais e construa uma perpendicular passando pela primeira quarta parte e outra passando pela última quarta parte, ambas de altura igual à metade da altura da folha;

c) Faça um corte sob as duas perpendiculares;
d) Dobre a saliência cortada para cima até encontrar o outro lado da folha;



e) Abra a dobra de modo a ficar com a folha do tamanho original;
f) Inverta a dobra, isto é, ela estará para dentro e você a colocará para fora, encontrando o 1º e único elemento deste fractal;
g) Está pronta a *Geração 1* do Fractal Central.

(continuação)

➲ **Geração 2: utilize outra folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Central de *Geração1*, para isso, temos que dobrar a folha de sulfite seguindo os passos de **a)** até **d)** do item anterior;
b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** na região central da folha;
c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;
d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1*) para dentro;
e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;
f) Passe para os outros cortes, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;
g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e encontrará novos elementos que formarão o Fractal Central de *Geração 2*.

➲ **Geração 3: utilize a terceira folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Central de *Geração 2,* conforme fizemos anteriormente;
b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** iniciais na região central da folha;
c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;
d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1*) para dentro;
e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;
f) Passe para os outros cortes, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;
g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e você encontrará novos elementos que formarão o Fractal Central de *Geração 3*.

➲ **Geração 4: utilize a última folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Central de *Geração 3*;
b) Repita todo o processo anterior na região central da folha, desdobrando, encontrando elementos novos e confeccionando o Fractal Central de *Geração 4.*

Nesta primeira atividade, através de instruções simples o aluno constrói o Fractal Central com a utilização de folhas coloridas, régua, lápis, borracha e tesoura.

A construção constituir-se-á de 4 fases, que são as gerações dos fractais, conforme descrito nas orientações do quadro anterior.

A nosso ver esta atividade não gerará dúvidas, porém, caso elas apareçam, acreditamos na possibilidade de ser na etapa f da geração 1 (em negrito). Neste instante, o professor-orientador auxiliará o aluno para o caminho correto no manuseio da dobradura, já que o mais importante na confecção desses fractais é a observação das transformações ocorridas nos cartões, geração a geração.

O objetivo desta atividade é fazer com que o aluno identifique o caráter fractal da figura, ou seja, perceba que em cada dobradura construída as transformações mostram uma similaridade geração a geração, isto é, apresenta uma forma cuja nova geração se assemelha ao seu todo sob o aspecto da repetição dos elementos.

Para construção da Atividade 1, o aluno deverá ter em mãos 4 folhas coloridas, lápis, régua e tesoura.

➲ **Geração 1**

a) Dobre a folha ao meio no lado maior, conservando a abertura para cima;

Ilustração 22 – Fractal Central

b) Sob o lado dobrado faça quatro divisões em partes iguais e construa uma perpendicular passando pela primeira quarta parte e outra passando pela última quarta parte, ambas de altura igual à metade da altura;

c) Faça um corte sob as duas perpendiculares;

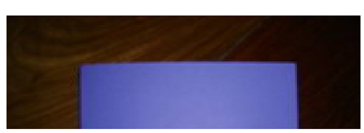


Ilustração 23 – Fractal Central

d) Dobre a saliência para cima até encontrar o outro lado da folha;

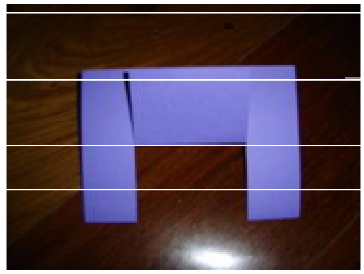


Ilustração 24 – Fractal Central

e) Abra a folha de modo a ficar com a folha do tamanho original;

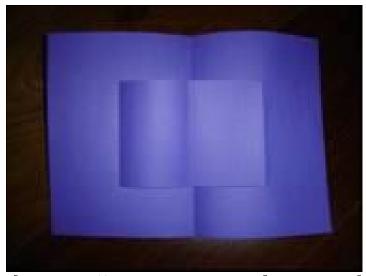


Ilustração 25 – Fractal Central

f) Inverta a dobra, isto é, ela estará para dentro e você a colocará para fora, encontrando o 1º e único elemento deste fractal;

Ilustração 26 – Fractal Central

g) Está pronta a *Geração 1* do Fractal Central.

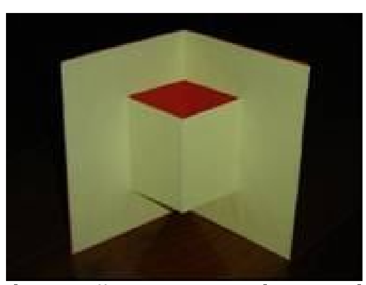


Ilustração 27 – Fractal Central

➲ Geração 2

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Central de *Geração 1*, para isso, temos que dobrar a folha de sulfite seguindo os passos de **a)** até **d)** do item anterior;

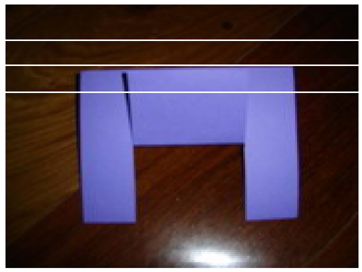


Ilustração 28 – Fractal Central

b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** na região central da folha;

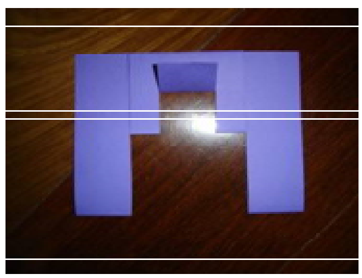


Ilustração 29 – Fractal Central

c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;

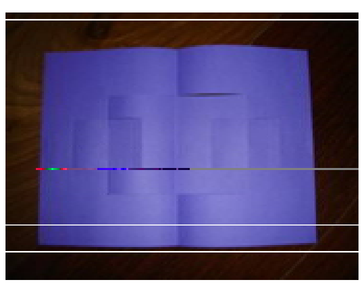


Ilustração 30 – Fractal Central

d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1)* para dentro;

e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;

f) Passe para os outros cortes, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;

g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e encontrará novos elementos que formarão o Fractal Central de *Geração 2.*

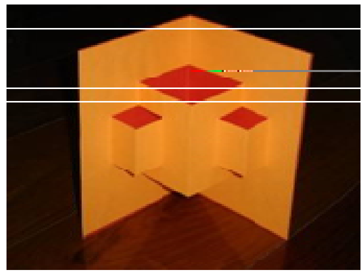


Ilustração 34 – Fractal Central

➲ **Geração 3**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Central de *Geração 2*, conforme fizemos anteriormente;

Ilustração 32 – Fractal Central

b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** na região central da folha;

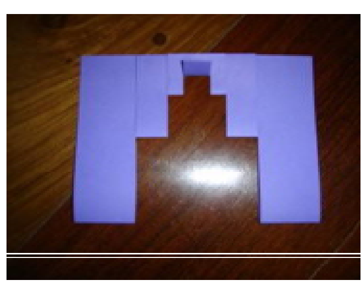


Ilustração 33 – Fractal Central

c) Abra todas as dobras até ficar com a folha do tamanho original;

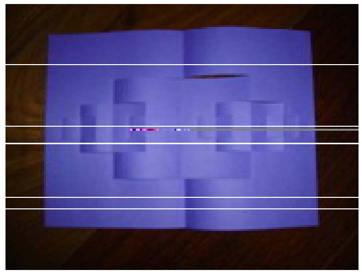


Ilustração 34 – Fractal Central

d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1)* para dentro;

e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;

f) Passe para os outros cortes, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;

g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e encontrará novos elementos que formarão o Fractal Central de *Geração 3.*

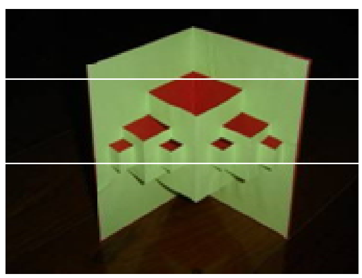


Ilustração 35 – Fractal Central

➲ Geração 4

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Central de *Geração 3;*

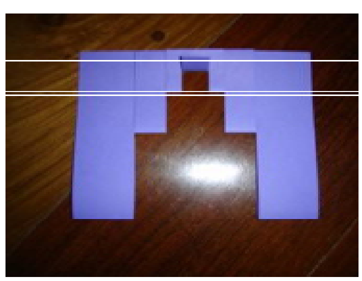


Ilustração 36 – Fractal Central

b) Repita todo o processo anterior na região central da folha, desdobrando, encontrando elementos novos e confeccionando o Fractal Central de *Geração 4.*

Ilustração 37 – Fractal Central

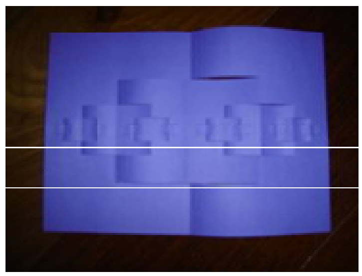


Ilustração 38 – Fractal Central

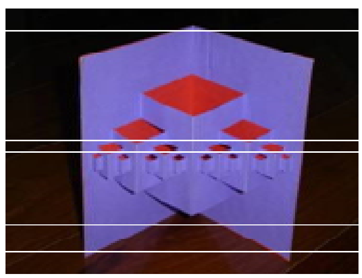


Ilustração 39 – Fractal Central

A Atividade 2 foi proposta aos alunos da seguinte forma:

Quadro 4 – Atividade 2/Bloco 1

Espera-se que o aluno, ao observar as mudanças de uma geração para outra, consiga identificar o que é um *elemento novo,* denominação dada por nós a cada forma que surge em uma geração, sendo esta proporcional à primeira que a ela deu origem. O entendimento deste termo implica no preenchimento correto do quadro presente nesta atividade, ocorrendo assim, o início da compreensão das idéias que remetem à generalização das fórmulas do termo geral e da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica.

As nossas expectativas são de que os alunos não encontrem dificuldades no preenchimento da tabela, uma vez que contarão com a visualização dos cartões de fractais.

Acreditamos que ao completar a tabela as duplas pesquisadas começarão a estabelecer conjecturas para uma possível generalização das respostas, que será alvo das investigações do *Bloco 2* de atividades.

As respostas esperadas para a Atividade 2 serão únicas, como veremos no quadro a seguir:

Quadro 5 – Atividade 2/Bloco 1

	Número de elementos novos por geração	Número total de elementos por geração
Geração 1	1	1
Geração 2	2	3
Geração 3	4	7
Geração 4	8	15

A apresentação da terceira atividade se deu como segue:

Quadro 6 – Atividade 3/Bloco1

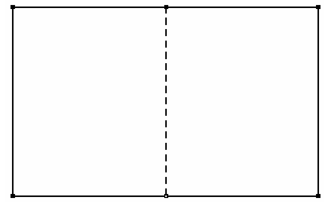
Atividade 3

Objetivo: *Confeccionar o* Fractal Árvore.

➲ **Geração 1: utilize uma folha.**

a) Dobre a folha ao meio no lado maior, conservando a abertura para cima;

(continuação)



b) Encontre o ponto médio do lado dobrado e construa uma perpendicular passando por ele de altura igual à metade da altura;

c) Faça um corte sob esta perpendicular;
d) Dobre a saliência da direita para cima até encontrar o outro lado da folha (você pode escolher a da esquerda, porém, deverá ser sempre a do mesmo lado);

e) Abra a dobra de modo a ficar com a folha do tamanho original;
f) Inverta a dobra, isto é, ela estará para dentro e você a colocará para fora, encontrando o 1º e único elemento deste fractal;
g) Está pronta a *Geração 1* do Fractal Árvore.

➲ **Geração 2: utilize outra folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Árvore de *Geração1*, para isso, temos que dobrar a folha de sulfite seguindo os passos de **a)** até **d)** do item anterior;
b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** da *Geração 1* nas duas partes da folha: a menor (dobrada) e a maior;
c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;
d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1*) para dentro;
e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;

f) Passe para o outro corte, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;
g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e encontrará novos elementos que formarão o Fractal Árvore de *Geração 2*.

➲ **Geração 3: utilize a terceira folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Árvore de *Geração 2,* conforme fizemos anteriormente;
b) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;
c) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1*) para dentro;

As facilidades e dificuldades desta atividade são as mesmas da Atividade 1, já que, ambas remontam à construção de fractais. Há apenas uma dificuldade maior na confecção deste fractal que é o número elevado de dobras a serem feitas e desfeitas. O fato dos alunos já terem construídos quatro fractais na primeira atividadi

c) Faça um corte sob esta perpendicular;

Ilustração 41 – Fractal Árvore

d) Dobre a saliência da direita para cima até encontrar o outro lado da folha (você pode escolher o da esquerda, porém, deverá sempre ser a do mesmo lado);

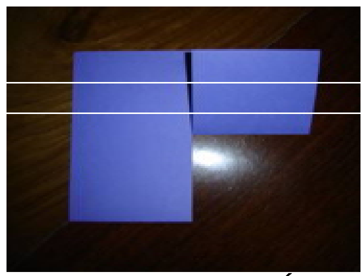


Ilustração 42 – Fractal Árvore

e) Abra a dobra de modo a ficar com a folha do tamanho original;

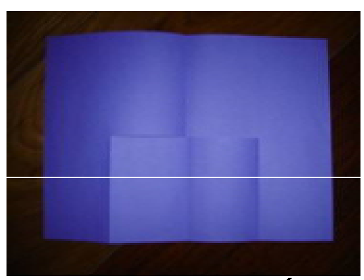


Ilustração 43 – Fractal Árvore

f) Inverta a dobra, isto é, ela estará para dentro e você a colocará para fora, encontrando o 1º e único elemento deste fractal;

g) Está pronta a *Geração 1* do Fractal Árvore.

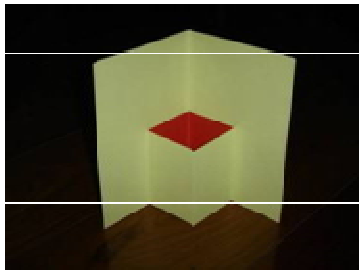


Ilustração 44 – Fractal Árvore

➲ **Geração 2**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Árvore de *Geração 1*, para isso, temos que dobrar a folha de sulfite seguindo os passos de **a)** até **d)** do item anterior;

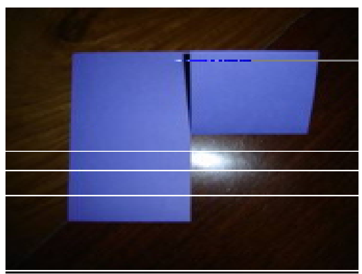


Ilustração 45 – Fractal Árvore

b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** da *Geração 1* nas duas partes da folha: a menor (dobrada) e a maior;

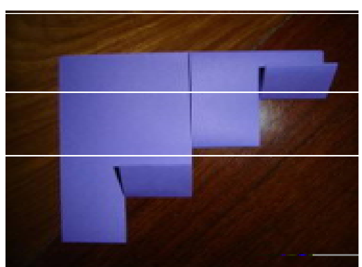


Ilustração 46 – Fractal Árvore

c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;

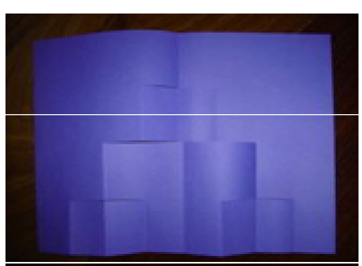


Ilustração 47 – Fractal Árvore

d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1*) para dentro;

e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;

f) Passe para o outro corte, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;

g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e encontrará novos elementos que formarão o Fractal Árvore de *Geração 2.*

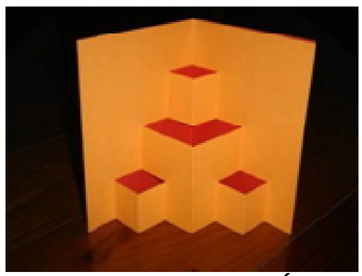


Ilustração 48 – Fractal Árvore

➲ **Geração 3**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Árvore de *Geração 2*, conforme fizemos anteriormente;

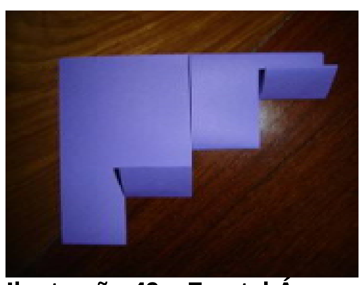


Ilustração 49 – Fractal Árvore

b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** da *Geração 1* em todas as partes da folha, que aqui deverão ser em número de quatro;

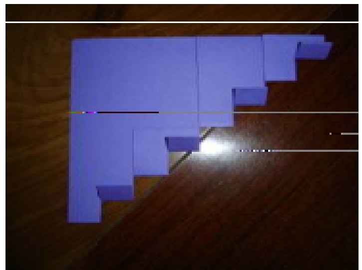


Ilustração 50 – Fractal Árvore

c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;

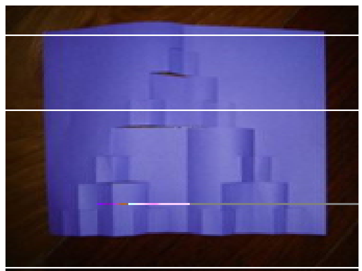


Ilustração 51 – Fractal Árvore

d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1*) para dentro;

e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;

f) Passe para os outros cortes, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;

g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e encontrará novos elementos que formarão o Fractal Árvore de *Geração 3.*

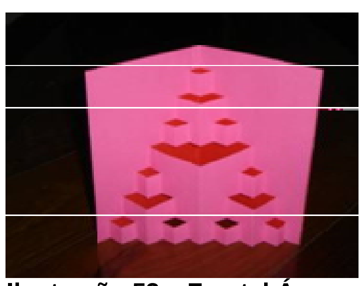


Ilustração 52 – Fractal Árvore

➲ **Geração 4**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Árvore de *Geração 3*;

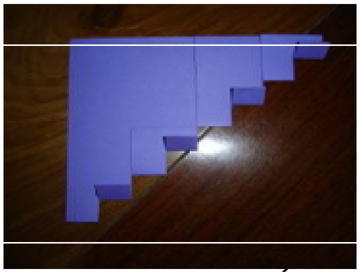


Ilustração 53 – Fractal Árvore

b) Repita todo o processo anterior nas partes fracionadas da folha, desdobrando, encontrando elementos novos e confeccionando o Fractal Árvore de *Geração 4*.

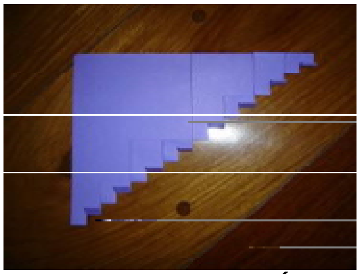


Ilustração 54 – Fractal Árvore

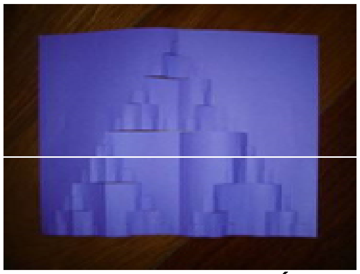


Ilustração 55 – Fractal Árvore

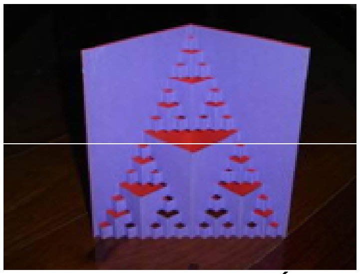


Ilustração 56 – Fractal Árvore

A Atividade 4 foi assim apresentada:

Quadro 7 – Atividade 4/Bloco 1

Atividade 4

Objetivo: *Estabelecer generalizações a partir da observação da relação parte/todo no Fractal Árvore, para assim compreender as fórmulas do termo geral e da soma dos n termos de uma Progressão Geométrica.*

Após a construção do fractal preencha o quadro abaixo.

	Número de elementos novos por geração	Número total de elementos por geração
Geração 1		
Geração 2		
Geração 3		
Geração 4		

A **Atividade 4** segue o esquema da **Atividade 2**, portanto teremos as mesmas facilidades, dificuldades e expectativas.

As respostas esperadas para a Atividade 4 serão únicas, como veremos no quadro a seguir:

	Número de elementos novos por geração	Número total de Elementos por geração
Geração 1	1	1
Geração 2	3	4
Geração 3	9	13
Geração 4	27	40

Tabela 2 – Atividade 4/Bloco 1

A apresentação da Atividade 5 se deu da seguinte forma:

Quadro 8 – Atividade 5/Bloco 1

Esperamos que nesta atividade o aluno complete facilmente o quadro e, através da manipulação destes dados, comece a formular questões que permitam o surgime assunto antes de iniciar a aplicação do bloco seguinte, uma vez que este é a ampliação das idéias aqui envolvidas.

As respostas esperadas para o quadro da Atividade 5 são:

	Altura (mm)	Largura (mm)	Comprimento (mm)	Volume (mm^3)
Geração 1	100	80	80	640 000
Geração 2	50	40	40	80 000
Geração 3	25	20	20	10 000
Geração 4	12,5	10	10	1 250

Tabela 3 – Atividade 5/Bloco 1

Esperamos que as respostas dos alunos às questões **"O que acontece com as dimensões conforme aumentamos a geração? E o que acontece com o volume? Há alguma tendência para esses valores?"** assemelhem-se a: *"As dimensões caem pela metade e o volume diminui na oitava parte, já que cada uma das dimensões do fractal fica reduzida à metade, temos, então,* $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$*. Verificamos que todos esses valores têm uma tendência a se aproximar de zero."*

Acreditamos que os alunos não terão dificuldades para responder as duas primeiras perguntas, porém, a resposta sobre a tendência para os valores encontrados poderá aparecer em poucas duplas, visto que este conceito mostra-se, aqui neste exemplo, mais abstrato que o conceito de volume.

Ao final do Bloco 1, após a devolução dos cadernos de atividades à professora-orientadora, será feita uma discussão sobre as respostas encontradas e um esclarecimento de possíveis dúvidas, sem haver interferência nas respostas dadas, funcionando apenas como nivelamento e compartilhamento das idéias concebidas pelos alunos.

3.3.2 Bloco 2: Fractais utilizando Softwares de Geometria Dinâmica

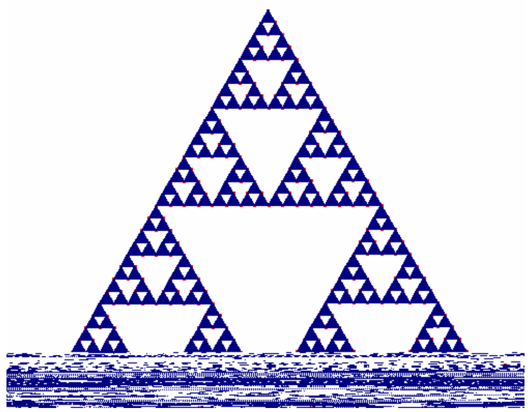
A primeira atividade deste bloco foi assim apresentada aos alunos:

Quadro 9 – Atividade 1/Bloco 2

Parte I

Em 1916, o Triângulo de Sierpinski foi apresentado por Waclaw Sierpinski (1882-1969), um matemático polonês de grande reputação mundial – até uma das crateras da Lua foi batizada com seu nome. A sua construção é iniciada por um triângulo eqüilátero sob o qual aplicamos repetidas vezes a operação de tomar os pontos médios dos três lados, uni-los obtendo quatro triângulos congruentes, dos quais retiramos o central. Este é o processo básico de construção. É o que vamos fazer.

Para iniciar a construção, abra o Cabri-Géomètre e siga os passos a seguir elencados.



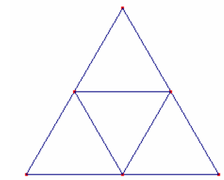
Triângulo de Sierpinski após 5 gerações

a) Construa os pontos A e B e trace o segmento AB;
b) Trace uma circunferência de centro A passando por B e uma circunferênci

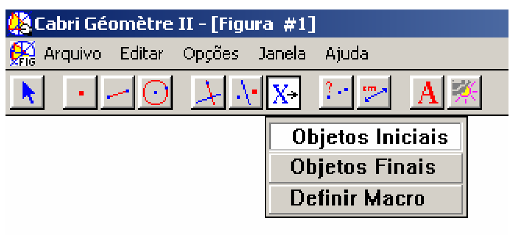
(continuação)

Observe que o triângulo inicial ficou dividido em 4 triângulos congruentes. Para o Triângulo de Sierpinski o triângulo central é desprezado. Então, ficaremos com 3 novos triângulos.

➲ *Grave esta figura, pois precisaremos dela na construção das gerações na* **Parte III**.



a) Selecione no menu *Macro* a opção *Objetos Iniciais*: clique nos vértices do triângulo maior;
b) Selecione no menu *Macro* a opção *Objetos Finais*: clique no triângulo que tem como vértices o ponto médio dos lados do triângulo maior;
c) Selecione no menu *Macro* a opção *Definir Macro*: informe o nome da macro e, opcionalmente, as instruções para a sua construção;



d) Para ativá-la, selecione no menu *Macro* a nova opção que conterá o nome dado por você à macro, marque os objetos iniciais (três vértices de um triângulo) e terá os objetos finais (triângulos formados pelos pontos médios).

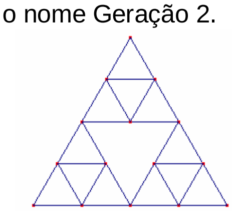
Parte III

➲ **Geração 1**

Daremos o nome de *Geração 1* àquela figura gravada na **Parte II**. Abra o arquivo e regrave-o com este nome.

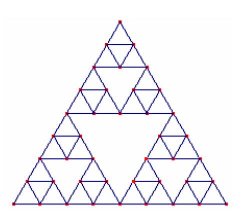
➲ **Geração 2**

A partir da *Geração 1* obtenha a *Geração 2* aplicando a macro a cada um dos triângulos menores, lembrando que para a construção do *Triângulo de Sierpinski, **todo triângulo central é desprezado***. Grave esta figura com o nome Geração 2.



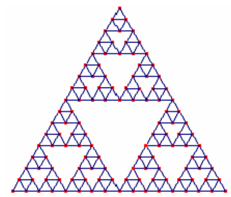
➲ **Gerações 3 e 4**

Proceda da mesma forma que no item anterior, não esquecendo de gravar cada figura com os nomes de Geração 3 e Geração 4.



Geração 3

(continuação)



Parte IV

Abra arquivo por arquivo gravado na atividade 3 e complete a tabela abaixo. Considere o lado do triângulo inicial como sendo 32.

	Quantidade de triângulos novos*	Lado do triângulo desta geração**	Área do triângulo novo	Área total dos triângulos
Geração 0	1	32	$\frac{1024\sqrt{3}}{4} = 256\sqrt{3}$	$256\sqrt{3}$
Geração 1				
Geração 2				
Geração 3				
Geração 4				

Agora responda:

➲ O que acontece com o lado do triângulo que surge a cada nova geração? Há alguma tendência para esses valores?

____

____

____

➲ Qual a tendência para a área do novo triângulo? E para a área total dos triângulos?

____

____

____

* Lembre-se que os triângulos centrais não devem ser contados, pois não fazem parte da figura.

** É importante lembrar que a área de um triângulo eqüilátero é dada por $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, onde l é o lado do triângulo.

Nesta atividade o aluno terá contato com o Cabri Géomètre, em especial com as macro-construções. Este recurso do Cabri nos permitirá a visualização da recursão, que mostra claramente a auto-similaridade dos fractais.

Fizemos a opção pelo estudo do Triângulo de Sierpinski - importante fractal construído através de triângulos eqüiláteros – por nos permitir uma auto-similaridade que conduz às generalizações que pretendemos explorar para estabelecimento de possíveis conjecturas na generalização de padrões, como por exemplo, a soma de infinitos termos de uma Progressão Geométrica.

Para a construção deste fractal, consideremos um triângulo eqüilátero inicial; por meio dos pontos médios de cada um dos lados dos triângulos, obtém-se um novo triângulo eqüilátero; o triângulo inicial fica dividido em 4 outros triângulos; elimina-se o triângulo central; repete-se esta seqüência em cada um dos triângulos não eliminados, sucessivamente; tem-se, assim, o Triângulo de Sierpinski.

No manuseio do software podem aparecer algumas dúvidas, como por exemplo, com relação à gravação das figuras e à utilização da macro. Caso ocorram, haverá a interferência da professora-orientadora com orientações sobre a manipulação do software, uma vez que, o alvo desta atividades é a análise da construção feita e não o processo de construção.

A **Atividade 1** foi dividida em 4 partes para facilitar a construção do Triângulo de Sierpinski, construído em 4 gerações para que o aluno possa observar o comportamento deste fractal em cada geração.

A primeira parte da atividade foi pensada de modo a permitir uma integração do aluno com o software; nesta etapa também construímos o triângulo eqüilátero que servirá de base para a macro-construção.

Na parte II, continuamos a explorar os recursos do software: construímos a macro para um triângulo eqüilátero a partir dos pontos médios do lado de outro triângulo eqüilátero.

(Estas duas primeiras partes da atividade servem para manuseio do software e contato com os seus recursos.)

É na parte III que confeccionamos os fractais de geração 1, 2, 3 e 4, onde verificamos a dependência da geração 2 em relação a geração 1, a da geração 3 em relação a geração 2 e a da geração 4 em relação a geração 3; é nessa dependência que encontramos a recursão e a similaridade, peças fundamentais para análise desta atividade.

Fi

	Quantidade de triângulos novos	Lado do triângulo desta geração	Área do triângulo novo	Área total dos triângulos
Geração 0	1	32	$\frac{1024\sqrt{3}}{4} = 256\sqrt{3}$	$256\sqrt{3}$
Geração 1	3	16	$\frac{256\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3}$	$3.64\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$
Geração 2	9	8	$\frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$	$9.16\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$
Geração 3	27	4	$\frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$	$27.4\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$
Geração 4	81	2	$\frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$	$81\sqrt{3}$

Tabela 4 – Atividade 1/Bloco 2

Com relação às perguntas, esperamos que os alunos consigam compreender o conceito de tendência e não apresentem dificuldade na solução das questões, visto que, se eles conseguiram resolver as duas últimas colunas da tabela já estão com estas respostas pensadas.

A seguir, apresentaremos algumas ilustrações referentes à Atividade 1.

➲ **Parte I**

a) Construa os pontos A e B e trace o segmento AB;

- ✓ Menu Ponto: Ponto A e B;
- ✓ Menu Rótulo: Nomear os pontos A e B;
- ✓ Menu Reta – Segmento: Traçar AB.

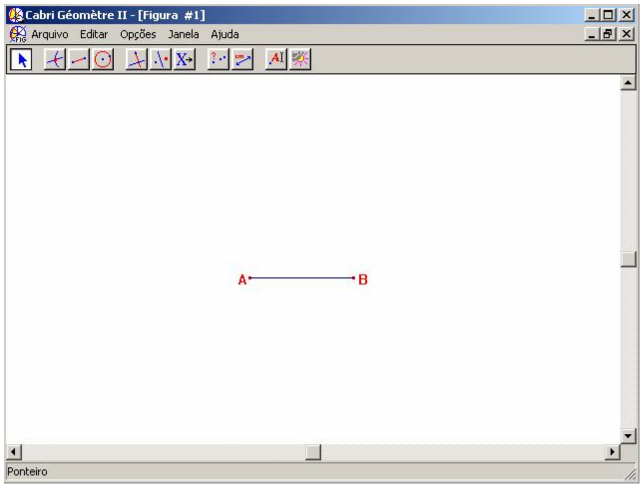


Ilustração 57 – Cabri Géomètre

b) Trace uma circunferência de centro A passando por B e uma circunferência de centro B passando por A;

- ✓ Menu Circunferência: clique em A e depois em B (mensagens: **este centro** – A**, passando por** – B)**;**
- ✓ Menu Circunferência: clique em B e depois em A (mensagens: **este centro** – B**, passando por** – A).

Ilustração 58 – Cabri Géomètre

c) Chame de C a intersecção superior das duas circunferências;

- ✓ Menu Ponto – Ponto de Intersecção: clicar na intersecção;
- ✓ Menu Rótulo: nomear o ponto C.

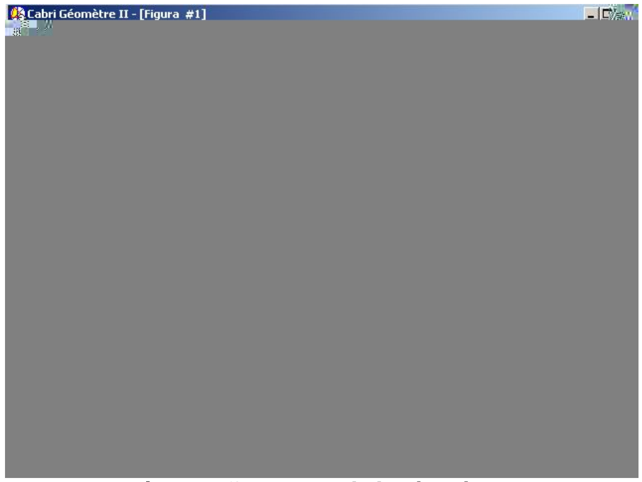


Ilustração 59 – Cabri Géomètre

d) Trace os segmentos AC e BC;

- ✓ Menu Retas – Segmento: clicar em A e C; clicar em B e C;

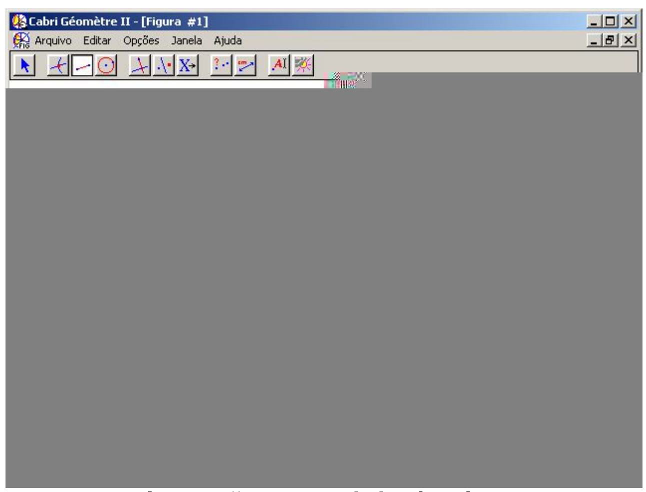


Ilustração 60 – Cabri Géomètre

e) Esconda as circunferências para que apareça somente o triângulo.

- ✓ Menu Esconder/Mostrar: clicar em cada uma das circunferências.

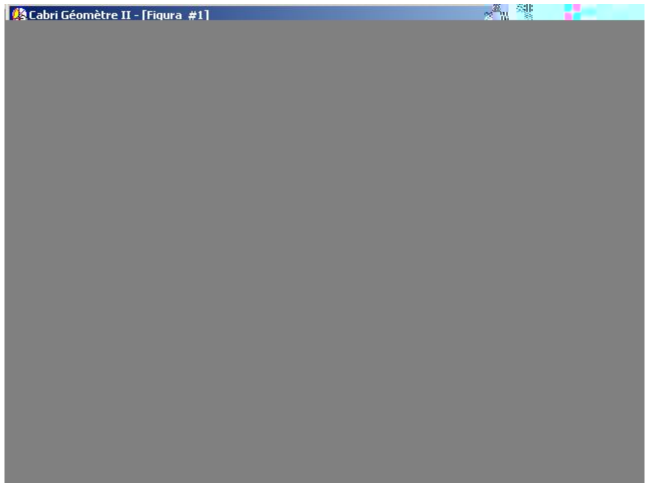


Ilustração 61 – Cabri Géomètre

➲ Parte II

a) Essa construção partirá do Triângulo Eqüilátero;

b) Encontre o ponto médio de cada um dos lados do triângulo;

- ✓ Menu Reta Perpendicular – Ponto Médio: clicar sob os lados do triângulo.

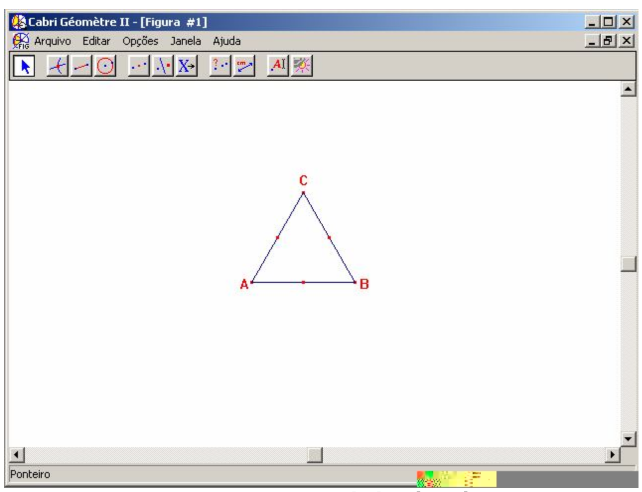


Ilustração 62 – Cabri Géomètre

c) Uma os pontos médios através de um triângulo;

- ✓ Menu Retas – Triângulo: clique nos três pontos médios;

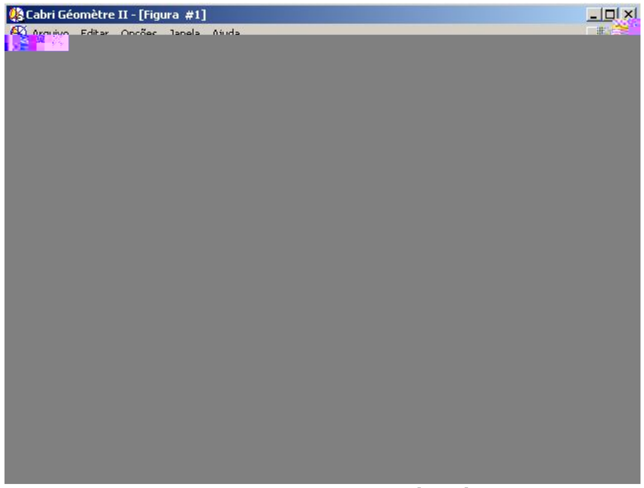


Ilustração 63 – Cabri Géomètre

➲ Grave esta figura, pois precisaremos dela na construção das gerações na **Parte III**.

✓ Arquivo – Salvar Como – Use o nome: Triequi.

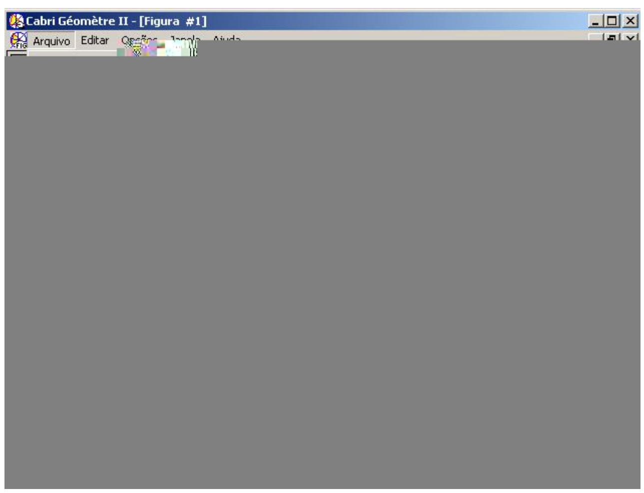


Ilustração 64 – Cabri Géomètre

d) Construção da macro;

✓ Menu Macro – Objetos Iniciais: clique nos vértices do triângulo maior;
✓ Menu Macro – Objetos Finais: clique no triângulo que tem como vértices o ponto médio dos lados do triângulo maior;
✓ Menu Macro – Definir Macro: informe o nome da macro e, opcionalmente, as instruções para a sua construção;

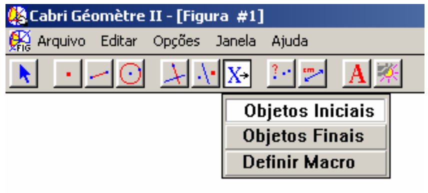


Ilustração 65 – Cabri Géomètre

e) Ativação da macro;

- ✓ Menu Macro: clique no nome dado à macro, marque os objetos iniciais (três vértices de um triângulo) e terá os objetos finais (triângulos formados pelos pontos médios).

➲ Parte III

- ✓ Dê o nome de *Geração 1* àquela figura gravada na **Parte II**. Abra o arquivo e regrave-o com este nome (aproveite para esconder os rótulos – nomes dos pontos, para que não atrapalhe a construção do fractal).

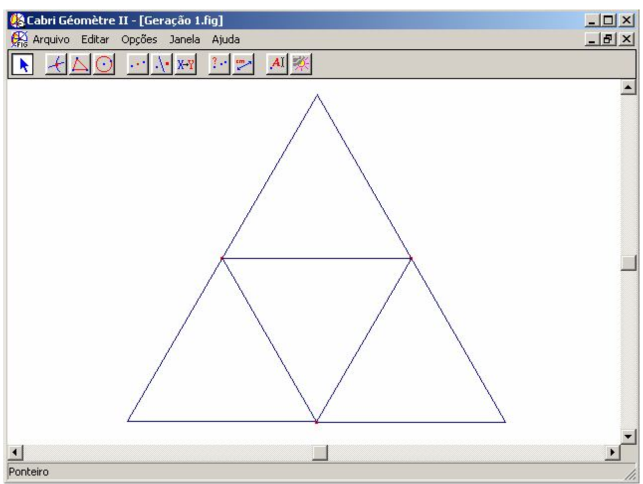


Ilustração 66 – Cabri Géomètre

- ✓ A partir da *Geração 1* obtenha a *Geração 2* aplicando a macro a cada um dos triângulos menores, lembrando que para a construção do *Triângulo de Sierpinski* **todo triângulo central é desprezado**. Grave esta figura com o nome *Geração 2*.

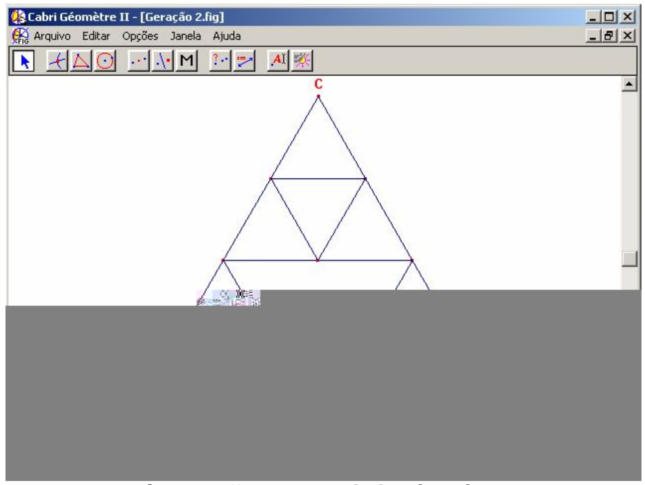


Ilustração 67 – Cabri Géomètre

✓ Repita duas vezes o procedimento do item anterior, não esquecendo de gravar cada figura com os nomes de *Geração 3* e *Geração 4*.

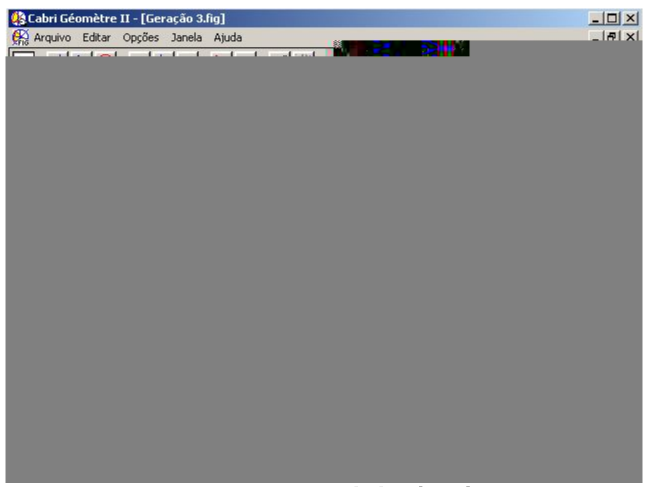


Ilustração 68 – Cabri Géomètre

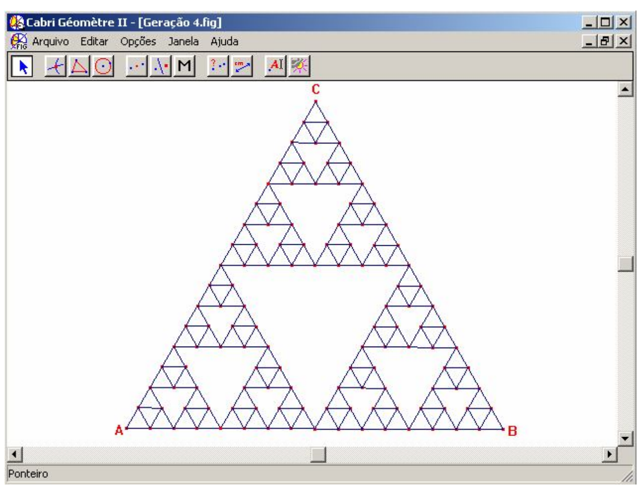


Ilustração 69 – Cabri Géomètre

A forma que escolhemos para apresentar a segunda atividade foi:

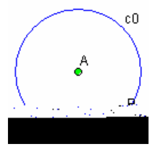
Quadro 10 – Atividade 2/Bloco 2

Parte I

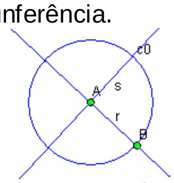
O fractal Tetra-Círculo foi criado (ou recriado) em 1995 pelo IME-USP com o objetivo de explorar o conceito de programação utilizando "software" de Geometria Dinâmica. É assim nomeado pois se baseia numa circunferência com quatro pólos.

Para iniciar a construção, abra o *iGeom* e siga os passos a seguir elencados.

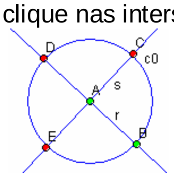
a) Dados os pontos A e B, construa a circunferência c0 de centro A, passando por B;



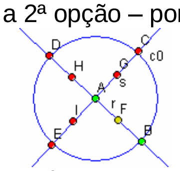
b) Construa a reta r passando por A e por B e a reta s perpendicular a r, passando por A:
- ✓ Clique no botão Retas e escolha a primeira opção. A reta será construída a partir dos dois pontos utilizados anteriormente para definir a circunferência;
- ✓ Ainda no botão Retas, escolha opção reta perpendicular (5º botão). Clique primeiro na reta e depois no centro da circunferência.



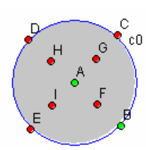
c) Construa os pontos C, D e E, das intersecções de r e s com c0:
- ✓ Escolha o botão Ponto e a seguir clique nas intersecções.



d) Encontre os pontos médios de AB, AC, AD e AE:
- ✓ Clique no botão Ponto e escolha a 2ª opção – ponto médio.



e) Pinte o interior da circunferência e esconda as retas:
- ✓ No botão Medidas (8º botão), selecione a circunferência e clique na opção *Constrói interiores* (última opção). Selecione a cor dando um duplo clique com o botão esquerdo no interior da circunferência (para ter uma cor igual à do script, use o tom vermelho 148);
- ✓ No botão Edição, selecione o item a ser escondido e clique na opção esconder, objeto a objeto.

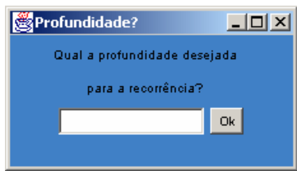


(continuação)

f) Está pronta a base para a construção do fractal *Tetra-Círculo*. Salve-a com o nome *Base para fractal.geo.*

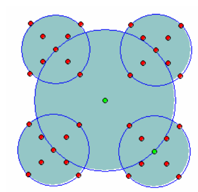
Parte II

a) Agora faremos uso dos scripts já gravados no Igeom;
b) Clique no botão *Marcar ou desmarcar objetos* (6º botão) e selecione uma dupla de pontos, que pode ser BF (nesta ordem), CG, DH ou EI;
c) Selecione o botão Script (11º botão). Clique na setinha que faz executar o script (neste momento você irá abrir um script pré-concebido do Igeom). Agora você procurará o script seguindo o caminho: *exemplos/scr/frac-cir2*.



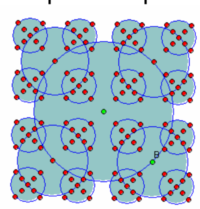
A figura anterior mostra a janela que aparecerá. A profundidade indica a construção obtida pelo script: script 0 obteremos uma construção semelhante à inicial; script 1, aparecerá uma construção onde em cada um dos tetra-círculos do script 0 aparecerá outro tetra-círculo; script 2, tem-se um novo tetra-círculo em cada um dos tetra-círculos do script 1;

d) Lembre-se que o processo do item **c** deve ser aplicado a cada um dos 4 pares de pontos da figura base do item **b**;
e) Esta terminado o Tetra-Círculo de recorrência 0.



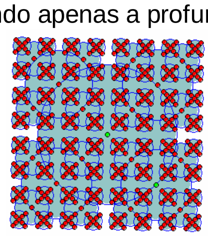
Parte III

a) Abra o arquivo *Base para fractal.geo* gravado no fim da **Parte I**;
b) Siga os passos da **Parte II**, trocando apenas a profundidade da recorrência para 1.



Parte IV

a) Abra o arquivo *Base para fractal.geo* gravado no fim da **Parte I**;
b) Siga os passos da **Parte II**, trocando apenas a profundidade da recorrência para 2.



(continuação)

Observação: A **Atividade 2** tem o objetivo de manipulação do Igeom para a percepção de seu dinamismo. *O fractal Tetra-Círculo será retomado no **Bloco 3**, para fins de generalizações.*

Esta atividade tem o objetivo de apresentar o fractal Tetra-Círculo que será usado no *Bloco 3*, de mostrar o dinamismo do software iGeom e exemplificar a característica de auto-similaridade presente nos fractais por meio da construção dos Tetra-Círculos de recorrências 0, 1 e 2.

Uma dificuldade desta atividade pode ser a execução do software, que apesar de ser bastante semelhante ao Cabri (software mais conhecido pelos alunos), apresenta alguns obstáculos de manuseio, como por exemplo, necessita de bastante atenção ao clicar os ícones de alguma função, já que estes, se não forem desligados ficam em funcionamento.

Apesar de não possuir tabelas ou apresentar perguntas a serem respondidas, esta atividade tem grande relevância, uma vez que mostrará aos alunos a facilidade da construção de um fractal num software de Geometria Dinâmica, como o Igeom, que no que cerne à Geometria Fractal apresenta maior dinamismo do que o Cabri Géomètre. Alertamos que é esse o motivo que nos fez apresentar primeiramente o Cabri, por acreditarmos que se o contrário fosse feito os alunos não teriam interesse no software francês, já que ele é menos dinâmico neste tópico, porém, de suma importância para um entendimento matemático das construções. Resumidamente, o Igeom é mais ágil para construção de fractais, porém, o Cabri é de mais fácil manipulação.

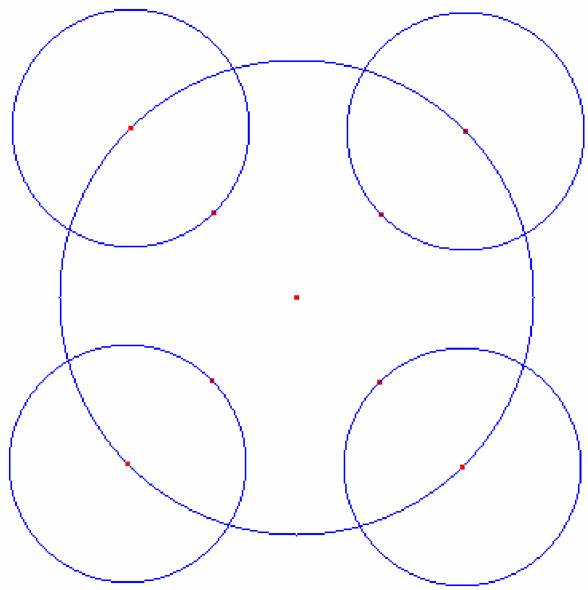
Ao final do Bloco 2, será feita uma discussão sobre as respostas encontradas e um esclarecimento de possíveis dúvidas, sem haver interferência nas respostas dadas, funcionando apenas como nivelamento e compartilhamento das idéias concebidas pelos alunos.

3.4.3 Bloco 3: Generalizações

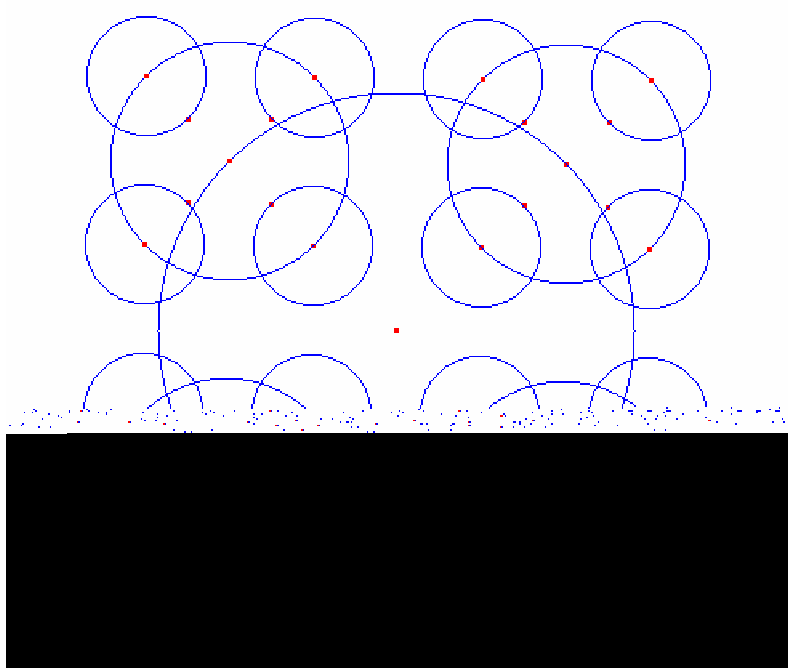
O Bloco 3 será iniciado pela seguinte atividade:

Quadro 11 – Atividade 1/Bloco 3

➲ **Geração 1**

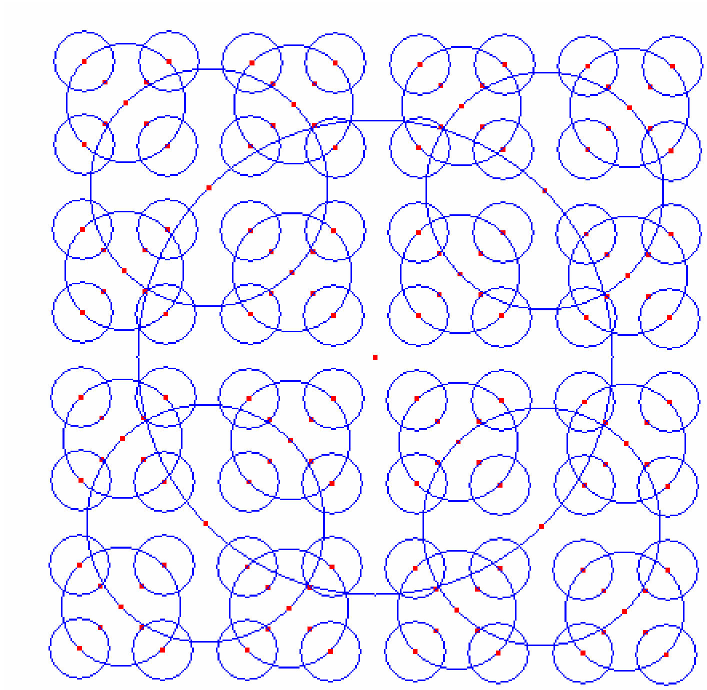


➲ **Geração 2**

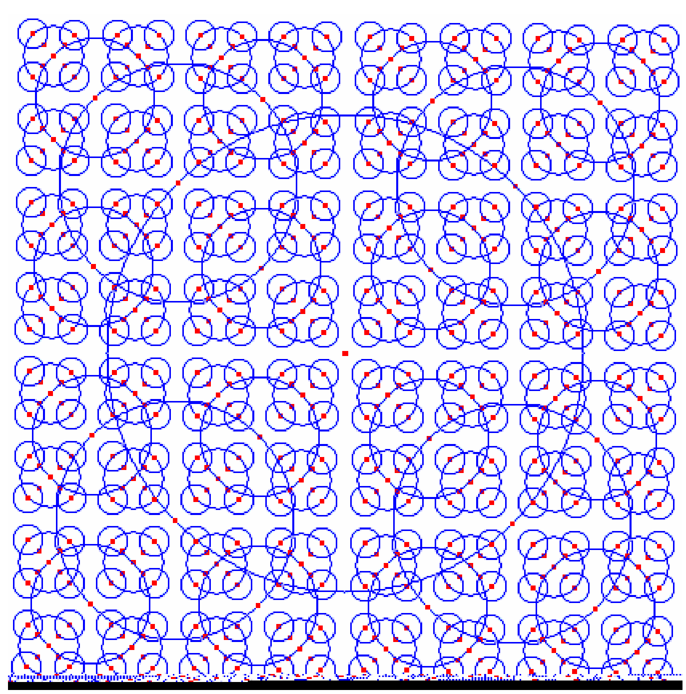


(continuação)

➲ **Geração 3**

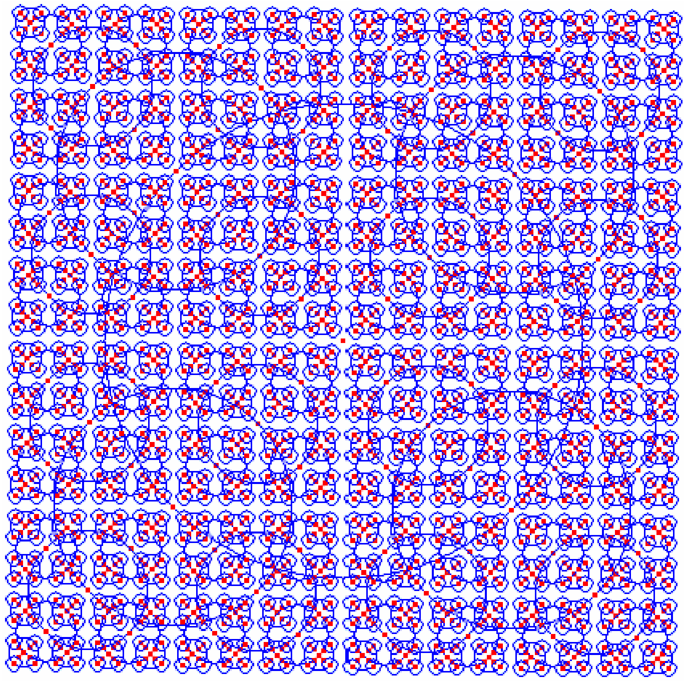


➲ **Geração 4**



(continuação)

➲ **Geração 5**



Nesta atividade os alunos irão observar as gerações 1, 2, 3, 4 e 5 do fractal Tetra-Círculo, para remeter às generalizações e questionamentos das próximas atividades.

Atentamos para a necessidade da observação que permitirá ao aluno começar, naturalmente, a perceber padrões que levem às generalizações.

A segunda atividade deste bloco será assim apresentada:

Quadro 12 – Atividade 2/Bloco 3

Atividade 2

1) Tendo em vista a Geração 5, responda as questões.

a) Quantas circunferências há nesta figura?__________________________

b) Em relação à *Geração* 4, quantas circunferências **novas** há nesta figura? _________________________

c) Em relação à *Geração* 5, quantas circunferências **novas** haverá na *Geração 6*? _________________________

d) Há uma aproximação para a área ocupada pela figura? Justifique. ____

(continuação)

2) Como fazer para encontrar o número de circunferências da *Geração 2*, a partir da *Geração 1*?
____
____
____

3) Quantas circunferências novas, em relação à geração anterior, há na:
   a) Geração 2? ______________________________________
   b) Geração 3? ______________________________________
   c) Geração 4? ______________________________________
   d) Geração **n**? ______________________________________

4) Qual é o total de circunferências na:
   a) Geração 2? ______________________

Nesta atividade o aluno deverá responder a questionamentos sobre o Fractal Tetra-Círculo.

Além de fazer perguntas no sentido tradicional – conhecer o termo de ordem **n + 1** após conhecer o termo de ordem **n**, isto é, perguntamos sobre a geração 2 após observarmos a geração 1 ou qual o comportamento da geração 3 investigando a geração 2, etc., optamos, também, por fazer perguntas no sentido inverso, como por exemplo, indagar sobre a geração 4 após observar a geração 5.

Quando perguntamos sobre o número de circunferências da Geração 5, estamos provocando o aluno a formular conjecturas sobre o número de circunferências geração a geração, visto que o número excessivo de circunferências na geração 5 impede-o de contá-las. Este “exagero” de circunferências, a partir da geração 3, pensamos ser a mola propulsora para que o aluno formule generalizações, a fim de que não precise ficar contando as circunferências. Acreditamos que tais generalizações irão surgir de forma espontânea após essas observações.

Sabemos que nesta atividade irão surgir muitas dificuldades e talvez algumas duplas não consigam resolver todos os exercícios. Estas dificuldades se manifestarão se os alunos não enxergarem os números presentes nos quadros na forma de potência e/ou não percebam a regularidade presente neles.

Propositadamente, começamos a atividade com uma pergunta que dificilmente será respondida primeiramente. Acreditamos que os alunos irão pular esta questão e depois voltar para ela, já que assim fica mais fácil. Mas, então, por que não a deixamos por último? O nosso objetivo é provocar o aluno para chegar às conclusões mais diversas possíveis, e se dermos a ele uma questão que ele ainda não tem condições de responder, possivelmente ele desenvolverá uma série de argumentações que poderá se muito válida. Os franceses freqüentemente usam este artifício em suas seqüências de atividades. Não será feita nenhuma interferência caso o aluno não consiga resolver algum item.

Um olhar mais atento será pedido ao(s) observador(es) nesta atividade, para que anote todo o raciocínio que a dupla venha desenvolver para responder a esta questão.

Outro questionamento em que possivelmente aparecerá complicações será na que se refere à aproximação da área ocupada pela figura. Acreditamos que os alunos perceberão que a área se aproxima a área de um quadrado, porém, uma argumentação para se descobrir o lado deste quadrado – que é irrelevante para o que pretendemos com a seqüência de ensino - pode não aparecer. Novamente, não haverá interferência da professora-orientadora.

Para finalizar, na questão 4, provavelmente, aparecerá um dos grandes desafios desta seqüência: estabelecer qual é o número total de circunferências numa dada geração **n**. Possivelmente poucas duplas encontrarão esta solução. A interferência da professora-orientadora ocorrerá no sentido de pedir que verifiquem se não há características comuns aos valores numéricos obtidos, orientando, como em outras atividades, para que escrevam os números na forma de potência.

As respostas esperadas às perguntas desta atividade são:

Quadro 13 – Atividade 2/Bloco 3

Para a Atividade 3 a apresentação foi a seguinte:

Quadro 14 – Atividade

(continuação)

➲ **Tabela da *Atividade 2/Bloco 1***

Fractal Central		
	Número de elementos novos por geração	Número total de elementos por geração
Geração 1	1	1
Geração 2	3	4
Geração 3	9	13
Geração 4	27	40
Geração **n**		

➲ **Tabela da *Atividade 4/Bloco 1***

Fractal Árvore		
	Número de elementos	

O objetivo desta atividade é retornar aos quadros dos blocos anteriores para proceder às generalizações. Sabemos que os alunos encontrarão muitas dificuldades nos itens *Área do triângulo novo* e *Área total dos triângulos* e talvez não solucionem os problemas.

O primeiro problema que surgirá será encontrar a Geração **n** do número total de elementos por geração do Fractal Central (Tabela da Atividade 2/Bloco 1) e do Fractal Árvore (Tabela da Atividade 4/Bloco 1). Da mesma forma que no exercício 3 da atividade anterior, isso requer encontrar o padrão (ou fórmula) para o que chamamos de soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica - das conjecturas que os alunos terão que estabelecer, esta é a mais difícil. A nossa ajuda será no intuito de alertá-los que a Geração **n** deve ser dada em função do fator de aumento de um fractal para o outro e do primeiro elemento e do número da geração, isto é, relacionar a geração à quantidade de elementos, lembrando que facilita muito escrever as respostas na forma de potência, uma vez que o estudo de Progressão Geométrica perpassa pelo estudo das potências. Muito provavelmente, os alunos que solucionaram o exercício 3 da atividade anterior também resolverão este.

Para o preenchimento da Tabela da Atividade 5/Bloco 1 acreditamos que os alunos não apresentarão dúvidas. Caso surjam dificuldades o alerta será para que seja feito o uso de potências e de suas propriedades, como em quase todos os exercícios. Por exemplo, no cálculo do volume pedido em questão posterior ao quadro, usamos multiplicação de potências de mesma base.

Já na Tabela da Atividade 1/Bloco 2 as dificuldades se apresentarão nas três colunas: lado do triângulo desta geração; áreTm (l) Tj 1 0 0379.84 Tm ( ) Tj29.12 5.64 338.4

professora-orientadora poderá intervir dando esta orientação. Ainda como continuidade desta tabela aparecem perguntas sobre qual seria o lado da Geração **n** se chamássemos a medida do lado do triângulo inicial de **l**, e como seria expressa área do novo triângulo e a área total dos triângulos. Novamente, caso os alunos não visualizem as resposta em formato de potências a solução não será encontrada. A intromissão da professora-orientadora somente ocorrerá para alertar ao fato de que este exercício segue a mesma linha dos outros, portanto, o uso de potências é essencial.

Após o término do preenchimento das tabelas e questões desta atividade, esperamos que assim as respostas se aproximem de:

Fractal Central		
	Número de elementos novos por geração	Número total de elementos por geração
Geração 1	1	1
Geração 2	3	4
Geração 3	9	13
Geração 4	27	40
Geração **n**	3^{n-1}	$\frac{3^n-1}{3-1}$ ou $\frac{1.(3^n-1)}{3-1}$

Tabela 5 – Atividade 3/Bloco 3

Fractal Árvore		
	Número de elementos novos por geração	Número total de elementos por geração
Geração 1	1	1
Geração 2	2	3
Geração 3	4	7
Geração 4	8	15
Geração **n**	2^{n-1}	2^n-1 ou $\frac{2^n-1}{2-1}$ ou $\frac{1.(2^n-1)}{2-1}$

Tabela 6 – Atividade 3/Bloco 3

	Altura (mm)	Largura (mm)	Comprimento (mm)	Volume (mm^3)
Geração 1	100	80	80	640 000
Geração 2	50	40	40	80 000
Geração 3	25	20	20	10 000
Geração 4	12,5	10	10	1 250
Geração **n**	$\frac{100}{2^{n-1}}$	$\frac{80}{2^{n-1}}$	$\frac{80}{2^{n-1}}$	$\frac{640000}{2^{3(n-1)}}$

Tabela 7 – Atividade 3/Bloco 3

➲ Se chamássemos a medida da altura de **a**, da largura de **b** e do comprimento de **c** como sendo dimensões da *Geração 1*, quais seriam as dimensões desta nova Geração **n**? E como seria expresso o Volume?

Usando as nomenclaturas acima, teríamos:

Altura = $\frac{a}{2^{n-1}}$

Largura = $\frac{b}{2^{n-1}}$

Comprimento = $\frac{c}{2^{n-1}}$

Volume = $\frac{abc}{2^{3(n-1)}}$

	Quantidade de triângulos novos	Lado do triângulo desta geração	Área do triângulo novo	Área total dos triângulos
Geração 0	1	32	$\frac{1024\sqrt{3}}{4}=256\sqrt{3}$	$256\sqrt{3}$
Geração 1	3	16	$\frac{256\sqrt{3}}{4}=64\sqrt{3}$	$3.64\sqrt{3}=192\sqrt{3}$
Geração 2	9	8	$\frac{64\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$	$9.16\sqrt{3}=144\sqrt{3}$
Geração 3	27	4	$\frac{16\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$	$27.4\sqrt{3}=108\sqrt{3}$
Geração 4	81	2	$\frac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$	$81\sqrt{3}$
Geração **n**	3^n	$\frac{2^5}{2^n}$ ou 2^{5-n}	$2^{8-2n}.\sqrt{3}$	$2^{8-2n}.3^n.\sqrt{3}$

Tabela 8 – Atividade 3/Bloco 3

➲ Se chamássemos a medida do lado do triângulo inicial de **l** *(Geração 0*), qual seria o lado desta nova Geração **n**? E como seria expressa a área do novo triângulo e a área total dos triângulos?

Usando as nomenclaturas anteriores, teríamos:

Lado = $\frac{l}{2^n}$

Área do triângulo novo = $\frac{\left(\frac{l}{2^n}\right)^2.\sqrt{3}}{4}=\frac{l^2}{2^{2n}}.\sqrt{3}.\frac{1}{2^2}=\frac{l^2.\sqrt{3}}{2^{2.(n+1)}}$

Área total dos triângulos = $\frac{3^n.l^2.\sqrt{3}}{2^{2.(n+1)}}$ ou $\frac{l^2.3^{n+\frac{1}{2}}}{2^{2.(n+1)}}$

Temos a certeza que de todas as atividades até aqui apresentadas, esta será a que os alunos enfrentarão maiores dificuldades, mas também é nítido que o caminho percorrido para a organização das idéias no sentido de deduzir as fórmulas usuais em Progressão Geométrica está se finalizando.

A quarta atividade deste bloco foi assim apresentada aos alunos:

Quadro 15 – Atividade 4/Bloco 3

Atividade 4

O objetivo desta atividade é institucionalizar os conceitos que envolvem o conhecimento de Progressões Geométricas.

Observe na tabela da atividade da **Atividade 1 - Parte IV** do *Bloco 2* a seqüência formada pela quantidade de triângulos novos: (1, 3, 9, ...). Cada termo, a partir do segundo é obtido multiplicando o termo anterior pela constante 3. Observe agora a seqüência formada pelos lados do triângulo: (32, 16, 8, ...). Cada termo é obtido multiplicando o termo anterior pela constante 0,5. Esse tipo de seqüência é chamado de **Progressão Geométrica**, e à constante dá-se o nome de **Razão**.

Definição: Uma **Progressão Geométrica** (**P.G.**) é uma seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante ***q***. O número ***q*** é chamado de *razão* da progressão geométrica.

Alguns exemplos de progressão geométrica:

- (1, 3, 9, ...) é uma PG de razão q = 3;
- (1, 2, 4, ...) é uma PG de razão q = 2;
- (105**;** 52,5**;** 26,25**;** ...) é uma PG de razão q = $0{,}5$.

<u>Termo geral da PG</u>

O termo geral é uma expressão que nos permite obter um termo qualquer da PG conhecendo o 1º termo $\mathbf{a_1}$ e a razão **q**.

Para deduzir a fórmula do termo geral partiremos do primeiro exemplo apresentado: (1, 3, 9, ...). Assim, temos: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, ..., e q = 3.

Podemos reescrever esta seqüência e encontrar o *Termo Geral da PG* da seguinte maneira:

$$a_1 = 1 \,.\, 3^0$$
$$a_2 = 1 \,.\, 3^1$$
$$a_3 = 1 \,.\, 3^2$$
$$(...)$$
$$\boxed{\mathbf{a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}}}$$

<u>Soma dos *n* primeiros termos de uma PG</u>

Dada a PG (a_1, a_2, a_3, a_4,..., a_n), de razão q $\neq 1$, temos:

$$Sn = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Para dedução de uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PG utilizaremos a PG (2, 6, 18, 54, ...). Assim, tem-se:

$$S_1 = a_1 = 2$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = 8$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 26$$
$$(\ldots)$$

(continuação)

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$S_1 = \frac{2.(3^1 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_2 = \frac{2.(3^2 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_3 = \frac{2.(3^3 - 1)}{3 - 1}$$

(...)

$$\boxed{S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Soma dos infinitos termos de uma PG

Se uma PG possui razão no intervalo]-1,1[, é possível obter a soma de seus infinitos termos.

A PG (100; 50; 25;...) será utilizada como exemplo para obtenção da fórmula. Nela, temos $a_1 = 100$ e $q = ½$. Como estamos observando a soma de infinitos termos, vamos elevar o valor de n nas somas. Deste modo:

$$S_5 = \frac{100.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{100.\left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 193{,}75$$

$$S_{10} = \frac{100.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{100.\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 199{,}8046875$$

$$S_{20} = \frac{100.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{100.\left(\frac{1}{2^{20}} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} \cong 199{,}999809265$$

Podemos notar que, à medida que **n** aumenta, o valor de $\mathbf{S_n}$ fica cada vez mais próximo de 200. Dizemos que, para valores de **n** tão grandes quanto se queira, a soma 100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 ... converge para 200, ou ainda, 100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 ... = 200.

Quando temos uma P.G. (a_1, a_2, a_3, ...) cuja razão q, onde 0 < q < 1, verificamos que $\mathbf{q^n}$ é um número cada vez mais próximo de zero à medida que o expoente **n** aumenta. Logo, quando calculamos

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

para **n** <u>suficientemente grande</u>, temos que a soma infinita terá valor

$$\frac{a_1}{1 - q}.$$

Verificando em nosso exemplo, temos:

$$S_n = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = 200.$$

Esta atividade tem por objetivo revelar os conceitos matemáticos de Progressões Geométricas que permearam nossas atividades. É também uma exposição de como, comumente, esse conteúdo é apresentado aos alunos do Ensino Médio.

Com essa explanação de conteúdos é possível fazer um paralelo sobre a forma como é feito o ensino de Progressões Geométricas quando este é feito por meio de apresentação de fórmula e como se dá o aprendizado significativo através da formação de conceitos, como é esperado em nossa seqüência de atividades.

A seguir teremos a apresentação da Atividade 5.

Quadro 16 – Atividade 5/Bloco 3

Atividade 5

O objetivo desta atividade é reinterpretar os dados contidos em tabelas anteriormente utilizadas segundo os conceitos apresentados na **Atividade 4**.

Retornaremos a algumas da tabelas preenchidas em blocos anteriores, que serão abaixo reescritas de maneira mais sintética para facilitar a visualização de conceitos que permeiam o estudo de Progressões Geométricas, tais como: termo geral, soma dos n primeiros termos, soma dos infinitos termos, etc.

➲ Reinterprete as tabelas 1 e 2, identificando o que é pedido.

Tabela 1 - Fractal Central			Tabela 2 - Fractal Árvore		
Geração 1	1	1	Geração 1	1	1
Geração 2	3	4	Geração 2	2	3
Geração 3	9	13	Geração 3	4	7
Geração 4	27	40	Geração 4	8	15
Geração n	3^{n-1}	$\frac{1.(3^n-1)}{3-1}$	Geração n	2^{n-1}	$\frac{1.(2^n-1)}{2-1}$

1) Com relação à tabela 1, identifique o (a):

a) a_1= ______ b) a_2= ______ c) razão= ______ d) a_n= ______

2) Com relação à tabela 2, identifique a:

a) S_1= ______ b) S_2= ______ c) S_3= ______ d) S_n= ______

➲ Observe a tabela 3.

Tabela 3			
Geração 1	100	80	640 000
Geração 2	50	40	80 000
Geração 3	25	20	10 000
Geração 4	12,5	10	1 250
Geração n	$\frac{100}{2^{n-1}}$ ou $100.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\frac{80}{2^{n-1}}$ ou $80.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\frac{640.000}{2^{3(n-1)}}$ ou $640.000.\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

1) Qual é o nome dado aos números da Geração n?

____

____

(continuação)
2) Qual é a razão das três Progressões Geométricas na tabela representadas?
a) coluna 2 = ____________ b) coluna 3 = _____________ c) coluna 4 = ____________

3) Qual é a possibilidade de cálculo permitida pelas seqüências de números de qualquer uma das três últimas colunas?
____
____

Para justificar o que pretendemos com a reinterpretação dos dados contidos nas tabelas segundo a institucionalização, citaremos Machado (2005):

> *"Na construção do conhecimento, as abstrações não constituem, portanto, o início ou o fim do processo; são mediações indispensáveis, condição de possibilidade do conhecimento em qualquer área. A própria percepção já representa um primeiro momento da abstração. (...)*
> *Como instrumentos necessários para a passagem de um patamar de concretude a outro, as abstrações são responsáveis pela organização de relações crescentemente significativas, que passam a caracterizar a realidade concreta como uma teia mais complexa, mais rica, viabilizando uma ação mais efetiva sobre ela".*

Ao longo desta seqüência de ensino, estabelecemos condições para através do concreto partir para o abstrato, sem ser este último, o fim. Esta atividade destina-se, então, a fazer uma ponte entre o que foi pensado e o que foi institucionalizado para, a seguir, voltarmos para o real, o concreto.

Não esperamos dificuldades na resolução dos exercícios propostos, visto que estes funcionam apenas como identificadores dos termos institucionalizados na atividade anterior. As respostas esperadas são:

➲ Reinterprete as tabelas 1 e 2, identificando o que é pedido.

Tabela 1 - Fractal Central		
Geração 1	1	1
Geração 2	3	4
Geração 3	9	13
Geração 4	27	40
Geração n	3^{n-1}	$\frac{1.(3^n - 1)}{3-1}$

Tabela 9 – Atividade 5/Bloco 3

Tabela 2 - Fractal Árvore		
Geração 1	1	1
Geração 2	2	3
Geração 3	4	7
Geração 4	8	15
Geração n	2^{n-1}	$\frac{1.(2^n - 1)}{2-1}$

Tabela 10 – Atividade 5/Bloco 3

1) Com relação à tabela 1, identifique o(a):

a) a_1= *1* b) a_2= *3* *c)* razão= *3* *d)* a_n= 3^{n-1}

2) Com relação à tabela 2, identifique a:

a) S_1= *1* *b)* S_2= *3* *c)* S_3= *7* *d)* S_n=$\frac{1.(2^n - 1)}{2-1}$

➲ Observe a tabela 3.

Tabela 3			
Geração 1	100	80	640 000
Geração 2	50	40	80 000
Geração 3	25	20	10 000
Geração 4	12,5	10	1 250
Geração n	$\frac{100}{2^{n-1}}$ ou $100.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\frac{80}{2^{n-1}}$ ou $80.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\frac{640.000}{2^{3(n-1)}}$ ou $640.000.\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

Tabela 11 – Atividade 5/Bloco 3

1) Qual é o nome dado aos números da Geração n?

Termo geral da Progressão Geométrica.

2) Qual é a razão das três Progressões Geométricas na tabela representadas?

a) coluna 2= $\frac{1}{2}$ b) coluna 3: $\frac{1}{2}$ c) coluna 4: $\frac{1}{8}$

3) Qual é a possibilidade de cálculo permitida pelas seqüências de números de qualquer uma das três últimas colunas?

É possível calcular a soma dos infinitos termos.

Prosseguindo nas atividades, apresentamos a de número 6 como segue:

Quadro 17 – Atividade 6/Bloco 3

Atividade 6

O objetivo desta atividade é aplicar os conceitos de Progressões Geométricas em Situações-Problemas.

➲ **Problema 1***

Uma jovem seria contratada como vendedora para trabalhar de segunda a sábado nas duas últimas semanas que antecederiam o Natal. O dono da loja ofereceu R$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ela recebera no dia anterior. A jovem achou a proposta humilhante. Recusou o trabalho. Quanto teria recebido por 12 dias de trabalho? Se tivesse sido efetivada, quanto estaria recebendo após **n** dias de contratação?

➲ **Problema 2***

O rápido Aquiles persegue uma morosa tartaruga. A velocidade do mais veloz e valente guerreiro grego é igual a 10 vezes a velocidade da tartaruga. A distância que os separa é de 100 metros. Nessas condições, quando Aquiles vencer os 100 metros, a tartaruga terá corrido 1/10 do que percorreu Aquiles e ficará 10 metros a sua frente. Quando Aquiles correr esses 10 metros, a tartaruga terá percorrido 1/10 dessa distância e estará 1 metro a sua frente. Quando Aquiles correr esse metro, a tartaruga terá percorrido 10 centímetros, e assim por diante. Esse raciocínio pode levar muita gente a concluir que Aquiles, por mais rápido que seja, nunca alcançará a tartaruga. Assim, pensava o filósofo grego Zenão (450 a.C.). Então, quantos metros Aquiles deverá percorrer para alcançar a

Esta atividade foi constituída para aplicação dos conceitos aprendidos. Esperamos que os alunos não encontrem dificuldades para resolvê-la; caso surjam dúvidas, a orientação da professora será para que identifiquem cada elemento da situação-problema, como primeiro termo, razão, etc.

Vamos às respostas esperadas:

➲ **Problema 1**

Uma jovem seria contratada como vendedora para trabalhar de segunda a sábado nas duas últimas semanas que antecederiam o Natal. O dono da loja ofereceu R$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ela recebera no dia anterior. A jovem achou a proposta humilhante. Recusou o trabalho. Quanto teria recebido por 12 dias de trabalho? Se tivesse sido efetivada, quanto estaria recebendo após **n** dias de contratação?

n

Resolução:

Seja a seqüência (100, 10, 1,...) das distâncias em metros entre Aquiles e a tartaruga.

O que desejamos é a soma dos infinitos termos desta seqüência, a $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Temos: $a_1 = 100$ *e* $q = \dfrac{1}{10}$*, então,*

$$S_\infty = \frac{100}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{\frac{9}{10}} = \frac{1000}{9} \cong 111{,}11.$$

Logo, Aquiles alcançará a tartaruga após ter percorrido, aproximadamente, 111,11 metros.

Finalizando o terceiro bloco e todas as atividades desta seqüência, apresentamos a Atividade 7:

Quadro 18 – Atividade 7/bloco 3

Atividade 7 *O objetivo desta atividade é de finalizar a seqüência de estudo com a série de questões propostas inicialmente para justificar a necessidade desta pesquisa.* Para justificar a necessidade deste trabalho, realizamos uma pesquisa junto a alunos da rede estadual de ensino, através de um pequeno questionário, inquiriu-se sobre conhecimentos básicos que norteiam as PG. Com o intuito de verificar a validade do o caminho percorrido através desta seqüência de ensino, responda ao questionário abaixo. **Pergunta 1:** O que é uma Progressão

(continuação)

Pergunta 3: $$\begin{cases} 4+2=6 \\ 4+2+1=7 \\ 4+2+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2} \\ 4+2+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{31}{4} \\ (...) \end{cases}$$

Se continuarmos esse processo indefinidamente o que acontecerá com as somas? Escolha uma das alternativas abaixo e justifique-a.

a) Elas se aproximarão de algum valor.
b) Elas ultrapassarão qualquer valor fixado.

Finalizaremos a seqüência de ensino com as questões propostas inicialmente para justificar o nosso trabalho.

As expectativas de respostas são:

Pergunta 1: O que é uma Progressão Geométrica?

Uma progressão geométrica é uma seqüência em que de um termo para outro multiplicamos por um valor chamado de razão.

Pergunta 2:

a) (1, 3, 9, 27, …) é uma Progressão Geométrica? Justifique a sua resposta.

Sim, pois de um termo para outro sempre multiplicamos por 3.

b) Sabendo que 1 é o 1º termo dessa seqüência, 3 é o 2º termo, etc., qual é o milésimo termo dessa seqüência?

Podemos escrever a_1 *como sendo* 3^0, a_2 *como* 3^1, a_3 *como* 3^2 *e assim por diante. Desta forma, teremos* $a_{1000} = 3^{999}$.

Pergunta 3:

$$\begin{cases} 4+2=6 \\ 4+2+1=7 \\ 4+2+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2} \\ 4+2+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{31}{4} \\ (...) \end{cases}$$

Se continuarmos esse processo indefinidamente o que acontecerá com as somas? Escolha uma das alternativas abaixo e justifique-a.

a) Elas se aproximarão de algum valor.

b) Elas ultrapassarão qualquer valor fixado.

Alternativa a. Como de um termo para outro estamos sempre multiplicando por ½, verificamos que os termos tem seu valor numérico diminuído, logo, estamos diante a uma soma dos infinitos termos de um Progressão Geométrica com razão entre 0 e 1, ou seja, esta soma é $S_\infty = \dfrac{4}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{4}{\dfrac{1}{2}} = 8$*. Portanto, o valor que esta soma infinita se aproxima é 8.*

Capítulo 4:

EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE *A POSTERIORI*

4.1 **Introdução**

Neste capítulo exibiremos como se desenrolou a experimentação da seqüência didática, elencando os tópicos que mais nos chamaram atenção, tais como as dificuldades apresentadas, os itens que foram facilmente resolvidos, as conclusões estabelecidas, etc., bem como, faremos uma comparação entre os elementos levantados na análise *a priori* e o que agora observamos, fundamentados na teoria presente no *Capítulo 1*. Serão essas discussões que constituirão a análise *a posteriori*.

Esta análise buscará respostas para as questões de pesquisa, formuladas no capítulo 1: *"Como a utilização dos fractais pode ser motivadora na percepção da auto-semelhança? Como a auto-semelhança pode contribuir no processo de generalização das fórmulas da progressão geométrica para alunos do Ensino Médio?"*

Através de um convite exposto a todos os alunos do Ensino Médio da escola supra citada (Anexo), 48 educandos se candidataram para participar da aplicação desta investigação, dos quais, 4 não compareceram. Foram sujeitos da aplicação desta seqüência didática 44 alunos do Ensino Médio do período diurno de uma escola da rede particular de ensino, em Mauá, no Estado de São Paulo. O grupo de alunos era formado por 26 estudantes da 1ª série, 14 da 2ª série e 4 da 3ª série, com uma faixa etária entre 14 e 17 anos. (Apesar de estarmos trabalhando com alunos de 2ª e 3ª série do EM, os mesmos não tiveram contato com o assunto Progressões Geométricas, que apesar de no currículo estar no final da 1ª série, nesta escola é ensinado detalhadamente na 3ª série, durante a revisão) Optamos por aplicar a seqüência em horário extra-classe, uma vez que, devido à diversidade de séries, a aplicação em uma única sala ficaria inviável. (Fizemos a opção de trabalhar com todos os alunos inscritos, apesar de considerarmos o número bastante alto, uma vez que, achamos que seria desmotivante para o educando impossibilitar a sua participação, após termos feito um convite aberto, sem nenhuma restrição.)

Como auxílio à professora-pesquisadora, estavam presentes dois professores observadores, que assistiam duas duplas, escolhidas aleatoriamente e compostas por uma aluna da 1ª série e um aluno da 3ª série (dupla 1) e dois alunos da 2ª série (dupla 2). Os observadores anotavam todas as dúvidas, conclusões, perguntas e comentários pertinentes das duplas em questão, sem em nenhum momento participar e responder às dúvidas. Preparamos um questionário para ser preenchido pelos observadores, para nortear as observações e fazê-los prestar atenção aos elementos que a professora pesquisadora considerava mais imprescindíveis. Também procedemos à gravação dos diálogos das duas duplas de alunos anteriormente citadas. Como a professora pesquisadora também é a professora de matemática dos alunos envolvidos, não foi preciso fazer uma identificação de voz durante a gravação, a fim de reconhecer os elementos das duplas.

Paralelamente ao trabalho dos observadores, a professora-pesquisadora dividia seu tempo observando as outras 20 duplas, preocupando-se em limitar o máximo possível a interferência perante aos alunos no sentido de responder dúvidas ou dar dicas solucionadoras. A sua postura era a de observar o comportamento das duplas com relação às reações diante dos problemas; e às soluções, às dificuldades e às conjecturas apresentadas para solucionar os desafios propostos.

A restrição feita à observação detalhada de duas duplas se deu apenas para efeito de maior riqueza de informações, sendo que todo o material e todas as atividades eram únicas para todo o grupo de aluno.

Em cada encontro os alunos recebiam o material da atividade a ser respondido e discutido por cada dupla. Ao seu término, todo o material era devolvido para a professora-pesquisadora para que a sua análise servisse de suporte à *análise a posteriori*.

A aplicação da seqüência didática foi feita no formato de um curso previsto inicialmente para 15 horas, com 6 encontros de 150 minutos. No entanto, no decorrer da aplicação verificamos que 120 minutos eram suficientes para cada encontro, totalizando, portanto, 10 horas e 50 minutos de estudos. A preocupação em deixar cada encontro mais curto possível era latente, uma vez que, os alunos já haviam assistido às aulas no período da manhã, e o cansaço poderia ser um fator negativo para o desempenho dos mesmos na seqüência das atividades e um elemento desmotivador à sua freqüência. Assim sendo, o grupo reuniu-se durante duas semanas, às terças, às quartas e às quintas-feiras, no horário das 13:30 às 16:00 h, no primeiro encontro, e das 13:30 às 15:10 h, nos encontros restantes. O início do curso se deu em 08/08/2006 e o seu término em 17/08/2006.

Os locais dos encontros foram diversificados segundo as atividades, da seguinte forma: 1º encontro - Sala de aula; 2º e 3º encontros - Laboratório de Informática; 4º, 5º e 6º encontros - Sala de aula.

A seguir apresentaremos uma relação dos conteúdos estudados em cada encontro e seus respectivos objetivos.

Quadro 19 – Programação dos encontros

Encontro	Objetivos	Atividades	Tempo (minutos)
1	Confeccionar o Fractal Central e o Fractal Árvore; Estabelecer generalizações a partir da observação da relação parte/todo no Fractal Central e no Fractal Árvore, para assim compreender as fórmulas do termo geral e da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica; Estabelecer generalizações a partir da observação das dimensões dosi		

2	Familiarização com o Cabri; Apresentar o Triângulo de Sierpinski; Proceder a construção do triângulo eqüilátero e uma macro para a sua construção a fim de confeccionar o Triângulo de Sierpinski; Construir as Gerações do Triângulo de Sierpinski; Estabelecer generalizações através da observação do fractal Triângulo de Sierpinski.	Manipulação do software Apresentação da Atividade Introdução ao *Bloco 2* e *Atividade 1*: utilização do software Cabri Géomètre Discussão sobre a atividade	10 5 75 10
3	Familiarização com o iGeom; Apresentar o Tetra-Círculo e construir uma base para sua confecção; Construir os Tetra-Círculos de recorrências 0, 1 e 2.	Manipulação do software Apresentação da Atividade *Atividade 2*: utilização do software iGeom Discussão sobre a atividade	10 5 75 10
4	Observar o Fractal Tetra-Círculo; Responder aos questionamentos sobre o Fractal Tetra-Círculo; Retornar aos Blocos 1 e 2 para estabelecimento de generalizações.	Introdução ao *Bloco 3* e *Atividade 1*: observação do Fractal Tetra-Círculo *Atividade 2*: questionamentos sobre o Fractal Tetra-Círculo; *Atividade 3*: retorno aos *Blocos 1* e *2* Discussão das atividades	15 15 60 10
5	Institucionalizar os conceitos que envolvem o conhecimento de Progressões Geométricas; Reinterpretar os dados contidos em tabelas anteriormente utilizadas segundo os conceitos apresentados na Atividade 4.	Introdução às atividades *Atividade 4*: institucionalização *Atividade 5*: reinterpretação dos dados anteriormente trabalhados Discussão das atividades	10 60 20 10
6	Aplicar os conceitos de Progressões Geométricas em Situações-Problemas; Finalizar a seqüência didática com a série de questões propostas inicialmente para justificar a necessidade desta pesquisa.	Introdução às atividades *Atividade 6*: situações-problemas *Atividade 7*: série de questões aplicadas anteriormente à concepção das atividades Discussão final e conclusões sobre a seqüência didática Entrega de certificados e agradecimentos	10 40 20 20 10

Para identificar os alunos das duplas utilizaremos as letras de **A** até **D**, ou seja, os alunos **A** e **B** pertencem à dupla 1, e os alunos **C** e **D** pertencem à dupla 2.

Ilustração 70 - D

Ilustração 72 - Material usado no Bloco 1

As atividades iniciavam com o objetivo e/ou introdução ao assunto desenvolvido e desenrolavam-se com instruções auto-explicativas, para que a dupla de alunos pudesse fazer as tarefas sem interferência da professora-pesquisadora.

A **primeira atividade** deste bloco constituiu-se da confecção do Fractal Central e foi realizada no primeiro encontro, assim como as outras quatro atividades que compõem o Bloco 1.

As duplas de alunos analisadas não apresentaram dificuldades em entender as instruções desta atividade, porém, cada uma delas errou a confecção de uma geração de fractais por não prestarem atenção à informação de que a dobra da folha deveria ter sempre a parte aberta voltada para cima: a dupla 1 errou na 2ª geração e a dupla 2 na 4ª geração.

Tal qual havíamos previsto na análise *a priori* a maioria das 20 duplas observadas pela professora-pesquisadora apresentou dificuldades na etapa **f** da geração 1 (etapa esta que se repete em todas as outras gerações, pois a base *percepção* e a *construção física*, que Machado (2005) descreve como fundamental para elaboração de conceitos.

Notamos que, inicialmente, as duas duplas observadas não utilizaram régua para realizar as medições do tamanho do corte, elas simplesmente utilizaram dobraduras, revelando estarem no nível G_0 de Parzysz (2001). Porém, a partir da geração 3 (dupla 2) e da geração 4 (dupla 1) os alunos fizeram uso da régua, talvez, com intuito de dar mais exatidão aos cortes, deslocando-se, então, para a transição entre os níveis G_0 e G_1. Percebemos que ao chegarem na 3ª e 4ª gerações cada aluno da dupla ia construindo uma geração e o outro a próxima geração, mostrando, assim, um domínio na construção do fractal. Também, a partir da 3ª geração, a dupla 1 percebeu a seqüência de construção e começou a estabelecer conjecturas, demonstradas pela fala: aluno **A** - *“Cada parte é* $^1/_4$ *da outra!”*, numa referência à face de cada figura formada nas gerações.

Notamos que a dupla 1 observava tudo o que construía na tentativa de descobertas, como ocorreu quando perceberam que todas as gerações de fractais se encaixavam, dando a idéia de profundidade. Era fácil notar que a integração entre os elementos da dupla foi um fator positivo no desempenho durante a atividade e nas conjecturas levantadas. Era evidente a alegria e a36 satisfação durante a construção de cada geração do fractal, expressadas por

Ilustração 73 - Geração 1 e 2 – Fractal Central – Dupla 1

Ilustração 74 - Geração 3 e 4 – Fractal Central – Dupla 2

A **segunda atividade** consistia em estabelecer generalizações a partir da observação das quatro gerações do Fractal Central, sendo realizada tão logo os alunos terminassem a atividade 1, usando os cartões de fractais nesta última produzidos. Nesta atividade, nota-se o uso da *representação* proposta por Machado (2005), sem deixar de haver a *percepção* por meio da manipulação dos cartões de fractais.

Esperávamos que as duplas conseguissem entender o que era um *elemento novo* para que pudessem compreender as variações ocorridas de geração para geração, e foi assim que se deu:

1. os alunos das duplas observadas preencheram a tabela que constava na atividade sem nenhuma dificuldn

elementos por geração, estabelecendo, erroneamente, o raciocínio de que a quantidade total era o dobro da quantidade de elementos novos;

c. 5% revelaram que não haviam entendido o significado de elementos novos, uma vez que, preencheram as duas colunas da tabela com os resultados do número total de elementos novos por geração;
d. 5% das duplas não completaram a tabela.

A figura a seguir foi extraída da Atividade 2 da dupla 1. Nela verificamos que os alunos começam a estabelecer generalizações, com erros, porém, demonstrando que o conceito de progressão geométrica começa a se formar, havendo assim, um início de uma *organização conceitual*, como sugere Machado (2005).

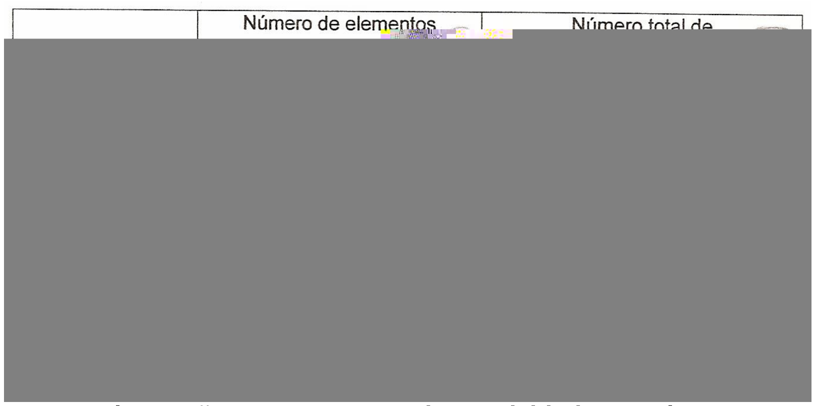


Ilustração 75 - Respostas da 2ª Atividade - Dupla 1

O observador da dupla detalhou em seu questionário o que os alunos queriam expressar por meio de suas anotações, como vemos em: “A princípio, quando contaram o número de figuras, esqueceram de contar a figura inicial, porém, após observarem melhor chegaram à conclusão de que o número da geração (novos) era de 2^n e y = número total de elementos por geração, onde $y = 2.(2^n) – 1$.” Percebemos que a explanação do observador demonstra algumas confusões e alguns erros de nomenclaturas das variáveis envolvidas:

1. usaram a variável **n** sem ao menos esclarecer a que ela se referia;
2. perceberam, corretamente, que o número de elementos novos dobra a cada geração, porém, ao estabelecer uma relação para o número de elementos

novos por geração (a quem denominaram **x**), expressaram-na como 2^n, utilizando **n** para indicar a geração), ao passo que deveriam ter escrito 2^{n-1};

3. para preencher o número total de elementos por geração perceberam acertadamente que ele era o dobro de elementos novos subtraído de uma unidade, mas, como haviam errado na expressão para determinar o número de elementos novos por geração, o valor a quem chamaram de **y** ficou expresso como $2.(2^n) -1$, quando deveria ser $2.2^{n-1} – 1$, melhor ainda, $2^n – 1$.

No que diz respeito ao entrosamento da dupla 2, a partir desta atividade houve mais troca de informações e o aluno **C** ficou mais à vontade com esta tarefa por se tratar de cálculos e não de dobraduras.

Ainda no primeiro encontro, foi realizada a **terceira atividade**, que tal como a primeira, tratava-se da construção de fractais através de dobraduras, denominados Fractais Árvore.

Como as duplas já estavam mais habituadas com as dobraduras, o entendimento do roteiro e a organização das duplas se deu de uma forma mais tranqüila, porém, como o grau de dificuldade do Fractal Árvore é superior ao do Fractal Central, devido à quantidade maior de dobras, algumas duplas apresentaram dificuldades e necessitaram da ajuda da professora-pesquisadora para auxiliar na confecção da dobradura. (Cabe mais uma vez ressaltar que a ajuda da professora-pesquisadora na construção do fractal não interfere nas conclusões que os alunos extrairão da atividade.)

Algumas duplas não conseguiram confeccionar a quarta geração do Fractal Árvore. Vários fatores contribuíram para isso, como: ausência de habilidade para trabalhar com dobraduras, falta de paciência para realizar a grande quantidade de dobras e sua posterior “desdobra” (etapa final da confecção do fractal, quando as dobras são invertidas, isto é, as que estão para dentro ficam para fora e vice-versa), cansaço e vencimento do horário do encontro (lembrando que este primeiro encontro foi o mais longo, com duração de 2h 30min).

Das anotações dos observadores concluímos que os alunos **A**, **B**, **C** e **D** começaram a se organizar melhor. Na dupla 1, o aluno **A** fez todas as etapas em uma única folha enquanto auxiliava a aluna **B**, que por sua vez, construía, passo a passo, cada uma das gerações de fractais, como pedido na atividade. A dupla 2 dividiu as tarefas: cada um dos alunos fez uma parte da atividade, e novamente, o aluno **C** repetiu que não gostava de fazer dobraduras, fato este que não alterou o resultado da atividade, visto que, a dupla realizou perfeitamente todas as etapas desta atividade.

As ilustrações a seguir mostram as quatro gerações do Fractal Árvore.

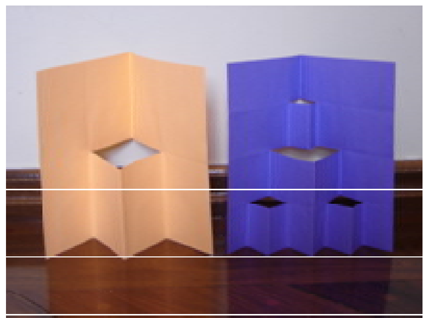


Ilustração 76 - Geração 1 – Fractal Árvore

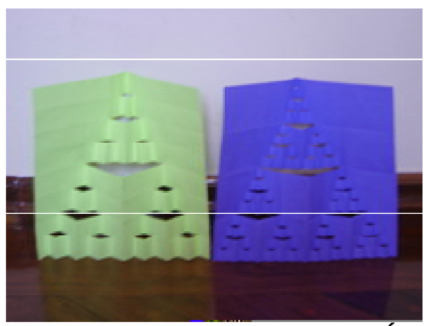


Ilustração 77 - Geração 2 – Fractal Árvore

A **quarta atividade**, feita nos mesmos moldes da segunda atividade, também era composta por uma tabela a ser preenchida baseando-se nos fractais da atividade anterior. Da mesma forma que na segunda atividade, os alunos usufruem da *representação* proposta por Machado (2005), percebida pela manipulação dos cartões de fractais.

As expectativas para esta atividade eram as mesmas da segunda atividade, e os resultados do preenchimento da tabela foram os seguintes:

1. as duplas observadas não apresentaram nenhuma dificuldade;

2. as vinte duplas restantes apresentaram um rendimento inferior ao que tiveram na segunda atividade, como mostra:
    a. 60% das duplas preencheram corretamente;
    b. 10% não responderam os dados referentes à geração 4, o que acreditamos ser justificado pelo fato de não terem terminado o fractal desta geração. Esta conclusão nos faz construir a conjectura de que estão respondendo a tabela sem raciocinar sobre os dados, porque se assim estivessem fazendo, não precisariam da última geração, era só observar o comportamento do número de elementos novos por geração e do número total de elementos por geração e manter a mesma proporção;
    c. 30% não responderam à tabela. Acreditamos que os motivos que levaram estes alunos a ausência de resolução são, como citados anteriormente: não terminaram de confeccionar as gerações de fractais da atividade anterior (por falta de habilidade para trabalhar com dobraduras e de paciência para realizar a grande quantidade de dobras e sua posterior "desdobra", cansaço e vencimento do horário do encontro (este primeiro encontro foi o mais longo, com duração de 2h 30min).

Mais uma vez, a dupla 1 foi além dos objetivos traçados para a atividade e organizou a generalização para a geração n, como mostra a figura abaixo.

Ilustração 78 - Respostas da 4ª Atividade - Dupla 1

Por meio da observação das anotações do parágrafo anterior, vimos que a generalização estabelecida para o número de elementos novos por geração está correta, e a dupla faz uma tentativa para a percepção da generalização do número total de elementos por geração, notado através de: $3^1+3^2+3^3+3^4 = T_4$, onde fica subentendido que a nomenclatura T_4 remete ao total de elementos da quarta geração. Notamos que a dupla caminha para o nível G_2 de Parzysz (2001), o das generalizações.

Atenção especial deve ser dada ao ponto de exclamação ao lado da expressão numérica anteriormente citada. Através da gravação realizada percebemos que ele se deve ao fato da dupla pensar em como expressar este total T para uma geração n muito grande.

Aproveitando das anotações dos observadores, verificamos que as duplas perceberam algumas relações entre as gerações, que são:

- **Dupla 1**: as dimensões diminuem pela metade conforme aumenta o número de gerações; o número de elementos novos é 3^{n-1}, onde n é o número de gerações;
- **Dupla 2**: o número de elementos novos triplicam.

Estas relações percebidas pelas duplas refletem a transição do nível G_0 para o G_1 do pensamento geométrico de Parzysz (2001).

A **última atividade** deste bloco era constituída por uma tabela e um questionamento para provocar generalizações que surgem da simples observação dos fractais construídos.

Para que o preenchimento da tabela fosse feito de modo a não dificultar os cálculos (uma vez que eles não era o foco de estudo), pedimos que os alunos considerassem as dimensões do papel utilizado nas dobraduras como sendo 200 X 320 mm, ao invés de 210 X 297 mm, que são as dimensões do papel A4 utilizado nas construções.

Era esperado que nesta atividade cada dupla completasse facilmente o quadro e, através da manipulação destes dados, começasse a formular conjecturas. A identificação das dimensões de um objeto - altura, largura e comprimento e a determinação do volume também não eram tidos como dificuldades para esta atividade. Porém o resultado foi o seguinte:

1. as duplas observadas não apresentaram erros no preenchimento da tabela, porém, a dupla 1, por estar observando as dobraduras em posição diferente das outras duplas consideraram a altura e a largura invertidas, o que demonstra o conhecimento de que um sólido tem o mesmo volume independente da posição em que ele se encontra;
2. as vinte duplas tiveram um desempenho ruim:
    a. 25% preencheram corretamente a tabela;
    b. 35% não terminaram e/ou preencheram erroneamente a tabela;
    c. 40% não preencheram a tabela.

    Acreditamos que os resultados destas duplas foram sofríveis por cansaço devido ao excessivo tempo das atividades deste encontro, e não por falta de entendimento da questão. Salientamos que o *tempo* foi o maior empecilho desta atividade.

Quanto à pergunta feita nesta atividade (*O que acontece com as dimensões conforme aumentamos a geração? E o que acontece com o volume? Há alguma tendência para esses valores?)*, obtivemos o seguinte desempenho:

1. as duas duplas responderam corretamente as questões relativas às dimensões e ao volume, porém, não responderam à indagação sobre se havia alguma tendência para os valores encontrados. As respostas destas duplas foram as seguintes:
    a. **Dupla 1**: *"As dimensões diminuem à metade, enquanto que o volume diminui para um oitavo do valor anterior (2^{-3})."*;
    b. **Dupla 2**: *"As dimensões caem para a metade. Os elementos sempre aumentam de acordo com uma mesma potência. O volume é obtido dividindo-se um valor com o seu anterior, encontrando como resultado 8 (oito)."*.
2. das vinte duplas restantes, obtivemos o seguinte desempenho:
    a. 60% não responderam;
    b. 15% responderam vagamente ou de forma confusa. Para ilustrar estas respostas, temos:

i. *“As dimensões vão sempre se dividindo.”*;

ii. *“As dimensões se aproximam da metade. A razão do volume vai sempre dividida por 8. O nº de elementos novos tem a mesma potência.”*;

iii. *“As dimensões vão diminuindo, a cada geração que aumenta o volume diminui. A tendência é de 1/8 para cada geração.”*.

c. 10% responderam parcialmente a pergunta, uma vez que não deixaram claro qual seria a tendência dos valores da dimensão e do volume;

d. 15% responderam corretamente.

Não podemos deixar de fazer uma análise crítica com relação aos resultados desta última atividade. Acreditamos que este desempenho sofrível deve-se, em grande parte à (ao):

1. cansaço causado pelos 90 minutos de encontro;
2. desmotivação das duplas que estavam num ritmo mais lento, ao verem seus colegas terminando o bloco de atividades;
3. desinteresse e descompromisso pela atividade (também motivado pelo tempo);
4. falta de clareza com relação ao questionamento da questão da **Atividade 5** (... *Há alguma tendência para esses valores?*), visto que 19 das 22 duplas não notaram esta pergunta e/ou falta de entendimento sobre o significado da palavra *tendência*;
5. atraso na organização das duplas, entrega de materiais e concentração para início das atividades que ocasionaram uma perda de tempo para resolução das últimas atividades;
6. distribuição equivocada, por parte da professora-pesquisadora, do número de atividades destinadas a este encontro.

Analisando as anotações dos professores-observadores verificamos que as duplas 1 e 2 não apresentaram dificuldades relevantes no preenchimento da tabela e com relação à pergunta escreveram que os alunos entenderam o significado da palavra tendência. Diante destes dados, podemos concluir que estas duplas (e outras 2 duplas), ao responderem as questões relativas à dimensão e ao volume, implicitamente responderam à questão sobre *a tendência* *para esses valores*, conjectura esta que nos leva a crer que a questão precisa ser melhor elaborada, com o objetivo de evitar respostas incompletas.

Verificamos que as duplas 1 e 2 caminham para uma sistematização do conhecimento através de uma elaboração conceitual, percebida por meio da idéia de generalização transmitida em suas resoluções.

4.2.1.1 Conclusão do Bloco 1

Após a análise das cinco atividades que compõem este bloco notamos que os alunos, ao confeccionarem o

4.2.2 Bloco 2: Fractais utilizando Softwares de Geometria Dinâmica

As atividades deste bloco foram realizadas no Laboratório de Informática. Os alunos, tal como no Bloco 1, foram dispostos em duplas, para que deste modo, as investigações fossem feitas de forma mútua e interativa. Cada dupla recebeu sua pasta contendo as folhas com as atividades a serem desenvolvidas.

Este bloco é composto por duas atividades que foram constituídas no nível G_1 de Parzysz (2001), por meio da construção de fractais nos programas Cabri-Géomètre e iGeom. Também por meio da *representação* dos fractais, de acordo com as propostas de Machado, verificamos que suas propriedades são parcialmente concretizadas, como é o caso da auto-semelhança, que é facilmente notada com os procedimentos da Geometria Dinâmica para a construção destes nossos objetos de estudo – os fractais.

Como o software *Cabri Géomètre* não era de conhecimento de todos e nenhum aluno conhecia o *iGeom*, foram dados 10 minutos iniciais de cada encontro para a familiarização com os programas e procurou-se deixar as instruções das atividades o mais clara e detalhada possível.

Ilustração 83 - Dupla no laboratório de Informática

A **primeira atividade** teve como objetivo principal a análise e a construção do Triângulo de Sierpinski. Esta atividade localiza-se no nível G_1 do pensamento geométrico de Parzysz (2001) e foi dividida em quatro partes:

- Parte I: Apresentação do Triângulo de Sierpinski e construção do triângulo eqüilátero;

- Parte II: Construção de uma macro para um triângulo eqüilátero;
- Parte III: Confecção das quatro primeiras gerações do Triângulo de Sierpinski;
- Parte IV: Preenchimento de uma tabela sobre o *comportamento* das gerações do Triângulo de Sierpinski.

As duplas analisadas tiveram desempenho opostos nas três primeiras partes desta atividade: enquanto a **dupla 1** não manifestou dificuldades, visto que as instruções da atividade foram suficientes para a utilização do software (vale observar que esta dupla discute bastante. A aluna B lê todas as instruções, seguindo-as fielmente.), a **dupla 2** apresentou dificuldades nas partes I e II, mais especificamente na criação do triângulo, no encontro do ponto médio e na definição de uma macro, expondo, assim, a falta de habilidade da dupla em manipular o software - uma explicação para este ocorrido é o fato de que alguns alunos tinham uma familiarização com o software maior que outros.

Mais uma vez a dupla 1 manifestou entusiasmo com a atividade, expressando-se "Tem pronto aqui!", numa referência ao botão para o ponto médio.

As outras duplas também apresentaram desempenhos alternados: uma parte não demonstrou dificuldades na manipulação, ao passo que outras necessitaram de interferências constantes no que tange à localização dos comandos no Cabri.

Os obstáculos apresentados pelos alunos no funcionamento do software não foram empecilhos para a realização da atividade, uma vez que, todas as duplas conseguiram terminá-la.

Com relação à parte IV, obtivemos o seguinte desempenho:

1. a **dupla 1** apresentou dúvida se deveriam desconsiderar o triângulo central na 1ª geração, porém, depois de discutirem, chegaram a um acordo de não considerar (esta dificuldade surgiu porque a dupla não leu ou não prestou atenção à seguinte nota no rodapé da página da atividade: *Lembre-se que os triângulos centrais não devem ser contados, pois não fazem parte da figura*).

Também, como nas atividades do bloco anterior, estabeleceram rapidamente algumas generalizações, segundo as anotações do professor-observador: perceberam que a tendência da medida do lado do triângulo é sempre metade do triângulo que os origina, a área do triângulo novo reduz em ¼ e a área total dos triângulos em ¾, e concluíram equivocadamente que o número de triângulos novos é igual a 3^{n-1}, ao invés de 3^n. (Neste momento, o que mais nos interessa é o surgimento de conjecturas e não se ela se apresenta com erros ou não). A dupla 1 assim explicou o comportamento dos valores nesta tabela: "A área total dos triângulos é ¾ do valor anterior, quer ver, creio eu que seja isso, porque a gente multiplica por 3 este daqui (referindo-se à área do triângulo novo), e se aqui (referindo-se à área total dos triângulos) nós dividimos por 4, então é só multiplicar por ¾.";

2. a **dupla 2**, apesar de preencher a tabela corretamente, teve dificuldades em completar a coluna destinada à área total dos triângulos, demonstrando que não conseguiram, a princípio, encontrar conjecturas sobre o *comportamento* destes valores, uma vez que ao escreverem os resultados na forma de potência, não visualizaram a generalização para a geração n.
3. das duplas restantes;
   a. 10% acertaram apenas o preenchimento das colunas referentes ao *lado do triângulo* e *área do triângulo novo*;
   b. 55% preencheram de forma incorreta a coluna sobre *área total dos triângulos*, já que utilizaram a mesma generalização da coluna anterior (*área do triângulo novo*) - redução dos valores em ¼ ao invés de ¾, ou seja, demonstraram falta de atenção e imediatismo, visto que, não se preocuparam em observar os valores desta coluna, optando por repetir o raciocínio usado na coluna anterior. Acreditamos que, já que mais da metade das duplas fizeram esta confus

Quanto às respostas das questões *O que acontece com o lado do triângulo que surge a cada nova geração? Há alguma tendência para esses valores?* e *Qual a tendência para a área do novo triângulo? E para a área total dos triângulo?* que seguem a tabela, os resultados foram:

1. **Dupla 1**:
   a. *É reduzido pela metade*;
   b. *A área do novo triângulo reduz em um quarto, enquanto que a área total dos triângulos reduz em três quartos do anterior*.
2. **Dupla 2**:
   a. *Caem pela metade sempre*;
   b. *A área dos triângulos novos é sempre ¼ da do triângulo da fase anterior*. *A área total dos triângulos da geração nova é sempre ¾ da anterior*.
3. **Demais duplas**:
   a. Questão 1:
      i. 25% responderam incorretamente. Uma dupla confundiu a pergunta a quantidade de triângulos novos, respondendo que triplicaria, e as restantes confundiram com a área do triângulo novo, respondendo que quadruplicaria;
      ii. 75% responderam corretamente. Uma resposta nos chamou atenção: *O valor cai pela metade. A razão sempre é 2*. Nesta resposta percebesse a confusão feita com relação ao uso da palavra razão que, do jeito que foi expresso, significaria que os valores serão multiplicados por 2 e não dividido (ou multiplicado por ½).
   b. Questão 2:
      i. 35% responderam corretamente;
      ii. 65% deram respostas confusas ou totalmente erradas. No momento da aplicação desta seqüência de ensino percebemos que muitas duplas vinculam exercícios matemáticos apenas a números, rejeitando qualquer tipo de questionamento que exija uma articulação de idéias na forma escrita. Notamos, assim, que muitos alunos responderam a esta questão sem raciocinar sobre a resposta dada. Verificamos, também, que houve bastante repetição de respostas erradas, fato este,

justificado pelo alto número de duplas, o que facilita a interferência no sentido de copiar as soluções de uma dupla próxima.

Notamos que nestas duas questões nenhuma dupla deixou claro qual era a tendência para os valores encontrados, o que algumas duplas esclareceram foi qual era a proporção de redução, porém, não deixaram explícito qual era o valor para o qual esta tendência deslocava-se.

Ilustração 84 - Dupla resolvendo Atividade 1 do Bloco 2

A **segunda atividade** tem como objetivo a manipulação do iGeom para a percepção de seu dinamismo na construção do Tetra-Círculo (este fractal será retomado no próximo bloco para fins de generalizações). Segundo propõe Machado (2005), nesta atividade, estamos envolto à percepção, à construção física e a representação, para que posteriormente, nas atividades do último bloco, possa haver uma elaboração conceitual para a concepção do conhecimento sobre progressões geométricas.

A atividade foi dividida em quatro partes:

- Parte I: Construção da base para a confecção do Tetra-Círculo;
- Parte II: Uso do script (ferramenta semelhante à macro do Cabri) para confecção do Tetra-Círculo de recorrência 0;
- Parte III: Construção do Tetra-Círculo de recorrência 1;
- Parte IV: Construção do Tetra-Círculo de recorrência 2.

As duplas, em geral, tiveram dificuldades para manipular este software. A identificação dos botões de ação foi o maior empecilho.

As duplas analisadas também tiveram problemas. A **dupla 1** fez algumas observações sobre o que tornou difícil a manipulação do iGeom, citando: problemas para apagar algum comando ou desenho errado e para fazer a leitura do que cada botão contém, uma vez que aparece muito rápido. A **dupla 2** teve dificuldades com a gravação do arquivo que serviria como base para a construção das gerações do Tetra-Círculo, tendo que começar novamente; problemas para construção de objetos simples, tal como, reta e circunferência; empecilhos para mudar a cor de um objeto; etc. Tanto a professora-pesquisadora, quanto os professores-observadores, perceberam que os problemas enfrentados pelos alunos não tinham um caráter pessoal, mas sim, específico da forma como o software deve ser utilizado, isto é, entraves inerentes a como o programa é disponibilizado para a manipulação pelo aluno.

Apesar das dificuldades anteriormente expostas, a **dupla 1** demonstrou surpresa com a rapidez de construção do fractal com o iGeom, já que era necessário selecionar dois pontos, e pronto, surgia a geração. Também comentaram que no Cabri o desenho deve ser feito ponto a ponto, o que demorava mais, e com o iGeom, a construção foi mais rápida, pois a tarefa já estava embutida nele. Já a dupla 2, devido aos problemas enfrentados, não conseguiu ver pontos positivos neste programa, narrando que a utilização deste último era mais difícil do que a do Cabri.

> *"O iGeom é mais confuso. O Cabri-Géomètre é mais dinâmico e de fácil manuseio".* (Dupla 2)

Ao término da atividade, foi pedido às duplas que deixassem a sua opinião sobre os dois softwares trabalhados. A maioria das duplas prestigiaram o Cabri, porém, algumas preferiram o iGeom. A seguir, citaremos uma coletânea das respostas dadas.

- *No começo achamos um pouco difícil de trabalhar com ele* (iGeom)*, mas, conforme nós fomos fazendo o trabalho, foi ficando mais fácil e melhor do que o outro* (Cabri)*.*
- *A nossa opinião é que o primeiro programa* (Cabri) *é melhor, por ser mais fácil o manuseio.*

- *Nós achamos que esse programa* (iGeom) *é mais complexo que o da aula anterior* (Cabri) *e mais complicado de se usar.*

A priori, havíamos analisado que o Igeom era ágil para construção de fractais, porém, o Cabri era de mais fácil manipulação, e agora, nesta análise *a posteriori*, verificamos, através das observações dos professores e dos depoimentos das duplas, que esta afirmação se concretizou. Notamos que o dinamismo e a rapidez do iGeom em construir fractais se perderam em suas dificuldades de manipulação, ao passo que, no Cabri, o efeito foi contrário, a confecção mais trabalhosa ficou disfarçada pela facilidade de execução.

4.2.2.1 Conclusão do Bloco 2

As atividades deste bloco implicavam na manipulação de dois softwares: o Cabri-Géometre e o iGeom, para representações (em que, segundo o pensamento geométrico de Parzysz, situamo-nos no nível G_1). A opção pela Geometria Dinâmica neste bloco trouxe resultados positivos: os alunos que não se adaptaram à construção dos cartões de fractais do bloco anterior, justamente com ou outros, se sentiram muito à vontade com os softwares.

> *"A contribuição dos programas de Geometria Dinâmica segue em dois ramos. Primeiro, provêem um ambiente no qual estudantes podem experimentar livremente. Dessa forma, eles podem facilmente verificar suas intuições e conjecturas durante o processo de procura de padrões, propriedades, etc. Segundo, estes programas provêem formas não tradicionais para os estudantes aprenderem e entenderem os métodos e conceitos matemáticos... permitindo construir figuras complexas e facilmente realizar, em tempo real, uma quantidade enorme de transformações nestas figuras, proporcionando ao estudante o acesso a uma grande variedade de exemplos que dificilmente seriam possíveis em ambientes não computacionais ou em ambiente computacionais estáticos".* (Marrades & Gutiérrez, apud Isotani, 2004)

Da análise dos materiais das duplas, das gravações, da observação da professora-pesquisadora e do questionário dos professores observadores, notamos que o Cabri apresenta uma manipulação mais fácil do que o iGeom, uma vez que no primeiro o procedimento para reverter ações erradas e realizar construções é mais claro, porém, neste último, a construção de fractais é muito mais rápida, já que o este programa possui um botão para indicarmos qual a profundidade da recorrência, isto é, com a indicação dos números 0, 1 ou 2 determinamos a quantidade de tetra-círculos obtidos numa escala crescente. Como supomos na análise *a priori* e agora confirmamos nesta análise, o iGeom é mais ágil para construção de fractais, porém, o Cabri é de mais fácil manipulação. Alguns comentários dos alunos ratificam esta nossa afirmação, tais como:

> *O iGeom é mais complexo no início, porém, depois de entender o seu sistema, torna muito mais rápido a formação de novos fractais, o que demoraria muito mais no Cabri-Géomètre, que possui um sistema mais simples.*
> *O primeiro programa* (Cabri) *é um pouco melhor que o segundo. Melhor, pois é mais prático para mexer. O segundo é mais complicado e por ser assim precisa de mais atenção. Mas adoramos os dois, e estamos adorando o curso.*

Em suma, as dificuldades deste bloco se limitaram à manipulação do iGeom por algumas duplas; o dinamismo dos softwares favoreceu o percepção da auto-semelhança dos fractais estudados (Triângulo de Sierpinski e Tetra-Círculo) confirmados pelas respostas da dupla 1 para o questionamento da Atividade 1 – Parte IV, que verificamos em: *É reduzido pela metade* (numa relação ao lado do triângulo da nova geração) ou *A área do novo triângulo reduz em um quarto, enquanto que a área total dos triângulos reduz em três quartos do anterior*; e por último, o surgimento de conjecturas para a geração n, por meio da observação da auto-semelhança facilitou a percepção de um comportamento genérico nas várias geração de fractais. Frase como "É isso? Bom, vamos conferir!" dita pela dupla 1 após a chegada de algumas conclusões, expõem que eles chegam a conjecturas e depois a conferem observando o fractal.

4.2.3 Bloco 3: Generalizações

As atividades deste bloco foram realizadas em sala de aula. Mais uma vez, os alunos foram dispostos em duplas, para que deste modo, pudessem interagir mutuamente. Cada dupla recebeu sua pasta contendo as folhas com as atividades a serem desenvolvidas.

Sete atividades formaram este bloco, que se caracterizará pelo fechamento das idéias anteriormente lançadas, constituindo, assim, o bloco das generalizações, da geometria proto-axiomática, por meio de premissas aceitas pelo aluno de modo intuitivo, ou seja, atividades no nível G_2 de Parzysz (2001).

Na **Atividade 1** os alunos observaram as gerações 1, 2, 3, 4 e 5 do fractal Tetra-Círculo, para remeterem às generalizações e questionamentos das próximas atividades.

A ação principal (e quase única) desta atividade era a observação das gerações para que o aluno começasse a perceber padrões que levassem às generalizações. Os alunos encontram-se entre a percepção e a representação das faces do tetraedro de Machado (2005), e numa transição do nível G_1 e G_2 do pensamento geométrico (Parzysz, 2001).

E foi através de observação que a dupla 1 chegou, espontaneamente, a uma conclusão que seria provocada pela segunda atividade, verificada no relato do professor-observador: *“Quanto maior o número de gerações, mais preenchido fica o fractal, tornando-se um quadrado completamente preenchido”.* Com esse comentário, esta dupla deixa explícito o seu entendimento perfeito sobre **tendência** que levará a uma percepção melhor da soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica, revelando que o seu raciocínio encontra-se no nível G_2 de Parzysz (2001).

Porém, no relato do professor-observador da dupla 2 verificamos uma conclusão errônea, visto que, os alunos afirmaram que, nas gerações analisadas, a quantidade total de elementos, com exceção da geração 3, era divisível por 3, o que é negado pelos números que eles mesmos expõem: geração 1 = 5 elementos; geração 2 = 21 elementos; geração 3 = 85 elementos; geração 4 = 341 elementos e geração 5 = 1536 elementos. Este erro demonstra grande falta de atenção por parte da dupla.

Ilustração 85 - Dupla 1 resolvendo o Bloco 3

Ilustração 86 - Dupla 2 resolvendo o Bloco 3

A **segunda atividade** foi composta por 4 questões sobre o Fractal Tetra-Círculo.

A primeira questão indaga sobre quantas circunferências há na geração 5, quantas circunferências novas há nesta geração em relação à anterior, quantas circunferências novas haverá na geração 6 (comparando-se com a geração 5) e, se há uma aproximação para a área ocupada pelo fractal. Notamos que quando perguntamos *Quantas circunferências há nesta figura?* (numa referência à geração 5), os alunos tiveram que formular conjecturas sobre o número de circunferências geração a geração, visto que o número excessivo de circunferências na geração 5 a impediu de ser contada. As **duplas 1** e **2** responderam corretamente a todos os itens desta questão, porém, as demais duplas apresentaram dificuldades. Com relação ao item:

- *Quantas circunferências há nesta figura?*
    - 65% das duplas responderam corretamente;
    - 30% erraram (4 duplas responderam 1024 circunferências novas ao invés da quantidade total de circunferências; e as outras duas duplas responderam 683 e 2557 circunferências, os quais não conseguimos identificar o raciocínio para encontrar estes valores);

- 5% deixaram em branco.

- *Em relação à Geração 4, quantas circunferências novas há nesta figura?*
  - 15% das duplas acertaram;
  - 80% responderam erroneamente (das quais 12 duplas responderam 256, às vezes 4^4, ao invés de 1024, fazendo-nos perceber que estes alunos fizeram uma analogia correta em relação às gerações, percebendo que na geração 1 temos 4^1 circunferências novas, na geração 2 temos 4^2, e assim por diante; porém, não notaram que na questão a pergunta referia-se à Geração 4 comparada com a Geração 5; nas outras respostas que surgiram – 85, 683, 868 e 341 – não conseguimos identificar o que foi pensado pela dupla);
  - 5% não deixaram sua resposta.
- *Em relação à Geração 5, quantas circunferências novas haverá na Geração 6?*
  - 80% responderam acertadamente;
  - 20% erraram, sendo que 2 duplas responderam 1024, ou seja, o número de circunferências novas da Geração 5 e não da Geração 6;
- *Há uma aproximação para a área ocupada pela figura? Justifique.*
  - 50% das duplas acertaram;
  - 20% erraram. Das respostas erradas, uma necessita ser analisada: “Não, porque ele cresce no seu próprio interior, com isso, sempre ocupará a mesma área.”. A dupla errou ao escrever que não havia aproximação para a figura – talvez por não entender o que significava a palavra *aproximação*, porém, fica subentendido na resposta que a aproximação existe e apesar de não mencionarem que ela tenderá a um quadrado, notamos em *ocupará a mesma área* que a dupla percebeu a formação de um quadrado completamente preenchido;
  - 15% deram respostas imprecisas (como em: “Sim, conforme vão surgindo mais figuras o espaço fica preenchido dificultando assim a visualização das imagens.” ou “Com mais algumas gerações a área ficaria preta.”. Ambas respostas denotam um entendimento da pergunta, porém, faltou clareza na resposta.);
  - 15% não responderam.

Notamos, assim, resultados díspares entre estas 20 duplas: enquanto metade dos alunos teve sucesso com relação à visualização da figura que se aproximaria no último item, uma grande porcentagem acertou o primeiro e o terceiro item e muitos deles (80%) interpretaram de forma incorreta o item b.

Após a análise do desempenho destas vinte duplas com relação à questão 1, verificamos que 15% não acertaram nenhum item; 20 acertaram apenas 1 item; 20% acertaram somente 2 itens; 20% acertaram 3 itens e 15% acertaram todos os itens. Podemos dizer, que até esta questão da Atividade 2, temos 7 duplas com dificuldades para perceber a auto-semelhança expressa pelo comportamento regular dos Fractais Tetra-Círculos.

Contrariando a análise *a priori*, verificamos que os alunos responderam a todos os itens, respeitando a ordem dada. Achávamos, inicialmente, que os alunos iriam pular o primeiro item e depois voltar para ele, já que assim, acreditávamos que ficaria mais fácil. No que

Quanto à questão *Quantas circunferências novas, em relação à geração anterior, há na: a) Geração 2? b) Geração 3? c) Geração 4? d) Geração n?*, as duplas que responderam e/ou perceberam as respostas na forma de potências (65%) não tiveram dificuldades em resolvê-la, sendo que, todas as duplas que erraram o último item (já que ninguém errou os 3 primeiros itens), não conseguiram transcrever os valores encontrados como uma potência. Observamos que, dentre as duplas que acertaram o número de elementos da geração n, duas escreveram a resposta da seguinte maneira: $\mathbf{4^n = 4n}$, denotando uma confusão entre multiplicação e potenciação. Em suma, não houve dificuldades em perceber a regularidade das respostas geração a geração, porém, quem não estabeleceu uma percebeu o fator de aumento sob a forma de potência, não conseguiu generalizar a geração **n**.

Na última questão, *Qual é o total de circunferências na: a) Geração 2? b) Geração 3? c) Geração 4? d) Geração n?*, verificamos que 80% dos alunos acertaram os três primeiros itens, 15% acertou 2 dos 3 e 5% acertaram totalmente a questão. Como já esperávamos, estabelecer o número total de circunferências numa dada geração **n**, foi um dos grandes desafios desta seqüência. Somente 3 duplas encontraram a solução, entre elas as 2 duplas analisadas. Interessante foi o formato encontrado pela dupla 1 para dar esta resposta. A seguir iremos representá-la:

Quadro 20 – Resolução do exercício 4 da Atividade 2/Bloco 3

4) Qual é o total de circunferências na:

a) Geração 2? $4^2 + 4^1 + 4^0$ *ou* $\left(\dfrac{4^{2-1}-1}{3}+4^{2-1}\right)$

b) Geração 3? $4^3 + 4^2 + 4^1 + 4^0$ *ou* $\left(\dfrac{4^{3-1}-1}{3}+4^{3-1}\right)$

c) Geração 4? $4^4 + 4^3 + 4^2 + 4^1 + 4^0$ *ou* $\left(\dfrac{4^{4-1}-1}{3}+4^{4-1}\right)$

d) Geração **n**? $\dfrac{4^{n-1}-1}{3}+4^{n-1}$

Apesar da resposta dada pela **dupla 1** estar diferente da esperada $\left(\frac{4^n - 1}{3}\right)$, podemos reescrevê-la para que assim fique da seguinte forma:

$$\frac{4^{n-1}-1}{3}+4^{n-1}=\frac{4^{n-1}-1}{3}+\frac{3.4^{n-1}}{3}=\frac{4.4^{n-1}-1}{3}=\frac{4^n-1}{3}$$

O professor-observador da **dupla 1** fez anotações sobre as dificuldades para encontrar a Geração **n** nos exercícios 3 e 4. “Não conseguiram perceber as generalizações dos casos, até que conseguiram perceber algo em comum $\frac{b^{n-1}-1}{b-1}+\frac{b^{n-1}}{1}$, e a partir daí generalizaram para cada caso: 1º Árvore (b = 2) duplicava; 2º Central (b = 3) triplicava em sua construção e 3º Tetra-Círculo (b = 4) quadruplicava as circunferências.” Os observadores também narram que a interferência da professora informando sobre a importância da utilização de potências foi decisiva para a obtenção da solução. O observador da dupla 1 notou que os alunos aceitaram as potências depois de muita discussão. A **dupla 2**, destoando das outras duplas, não apresentou dificuldades para encontrar a generalização para a geração **n**.

Como esperávamos, a professora-orientadora teve que interferir junto às duplas para orientá-las quanto à observação das características comuns aos valores numéricos obtidos e para que escrevessem os valores na forma de potência.

A **Atividade 3** estabelecia relação com os *Blocos 1* e *2* por meio da retomada das tabelas à procura de generalizações.

Por meio da análise da tabela da *Atividade 2/Bloco 1*, percebemos que, do grupo das vinte duplas que não estavam sendo observadas diretamente pelo professor, muitos alunos confundiram potência com multiplicação, pois, apesar de perceberem a regularidade na seqüência **1, 3, 9, 27**, metade destas duplas não conseguiram expressar a geração **n** com $\mathbf{3^{n-1}}$, sendo que 90% destas responderam que era **3.n**. Esta confusão (potência X multiplicação) não era esperada por nós, porém já fora percebida no exercício 3 da atividade anterior.

Notamos que os alunos que reescreveram a seqüência **1, 3, 9, 27**, como sendo $\mathbf{3^0, 3^1, 3^2, 3^3}$, conseguiram estabelecer facilmente a generalização para a geração **n**. Com relação às **duplas analisadas** pelos observadores, vimos que a **dupla 2** também expressou-se erroneamente, uma vez que respondeu 3^n, porém, classificamos este erro como de menor grau do que o de confundir a potência com a multiplicação, aqui eles simplesmente não tiveram atenção em relacionar o expoente da potência com o número da geração.

> *"os 'erros' encontrados em alguns estudos freqüentemente decorrem do fato de que os sujeitos se deparam com questões que nunca se propuseram antes ou que envolvem valores não usuais das variáveis de uma dada situação."* (Vergnaud, 1993)

Comparando os resultados anteriores com os do exercício3/Atividade 2, percebemos um melhor desempenho dos alunos neste último, o que podemos remeter a um exercício mais concreto, dado ao fato de que eles recolheram os dados por meio da observação do Tetra-Círculo instantes antes de resolvê-lo. Já o exercício da atividade 3, apesar de ter valores fruto da observação de fractais por eles construídos, mostrou-se naquele momento, como uma simples observação de dados de uma tabela, perdendo-se o vínculo com o fractal construído.

Ainda na mesma tabela, havia o questionamento sobre o número total de elementos por geração. Aqui sim esperávamos dificuldades, uma vez que, encontrar o padrão (ou fórmula) para o que chamamos de soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica - das conjecturas que os alunos terão que estabelecer, esta é a mais difícil. O índice de acertos foi muito baixo: as **duplas 1** e **2** acertaram e das demais duplas, apenas 2 responderam corretamente. Tivemos, mais uma vez, que enfatizar o uso das potências na procura de regularidade, porém, mesmo assim, o exercício se mostrava complexo, já que não é tão direto como o anterior. Também tivemos que alertá-los a relacionar o fator de aumento de um fractal para o outro com o primeiro elemento e com o número da geração, isto é, relacionar a geração à quantidade de elementos.

A **dupla 1** novamente expressou-se de forma diferente quanto ao número de elementos por geração. Ela escreveu $\frac{3^{n-1}-1}{2}+3^{n-1}$ ao invés de $\frac{3^n-1}{2}$.

Seguindo na mesma atividade temos a tabela da *Atividade 4/Bloco 1*, que tem os mesmos itens da tabela anterior, com o diferencial que esta refere-se ao Fractal Árvore, enquanto que aquela refere-se ao Fractal Central.

As **duplas 1** e **2** responderam corretamente a tabela e, segundo os observadores, encontraram dúvidas apenas inicialmente, sendo que, após analisarem os dados e reescreverem como potências, conseguiram realizar a tarefa.

A confusão entre potenciação e multiplicação tambr processo para generalização, prosseguindo para a construção de significados, segundo Vergnaud.

Como continuidade à tabela havia a pergunta: *Se chamássemos a medida da altura de* **a**, *da largura de* **b** *e do comprimento de* **c** *como sendo de dimensões da* Geração 1*, quais seriam as dimensões desta nova* Geração **n***? E como seria expresso o Volume?* Segundo os observadores, a **dupla 1**, a princípio, apresentou dificuldades com a nova nomenclatura, mas depois conseguiu expressar as dimensões precisamente, já a **dupla 2** não demonstrou nenhuma dificuldade e respondeu corretamente aos itens. As demais duplas tiveram o seguinte desempenho: 20% acertaram todos os itens; 15% não responderam corretamente nenhum item; 10% deixaram em branco; 55% deram resposta com erro de uso da nomenclatura pedida e ou não a usou, como vimos em duplas que utilizou a nomenclatura **a** tanto para altura, largura, comprimento ou volume (5 casos), duplas que usaram **a**, **l**, **c** e **v** ao invés de **a**, **b** e **c** (2 casos), alunos que não trocaram os números pelas letras pedidas dando a mesma resposta da Geração **n** da tabela (2 casos) e uma dupla que identificou o volume por $\frac{a}{2^{n-1}}.\frac{b}{2^{n-1}}.\frac{c}{2^{n-1}}=\frac{a.b.c}{2^{n-1}}$ ao invés de $\frac{a.b.c}{2^{3n-3}}$ ou $\frac{a.b.c}{8^{n-1}}$. Esses pequenos erros exibidos anteriormente são positivos e denotam que estas duplas estão caminhando para a construção de generalizações, apenas faltou a elas mais atenção ao que era pedido; portanto, da análise destas respostas verificamos que 75% das demais duplas estão estabelecendo conjecturas que levam às generalizações.

Para terminar esta atividade passaremos à análise da última tabela, que é julgada por nós como a de preenchimento mais complicado no que tange aos itens *Área do triângulo novo* e *Área total dos triângulos*.

A tabela, constituída de 4 colunas, não ofereceu dificuldades no preenchimento da *quantidade de triângulos novos* e nem em *lado do triângulo desta geração*, de forma que a **dupla 1** e **2** responderam corretamente e dentre as demais duplas houve 75% de acertos. Esperávamos que na coluna *lado do triângulo desta geração* surgissem empecilhos dado ao fato de que o ponto de partida da seqüência não era o número 1 e sim o número 32, e os valores se apresentavam decrescentes, o que poderia ser um entrave. Confrontando os dados com o que era esperado inicialmente, vimos que a seqüência **32, 16, 8, 4, 2** não apresentou generalização problemática para os alunos.

As duas últimas colunas desta tabela – *área do triângulo novo* e *área total dos triângulos* – eram mais complicadas. Das **duplas analisadas** notamos que a **dupla 2** respondeu corretamente e a **dupla 1** respondeu generalizando em função do lado, isto é, sem usar o valor numérico para o lado, não demonstrando erro, mas sim, que foram além do pedido, uma vez que, as respostas que deram são soluções da pergunta que sucede a tabela. Porém, o desempenho positivo não foi repetido pelas duplas restantes: 40% acertaram, 55% erraram e 5% não responderam. Notamos que os alunos que acertaram estão percebendo os valores como potências e muitos deles reescreveram os dados nesta forma, o que possibilitou a dedução da generalização.

Após a tabela aparece o seguinte questionamento: *Se chamássemos a medida do lado do triângulo inicial de* ***l*** (Geração 0)*, qual seria a medida do lado desta nova Geração* ***n****? E como seria expressa a área do novo triângulo e a área total dos triângulos?* Da análise das respostas obtivemos os seguintes resultados:

- **Dupla 1**: responderam corretamente, e, segundo o professor-observador, fizeram com facilidade;
- **Dupla 2**: responderam corretamente à generalização do lado, porém, quanto à área do triângulo novo e à área total dos triângulos deram respostas incompletas. As suas respostas foram: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ e $3^n.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$, respectivamente, ao invés de $\frac{l^2\sqrt{3}}{2^{2(n+1)}}$ e $3^n.\left[\frac{l^2\sqrt{3}}{2^{2(n+1)}}\right]$, mostrando que esqueceram de dividir por 2^n as duas respostas;
- **Demais duplas**: ninguém acertou todos os itens, apenas 40% dos alunos generalizaram corretamente o item lado. Das respostas erradas para os dois últimos itens vimos que uma se repetiu em 40% dos casos: $4^{4-l}\sqrt{3}$ e $3^l.4^{4-l}\sqrt{3}$, respectivamente, demonstrando que acreditaram que a generalização era a resposta de Geração **n** da tabela trocando-se o **n** por **l**; essa resposta mostra que estes alunos não interpretaram e não raciocinaram em cima da questão.

O professor-observador da **dupla 1** escreveu sobre o desempenho dos alunos que a primeira parte (análise das duas primeiras tabelas) exigiu mais concentração, depois dela tudo ficou mais tranqüilo.

Foi na **Atividade 4** que ocorreu a institucionalização por meio da exposição de todos os conceitos matemáticos que permeiam as Progressões Geométricas, e também a identificação dos elementos que constituem este conteúdo matemático.

Segundo Pais (2002), a finalidade de institucionalização é

> *"buscar caráter objetivo e universal do conhecimento estudado pelo aluno. Sob o controle do professor, é o momento onde se tenta proceder a passagem do conhecimento, do plano individual e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico. Por meio dessas situações, o saber passa a ter um estatuto de referência para o aluno, extrapolando o limite subjetivo."*

Os alunos, no decorrer da institucionalização, foram percebendo e identificando onde se encontrava os conceitos agora explicados e retomados nos exercícios anteriormente resolvidos.

O professor-observador da **dupla 1** declarou que os alunos A e B, após a institucionalização, identificaram claramente os termos $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_n}$, **n**, **r**, **q**, etc, nos exercícios anteriores. O professor-observador da **dupla 2** também manifestou que os alunos, durante e após a institucionalização, estabeleceram relações com as atividade anteriormente realizadas.

A reinterpretação dos dados dos exercícios anteriores, após a institucionalização, era o objetivo a **Atividade 5**. Uma vez que este objetivo não é complexo o desempenho das duplas foi muito bom, conforme esperava-se. Assim, obtivemos:

- As **duplas analisadas** responderam corretamente a todos os exercícios. Segundo os professores-observadores a **dupla 1** somente teve dificuldades para interpretar a questão 3, sendo que após intervenção da professora-pesquisadora no sentido de explanar quais eram as possibilidades de cálculo citada no exercício como termo geral, soma dos n primeiros termos ou soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica; a **dupla 2** não apresentou dificuldades;

- Com relação às duplas restantes os resultados foram o seguinte:
  - *Exercício 1*: Não houve erros, porém, 60% responderam através de valor presente na tabela (como era esperado) e 40%, no item $\mathbf{a_n}$, colocaram a fórmula do termo geral utilizando as nomenclaturas $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{n}$, revelando não um erro, m

acertadamente a esta questão pode ter passado por este processo;

- 5% não responderam.

▪ *Qual é a razão das três Progressões Geométricas na tabela representadas?*:

- 50% acertaram;
- 45% erraram, sendo que 3 duplas responderam 2, 2 e 8 ao invés de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$, respectivamente, revelando que para estes alunos a representação de que se de um número para outro dividimos por 2, a razão é 2, em vez de $\frac{1}{2}$; 6 duplas responderam que as razões eram $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, errando apenas o último item, o que nos permite concluir que a dupla havia verificado o comportamento dos valores para a 1ª e 2ª colunas, inferindo que na 3ª o comportamento seria idêntico; z
- 5% não responderam.

▪ *Qual é a possibilidade de cálculo permitida pelas seqüências de números de qualquer uma das três colunas?*:

- 70% das duplas responderam corretamente;
- 25% erraram, sendo que em um caso a dupla respondeu soma dos n primeiros termos de uma PG ao invés de soma dos infinitos termos, e outra dupla deu uma resposta muito confusa, porém, com algumas partes verdadeiras, que foi: "A possibilidade de cálculo permitida é de multiplicação e multiplicação infinita, pois <u>as razões estão entre 0 e 1</u> (grifo nosso para indicar a parte verdadeira da resposta). Notamos, também, durante a aplicação que as duplas tiveram dificuldades com a interpretação da pergunta;
- 5% não responderam.

Começaremos aqui a verificar se a seqüência de ensino permitirá ao aluno o desenvolvimento de conceitos significativos.

Acreditamos que a facilidade observada, e esperada, para resolver os exercícios desta atividade deve-se ao fato de todo o processo desta seqüência de ensino: ambientar o aluno ao concreto, ao dinamismo do computador, à observação antes de expor o conteúdo a ser visto. Temos certeza de que é assim que se constrói um aprendizado de um conceito, conforme propõe Vergnaud (1996).

A **Atividade 6** foi confeccionada para aplicação dos conceitos aprendidos em situações-problemas.

A resolução de problemas ou as situações de resolução de problemas são essenciais para a conceitualização, mas, como chama atenção Vergnaud (1996), *"um problema não é um problema para um indivíduo a menos que ele ou ela tenha conceitos que o/a tornem capaz de considerá-lo como um problema para si mesmo".* Vergnaud diz que *"na verdade, os conceitos se desenvolvem através da resolução de problemas, e esse desenvolvimento é lento"* (1983b).

O primeiro problema era assim enunciado: *Uma jovem seria contratada como vendedora para trabalhar de segunda a sábado nas duas últimas semanas que antecederiam o Natal. O dono da loja ofereceu R$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ela recebera no dia anterior. A jovem achou a proposta humilhante. Recusou o trabalho. Se ela tivesse aceitado a proposta, quanto receberia pelo 7º dia de trabalho? Quanto teria recebido por 12 dias de trabalho? Se tivesse sido efetivada, quanto estaria recebendo após **n** dias de contratação?* Da sua análise verificamos os seguintes resultados:

- **Dupla 1**: responderam acertadamente ao problema. Segundo o professor-observador eles acharam os problemas tranqüilos e não apresentaram dificuldades;
- **Dupla 2**: responderam corretamente à primeira pergunta, porém, na segunda pergunta, efetuaram o cálculo do a_n, que representaria o valor a ser recebido pelo n-ésimo dia de trabalho ao invés de encontrar a S_n, que representaria a

soma dos valores recebidos por n dias de serviço. Apesar de terem errado a última pergunta deste problema, apresentaram uma resposta organizada com uma resolução bem explicada sem esquecer de dar a resposta do problema;

- **Demais duplas**: 40% acertaram o problema inteiro; 40% erraram a representação par n dias de contratação, confundindo o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PG por termo geral de uma PG; 15% erraram as duas perguntas desta questão e 5% não responderam.

A outra questão desta atividade era: *O rápido Aquiles persegue uma morosa tartaruga. A velocidade do mais veloz e valente guerreiro grego é igual a 10 vezes a velocidade da tartaruga. A distância que os separa é de 100 metros. Nessas condições, quando Aquiles vencer os 100 metros, a tartaruga terá corrido 1/10 do que percorreu Aquiles e ficará 10 metros a sua frente. Quando Aquiles correr esses 10 metros, a tartaruga terá percorrido 1/10 dessa distância e estará 1 metro a sua frente. Quando Aquiles correr esse metro, a tartaruga terá percorrido 10 centímetros, e assim por diante. Esse raciocínio pode levar muita gente a concluir que Aquiles, por mais rápido que seja, nunca alcançará a tartaruga. Assim, pensava o filósofo grego Zenão (450 a.C.). Então, quantos metros Aquiles deverá percorrer para alcançar a tartaruga?* Verificando os

s

Para finalizar este bloco e esta seqüência de ensino, foi confeccionada a **Atividade 7**, que é composta por 3 perguntas que foram, inicialmente, utilizadas, com um outro grupo de alunos, para justificar a necessidade desta pesquisa.

A primeira pergunta era: *O que é uma Progressão Geométrica?* Da análise das respostas notamos os seguintes resultados:

- **Dupla 1**: apresentou uma resposta completa, como segue – "É uma seqüência de números que possuem uma razão multiplicativa de um termo para o outro."
- **Dupla 2**: apresentou uma resposta confusa e incompleta – "É um conjunto de números que seguem uma tendência (uma razão) em comum." Notamos que, pelas resoluções anteriores, eles entenderam o que era uma progressão geométrica, só que nesta questão eles deixaram de citar que de um termo para o outro nós multiplicamos ou dividimos pelo mesmo valor;
- **Demais duplas**: 65% deram uma resposta correta; 25% responderam de forma confusa ou incompleta; 5% responderam errado e 5% não responderam.

A segunda questão era composta de 2 itens: *a) (1, 3, 9, 27, ...) é uma Progressão Geométrica? Justifique a sua resposta. b) Sabendo que 1 é o 1º termo desta progressão, 3 é o 2º termo, etc., qual é o milésimo termo desta P.G.?* Os resultados da análise foram o seguinte:

- **Duplas 1** e **2**: apresentaram uma resposta completa e bem explicada, tanto na justificativa do item **a**, quanto na resolução do item **b**;
-

Analisando as respostas verificamos o seguinte desempenho:

- **Dupla 1**: respondeu corretamente assinalando a alternativa **a** e complementando com "$S_\infty = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{1}.\frac{2}{1} = 8$. A soma de infinitos termos dessa progressão se aproximará do número oito, pois conforme você vai dividindo, as casas vão **aumentando** infinitamente o que possibilita chegar a um número próximo de zero." ;
- **Dupla 2**: também acertou assinalou a alternativa **a** e justificou assim: "Pois a razão da PG é um número entre zero e um, ou seja, a PG vai diminuir sempre, chegando próxima ao zero.";
- **Outras duplas**: 40% assinalaram a alternativa **a** e justificaram corretamente; 40% responderam que a correta era a alternativa **a**, porém não justificaram ou deram uma justificativa confusa e/ou incompleta; 15% erraram assinalando a alternativa **b** e 5% não responderam.

A seguir, faremos uma comparação dos desempenhos dos dois grupos que realizaram esta atividade: o primeiro, os 123 alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública (página 3), e o segundo, o grupo de 44 alunos que realizaram esta seqüência.

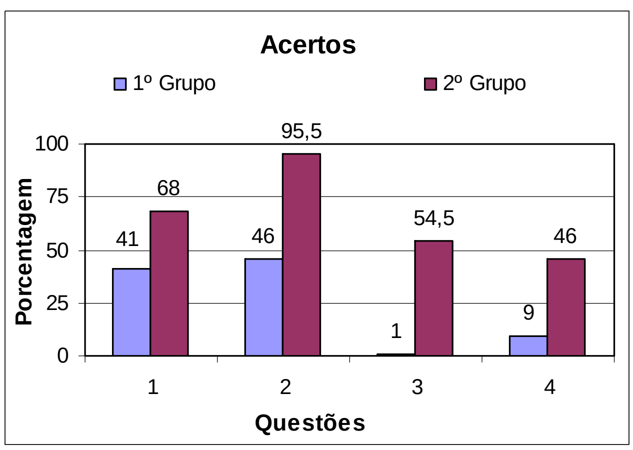


Gráfico 2 – Acertos

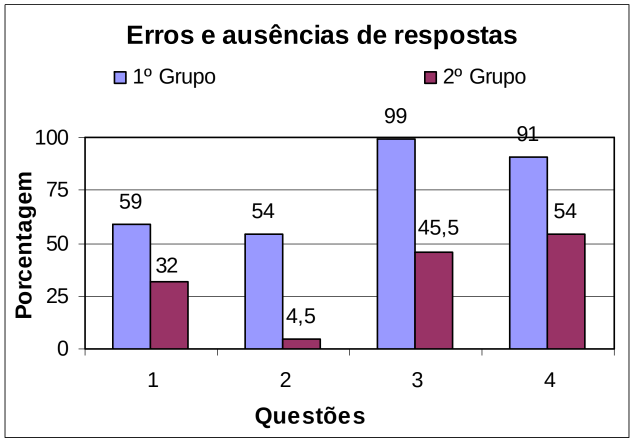


Gráfico 3 – Erros e ausência de respostas

Analisando os gráficos anteriores, notamos que o desempenho do 2º grupo foi superior ao do 1º grupo. Quanto aos acertos, percebemos que no geral, no 1º grupo houve 97 acertos, ao passo que no 2º grupo este número subiu para 264. Quanto aos erros, notamos que, o 1º grupo apresentou 303 erros, já o 2º grupo obteve 136 respostas incorretas.

A observação do Gráfico 2 nos permite verificar que aproximadamente metade dos alunos do 1º grupo acertaram a alternativa a da 2ª questão, enquanto que o 2º grupo não apresentou dificuldade alguma nesta alternativa. Porém, com relação à alternativa b os resultados foram alarmantes para o 1º grupo: apenas 1 aluno acertou; já no 2º grupo, um pouco mais da metade respondeu corretamente.

Dos dados que compõem os índices do Gráfico 3, com relação à primeira questão, notamos que uma parte dos alunos do 1º grupo optaram por não responder a questão (25%) ao invés de dar uma resposta errada (34%), o que não ocorreu no 2º grupo, em que o número de resposta incorretas (27,5%) foi bem superior ao número de alunos que não responderam a questão (4,5%). Percebemos que no 1º Grupo os alunos preferiram deixar a questão em branco do que responder errado, demonstrando insegurança com relação ao aprendizado do conteúdo Progressões Geométricas; já no 2º Grupo, dos 32% de respostas erradas ou em branco, uma pequena parte não apresentou resolução, o que revela que, embora o número de respostas erradas tenha excedido a um quarto das duplas, as mesmas se mostram confiantes para responder questões relativas ao conteúdo citado.

Ainda com relação ao Gráfico 3, verificamos um alto índice de respostas erradas do 1º grupo para a quarta questão, o que nos faz concluir que há uma *grande dificuldade em entender a noção de* ***soma infinita***, dado este ratificado pelos índices do 2º grupo, que embora tenham tido contato com este conteúdo recentemente, apresentou 54% dos alunos que não conseguiram percebê-la e/ou interpretá-la no exercício dado.

Enquanto que o índice 46% foi o limite máximo de respostas corretas para o 1º grupo, este número também foi o limite para o 2º grupo, só que ele apareceu como limite mínimo. No geral, os gráficos anteriores nos permitem observar um crescimento considerável dos resultados após a aplicação da seqüência. Podemos deduzir que estas atividades permitiram uma construção mais produtiva do conceito de progressões geométricas, e que a utilização dos fractais é um recurso que facilita esta aprendizagem.

Encerramos com uma anotação de um dos professores-observadores: “Independente das séries (1ªs, 2ªs ou 3ªs), percebi que os alunos conseguiram realizar todas as atividades, a princípio a professora até orientou-os, porém, nestas últimas, os alunos não tiveram a sua interferência e conseguiram realizar (resolver) os problemas com facilidade.

Ao final da aplicação da seqüência foi entregue um certificado de participação aos alunos e aos professores-observadores.

Ilustração 87 - Entrega de certificados - Dupla 1

Ilustração 88 - Entrega de certificados - Dupla 2

Ilustração 89 - Professora-pesquisadora com dupla participante

4.2.3.1 Conclusão do Bloco 3

Neste bloco percebemos que as duplas foram amadurecendo as suas conjecturas, caminhando para as generalizações. Verificamos que muitas duplas apresentaram dificuldades e não atingiram os objetivos propostos. Com relação às duplas analisadas vimos que elas não apresentaram dificuldade, aliás, como em nenhuma das outras atividades dos blocos anteriores.

As duplas começaram a utilizar letras para expressar generalizações, como na resposta dada pela dupla 1 para o exercício 4 da Atividade 2, como narra o professor-observador: “Não conseguiram perceber as generalizações dos casos, até que conseguiram perceber algo em comum $\frac{b^{n-1}-1}{b-1}+\frac{b^{n-1}}{1}$, e a partir daí generalizaram para cada caso: 1º Árvore (b = 2) duplicava; 2º Central (b = 3) triplicava em sua construção e 3º Tetra-Círculo (b = 4) quadruplicava as circunferências.”

Mesmos nas respostas confusas ou incompletas notamos que os alunos rumavam para expressar o comportamento genérico auto-semelhante dos fractais, como em resposta dada para a atividade 3: 2^{n-1} + número anterior, numa referência à generalização da seqüência 1, 3, 7, 15.

Alguns erros surgiram nas três primeiras atividades deste bloco, como:

- a confusão entre potência e multiplicação, quando os alunos informam a solução como sendo 4n ao invés de 4^n – Atividade 2;
- o não uso das propriedades de multiplicação de potências, visto na seguinte resposta: $\frac{a}{2^{n-1}} \cdot \frac{b}{2^{n-1}} \cdot \frac{c}{2^{n-1}} = \frac{a.b.c}{2^{n-1}}$ ao invés de $\frac{a.b.c}{2^{3n-3}}$ ou $\frac{a.b.c}{8^{n-1}}$ - Atividade 3;
- a percepção parcial de generalização, como vimos na resposta da dupla 1: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ e $3^n.\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$, ao invés de $\frac{l^2\sqrt{3}}{2^{2(n+1)}}$ e $3^n.\left[\frac{l^2\sqrt{3}}{2^{2(n+1)}}\right]$ - Atividade 3.

Notamos que, a partir da institucionalização (Atividade 4), o número de respostas corretas foi aumentado e as dificuldades das duplas diminuídas. Este dado nos permite inferir duas coisas:

- os exercícios anteriores eram diferenciados dos comumentes vistos por eles (e por assim ser, nos parece que aumenta o grau de dificuldade, justamente por não ser uma situação habitual);
- a institucionalização, além de trazer a situação *normal* de como os conteúdos são ensinados, também classificou e organizou todas as informações pré-vistas, facilitando a ordenação das idéias.

Quanto às Atividades 5 e 6 notamos, no geral, um desempenho muito bom dos alunos. Há que se chamar atenção ao fato de que situações-problemas, que na maioria das vezes são repelidas pelos alunos, foram aceitas e resolvidas sem obstáculos e, várias duplas esboçaram comentários de que os problemas eram tranqüilos.

O desempenho na última atividade revelou-se positivo quando comparado com o 1º grupo a que ele foi aplicado. Através deste, notamos

Capítulo 5:

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa contempla um estudo teórico e experimental sobre como o aprendizado de Progressões Geométricas pode ser feito de maneira significativa a alunos do Ensino Médio, utilizando os Fractais como um recurso motivador neste processo.

Neste contexto, desenvolvemos uma seqüência de ensino, amparada na metodologia da Engenharia Didática, composta por três blocos: o primeiro bloco de atividades - o concreto - constituiu-se para enfatizar a *percepção do belo* por meio do senso estético com a construção dos cartões de fractais; o segundo bloco - o das representações - expõe a tecnologia aliada à Matemática através de dois softwares de geometria dinâmica, o Cabri-Géomètre e o iGeom; o terceiro bloco foi criado para propiciar *a emergência de relações matemáticas* e apresenta grande relevância, pois nele encontramos as generalizações de todas as atividades feitas, trazendo à tona o nosso instrumento de pesquisa - as progressões geométricas -, e a identificação dos conceitos que permeiam este conteúdo. Participaram da aplicação desta seqüência 44 alunos distribuídos em duplas, sendo que, somente as duplas 1 e 2, constituídas pelos alunos A e B, e C e D, respectivamente, foram acompanhadas por professores-observadores.

Fundamentamos nossa pesquisa nos estudos de Parzysz, Machado, Vergnaud e na Geometria Dinâmica. De Parzysz, utilizamos os níveis G_0, G_1 e G_2 relacionados ao pensamento geométrico e identificados: pela geometria concreta (utilizada por nós no Bloco 1, com as validações perceptivas na construção dos cartões de fractais); pela geometria espaço-gráfica (trabalhada no Bloco 2 com as representações no Cabri-Géomètre e no iGeom); pela geometria proto-axiomática (caracterizada no Bloco 3, o mais dedutivo, com as generalizações). De Machado, utilizamos a idéia de rede de conhecimentos representada pela *Metáfora do Tetraedro*, que sugere a articulação das quatro faces de um tetraedro na construção de um objeto geométrico, apresentadas em nossa seqüência da seguinte forma: no Bloco 1 – face *percepção* e *construção física*; no Bloco 2 – face *representação* e, por último, no Bloco 3 – face *organização conceitual*. Das idéias de Vergnaud, trabalhamos com situações de resolução de problemas para o desenvolvimento de conceitos significativos. Da Geometria Dinâmica, nos beneficiamos da percepção e visualização da auto-semelhança no aprendizado geométrico, onde conjecturas foram feitas a partir da experimentação e criação de objetos matemáticos.

Para responder à questão de pesquisa: *Como a utilização dos fractais pode ser motivadora na percepção da auto-semelhança?* analisamos alguns elementos obtidos das produções dos alunos nos *Blocos 1*, *2* e *3*. Nossa resposta será fundamentada nas atividades que utilizaram a construção, a representação e/ou a observação dos fractais Central, Árvore, Triângulo de Sierpinski e Tetra-Círculo.

No Bloco 1, os alunos construíram o Fractal Central e o Fractal Árvore nas Atividades 1 e 3, respectivamente, e a validação ocorreu de maneira perceptiva (G_0) por meio da observação da auto-semelhança nestes objetos confeccionados. Expressões citadas pelas duplas observadas apontadas no capítulo 4 revelaram a alegria e a satisfação na construção dos fractais.
5j 1.08 Tm (s.) Tj 1 045 398.64 4355j 1 0 0 1 289.58.24 357.6 Tr

No Bloco 2, com o auxílio do Cabri-

embutida nele". Já a dupla 2, devido aos problemas enfrentados, não conseguiu ver pontos positivos neste programa, narrando que a utilização do iGeom era mais difícil do que a do Cabri.

No Bloco 3, a primeira atividade objetivava a observação de cinco gerações do Fractal Tetra-Círculo. Esta tarefa fundamentava as ações da próxima atividade, em que se inquiria sobre o comportamento destas gerações do fractal. Notamos que as cinco ilustrações do Tetra-Círculo auxiliaram a resolução dos questionamentos e fizeram surgir conjecturas sobre as propriedades das mesmas, como expostas na segunda atividade deste bloco. Frases como a dita pelo aluno C da dupla 2, "*Puxa, quantas circunferências! Ainda bem que não temos que contá-las! Só precisamos verificar como era o primeiro fractal* (referindo-se à primeira geração), *o segundo, e assim por diante, até deduzirmos quantas circunferências tem neste último fractal!* (ou seja, última geração)", reforçam que por meio da observação das gerações de fractais os alunos perceberam o comportamento geral dos mesmos.

Respondendo à pergunta, os **fractais** confeccionados por meio de dobraduras, por meio do dinamismo dos softwares de geometria dinâmica ou pela observação das gerações do Tetra-Círculo, facilitam a compreensão da auto-semelhança na medida em que os alunos observam suas características. Através destes atos o aluno descobre propriedades inerentes aos fractais e passa a desenvolver um processo de generalização. Esta auto-semelhança também faz despertar o senso estético que age motivando o aprendizado matemático.

Para responder à segunda pergunta: *Como a auto-semelhança pode contribuir no processo de generalização das fórmulas da progressão geométrica para alunos de Ensino Médio?* necessitamos verificar os resultados das atividades que possuíam exercícios relacionados à observação dos fractais, que se encontravam distribuídos ao longo dos três blocos desta seqüência. É da observação da auto-semelhança que retiraremos argumentos para justificar esta pergunta.

No Bloco 1, as Atividades 2, 4 e 5 remetiam à resolução de alguns questionamentos referentes à observação da auto-semelhança presente nos fractais Árvore e Central. Por meio dos exercícios os alunos perceberam como era o comportamento dos dados retirados da observação. As duplas observadas não apresentaram dificuldades em nenhuma atividade deste bloco e verificamos que elas começaram a estabelecer generalizações, apresentando alguns erros, porém, demonstrando que o conceito de progressão geométrica começa a se formar, havendo assim, um início de uma *organização conceitual*, como sugere Machado (2005). A dupla 1, tanto na Atividade 2, como na Atividade 4, procurou estabelecer generalizações, como podemos perceber nas ilustrações 75 e 78 – capítulo 4, situando-se no nível G_2, como sugere Parzysz.

No Bloco 2, o processo de descoberta/desenvolvimento das generalizações e dos padrões inerentes aos fractais se fez presente na Atividade 1 – Parte IV. Neste bloco, os exercícios exigiam uma generalização maior do que no Bloco 1. Com a construção de quatro gerações do Triângulo de Sierpinski, as duplas observadas continuaram a ter um desempenho bom. A dupla 1 conseguiu estabelecer generalizações facilmente, como verificamos em: “A área total dos triângulos é ¾ do valor anterior, quer ver, creio eu que seja isso, porque a gente multiplica por 3 este daqui (referindo-se à área do triângulo novo), e se aqui (referindo-se à área total dos triângulos) nós dividimos por 4, então é só multiplicar por ¾.”. A busca de padrões foi facilitada pela expressão dos dados na forma de potências. Observamos que, gradativamente, as duplas compreendiam e encontravam mais facilmente as conjecturas que levam à generalização.

O Bloco 3 era repleto de atividades que conduziam ao processo de generalização. A constante cobrança para que os alunos encontrassem padrões a partir da auto-semelhança notada nos fractais, levou a dupla 1, a chegar, espontaneamente, a uma conclusão que seria provocada pela segunda atividade, verificada no relato do professor-observador: *“Quanto maior o número de gerações, mais preenchido fica o fractal, tornando-se um quadrado completamente preenchido”.* Com esse comentário, esta dupla deixa explícito o seu entendimento sobre a soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica, revelando que o seu raciocínio encontra-se no nível G_2 de Parzysz (2001). Neste bloco, notamos que todo o caminho percorrido antes da institucionalização facilitou o entendimento dos conceitos que permeiam o estudo de Progressões Geométricas, tanto que, quando a aula institucionalizada foi ministrada os alunos se olhavam e/ou procuravam identificar nos exercícios anteriormente resolvidos os termos agora aprendidos. Frases como: “Nossa, eu nunca iria conseguir deduzir esta fórmula sem ter feito aqueles exercícios antes!” (dupla 2 – aluna C) ou “Tudo ficou mais fácil, os conhecimentos ficaram concretos, não superficiais!” (dupla 1 – aluna B), revelaram que os questionamentos dos exercícios anteriores levaram ao entendimento mais efetivo de Progressões Geométricas. Quanto às Atividades que envolviam situações-problemas (Atividades 5 e 6) os alunos apresentarem um desempenho muito bom, apesar de que estes problemas, na maioria das vezes são repelidos pelos alunos, e aqui foram aceitos e resolvidos sem obstáculos e, várias duplas esboçaram comentários de que as situações eram tranqüilos. Para ratificar que esta seqüência realmente colaborou para o entendimento dos conceitos que envolvem as PG´s, comparamos os dados obtidos na Atividade 7 (que funcionou como fechamento do bloco 3 e de todas as atividades da seqüência) com os dados obtidos na sua 1ª aplicação (grupo de 123 alunos da 3ª série do Ensino Médio da E. E. Profa. Marlene Camargo Ribeiro). Os resultados da 2ª aplicação foram bem melhores do que o da 1ª. Ainda houve erros, e algumas duplas tiveram um desempenho ruim, porém, notamos que a seqüência de ensino por nós proposta, trouxe resultados bastante satisfatórios.

Respondendo à questão de pesquisa, notamos que a auto-semelhança verificada nos fractais contribui para o processo de generalização das fórmulas de Progressão Geométrica, no sentido que desenvolve no aluno a percepção dos padrões que leva à construção de conjecturas.

Diante os resultados e os problemas apresentados durante a aplicação desta seqüência, encaminhamos algumas sugestões que podem direcionar melhor futuros trabalhos:

- dividir o Bloco 1 em duas sessões de aplicações para que o tempo de confecção das atividades não canse os alunos;
- reescrever os questionamentos que podem levar a erros, como na Atividade 5 do Bloco 1 (... *Há alguma tendência para esses valores?*);

- reduzir o número de alunos que realizarão a seqüência para cerca de 8 a 10 duplas, de modo a tornar mais acessível aos alunos as orientações do(a) professor(a) e os esclarecimentos de possíveis dúvidas;
- promover uma igualdade de conhecimentos de todas as duplas em relação aos softwares Cabri-Géomètre e iGeom, mediante a aulas antecipadas à aplicação da seqüência (no nosso caso, a grande maioria conhecia o Cabri-Géomètre, porém, nenhum aluno conhecia o iGeom) para que a manipulação do software não seja empecilho ao aprendizado.

Esperamos que esse trabalho centrado no estudo das Progressões Geométricas via Fractais estimule novas abordagens para construção de conceitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, Michèle. *Reserches en didactique des mathématiques.* Vol. 9/3, 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, 1988.

AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D. e HANESIAN, H. *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Ed. Edgard Blücher Ltda., 1998. 2ª ed.

BORBA, Marcelo de Carvalho & PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 2 ed.

BRANDÃO, Leônidas de Oliveira. *Algortimos e Fractais com programas de GD.* Revista do PrD

CARVALHO, Maria Cecília Costa e Silva. *Padrões Numéricos e Seqüências.* São Paulo: Moderna, 1997. 3ª ed.

__________. *Fractais: uma breve introdução.* Apostila de curso.

COLLINS GEM. *Dicionário inglês-português, português-inglês.* Glasgow: Caledonian Internaional Book Manufacturing Ltd, 1997.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática – 1ª série*. São Paulo: Editora Ática, 2005.

EVES, Horward. *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Ed. Unicamp, 2004.

FEDER, J. *Fractals*. New York: Plenum Press, 1988.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Miniaurélio: o minidicionário da língua portuguesa.* Curitiba: Posigraf, 2004. 6ª ed.

FIORENTINI, Dario (org.). *Histórias e investigações de/em aulas de matemática.* Campinas: Ed. Alínea, 2006.

FRANCHI, A. *Considerações sobre a teoria dos campos conceituais*. In Alcântara Mac20 1 105.84 338.64 Taa4n4n

ISOTANI, Seiji. *Desenvolvimento de ferramentas no iGeom: utilizando a geometria dinâmica no ensino presencial e a distância*. Dissertação de Mestrado, USP, 2004.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e Didática.* São Paulo: Cortez Editoria, 2005. 6ª ed.

__________. *Língua Materna e Matemática: análise de uma impregnação mútua.* São Paulo: Cortez, 1998. 4ª ed.

__________. *Matemática e educação – Alegorias, tecnologias e temas afins.* São Paulo: Cortez, 1995. 2ª ed.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara et al. *Educação Matemática: uma introdução.* São Paulo: EDUC, 2002. 2ª ed.

MAGINA, S., CAMPOS, T. M. M., NUNES, T. & GITIRANA, V. *Repensando Adição e Subtração*. -1ª ed.- São Paulo: PROEM, 2001.

MANDELBROT, Benoit. *Objectos Fractais.* Lisboa: Gradiva, 1998. 2ª ed.

__________. *The Fractal Geometry of the Nature*. New York: W. H. Freeman and Company, 1983. 19ª ed.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 2ª ed.

PARZYSZ, Bernard. *Articulation entre perception et deduction dans une demarche géométrique en PE1. Extrait du colloque de la Copirelem,Tours, 2001.*

PEITGEN, Heinz-Otto et al. *Fractals for the classroom – Strategic Activities – volume one.* New York: Springer-Verlag, 1991.

__________. *Fractals for the classroom – Strategic Activities – volume two.* New York: Springer-Verlag, 1992.

__________. *Fractals for the classroom – Part Two: Complex Systems and Mandelbrot Set.* New York: Springer-Verlag, 1992.

PEREIRA, Helena Bonito Couto. *Michaelis: dicionário escolar espanhol.* São Paulo: Editora Melhoramentos, 2002.

PIMENTEL, Homero & URBAN, Paulo. *Fractais da História – a humanidade no caleidoscópio.* São Paulo: Madras Editora, 2003.

PONTE, João Pedro da. *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SEMINÁRIO PAULISTA DE HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1º., São Paulo, SP, Brasil, 2005.

SMOLE, Kátia Stocco & DINIZ, Maria Ignez. *Matemática – Ensino Médio – volume 1*. São Paulo: Editora Saraiva, 2005.

VERGNAUD, G. (1983a). Vuelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives. Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. França, 26 de junho a 13 de julho.

__________. (1983b). Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc.

__________. *Teoria dos campos conceituais*. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993.

__________. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. Revista do GEMPA, Porto Alegre, Nº 4, 1996.

ANEXOS

Anexo 1: CONVITE

Anexo 2: SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

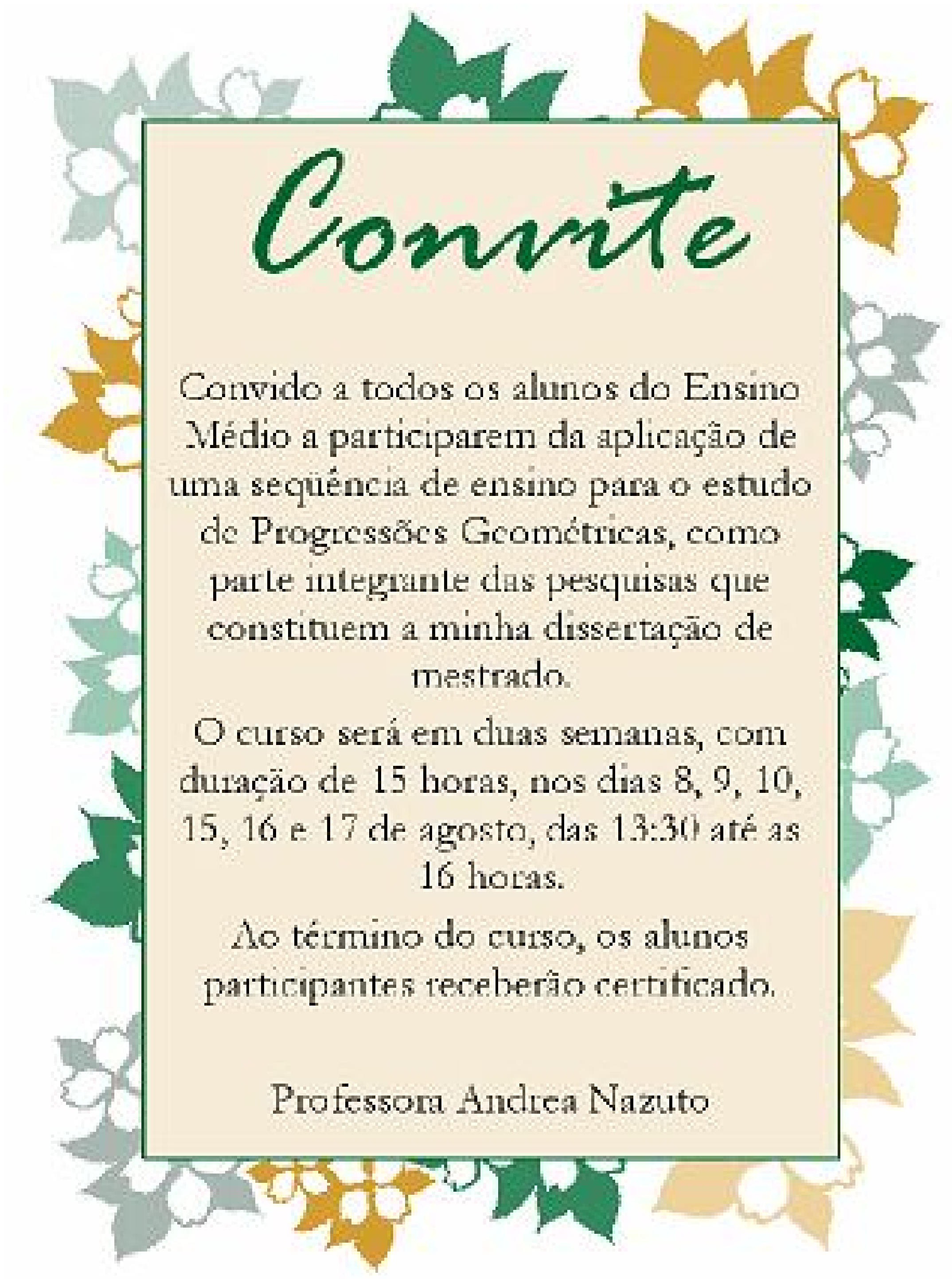
Anexo 3: QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR

Anexo 4: CERTIFICADO

Anexo 5: TERMO DE COMPROMISSO

Anexo 6: OPINIÃO DOS ALUNOS SOBRE A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Anexo 1: CONVITE



Anexo 2: SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

APRESENTAÇÃO

Você está fazendo parte de um curso que tem o seguinte título: ***Uma seqüência de ensino para o estudo de Progressões Geométricas via Fractais***.

Este curso é parte integrante da Dissertação de Mestrado da pesquisadora Andrea Gomes Nazuto Gonçalves – PUC/SP.

Neste curso você aprenderá a construir belíssimos fractais, percebendo neles mais matemática do você pode imaginar. Também trabalharemos com dois softwares: o Cabri-Géomètre e o iGeom, para que você possa perceber o dinamismo presente nos fractais.

O Curso será dividido em três blocos:

- Bloco 1: Construção de fractais;
- Bloco 2: Softwares;
- Bloco 3: Generalizações.

Você deverá trazer lápis (ou lapiseira) e borracha. O restante do material será o [redacted] empres [redacted] Chama [redacted] faltar [redacted] será [redacted]

[redacted] durant [redacted] 09/08, [redacted]

Bloco 1: FRA$_{que}$TAL?

Neste primeiro bloco de atividades vamos construir dois belos fractais. Mas, antes de tudo, *o que é um **fractal**?* Um **fractal** é uma forma geométrica que pode ser dividida indefinidamente, sendo que cada uma de suas partes é uma cópia reduzida do todo.

O objetivo deste bloco de atividades é auxiliar a construção das fórmulas do termo geral, da soma dos termos e da soma de infinitos termos de uma Progressão Geométrica, a partir dos fractais. Tais atividades serão institucionalizadas no *Bloco 3*.

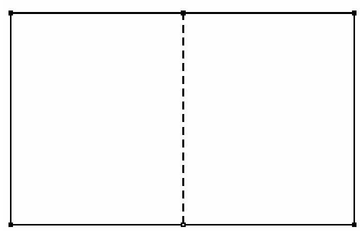
Vamos construir o Fractal Central e o Fractal Árvore. Escolha quatro folhas para cada um, pegue régua, lápis e tesoura.

Atividade 1

Objetivo: *Confeccionar o* Fractal Central.

➲ **Geração 1: utilize uma folha.**

a) Dobre a folha ao meio no lado maior, conservando a abertura para cima;



b) Sob o lado dobrado faça quatro divisões em partes iguais e construa uma perpendicular passando pela primeira quarta parte e outra passando pela última quarta parte, ambas de altura igual à metade da altura;

c) Faça um corte sob as duas perpendiculares;

d) Dobre a saliência cortada para cima até encontrar o outro lado da folha;

e) Abra a dobra de modo a ficar com a folha do tamanho original;

f) Inverta a dobra, isto é, ela estará para dentro e você a colocará para fora, encontrando o 1º e único elemento deste fractal;
g) Está pronta a *Geração 1* do Fractal Central.

➲ **Geração 2: utilize outra folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Central de *Geração1*, para isso, temos que dobrar a folha de sulfite seguindo os passos de **a)** até **d)** do item anterior;
b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** na região central da folha;
c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;
d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1*) para dentro;
e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;
f) Passe para os outros cortes, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;
g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e encontrará novos elementos que formarão o Fractal Central de *Geração 2*.

➲ **Geração 3: utilize a terceira folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Central de *Geração 2,* conforme fizemos anteriormente;
b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** iniciais na região central da folha;
c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;

[redacted]

[redacted]

Atividade 2

Objetivo: *Estabelecer generalizações a partir da observação da relação parte/todo no* Fractal Central*, para assim compreender as fórmulas do termo geral e da soma dos n termos de uma Progressão Geométrica.*

Após a construção do fractal preencha o quadro a seguir.

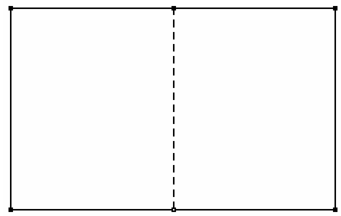
	Número de elementos novos por geração	Número total de elementos por geração
Geração 1		
Geração 2		
Geração 3		
Geração 4		

Atividade 3

Objetivo: *Confeccionar o* Fractal Árvore.

➲ **Geração 1: utilize uma folha.**

a) Dobre a folha ao meio no lado maior, conservando a abertura para cima;



b) Encontre o ponto médio do lado dobrado e construa uma perpendicular passando por ele de altura igual à metade da altura;

c) Faça um corte sob esta perpendicular;

d) Dobre a saliência da direita para cima até encontrar o outro lado da folha (você pode escolher a da esquerda, porém, deverá ser sempre a do mesmo lado);

e) Abra a dobra de modo a ficar com a folha do tamanho original;

f) Inverta a dobra, isto é, ela estará para dentro e você a colocará para fora, encontrando o 1º e único elemento deste fractal;

g) Está pronta a *Geração 1* do Fractal Árvore.

➲ **Geração 2: utilize outra folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Árvore de *Geração1*, para isso, temos que dobrar a folha de sulfite seguindo os passos de **a)** até **d)** do item anterior;

b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** da *Geração 1* nas duas partes da folha: a menor (dobrada) e a maior;

c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;

d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1*) para dentro;

e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;

f) Passe para o outro corte, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;

g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e encontrará novos elementos que formarão o Fractal Árvore de *Geração 2*.

➲ **Geração 3: utilize a terceira folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Árvore de *Geração 2,* conforme fizemos anteriormente;
b) Feito isso, aplicaremos, novamente, as etapas de **a)** até **d)** da *Geração 1* em todas as partes da folha, que aqui deverão ser em número de quatro;
c) Abra todas as dobras feitas até ficar com a folha do tamanho original;
d) Deixe a folha com a dobra principal (etapa **a)** da *Geração 1*) para dentro;
e) Localize os dois primeiros cortes (são os maiores) e inverta a sua dobra, isto é, ele estará para dentro e você o colocará para fora;
f) Passe para os outros cortes, começando sempre pelo maior deles, invertendo dobra a dobra, deixando-os todos para fora;
g) Ao término da inversão de todas as dobras, abra a folha e encontrará novos elementos que formarão o Fractal Árvore de *Geração 3*.

➲ **Geração 4: utilize a última folha.**

a) O ponto de partida desta geração é o Fractal Árvore de *Geração 3*;
b) Repita todo o processo anterior nas partes fracionadas da folha, desdobrando, encontrando elementos novos e confeccionando o Fractal Árvore de *Geração 4*.

Atividade 4

Objetivo: *Estabelecer generalizações a partir da observação da relação parte/todo no* Fractal Árvore*, para assim compreender as fórmulas do termo geral e da soma dos n termos de uma Progressão Geométrica.*

Após a construção do fractal preencha o quadro abaixo.

	Número de elementos novos por geração	Número total de elementos por geração
Geração 1		
Geração 2		
Geração 3		
Geração 4		

Atividade 5

Objetivo: *Estabelecer generalizações a partir da observação das dimensões dos fractais apresentados.*

Supondo as dimensões do papel utilizado nas dobraduras ser 200 X 320mm, complete o quadro abaixo.

	Altura (mm)	Largura (mm)	Comprimento (mm)	Volume (mm^3)
Geração 1				
Geração 2				
Geração 3				
Geração 4				

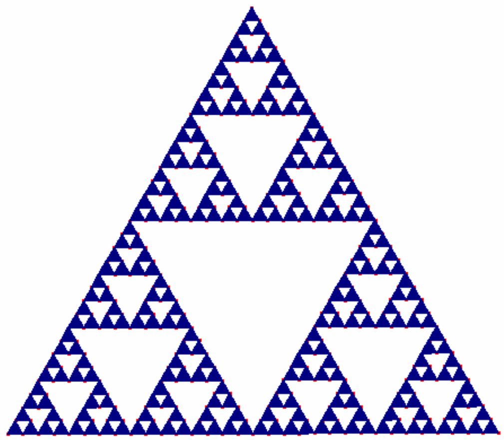
Agora responda:

➲ O que acontece com as dimensões conforme aumentamos a geração? E o que acontece com o volume? Há alguma tendência para esses valores?

____
____
____
____
____
____
____
____

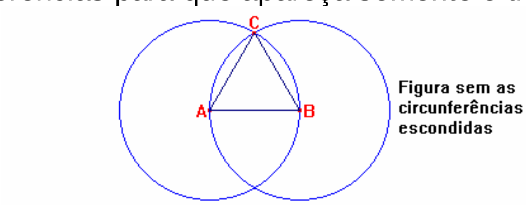
Bloco 2: Fractais utilizando Softwares de Geometria Dinâmica

Neste bloco de atividades vamos utilizar dois Softwares de Geometria Dinâmica: Cabri-Géomètre II, um programa computacional educativo, para co



Triângulo de Sierpinski após 5 gerações

a) Construa os pontos A e B e trace o segmento AB;
b) Trace uma circunferência de centro A passando por B e uma circunferência de centro B passando por A;
c) Chame de C a intersecção superior das duas circunferências;
d) Trace os segmentos AC e BC;
e) Esconda as circunferências para que apareça somente o triângulo.



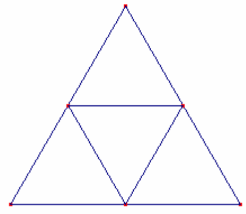
Parte II

Uma macro é uma construção efetuada uma vez a partir de construções existentes, pode ser gravada para ser utilizada novamente. Para gravar uma macro indicam-se quais são os objetos iniciais, quais são os finais terminando com a sua gravação.

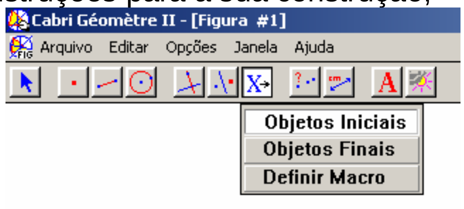
a) Essa construção partirá do Triângulo Eqüilátero;
b) Encontre o ponto médio de cada um dos lados do triângulo;
c) Una os pontos médios através de um triângulo (menu *Retas* selecione a opção *Triângulo*);

> Observe que o triângulo inicial ficou dividido em 4 triângulos congruentes. Para o Triângulo de Sierpinski o triângulo central é desprezado. Então, ficaremos com 3 novos triângulos.

➲ *Grave esta figura, pois precisaremos dela na construção das gerações na* **Parte III**.



d) Selecione no menu *Macro* a opção *Objetos Iniciais*: clique nos vértices do triângulo maior;
e) Selecione no menu *Macro* a opção *Objetos Finais*: clique no triângulo que tem como vértices o ponto médio dos lados do triângulo maior;
f) Selecione no menu *Macro* a opção *Definir Macro*: informe o nome da macro e, opcionalmente, as instruções para a sua construção;



g) Para ativá-la, selecione no menu *Macro* a nova opção que conterá o nome dado por você à macro, marque os objetos iniciais (três vértices de um triângulo) e terá os objetos finais (triângulos formados pelos pontos médios).

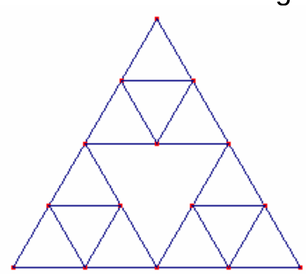
Parte III

➲ **Geração 1**

Daremos o nome de *Geração 1* àquela figura gravada na **Parte II**. Abra o arquivo e regrave-o com este nome.

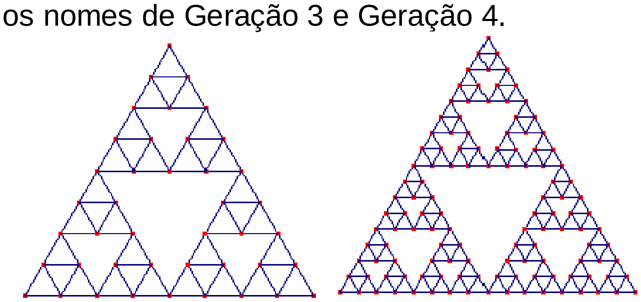
➲ **Geração 2**

A partir da *Geração 1* obtenha a *Geração 2* aplicando a macro a cada um dos triângulos menores, lembrando que para a construção do *Triângulo de Sierpinski, **todo triângulo central é desprezado***. Grave esta figura com o nome Geração 2.



➲ **Gerações 3 e 4**

Proceda da mesma forma que no item anterior, não esquecendo de gravar cada figura com os nomes de Geração 3 e Geração 4.



Geração 3 Geração 4

Parte IV

Abra arquivo por arquivo gravado na atividade 3 e complete a tabela abaixo. Considere o lado do triângulo inicial como sendo 32.

	Quantidade de triângulos novos*	Lado do triângulo desta geração	Área do triângulo novo**	Área total dos triângulos
Geração 0	1	32	$\frac{1024\sqrt{3}}{4} = 256\sqrt{3}$	$256\sqrt{3}$
Geração 1				
Geração 2				
Geração 3				
Geração 4				

Agora responda:

- O que acontece com o lado do triângulo que surge a cada nova geração? Há alguma tendência para esses valores?

  ____
  ____
  ____

- Qual a tendência para a área do novo triângulo? E para a área total dos triângulos?

  ____
  ____
  ____

* Lembre-se que os triângulos centrais não devem ser contados, pois não fazem parte da figura.

** É importante lembrar que a área de um triângulo eqüilátero é dada por $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, onde l é o lado do triângulo.

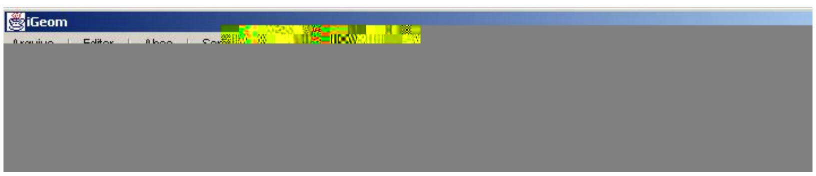
Atividade 2

Objetivos: *Apresentar o Tetra-Círculo e construir uma base para sua confecção; construir os Tetra-Círculos de recorrências 0, 1 e 2.*

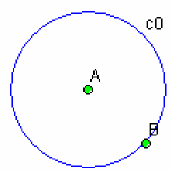
Parte I

O fractal Tetra-Círculo foi criado (ou recriado) em 1995 pelo IME-USP com o objetivo de explorar o conceito de programação utilizando "software" de Geometria Dinâmica. É assim nomeado pois baseia-se numa circunferência com quatro pólos.

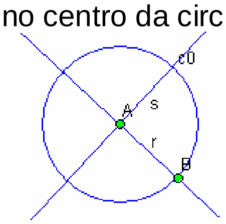
Para iniciar a construção, abra o *iGeom* e siga os passos a seguir elencados.



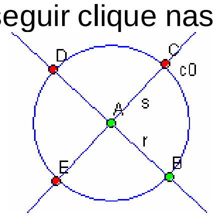
a) Dados os pontos A e B, construa a circunferência c0 de centro A, passando por B;



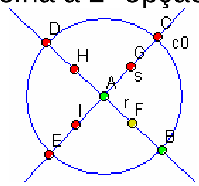
b) Construa a reta r passando por A e por B e a reta s perpendicular a r, passando por A:
   - Clique no botão Retas e escolha a primeira opção. A reta será construída a partir dos dois pontos utilizados anteriormente para definir a circunferência;
   - Ainda no botão Retas, escolha opção reta perpendicular (5º botão). Clique primeiro na reta e depois no centro da circunferência.



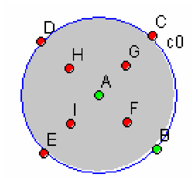
c) Construa os pontos C, D e E, das intersecções de r e s com c0:
   - Escolha o botão Ponto e a seguir clique nas intersecções.



d) Encontre os pontos médios de AB, AC, AD e AE:
   - Clique no botão Ponto e escolha a 2ª opção – ponto médio.



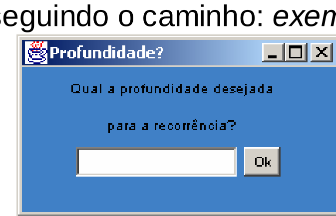
e) Pinte o interior da circunferência e esconda as retas:
   - No botão Medidas (8º botão), selecione a circunferência e clique na opção *Constrói interiores* (última opção). Selecione a cor dando um duplo clique com o botão esquerdo no interior da circunferência (para ter uma cor igual à do script, use o tom vermelho 148);
   - No botão Edição, selecione o item a ser escondido e clique na opção esconder, objeto a objeto.



f) Está pronta a base para a construção do fractal *Tetra-Círculo*. Salve-a com o nome *Base para fractal.geo.*

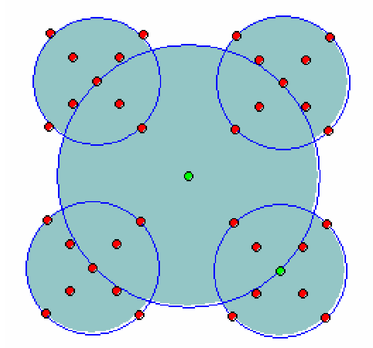
Parte II

a) Agora faremos uso dos scripts já gravados no Igeom;
b) Clique no botão *Marcar ou desmarcar objetos* (6º botão) e selecione uma dupla de pontos, que pode ser BF (nesta ordem), CG, DH ou EI;
c) Selecione o botão Script (11º botão). Clique na setinha que faz executar o script (neste momento você irá abrir um script pré-concebido do Igeom). Agora você procurará o script seguindo o caminho: *exemplos/scr/frac-cir2*.



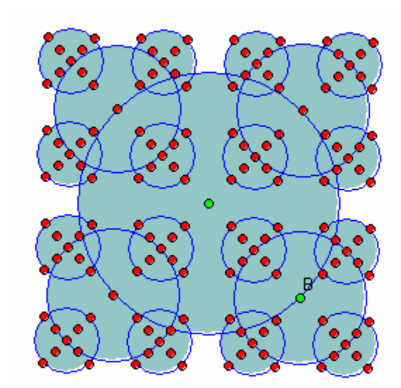
A figura anterior mostra a janela que aparecerá. A profundidade indica a construção obtida pelo script: script 0 obteremos uma construção semelhante à inicial; script 1, aparecerá uma construção onde em cada um dos tetra-círculos do script 0 aparecerá outro tetra-círculo; script 2, tem-se um novo tetra-círculo em cada um dos tetra-círculos do script 1;

d) Lembre-se que o processo do item **c** deve ser aplicado a cada um dos 4 pares de pontos da figura base do item **b**;
e) Esta terminado o Tetra-Círculo de recorrência 0.



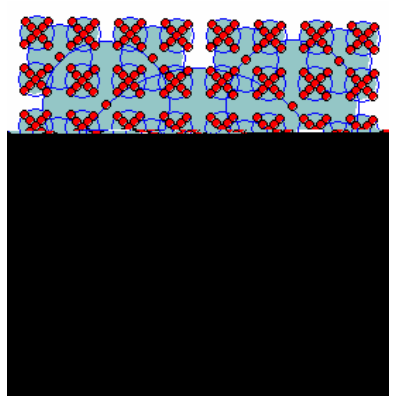
Parte III

a) Abra o arquivo *Base para fractal.geo* gravado no fim da **Parte I**;
b) Siga os passos da **Parte II**, trocando apenas a profundidade da recorrência para 1.



Parte IV

a) Abra o arquivo *Base para fractal.geo* gravado no fim da **Parte I**;
b) Siga os passos da **Parte II**, trocando apenas a profundidade da recorrência para 2.



Observação: A **Atividade 2** tem o objetivo de manipulação do iGeom para a percepção de seu dinamismo. *O fractal Tetra-Círculo será retom*

Bloco 3: Generalizações

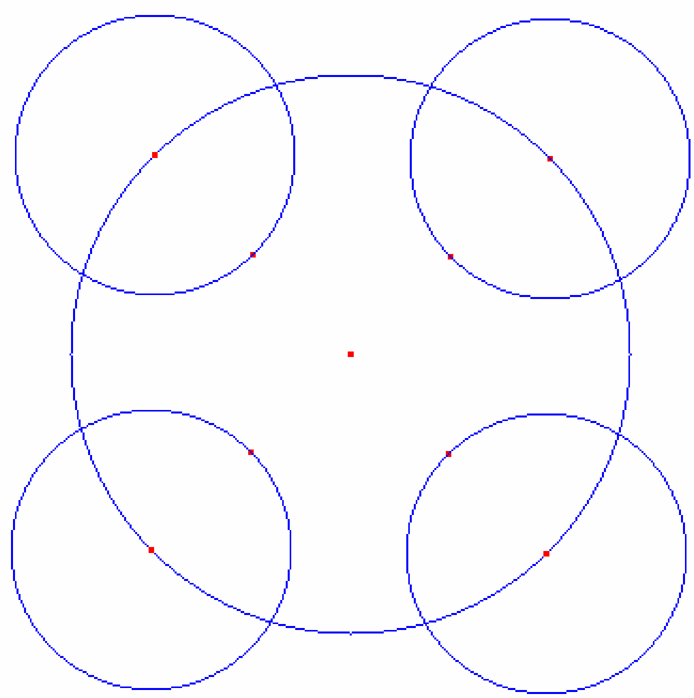
Neste último bloco faremos o fechamento dos blocos anteriores formulando generalizações a respeito do comportamento dos fractais trabalhados na *Geração **n***.

Antes disso, buscaremos entender a formação das gerações do Fractal Tetra-Círculo.

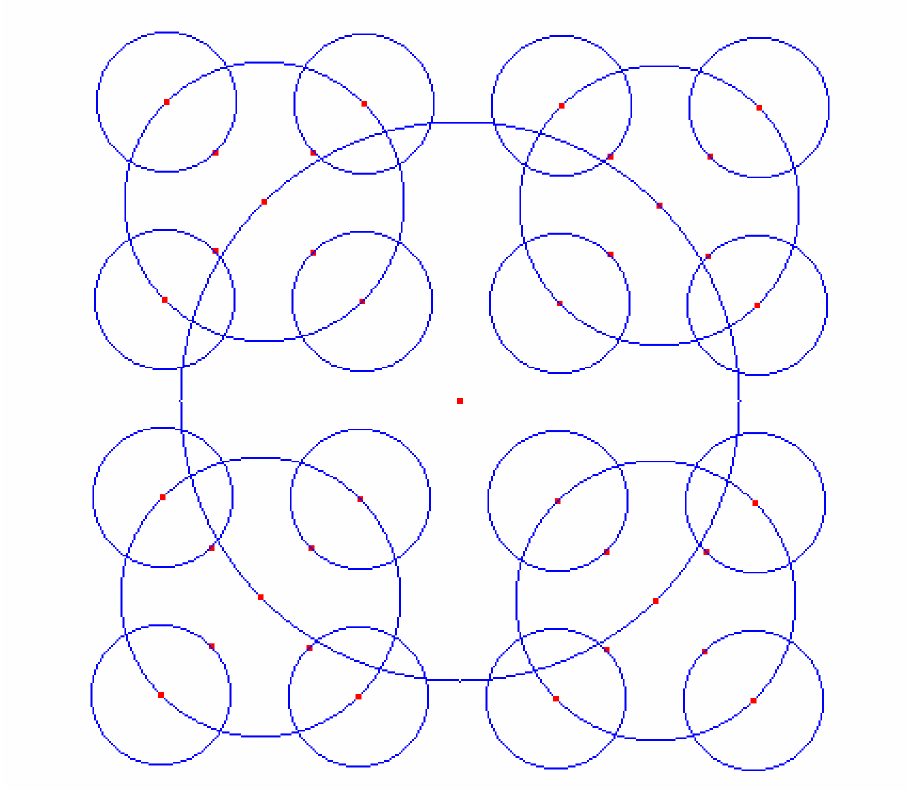
Atividade 1

Objetivo: *Observar o* Fractal Tetra-Círculo.

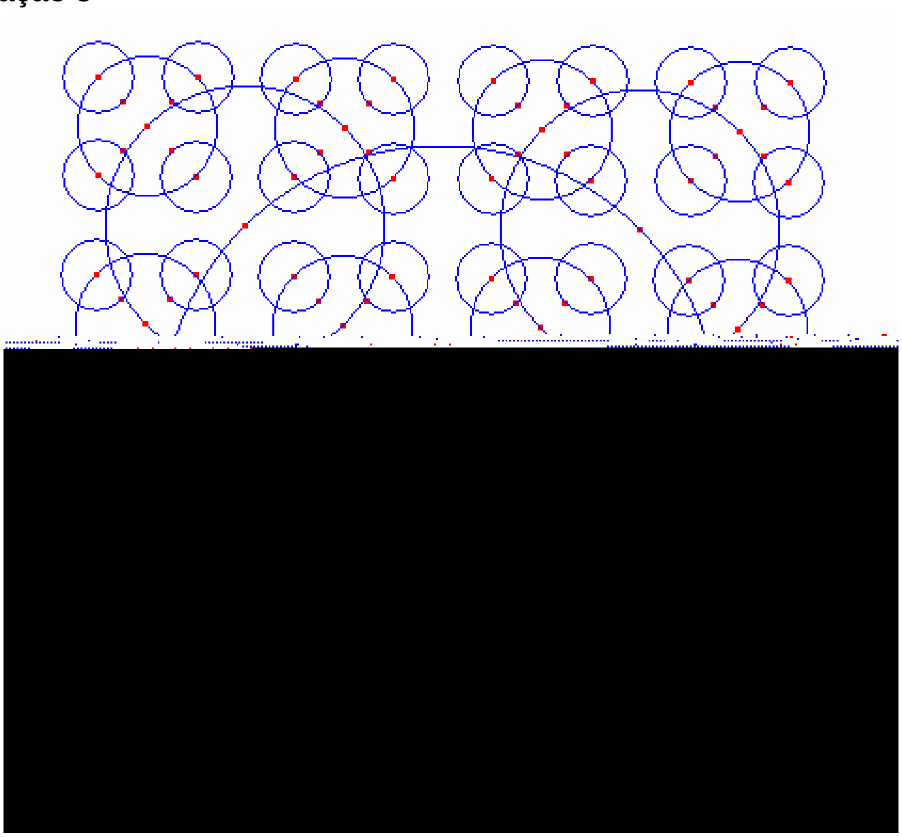
➲ **Geração 1**



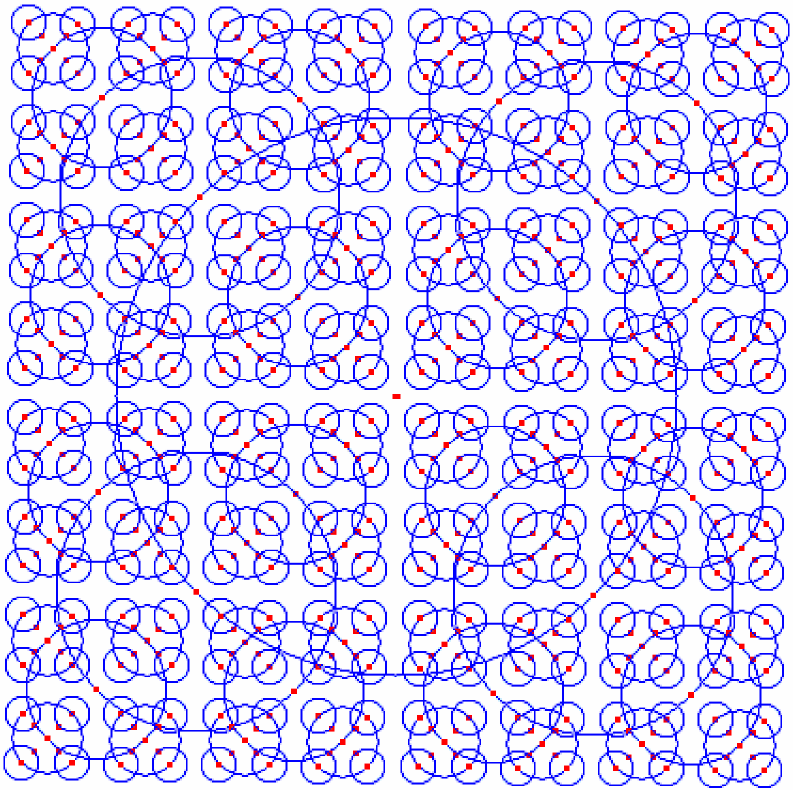
➲ Geração 2



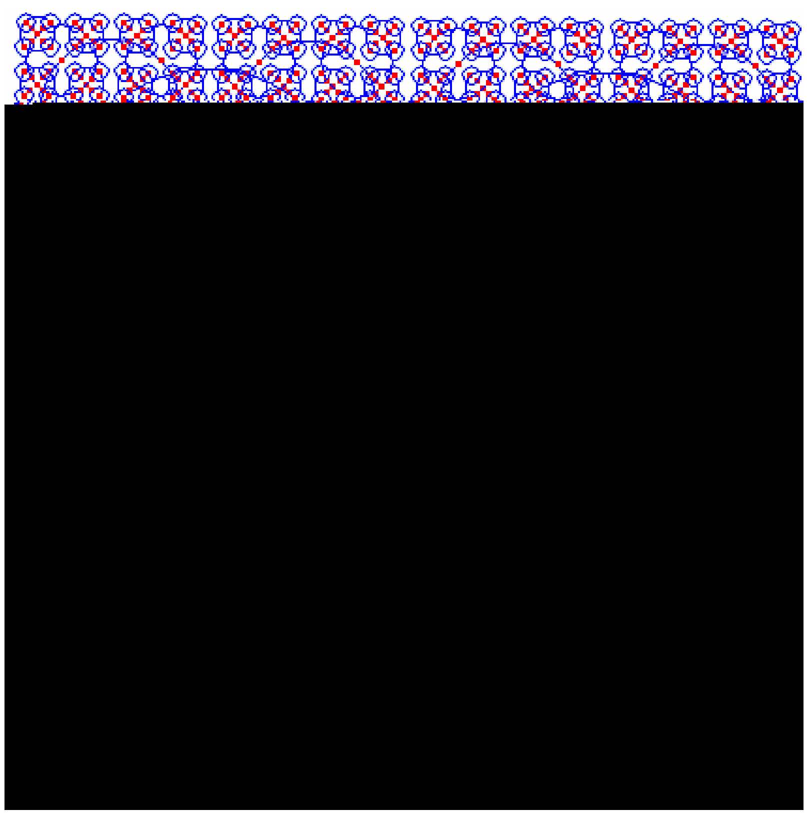
➲ Geração 3



- **Geração 4**



- **Geração 5**



Atividade 2

Objetivo: *Responder aos questionamentos sobre o* Fractal Tetra-Círculo.

1) Tendo em vista a Geração 5, responda as questões.
   a) Quantas circunferências há nesta figura?____________________________
   b) Em relação à *Geração* 4, quantas circunferências **novas** há nesta figura? ____________________________
   c) Em relação à *Geração* 5, quantas circunferências **novas** haverá na *Geração 6*? ____________________________
   d) Há uma aproximação para a área ocupada pela figura? Justifique. ____________________________
   ____

2) Como fazer para encontrar o número de circunferências da *Geração 2*, a partir da *Geração 1*?
   ____
   ____

3) Quantas circunferências novas, em relação à geração anterior, há na:
   a) Geração 2? ____________________________
   b) Geração 3? ____________________________
   c) Geração 4? ____________________________
   d) Geração **n**? ____________________________

4) Qual é o total de circunferências na:
   a) Geração 2? ____________________________
   b) Geração 3? ____________________________
   c) Geração 4? ____________________________
   d) Geração **n**? ____________________________

Atividade 3

Nas **Atividades 2, 4** e **5** do *Bloco 1* e na **Atividade 1** do *Bloco 2*, preenchemos quatro tabelas referentes ao Fractal Central, ao Fractal Árvore e ao Triângulo de Sierpinski. Retornaremos a estas tabelas com o intuito de estabelecer generalizações através da obtenção das características da *Geração **n*** destes belos fractais.

As tabelas estão preenchidas com suas respostas com exceção à linha *Geração **n***, que foi acrescida para conduzir às generalizações.

➲ **Tabela da *Atividade 2/Bloco 1***

Fractal Central		
	Número de elementos novos por geração	Número total de elementos por geração
Geração 1	1	1
Geração 2	3	4
Geração 3	9	13
Geração 4	27	40
Geração **n**		

➲ **Tabela da *At***

➲ **Tabela da *Atividade 5/Bloco 1***

	Altura (mm)	Largura (mm)	Comprimento (mm)	Volume (mm^3)
Geração 1	100	80	80	640 000
Geração 2	50	40	40	80 000
Geração 3	25	20	20	10 000
Geração 4	12,5	10	10	1 250
Geração **n**				

➲ Se chamássemos a medida da altura de **a**, da largura de **b** e do comprimento de **c** como sendo dimensões da *Geração 1*, quais seriam as dimensões desta nova Geração **n**? E como seria expresso o Volume?

Altura =

Largura =

Comprimento =

Volume =

➲ **Tabela da *Atividade 1/Bloco 2***

	Quantidade de triângulos novos	Lado do triângulo desta geração	Área do triângulo novo	Área total dos triângulos
Geração 0	1	32	$\frac{1024\sqrt{3}}{4} = 256\sqrt{3}$	$256\sqrt{3}$
Geração 1	3	16	$\frac{256\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3}$	$3.64\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$
Geração 2	9	8	$\frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$	$9.16\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$
Geração 3	27	4	$\frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$	$27.4\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$
Geração 4	81	2	$\frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$	$81\sqrt{3}$
Geração **n**				

- Se chamássemos a medida do lado do triângulo inicial de **l** *(Geração 0)*, qual seria a medida do lado desta nova Geração **n**? E como seria expressa a área do novo triângulo e a área total dos triângulos?

  Lado =

  Área do triângulo novo =

  Área total dos triângulos =

Atividade 4

__Objetivo:__ Institucionalizar os conceitos que envolvem o conhecimento de Progressões Geométricas.

Observe na tabela da atividade da **Atividade 1 - Parte IV** do *Bloco 2* a seqüência formada pela quantidade de triângulos novos: (1, 3, 9, ...). Cada termo, a partir do segundo é obtido multiplicando o termo anterior pela constante 3. Observe agora a seqüência formada pelos lados do triângulo: (32, 16, 8, ...). Cada termo é obtido multiplicando o termo anterior pela constante 0,5. Esse tipo de seqüência é chamado de **Progressão Geométrica**, e à constante dá-se o nome de **Razão**.

Definição: Uma **Progressão Geométrica** (**P.G.**) é uma seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante ***q***. O número ***q*** é chamado de *razão* da progressão geométrica.

Alguns exemplos de progressão geométrica:

- (1, 3, 9, ...) é uma PG de razão q = 3;
- (1, 2, 4, ...) é uma PG de razão q = 2;
- (105**;** 52,5**;** 26,25**;** ...) é uma PG de razão q = 0,5.

Termo geral da PG

O termo geral é uma expressão que nos permite obter um termo qualquer da PG conhecendo o 1º termo $\mathbf{a_1}$ e a razão **q**.

Para deduzir a fórmula do termo geral partiremos do primeiro exemplo apresentado: (1, 3, 9, ...). Assim, temos: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, ..., e $q = 3$.

Podemos reescrever esta seqüência e encontrar o *Termo Geral da PG* da seguinte maneira:

$$a_1 = 1 \;.\; 3^0$$

$$a_2 = 1 \;.\; 3^1$$

$$a_3 = 1 \;.\; 3^2$$

(...)

$$\boxed{\mathbf{a_n = a_1 \;.\; q^{n-1}}}$$

<u>Soma dos *n* primeiros termos de uma PG</u>

Dada a PG (a_1, a_2, a_3, a_4,..., a_n), de razão $q \neq 1$, temos:

$$Sn = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Para dedução de uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de um PG utilizaremos a PG (2, 6, 18, 54, ...). Assim, tem-se:

$$S_1 = a_1 = 2$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 8$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 26$$

(...)

que pode ser escrita da seguinte forma:

$$S_1 = \frac{2.(3^1 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_2 = \frac{2.(3^2 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_3 = \frac{2.(3^3 - 1)}{3 - 1}$$

(...)

$$\boxed{S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Soma dos infinitos termos de uma PG

Se uma PG possui razão no intervalo]-1,1[, é possível obter a soma de seus infinitos termos.

A PG (100; 50; 25;...) será utilizada como exemplo para obtenção da fórmula. Nela, temos $a_1 = 100$ e $q = ½$. Como estamos observando a soma de infinitos termos, vamos elevar o valor de n nas somas. Deste modo:

$$S_5 = \frac{100.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{100.\left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 193{,}75$$

$$S_{10} = \frac{100.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{100.\left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 199{,}8046875$$

$$S_{20} = \frac{100.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{100.\left(\frac{1}{2^{20}} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} \cong 199{,}999809265$$

Podemos notar que, à medida que **n** aumenta, o valor de $\mathbf{S_n}$ fica cada vez mais próximo de 200. Dizemos que, para valores de **n** tão grandes quanto se queira, a soma 100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 ... converge para 200, ou ainda, 100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 ... = 200.

Quando temos uma P.G. (a_1, a_2, a_3, ...) com razão q, onde 0 < q < 1, verificamos que $\mathbf{q^n}$ é um número cada vez mais próximo de zero à medida que o expoente **n** aumenta. Logo, quando calculamos $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ para **n** <u>suficientemente grande</u>, temos que a soma infinita terá valor $\frac{a_1}{1 - q}$.

Verificando em nosso exemplo, temos: $S_n = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = 200.$

Atividade 5

Objetivo: *Reinterpretar os dados contidos em tabelas anteriormente utilizadas segundo os conceitos apresentados na* **Atividade 4**.

Retornaremos a algumas da tabelas preenchidas em blocos anteriores, que serão abaixo reescritas de maneira mais sintética para facilitar a visualização de conceitos que permeiam o estudo de Progressões Geométricas, tais como: termo geral, soma dos n primeiros termos, soma dos infinitos termos, etc.

➲ Reinterprete as tabelas 1 e 2, identificando o que é pedido.

Tabela 1 - Fractal Central		
Geração 1	1	1
Geração 2	3	4
Geração 3	9	13
Geração 4	27	40
Geração n	3^{n-1}	$\frac{1.(3^n - 1)}{3-1}$

Tabela 2 - Fractal Árvore		
Geração 1	1	1
Geração 2	2	3
Geração 3	4	7
Geração 4	8	15
Geração n	2^{n-1}	$\frac{1.(2^n - 1)}{2-1}$

1) Com relação à tabela 1, identifique o(a):

a) a_1: ___________

b) a_2: ___________

c) razão: ___________

d) a_n: ___________

2) Com relação à tabela 2, identifique a:

a) S_1: ___________

b) S_2: ___________

c) S_3: ___________

d) S_n: ___________

➲ Observe a tabela 3.

Tabela 3			
Geração 1	100	80	640 000
Geração 2	50	40	80 000
Geração 3	25	20	10 000
Geração 4	12,5	10	1 250
Geração n	$\frac{100}{2^{n-1}}$ ou $100.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\frac{80}{2^{n-1}}$ ou $80.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$\frac{640.000}{2^{3(n-1)}}$ ou $640.000.\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

3) Qual é o nome dado aos números da Geração n?

____

____

4) Qual é a razão das três Progressões Geométricas na tabela representadas?

a) coluna 2:

b) coluna 3:

c) coluna 4:

5) Qual é a possibilidade de cálculo permitida pelas seqüências de números de qualquer uma das três últimas colunas?

____

____

Atividade 6

Objetivo: *Aplicar os conceitos de Progressões Geométricas em Situações-Problemas*.

➲ **Problema 1**[*]

Uma jovem seria contratada como vendedora para trabalhar de segunda a sábado nas duas últimas semanas que antecederiam o Natal. O dono da loja ofereceu R$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ela recebera no dia anterior. A jovem achou a proposta humilhante. Recusou o trabalho. Se ela tivesse aceitado a proposta, quanto teria recebido pelos 12 dias de trabalho? Se tivesse sido efetivada, quanto estaria recebendo após **n** dias de contratação?

[*] Extraído, com modificações, de: http://gecities.yahoo.com.br/silvandabr/papg.html.

➲ Problema 2[**]

O rápido Aquiles persegue uma morosa tartaruga. A velocidade do mais veloz e valente guerreiro grego é igual a 10 vezes a velocidade da tartaruga. A distância que os separa é de 100 metros. Nessas condições, quando Aquiles vencer os 100 metros, a tartaruga terá corrido 1/10 do que percorreu Aquiles e ficará 10 metros a sua frente. Quando Aquiles correr esses 10 metros, a tartaruga terá percorrido 1/10 dessa distância e estará 1 metro a sua frente. Quando Aquiles correr esse metro, a tartaruga terá percorrido 10 centímetros, e assim por diante. Esse raciocínio pode levar muita gente a concluir que Aquiles, por mais rápido que seja, nunca alcançará a tartaruga. Assim, pensava o filósofo grego Zenão (450 a.C.). Então, quantos metros Aquiles deverá percorrer para alcançar a tartaruga?

[**] Extraído, com modificações, de: http://gecities.yahoo.com.br/silvandabr/papg.html.

Atividade 7

***Objetivos:** Finalizar a seqüência de estudo com a série de questões propostas inicialmente para justificar a necessidade desta pesquisa.*

Para justificar a necessidade deste trabalho, realizamos uma pesquisa junto a alunos da rede estadual de ensino, através de um pequeno questionário, inquiriu-se sobre conhecimentos básicos que norteiam as PG.

Com o intuito de verificar a validade do caminho percorrido através desta seqüência de ensino, responda ao questionário abaixo.

Pergunta 1: O que é uma Progressão Geométrica?

____

____

Pergunta 2:

a) (1, 3, 9, 27, …) é uma Progressão Geométrica? Justifique a sua resposta.

____

____

b) Sabendo que 1 é o 1º termo desta progressão, 3 é o 2º termo. Qual é o milésimo termo desta P.G.?

____

____

Pergunta 3:
$$\begin{cases} 4+2=6 \\ 4+2+1=7 \\ 4+2+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2} \\ 4+2+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{31}{4} \\ (...) \end{cases}$$

Se continuarmos esse processo indefinidamente o que acontecerá com as somas? Escolha uma das alternativas abaixo e justifique-a.

a) Elas se aproximarão de algum valor.
b) Elas ultrapassarão qualquer valor fixado.

____

____

Anexo 3: QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR

Questionário do Observador

Bloco 1: FRA$_{\text{que}}$TAL?

Atividade 1

1. A dupla apresentou dificuldades para construir o fractal? Quais?
2. Precisaram de ajuda da professora-pesquisadora? Em quê?
3. Outras observações.

Atividade 2

1. Os alunos da dupla entenderam o que é um element

2. Notaram as regularidades de uma geração para outra? Comente. Tiveram dificuldades para expressar os valores na forma de fração ou na forma de potência? Comente.
3. Entenderam o significado da palavra *tendência*?
4. Precisaram de ajuda da professora-pesquisadora? Em quê?
5. Outras observações.

Bloco 2: Fractais utilizando Softwares de Geometria Dinâmica

Atividade 1

1. A dupla de alunos necessitou de interferência da professora-pesquisadora para manuseio do software? Comente.
2. Apresentaram dificuldades na Parte: I (   ) II (   ) III (   ) IV (   ) Nenhuma (   ) Comente.
3. Conseguiram preencher todas as colunas da tabela da Parte IV? Comente.
4. Caso tenha ocorrido dificuldade(s), cite-a(s).
5. Outras observações.

Atividade 2

1. A dupla de alunos conseguiu manipular o software? Comente.
2. Demonstraram surpresa com a rapidez de construção do fractal com o software iGeom? Comente.
3. Fizeram algum comentário comparando o Cabri e o iGeom? Comente.
4. Outras observações.

Bloco 3: Generalizações

Atividade 1

1. Quais as conjecturas que a dupla de alunos estabeleceu ao observar as 5 gerações do fractal Tetra-Círculo?
2. Outras observações.

Atividade 2

1. A dupla de alunos conseguiu responder o **item a** do *primeiro exercício*? Comente.
2. Entenderam o significado de *circunferências novas*? Comente.
3. Chegaram a alguma figura para a aproximação pedida no **item d** do *primeiro exercício*? Comente.
4. Perceberam que a representação dos resultados na forma de potência ajudaria a resolver a questão? Comente.
5. Apresentaram dificuldades para encontrar a **Geração n** nos *exercícios 3* e *4*? Quais?
6. Necessitaram da interferência da professora-pesquisadora? Em quê?
7. Outras observações.

Atividade 3

1. A dupla de alunos reescreveu os dados preenchidos da tabela na forma de potência? Comente.
2. Caso eles não tenham reescrito os dados na forma de potência, eles perceberam essa característica? Comente.
3. Conseguiram perceber a generalização para o número total de elementos por geração das Tabelas da *Atividade 2/Bloco 1* e *Atividade 4/Bloco 1*? Comente.
4. Quais dificuldades eles apresentaram nas tabelas citadas na questão anterior?
5. Mostraram dificuldades com o uso de nomenclaturas para a altura, largura e comprimento, ao invés de valor numérico, nas questões que sucedem a tabela da *Atividade 5/Bloco 1*? Comente.
6. Para preenchimento das lacunas da tabela da *Atividade 1/Bloco 2* os alunos utilizaram a forma de potência? Comente.
7. Quais as dificuldades apresentadas no preenchimento da tabela citada no anterior?
8. Mostraram dificuldades com o uso de nomenclaturas para a altura, largura, comprimento e volume, ao invés de valor numérico, nas questões que sucedem a tabela da *Atividade 1/Bloco 2*? Comente.
9. Necessitaram da interferência da professora-pesquisadora? Em quê?
10. Comente as dificuldades e/ou faça observações sobre esta atividade.

Atividade 4

1. Ao tomar contato com esta atividade a dupla de alunos estabeleceu algum paralelo com as outras atividades feitas, identificando alguns termos? Fizeram algum comentário sobre isso? Qual(is)?
2. Outras observações.

Atividade 5

1. A dupla apresentou dificuldades na identificação dos termos institucionalizados? Quais?
2. Conseguiram responder a questão 3? Comente.
3. Necessitaram da interferência da professora-pesquisadora? Em quê?
4. Outras observações.

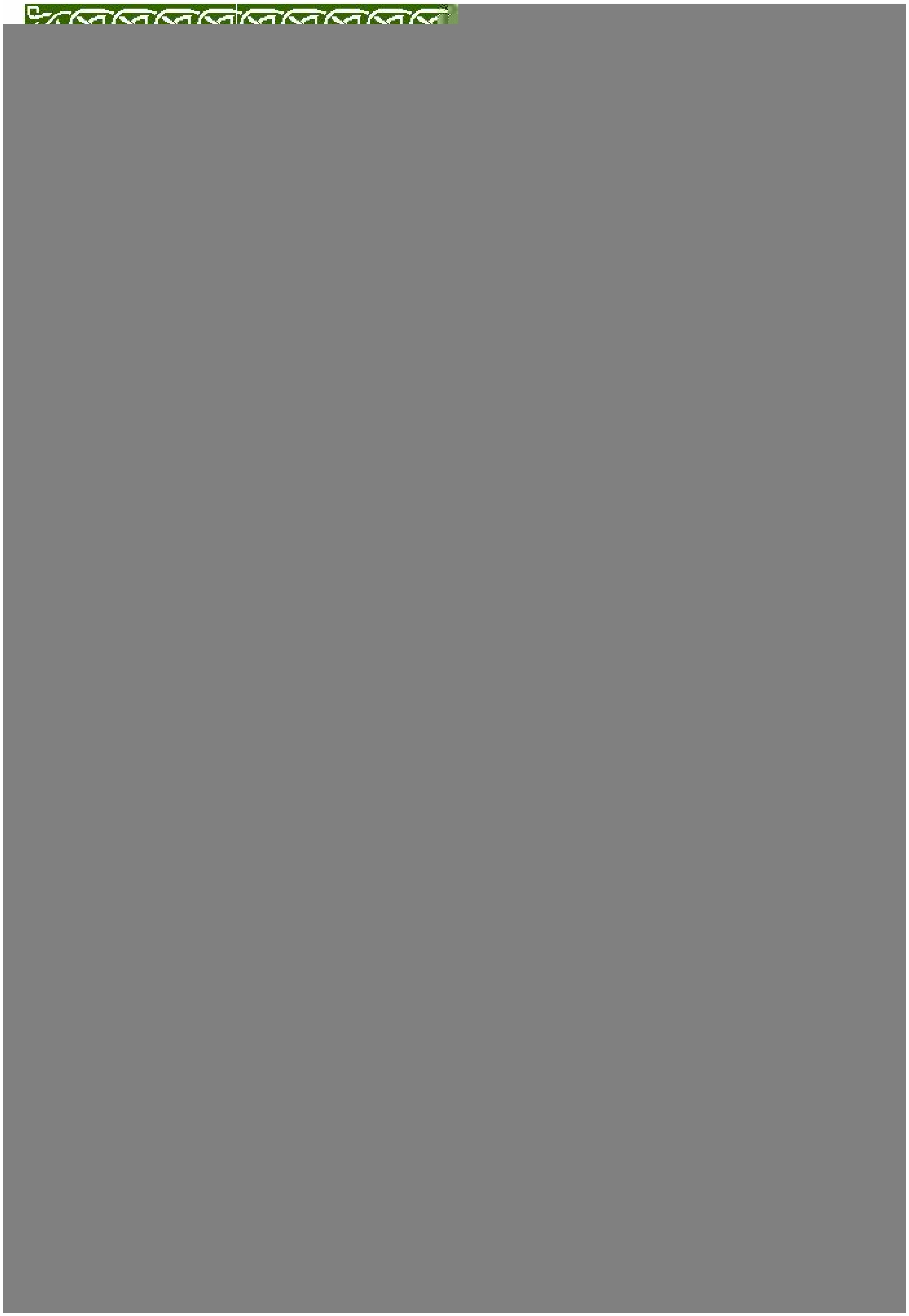
Atividade 6

1. Como os alunos se comportaram diante das situações-problemas? Apresentaram dificuldades? Quais?
2. Necessitaram da interferência da professora-pesquisadora? Em quê?
3. Outras observações.

Atividade 7

1. Os alunos apresentaram dificuldade na resolução destas questões? Quais?
2. Necessitaram da interferência da professora-pesquisadora? Em quê?
3. Outras observações.

Anexo 4: CERTIFICADO



Anexo 5: TERMO DE COMPROMISSO

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

Este termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, realizada no Colégio Barão de Mauá em agosto de 2006, principalmente no que tange à utilização dos dados nela coletados.

O material coletado – as atividades realizadas, as transcrições, os registros escritos, as fotografias – servirá de base para pesquisas que procuram entender melhor o processo de produção de significados relativo às pesquisas sobre *Progressões Geométricas via Fractais*. As transcrições, os registros escritos e as fotografias terão seus nomes trocados por pseudônimos preservando a identidade dos sujeitos em sigilo.

As informações provenientes da análise desse material poderão ainda ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e eventos específicos.

Mauá, 24 de outubro de 2006.

____
Andrea Gomes Nazuto Gonçalves
Professora-Pesquisadora

____
Rosângela Zanesco
Diretora do Colégio Barão de Mauá

____
Responsável pelo aluno

____
Nome legível do aluno

Anexo 6: OPINIÃO DOS ALUNOS SOBRE A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Ao final do curso, a professora pesquisadora pediu que as duplas escrevessem o que acharam das atividades e da seqüência didática. Das anotações recebidas escolhemos algumas para expressar o sentimento dos alunos perante as aulas, como seguem:

- *Oh, não! Acabei de descobrir que eu sou um rato de laboratório! Ahan... bem, quanto ao mini-curso: todo o processo realmente levou a uma fixação melhor do conteúdo e a resolução dos problemas se tornou muito simples, mas pensando por outro lado, foram 12h de estudo de uma mesma matéria, o que seria aproximadamente 24 aulas e meia, só para aprender PG. Creio que estudar por bastante tempo qualquer matéria a torna mais fácil, independente dos métodos. Mas foi muito bom estar presente nesses 6 dias (...). (**Aluno A**)*
- *Adorei este curso, já que possibilitou a expansão do meu conhecimento sobre Progressões Geométricas. Devo dizer que a parte que eu mais gostei foi a da construção dos Fractais, já que isso facilitou na hora de resolver os problemas. (**Aluna B**)*
- *Gostei muito desta seqüência de ensino, diferente do método aplicado em aula, aprendi a matéria que não sabia, de uma forma fácil. Eu preferi mais a segunda semana* (das generalizações) *que a primeira, por gosto e até mesmo pela habilidade, contudo, foi bom. (**Aluno C**)*
- *Muito legal! Nas duas semanas! Adorei a dobradura e as contas são fáceis. Acabei melhorando em desenvolver fórmulas também. Não gostei muito do iGeom porque ele é complicado de mexer. (**Aluna D**)*
- *Eu achei bastante produtivo, pois através dessas aulas eu pude relembrar alguns conceitos matemáticos da matemática e aprofundá-los.*
- *Nós gostamos do curso, porque foi apresentado a nós pela Andréa (que amamos), de uma forma simplificada e diferente. É um conteúdo complicado e complexo, porém, não é impossível se nos comprometermos. Valeu à pena!*
- *Eu gostei, pois precisamos raciocinar e bolar fórmulas para descobrir números de seqüências.*

- *Gosta*