AMADEU TUNINI DORO

ARGUMENTAÇÃO E PROVA: ANÁLISE DE ARGUMENTOS GEOMÉTRICOS DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC / SP
São Paulo
2007

AMADEU TUNINI DORO

ARGUMENTAÇÃO E PROVA: ANÁLISE DE ARGUMENTOS GEOMÉTRICOS DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profª. Drª. Sônia Pitta Coelho****.*

PUC / SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ________________________________ Local e Data: ____________________

DEDICATÓRIA

À minha esposa, Márcia.

Aos meus pais Amadeu e Basi.

AGRADECIMENTO

À Deus, por estar sempre presente.

À minha esposa, Márcia Doro, pelo apoio, incentivo e compreensão.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, por ter financiado este meu estudo.

À Profª. Drª. Sônia Pitta Coelho, por sua orientação e dedicação.

Aos professores, Drª. Lulu Healy e Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros, por participarem da Banca Examinadora e pelas contribuições, a mim oferecidas, no momento da qualificação.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, por terem me enriquecido com seus conhecimentos.

Aos colegas de curso, por terem contribuído em minha formação e na conclusão desse trabalho.

À minha amiga Profª. Roberta Valdo, pelo incentivo e apoio.

À todos, aqui não citados, que de forma direta ou indireta, contribuíram para a conclusão de mais essa etapa em minha formação.

RESUMO

No ano de 2005 teve início, na PUC/SP, um projeto de pesquisa com objetivo de investigar a presença, o ensino e a aprendizagem de provas na matemática da Educação Básica; esse projeto gerou 1998 protocolos com atividades de geometria e, o mesmo número de protocolos com atividades de álgebra, realizados por alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e por alunos de 1ª série do Ensino Médio. Sendo participante desse projeto, aproveitei para estruturar minha dissertação e a direcionei às atividades de geometria, procurando fazer um levantamento das concepções sobre argumentos e provas geométricas dos alunos envolvidos.

Visando uma análise mais detalhada dos protocolos, dos 1998 produzidos, foi extraída uma amostra menor com 50 deles; também selecionei para investigação, duas questões que solicitavam aos alunos, a apresentação de uma resposta e de uma justificativa à resposta dada. Das produções dos alunos que compõem a amostra menor, foram realizadas: uma análise quantitativa determinando a freqüência das respostas e das justificativas e uma análise qualitativa, focando os argumentos apresentados, os conhecimentos específicos e os processos cognitivos mobilizados.

Buscando confirmar ou refutar as conjeturas levantadas nas análises anteriores, foram entrevistados sete alunos, fechando assim a investigação da amostra menor. Na seqüência, analisei os dados da amostra maior, dos 1998 protocolos; a análise foi realizada em dois momentos: no primeiro, a partir de uma organização em tabelas, ela se fundamentou nas freqüências das respostas e das justificativas; no segundo momento, a análise se apoiou em três tratamentos dos dados, realizados pelo software estatístico multidimensional CHIC.

Encerro a dissertação com um capítulo para as conclusões. Antecipo que as resoluções dos alunos ficaram aquém do desejável, para ilustrar, ressalto que os protocolos apresentaram um desempenho entre dois extremos: 26,3%, tipicamente alunos de 1º ano do ensino médio, não responderam nem justificaram nenhuma das questões; um pequeno grupo de 1,9% da amostra, tipicamente de alunos de 8ª série, apresentou respostas corretas, acompanhadas de justificativas pertinentes, a ambas as questões. Ainda, de modo geral, o desempenho dos alunos de 8ª série foi melhor do que o dos alunos do 1º ano do ensino médio. No último capítulo, faço uma síntese das constatações e conjeturas que integram a pesquisa e algumas indicações para o desenvolvimento do tema.

Palavras–Chave: Argumentação e Prova; Geometria; Educação Básica.

ABSTRACT

In 2005, a research project with the purpose of investigating the presence, the teaching and the learning of proof in mathematics in Basic Education, began at PUC/SP. This project generated 1998 student protocols for geometry activities and the same number for algebra activities, the students come from the 8th and 9th grades of High Schools, in the state of São Paulo. As a participant in this project, I used the experience to structure my research and chose to direct to geometry activitys, seekns to a survey students' conceptions about geometry arguments and proofs.

In order to execute a more detailed analysis of the protocols, from the original sample of 1998, a smalles sample with 50 students was extracted; I also selected for, two questions in which the students were requested to present a solution and a justification for the given solution. From the students' productions that compose the sample of 50: a quantitative analysis determining the frequency of the answers and the justifications, was carried out, along with on a qualitative analysis, focusing the presented arguments, the specific knowledge and the mobilized cognitive processes.

In order to confirm or to refute the conjectures raised in these analyses, seven students were interviewed, completins the data set for the smalles sample. In sequence, I analyzed the data of the complete sample of 1998 protocols. The analysis was carried through two moments: in the first, from an organization in tables, it was based on the frequencies of solutions and justifications; second, the analysis was supported by three data treatments, carried out through statistical multidimensional software CHIC.

The results suggested the following conclusions: On whole the students' solutions left much to desive; the protocols evidenced two extremes: a large group of students (26,5%), typically from the 9th grade, provided no solutions or justifications at au, while a much smalles group (1,9%) of students, generally from the 8th grade, were able to construct valid arguments. Overall perfomance of 8th grade student's was better than students of the 9th grade. Finally, the study presents, on the basic of a synthesis of the findings some indications for possible developments in the teaching and learning of proof.

Keywords: Argument and Proof; Geometry; Basic Education.

SUMÁRIO

Lista de Tabelas:

Lista de Figuras:

Lista de Anexos:

APRESENTAÇÃO

"Nada se improvisa na vida de um homem.
O ser humano é sempre filho de uma época
e de um ambiente." *Inácio Larrañaga*

Dois termos têm marcado presença na educação brasileira nas últimas décadas; habilidades e competências. Em um primeiro momento não me preocupei em distingui-las e defini-las claramente, ainda, vendo que entre elas aparecem: a leitura, interpretação e produção de textos, na língua materna e na linguagem matemática; a seleção de hipóteses e estratégias; a previsão, interpretação e critica de resultados, meu primeiro impulso foi o de conjecturar qual a possível contribuição de argumentos, demonstrações e provas, para o desenvolvimento de habilidades e competências em matemática.

O impulso citado acima se justifica pelo fato que, nos últimos anos, amparado em minhas crenças e concepções construídas desde minha formação inicial, venho sedimentando a defesa da presença de argumentações e provas matemáticas no cotidiano escolar, com uma iniciação adequada desde o Ensino Fundamental.

Buscando dar conseqüência a minhas crenças e concepções e diante da oportunidade, ingressei no projeto AprovaME[1] – Argumentação e Prova na Matemática Escolar – desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Ao participar desse projeto, desde 2005, tive a possibilidade de direcionar meu projeto de pesquisa para o trabalho que ora apresento.

Tendo argumentações e provas como tema e fazendo uso de produções de alunos de 8ª séries do Ensino Fundamental e de 1ª séries do Ensino Médio, procuro fazer um levantamento de suas concepções, de como eles se posicionam e utilizam elementos relativos ao tema citado.

1. Projeto financiado pelo CNPq, Processo Nº. 478272/2004-9.

Meu trabalho é constituído de 6 capítulos. No Capítulo I, descrevo o projeto AprovaME, a partir do qual delimito minhas questões de pesquisa; No Capítulo II, exponho a metodologia de minha pesquisa, introduzo uma fundamentação teórica, descrevo indicações para análises quantitativas e qualitativas e indico como estas orientaram as entrevistas necessárias.

No Capítulo III, apresento minhas primeiras constatações relativas às análises quantitativas e qualitativas; amparado nelas, relaciono um grupo de alunos para entrevistas visando enriquecer essas análises iniciais. As transcrições das entrevistas e as respectivas análises compõem o Capítulo IV.

No Capítulo V, apresento os dados relativos aos alunos, classes, escolas e municípios envolvidos no projeto AprovaME. Através de tabelas, descrevo e comparo os dados relativos às questões em que minha pesquisa está focada e no final do capítulo, faço um tratamento desses dados através do software estatístico CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva).

O Capítulo VI é composto por uma conclusão que procura contribuir, com indicações sobre concepções de nossos alunos sobre argumentação e prova, com critérios para a elaboração e aplicação de atividades que viabilizem a presença do tema em sala de aula e com conjecturas para novas investigações sobre o tema.

CAPITULO I : ARGUMENTAÇÃO E PROVA

1.1 INTRODUÇÃO.

No ano de 2005 o Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM) do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da PUC-SP deu início ao projeto de pesquisa AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar, tendo na coordenação a Profª. Drª. Lulu Healy. Além da coordenadora, o projeto conta ainda com a participação de outros 5 Professores Pesquisadores do programa e 28 Professores Colaboradores, sendo 27 mestrandos e 01 doutorando.

A motivação para a escolha do tema e organização do projeto é devida a vários fatores; podemos citar: O papel que a prova ocupa no desenvolvimento da Matemática; as crescentes indicações para que os currículos da educação básica, contenham atividades que propiciem ao aluno, o desenvolvimento de habilidades que o tornem autônomo no tratamento de argumentações, demonstrações e provas matemáticas; a necessidade de um mapeamento das concepções que nossos alunos têm sobre a prova, a fim de subsidiar propostas e abordagens de ensino; uma investigação das contribuições que ambientes computacionais podem trazer ao desenvolvimento de argumentos matemáticos, junto a nossos alunos.

Sobre o papel da prova na matemática e as indicações curriculares escreverei a seguir, antes quero abordar os termos: prova e demonstração.

A princípio, os significados dos termos prova e demonstração estão ligados a uma idéia comum, à descrição de argumentos visando justificar ou validar uma proposição. Apesar da idéia comum, esses termos nem sempre são considerados como sinônimos, assumindo variações em função do tempo e do contexto:

> "Convém assinalar que em artigos sobre a história da Matemática e, em particular, sobre Educação Matemática são usados variados termos para se referir às *demonstrações*, tais como: demonstrações formais, demonstrações rigorosas, provas rigorosas ou simplesmente provas. E nem

> sempre essas expressões são utilizadas como sinônimas..." (PIETROPAULO, 2005, p.48).

Para falar do contexto podemos citar:

> "Os autores distinguem quatro contextos onde varia o significado de demonstração: (a) na lógica e fundamentos da matemática; (b) na matemática profissional; (c) nas ciências experimentais e no dia-a-dia; (d) na sala de aula de matemática" (FONSECA, 2005, p. 2)

Dentro de um mesmo contexto também podemos encontrar diferenciação entre os termos; como exemplo temos o da sala de aula de matemática, para o qual Fonseca (2005) cita que Balacheff (1988) propôs a existência de três níveis iniciais de sofisticação: explicação, prova e demonstração. A explicação situa-se no nível do indivíduo que estabelece e garante para si a validade dos raciocínios. A prova surge subdividida em quatro níveis (empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental) que posteriormente detalharei. A demonstração tem a validade dos raciocínios garantida pela via dedutiva e é um tipo de prova com forma estritamente codificada e formal.

São diversos os termos e significados associados às palavras prova e demonstração. Minha intenção até aqui não foi a de fazer uma apresentação com profundidade, mas sim, ilustrar essa diversidade e determinar que, estando o meu principal interesse focado nos argumentos apresentados pelos alunos, a partir daqui tratarei prova e demonstração como sinônimas e fundamentadas na idéia citada acima, ou seja, à descrição de argumentos visando justificar ou validar uma proposição.

Voltando ao papel da prova na matemática, sabemos que ela é vista como instrumento para explicação e/ou validação de enunciados, um instrumento que tem sua importância aumentada ao assumir outras funções. "Já se fez a afirmativa de que a matemática fica caracterizada, de maneira única, por algo conhecido como "demonstrações"" (DAVIS & HERSH, 1985, p. 178); ainda, os mesmos autores acrescentam:

> " Uma demonstração, no melhor dos casos, aumenta o entendimento, mostrando o que é essencial no assunto. As demonstrações sugerem matemática nova. O principiante que estuda demonstrações se aproxima

> mais da criação de matemática nova. Uma demonstração é potência matemática, a voltagem elétrica do assunto, que vitaliza as afirmativas estáticas dos teoremas." (DAVIS & HERSH, 1985, p. 182).

Se a prova é considerada como essencial na matemática, a sua exploração, em sala de aula, parece não corresponder ao status atribuído. Ancorada em uma prática com insignificantes avanços cognitivos, onde era priorizada a ação repetitiva e ignorada sua compreensão, ela foi paulatinamente abandonada na educação básica. Uma avaliação da sua presença em sala de aula mostra que: "...O ensino rotineiro de demonstrações já feitas tem um efeito educativo pobre e não permite familiarizar os alunos com o raciocínio dedutivo e o pensamento matemático avançado" (FONSECA, 2005, p. 3). Acrescentamos que essa prática se apresenta com excessivo formalismo e rigor. De fato:

> "O importante para a comunidade matemática é a coerência e a correção dos argumentos. Com a ênfase na forma, os alunos podem criar a idéia de que os processos da matemática formal têm pouco ou nada a ver com a descoberta e a invenção, o que não reflete a verdade, visto que uma das funções da demonstração é descobrir". (VILLIERS, 1999 apud FONSECA, 2005, p. 2).

Assim, apesar da prova se afigurar como essencial para a definição da atividade matemática, na educação básica, ela passou a receber um tratamento supérfluo.

O que alguns educadores e pesquisadores voltados ao ensino da matemática, entre eles: Balacheff (1988), Chazan (1993), Healy e Hoyles (1998), de Villiers (1999), procuram nos dias atuais é reverter esse quadro, sair de uma situação em que os argumentos e provas foram praticamente extintos da educação básica, em conseqüência de um tratamento com excessivo formalismo e resultados mínimos. Paralelamente, busca-se um trabalho que valorize a criação, a exposição de idéias e procedimentos, a crítica do material produzido e que, independentemente de erros e acertos, faça da atividade matemática escolar, uma ação dinâmica, onde os principais objetivos são a construção do conhecimento e o desenvolvimento cognitivo.

Também nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, entre as competência almejadas, destacam que o aluno possa, na disciplina matemática, "produzir textos adequados para relatar experiências, formular dúvidas ou apresentar conclusões". (PCNEM, 1999, p. 215), e que ele possa também:

> "- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
> - Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
> - Formular hipóteses e prever resultados.
> - Selecionar estratégias de resolução de problemas.
> - Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> - Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
> - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> - Discutir idéias e produzir argumentos convincentes." (PCNEM, 1999, p. 216).

Quando trata dos conhecimentos de matemática, nos aspectos formativos, os PCNEM dizem: "A matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, ..." (PCNEM, 1999, p.251). Saindo do aspecto formativo e passando a olhar a matemática como ciência, acrescentam:

> "É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas." (PCNEM, 1999, p. 252).

Ao consultar os Parâmetros Curriculares Nacionais para os terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental de Matemática, encontrei entre as principais características do conhecimento matemático:

> "O exercício da indução e da dedução em matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino." (PCNEF, 1998, p. 26)

Ao defender como essenciais na matemática, práticas que envolvam argumentação e prova e apoiar sua presença já na educação básica, surge como contrapartida a responsabilidade de mapear o contexto em que nos encontramos e quais concepções o cercam, possibilitando assim a criação de propostas e abordagens de ensino coerentes com a realidade brasileira. É nesse panorama que o projeto AprovaME se situa.

1.2 O PROJETO AprovaME.

Citei anteriormente que o projeto teve início no ano de 2005, contando com 6 professores pesquisadores e 28 professores colaboradores. Esses professores vêm participando de reuniões quinzenais desde então. Contam ainda com um ambiente virtual (Teleduc) para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações.

As primeiras reuniões foram dedicadas ao esclarecimento da equipe sobre o todo do projeto; em seguida promoveram-se leituras e debates que estruturassem com uma fundamentação teórica as ações previstas. Na seqüência, a atenção voltou-se para a elaboração de dois questionários, descritos à frente. Para tal foram tomadas como base pesquisas realizadas por Healy & Hoyles (1998, 2000). Definiram-se dois questionários pilotos que foram resolvidos, em um primeiro momento pelos professores colaboradores e em um segundo por alunos desses professores. Os questionários respondidos pelos alunos, tiveram seus resultados analisados com o objetivo de se fazer as correções necessárias nas questões e definir os questionários finais.

Definidos os questionários, eles foram aplicados pelos 27 professores colaboradores a alunos de 8ª séries do Ensino Fundamental e de 1ª séries do Ensino Médio, na faixa etária de 14 a 16 anos. A aplicação envolveu 81 turmas sendo, 34 de 8ª séries e 47 de 1ª séries; pertencentes a 31 escolas das quais, 22 eram estaduais, 03 municipais e 06 particulares. Essas escolas estão situadas nos municípios: Embu Guaçu, Itapecerica da Serra, Itaquaquecetuba, Itupeva, Jacareí, Jacupiranga, Jundiaí (2), Lorena, Osasco, Promissão, Santos, São Bernardo do Campo (3), São Caetano do Sul (2), São Paulo (13) e São Roque.

Da aplicação, resultaram 1998 protocolos de alunos com temas algébricos e o mesmo número com temas geométricos. Esses protocolos foram produzidos por: 897 alunos de 8ª série e 1101 alunos de 1ª série. 1604 alunos estudavam na rede estadual, 117 na rede municipal e 277 alunos na rede particular.

A próxima fase, que detalharei posteriormente, constituiu-se do tratamento e organização dos dados gerados pelos protocolos. Passado esse momento, as reuniões foram destinadas a elaboração e análise de situações de aprendizagem, constituídas de seqüências de atividades para aplicação em sala de aula com a utilização de ambientes informatizados. Foram construídas cinco seqüências algébricas (função do 1º grau, PA e PG, números racionais - frações decimais, múltiplos e divisores, teorema fundamental da aritmética) e cinco geométricas (triângulos e ângulos, GA - paralelismo e perpendicularismo, geometria espacial - paralelismo e perpendicularismo, propriedades de quadriláteros, teorema de Pitágoras).

Para um maior detalhamento, descrevo a seguir os objetivos do projeto, um resumo de sua metodologia e as características dos questionários citados acima. Antes quero dizer que, em sua organização, há a previsão para que o projeto se encerre no final do primeiro semestre de 2007.

1.3 OBJETIVOS.

Os Objetivos abaixo fazem parte do documento apresentado ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico, o agente financiador do projeto AprovaME.

- Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado de São Paulo.
- Formar grupos colaborativos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.
- Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de

aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em matemática.

- Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em matemática.
- Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
- Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de matemática escolar.
- Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em matemática.

1.4 METODOLOGIA DO AprovaME.

O Projeto vem sendo desenvolvido nas duas fases descritas abaixo:

Fase 1

Esta fase já aconteceu e é nela que minha pesquisa se insere. Ela visa um levantamento de concepções dos alunos, em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, se distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, se compreendem o domínio de validade de uma prova e se são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos.

Como instrumento foram utilizados dois questionários, um de álgebra e outro de geometria. Estes foram aplicados por cada professor colaborador a três classes de 8ª e/ou 1ª séries do ensino médio, selecionadas aleatoriamente, de seis classes por eles indicadas. No total, 1998 alunos responderam aos questionários. Os dados coletados foram organizados em uma planilha e servem como elementos de apoio para o desenvolvimento da fase 2.

Fase 2

Com um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores colaboradores, esta fase traz a aprendizagem e o ensino como eixos inter-relacionados de investigação. Em relação à aprendizagem, tendo como referência a fase 1, serão elaboradas e avaliadas situações de aprendizagem, seqüências de atividades a serem aplicadas pelos professores colaboradores em suas salas de aula. Em relação ao ensino a atenção estará nos professores colaboradores, em sua contribuição na elaboração das atividades e nas modificações destas, para a sua prática.

Do total de atividades produzidas pelo grupo, cada professor colaborador irá aplicar pelo menos duas (uma de geometria e outra de álgebra) em uma de suas turmas. Após cada aplicação , professores colaboradores e pesquisadores elaborarão um relatório descritivo, composto por reflexões sobre os resultados, objetivos atingidos e dificuldades ou problemas enfrentados.

No final da fase 2, será feita uma comparação entre o mapeamento realizado na fase 1 e os dados levantados em relação ao eixo de aprendizagem na fase 2, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas na fase 1 foram superadas pelos alunos participantes na fase 2 e quais características de prova ainda necessitarão de investimentos numa perspectiva de progressão.

1.5 OS QUESTIONÁRIOS.

Os dois questionários aplicados na fase 1 têm estruturas semelhantes. Com cinco questões cada um, diferenciam-se em relação aos temas álgebra (Anexo 1) e geometria, mas apresentam similaridade na apresentação das questões e nas orientações aos alunos.

A partir da próxima página, reproduzo o questionário completo, capa e questões, de geometria, pois é nele que o tema de minha pesquisa se situa. Estou reproduzindo a capa pois ela contém orientações aos alunos, visto que, aos professores colaboradores que aplicaram os questionários, ficou determinado que evitassem, ao máximo, qualquer informação ou interferência.

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:.......................................

Data de nascimento: .... Data de hoje:...............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma dentre várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente justificar da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

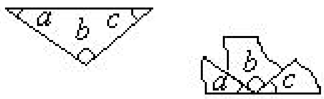
Projeto AprovaMe

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

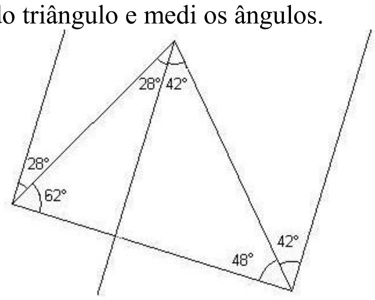
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos
e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180º.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

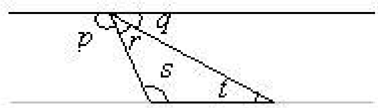
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^o - 28^o) + 28^o + 42^o + (90^o - 42^o) = 180^o$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

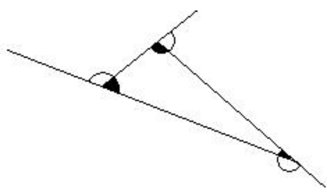


Afirmações	Justificativa
$p = s$.................	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais.
$q = t$	Ângulos alternos internos entre duas paralelas são iguais
$p + q + r = 180^o$.	Ângulos numa linha reta.
$\therefore s + t + r = 180^o$	

Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360º. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540º. 540º – 360º = 180º.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos..		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

**Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer,
o resultado é sempre 180^o.**

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

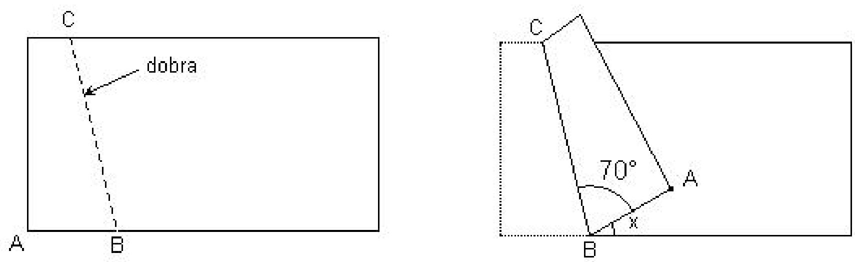
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Quando se soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.

Minha resposta:

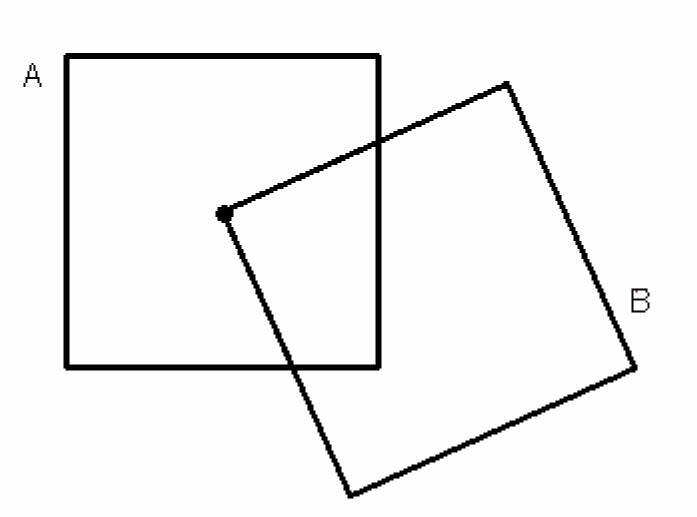
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

1.6 MINHAS QUESTÕES.

Em função da participação na pesquisa, decidiu-se que os professores colaboradores poderiam desenvolver seus projetos individuais de pesquisa, para dissertação, inseridos no projeto AprovaME. Desta forma os mestrandos foram divididos considerando principalmente dois aspectos: o tempo que cada um tinha para concluir sua dissertação e as duas fases do projeto.

Em um primeiro momento, eu decidi vincular minha pesquisa individual ao AprovaME. Após isso e diante das possibilidades a mim apresentadas pelos professores pesquisadores, entre os quais se inclui minha orientadora, decidi me situar na fase 1 e concentrar a investigação nas questões de geometria G4 e G5, descritas acima.

Feita a escolha, minha investigação tomei como objetos os questionários respondidos pelos alunos, além de entrevistas realizadas com alguns deles. De posse desse material, investiguei:

- Quais foram as respostas e/ou justificativas apresentadas às questões.
- Se houve razões que fundamentassem a não apresentação de respostas e/ou justificativas às questões, quando for o caso.
- Nas respostas erradas com uma freqüência considerável, se há motivos que justifiquem essa freqüência.
- Em que medida os alunos apresentam evidências empíricas como prova.
- Se eles distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos.
- Se foram capazes de apresentar argumentos matematicamente válidos.
- Quais as formas de apresentação dos argumentos, se língua natural, língua formal, representações visuais, representações figurais, ou outras.
- Se os alunos demonstraram a necessidade de explicitar os conhecimentos utilizados transformando-os em argumentos.

Ainda, nessa investigação pretendo dar contribuições à pesquisa referente a concepções de nossos alunos sobre argumentação e prova, indicar critérios para a elaboração e aplicação de atividades que viabilizem o tema em sala de aula.

Explicitadas minhas questões e meus objetivos, passo agora a tratar da metodologia.

CAPITULO II : METODOLOGIA

Após a aplicação dos questionários a 1998 alunos pelos 27 professores colaboradores mestrandos, estes fizeram uma classificação das respostas apresentadas. Para tal, em um primeiro momento, debatemos a categorização apresentada por Balacheff (1988), que classifica as provas de alunos em quatro níveis: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental. Estes podem ser descritos como:

> - *o empirismo ingênuo (empirism naïf)* toma, para validação de uma propriedade, a sua verificação em alguns poucos casos, sem questionamento quanto a particularidades; este modo de validação rudimentar, reconhecidamente insuficiente, é uma das primeiras formas do processo de generalização, e resiste ao longo do processo de desenvolvimento do pensamento (...);
> - *experiência crucial (expérience cruciale)* é procedimento de validação em que é proposto, explicitamente, o problema da generalização; ele intenta verificar a propriedade em caso particular mas sem considerá-lo tão particular, de modo a permitir, não mais de forma peremptória, a generalização;
> - *o exemplo genérico (exemple générique)* consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade mesmo, fazendo uso de um representante particular do objeto (...);
> - *experiência mental (expérience mentale)* é explicação depreendida de concretização em representante particular; a argumentação flui através de pensamentos que controlam toda generalidade da situação, e não mais através de situações particulares, como no exemplo genérico. (GRAVINA, 2001, p. 66-67)

Também debatemos o sistema de classificação utilizado por Healy & Hoyles (1998) e, em acordo fechado com os professores participantes do projeto, tomamos esse como base e o adaptamos à nossa pesquisa, visando além da classificação dos argumento, o tratamento dos dados para tabulação; assim os argumentos apresentados pelos alunos foram categorizados como:

- 0: Respostas totalmente erradas, respostas que não apresentam justificativas ou exemplos, ou respostas que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um ciclo vicioso.

- 1: Alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, respostas que são completamente empíricas.
- 2: Alguma dedução/inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova.

  2a: Falta muito para chegar a prova (mais próximo de 1)

  2b: Falta pouco para chegar a prova (mais próximo de 3)
- 3: Respostas corretas, totalmente justificadas.

  Para as questões A5 e G4, acrescentaram-se os rótulos:

  3c: Justificativa através de cálculos;

  3p: Justificativa através de propriedades.
- -1: No lugar de resposta o aluno diz não saber.
- -2: O aluno deixa o espaço para resposta e/ou justificativa em branco.

Definidos os critérios para codificação, antes de tratarmos os questionários dos 1998 alunos, usamos algumas das reuniões quinzenais para codificarmos os protocolos pilotos e apurarmos nossos critérios, tarefa que não foi fácil, pois a análise dos resultados é subjetiva e fazia-se necessário aproximar as avaliações.

Ainda, procurando evitar distorções, a coordenadora do projeto apresentou, como exemplos para essas classificações, resoluções feitas por alunos, por ocasião da aplicação-piloto do questionário. Elas se encontram anexas, exemplos para álgebra (Anexo 2) e para geometria (Anexo 3). Abaixo, reproduzo um exemplo para cada codificação:

1. Codificação 0.

G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.

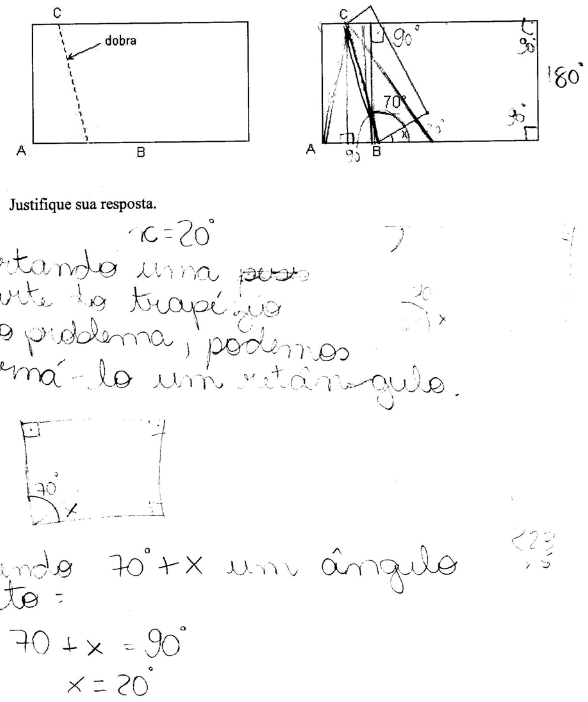


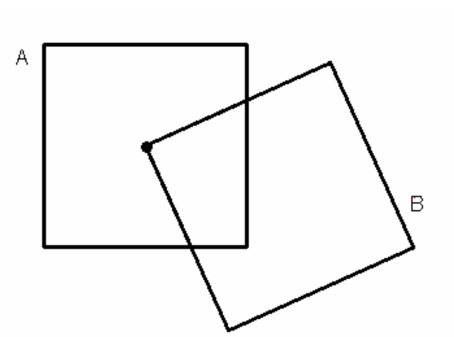
Figura 2.1: Exemplo para codificação 0.

Neste exemplo a justificativa do aluno tem a codificação "0", pois trata erroneamente a dobra como perpendicular ao maior lado do retângulo e recompõe o retângulo voltando à situação inicial.

2. Codificação 1.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

$\frac{1}{4}$: porque se arrumas corretamente os quadrado B no quadrado A perceberá que o B ficará no meio do A. por isso ficara $\frac{1}{4}$

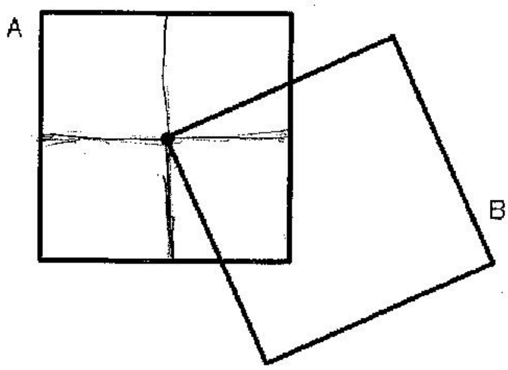
Figura 2.2: Exemplo para codificação 1.

Neste exemplo o aluno identifica a fração ¼ e traz mais informação, porém não é muito claro em seu argumento, não indica suas razões, assim a codificação atribuída é "1".

3. Codificação 2a.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

R: $\frac{1}{4}$. Dividindo o quadrado em quatro quadrados dá para ver que a parte do quadrado A coberta pelo quadrado B é um dos 4 quadrados.

Figura 2.3: Exemplo para codificação 2a.

O aluno fez a decomposição do quadrado A em quatro partes procurando estabelecer alguma relação entre as partes; não indicou reconhecer a congruência entre os triângulos mas ficou implícito o reconhecimento de uma equivalência entre áreas, assim a codificação atribuída é "2a".

4. Codificação 2b.

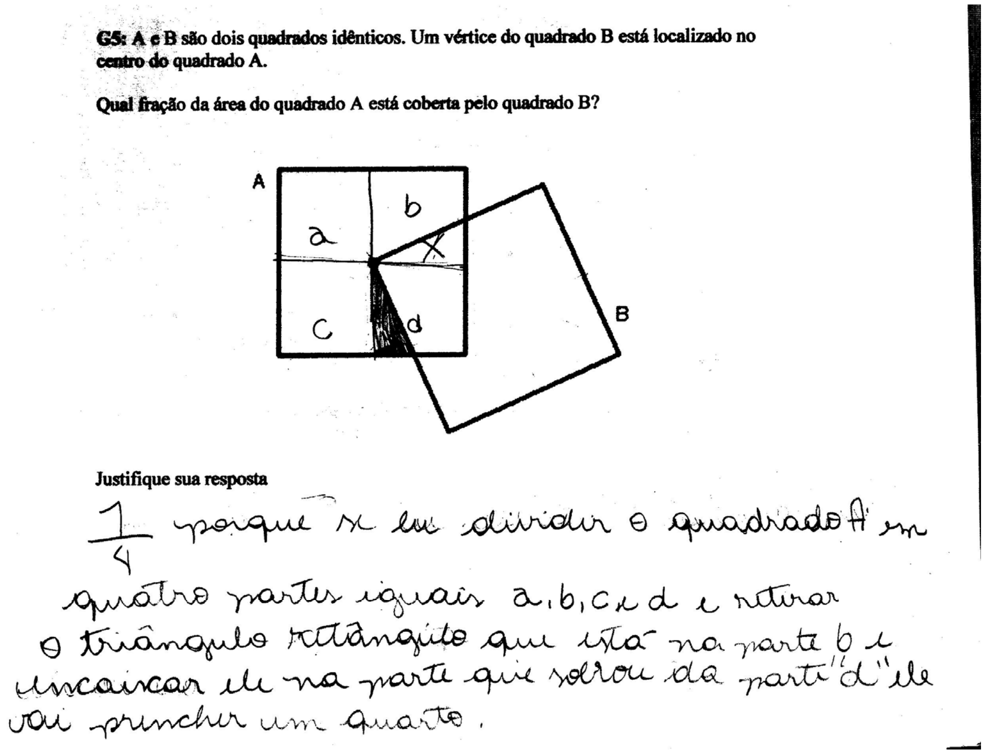
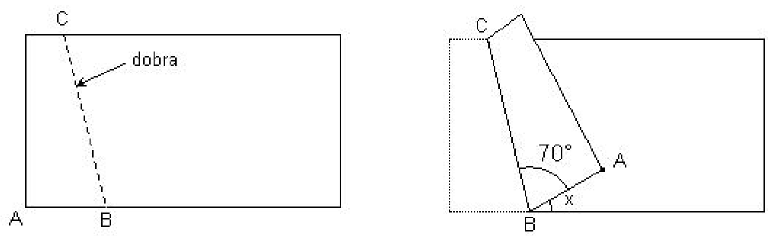


Figura 2.4: Exemplo para codificação 2b.

O aluno apresentou a resposta ¼ através de um recurso visual e tentou justificar a congruência de uma maneira "informal", assim a codificação atribuída é "2b".

5. Codificação 3c.

G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

$70° + 70° + x = 180°$

$140° + x = 180°$

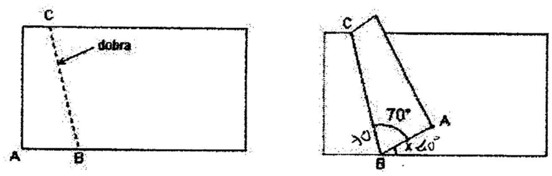
$x = 40°$

Figura 2.5: Exemplo para codificação 3c.

O aluno justificou corretamente sua resposta fazendo o uso de cálculos, assim a codificação é "3c"

6. Codificação 3p.

G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

x. Será 40° graus por causa que o restante de 70° graus ~~calculos~~. Será 70° + 70° = 140° = faltou 40° para completar 180°. Por isso x ficou 40°.

Figura 2.6: Exemplo para codificação 3p.

O aluno além de apresentar os cálculos, procurou explicitar a propriedade utilizada, assim a codificação dada a sua justificativa é "3p".

Após a análise e codificação dos argumentos, os dados dos 1998 protocolos foram reunidos em uma planilha eletrônica onde constam nome, série, valor das respostas e codificação das justificativas de cada aluno, além do nome do aplicador. Como a análise dos protocolos produzidos pelos 1998 alunos é inviável, a partir dessa planilha, foram obtidos por procedimento aleatório os nomes de 50 alunos, os quais compõem uma amostra menor sobre a qual eu e outros cinco mestrandos desenvolvemos nossos trabalhos. No

Capítulo 5 relaciono os dados da amostra maior (1998) com os da amostra menor (50).

Definida a amostra, extraí seus dados da planilha geral e construí uma planilha específica com os 50 alunos. A partir dos dados concentrados nesta planilha, construí três tabelas para cada questão: uma tabela com as respostas mais freqüentes, uma tabela relacionando cada aluno à codificação que sua justificativa recebeu, bem como a freqüência de ambas as codificações, uma tabela que reúne as informações das anteriores cruzando as respostas e justificativas de cada aluno. A função atribuída a essas tabelas é orientar uma análise quantitativa das respostas e justificativas presentes na amostra.

A última tabela, que adiante identificarei como Tabela 7, deverá indicar se e como os alunos apresentam: regularidades entre as respostas e seus respectivos valores; regularidades entre as justificativas e suas codificações; regularidades entre respostas e justificativas. Identificadas as regularidades, os alunos da amostra serão divididos em grupos de afinidades.

Constituídos os grupos, elaborarei para cada um uma análise qualitativa, que visa identificar conhecimentos e procedimentos utilizados, considerando aspectos quanto a: correção, formas de apresentação, clareza nos registros e outros que merecerem menção.

Possivelmente, durante a análise, formularei conjecturas sobre concepções dos alunos, sobre dificuldades por eles encontradas identificarei afirmações que necessitem de esclarecimento. Esses elementos fornecerão os subsídios para a elaboração das entrevistas.

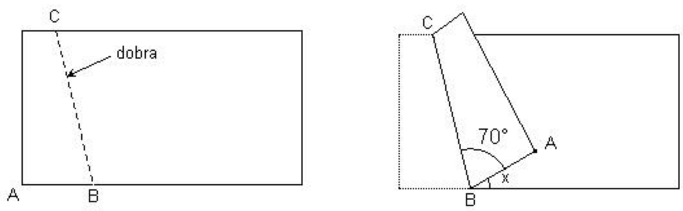
Em seguida, selecionei 7 alunos para entrevistar, um para cada grupo de afinidades. As entrevistas serão realizadas nas escolas de origem dos alunos, serão previamente agendadas e terão gravação em áudio para facilitar as transcrições. Além disso, serão predefinidas mas, com abertura para adequação durante sua realização. As análises das entrevistas, deverão ser confrontadas com as análises anteriores. Desse confronto procurarei determinar elementos consistentes que fundamentem minhas conclusões finais.

CAPÍTULO III: ANÁLISES INICIAIS.

3.1 ANÁLISES DAS QUESTÕES G4 E G5.

Antes de quantificar os resultados e examinar os protocolos que compõem a amostra menor (50 alunos), quero me reportar à constituição das questões G4 e G5. Para isso as reproduzo a seguir:

G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.

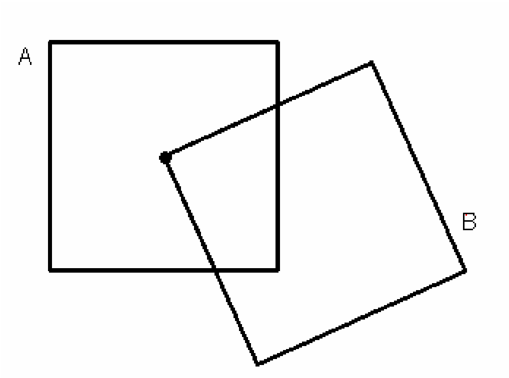


Justifique sua resposta.

Esta questão tem como conhecimentos básicos o conceito de ângulo e a subdivisão do ângulo raso em partes. Para a resolução, o aluno poderia usar a reflexão em relação ao segmento BC, da parte da folha dobrada, como conseqüência teria a conservação do ângulo de 70°; poderia escrever a equação $70^o + 70^o + x = 180^o$ e ao resolvê-la determinar o valor de $x = 40^o$. Mas, apesar de o conhecimento sobre reflexão ser veiculado no ensino fundamental já há algumas décadas, durante os nove anos que trabalhei como assistente pedagógico, atuando na formação continuada de professores da educação básica, constatei que esse conhecimento é pouco trabalhado. Outro conhecimento que poderia ser explorado é a decomposição e composição de figuras, neste caso a manutenção da medida do ângulo também estaria garantida.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

O conceito de área é essencial nesta questão, ainda que de forma intuitiva. Para a resolução o aluno poderia usar um movimento de rotação mas, da mesma forma que a reflexão, constatei em meu trabalho que esta transformação também é pouco trabalhada em sala de aula. Apesar disso o aluno pode desenvolvê-la de forma espontânea. Acrescenta-se que de forma implícita estariam implicados os conhecimentos de paralelismo e/ou perpendicularismo, ponto médio, razão entre segmentos e entre áreas.

Se rotacionarmos o quadrado B em torno de seu vértice, que é centro do quadrado A, até que os ponto médios de dois de seus lados coincidam com os pontos médios de dois lados do quadrado A (Figura 3.1), teremos relações de paralelismos e perpendicularismos entre lados dos quadrados. Essas relações são garantidas pelo fato de dois lados do quadrado B conterem o centro e os respectivos pontos médios do quadrado A. Essas relações de paralelismo e perpendicularismo permitem-nos dizer que ao prolongarmos os lados do quadrado B que estão sobre A, obtemos quatro quadrados em A. As relações garantem ângulos retos e como os prolongamentos passam pelos pontos médios, fica garantida a razão entre os lados dessas quatro partes, como sendo 1. Estando o quadrado A dividido em quatro quadrados congruentes podemos afirmar que a medida da área comum aos quadrados A e B corresponde a um quarto da medida da área do quadrado A.

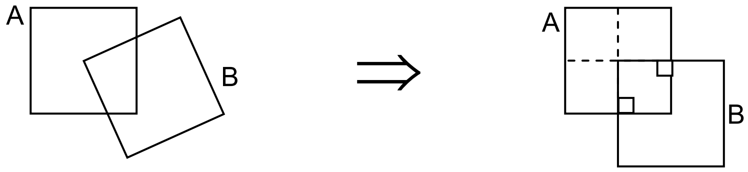


Figura 3.1: Rotação do quadrado B na questão G5.

Outro recurso para a resolução da questão G5 é a decomposição e composição de figuras. Neste caso o aluno estará envolvido com congruência de triângulos e a conseqüente equivalência das medidas das áreas. Para isso traçamos retas paralelas aos lados do quadrado A passando por seu centro (Figura 3.2), determinando dois triângulos retângulos.

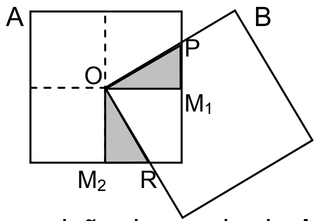


Figura 3.2: Decomposição do quadrado A na questão G5.

Observando a figura, vemos que os ângulos $P\hat{O}R$ e $M_2\hat{O}M_1$ são retos. Assim, temos: $P\hat{O}M_1 + R\hat{O}M_1 = R\hat{O}M_1 + R\hat{O}M_2 = 90^o \Rightarrow P\hat{O}M_1 = R\hat{O}M_2$. Também tem-se $OM_1 \equiv OM_2$ e $PM_1O = RM_2O = 90^o$. Assim, pelo caso ALA os triângulos OPM_1 e ORM_2 são congruentes e como conseqüência têm a mesma área. Com essa equivalência e com a equivalência das áreas dos quatro quadrados que dividem o quadrado A podemos afirmar que a medida da área comum aos quadrados A e B corresponde a um quarto da medida da área do quadrado A.

Outro conhecimento que poderia ter sido utilizado para a resolução da questão é a congruência de quadriláteros. Para isso, prolongamos os dois lados do quadrado B que estão sobre o quadrado A (Figura 3.3) e obtemos:

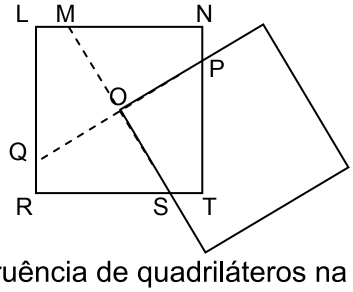


Figura 3.3: Congruência de quadriláteros na questão G5.

Como NT e LR são paralelos, QP é transversal a ambos, então os ângulos $O\hat{P}T$ e $O\hat{Q}L$ são congruentes (alternos internos), da mesma forma, $O\hat{S}T$ e $O\hat{M}L$ são congruentes. Ainda, os ângulos de vértices T, O e L são todos retos, assim os quadriláteros POST e QOML têm ângulos correspondentes congruentes. Como PQ e SM passam pelo centro O, temos: PO $\equiv$ OQ e SO $\equiv$ OM. Assim, com as congruências entre ângulos e lados, podemos afirmar há equivalência de áreas entre POST e QOML. De forma análoga, pode-se provar a congruência com os outros quadriláteros e teremos quatro quadriláteros equivalentes em área, levando-nos à resposta um quarto. Se a congruência dos quadriláteros não for imediata pode-se detalhá-la usando uma decomposição em triângulos (como na resolução anterior). Mas não detalharei isto aqui; o que quero ressaltar é que esta resolução implica, além do conhecimento de congruência entre quadriláteros, os conhecimentos relativos a duas paralelas cortadas por uma transversal.

3.2 ANÁLISES QUANTITATIVAS.

Conforme citado na metodologia, da amostra de alunos foi obtida aleatoriamente uma amostra menor com 50 alunos; com os dados desta, foi construída uma planilha. Para facilitar minha análise, recortei a planilha restringindo-a às questões G4 e G5 (Anexo 4).

Realizada uma primeira delimitação do objeto de estudo, passei a examinar, em cada questão na planilha, os valores das respostas e/ou das codificações das justificativas, com o objetivo de observar regularidades e fatos relevantes, que apoiem as posteriores análises dos protocolos na busca das razões para esses valores.

Questão G4:

Para iniciar o trabalho, construí a tabela 1 contendo, os valores de freqüência maior que 1 que ocorreram como resposta e os alunos identificados, em negrito, pelo respectivo número de ordem em que aparecem na planilha. Nas demais tabelas, igualmente, os números em negrito representam os sujeitos. Os valores de resposta com freqüência 1 estão na classe: outras respostas.

Tabela 1 - Questão G4

RESPOSTAS		
VALOR	ALUNO	FREQ.
30°	**13, 17, 20, 22, 27, 33, 35, 41.**	08
20°	**2, 7, 19, 31, 32, 40.**	06
70°	**4, 16, 46, 50.**	04
40° (Resposta Correta)	**1, 36.**	02
110°	**5, 24.**	02
OUTRAS RESPOSTAS	**3, 6, 25, 26, 29, 39, 49.**	07
"NÃO SEI"	**9, 15, 21, 28, 38, 45, 48.**	07
NÃO RESPONDEU	**8, 10, 11, 12, 14, 18, 23, 30, 34, 37, 42, 43, 44, 47.**	14

Nesta tabela, chamaram a atenção os seguintes fatos: dos 50 alunos; 21 não responderam ou disseram não saber; dos 29 alunos que apresentaram uma resposta, apenas dois alunos indicaram a resposta correta; oito alunos deram 30° como resposta correta, sendo esta a segunda maior freqüência da tabela.

Organizei os dados relativos às justificativas na tabela 2 abaixo. Nela aparecem os códigos em que estas foram classificadas.

Tabela 2 - Questão G4

JUSTIFICATIVAS		
CÓDIGO	ALUNO	FREQ.
0	**2, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 16,19, 20, 22, 23, 24, 27, 31, 32, 33, 35, 37, 39, 40, 41, 46, 49, 50.**	25
1	**26.**	01
2ª		00
2b		00
3c	**1**	01
3p		00
"NÃO SEI"	**9, 15, 21, 28, 38, 45, 48.**	07
NÃO FEZ	**3, 8, 10, 11, 14, 17, 18, 25, 29, 30, 34, 36, 42, 43, 44, 47.**	16

Nesta tabela, merecem destaque as observações: o número de alunos que não justificaram a resposta ou que disseram não saber, 23 no total (a partir deste momento passarei a tratar esta categoria como a dos alunos que não justificaram); 25 alunos erraram a justificativa; um aluno apresentou, em sua justificativa, alguma informação pertinente; um aluno apresentou uma prova completa fazendo uso de cálculos.

Sendo a argumentação e prova o tema a ser investigado, esta tabela parece indicar que merecem investigação, as razões que dificultam ao aluno a prática de justificar suas ações matemáticas e suas estratégias de resolução.

A partir das duas tabelas iniciais cruzei os dados, obtendo a tabela 3:

Tabela 3 - Questão G4

		RESPOSTAS								
		Não Respondeu	Não sei	30°	20°	70°	40°	110°	Outras	Freq
JUSTIFICATIVA	Não fez	**8, 10, 11, 14, 18, 30, 34, 42, 43, 44, 47**		**17**			**36**		**3, 25, 29**	16
	Não sei		**9, 15, 21, 28, 38, 45, 48**							07
	0	**12, 23, 37**		**13, 20, 22, 27, 33, 35, 41**	**2, 7, 19, 31, 32, 40**	**4, 16, 46, 50**		**5, 24**	**6, 39, 49**	25
	1								**26**	01
	2a									00
	2b									00
	3c						**1**			01
	3p									00
	Freq	14	07	08	06	04	02	02	07	50

Constata-se imediatamente, a partir do não preenchimento quase absoluto das 4 últimas linhas da tabela, ausência de argumentações que se aproximem ou se constituam em uma prova. Ressaltamos ainda: uma correlação entre a apresentação de resposta e de justificativa; isto é, dos 29 alunos que apresentaram algum valor como resposta, 27 apresentaram justificativa à sua resposta; dos 2 alunos que responderam corretamente, um não justificou sua resposta e o outro o fez corretamente com a utilização de cálculos.

Constamos também que: um aluno (sujeito 26), apesar de ter apresentado uma resposta errada, justificou seu procedimento com informações pertinentes; 18 alunos não apresentaram um valor como resposta e qualquer registro como justificativa; já tínhamos observado, após a apresentação da tabela 2, que 23 alunos não justificaram; assim, 5 alunos apresentaram respostas sem justificativa; ainda, 3 alunos tentaram justificar sem apresentar um valor como resposta à questão.

Na seção dedicada ao estudo dos protocolos, voltaremos a esses sujeitos.

<u>Questão G5:</u>

Após as observações iniciais sobre a questão G4, passei à questão G5 e construí a tabela 4:

Tabela 4 - Questão G5

RESPOSTAS		
VALOR	ALUNO	FREQ.
1/4 OU 0,25	**1, 2, 5, 6, 10, 12, 13, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 37, 38, 41, 42, 44, 45, 48.**	25
1/3	**3, 19.**	02
0,5	**4, 23.**	02
0	**49, 50.**	02
OUTRAS RESPOSTAS	**36, 39, 47.**	03
"NÃO SEI"	**9, 17, 28, 40.**	04
NÃO RESPONDEU	**7, 8, 11, 14, 15, 16, 18, 29, 34, 35, 43, 46.**	12

Em termos de respostas, observando a tabela, constatamos: os alunos tiveram um melhor desempenho na questão G5 do que na G4: ocorreram 25 respostas corretas; 16 alunos não apresentaram respostas; entre as nove respostas erradas não houve qualquer predominância que mereça menção.

As informações relativas às justificativas estão sintetizadas na tabela 5:

Tabela 5 - Questão G5

JUSTIFICATIVAS		
CÓDIGO	ALUNO	FREQ.
0	**3, 4, 7, 30, 36, 39, 46, 49, 50.**	09
1	**5, 6, 12, 13, 22, 44, 48.**	07
2a	**1, 2, 21, 24, 31, 33, 37, 41, 45.**	09
2b	**26, 27, 42.**	03
3	**32.**	01
"NÃO SEI"	**9, 17, 28, 38, 40.**	05
NÃO FEZ	**8, 10, 11, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 23, 25, 29, 34, 35, 43, 47.**	16

Esta tabela também mostra um melhor desempenho dos alunos na questão G5, tendo em vista o número de justificativas com código maior que 1: foram 13, contra 1 na questão G4.

Ressaltamos ainda: entre os 29 alunos que justificaram a resposta, 9 fizeram de forma errada, 7 sujeitos justificaram com informações pertinentes, através de um trabalho empírico, 9 apresentaram algum uso de estrutura matemática, ainda que distante da prova, 3 alunos também apresentaram alguma estrutura matemática chegando próximo a uma prova completa e um aluno produziu uma justificativa totalmente correta; 21 alunos não apresentaram justificativas.

Aplicando às tabelas 4 e 5 um procedimento análogo ao que resultou na tabela 3, que sintetiza os dados da questão G4, obtive a tabela 6:

Tabela 6 - Questão G5

		RESPOSTAS							
		Não Respondeu	N sei	1/4 ou 0,25	1/3	0,5	0	Outras	freq
JUSTIFICATIVA	Não fez	**8, 11, 14, 15, 16, 18, 29, 34, 35, 43**		**10, 20, 25**	**19**	**23**		**47**	16
	Não sei		**9, 17, 28, 40**	**38**					05
	0	**7, 46**		**30**	**3**	**4**	**49, 50**	**36, 39**	09
	1			**5, 6, 12, 13, 22, 44, 48**					07
	2a			**1, 2, 21, 24, 31, 33, 37, 41, 45**					09
	2b			**26, 27, 42**					03
	3			**32**					01
	Freq	12	04	25	02	02	02	03	50

Destacamos: como na questão G4, ocorre uma forte correlação entre a apresentação de resposta e de justificativa; isto é, dos 34 alunos que apresentaram alguma resposta, 29 apresentaram alguma justificativa; dos 25 alunos que acertaram a questão, apenas quatro não justificaram; entre as 21 justificativas, há uma errada e uma totalmente correta; entre esses extremos, temos 12 justificativas que avançaram além do empirismo ingênuo, apresentando indícios de uso de estruturas e/ou propriedades matemáticas pertinentes à questão.

Nesta tabela podemos ainda constatar que: 14 alunos não responderam e nem justificaram; apenas 3 alunos apresentaram resposta incorreta não acompanhada de justificativa; 2 alunos tentaram justificar sem chegar a um valor como resposta, reforçando assim o nosso conceito de que esta questão tem potencial para induzir a existência de um vínculo entre a determinação de um processo para se obter uma resposta e a descrição desse processo.

As análises das questões G4 e G5 indicam que é necessário investigar: o grau de conhecimento dos sujeitos sobre os conceitos necessários à resolução de ambas questões; se a forma de apresentação gerou dificuldades;

o que gerou concretamente, a diferença de desempenho entre as duas questões.

Buscando a seguir, relacionar os desempenhos em G4 e G5, reuni os dados das tabelas 3 e 6 na tabela 7, em que as respostas e justificativas da questão G4 encontram-se na vertical e as da questão G5 na horizontal.

Comparando as tabelas 3, 6 e 7, pode-se perceber algumas alterações nas categorias. Esclareço que: as codificações "Não respondeu", "Não fez" e "Não sei" foram agrupadas em uma única categoria representada pela letra N; utilizei a expressão "Ou" para representar a categoria "Outras repostas", em relação à questão G4, exclui as justificativas 1, 2b e 3p por não apresentarem ocorrências, a resposta 110° da questão G4 foi incluída na categoria "Ou",

Com o cruzamento dos dados das questões G4 e G5, os alunos 7 e 46 ficaram isolados do grupo, devido à sua posição na tabela 6 (questão G5). Assim, optei por incorporá-los na categoria de respostas "Ou", com relação à questão G5, apesar de suas respostas originais serem N.

Tabela 7 - Questões G4 e G5.

G5 \ G4		JUSTIFICATIVA							
		N	N OU 0					0	3c
			RESPOSTAS						
JUSTIFICATIVA	RESPOSTAS	N	Ou	20°	30°	40°	70°	N	40°
N	N	**8, 9, 11, 14, 15, 18, 28, 34, 43**	**29**	**40**	**17, 35**		**16**		
N, 0	Ou	**47**	**3, 39, 49**	**7, 19**		**36**	**4, 46, 50**	**23**	
N, 0	1/4	**10, 30, 38**	**25**		**20**				
1, 2ª, 2b, 3	1/4	**21, 42, 44, 45, 48**	**5, 6, 24, 26**	**2, 31, 32**	**13, 22, 27, 33, 41**			**12, 37**	**1**

Obs.: N representa as expressões "Não respondeu", "Não fez" e "Não sei", Ou representa a palavra "Outras".

Construída a tabela, classifiquei os alunos em seis grupos:

Grupo A (amarelo): com nove elementos, formado pelos alunos: 8, 9, 11, 14, 15, 18, 28, 34 e 43 que não apresentaram respostas nem justificativas para as duas questões.

Grupo B (verde): com dez elementos, formado pelos alunos: 10, 16, 17, 23, 29, 30, 35, 38, 40 e 47 que apresentaram resposta a apenas uma questão, sem justificativa ou com esta errada. 6 deles apresentaram resposta a G4 e 4 o fizeram para G5.

Grupo C (azul claro): com onze elementos, formado pelos alunos: 3, 4, 7, 19, 20, 25, 36, 39, 46, 49 e 50 que apresentaram respostas às duas questões porém sem justificativas ou com estas erradas.

Grupo D (azul escuro): com sete elementos, composto pelos alunos: 12, 21, 37, 42, 44, 45 e 48 que apresentaram a resposta correta para a questão G5, com argumentos coerentes em suas justificativas e não apresentaram qualquer resposta para a questão G4. Dentre esses, os alunos 12 e 37 fizeram algum registro na questão G4, porém sem conclusão.

Grupo E (vermelho): com doze elementos, formado pelos alunos: 2, 5, 6, 13, 22, 24, 26, 27, 31, 32, 33, e 41 que além de apresentarem a mesma produção do grupo D apresentaram alguma resposta à questão G4. Com relação às justificativas de G4, todos obtiveram codificação N ou 0.

Grupo F (rosa): formado pelo aluno de número 1 que apresentou respostas corretas para as duas questões e as justificou de forma coerente.

3.3 ANÁLISES QUALITATIVAS.

Definidos os grupos, passarei a analisá-los em separado. Minha expectativa é que os critérios quantitativos que me levaram a determiná-los se transformem em critérios qualitativos. Para isso, observarei os conhecimentos e procedimentos utilizados pelos alunos, as formas utilizadas para argumentos e descrições e outros elementos que se apresentarem.

Antes porém, quero registrar algumas afirmações de Raymond Duval (1995). Para ele as funções epistemológicas, em geometria, compreendem três formas de processo cognitivo:

- **visualização** para a exploração heurística de uma situação complexa;
- **construção de configurações**, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as realizações apresentadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
- **raciocínio** é o processo que conduz para a prova e a explicação.

Como agente facilitador na resolução de problemas em geometria, temos as construções geométricas e os desenhos; estes integram o **registro figural** e podem mais facilmente mostrar a idéia de soluções a esses problemas, que em outros registros. O registro figural tem interpretações pessoais, assim não é difícil que a apreensão de um registro figural feita por um aluno seja diferente da feita por um professor. Duval (1995) destaca quatro formas de apreensões de figuras:

- **perceptiva** – é a que permite identificar ou reconhecer imediatamente um objeto matemático ou a forma de um objeto no plano ou no espaço;
- **discursiva** – é a que corresponde a interpretação e explicitação das propriedades matemáticas privilegiando a articulação dos enunciados;
- **seqüencial** – é a solicitada na construção de uma figura geométrica ou na descrição com objetivo de reproduzir uma figura;
- **operatória** – é a que transforma (modifica) a figura dada em outras figuras, visando obter novos elementos que auxiliem na solução de um problema ou de uma prova.

A apreensão operatória depende das modificações que a figura pode sofrer. Duval (1995) classifica essas modificações da seguinte forma:

- **modificação mereológica** – a figura pode ser decomposta em subfiguras e essas partes podem ser recompostas estabelecendo relações entre as partes e o todo;
- **modificação ótica** – é a transformação de uma figura em outra considerada sua imagem;
- **modificação posicional** – é o deslocamento da figura em relação a um referencial.

Se as descrições apresentadas no início deste capítulo indicam os conhecimentos que compõem as questões, é momento de observar se estes aparecem e como aparecem nos protocolos dos alunos, como também de verificar se as contribuições de Duval se explicitam nas produções dos alunos. Para isso utilizei os grupos nos quais os alunos foram classificados.

Não há considerações a fazer sobre os protocolos do **grupo A** pois os mesmos não apresentam respostas nem justificativas.

Entre os protocolos do **grupo B** há dois a serem destacados. Antes lembro que o grupo B, constituído de 10 alunos, se caracteriza por apresentar resposta a apenas uma questão, sem justificativa ou com justificativa errada. O aluno de número 40 na questão G4 deu como resposta 20°; em sua justificativa demonstrou ter considerado o segmento BC perpendicular ao lado maior do retângulo, o que o levou a calcular 90°-70°=20°. Um exame dos protocolos mostra que todos os 6 alunos que apresentaram a resposta 20º nessa questão, usaram essa estratégia. Eles são mencionados no que segue, nos seus respectivos grupos.

Recorrendo a Duval (1995), podemos dizer que os 6 alunos citados acima, em termos dos processos cognitivos, fizeram uso da *visualização* e se detiveram na "aparente" perpendicularidade. Quanto à *construção de configurações*. aparentemente desconsideraram a transformação da figura, prejudicando assim o *raciocínio*. A desconsideração da transformação e o uso da "perpendicularidade" como recurso, evidencia a ausência da apreensão figural *operatória*, mostra uma concentração na apreensão *perceptiva* e de forma inadequada.

O aluno de número 30, na questão G5, não escreveu qualquer palavra mas apresentou uma figura, semelhante a Figura 3.4, para justificar sua resposta como sendo 1/4. Quanto aos processos cognitivos, fica evidente a presença da *visualização* e da *construção de configurações*, já o *raciocínio* ficou oculto. Em relação às apreensões figurais, é incerto o uso da apreensão *discursiva*, ficando garantidas as apreensões *perceptiva* e *operatória*, essa última com uma *modificação posicional*.

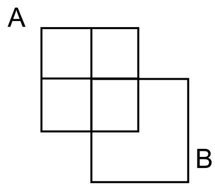


Figura 3.4: Resolução do aluno de número 30.

Uma hipótese, que poderá ser confirmada pelas entrevistas, é se os 2 outros alunos desse grupo que apresentaram resposta 1/4 e justificativa com codificação N ou 0, procederam dessa forma.

Passemos ao **grupo C**, definido como o dos 11 alunos que apresentaram respostas às duas questões, porém sem justificativas ou com justificativas erradas.

Em relação à questão G4, os alunos de números 7 e 19 trataram o segmento BC como sendo perpendicular ao lado maior da folha de papel. Do ângulo de 90°, subtraíram 70° obtendo como resposta o valor de 20°, portanto procedendo como o aluno de número 40, citado acima. O aluno de número 36 reproduziu a folha de papel já dobrada, como na Figura 3.5, marcou o ângulo 70° e no lugar do x marcou 40°, aparentemente considerando a figura como suficiente para a justificativa. Ele é o único aluno de nossa amostra que apresentou a resposta correta 40º a essa questão, e que, segundo as codificações, não apresentou justificativa. Em relação aos processos cognitivos e apreensões figurais, vale o relato anterior com uma única alteração, aqui não há a *modificação posicional* e sim a *mereológica*.

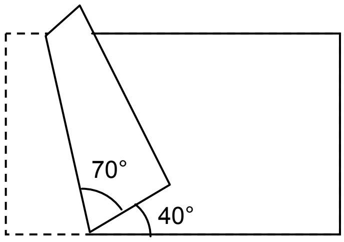


Figura 3.5: Resolução do aluno de número 36.

Sobre os registros desses três alunos na questão G5 acrescento: o aluno de número 7 procurou decompor o quadrado A e estabelecer alguma relação entre ângulos e área (Figura 3.6), não concluindo. O aluno 36 marcou diversos ângulos na figura (Figura 3.7) e escreveu a expressão 50º + 50º + 60º + 30º = 190º. Já o aluno 19 escreveu a expressão: "cabe ⅓ do outro quadrado"; essa resposta será comentada em outro parágrafo abaixo.

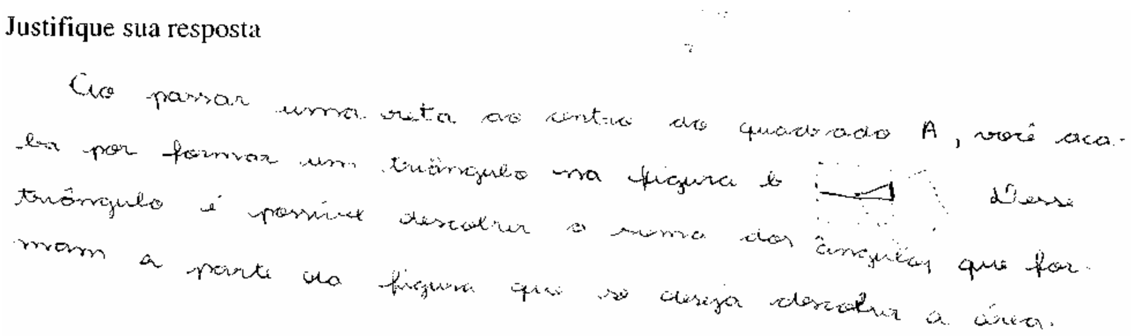


Figura 3.6: Resolução do aluno de número 7.

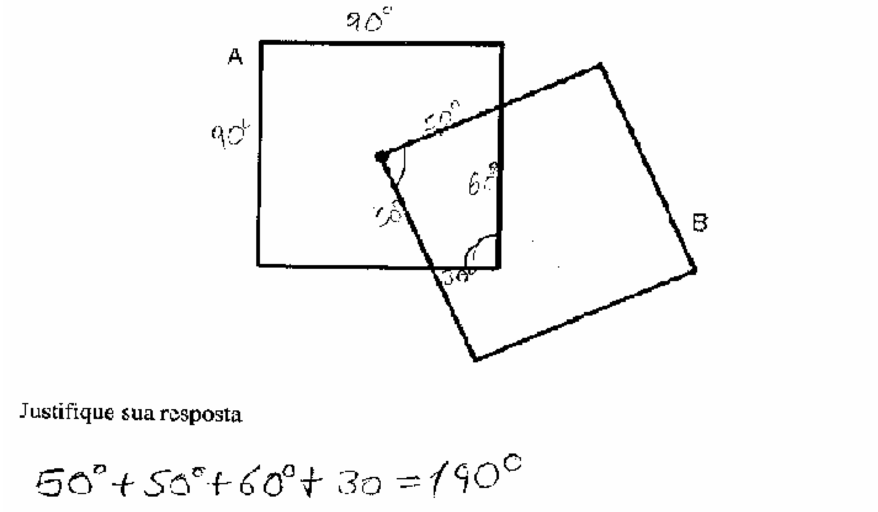


Figura 3.7: Resolução do aluno de número 36.

Seguindo Duval (1995), podemos dizer que o aluno de número 7 fez uma *apreensão operatória* com uma *modificação posicional*, mas faltou-lhe a *apreensão discursiva* na hora de interpretar os elementos da figura. Quanto aos processos cognitivos fez uso da *visualização* e da *construção de configurações*, já o raciocínio ficou prejudicado. Em relação ao aluno 36, não fica claro se e quais processos cognitivos utilizou, assim como quais as apreensões figurais.

Ainda no Grupo C, os alunos de números 3 e 19, na questão G5, utilizaram de forma intuitiva o conceito de rotação. O aluno 3, de forma mais explicita, disse que poderia girar o papel (quadrado) B somente 3 vezes, possivelmente considerou que um quarto "giro" estabeleceria a posição inicial. Baseados nos três giros, eles deram como resposta para a área comum o valor de $^1/_3$. Esses são os dois únicos alunos de nossa amostra que apresentaram a resposta $^1/_3$ nessa questão; podemos assim conjecturar que a lógica correspondente à resposta $^1/_3$ seria a descrita acima. Sobre a questão G4 o aluno 19 já teve seu registro comentado; o aluno 3 apenas escreveu a expressão: "A resposta de x é 180º ".

Os alunos que responderam $^1/_3$ usaram como processos cognitivos a *visualização* e a *construção de configurações*; suas apreensões figurais incluem a *perceptiva* e a *operatória,* com uma *modificação posicional*.

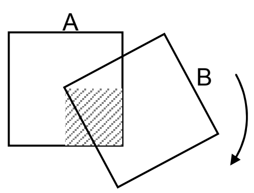
Portanto, integram este grupo: 1 aluno que obteve a resposta correta em G4, aparentemente empregando estratégia correta; 2 alunos que, na questão G4, trataram o segmento BC como perpendicular ao lado maior da folha e obtiveram 20º como resposta; 2 alunos que obtiveram a resposta $^1/_3$ em G5, utilizando de forma intuitiva o conceito de rotação.

Entre os protocolos do **grupo D**, constituído pelos 7 alunos que apresentaram a resposta correta para a questão G5, com argumentos coerentes em suas justificativas e não apresentaram qualquer resposta para a questão G4, devo ressaltar os alunos 12 e 37 que, mesmo não tendo apresentado resposta, fizeram algum registro. Destes, destaco o aluno 37. Na questão G4, este apresentou as equações $180º = 70º + y + x$ e $x = 180º - 70º - y$; entretanto, faltou a ele a percepção de que ao dobrar a folha de papel haveria a conservação da medida do ângulo, portanto y = 70º, ou seja, faltou-lhe a apreensão *discursiva* da figura. Se isto tivesse acontecido, o aluno chegaria a uma resposta correta e uma justificativa completa.

Os alunos 37 e 48, na questão G5, tentaram estabelecer uma relação entre área e ângulo. Como cada ângulo do quadrado tem 90° e o ângulo de uma volta tem 360°, a divisão deste em partes de 90° geraria a fração ¼, o que os levou à resposta correta de ¼ para a fração de área. Esses alunos apresentaram como processo cognitivo a *visualização*; entretanto, não utilizaram a *construção de configurações* necessária à questão. A *apreensão perceptiva* da figura esteve presente mas a *operatória*, também necessária, não apareceu.

Os alunos 12 e 21 escreveram que o quadrado A poderia ser dividido em quatro partes iguais (congruentes) mas não indicaram como isso poderia ser feito, assim não temos como discorrer sobre os processos cognitivos e apreensões figurais subjacentes.

Finalmente, os alunos de números 42 e 44 apresentaram figuras respectivamente semelhantes às Figuras 3.8 e 3.9 que estão a seguir; na seqüência, descreveram o movimento a ser feito para obtê-las e disseram que a área comum obtida correspondia a 1/4 da área do quadrado. Esses alunos apresentaram as três formas de processos cognitivos descritos por Duval(1995) e as apreensões figurais *perceptiva*, *discursiva* e *operatória* com *modificação posicional*.



F**igura 3.8:** Resolução do aluno 42

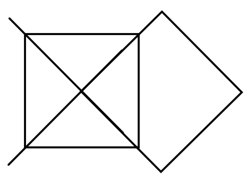


Figura 3.9: Resolução do aluno 44

Sintetizando, temos neste grupo as seguintes estratégias de resolução da questão G5: 3 alunos basearam-se na suposição de que cada setor angular de medida 90º cobriria a mesma porção de área; 2 alunos supuseram que uma partição do quadrado A em partes congruentes à interseção dos dois quadrados era possível; finalmente, 2 alunos admitiram que rotações do quadrado B em torno do centro do quadrado A não alteram a fração da área de A que é recoberta por B. No que segue, resoluções que se baseiam nessas suposições serão denominadas respectivamente: estratégias do ângulo, estratégias da congruência e estratégias da rotação. Vale ressaltar que todas essas suposições são verdadeiras. Ainda, pelo menos 1 aluno deste grupo apresentou uma estratégia incompleta para G4.

Passemos agora ao **grupo E**, constituído de 12 alunos, que se caracteriza por apresentar a mesma produção do grupo D, mais alguma resposta à questão G4.

Com relação à questão G4, os alunos 02, 31 e 32 adotaram, como outros 3 já mencionados, a estratégia de considerar o segmento BC perpendicular ao lado maior do retângulo, obtendo: 20º = 90° - 70°. Os alunos 27, 33 e 41 tomaram o segmento BC como base, considerando-o como não perpendicular e tomando o ângulo de 90° para comparação; na seqüência, disseram que a soma dos ângulos x (a ter seu valor determinado) e 70° era maior que 90°. Associando essas observações com a figura apresentada na questão, estimaram que o valor de x era igual ou aproximado a 30°. Um exame dos 8 protocolos que exibem a resposta 30º em G4 sugere que outros 3 alunos possivelmente adotaram essa mesma estratégia.

Em relação aos processos cognitivos e apreensões figurais, os utilizados pelos alunos que responderam 20º já foram escritos anteriormente. Quanto aos alunos que responderam 30º, eles mantêm a mesma característica que os alunos de respostas 20º, com um melhor tratamento na apreensão perceptiva.

Ainda sobre a questão G4, o aluno de número 26 apresentou, em seqüência, essas três equações: 180° = 70° + x + y ; 110° = x + y e x = 110° - y deixando a última como resposta; parece evidente que se o aluno tivesse admitido a conservação da medida do ângulo após o movimento da figura, ele deduziria o valor de 70° para y e poderia ter apresentado a resposta e uma justificativa correta. Faltou ao aluno a *construção de configurações* como processo cognitivo e a *apreensão operatória* da figura.

Na questão G5, os alunos 5 e 22 justificaram a resposta 1/4 como sendo devida ao fato de o quadrado B estar no centro (meio) do quadrado A; a princípio, esta afirmação não faz sentido; entretanto, o aluno 27 faz a mesma afirmação e acrescenta uma figura, semelhante à Figura 3.10, para ilustrar o que seria o centro:

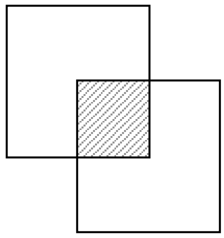


Figura 3.10: Resolução do aluno 27.

Todos esses alunos parecem ter-se baseado em estratégias de rotação (categoria acima citada) como a do aluno 42, cujo protocolo a descreve de forma mais completa (tendo recebido codificação 2b). Um rápido exame dos protocolos mostra que, dos 19 alunos que apresentaram resposta ¼ em G5 e justificativas com codificação 1, 2a ou 2b, 5 alunos possivelmente se basearam em estratégias de rotação, ou seja, fizeram uso da apreensão *operatória* com uma *modificação posicional*.

É o caso do aluno de número 33, que faz uso de figura semelhante à anterior, mas cita o movimento do quadrado B e não o centro do quadrado A. Já o aluno 32 também menciona a figura; entretanto, faz uso da estratégia do ângulo.

Um procedimento único entre os 50 alunos da amostra é o utilizado pela aluna de número 02, ainda pertencente ao grupo E. Ela apresentou uma figura semelhante à Figura 3.11. Em seguida argumentou que a figura está dividida em 16 partes "iguais", que a área comum entre os quadrados ocupa 4 partes e, como conseqüência, obteve: $^{4}/_{16} = {}^{1}/_{4}$. A aluna demonstrou ter utilizado bem a *apreensão operatória* ao dividir o quadrado A em partes, mas falhou na utilização da *apreensão discursiva* ao considerar que as 16 partes eram iguais.

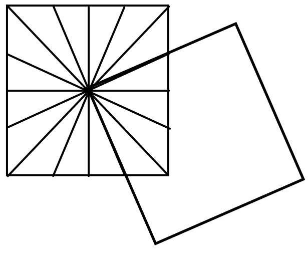


Figura 3.11: Resolução da aluna 02.

A subdivisão da figura também foi o recurso utilizado pelos alunos 24, 31 e 41, ainda do grupo E, que dividiram o quadrado A em quatro partes (Figura 3.12), em seguida alegaram que assim dava para ver que a área comum aos quadrado A e B era **$^{1}/_{4}$** de cada quadrado. Como a aluna de números 02, esses três alunos utilizaram a *apreensão operatória* com uma *modificação mereológica* da figura, levando-os a decompor o quadrado A em quatro partes, mas faltou a apresentação de mais argumentos para caracterizar o uso de outras apreensões figurais.

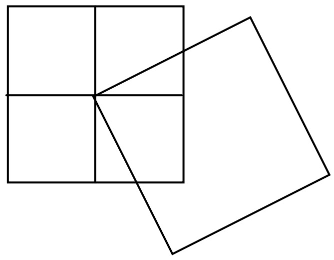


Figura 3.12: Resolução dos alunos 24, 31 e 41.

O aluno de número 26 apresentou essa estratégia de forma mais completa (codificação 2b). Na figura, ele identificou dois triângulos retângulos e um trapézio; afirmando na seqüência que os triângulos são semelhantes e que se juntarmos um deles ao trapézio teremos 1/4 do quadrado A, que representa a medida da área comum aos quadrado A e B. Podemos dizer que esse aluno apresentou as três formas de processos cognitivos descritas por Duval (1995) - *visualização*, *construção de configurações* e *raciocínio*; ainda, ele fez uso das apreensões figurais necessárias, faltando-lhe apenas a explicitação da semelhança dos triângulos.

Sintetizemos alguns procedimentos empregados no grupo E.

Na questão G4, 3 alunos consideraram o segmento BC perpendicular ao lado maior do retângulo, obtendo 20º como resposta; 3 alunos estimaram em 30º o valor do ângulo pedido; um sujeito apresentou uma estratégia incompleta, aparentemente correta.

Na questão G5, 4 alunos possivelmente utilizaram-se da idéia de rotação; 1 aluno fez uso da estratégia do ângulo; 5 alunos basearam-se possivelmente em estratégias de congruência, todos chegando à resposta correta **$^{1}/_{4}$.**

O aluno de número 1, único representante do **grupo F**, justificou a questão G4 com as seguintes equações: 180° = 70° + 70° + x ; 180° = 140° + x e x = 40°. Na questão G5, para a resposta $^{1}/_{4}$, utilizou uma figura semelhante à Figura 3.13 e disse que das quatro partes que dividem o quadrado A, uma é coberta pelo quadrado B.

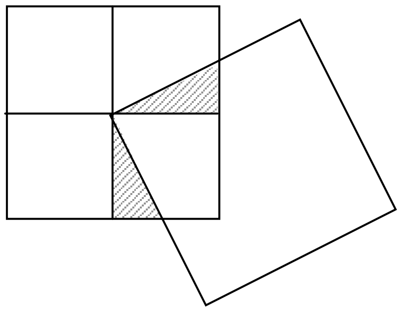


Figura 3.13: Resolução do aluno 01.

Após analisar os protocolos e em conversas com minha orientadora e demais professores pesquisadores, decidi selecionar para entrevistas, em um primeiro momento, quatro alunos, reservando a opção de entrevistar mais alunos em um segundo momento, caso eu decida ser necessário.

Como um primeiro critério decidi que os quatro alunos deveriam pertencer aos grupos C, D, E e F, sendo um de cada. Como o grupo F tem um único elemento, ele automaticamente foi selecionado. Voltei a olhar os protocolos em cada grupo e determinei que os alunos a serem entrevistados são: o aluno 19 do grupo C, o aluno 42 do grupo D, o aluno 26 do grupo E e o aluno 1 do grupo F.

Definidos os alunos, voltei a examinar seus protocolos para decidir quais perguntas formular a cada um.

CAPÍTULO IV : AS ENTREVISTAS.

Como citei no capítulo anterior, selecionei para entrevistas os alunos de números 01, 19, 26 e 42 mas, como a escola à qual pertencem os alunos de números 26 e 42 criou diversas dificuldades para que eu entrasse em contato com eles, acabei por substituí-los pelos alunos de números 28 e 34. Contei ainda com a colaboração de meus colegas de curso Luiz Donizete Ferreira e Maria Estela C. de Oliveira de Souza que compartilharam comigo as entrevistas dos alunos de números 21, 15 e 07, realizadas por eles. Contei também com a colaboração do colega Marcílio Farias da Silva, que aplicou a entrevista para a aluna de número 01.

Assim, foram entrevistados 07 sujeitos: 02 alunos de 8ª série, um de escola estadual e outra de escola particular; 05 alunos de 1ª série, um de escola particular e quatro de escolas estaduais. Dos 07 sujeitos, 02 residem na cidade de Jundiaí e cada um dos demais residem nas cidades: Itupeva, Lorena, Osasco, São Bernardo do Campo e São Paulo.

Considerando que as entrevistas tiveram um roteiro orientado com bases comuns, irei descrevê-las e analisá-las em três blocos. O primeiro bloco versará sobre as atividades de matemática realizadas em sala de aula, o segundo será dedicado à questão G4 e o terceiro bloco terá como tema a questão G5.

Em um primeiro momento, o interesse consiste em saber que tipo de argumentação os alunos estão acostumados a fazer em matemática, ou seja, se eles fazem atividades nas quais sejam solicitados a justificar ou descrever suas ações e pensamentos; para isso foram tomados como referência os questionários do projeto AprovaME, respondidos por eles. Inicio com a aluna Flávia, de número 19.

Professor: – Veja os questionários que você respondeu no ano passado. Você lembra deles?

Flávia: – Mais ou menos.

Professor: – Eles têm questões para você escolher a melhor resposta, questões para calcular e para justificar sua resposta. Você está acostumada a fazer esses tipos de atividades?

Flávia: – Não.

Professor: – Que tipo de atividades você está acostumada a fazer?

Flávia: – A gente calcula e justifica.

Professor: – Justifica também? Aí você diz o porque chegou naquele resultado?

Flávia: – É.

Professor: – Você lembra qual o último exercício de matemática que você fez?

Flávia: – Na prova.

Professor: – Fale um exercício só, que caiu!

Flávia: – De juros simples.

Professor: – Você lembra como ele era?

Flávia: – Pedia para calcular o montante.

Professor: – Você lembra de algum exercício que você teve que calcular e justificar?

Flávia: – Não.

A aluna disse estar acostumada a justificar, a realizar atividades matemáticas em que a argumentação se faz necessária, mas não se mostrou muito convincente; vale lembrar que ela não apresentou justificativa à questão G5 e apresentou uma justificativa com codificação 0 para a questão G4. De forma contrária à aluna Flávia, a aluna Mariana, de número 34, expressou com segurança que as atividades matemáticas se concentram na realização de cálculos, como podemos ver a seguir. A aluna Mariana não justificou as questões G4 e G5.

Professor: – Veja os questionários que você respondeu no ano passado. Você lembra deles?

Mariana: – Sim.

Professor: – Eles têm questões para você escolher a melhor resposta, questões para calcular e para justificar sua resposta. Você está acostumado a fazer esses tipos de atividades? Quais?

Mariana: – Não, o que a gente aprende na escola, o que a gente faz é mais ligado à matéria, dado os exercícios a gente tem que responder, calcular e responder, pronto.

Professor: – Então o que você está acostumada a fazer em matemática é basicamente conta, cálculo?

Mariana: – É.

Professor: – O professor de matemática trabalha demonstração em sala de aula? Pede para justificar as respostas dos exercícios?

Mariana: – Professor que estou tendo agora ou os que já tive?

Professor: – Fique livre para falar, o que você tem ou que já teve.

Mariana: – Eu acho que depende do professor, existiram professores que deram aula para mim que pediam para justificar a resposta, mas muitos querem saber o resultado da conta.

Professor: – Então a maioria só quer o resultado?

Mariana: – Eu acho que sim.

Professor: – Alguns poucos que passaram na sua vida pediram para justificar.

Mariana: – É.

Professor: – Então o fato de justificar não é tão estranho a você.

Mariana: – Não.

A aluna Letícia, de número 28, não apresentou justificativas às questões G4 e G5. Na entrevista ela se mostrou enigmática, aparentemente não o fez de forma proposital e como, durante toda a entrevista, a aluna demonstrou sérias dificuldades em relação ao conhecimento matemático, é provável que a forma enigmática apresentada na entrevista seja devida a uma má compreensão das perguntas e até mesmo das respostas que se fizeram presentes.

Professor: – Veja os questionários que você respondeu no ano passado. Você lembra deles?

Letícia: – Eu lembro quando foi feito, mas não lembrava mais. Eu lembro agora.

Professor: – Eles têm questões para você escolher a melhor resposta, questões para calcular e para justificar sua resposta. Você está acostumada a fazer esses tipos de atividades?

Letícia: – Mais ou menos. Mais para não.

Professor: – Que tipo de atividades você está acostumada a fazer? Só para calcular? Para justificar, para escrever o que você pensa?

Letícia: – Para escrever o que eu penso é fácil, agora para calcular... não.

Professor: – Mas escrever o que você pensa em matemática?

Letícia: – Escrever o que eu penso da matemática, coisa muito difícil.

Professor: – Ela é difícil?
Letícia: – Eu acho, para mim é.

Abaixo apresento parte das entrevistas das alunas 15 – Daniele e 21 – Isadora; para elas, atividades que solicitam justificativas, em que argumentações sejam necessárias, são pouco exploradas.

Professor: – No ano passado nessa mesma época você respondeu dois questionários sobre questões de Geometria e Álgebra. Em que, em alguns momentos você realizava cálculos, em outros você tinha que justificar sua resposta. Você realiza ou já realizou atividades desse tipo no decorrer das aulas de Matemática? Dê alguns exemplos.
Daniele: – Não, fazemos mais exercícios de cálculo mesmo.

Professor: – Você se lembra desse questionário?
Isadora: – Lembro.
Professor: – Em algumas questões você utilizou cálculo e em outras você deveria justificar as respostas. O seu professor utiliza esse tipo de atividade?
Isadora: – Não, não é muito comum. Ela explica vai passando as contas e faz junto com a gente. Se precisar ela vai tirando as dúvidas.
Professor: – A professora pede para justificar as respostas?
Isadora: – Geralmente não. Ela explica e a gente vai fazendo.
Professor: – A professora demonstra teoremas ou fórmulas em sala de aula?
Isadora: – Até que esse ano foi um pouco menos. Não foi muito costumeiro fazer isso.
Professor: – Nos outros anos foi?
Isadora: – Na oitava série foi.
Professor: – Qual teorema que ela demonstrou?
Isadora: – Ela mostrou como Pitágoras chegou à conclusão.
Professor: – Então ela demonstra alguma coisa, mas pouco. Esse ano foi pouco?
Isadora: – É. A gente aprendeu várias outras fórmulas. Ela foi mostrando como é que se fazia, como é que se chegou a isso, eu achei que não foi tão detalhado como no ano passado mas deu para aprender.

Como nas entrevistas anteriores, a aluna 07 – Bruna também não está habituada a fazer atividades, nas aulas de matemática, em que a justificativa seja necessária; um diferencial dessa aluna é que ela mencionou fazer exercícios de "lógica", de respostas diretas em que não são necessários cálculos.

Professor: – Você notou Bruna, que o questionário tinha questões em que, em alguns momentos, você calculava, efetuava cálculos, em outros você tinha que responder se era verdadeira ou falsa e em outros, criar uma justificativa para sua resposta; sendo assim eu gostaria de saber de você se você realiza atividades desse tipo no decorrer das aulas de matemática.

Bruna: – Sim, as vezes a gente tem alguns exercícios de cálculo, outros a gente usa mais a lógica, assim a gente pega exercícios, quando tem a ver com o vestibular, a gente pega alguns exercícios e faz tipo verdadeiro ou falso ou mesmo que não precisa fazer o cálculo, usa mais a lógica.

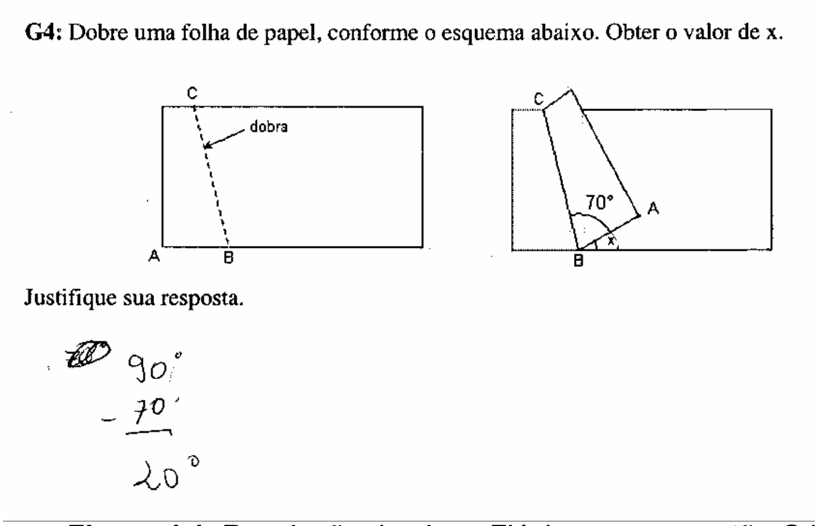
Professor: – E atividades para você justificar sua resposta?

Bruna: – Não, justificar a resposta não é muito comum a gente tá fazendo, a gente faz mais de pensar, sem ter que fazer contas, você pensa e responde, justificar assim, difícil.

A aluna 01 – Agnes, quando questionada se estava acostumada a fazer atividades que solicitam justificativas e se essas são freqüentes nas aulas de matemática, foi sucinta, respondendo "não muito".

Pelas entrevistas posso afirmar que esses alunos, raramente foram solicitados a justificar suas ações nas aulas de matemática. Posso conjecturar que para os alunos da amostra maior, a situação não é diferente; isso ajuda a explicar os altos índices de não apresentação de justificativas e de justificativas com codificação 0; só para lembrar, as duas juntas correspondem, na amostra maior, a 90,1% das justificativas na questão G4 e a 80,2% na questão G5.

Passarei agora a abordar a questão G4, Inicio com a entrevista da aluna Flávia. Na Figura 4.1 reproduzo a resolução da aluna.


G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.

Justifique sua resposta.

$90°$
$-70°$
$20°$

Figura 4.1: Resolução da aluna Flávia para a questão G4

Professor: – Na questão G4 você usou o ângulo de 90°. O quê levou você a usar esse ângulo?

Flávia: – Acho que fiz assim porque se tiver reta dá 90.

Professor: – Então você considerou aqui 90º? Você acha que tem 90º?

Flávia: – É, eu acho que sim.

Professor: – Esse ângulo ABC (no 1º retângulo), você "chutaria" um valor para ele?

Flávia: – 40... 60, não sei.

Professor: – Entre 40º e 60º?

Flávia: – É.

Professor: – Então, você usou 90º porque achou que estava próximo de uma perpendicular, é isso?

Flávia: – É.

Quando pedi à aluna que atribuísse um valor para o ângulo ABC no 1º retângulo, queria chamar sua atenção para a conservação do ângulo 70º, mas ela o estimou entre 40º e 60º, mostrando com isso que ela não estabelece relação entre o primeiro e segundo retângulos da figura, ou que não reconhece a soma dos ângulos internos de vértice B como 180º. Durante a entrevista a aluna reafirmou que para ela o fator significativo na questão era a aparente "perpendicularidade". Como foi citado nas análises anteriores, faltou à aluna a *construção de configurações* e as apreensões *operatória* e *discursiva* descritas por Duval (1995). Quero lembrar que esse procedimento deu origem às respostas 20º e 30º, que foram apresentadas por 14 alunos da amostra menor e por 296 alunos da amostra maior.

A aluna Mariana, de número 34, não respondeu nem justificou a questão G4. Reproduzo uma pergunta relativa à questão G3, pois a resposta dela retrata um comportamento que também assumiu nas questões G4 e G5

Professor: – Quais os motivos que levaram você a responder não sei na questão G3?

Mariana: – Primeiro porque eu não me interessei em fazer e depois, é porque normalmente, sei lá, ou porque não é tão aplicada a parte da escrita, como posso falar, da parte teórica e sei lá, eu acho que é mais porque eu não estava interessada em fazer a prova.

Professor: – Na questão G4, você consegue chutar um valor?

Mariana: – Não, não chuto.

Professor: – Se quiser chutar eu espero.

Mariana: – É em graus?

Professor: – É em graus.

Mariana: – 40, não, não sei.

Professor: – É 40º. Você chutou certo. Agora você consegue falar porque chutou 40º?

Mariana: – Porque 70, para 180 que é o valor da metade de 360, aqui também é 70 e 70 com 70 dá 140, para 180 falta 40.

Professor: – Isso, você falou a resposta correta e justificou direito, justificar seria isso, escreva para mim, eu quero ver a diferença da parte oral para a escrita, pode escrever como quiser.

Mariana: Justificativa na Figura 4.2 abaixo

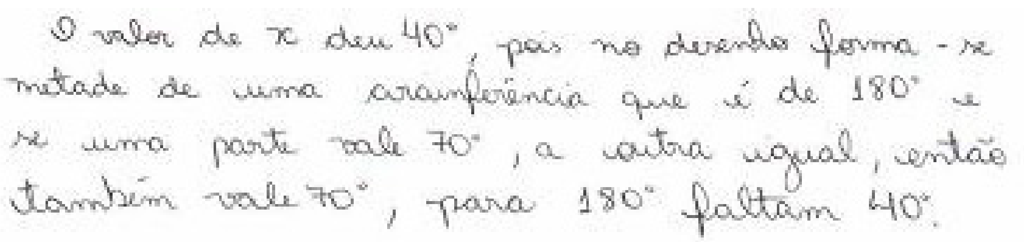

O valor de x deu 40°, pois no desenho forma-se metade de uma circunferência que é de 180° e se uma parte vale 70°, a outra igual, então também vale 70°, para 180° faltam 40°.

Figura 4.2: Justificativa da aluna Mariana.

Ficou marcante na entrevista, que a aluna não fez a questão por desinteresse. Em termos cognitivos e de conhecimento ela se mostrou capaz, pois, no momento em que se dispôs a resolver, respondeu e justificou corretamente.

A seguir comento parte da entrevista da aluna Letícia, de número 28; quero lembrar que ela apresentou sérias dificuldades em relação aos conhecimentos matemáticos, e que na questão G4 ela escreveu "não sei".

Professor: – Na questão G4, você falou que não sabia naquela época, passou um ano, hoje você acha que sabe?

Letícia: – Não.

Professor: – Você "chutaria" um valor?

Letícia: – 70.

Professor: – Porquê?

Letícia: – Porque é a metade, né?

Professor: – Metade do quê?

Letícia: – Do papel, não sei como falar.

Professor: – Olhe a figura da questão, no primeiro retângulo, ABC forma um ângulo, você consegue falar mais ou menos o valor desse ângulo?

Letícia: – É 90º, alguma coisa... .

Professor: – Você acha que está próximo de 90º?

Letícia: – Não, tá longe, mas no caso, no meio acho que seria 90º.

Professor: – Você está querendo dizer que se estivesse "mais em pé" seria 90º?

Letícia: – Isso.

Professor: – A primeira coisa que te chama a atenção é isso, 90º?

Letícia: – É.

Professor: – Olhe de novo o ângulo ABC, no primeiro retângulo, ele é maior ou menor que 90º?

Letícia: – Menor.

Professor: – "Chute" um valor para ele?

Letícia: – Uns 60.

Professor: – E esse ângulo de 70º no segundo retângulo, tem algo a ver com o anterior?

Letícia: – Tem

Professor: – O que tem a ver?

Letícia: – O ângulo é o mesmo.

Professor: – Por que você acha que é o mesmo?

Letícia: – Porque está o risco na mesma posição, a ponta veio para cá, e ficou o mesmo ângulo desse.

Professor: – Então é o mesmo ângulo?

Letícia: – Então seria 70º aqui.

Professor: – Sabendo disso agora, você saberia calcular? Ou falta alguma informação?

Letícia: – Falta muito.

Professor: – Não falta muito não. Olha a folha dobrada, tem o ângulo de 70º e se continuar até o lado do papel, forma um outro ângulo, você sabe qual é o valor desse ângulo?

Letícia: – 90.

Professor: – E o ângulo "x" seria quanto?

Letícia: – Poderia ser 90 também.

A aluna se mostrou confusa, chegou a descrever a conservação do ângulo 70º mas, em seguida aparentemente descartou essa informação. Possivelmente a ausência da *construção de configurações* como processo cognitivo, a falta de apreensões figurais e em termos de conhecimento, a não utilização da soma dos ângulos internos de vértice B, no segundo retângulo, valendo 180º, impediram a aluna de resolver corretamente a questão, levando-a a se fixar no ângulo de 90º.

Abaixo reproduzo a resolução que a aluna 07, Bruna, apresentou, quando os questionários foram aplicados (Figura 4.3). Reproduzo também a parte de sua entrevista relativa à questão G4.

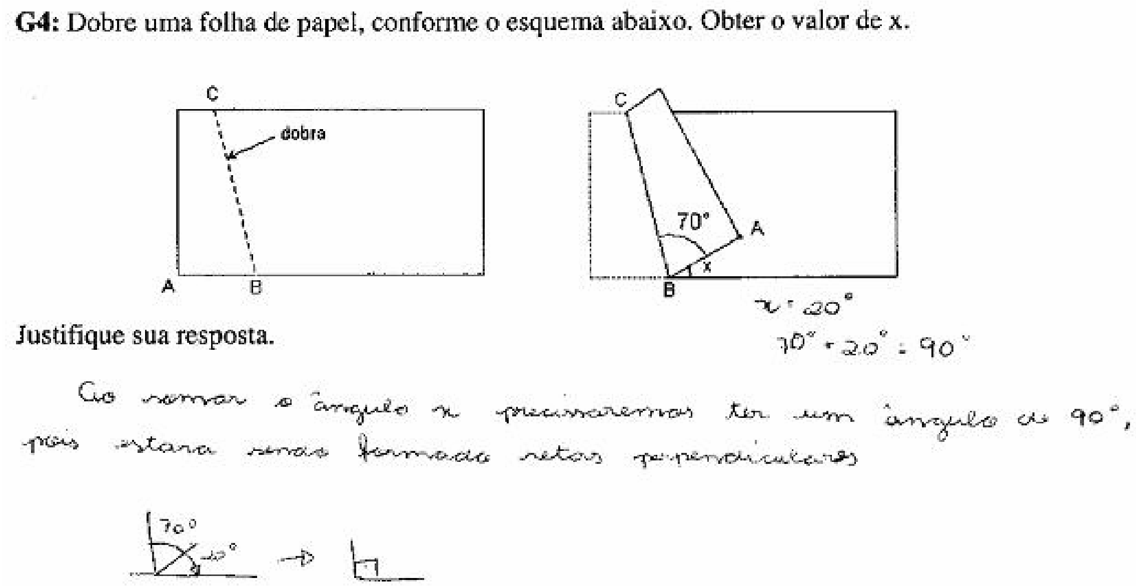


Figura 4.3: Resolução da aluna 07 Bruna.

Professor: – Em relação à questão G4, Bruna, você diz que tem uma perpendicular, agora olhe o primeiro retângulo, nele você tem o segmento AB e a linha pontilhada, que ângulo você acha que eles formam?

Bruna: – Deve ser 30, 35, eu acho.

Professor: – Porquê você colocou 90º? Você mudaria a sua resposta?

Bruna: – Eu mudaria, porque agora, vendo melhor, ele está um pouco inclinado, acho que com a inclinação ele não deve ser mais 90º, 90º ele é bem certinho.

Professor: – Como você faria? E porquê? Se você quiser pode usar esse questionário em branco.

Bruna: – Olha, eu estou pensando aqui agora, eu acho que essa parte pode ser 70 e aí eu teria 140, pois o ângulo seria igual aqui e aqui, com 140 ... vai dar 40 para completar 180, não sei eu pensei assim, mas acho que está errado.

Professor: – Vamos colocar no papel.

Bruna: – Figura 4.4.

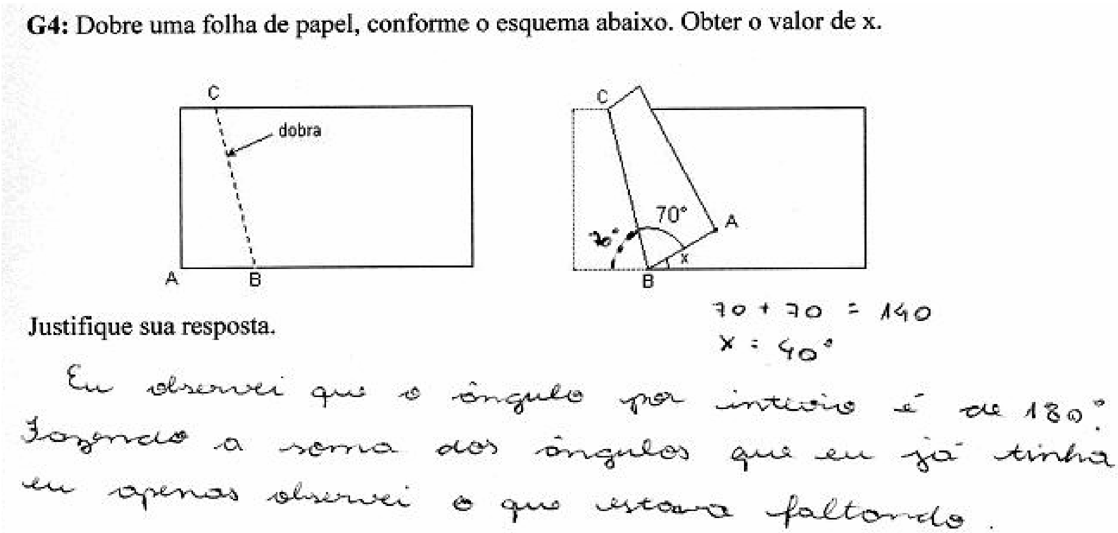


Figura 4.4: Nova resolução da aluna Bruna.

Em sua primeira resolução, a aluna Bruna não hesitou em considerar o segmento BC perpendicular ao segmento AB mas, durante a entrevista, quando questionada sobre a perpendicularidade no primeiro retângulo, ela mudou rapidamente de opinião. Ao tirar a perpendicularidade de foco, a aluna pode usar a construção de configurações como processo cognitivo e as apreensões figurais discursiva e operatória, elementos não utilizados anteriormente. Com essa nova visão a aluna chegou à resposta correta (40º) e fez uma justificativa coerente mas, em minha opinião sua justificativa expressa oralmente (transcrita acima) foi melhor do que a escrita.

Para a aluna 01, Agnes, não foi direcionada qualquer pergunta em relação à questão G4, pois, conforme fora descrito no capítulo III, em seu protocolo ela apresentou corretamente a resposta e justificativa.

As alunas 15 – Daniele e 21 – Isadora, não acrescentaram qualquer informação nas entrevistas; disseram não saber, que não lembravam como resolver a questão.

Para a questão G4, as entrevistas trazem, como fatos marcantes para a não apresentação de respostas e justificativas corretas, a falta da *construção de configurações* como processo cognitivo, apreensões figurais insuficientes e conhecimentos específicos deficientes ou ausentes. Para as alunas Mariana e Bruna, que não apresentaram essas carências, o que teve que ser suplantado foi, para Marina, o desinteresse e uma insegurança inicial e para a aluna Bruna, a não observância do perpendicularismo que estava se constituindo um obstáculo epistemológico.

Inicio os registros relativos à questão G5 com a aluna 19 – Flávia. Nessa questão, ela escreveu apenas uma frase: "cabe $^1/_3$ do outro quadrado".

Professor: – Na questão G5 você disse que $^1/_3$ do quadrado A está coberto pelo quadrado B. Qual é a parte que não está coberta?

Flávia: – $^2/_3$, não sei.

Professor: – Por que você acha isso?

Como a aluna não respondia eu disse:

Professor: – Se você quiser que eu mude a pergunta é só falar.

Flávia: – Pode mudar.

Professor: – Você falou que aqui é $^1/_3$ (indiquei a ela) e que aqui é $^2/_3$ (indiquei na figura). Você consegue dividir esse $^2/_3$ em partes?

Flávia: Figura 4.5.

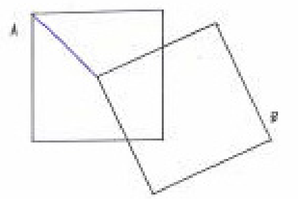


Figura 4.5: Resolução da aluna Flávia.

Professor: – Tem duas partes que parecem iguais e a outra, parece igual?

A aluna não respondeu, assim perguntei se deveria mudar a pergunta, ao que ela concordou.

Professor: – Imagine que esses quadrados são de cartolina, eles estão presos nesse ponto do centro. Você consegue girar um deles? Deixá-los em uma posição melhor?

Flávia: Figura 4.6.

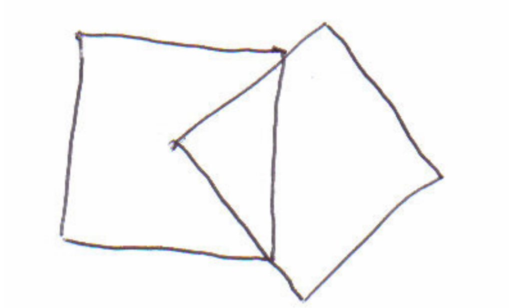


Figura 4.6: Resolução da aluna Flávia por rotação.

Professor: – Você acha que é $^1/_3$?

Flávia: – É $^1/_4$?

Professor: – Por quê?

Flávia: – Porque dá para desenhar 4 vezes. (Figura 4.7)

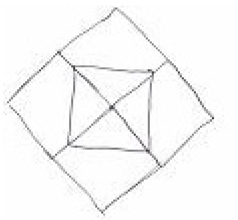


Figura 4.7: Resolução da aluna Flávia por composição.

Professor: – Nas questões G4 e G5 você deu valores como respostas mas não justificou, não disse como chegou ao resultado, porquê?

Flávia: – Não lembro.

Professor: – Você faria diferente hoje?

A aluna não respondeu.

Na análise dos protocolos, levantei como conjectura que a resposta $^1/_3$ era devida a uma *apreensão operatória* da figura com uma *modificação posicional*, ou seja, a rotação do quadrado B em relação ao centro do quadrado A; conjeturei ainda que o aluno havia contado 3 movimentos e desconsiderado o quarto, pois coincide com a posição inicial . Como a aluna tinha ficado com a resposta $^{1}/_{3}$ e não contribuiu para esclarecer esse $^{1}/_{3}$, induzi-a a efetuar rotação. Ela formulou então a resposta $^{1}/_{4}$ derrubando minha conjectura, Mesmo assim não devemos desconsiderá-la para os outros 53 alunos da amostra maior, que apresentaram essa resposta. Mesmo após a aluna saber que havia respondido corretamente $^{1}/_{4}$, ela se recusou a justificar.

A aluna Mariana, quando da aplicação do questionário, na questão G5 respondeu "não sei" e durante a entrevista, se portou da seguinte maneira.

Professor: – E a questão G5, consegue chutar um valor?

Mariana: – $^{1}/_{4}$?

Professor: – Chutou direito de novo. Agora você pode dizer o porquê? Você quer falar ou escrever?

Mariana: – Não sei como explicar. Ele está no centro e ele vai pegar ... seria a mesma coisa se eu tivesse assim aqui (Figura 4.8), eu dividi em quatro, então $^{1}/_{4}$, como explicar, não sei.

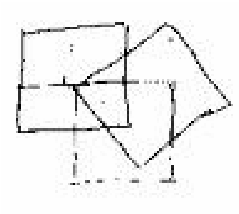


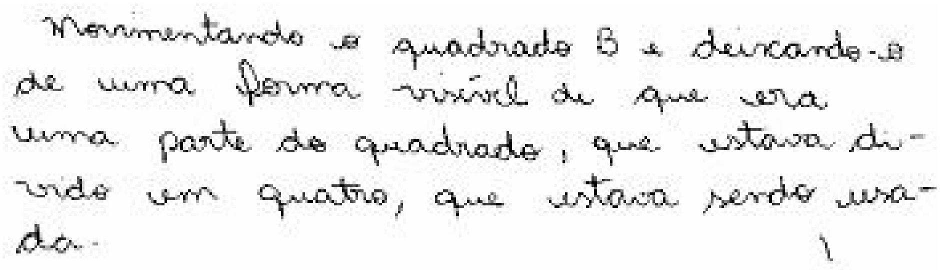
Figura 4.8: Resolução da aluna Mariana.

Professor: – Então você movimentou o quadrado e na posição que deixou, dividiu em quatro partes. Você deu um grande passo. Escreve isso.

Mariana: – Mas, como?

Professor: – Escreve, movimentei e tal... É que o que você vai escrever aí, mesmo que não fique claro, tem a figura para mostrar o que você fez.

Mariana: Justificativa na Figura 4.9.



Movimentando o quadrado B e deixando-o de uma forma visível de que era uma parte do quadrado, que estava di-vido em quatro, que estava sendo usa-da.

Figura 4.9: Justificativa da aluna Mariana.

Professor: – Tudo bem, na hora que você movimentou a figura, a parte que era comum antes e que é comum agora, aparentemente são iguais?

Mariana: – Não.

Professor: – Se tivesse que mostrar se são iguais, você teria algum caminho?

Mariana: – Eu acho que sim porque eles têm quatro lados, só que no anterior com medidas diferentes, só que eu acho que chegariam a 360.

Professor: – Você atribuiria ao fato dos quatro lados.

Mariana: – Acho que sim.

Professor: – E você falou em 360º?

Mariana: – É quatro lados, 360 né.

Professor: – Você associou o ângulo 360º.

Mariana: – É, eu acho que aqui eles são em medidas diferentes e aqui não.

Como na questão G4, no momento que a aluna Mariana se dispôs a resolver a questão G5, ela o fez corretamente. Para a justificativa, ela teve uma *apreensão operatória* da figura com uma *modificação posicional* através da rotação; assim ela conseguiu dar razões à sua resposta, mas, no momento de justificar a equivalência das áreas comuns, antes e depois da rotação, ela se perdeu buscando relações no fato de serem quadriláteros e no ângulo 360º. Faltou-lhe o conhecimento de congruência entre figuras ou, caso tivesse esse conhecimento, uma *apreensão discursiva* da figura.

A seguir apresento a parte da entrevista da aluna Letícia relativa à questão G5. Quero lembra que nesta questão a aluna respondeu "não sei" e que durante a entrevista, ela apresentou sérias carências em relação aos conhecimentos matemáticos.

Professor: – Tudo bem, vamos para a questão G5, vamos ler juntos:
"A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.
Qual a fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?"

Letícia: – Então no caso, o quadrado seria 90º e ele está pegando uma parte desse 90º, no caso seria isso?

Professor: – Você pode até usar ângulo, mas essa questão não tem relação com a anterior.

Letícia: – É que é mais fácil.

Professor: – Essa é mais fácil?

Letícia: – Eu acho que seria.

Professor: – Você entendeu a pergunta?

Letícia: – É, como é?

Professor: – Diz para mim o que ele quer?

Letícia: – Isso aqui (apontou a área na figura).

Professor: – Então ele quer saber qual é a área dessa região. Você sabe o que é medida de área?

Letícia: – Metro, assim... essa coisas.

Professor: – Você sabe o que é fração?

A aluna não respondeu.

Professor: – Quer "chutar" um valor?

Letícia: – Uns 5 cm.

Professor: – Então, mas aí não é em centímetro e é em fração.

A aluna não se manifestou.

Professor: – Vou tentar te ajudar, Imagine esses quadrados de cartolina, estão presos nesse ponto, no centro do quadrado A, você consegue movimentar eles?

Letícia: – Consigo.

Professor: – Imagine movimentando eles, você conseguiria deixar em uma posição melhor do que essa?

Letícia: – Sim.

Professor: – Desenha para mim, qual posição você enxergou?

Letícia: – Ficaria mais ou menos assim (Figura 4.10), eu imagino.

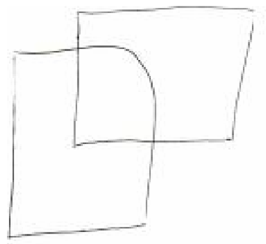


Figura 4.10: Resolução da aluna Letícia.

Professor: – Por causa da proporção, eu vou desenhar também (Figura 4.11), talvez seja mais fácil para você visualizar, está bem?

Letícia: – Está.

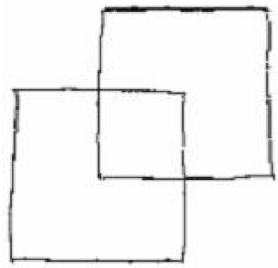


Figura 4.11: Figura apresentada pelo professor entrevistador.

Professor: – Olhando essa figura, você saberia que parte que é?

Letícia: – Um terço dele.

Professor: – Porquê um terço?

Letícia: – Seriam quatro quadrados e tá pegando um só dos quatro (Figura 4.12).

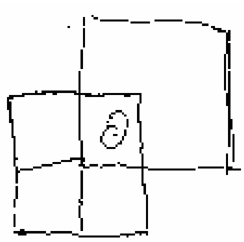


Figura 4.12: Resolução da aluna Letícia por decomposição.

Professor: – Mas, onde aparece o 3 do um terço aí?

Letícia: – É porque pegou 1 e sobrou 3.

Professor: – Por isso seria um terço?

Letícia: – Letícia: É.

Professor: – Você falou que talvez a medida comum da última figura, não seja igual à medida comum da figura inicial. Vou desenhar os quadrados com mesmo tamanho. E agora?

Letícia: – Realmente pega o mesmo espaço.

Professor: – E esse espaço pega um terço?

Letícia: – É um terço... ou um quarto... .

Professor: – Por que um terço ou um quarto?

Letícia: – Eu acho mesmo que é um terço. Porque pega um e sobra três.

Professor: – E por que você falou um quarto?

Letícia: – Ah, não sei.

A aluna chegou a citar a resposta correta ($^{1}/_{4}$), mas a descartou logo em seguida de forma repentina. Diante de minha insistência em esclarecer a menção do valor $^{1}/_{4}$, ela se calou; assim, sou levado a conjecturar que a resposta correta surgiu de forma intuitiva, pois, durante a entrevista, ela demonstrou não ter construído, de forma necessária e suficiente à questão, conhecimentos relativos a fração, a área e medida de área de figuras planas.

Em termos de apreensão figural, a aluna só a explicitou depois que induzi uma *modificação posicional*. Após a rotação a aluna passou para uma *modificação mereológica* e estabeleceu uma relação entre as quatro partes e o todo do quadrado B; para isso, ao invés de usar o conceito de fração, aparentemente ela usou uma razão entre a parte tomada (1) e as que sobraram (3), levando-a assumir como resposta o valor $^{1}/_{3}$.

A resolução que a aluna 01, Agnes, apresentou para a questão G5 (Figura 4.13), quando foram aplicados os questionários, e parte de sua entrevista, seguem abaixo.

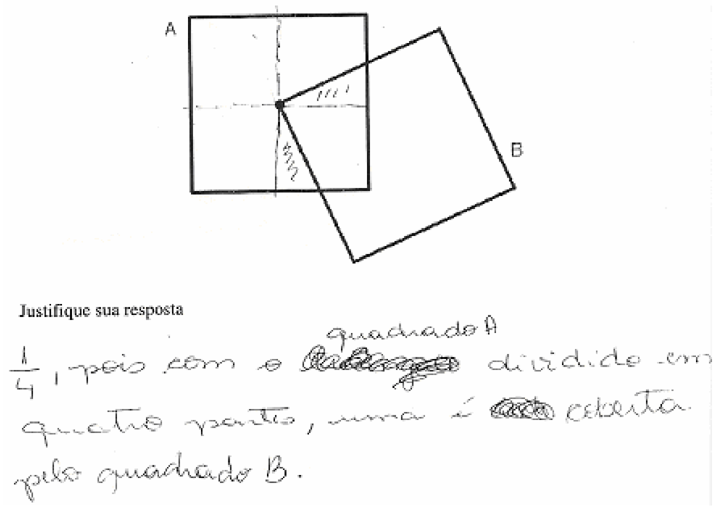


Figura 4.13: Resolução da aluna Agnes.

Professor: – Você disse que das quatro partes em que o quadrado A foi dividido, uma é coberta pelo quadrado B, acertando a questão. O que levou você a fazer esta afirmação?

Agnes: – Eu imaginei o quadrado B sendo girado. Fazendo isso, percebi que se eu dividisse o quadrado A em quatro partes, uma seria coberta pelo quadrado B.

Professor: – Na figura você marcou dois triângulos retângulos mas não falou sobre eles na resposta. Você vê relações entre esses triângulos? Quais?

Agnes: – Sim, pois seria as partes que, ao girar o quadrado B, seriam cobertas e descobertas, respectivamente.

Em seu protocolo, a aluna Agnes não havia feito referência à *apreensão operatória* da figura (rotação), mas na entrevista ela deixou claro ter utilizado esse recurso. Como ela subdividiu o quadrado A em quatro partes e realçou os dois triângulos retângulos, faltou em sua justificativa apenas a explicitação da equivalência de áreas. Quando questionada sobre os dois triângulos retângulos, ela fez referência a essa equivalência de forma empírica; a não apresentação das propriedades de congruência, não compromete, na minha opinião, a conclusão de que essa aluna apresentou processos cognitivos satisfatórios à questão.

Para as alunas 07 – Bruna, 15 – Daniele e 21 – Isadora, não foram feitas perguntas relativas à questão G5.

Analogamente à questão G4, as entrevistas sobre a questão G5 mostram que a falta da *construção de configurações* como processo cognitivo, apreensões figurais insuficientes, conhecimentos específicos deficientes ou ausentes e, em alguns casos, o desinteresse em resolver a questão, foram determinantes para que alunos não apresentassem respostas e justificativas corretas à questão. Nas questões G4 e G5, a aluna Mariana se dispôs a apresentar justificativas somente durante a entrevista, tendo um desempenho satisfatório na questão G4 e regular na questão G5.

CAPITULO V : ANÁLISES DA AMOSTRA MAIOR.

5.1 DADOS DA AMOSTRA.

Como já mencionei, os questionários do projeto foram aplicados a 1998 alunos, por 27 professores colaboradores, compondo assim a amostra maior. Ao observar a planilha de dados, verifiquei que as respostas tabuladas, nas questões G4 e G5, por 3 professores colaboradores apresentavam dados conflitantes. Como as condições não eram favoráveis à correção desses dados, resolvi excluí-los da amostra.

Com a exclusão, a amostra ficou limitada a 1816 alunos, com as seguintes características:

Tabela 8: Distribuição dos alunos por série.

Série	Freq.	%
8ª	826	45,5
1ª	990	54,5
Total	1816	100

Tabela 9: Distribuição dos alunos por rede de ensino.

Escola	Freq.	%
Estadual	1422	78,3
Municipal	117	6,4
Particular	277	15,3
Total	1816	100

Os 1816 alunos que compõem a amostra estavam vinculados a 72 classes, pertencentes a 28 escolas. Essas classes apresentam as seguintes distribuições:

Tabela 10: Distribuição das classes por série.

Série	Freq.	%
8ª	34	47,2
1ª	38	52,8
Total	72	100

Tabela 11: Distribuição das escola por rede de ensino.

Escola	Freq.	%
Estadual	19	67,9
Municipal	3	10,7
Particular	6	21,4
Total	28	100

As 28 escolas que participaram da pesquisa estão situadas em 14 municípios: Embu Guaçu, Itapecerica da Serra, Itaquaquecetuba, Itupeva, Jacareí, Jacupiranga, Jundiaí (2), Lorena, Osasco, Promissão, Santos, São Bernardo do Campo (3), São Paulo (12) e São Roque. Elas também se classificam em 8 escolas no interior (28,6%), 1 no litoral (3,6%) e 19 na região metropolitana (67,8%).

Para realizar a contagem e analisar os dados da amostra maior (1816) tomei como base os valores ocorridos, nas respostas e a codificação de justificativas, obtidos nas analises da amostra menor (50). Ao organizar os valores, percebi que os porcentuais dos resultados apresentados pelas duas amostras nem sempre se aproximavam, como poderá ser visto a partir da Tabela 13; por isso comparei a formação das duas amostras e detectei uma diferença significativa na distribuição dos alunos por série, como mostra a Tabela 12:

Tabela 12: Distribuição dos alunos por série.

Série	AMOSTRA MAIOR		AMOSTRA MENOR	
	Freq.	%	Freq.	%
8ª	826	45,5	17	34
1ª	990	54,5	33	66
Total	1816	100	50	100

Observando a tabela vemos que: a amostra maior se divide em 45,5% com alunos de 8ª séries e 54,5% com alunos de 1ª séries, resultando uma diferença de 9%; a amostra menor se divide em 34% com alunos de 8ª séries e 66% com alunos de 1ª séries, resultando uma diferença de 32%. Essa diferença na composição das duas amostras pode justificar a não aproximação de resultados, por elas apresentadas, isso se o grupo de alunos de 8ª série e o grupo de alunos de 1ª séries apresentarem uma produção diferente na apresentação das respostas e das justificativas.

A seguir, apresento para comparação e análise, tabelas com as contagens da amostra menor, da amostra maior e desta última subdividida em 8ª série e 1ª série.

Tabela 13: Respostas à questão G4.

RESPOSTA	AMOSTRA MENOR		AMOSTRA MAIOR		8ª SÉRIE		1ª SÉRIE	
	FREQ.	%	FREQ.	%	FREQ.	%	FREQ.	%
30º	08	16	77	4,2	42	5,1	35	3,5
20º	06	12	217	11,9	90	10,9	127	12,8
70º	04	08	60	3,3	26	3,1	34	3,4
40º	02	04	140	7,7	86	10,4	54	5,5
110º	02	04	90	5,0	38	4,6	52	5,2
OU	07	14	314	17,3	158	19,2	156	15,9
N	21	42	918	50,6	386	46,7	532	53,7
TOTAL	50	100	1816	100	826	100	990	100

Entre as Outras Respostas, algumas das que aparecem são: 0º, 25º, 35º, 45º, 60º, 90º, 140º, 180º, 360º e 110º-y.

Observando a amostra maior, vemos que, mais da metade dos alunos (50,6%) não apresentou resposta à questão. Possíveis razões para este comportamento podem ser encontradas na entrevista da aluna Mariana, que demonstrou desinteresse, não comprometimento com a resolução, e na entrevista da aluna Flávia que demonstrou falta de conhecimentos. Entretanto, esses não devem ser os únicos motivos. Observamos também que, porcentualmente, os alunos de 8ª séries apresentaram mais respostas que os alunos de 1ª séries, já que 46,7% dos alunos de 8ª séries e 53,7% dos alunos de 1ª séries não apresentaram respostas.

Em relação às respostas apresentadas, 20º foi a de maior freqüência (11,9%). Considerando a análise dos protocolos, podemos entretanto fazer um comentário único à resposta 20° e 30º (esta última com freqüência 4,2%): em ambas, os alunos demonstraram utilizar, como estratégia, um segmento perpendicular ao maior lado do retângulo. Conjeturo que posso associar estratégia semelhante às respostas 25º e 35º que aparecem em outros protocolos. Na comparação entre 8ª séries e 1ª séries, as respostas 20º e 30º juntas, apresentam porcentuais próximos: 16% contra 16,3% respectivamente. Mas ao olharmos a resposta 30º isoladamente, vemos que os alunos de 8ª séries apresentam um índice maior: 5,1% contra 3,5%, indicando uma qualidade melhor no tratamento desta estratégia pelos alunos de 8ª séries.

Voltemos à amostra maior. Houve um baixo índice (7,7%) para a resposta correta (40º), o que é preocupante, pois a questão G4 não é muito diferenciada das questões apresentadas nos livros didáticos, para o trabalho com ângulos. O que surpreende é o porcentual de acerto dos alunos de 8ª séries (10,4%) ser quase o dobro dos alunos de 1ª séries (5,5%). Os protocolos e as entrevistas não apresentam razões para tal diferença. Talvez um fato a ser considerado é que, em consulta aos PCN(s) do Ensino Fundamental e do Médio e a livros didáticos, vemos que os conhecimentos envolvidos na questão G4 estão mais presentes nas 6ª e 7ª séries, ou seja, mais próximos da 8ª série.

Os dados relativos às justificativas apresentadas para a questão G4 estão na Tabela 14 abaixo:

Tabela 14: Justificativas à questão G4.

JUSTIFI-CATIVA	AMOSTRA (50)		AMOSTRA (1816)		8ª SÉRIES		1ª SÉRIES	
	FREQ.	%	FREQ.	%	FREQ.	%	FREQ.	%
0	25	50	726	40,0	300	36,3	426	43,0
1	01	02	43	2,4	23	2,8	20	2,0
2ª	00	00	10	0,6	09	1,1	01	0,1
2b	00	00	02	0,1	01	0,1	01	0,1
3c	01	02	84	4,6	42	5,1	42	4,3
3p	00	00	35	1,9	20	2,4	15	1,5
N	23	46	916	50,4	431	52,2	485	49,0
TOTAL	50	100	1816	100	826	100	990	100

Como na apresentação de respostas na amostra maior, vemos que mais da metade dos alunos não apresentou justificativa. Aliás os números são próximos: 50,6% não apresentaram respostas e 50,4% não justificaram. Se, por um lado, os alunos de 8ª séries, porcentualmente, responderam mais que os alunos de 1ª séries, eles justificaram menos, pois 52,2% deles não apresentaram justificativas, enquanto que 49% dos alunos de 1ª séries não justificaram.

Entre as justificativas apresentadas, a maior parte (40%) recebeu codificação 0, contra 9,6% das outras codificações. A codificação 0 foi atribuída a 36,3% das justificativas dos alunos de 8ª séries e a 43% dos alunos de 1ª séries.

Se os alunos de 1ª séries, ganham destaques quantitativos, por aparecerem com porcentuais maiores na apresentação de justificativas (51% contra 47,8%) e no recebimento de codificação 0 (43% contra 36,3%), qualitativamente eles perdem para os alunos de 8ª séries pois, nas codificações 1, 2a, 2b, 3c e 3p, os porcentuais dos alunos de 8ª séries somam 11,5% e são sempre maiores que os dos alunos de 1ª séries que somam 8%.

Se considerei o porcentual de respostas corretas baixo (7,7%), o índice de justificativas 3c e 3p, consideradas como corretas e completas, foi ainda menor (6,5%). As entrevistas indicam que a ação de justificar, de argumentar, é pouco trabalhada em sala de aula. Talvez essa seja uma razão para esse baixo índice.

Os dados referentes à questão G5 se encontram na Tabela 15 abaixo:

Tabela 15: Respostas à questão G5.

RESPOSTA	AMOSTRA (50)		AMOSTRA (1816)		8ª SÉRIES		1ª SÉRIES	
	FREQ.	%	FREQ.	%	FREQ.	%	FREQ.	%
$^{1}/_{4}$	25	50	611	33,6	300	36,3	311	31,4
$^{1}/_{3}$	02	04	79	4,4	37	4,5	42	4,2
$^{1}/_{2}$	02	04	98	5,4	35	4,2	63	6,4
OU	05	10	231	12,7	107	13,0	124	12,5
N	16	32	797	43,9	347	42,0	450	45,5
TOTAL	50	100	1816	100	826	100	990	100

Entre as Outras Respostas, algumas das que aparecem são: 0, $^{3}/_{2}$, 90º, $^{3}/_{8}$, 180º, $^{B}/_{A}$, $^{1}/_{5}$, $^{3}/_{4}$ e $^{1}/_{6}$.

Na questão G5, o porcentual de alunos que não apresentaram respostas é alto (43,9%), apesar de ser inferior ao constatado na questão G4 (50,6%), isso mostra uma pequena vantagem de desempenho na questão G5 em relação a G4, vantagem que será confirmada nos comentários que se seguem. Se em termos quantitativos, na apresentação de respostas, a vantagem é pequena, em termos qualitativos ela aumenta pois, na amostra maior, 33,6% dos alunos apresentaram a resposta correta ($^1/_4$) em G5, enquanto que, apenas 7,7% dos alunos apresentaram a resposta correta (40º) em G4. Os protocolos e as entrevistas não apontaram razões para tal diferença de desempenho; a única evidência que surgiu foi que, na questão G5, os alunos usaram a intuição de forma mais marcante.

Na comparação entre os alunos de 8ª séries e de 1ª séries temos: 42% dos alunos de 8ª e 45,5% dos alunos de 1ª séries, não apresentaram respostas, ou seja, porcentualmente os alunos de 8ª séries responderam mais. Em relação à resposta correta ($^1/_4$), 36,3% dos alunos de 8ª séries e 31,4% dos alunos de 1ª séries a fizeram, ou seja, os alunos de 8ª séries demonstraram um melhor desempenho que os alunos de 1ª séries.

Em relação às demais respostas, vale comentar o valor ($^1/_3$) pois, nos protocolos e nas entrevistas ele apareceu com um sentido lógico. Esta resposta foi apresentada por 4,5% dos alunos de 8ª séries e por 4,2% dos alunos de 1ª séries; assim, nesta resposta os alunos de 8ª séries também se saíram melhor.

Na tabela 16 abaixo reproduzo os dados relativos às justificativas apresentadas na questão G5.

Tabela 16: Justificativas à questão G5.

JUSTIFI-CATIVA	AMOSTRA (50)		AMOSTRA (1816)		8ª SÉRIES		1ª SÉRIES	
	FREQ.	%	FREQ.	%	FREQ.	%	FREQ.	%
0	09	18	571	31,4	222	26,9	349	35,3
1	07	14	199	11,0	110	13,3	89	9,0
2a	09	18	116	6,4	53	6,4	63	6,4
2b	03	06	25	1,4	13	1,6	12	1,2
3	01	02	14	0,8	06	0,7	08	0,8
N	21	42	891	49,0	422	51,1	469	47,3
TOTAL	50	100	1816	100	826	100	990	100

Mantendo o comportamento anterior, 49% dos alunos da amostra maior não apresentaram justificativas. Como na questão G4, o porcentual dos alunos das 1ª séries que não justificaram (47,3%) é menor que o porcentual dos alunos de 8ª séries (51,1%), ou seja, os alunos de 1ª séries justificaram mais que os alunos de 8ª séries. Entretanto, como em G4, a qualidade das justificativas nas 8ªs séries é melhor, como pode ser visto nos três próximos parágrafos.

Entre as justificativas apresentadas pelos alunos, 31,4% receberam codificação 0, ou seja, estavam totalmente erradas e não apresentavam qualquer informação pertinente a questão. Neste item o porcentual de alunos de 1ª séries (35,3%) também é o maior que o porcentual dos alunos de 8ª séries (26,9%).

Nas justificativas com codificações 1, 2a e 2b, os porcentuais dos alunos de 8ª séries foram sempre superiores aos dos alunos de 1ª séries. Como, na codificação 3, os porcentuais são muito próximos, podemos dizer que na questão G5, qualitativamente, as justificativas dos alunos de 8ª séries levam uma vantagem sobre as justificativas dos alunos de 1ª séries.

Se na questão G4, 6,5% dos alunos apresentaram provas completas (3p e 3c), na questão G5, apenas 0,8% dos alunos o fizeram; assim, os porcentuais da questão G5, em comparação com os da questão G4, expressam mais respostas corretas e menos justificativas completas, reforçando a evidência de que, para dar as respostas, os alunos usaram mais a intuição do que procedimentos estruturados. Ainda em relação às provas completas na questão G5, 0,7% dos alunos de 8ª séries a fizeram enquanto que o porcentual de alunos de 1ª séries foi de 0,8%.

Após as considerações das quatro tabelas, podemos destacar: em comum, elas apresentam um baixo aproveitamento dos alunos tanto na apresentação de respostas como de justificativas. Se considerarmos as respostas corretas e as justificativas completas, a única que foge à regra é a resposta da questão G5; as demais apresentam porcentual igual ou inferior a 7,7%. Também em comum, constata-se um melhor aproveitamento dos alunos de 8ª séries em relação aos alunos de 1ª séries; esse fato é surpreendente pois, a expectativa é que, em geral, os alunos de 1ª séries tenham mais conhecimentos e estruturas cognitivas mais desenvolvidas do que os alunos de 8ª séries.

No Capitulo III, através da tabela 7, fiz o cruzamento das respostas e justificativas da amostra menor. Para o cruzamento dos dados da amostra maior, as tabelas anteriores permitiram algumas observações, mas essas são relativas a grupos de alunos; é inviável, através das tabelas, o cruzamento sujeito por sujeito; assim, para saber se essa amostra apresenta outras relações entre respostas e justificativas apresentadas pelos alunos, nas questões G4 e G5, utilizei o software estatístico CHIC, que apresento na próxima seção.

5.2 TRATAMENTO DOS DADOS ATRAVÉS DO SOFTWARE CHIC.

O CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva) é um software estatístico multidimensional, desenvolvido no Instituto de Recherche des Mathématiques de Rennes (Irmar) da Universidade de Rennes por Régis Gras e seus colaboradores. Ele permite extrair de, um conjunto de dados, relações entre sujeitos e variáveis (ou atributos) e regras de associações entre variáveis. Fornece ainda um índice de qualidade dessa associação e uma representação da estruturação das variáveis, segundo essas relações.

O CHIC permite três tipos de tratamento:

- ***Árvore de Similaridade***: produz a análise das proximidades das variáveis, os resultados numéricos e a árvore hierárquica de similaridades;
- ***Grafo Implicativo***: efetua os cálculos dos índices de implicação no sentido da análise implicativa, clássica ou entrópica, segundo a opção escolhida, os resultados numéricos (ocorrências, desvio-padrão, coeficientes de correlação) e um grafo;
- ***Árvore Coesitiva***: apresenta uma janela com os cálculos dos índices de coesão implicativa no sentido da análise implicativa, uma janela de resultados numéricos e uma janela com uma árvore ascendente, segundo o índice decrescente das coesões.

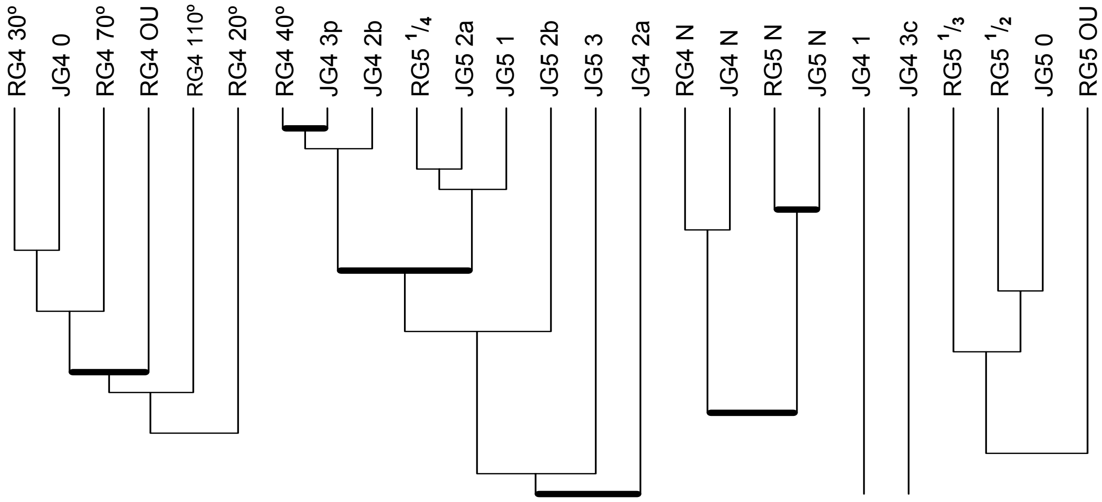
Os dados, aqui tratados, são constituídos de 1816 sujeitos (amostra maior), 25 variáveis principais (respostas e justificativas) e duas variáveis secundárias (8ª séries e 1ª séries). Na apresentação dos resultados uso as letras R e J; assim. por exemplo:

- (RG4 20º) significa: 20º como resposta para a questão G4;
- (JG5 2b) significa: codificação 2b atribuída à justificativa para a questão G5.
- Também utilizo as representações: 8S para alunos de 8ª séries e 1S para alunos de 1ª séries.

O CHIC apresenta índices informando a contribuição dos sujeitos para a formação de cada classe (Anexo 5). Esses índices são apresentados na forma: "com um risco de ..."; assim, a variável com menor índice é a que mais contribuiu para a formação da classe. Neste capítulo eu utilizo o índice complementar e não o índice de risco. Exemplifico: consideremos a 1ª classe da árvore de similaridades, comentada abaixo, que está formada pelas respostas corretas a G4 e G5, 40º e $^1/_4$ respectivamente e, pelas justificativas 1, 2a, 2b, 3 e 3p (ver figura abaixo). Da direita para a esquerda, duas subclasses estão reunidas por um nó (representado pelo segundo traço horizontal): a formada pelas variáveis RG4 40º e JG4 3p e a formada pela variável JG4 2b. O CHIC informa um risco de 0,101 associado a este nó. Em meus comentários, substituí esse índice por um índice de similaridade igual a 0,899.

A seguir apresento a árvore de similaridade, o grafo implicativo e a árvore coesitiva com suas respectivas análises. No Anexo 5 apresento os índices de similaridade e de contribuição dos alunos de 8ª séries do ensino fundamental e de 1ª séries do ensino médio, na formação de cada relação.

5.2.1 ÁRVORE DE SIMILARIDADES.



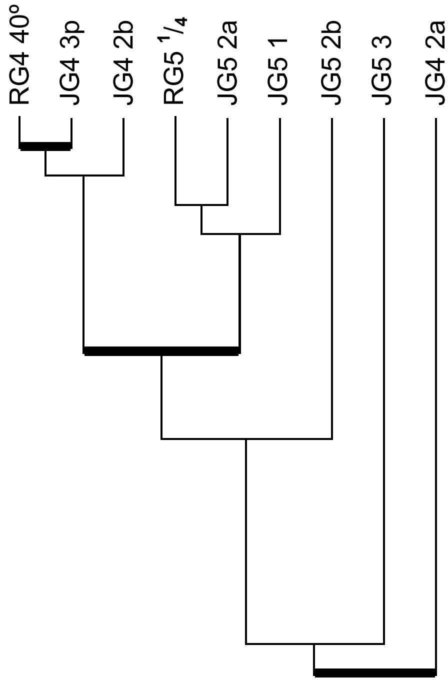
Árvore de similaridades : C:\Documents and Settings\ADMIN\Meus documentos\Amostra Maior v3.csv

Observamos que os traços horizontais representam os níveis de similaridades entre variáveis ou entre classes de variáveis, sendo que a intensidade da similaridade (uma medida técnica, referida como índice de similaridade) cresce conforme os traços estejam em posição mais alta na árvore.

Isto posto, podemos dividir a árvore em quatro classes, segundo sua ordem de importância do ponto de vista da similaridade: a primeira formada pelas variáveis RG4 40º, JG4 3p, JG4 2b, RG5 $^1/_4$, JG5 2a, JG5 1, JG5 2b, JG5 3 e JG4 2a; a segunda formada pelas variáveis RG4 N, JG4 N, RG5 N e JG5 N; a terceira formada por RG4 30º, JG4 0, RG4 70º, RG4 OU, RG4 110º e RG4 20º; a quarta classe formada pelas variáveis RG5 $^1/_3$, RG5 $^1/_2$, JG5 0 e RG5 OU. As variáveis JG4 1 e JG4 3c estão sendo eliminadas da árvore por estarem isoladas.

Analisarei cada uma das classes individualmente; em seguida, para as classes mais significativas, procuro dimensionar o grupo de alunos caracterizado por essas similaridades. Para a quantificação dos alunos em cada classe, me apoio nas tabelas anteriores e em informações do CHIC. Para cada nível, ele indica o "grupo ótima" relacionando os indivíduos típicos da classe. A informação com a tipicalidade dos indivíduos não está em anexo, pois se assim eu o fizesse, o número de páginas anexas ultrapassaria o número de 250.

1ª Classe:



Esta classe é formada pelas respostas corretas às questões G4 e G5, 40º e 1/4 respectivamente e, pelas justificativas 1, 2a, 2b, 3 e 3p. Dela, quero destacar duas subclasses.

A primeira subclasse apresenta um primeiro nó reunindo as variáveis RG4 40º e JG4 3p, com um índice de similaridade igual a 1. Esse é associado, em um segundo nó, à variável JG4 2b, com um índice de similaridade igual a 0,999999; isso indica que existe uma grande probabilidade de que o sujeito que apresentou a resposta correta à questão G4, a tenha justificado de forma completa ou muito próximo de completa. Para ilustrar quantos sujeitos estão envolvidos nas considerações e dar uma idéia do tipo de informação fornecida pelo CHIC, registro que, quanto à amostra menor, 2 sujeitos apresentaram a resposta 40^o, sendo uma acompanhada da justificativa correta e outra sem justificativa. Quanto à amostra maior, temos: 140 sujeitos apresentaram a resposta 40^o e um total de 37 sujeitos apresentaram respostas com codificação 3p ou 2b. O que o software nos informa é que, na amostra maior, grande parte dessas 37 justificativas são acompanhadas da resposta correta.

A variável 8S é a que mais contribuiu para a formação dessa subclasse, com um índice próximo a 0,90, ou seja, é grande a probabilidade de que o aluno que apresentou resposta e justificativa com essas características, seja de 8ª série. Lembramos que, em nossa amostra de 1816 sujeitos, 826 (45,5%) são de 8ª série.

A segunda subclasse apresenta um nó que associa as variáveis RG5 ¼ **e** JG5 2a, com um índice de similaridade igual a 0,977704; esse é associado, em outro nó, à variável JG5 1 com índice de similaridade de 0,951256; isso significa que existe uma grande probabilidade de o aluno que respondeu corretamente a questão G5, a tenha justificado com uso de algumas propriedades, porém estando distante de uma prova completa.

Quanto à amostra menor, 25 sujeitos estão implicados nessas considerações, sendo que 16 deles apresentaram justificativas com codificação 2a ou 1.

Na amostra maior, 611 sujeitos apresentaram a resposta ¼, enquanto que o número de justificativas com codificação 2a ou 1 soma 315.

Com um índice de 0,9389, a variável 8S é a que mais contribui para essas similaridades, ou seja, é grande a probabilidade que o aluno com comportamento descrito nessa subclasse seja de 8ª série.

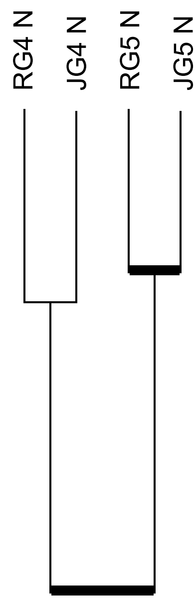
As duas subclasses anteriores estão associadas por um traço horizontal ao qual está associado um índice de similaridade igual a 0,783209. Assim, há uma boa probabilidade de que o aluno que respondeu corretamente e justificou completamente a questão G4, também tenha respondido corretamente a questão G5 e a tenha justificado com algumas propriedades pertinentes.

Ressaltamos, entretanto, que os dados apontam para um número pequeno de sujeitos nessas condições. De fato, na amostra menor temos apenas 1 sujeito que respondeu e justificou corretamente G4 e G5. Isso representa 2% da amostra menor. Na amostra maior, o software identificou apenas 35 sujeitos (1,9%) implicados nessas considerações.

A variável 8S é a que mais contribuiu para a reunião dessas subclasses, com um índice de 0,9619, assim é grande a probabilidade que o aluno, com características similares às duas subclasses, seja de 8ª série.

Não detalho os três outros nós que aparecem na classe; apenas menciono que eles apresentam índices de similaridades aproximados a 0,61, 0,09 e 0,05; que eles agregam, às subclasses anteriores, justificativas que foram bem avaliadas, e que a variável que mais contribui para as associações foi a relativa a alunos de 8ª série, com um índice de 0,9007.

<u>2ª Classe:</u>



A segunda classe tem em sua composição três nós; o primeiro, com um índice de similaridade igual a 0,897685, mostra que existe uma grande probabilidade de que o aluno que não respondeu a questão G5 também não a tenha justificado. A variável 1S, com um índice de 0,758, é a que mais contribuiu para a formação desse nó, assim é boa a probabilidade que o aluno que não respondeu e não justificou a questão G5 seja de 1ª série.

Na amostra menor, 14 alunos (28%) tiveram esse comportamento. Na amostra maior, o CHIC identificou 683 sujeitos (37,6%) nesse nó.

O segundo nó reúne as variáveis RG4 N e JG4 N com um índice de similaridade 0,888344, ou seja, é grande a probabilidade de que o aluno que não respondeu a questão G4 também não a tenha justificado. Em relação à contribuição para a formação desse nó, a variável 8S aparece com um índice de 0,516 e a variável 1S com um índice de 0,485. Assim, o aluno que não respondeu e nem justificou a questão G4, tem maior probabilidade de ser de 8ª série, mas essa está muito próxima da probabilidade de ser de 1ª série.

Recorrendo à Tabela 3, vemos que, 18 sujeitos (36%) da amostra menor, apresentaram essa característica. Já para a amostra maior, o CHIC identificou 777 alunos (42,8%), com tal comportamento.

Os dois nós anteriores são reunidos em um terceiro nó com um baixo índice de similaridade: 0,290773. Assim, é pequena a probabilidade de o aluno que não respondeu e nem justificou a questão G4, tenha apresentado desempenho idêntico na questão G5.

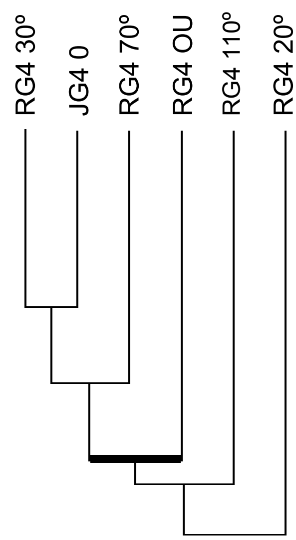
Essa informação foi antecipada na análise de nossa amostra menor. Lá, observei que o desempenho foi melhor na questão G5, com 25 respostas corretas, do que na G4, com apenas 2 respostas corretas.

Observando a Tabela 7, vemos que na amostra menor, 9 alunos (18%) apresentam as características relativas a essa classe (isto é, que não responderam G4 nem G5 e também não justificaram). Para a amostra maior, o CHIC identifica 478 sujeitos (26,3%), nessas condições.

A variável 1S, com um índice de 0,9194, é a que mais contribuiu para a formação desse nó, assim é grande a probabilidade de que o aluno que não respondeu e nem justificou as questões G4 e G5 seja de 1ª série.

As demais classes são de menor interesse, pois, com exceção de um nó, os demais apresentam índices de similaridade inferiores a 0,73. Elas são comentadas abaixo rapidamente.

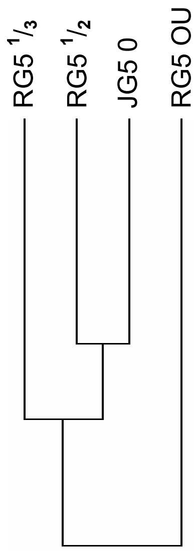
<u>3ª Classe:</u>



Esta classe é formada por cinco nós. Apenas o primeiro apresenta um índice de similaridade considerável, da ordem de 0,821967. Ela é composta por resposta erradas à questão G4 acompanhadas de justificativas, sem qualquer informação pertinente. As contribuições dos alunos de 8ª e 1ª séries, para a formação dos 2º, 3º e 4º nós, estiveram muito próximas; a contribuição maior para o 5º nó, que fecha a classe, é de alunos de 1ª séries; os alunos que responderam 30° e apresentaram justificativa com codificação 0, têm maior probabilidade de ser de 8ª série.

O número de alunos implicados nesses comentários – isto é, que apresentaram uma das respostas explicitadas na árvore para G4 – é de 27 (54%) na amostra menor e de 758 (41,7%) na amostra maior.

<u>4ª Classe:</u>



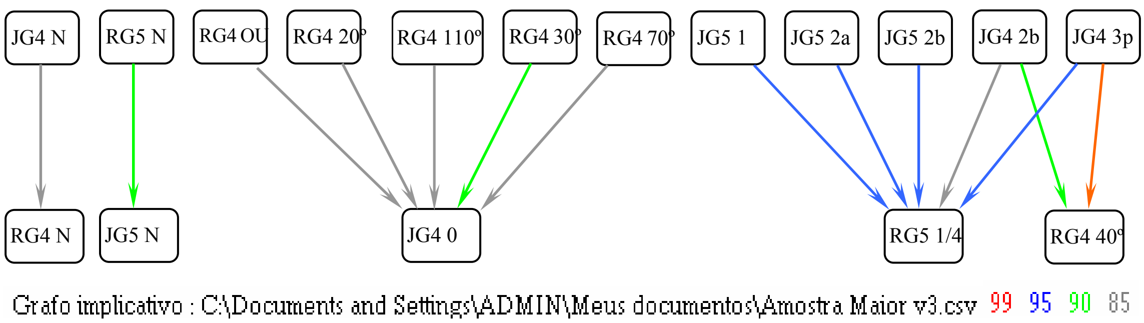
Respostas erradas à questão G5 e justificativas sem informações pertinentes a essa questão são os elementos que compõem essa classe. Como na classe anterior, os índices de similaridade não são muito significativos, estão próximos a 0,73; 0,52 e 0,24. Em relação à contribuição para formação da classe, nos três nós, a variável 1S aparece com um índice superior a 0,913, assim é grande a probabilidade de o aluno que apresentou, para a questão G5, resposta errada e justificativa sem fundamento, ser de 1ª série.

Um total de 04 alunos (8%) da amostra menor e 128 alunos (7%) da maior estão implicados nessas considerações.

Sintetizo a seguir os grupos mais significativos da amostra maior destacados por esse tratamento, segundo sua magnitude, associados às classes da árvore de similaridades:

- Um grupo de 758 sujeitos (41,7%) apresentou respostas erradas para G4, acompanhadas de justificativas sem qualquer informação pertinente.
- Um grupo de 478 sujeitos (26,3%), tipicamente de 1º ano do ensino médio, não respondeu G4 nem G5 e também não justificou.
- Um grupo de 128 sujeitos (7%), tipicamente de 1º ano do ensino médio, apresentou respostas erradas e justificativas sem informações pertinentes para G5
- Um pequeno grupo, de 35 sujeitos (1,9%), tipicamente de 8ª série, respondeu corretamente G4 e G5, com justificativas de codificação não inferior a 1.

5.2.2 GRAFO IMPLICATIVO.



Esse tratamento nos mostra 14 implicações, cada uma entre duas variáveis, que se diferenciam pelos índices de confiabilidade. Cada cor utilizada nas flechas, que integram o grafo, indica um índice; assim, a implicação que é representada por um flecha azul, tem um índice de confiabilidade superior a 0,95. Comento abaixo apenas essas implicações.

Das 14 implicações, 05 aparecerão na árvore coesitiva que será apresentada posteriormente. Os dois tratamentos retratam implicações do tipo "se – então"; o grafo trata as implicações entre variáveis; a árvore coesitiva trata, de forma hierárquica, as implicações entre variáveis e entre classes de implicações.

No relatório apresentado pelo CHIC, aparece para cada implicação um "grupo ótima", no qual o software identifica indivíduos que contribuíram para a formação da implicação. Informarei a cardinalidade desses conjuntos porém, o relatório não estará anexo por ser extenso e não trazer a informação de forma direta, sendo necessário a contagem dos indivíduos.

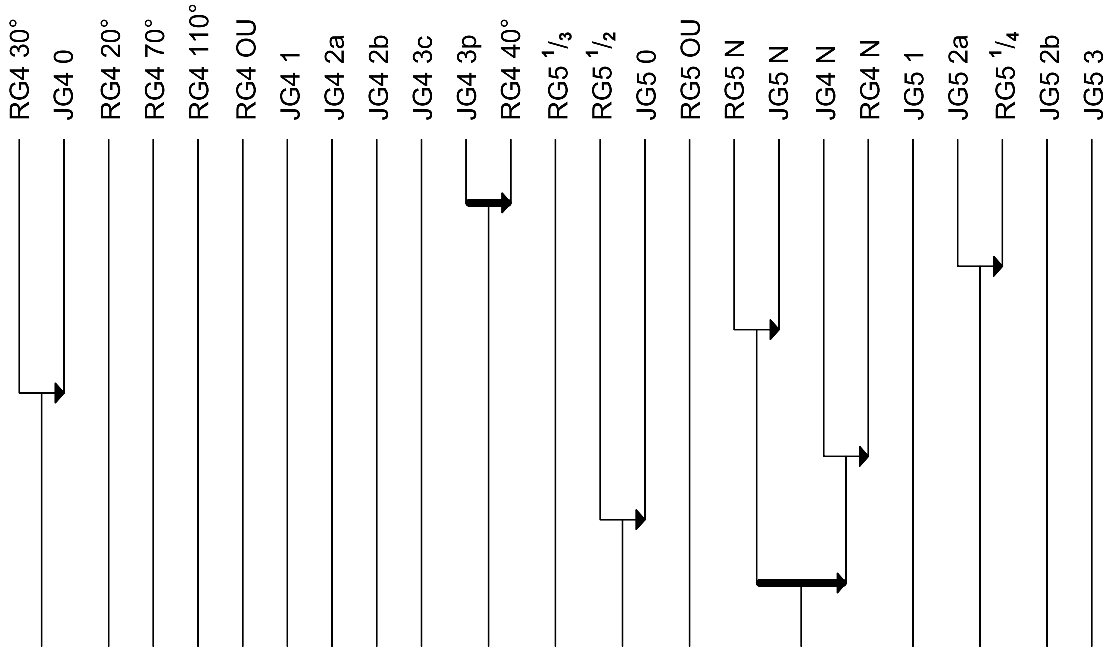
A primeira implicação é JG4 3p $\Rightarrow$ RG4 40º; com uma confiabilidade superior 0,99 temos que, se o aluno, utilizando propriedades justificou plenamente a questão G4, então ele a respondeu corretamente (40º). O CHIC indicou 35 indivíduos (2% da amostra maior) que contribuíram a essa implicação. Assim, temos que a apresentação de uma boa justificativa para G4 implica acertar a resposta.

Com índice de confiabilidade superior 0,95 temos 04 implicações. Três implicações mostram que, se o aluno apresentou justificativa à questão G5, com codificações 1, 2a ou 2b então, o aluno respondeu corretamente essa questão; a quantidade de alunos que contribuíram, respectivamente, em cada implicação foi: 188, 110 e 22. A quarta implicação mostra que, se o aluno justificou plenamente a questão G4 através de propriedades, então ele respondeu corretamente a questão G5 ($^1/_4$); 31 alunos contribuíram a essa implicação. Essas implicações reafirmam que a condição para justificar, mesmo que razoavelmente, implica o acerto da resposta.

Sintetizando as informações do grafo temos que: se o aluno, em G4 e/ou G5, apresentou uma justificativa, com razoável ou boa qualidade, então ele acertou a resposta da questão; na questão G4, se ele não apresentou justificativa, então não a respondeu; se o aluno errou a resposta da questão G4, então também errou a justificativa; se o aluno, na questão G5, não respondeu então não justificou.

No Capítulo III, durante a análise da amostra menor, ficou determinada uma forte correlação entre a apresentação de resposta e de justificativa. Considerando o parágrafo anterior, o grafo implicativo deixa essa correlação evidente, também para a amostra maior.

5.2.3 ÁRVORE COESITIVA.



Árvore coesitiva : C:\Documents and Settings\ADMIN\Meus documentos\Amostra Maior v3.csv

No tratamento através da árvore coesitiva, como descrito anteriormente, temos um caráter implicativo, ou seja, a relação estabelecida pode ser lida como "se – então". Nele, temos também as contribuições das variáveis suplementares, neste caso alunos de 8ª e de 1ª séries. Na árvore acima, aparecem sete níveis (nós) de implicação.

No primeiro nível temos um índice de coesão igual a 1 e a contribuição da variável 8S com um índice de 0,9007. Assim, se o aluno justificou a questão G4 corretamente através de propriedades, ele apresentou a resposta correta a essa questão (40°). O CHIC mostra, entretanto, que a consideração se aplica a 35 alunos da amostra maior, ou seja, cerca de 2%. Existe uma grande probabilidade que o aluno com esse comportamento seja de 8ª série.

O segundo nível mostra uma grande probabilidade (coesão 0,996) na implicação: se o aluno teve codificação 2a para sua justificativa à questão G5 (é o caso de 110 alunos da amostra maior, cerca de 6%), então ele apresentou a resposta $^1/_4$. A variável 1S foi a que mais contribuiu com a implicação, mas o fez com um índice de 0,555, assim provavelmente há uma distribuição quase eqüitativa entre alunos de 1ª e 8ª séries na participação nesta implicação.

Os 3º, 5º e 7º níveis estão associados. Comento apenas as informações mais interessantes. No 3º nível, com um índice de coesão igual a 0,896, é bem provável que o aluno que não respondeu a questão G5 também não a justificou. No 5º nível, é grande a probabilidade (coesão 0,86) de que se o aluno não justificou a questão G4, então não a respondeu. Já no 7º nível temos, (RG5 N $\Rightarrow$ JG5 N) $\Rightarrow$ (JG4 N $\Rightarrow$ RG4 N) com índice de coesão 0,542, ou seja, é média a probabilidade que se o aluno aparece no 3º nível então ele aparecerá no 5º nível. Ainda, os dados indicam que é boa a probabilidade de que, se o aluno não respondeu nem justificou a questão G5 então não justificou nem respondeu a questão G4, seja de 1ª série.

No quarto nível temos que é grande a probabilidade (coesão 0,892) de que, se o aluno respondeu 30º para a questão G4, então ele a justificou sem qualquer informação pertinente à questão. Também é boa a probabilidade (índice de 0,668) de que este aluno seja de 8ª série.

Para finalizar, no sexto nível, é boa a probabilidade (coesão 0,792) de que, se o aluno apresentou $^1/_2$ como resposta a questão G5, então ele a justificou sem informações pertinentes à questão; ainda, com um índice de 0,9131, é grande a probabilidade que esse aluno seja de 1ª série.

As contribuições propiciadas pelos tratamentos realizados no CHIC vieram confirmar as observações detectadas nas tabelas anteriores, em especial foi confirmada a melhor produção dos alunos de 8ª séries em relação aos alunos de 1ª séries. Na conclusão, apresento uma síntese dessas contribuições.

CAPÍTULO VI : CONCLUSÕES.

Quando comecei a pensar sobre este capítulo, o Governo Federal divulgou, no dia 07/02/2007, os resultados do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio (www.inep.gov.br/imprensa/noticias/enem/news07_02.htm) realizado em 2006 e do SAEB - Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (www.inep.gov.br/imprensa/noticias/saeb/news07_01.htm) realizado em 2005. Dos dados divulgados temos que o ENEM, em sua prova objetiva, teve uma média nacional de 36,9, em uma escala de 0 a 100; em particular, o estado de São Paulo teve uma média de 38,86.

A prova de matemática do SAEB, com uma escala de proficiência variando entre 0 e 500, apresentou para a 8ª série do ensino fundamental, uma média nacional de 239,5 e para o estado de São Paulo, uma média de 242,0. Para a 3ª série do ensino médio a média nacional foi de 270,3 e para o estado de São Paulo a média foi de 272,6.

Esses dados repercutem de forma negativa na imprensa pois estão aquém do desejável. Trago-os aqui para ilustrar que a educação brasileira não vem alcançando seus objetivos de forma satisfatória e, diante disso, os baixos índices encontrados na apresentação de respostas corretas e justificativas completas, em minha pesquisa, desagradam a nós educadores mas não são surpreendentes.

Retomo aqui os resultados mais marcantes da pesquisa, que apontam para um panorama semelhante ao das avaliações oficiais. Eis algumas informações sobre o desempenho de nossa amostra de 1816 alunos de 8ª série ou 1º ano do ensino médio, com relação a duas questões do tema geometria de nosso questionário: 26,3%, tipicamente alunos de 1º ano do ensino médio, não responderam nem justificaram nenhuma das questões; 41,7% apresentaram respostas erradas, acompanhadas de justificativas sem qualquer informação pertinente, para a questão considerada mais difícil; um pequeno grupo (1,9%), tipicamente de alunos de 8ª série, apresentou respostas corretas, acompanhadas de justificativas pertinentes, a ambas as questões.

Como obstáculos para um melhor aproveitamento nas realizações das atividades que compõem essa pesquisa, as análises dos protocolos e as entrevistas apontaram um conjunto de fatores. Destaco: a ausência de conhecimentos geométricos específicos, processos cognitivos insuficientes, em especial a não construção de configurações e a insuficiente utilização de apreensões figurais. Também foi observada, através das entrevistas, a falta de disposição e comprometimento em realizar as atividades.

A análise dos protocolos e as entrevistas apontaram os obstáculos na amostra menor. A análise realizada, através do software CHIC, indica que esses obstáculos podem ser transportados para a amostra maior. De fato, essa análise identificou: apenas 37 alunos (2%) apresentaram resposta correta à questão G4 e com uma boa justificativa (3p ou 2b); dos 611 sujeitos (33,6%) que responderam corretamente a questão G5, 315 (51,6% deles) apresentaram uma justificativa apenas razoável (2a ou 1); 777 alunos (42,8%) não justificaram e não responderam a questão G4; 683 sujeitos (37,6%) não responderam e não justificaram a questão G5. O CHIC confirmou, também, uma melhor produção dos alunos de 8ª séries em relação aos alunos de 1ª séries.

O fato de os alunos de 8ª séries demonstrarem um melhor aproveitamento do que os alunos de 1ª séries, leva-nos a conjecturar que as condições para resolver plenamente as atividades, assumem um caráter temporário, ou seja, os conhecimentos nem sempre são construídos a ponto de se tornarem de domínio pleno pelos sujeitos; pelo contrário, parecem ser encarados como ferramentas a serem utilizadas em um momento e logo descartados.

Nessa pesquisa, nenhum aluno da amostra menor apresentou uma prova formal em sua justificativa. A análise dos protocolos mostrou uma predominância no uso da língua natural e de evidências empíricas tomadas como argumentos. Das 27 justificativas apresentadas à questão G4, temos que: 14 fazem uso da língua natural; 11 justificativas utilizam apenas cálculos; 01 combinou o uso de cálculos e da língua natural; 01 utilizou apenas uma figura. Na questão G5, com relação às 29 justificativas apresentadas observou-se: 18 fazem uso apenas da língua natural; 08 justificativas combinam o uso de língua natural e de representações figurais; 02 usam apenas figuras e 01 utiliza apenas cálculos.

Ficou aparente que os alunos não atribuem um significado à prova na matemática, que para eles a apresentação de uma resposta tem maior valor. Alem disso, aparentemente justificar é uma ação a mais, não necessariamente inerente à determinação da resposta. Porém, esta dissertação não é conclusiva em relação a essa aparência, sendo necessário o suporte de outros trabalhos para torná-la uma afirmação.

Se obstáculos foram identificados, as entrevistas mostraram que através de questionamentos e proposições de ações, a maioria dos alunos entrevistados puderam caminhar em direção às respostas corretas, justificando suas ações e pensamentos. Fizeram uso da língua natural, nas formas oral e escrita, e de representações figurais; não construíram provas formais, mas demonstraram que, se as argumentações e provas não lhes são estruturas constituídas, são potenciais para desenvolvimento. Relataram, entretanto, não serem solicitados a apresentarem justificativas em suas rotinas escolares.

Assim podemos conjecturar que com um trabalho adequado, despreocupados das provas formais e com uma valorização das argumentações empíricas, de experiências cruciais e de exemplos genéricos, apresentados por Ballachef, podemos obter resultados mais significativos. Quero lembrar que na fase 2 do projeto AprovaME, serão aplicadas seqüências de atividades que poderão confirmar (ou derrubar) essa conjectura.

Enquanto a fase 2 não ocorre, e considerando os resultados das entrevistas dessa pesquisa, fica a indicação para inclusão e/ou ampliação de argumentações e provas na educação básica. Tal indicação não se sustenta apenas em minha pesquisa, além das citações mencionadas em capítulos anteriores que apontavam para esse pensamento. Faço referência à Pietropaolo (2005) que, em sua tese, quando aborda as provas e sua importância na formação dos alunos da Educação Básica, afirma:

> "..., os educadores matemáticos (...) consideram importante que o trabalho com provas seja inserido em um movimento que caracterizaria a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação. Para estes, a

> prova na Educação Básica teria um sentido mais alargado e não incluiria necessariamente o status de rigorosa." (PIETROPAOLO, 2005, p. 211).

Em, *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*, Duval (2003) afirma: "A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro". Nesse sentido, em relação à questão G5, durante as entrevistas, quando questionados sobre as respostas e justificativas apresentadas nos protocolos, os alunos responderam de uma forma que parecia haver pouca relação entre os conhecimentos a serem mobilizados e suas produções. No decorrer das entrevistas, constatei que os alunos, ao passarem seus argumentos da forma oral para escrita e para representações figurais, simultaneamente atribuíam significados aos conhecimentos envolvidos. Tal constatação corrobora a indicação de aumentar o espaço para argumentações e provas na educação básica. Conjeturo que, ao argumentar, o aluno estará atribuindo significado e dando um sentido ao conhecimento mobilizado, se afastando assim de tratar o conhecimento como uma ferramenta descartável, como citado acima.

Entre os obstáculos epistemológicos mencionados temos a construção de configurações. Como a apresentação das questões G4 e G5 traz figuras em seus enunciados, a utilização de construção de configurações como processo cognitivo para a resolução dessas questões, está fortemente associada às apreensões figurais. Na análise dos protocolos e nas entrevistas, ficou evidente que, os alunos que apresentaram uma melhor apreensão figural, tiveram mais êxito na apresentação das respostas e justificativas. Assim, conjeturo que um trabalho objetivando o desenvolvimento das apreensões figurais, será um instrumento importante para o tratamento das argumentações e provas em geometria.

No Capítulo III mencionei a rotação e a reflexão como significativas para a resolução das questões G4 e G5. Assim, visando o desenvolvimento pedagógico das apreensões figurais, cito as seguintes indicações do PCNEF, para o trabalho a ser realizado nos 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, respectivamente:

> " - Composição e decomposição de figuras planas.

- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área)." (PCNEF, 1998, p. 73).

"- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro)." (PCNEF, 1998, p. 89)

Sem a preocupação com os aspectos funcionais, temos que as transformações geométricas (reflexão, rotação, translação e homotetia) desempenham um papel formativo importantíssimo para o ensino de geometria e, em especial, para o desenvolvimento das apreensões figurais: perceptiva, discursiva, operatória e seqüencial, descritas por Duval (1995). Se aparentemente o ensino desses tópicos vem sendo relegado a um segundo plano, então faz-se necessário atribuir a eles um maior valor, valorizando seu papel na formação dos alunos.

Para um trabalho com as transformações geométricas e para o desenvolvimento das apreensões figurais, hoje contamos com o auxílio dos ambientes computacionais. Os softwares de geometria dinâmica permitem diferenciar o desenho de uma figura, de sua construção, realçam suas propriedades e conceitos, permitem uma visualização e abstração dos elementos invariantes da figura, propiciam mais agilidade na produção das transformações geométrica e na comparação entre a figura de origem e a transformada.

Tirando o foco das transformações geométricas e direcionando para as relações entre o trabalho com geometria dinâmica e o desenvolvimento de argumentações e provas, cito:

> " ..., há educadores, dentre os quais Hoyles e Jones (1998), que indagam se o uso de ambientes dinâmicos em aulas de Geometria realmente favoreceria os alunos a desenvolverem arcabouços conceituais eficazes para demonstrações, ou se, pelo contrário, dificultariam a transição entre demonstrações informais e formais. Essas pesquisadoras questionam se esses ambientes não poderiam se tornar, na verdade, substitutos das demonstrações." (PIETROPAOLO, 2005, p. 89).

De fato, há a preocupação de que os alunos se contentem com as verificações propiciadas pelos softwares e julguem desnecessárias as provas para validação das afirmativas. Porém, ressalvo que em estudos efetuados pelas duas educadoras mencionadas, elas indicam que o uso da geometria dinâmica associado a tarefas adequadas, pode permitir, aos alunos, uma melhor apreciação a respeito da natureza e propósito das provas.

Se há indicações de adequação das tarefas associadas à geometria dinâmica, também há o consenso de que a motivação para o desenvolvimento de demonstrações, deva partir das necessidades dos alunos; nesse sentido destaco:

> " Alguns educadores defendem que o ensino de Geometria pode ser otimizado pela incorporação de programas de geometria dinâmica, pois estes permitiriam a formulação e reformulação de conjecturas, verificando as verdadeiras e refutando as falsas. Além disso, sustenta a conveniência da negociação na atividade de demonstração, como forma de mostrar aos alunos que não só a vontade de obter certezas é o motor dos matemáticos, mas também o desejo de superar desafios intelectuais. A demonstração decorreria da necessidade do aluno, diante de um problema na tela do computador." (PIETROPAOLO, 2005, p. 88)

Com o exposto, conjeturo que se não permitirmos aos alunos julgarem as verificações como suficientes e sim, os estimularmos a assumirem as provas como necessárias, o trabalho com softwares de geometria dinâmica pode tornar-se um grande aliado para o desenvolvimento de argumentações e provas e para o ensino de geometria, uma vez que, ele também contribui para o desenvolvimento de estruturas cognitivas e de conhecimentos específicos.

A conjetura anterior será confirmada ou refutada na continuidade do projeto AprovaME, pois, temos as ações da fase 2 já descrita. Também, entre os 27 mestrandos, há alguns desenvolvendo suas dissertações a partir da aplicação de seqüências de atividades com o uso de ambientes computacionais. Essas pesquisas, assim como a minha, estão focadas no aluno.

A tese de Pietropaolo inclui, em sua investigação, um foco no professor, peça importante para o desenvolvimento de argumentações e provas. Mas, independentemente da qualidade reconhecida dessa pesquisa, se faz necessário que outras pesquisas investiguem se há uma pratica voltada ao desenvolvimento de argumentos, se e como os professores desenvolvem atividades relacionadas e quais as condições oferecidas para tal. Para mim, não é incomum receber alunos que ignoram as fundamentações dos conhecimentos desenvolvidos e que demonstram ter apenas o interesse em uma fórmula ou regra para aplicação; a tentativa de mudança dessa cultura gera conflitos constantes.

Para finalizar, quero dizer que esta pesquisa aumentou em mim a disposição para solicitar aos meus alunos que justifiquem seus procedimentos, que descrevam suas ações e, confrontem seus argumentos. Na valorização dessas produções podemos contribuir para um desenvolvimento mais significativo do ensino/aprendizagem da matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BICUDO, I. *Demonstração em Matemática*. Bolema, ano 15, nº 18 . Rio Claro: UNESP, 2002. p. 79 - 90.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental - Matemática*. Brasilia: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 13 out. 2006.

_______. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: MEC, 1999.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A Experiência Matemática.* Tradução por João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DOMINGUES, H. H. *A Demonstração ao Longo dos Séculos.* Bolema, ano 15, nº 18 . Rio Claro: UNESP, 2002. p. 55 - 67.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*. Berna: Peter Lang, 1995.

FONSECA, L. *A Demonstração e os Futuros Professores de Matemática da Educação Básica*. ESE de Viana Castelo, 2005. Disponível em: http://www.mytwt.net/cibem5/MyFiles/outros/Lina _Fonseca.pdf. Acesso em: 27 out. 2006.

GARNICA, A. V. M. *As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio.* Bolema, ano 15, nº 18 . Rio Claro: UNESP, 2002. p. 91 - 99.

GRAVINA, M. A. *Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.* Porto Alegre: UFRGS, 2001. Tese de Doutorado.

HOYLES, C. & HEALY, L. (in press). *Curriculum change and geometrical reasoning*. In P. Boero (Ed.), Theorems in school. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2007.

HOYLES, C.; KÜCHEMANN, D.; HEALY, L. & YANG, M. *Students' developing knowledge in a subject discipline: Insights from combining quatitative and qualitative methods.* Int. J. Social Research Methodology, vol.8, nº 3, 2005. p. 225 - 238.

MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, 2003 .

PIETROPAOLO, R. C. *(Re) Significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática.* São Paulo: PUC, 2005. Tese de Doutorado.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, nº 1 (março de 1999).* São Paulo: EDUC, 1999.

SILVA, J. J. da. *Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática.* Bolema, ano 15, nº 18 . Rio Claro: UNESP, 2002. p. 69 - 77.

VILLIERS, M. de. *Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica*. University of Durban-Westville. Disponível em: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html. Acesso em: 17 out. 2006.

ANEXOS

Anexo 1: Questionário de álgebra**.**

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:..

Data de nascimento: .... Data de hoje:................................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma dentre várias respostas.

Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente justificar da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4$ $\quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$ $\quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$ $\quad 4 + 6 = 10$

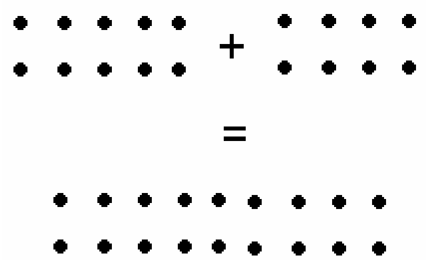
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando se soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?

Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?

Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

Anexo 2: Exemplos para codificação em álgebra**.**

APROVAME	**CODIFICAÇÃO DE QUESTÕES DE ÁLGEBRA**

Exemplos de A3

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?
Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.
Justifique sua resposta.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 0

(Respostas totalmente erradas, respostas que não apresentam justificativas ou exemplos, ou respostas que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um ciclo vicioso).

- Respostas justificando que a afirmação é falsa:

Falsa porque se somar-mos 1 com 3 o resultado é 4 número par ou se somar-mos 67 com 43 que da 110 também número par.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67 \\ 43 \\ \hline 110 \end{array}$$

- Respostas que concordam, mas justificam uma outra afirmação:

Sim, porque ao multiplicar por 2 sempre dara um número par.

- Respostas que apresentam casos empíricos que não envolvem dois números pares:

Justifique sua resposta.
SIM PORQUE JA FOI APROVADA
EX: 104 + 104 = 108

RESPOSTAS QUE RECEBEM 1

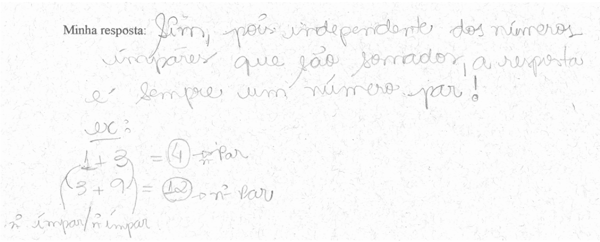
(Alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, respostas que são completamente empíricas.)

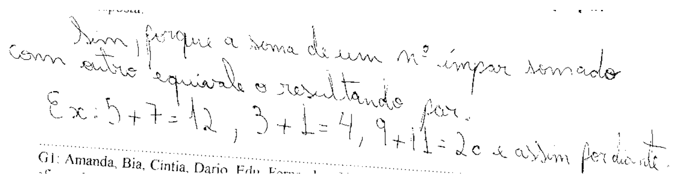
- Respostas apresentando 1 ou mais exemplos

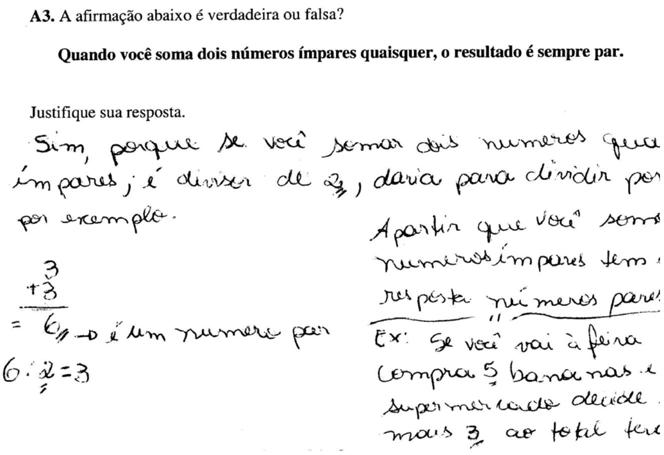
Verdadeira,

5+7 = 12
3+3 = 6
1+1 = 2

101 + 103 = 204


Minha resposta: Sim, pois independente dos números ímpares que são somados, a resposta é sempre um número par!
ex:
1+3 = 4 nº par
(5+9) = 14 nº par
nº ímpar/nº ímpar


Sim, porque a soma de um nº ímpar somado com outro equivale o resultando par.
Ex: 5+7=12, 3+1=4, 9+11=20 e assim por diante.
G1: Amanda, Bia, Cintia, Dario, Edu, ...


A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

Sim, porque se você somar dois numeros que ímpares, é dividir de 2, daria para dividir por por exemplo.

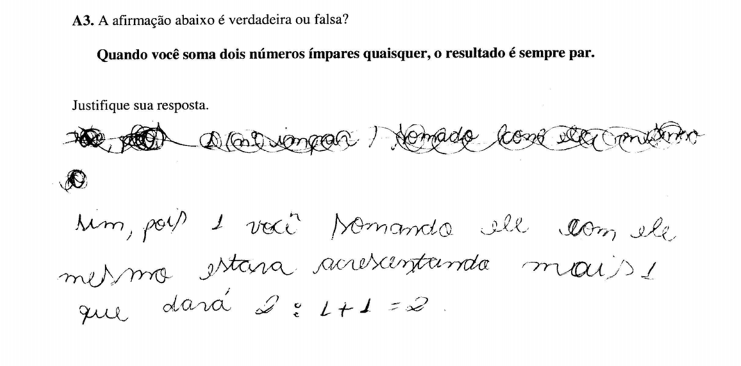
3 + 3 = 6 → é um numero par

6 : 2 = 3

Apartir que você soma numeros ímpares tem a resposta números pares.

Ex: Se você vai à feira compra 5 bananas e supermercado decide mais 3 ao total terá

- A seguinte resposta é 1 porque não é claro se o aluno está fazendo mais que simplesmente adicionando 1 + 1


A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

Sim, pois 1 você somando ele com ele mesmo estara acrescentando mais 1 que dará 2: 1+1=2.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 2A

- Respostas que menciona a "1" que sobra sem sendo muito claro sobre a estrutura de números impares.

Justifique sua resposta.

Verdadeira

Pois sempre quye, você soma dois numeros impares o resultado é par Exemplos

3+3=6

15+15=30

Quando você soma dois números impares quaisquer, ...

Justifique sua resposta. Sim Porque ~~sobra~~ passa um numero a mais do que se fosse par e quando somados são dois formando o numero par.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 2B

- Respostas que dividem números impares em números pares +/- 1, mas usam o mesmo número duas vezes (e.g. 3 + 3) em todos os exemplos.

A afirmação é verdadeira.

Ao somar dois números ímpares, soma-se uma unidade de ímpar de cada porcela:

$3+3=(2+1)+(2+1)=(2+2)+(1+1)=6$

$35+35=(34+1)+(34+1)=(34+34)+(1+1)=70$

$97+97=(96+1)+(96+1)=(96+96)+(1+1)=194$

Justifique sua resposta.

Sim, porque 5 + 5 é 10

Ex: tira o maximo de numeros pares do 5, é 4 então fica 4+4 e sobra

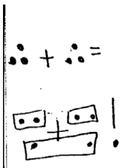
1+1, é 4+4 = 8 par

1+1 = 2 par

o resoltado é sempre par

RESPOSTAS QUE RECEBEM 3

- Respostas que explicam bem a estrutura de números impares em termos gerais, mesmo illustrando suas falas com duas números iguais.



Se um número é ímpar, conclui-se que este, ao ser desmembrado em pares (de 2 em 2), se agrupa, e SEMPRE sobrará 1, independente do nº, pois é isso é o que o faz ser ímpar.

Podemos então agrupar parceladamente este número, para facilitar, da seguinte forma: transformando ambos em números pares, subtraindo 1 que é o que o faz ser ímpar! = PAR + PAR = PAR

Sempre sobrarão então, 1 de cada número. Estes, se unem e formam um par por si próprios, e então se juntam ao total, totalizando sempre então, um número par.

Exemplos de A4

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?
Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.
Justifique sua resposta.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 0

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

se multiplicar

3×6=18
ou
6×3=18

Vai dar a mesma resposta!
Sim, se você multiplicar com os mesmos números dará o mesmo resultado

Justifique sua resposta.

NÃO PORQUE PODE ACONTECER DE NÃO DAR MULTIPLOS DIFERENTES.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 1

- Respostas apresentando 1 ou mais exemplos

3	6		33	54	51
6	12		36	27	54
9	18	51.	42	81	57
12	24		48		60
15	30		51.		63
18	36				66
21	42				69
24	48				72
27	54				75
30.	60.				78
					81

Verdadeira se somar-mos, por exemplo 15 com 60 obteremos 75 e se multiplicarmos 3 por 25 obteremos esse valor.

75 | 3
15   25
0

- Respostas que apenas colocam que 6 é um múltiplo de 3.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta. Sim porque seis é um múltiplo de três

RESPOSTAS QUE RECEBEM 2A

- Respostas que explicam que múltiplos de seis são sempre múltiplos de três, em termos gerias, mas não apresentam informação sobre sua soma.

Justifique sua resposta.

Porque seis é múltiplo de três e então todos seus múltiplos são de três também.

Sim, porque o seis é divisor de três e sendo assim todos os seus números também são

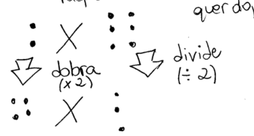
Justifique sua resposta.

A afirmação é verdadeira, pois todo múltiplo de seis é obrigatoriamente múltiplo de três (e dois)

6 : 3 = 2 660 : 3 = 220
6 : 6 = 1 660 : 6 = 110

Justifique sua resposta.

Verdadeira, afinal todo múltiplo de 6, é múltiplo de 3! Só "dobra" o número de vezes que o 3 deve ser multiplicado, já que 3 é a METADE de 6!
É apenas um jogo de números, onde a alteração feita do lado direito, compensa a do esquerdo, e vice versa.



RESPOSTAS QUE RECEBEM 2B OU 3

Não tenho exemplos nos protocolos aqui, 2b seria como 2a, apenas com referencia a soma e 3 argumentos que justificam totalmente a afirmação.

Exemplos de A5

- **A5:** Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

f) **5!** é um número par?
c) **8!** é um múltiplo de 21?
d) **62!** é um múltiplo de 37?

RESPOSTAS QUE RECEBEM 0

a) **5!** é um número par? NÃO
Justifique

PORQUE O RESULTADO E PAR

a) **5!** é um número par?
Justifique
não, 5 está na categoria dos números impar

h) 8! é um múltiplo de 21 ?

Justifique
Não porque no conjunto 8, 21 não aparece múltiplo. 21 seria múltiplo de 3.

i) 62! é um múltiplo de 37 ?

Justifique
Não porque 62 não é multiplo de 37.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 3C

Sim, pois multiplica-se: 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

Sim, porque fazendo todas as multiplicações se encontra um resultado par.

Justifique
Sim, pois 5x4 = 20 x 3 = 60 x 2 = 120 x 1 = 120.
e 120 é numero par.

Justifique Sim 5 . 4 = 20 = par
20 . x = par!

$2 \cdot x = \frac{2x}{par}$

5 . 4 . 3 . 2 . 1
par par par par
20 60 120 120

Justifique
Sim. Pois uma vez que interferimos um número par em uma multiplicação, seu produto sempre será par.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 3P

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?

Justifique

Sim pois 8! é 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 e no meio disso há o produto 7 x 3 o que faz dele um múltiplo de 21

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique
8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1
Sim, Ele é multiplo de 21, pois não precisa necessariamente, começar a multiplicação pelo 8

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

Sim, pois 37x1 torna 62! um múltiplo do pro duto, 37.

(A5 (d) a verdade deve ser codificada como 3, 3P não e preciso pois o valor do 62! e grande demais a ser calculado).

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.
Justifique.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 0

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

0 (ZERO)
Porque apartir das respostas do item (a) e do item (b) percebi que sempre termina por 0, porque 0(zero) multiplicado por qualquer numero sempre da 0(zero)

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

7 e porque eu gosto desse numero

RESPOSTAS QUE RECEBEM 2A

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

0, 2, 4, 6 e 8

Justifique

pois sempre a última multiplicação será "2x1" que é igual a "2" e todo número multiplicado por 2 é um número par

RESPOSTAS QUE RECEBEM 3

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

0

Justifique

pois o resultado do 5! é terminado em 0 e a partir daí, qualquer número multiplicado por ele, termina em zero (0)

Anexo 3: Exemplos para codificação em geometria.

CODIFICAÇÃO DE QUESTÕES DE GEOMETRIA

Exemplos de G3

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

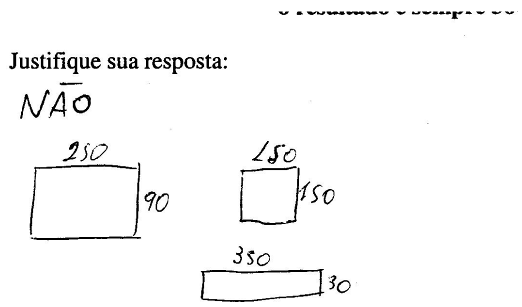
Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360°.

Justifique sua resposta.

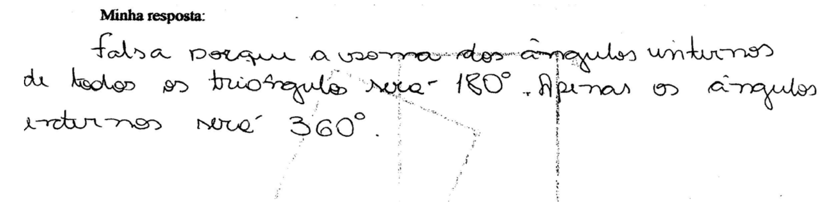
RESPOSTAS QUE RECEBEM 0

(Respostas totalmente erradas, respostas que não apresentam justificativas ou exemplos, ou respostas que simplesmente repetem o enunciado caracterizando um ciclo vicioso).

- Respostas justificando que a afirmação é falsa:



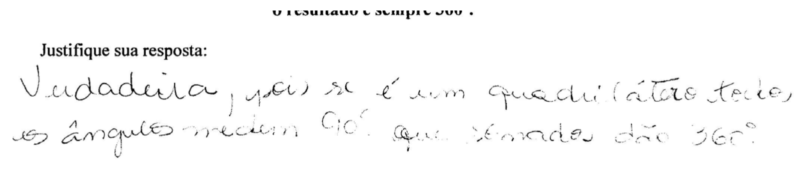
- Respostas que não respondem a afirmação dada.


Minha resposta:
falsa porque a soma dos ângulos internos de todos os triângulos será 180°. Apenas os ângulos externos será 360°.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 1

(Alguma informação pertinente, mas sem deduções ou inferências – por exemplo, respostas que são completamente empíricas.)

- Respostas apresentando 1 ou mais exemplos (normalmente retângulos ou quadrados)


Justifique sua resposta:
Verdadeira, pois se é um quadrilátero todos os ângulos medem 90°, que somados dão 360°

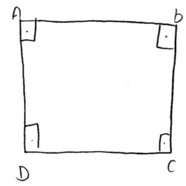
Verdadeira

Minha resposta:

Pois se cada angulo for reto então.

$A+b+c+d=360°$

$90°+90°+90°+90°=360°$



RESPOSTAS QUE RECEBEM 2A

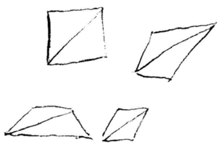
- Não tenho exemplos nos meus protocolos

RESPOSTAS QUE RECEBEM 2B

- Respostas que contem as informações necessárias, mas deixam duvidas sobre o ponto de partido (partir do que era de prova??):

Justifique sua resposta:

O triângulo é a metade de um quadrilátero portanto a soma dos seus ângulos internos será a metade da soma dos angulos interno do quadrilátero



$\frac{360°}{2} = 180°$

- Respostas que contem as informações necessárias, mas nas quais não é claro se eles são falando sobre o caso geral ou casos específicos:

Minha resposta:

Um retângulo é um quadrilátero que possui quatro ângulos de 90°, somando 360° graus. O mesmo ocorre com o quadrado, somente diferente por possuir 4 lados iguais.
Todos os quadriláteros, podem ser fragmentados e transformados em um retângulo, que como foi dito, possui 360 graus da soma dos ângulos internos, pois pode ser dividido em 2 triângulos, cada qual com 180.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 3

- Respostas que modificam corretamente o argumento apresentado pelo Edu (não tenho exemplos nos meus protocolos).

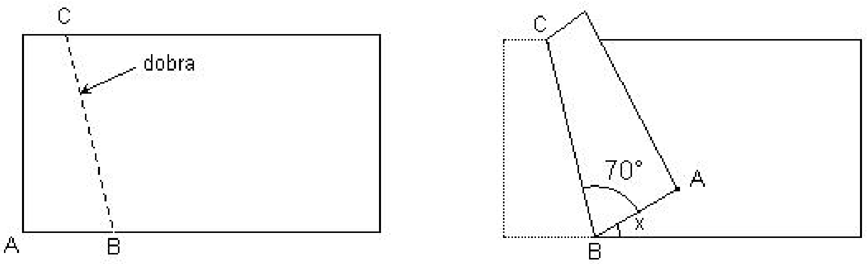
- Respostas explicando como quadriláteros podem ser divididos em duas triângulos por um diagonal (mesmo não sendo muito explicito sobre o diagonal):

Minha resposta:

Verdadeira, pois com um quadrilátero pode se formar dois triângulos de 180°.

Exemplos de G4

G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.

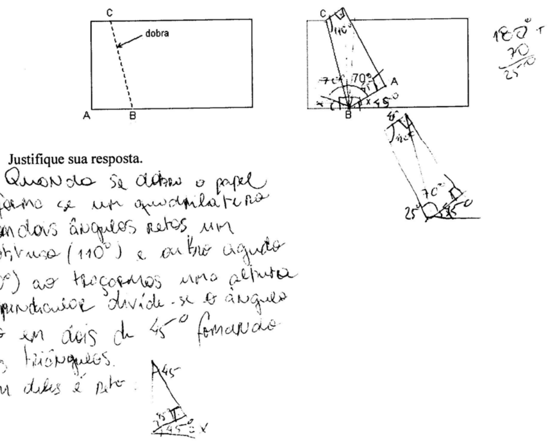


Justifique sua resposta.

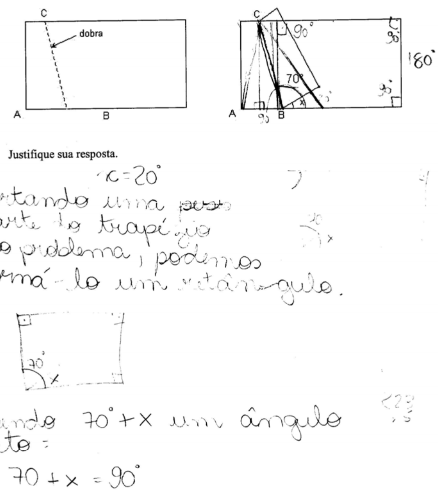
.

R*ESPOSTAS QUE RECEBEM *0

- Respostas que inventam propriedades não pertinentes o valor do x:


Justifique sua resposta.

Quando se dobra o papel forma-se um quadrilátero com dois ângulos retos um obtuso (110°) e outro agudo (70°) ao traçarmos uma altura perpendicular divide-se o ângulo reto em dois de 45° formando dois triângulos. E um deles é reto.


Justifique sua resposta.

x=20°

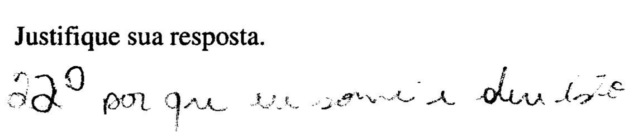
Cortando uma parte do trapézio do problema, podemos torná-lo um retângulo.

Sendo 70°+x um ângulo reto:

70 + x = 90°

x = 20°

- Respostas que parecem "chutes"


Justifique sua resposta.

22° por que eu somei e deu isso

RESPOSTAS QUE RECEBEM 1

- Não tenho exemplos nos meus protocolos.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 2A

- Não tenho exemplos nos meus protocolos.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 2B

- Respostas que apresentam as informações necessárias mas incluíam um erro nos cálculos (não tenho exemplo aqui, mas imagine 180 – (2 x 70) = 30).

RESPOSTAS QUE RECEBEM 3C

- Respostas corretas que não explicitam as propriedades usadas:

Justifique sua resposta.

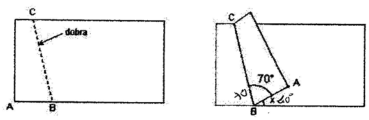
$70° + 70° + x = 180°$

$140° + x = 180°$

$x = 40°$

RESPOSTAS QUE RECEBEM 3P

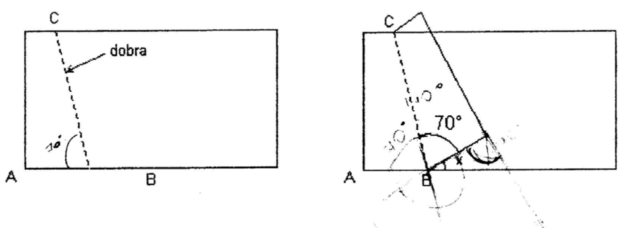
- Respostas corretas que são mais explicitam sobre as propriedades usadas:



Justifique sua resposta.

x. Será 40° graus porcausa que o restantonte de 70° ~~[illegible]~~ graus. Será 70° + 70° = 140° = faltou 40° para complitar 180°. Por isso x ficou 40°.

G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



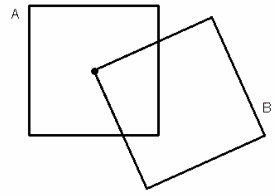
Justifique sua resposta.

Se virar-mos a folha [illegible] uma reta colaterais, contrárias, [illegible] e então x = 40°

Exemplos de G5

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

RESPOSTAS QUE RECEBEM 0

- Respostas que inventam respostas estranhas:

Justifique sua resposta

75° porque e calculei esse numero

RESPOSTAS QUE RECEBEM 1

- Respostas que identifiquem a fração de ¼ e trazem mais alguma informação, mas não sendo muito claro o argumento:

Justifique sua resposta

$\frac{1}{4}$: porque se arrumar corretamente o quadrado B no quadrado A perceberá que o B ficará no meio do A. por isso ficará $\frac{1}{4}$.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 2A

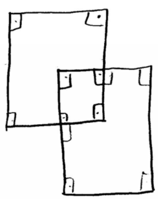
- Respostas que mostram alguma maneira de visual esta fração de ¼, mas que não falar de congruência ou indicam isso em alguma maneira:

Justifique sua resposta

Porque supondo que houvessem outros quadros com vértices no centro de A eles dividiriam com o quadrado B o quadrado A em 4

Justifique sua resposta

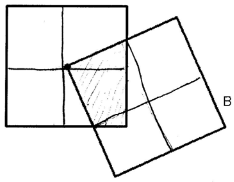
$\frac{1}{4}$ pois o Quadrado só esta torto.



Pois se cada angulo dos dois quadrados ocupam 90°.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 2A

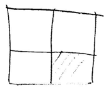
- Respostas que mostram alguma maneira de visual esta fração de ¼ e também tentam justificar a congruência em alguma maneira "informal":

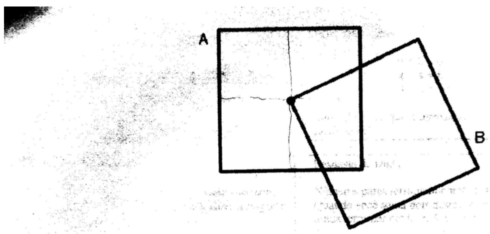


Justifique sua resposta

$\frac{1}{4}$

Dividindo cada quadrado por 4, ficará faltando um pequeno pedaço que é exatamente o espaço sobressalente no quadrado de cima Portanto, uma parte fica inteira, ou seja $\frac{1}{4}$



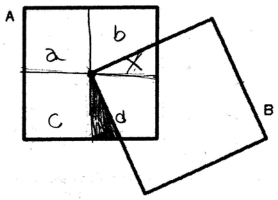


Justifique sua resposta

$\frac{1}{4}$ do quadrado A porque se eles estivessem assim é a mesma coisa que se eles estão assim.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

$\frac{1}{4}$ porque se ele dividir o quadrado A em quatro partes iguais a, b, c e d e retirar o triângulo retângulo que está na parte b e encaixar ele na parte que sobrou da parte "d" ele vai preencher um quarto.

RESPOSTAS QUE RECEBEM 3

- Não tenho um exemplo, seria uma resposta na qual a congruência dos triângulos estava completamente justificada

Anexo 4: Planilha com os dados da amostra menor.

		G4							G5					
		Resposta	Justificativa						Resposta	Justificativa				
Nº	Aluno		0	1	2a	2b	3c	3p		0	1	2a	2b	3
1	Agnes	40	0	0	0	0	1	0	¼	0	0	1	0	0
2	Alyne	20	1	0	0	0	0	0	0,25	0	0	1	0	0
3	Ana Luiza	180	-2	-2	-2	-2	-2	-2	1/3	1	0	0	0	0
4	Anderson	70	1	0	0	0	0	0	0,5	1	0	0	0	0
5	André	110	1	0	0	0	0	0	¼	0	1	0	0	0
6	Angélica	15	1	0	0	0	0	0	0,25	0	1	0	0	0
7	Bruna	20	1	0	0	0	0	0	-2	1	0	0	0	0
8	Bruno	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
9	Caio	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	Camila	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0.25	-2	-2	-2	-2	-2
11	Daiane	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
12	Daniela A	-2	1	0	0	0	0	0	¼	0	1	0	0	0
13	Daniela M	30	1	0	0	0	0	0	¼	0	1	0	0	0
14	Daniele	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
15	Danielle	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-2	-2
16	Debora	70º	1	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2
17	Erick	30°	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-1	-1	-1
18	Felipe	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
19	Flávia	20	1	0	0	0	0	0	0.33	-2	-2	-2	-2	-2
20	Gabriel	30	1	0	0	0	0	0	¼	-2	-2	-2	-2	-2
21	Isadora	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	¼	0	0	1	0	0
22	Isaias	30	1	0	0	0	0	0	¼	0	1	0	0	0
23	Jefferson	-2	1	0	0	0	0	0	0,5	-2	-2	-2	-2	-2
24	Joice	110	1	0	0	0	0	0	0,25	0	0	1	0	0
25	Karina	Verdadeira	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0,25	-2	-2	-2	-2	-2
26	Leandro H	110-y	0	1	0	0	0	0	0,25	0	0	0	1	0
27	Leandro B	30	1	0	0	0	0	0	¼	0	0	0	1	0
28	Letícia F.	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
29	Lucas da S.	2,5	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
30	Lucas H.	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0,25	1	0	0	0	0
31	Marcelle	20	1	0	0	0	0	0	¼	0	0	1	0	0
32	Marcelo	20	1	0	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0	1
33	Mariana	30	1	0	0	0	0	0	¼	0	0	1	0	0
34	Mariana Elisete	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
35	Maryann	30	1	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2
36	Mayara	40	-2	-2	-2	-2	-2	-2	190	1	0	0	0	0
37	Nelson	-2	1	0	0	0	0	0	0,25	0	0	1	0	0
38	Pedro	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	¼	-1	-1	-1	-1	-1
39	Priscilla	x	1	0	0	0	0	0	X	1	0	0	0	0
40	Rebeca	20	1	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
41	Renata	30	1	0	0	0	0	0	0,25	0	0	1	0	0
42	Renato	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0,25	0	0	0	1	0
43	Samirah	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
44	Sergio	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0,25	0	1	0	0	0
45	Silene	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0,25	0	0	1	0	0
46	Talita	70	1	0	0	0	0	0	-2	1	0	0	0	0
47	Tatiane	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	90º	-2	-2	-2	-2	-2
48	Thaiane	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0,25	0	1	0	0	0
49	Vinícius	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
50	Walmir	70	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Anexo 5: CHIC - Índices de similaridade e contribuição dos indivíduos**.**

Árvore de similaridade.

Classificação ao nível: 1 : (RG4 40° JG4 3p) similaridade : 1

Classificação ao nível: 2 : ((RG4 40° JG4 3p) JG4 2b) similaridade : 0.999999

Classificação ao nível: 3 : (RG5 ¼ JG5 2a) similaridade : 0.977704

Classificação ao nível: 4 : ((RG5 ¼ JG5 2a) JG5 1) similaridade : 0.951256

Classificação ao nível: 5 : (RG5 N JG5 N) similaridade : 0.897685

Classificação ao nível: 6 : (RG4 N JG4 N) similaridade : 0.888344

Classificação ao nível: 7 : (RG4 30° JG4 0) similaridade : 0.821967

Classificação ao nível: 8 : (((RG4 40º JG4 3p) JG4 2b) ((RG5 ¼ JG5 2a) JG5 1)) similaridade : 0.783209

Classificação ao nível: 9 : (RG5 ½ JG5 0) similaridade : 0.726618

Classificação ao nível: 10 : ((RG4 30° JG4 0) RG4 70°) similaridade : 0.656834

Classificação ao nível: 11 : ((((RG4 40º JG4 3p) JG4 2b) ((RG5 ¼ JG5 2a) JG5 1)) JG5 2b) similaridade : 0.610654

Classificação ao nível: 12 : (RG5 ⅓ (RG5 ½ JG5 0)) similaridade : 0.521301

Classificação ao nível: 13 : (((RG4 30° JG4 0) RG4 70°) RG4 OU) similaridade: 0.475318

Classificação ao nível: 14 : ((((RG4 30° JG4 0) RG4 70°) RG4 OU) RG4 110°) similaridade : 0.356229

Classificação ao nível: 15 : ((RG4 N JG4 N) (RG5 N JG5 N)) similaridade : 0.290773

Classificação ao nível: 16 : ((((RG4 30° JG4 0) RG4 70°) RG4 OU) RG4 110°) RG4 20°) similaridade : 0.252947

Classificação ao nível: 17 : (((RG5 ⅓ (RG5 ½ JG5 0)) RG5 OU) similaridade : 0.239672

Classificação ao nível: 18 : ((((RG4 40º JG4 3p) JG4 2b) ((RG5 ¼ JG5 2a) JG5 1)) JG5 2b) JG5 3) similaridade : 0.0891711

Classificação ao nível: 19 : (((((RG4 40º JG4 3p) JG4 2b) ((RG5 ¼ JG5 2a) JG5 1)) JG5 2b) JG5 3) JG4 2a) similaridade : 0.0498747

Contribuição à classe : RG4 40°, JG4 3p (1)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.0993

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.88

A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.0993

Contribuição à classe : RG4 40°, JG4 3p, JG4 2b (1,2)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.101

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.878

A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.101

Contribuição à classe : RG5 $^1/_4$, JG5 2a (3)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.56

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.445

A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.445

Contribuição à classe : RG5 $^1/_4$, JG5 2a, JG5 1 (3,4)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.0611

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.921

A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.0611

Contribuição à classe : RG5 N, JG5 N (5)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.778

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.242

A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.242

Contribuição à classe : RG4 N, JG4 N (6)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.484

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.515

A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.484

Contribuição à classe : RG4 30°, JG4 0 (7)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.332

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.655

A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.332

Contribuição à classe : RG4 40º, JG4 3p, JG4 2b, RG5 $\frac{1}{4}$, JG5 2ª, JG5 1 (1,2,3,4,8)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.0381
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.947
A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.0381

Contribuição à classe : RG5 $\frac{1}{2}$, JG5 0 (9)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.932
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.0869
A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.0869

Contribuição à classe : RG4 30°, JG4 0, RG4 70° (7,10)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.449
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.547
A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.449

Contribuição à classe : RG4 40º, JG4 3p, JG4 2b, RG5 $\frac{1}{4}$, JG5 2a, JG5 1, JG5 2b (1,2,3,4,8,11)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.0561
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.927
A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.0561

Contribuição à classe : RG5 $\frac{1}{3}$, RG5 $\frac{1}{2}$, JG5 0 (9,12)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.952
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.0646
A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.0646

Contribuição à classe : RG4 30°, JG4 0, RG4 70°, RG4 OU (7,10,13)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.324
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.662
A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.324

Contribuição à classe : RG4 30°, JG4 0, RG4 70°, RG4 OU, RG4 110° (7,10,13,14)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.492
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.507
A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.492

Contribuição à classe : RG4 N, JG4 N, RG5 N, JG5 N (5,6,15)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.937
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.0806
A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.0806

Contribuição à classe : RG4 30°, JG4 0, RG4 70°, RG4 OU, RG4 110°, RG4 20° (7,10,13,14,16)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.824
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.198
A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.198

Contribuição à classe : RG5 $^1/_3$, RG5 $^1/_2$, JG5 0, RG5 OU (9,12,17)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.989
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.0182
A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.0182

Contribuição à classe : RG4 40º, JG4 3p, JG4 2b, RG5 $^1/_4$, JG5 2a, JG5 1, JG5 2b, JG5 3 (1,2,3,4,8,11,18)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.0607
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.921
A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.0607

Contribuição à classe : RG4 40º, JG4 3p, JG4 2b, RG5 $^1/_4$, JG5 2a, JG5 1, JG5 2b, JG5 3, JG4 2a (1,2,3,4,8,11,18,19)
A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.0223
A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.967
A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.0223

Árvore coesitiva.

Classificação ao nível: 1 : (JG4 3p RG4 40°) Coesão : 1

Classificação ao nível: 2 : (JG5 2a RG5 ¼) Coesão : 0.996

Classificação ao nível: 3 : (RG5 N JG5 N) Coesão : 0.896

Classificação ao nível: 4 : (RG4 30° JG4 0) Coesão : 0.892

Classificação ao nível: 5 : (JG4 N RG4 N) Coesão : 0.86

Classificação ao nível: 6 : (RG5 ½ JG5 0) Coesão : 0.792

Classificação ao nível: 7 : ((RG5 N JG5 N) (JG4 N RG4 N)) Coesão : 0.542

Contribuição à classe : JG4 3p, RG4 40° (1)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.0993

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.88

A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.0993

Contribuição à classe : JG5 2a, RG5 ¼ (2)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.56

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.445

A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.445

Contribuição à classe : RG5 N, JG5 N (3)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.778

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.242

A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.242

Contribuição à classe : RG4 30°, JG4 0 (4)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.332

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.655

A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.332

Contribuição à classe : JG4 N, RG4 N (5)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.484

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.515

A variável que contribui mais a esta classe é 8S com um risco de : 0.484

Contribuição à classe : RG5 $^{1}/_{2}$, JG5 0 (6)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.932

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.0869

A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.0869

Contribuição à classe : RG5 N, JG5 N, JG4 N, RG4 N (3,5,7)

A variável 8S contribui a esta classe com um risco de : 0.736

A variável 1S contribui a esta classe com um risco de : 0.282

A variável que contribui mais a esta classe é 1S com um risco de : 0.282