ALVESMAR FERREIRA DA SILVA FILHO

DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA SOBRE QUADRILÁTEROS E SUAS PROPRIEDADES: CONTRIBUIÇÕES DE UM GRUPO COLABORATIVO

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2007

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

ALVESMAR FERREIRA DA SILVA FILHO

DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA SOBRE QUADRILÁTEROS E SUAS PROPRIEDADES: CONTRIBUIÇÕES DE UM GRUPO COLABORATIVO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profª. Drª**. Siobhan Victoria (Lulu) Healy.*

PUC/SP
São Paulo
2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe e aos meus irmãos, que são as pessoas mais importantes da minha vida.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Lulu Healy, pelo seu trabalho de orientação, desenvolvido com muita competência, dedicação e principalmente paciência.

À Professora Doutora Ana Paula Jahn e a Professora Doutora Mônica Rabello de Castro, pelas sugestões, comentários e críticas que muito contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, que foram muito importantes para a minha formação.

À Direção da Escola Estadual “Prof. Humberto Victorazzo” por autorizar a utilização de suas dependências para a aplicação da seqüência didática.

Às dedicadas professoras de Matemática, Izabel Alexandre Vilela e Eliane Moreira, pela participação e apoio no desenvolvimento deste trabalho.

À professora de Língua Portuguesa Kátia Germak Kostura Machado, que colaborou na revisão deste texto.

À professora Magda Cristina Fulan Bellini, pela sua amizade e por acreditar no meu trabalho.

Aos colegas do grupo AProvaME, pela paciência e compreensão durante nossos encontros.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, pela bolsa de estudos que permitiu a realização deste trabalho.

A todos os amigos do grupo da coordenação, de 2002 a 2004, da rede municipal de ensino de São Roque, pelo incentivo e amizade.

A todos os demais amigos, que de uma forma ou de outra me ajudaram durante a realização deste trabalho.

À minha família, que compreendeu minha ausência durante a realização deste trabalho.

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo envolver um grupo de professores da Matemática de uma mesma escola no desenvolvimento de uma seqüência didática sobre quadriláteros e suas propriedades. Inspirado nos objetivos do projeto AprovaME (Argumentação e Prova na Matemática Escola), resolvemos organizar um grupo colaborativo na escola onde trabalhamos, com a intenção de criar um espaço que possibilitasse a discussão sobre o tema dessa pesquisa: o ensino e aprendizagem de prova.

Antes de iniciar as reuniões do grupo, concebemos uma primeira versão de uma seqüência didática para servir como base para as discussões. A elaboração das atividades da seqüência foi baseada nos trabalhos de Parsysz (2000) sobre o ensino de Geometria em geral e, mais especialmente, as partes referentes à justificativa e prova foram baseadas nas perspectivas sobre tipos de provas e suas funções de Balacheff (1988) e De Villiers (2001). Em seguida, convidamos duas professoras da Matemática para formarem, juntamente com o pesquisador/professor, um grupo colaborativo no qual realizamos, discutimos e, na medida necessária, modificamos as atividades propostas, inicialmente, na seqüência.

A partir de levantamento inicial das concepções das professoras sobre provas e seu ensino, identificamos que provas não representam um tópico com qual as professoras sentiam-se muito seguras e, em particular, ambas indicaram que esperavam que seus alunos apenas entendessem provas de natureza pragmática. Assim, a contribuição mais significativa da participação delas nos encontros do grupo colaborativo foi a possibilidade de refletir sobre estratégias de ensino que pudessem facilitar a passagem de provas pragmáticas a provas conceituais.

Palavras-chave: Argumentação, prova, propriedades de quadriláteros, grupo colaborativo.

ABSTRACT

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

APRESENTAÇÃO

No decorrer de muitos anos no magistério, no ensino de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio; e, ainda, na experiência como coordenador na área de Matemática do município de São Roque, notamos a grande dificuldade dos alunos e dos professores no que se refere ao ensino de Geometria e essa dificuldade aumenta quando se trata de argumentar ou demonstrar propriedades.

Durante o curso de Mestrado Profissional surgiram em vários momentos oportunidades de contemplar estas dificuldades, que tentavam compreender porque tanto professores quanto alunos experenciam esta área do currículo da Matemática como problemática e quais ações poderiam ajudar a superação de pelo menos parte destas dificuldades.

A primeira oportunidade emergiu ao cursar a disciplina de Tópicos de Geometria, quando realizamos um trabalho proposto pelo professor – *Uma seqüência didática para a introdução dos quadriláteros notáveis.* Visando a realização deste, fizemos um estudo sobre os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por Bernard Parsysz (2000) e, ainda, utilizamos as definições de quadriláteros propostas por Euclides, Legendre e Hadamard, apresentadas no artigo de Vincenzo Bongiovanni (2004). O estudo, citado, despertou-nos o interesse em basear o trabalho final do Mestrado no ensino de Geometria e, mais especificamente, no trabalho com argumentação e demonstração no currículo escolar.

Parte do nosso trabalho envolve então compartilhar essa seqüência didática com as devidas alterações com professores de Matemática do Ensino

Fundamental e Médio, da minha própria escola, com o intuito de incentivar uma discussão sobre o tema com meus colegas e escola, possibilitando aos professores expressarem e talvez modificarem suas concepções sobre o ensino e aprendizagem da argumentação e demonstração no campo da Geometria.

Depois do curso de Geometria, tive despertado o interesse em preparar atividades que pudessem contribuir para o processo ensino/aprendizagem, surgiu uma segunda oportunidade quando, nós, mestrandos, fomos convidados a participar do projeto denominado "AProvaME" (Argumentação e Prova na Matemática Escolar). Foi quando decidi fazer parte deste grupo, o que para mim foi um privilégio, pois durante as reuniões, dedicamos um tempo aos estudos sobre argumentação, demonstração e aos diferentes tipos de provas.

A nossa participação neste grupo contribuiu muito para a realização deste trabalho, principalmente para terceira parte da seqüência didática, onde trabalhamos com demonstrações de algumas propriedades dos quadriláteros.

AProvaME – Argumentação e Prova na Matemática Escolar – é um projeto do Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM) do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. O projeto é coordenado pela professora Drª. Siobhan Victoria Healy e desenvolvido por uma equipe de professores pesquisadores da PUC/SP, juntamente com um grupo de 26 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática do referido Programa.

O projeto foi organizado em duas fases; a primeira envolveu um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), por meio da aplicação de dois questionários (Anexo 1), um composto por questões de álgebra e outro por questões de geometria, cujos resultados subsidiaram a segunda fase, que se constituiu na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Para esta fase, o grupo foi subdividido em equipes; cada equipe teve dois conteúdos matemáticos a serem tratatos e chegarmos a situações que poderão ser aplicadas a alunos, conforme andamento do projeto.

Os objetivos da pesquisa do projeto AProvaME são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado de São Paulo.

2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.

3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.

4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.

5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos

fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.

6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.

7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

Inspirado no segundo item dos objetivos acima, foi que resolvemos realizar o trabalho final, com a participação de um grupo de professores; porém, em vez do espaço da PUC, decidimos organizar um grupo colaborativo na escola onde trabalho, com a intenção de criarmos um espaço que nos possibilitasse a discussão sobre os temas dessa pesquisa, e que pudéssemos expressar nossas dúvidas e dificuldades no ensino de Matemática.

Tivemos, também como meta, neste trabalho final, o cumprirmento do item quarto dos objetivos do projeto AProvaME. Assim, tivemos o objetivo de trabalhar a seqüência didática construída com professores, para que eles pudessem opinar sobre a viabilidade da aplicação dessa seqüência em alunos que ainda tenham pouco ou nenhum conhecimento sobre os quadriláteros e suas propriedades e verificar até que ponto é possível, com ela, fazer com que o ensino desse tema possa ser melhor explorado, desenvolvendo no aprendiz maior facilidade em demonstrar as propriedades ou afirmações que necessitem de provas.

A seqüência didática, trabalhada com os professores, teve como objetivo investigar suas concepções sobre os quadriláteros e as demontrações. Após análise de sua aplicabilidade, esses professores puderam, então, realizar alterações na seqüência didádica; assim, esta proposta poderá ser sugerida a um grupo de alunos.

Para que esta pesquisa se concretizasse, passamos por três fases: na primeira, elaboramos os estudos preliminares, que consideramos relevantes para que a experimentação ocorresse. Na segunda fase, sucedeu a experimentação e, na terceira, analisamos os resultados obtidos na etapa anterior, articulando e confrontando esses resultados com os estudos da primeira fase.

As fases dessa pesquisa desenvolveram-se em quatro capítulos: no Capítulo 1, traremos algumas considerações que julgamos importantes para o ensino de demonstração e prova, baseadas nos estudos de De Villiers (2001) e Balacheff (1988). E, ainda, trataremos das classificações dos quadriláteros, propostas por Euclides, Legendre e Hadamard e, apresentaremos o quadro teórico do ensino de Geometria proposto por Parsysz (2000), pois será nele que o desenvolvimento da seqüência didática estará embasado.

No Capítulo 2, descreveremos a metodologia da pesquisa: a prosposta e o objetivo da seqüência didática, e os professores participantes, os procedimentos relativos à aplicação da seqüência, o plano de trabalho com os professores e a seqüência didática com uma análise *a priori.*

No Capítulo 3, apresentaremsos a nossa análise sobre as interações das professoras durante os encontros no grupo colaborativo. Apresentaremos as justificativas que as professoras deram as suas notas atribídas às respostas dos dois itens, do questionário, trabalhados na fase 1 do projeto AprovaME. Com os resultados obtidos durante a aplicação da seqüência didática, relataremos sobre a resolução de suas atividades e as alterações propostas pelo grupo.

O Capítulo 4 trará nossas considerações finais, tentando responder se nossa seqüência didática apresentou ou não uma boa situação de ensino/aprendizagem do tema prova.

Capítulo 1

PROVAS E O ENSINO DE GEOMETRIA

As pesquisas feitas sobre o ensino-aprendizagem da geometria, de acordo com nosso estudo preliminar, mostraram algumas dificuldades que os alunos encontram na aquisição dos conceitos geométricos. Podemos destacar entre outros problemas, aqueles gerados pela ausência do aprendizado dos processos da demonstração.

Este capítulo está dividido em duas seções; na primeira, traremos algumas considerações que julgamos importante para o ensino de argumentação e prova. Na segunda, trataremos das classificações dos quadriláteros e do quadro teórico do ensino de Geometria proposto por Parsysz (2000).

1.1 ARGUMENTAÇÃO, DEMONSTRAÇÃO E PROVA

Nesta seção, traremos um embasamento teórico sobre argumentação, demonstração, prova e os diferentes tipos de provas. E, ainda, verificaremos quais são as recomendações dos PCN em relação à demonstração e prova nos ensinos Fundamental e Médio.

Segundo Douek e Pichat (2003, p. 53): *“A argumentação Matemática pode ser caracterizada como um tipo peculiar de argumentação, que lida com objetos matemáticos e habilidades (incluindo habilidades lógicas gerais que são relevantes no discurso matemático, como a orientação do raciocínio hipotético).”*

Acreditamos que, para o aluno, o primeiro passo a ser dado em direção da realização de uma prova, é a argumentação, que pode ser realizada de modo informal, utilizando uma linguagem natural. Para tanto, é necessário uma interação entre professor e aluno, onde o professor possa subsidiar seu aluno, dando a ele indícios de como argumentar, por meio de discussões e de indicações de fragmentos de textos que ajudam esse aluno a escrever um texto argumentativo sem lhe fornecer o texto totalmente pronto, desenvolvendo, então, habilidades lógicas gerais tão relevantes no discurso matemático, como citado por Douek e Pichat (2003).

De acordo com nosso estudo da literatura sobre o ensino e aprendizagem de prova na Matemática, é possível afirmar que a argumentação pode servir como uma importante ferramenta para resolução de problemas, mas não parece que toda argumentação tem todas as características de demonstração. O que, então, entendemos por demonstração? Notamos que, em Geometria, o surgimento da demonstração está ligado historicamente ao conceito abstrato dos objetos da Geometria e à sua axiomatização. Mas, para alguns professores e, em especial para o aluno, a demonstração pode parecer inútil, se entendida como a evidência empírica, suficiente para verificação.

Deve-se a Balacheff (1988) a distinção entre explicação, prova e demonstração.

Chama-se explicação um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade adquirido pelo locutor de uma proposição ou de um resultado, o qual pode ser discutido, recusado ou aceito.

Chama-se prova uma explicação aceita por uma dada comunidade num dado momento. Essa decisão pode ser assunto de um debate cujo significado é a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.

Chama-se demonstração uma prova aceita pela comunidade matemática. A demonstração fundamenta-se em explicações apresentadas numa seqüência de enunciados, organizados conforme regras determinadas. Um enunciado é conhecido como verdadeiro ou é deduzido a partir daqueles que o precedem, graças a uma regra de dedução. Assim, a demonstração é um resultado do processo particular de prova que vem validar uma afirmação por método axiomático.

Outros autores, como Nasser e Tinoco, 2001, usam o termo prova formal ao invés de demonstração. Comparando a descrição de argumentação matemática de Douek e Pichat e aqueles de Balacheff (1988), neste trabalho decidimos reservar a palavra demonstração para provas usando o método dedutivo e axiomático. Argumentação e prova são utilizadas como sinônimos neste texto, tendo um significado mais amplo da palavra demonstração, ou seja, nos embasamos nas definições de Balacheff (ibid).

Segundo De Villiers (2001), a função da prova tem sido encarada quase exclusivamente em termos de verificação (convicção ou justificação) da correção das proposições matemáticas.

<u>Prova como meio de verificação (justificação)</u>

Apesar das outras funções da prova que iremos apresentar mais a frente, não devemos menosprezar a importância da prova como um meio de verificação indispensável, especialmente no caso de resultados surpreendentes, não intuitivos ou duvidosos.

Porém, De Villiers (2001) não acredita que a função de verificação deva ser o ponto de partida para introduzir os principiantes, pela primeira vez, à prova num contexto de geometria dinâmica, ele acredita, sim, que ela deva ser desenvolvida mais tarde para dar possibilidade aos alunos de atingirem uma compreensão mais desenvolvida sobre o valor e a natureza da argumentação matemática antes, eventualmente, trabalhando com demonstrações.

No entanto, para ele a prova tem outras funções importantes na matemática, mais importantes que a mera verificação:

- explicação - compreensão do porquê é que é verdade;
- descoberta - conclusões de novos resultados;
- comunicação - partilhar significados;
- desafio intelectual - realização/satisfação pessoal;
- sistematização - organização de vários resultados num sistema dedutivo.

A prova como um meio de explicar (esclarecer)

Para De Villiers (2001), *"apesar de muitos professores de matemática acreditarem que a demonstração é um pré-requisito absoluto para a convicção, na prática matemática atual é provavelmente muito mais freqüente que a convicção seja um pré-requisito para a descoberta de uma demonstração."*

Percebemos que há situações que, o fato de estarmos convencidos da veracidade, por exemplo, de uma propriedade, é que sentimos desafiados a construir as demonstrações dedutivas. Muitas vezes notamos que os resultados são obviamente verdadeiros, mas sentimos a necessidade ou desafio de tentar explicar porque é que eles são verdadeiros. Vemos, então, que a prova pode resultar da necessidade de explicar porque é que uma propriedade é verdadeira.

Muitas vezes uma atividade empírica, como um desenho no papel ou no computador, pode nos convencer sobre uma propriedade, mas como diz De Villiers (2001):

> "o *grau de certeza e confiança que isso nos dá é, muitas vezes, francamente espantoso. Claro que não é uma demonstração, mas eu diria que, em certo sentido, este tipo de contacto direto com o fenômeno é mesmo mais convincente que uma demonstração porque uma pessoa vê-o realmente acontecer mesmo à sua frente. Nada disto significa que eu não queira uma demonstração. No fundo, as demonstrações são ingredientes críticos do conhecimento matemático, e eu gosto tanto delas como qualquer outra pessoa. Apenas não sou um dos que acredita que a certeza só se adquire com a demonstração."*

<u>A prova como um meio de descoberta</u>

Para o matemático a prova não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas muitas vezes é também uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados. Na realidade é muito freqüente que a explicação de porque é que um resultado é verdadeiro possibilite uma generalização mais ampla. No entanto, é pouco provável que encontremos o caso geral apenas por investigação empírica, há inúmeros exemplos na história da matemática em que novos resultados foram descobertos ou inventados por processos dedutivos.

Prova como meio de comunicação

A importância da função de comunicação da prova está no fato de reconhecermos que ela é dirigida a um público que possui um conhecimento que lhe possibilita compreender as intenções do autor, há um compartilhamento de significados.

Prova como meio de desafio intelectual

A prova serve as funções de *realização* e *satisfação pessoais*. Para muitos matemáticos, ela é um desafio intelectual, muitas vezes não duvidamos da verdade do resultado, mas nos sentimos desafiados a mostrar nossa capacidade de provar. Para De Villiers (2001), a prova é; portanto, um terreno para testar a força e a ingenuidade intelectuais do matemático.

Prova como meio de sistematização

A prova é uma ferramenta indispensável para organizar vários resultados conhecidos num sistema dedutivo. Mais do que fornecer aos alunos as definições prontas a usar, eles deveriam empenhar-se em definir, eles próprios, alguns conceitos matemáticos. Segundo De Villiers (2001):

> "*parece-me um método radicalmente corrupto, em geometria com certeza, se não noutras matérias, apresentar às crianças definições prontas a usar para serem memorizadas de seguida, depois de serem explicadas com maior ou menor cuidado. Fazer isto é certamente*

> *deitar fora deliberadamente um dos mais valiosos factores de disciplina intelectual. A actividade da própria criança, de desenvolver uma definição operacional, estimulada por questões apropriadas, é simultaneamente interessante e altamente educativa*".

Observamos que não podemos focar a prova exclusivamente com a função de verificação (validação), mas sim fundamentalmente com a função de explicação e descoberta, a fim de dar significado às atividades de provas. Portanto, os alunos devem ser iniciados bem cedo à arte de formular problemas e proporcionar-lhes oportunidades suficientes para explorar, conjecturar, refutar, reformular, explicar etc.

Segundo Pietropaolo (2005, p. 90):

> *"Dessa forma, evitar-se-ia o ensino tradicional da Geometria, apresentando não apenas o produto acabado, mas os processos empregados – processos esses que seriam bem acolhidos pelos alunos que talvez se ressentissem justamente de sua ausência. A demonstração deixaria de ser, assim, um produto acabado, tornando-se uma atividade experimental dos alunos".*

1.1.1 PROVA: O SEU ENSINO E APRENDIZAGEM

Diversos estudos sobre o tema prova (Gravina, 2001, entre outro) abordam o tema, baseados nas construções da Geometria Euclidiana "clássica" e na congruência de triângulos como ferramentas principais para a prova. O processo de construção de uma prova é complexo, sob o ponto de vista do aprendiz e, muitas vezes, sob o ponto de vista do próprio professor. Assim, segundo Vaz (2004):

> *"... este processo necessita satisfazer às seguintes condições (i) uma apreciação que certos fatos geométricos emergem como conseqüência de certos outros um dado sistema formal e (ii) a organização de uma seqüência de argumentos coerentes pelas quais o segundo conjunto de fatos pode ser inferido a partir do primeiro. A dificuldade dos alunos em construir uma prova matemática tem sido assunto abordado em diversos estudos. Se, por um lado, em (ii), a forma dedutiva-axiomática é enfatizada sem conexão com qualquer referência empírica, todas as indicações sugerem que o tema prova será visto como um ritual inacessível e sem significado. Por outro lado, se a atenção para o raciocínio dedutivo é adiada, ou seja, a prova é introduzida apenas no contexto de experimentação empírica, aprendizes parecem entender melhor o que é requerido nas provas, mas não conseguem construi-las" (Vaz, 2004; p. 23).*

Em nossas escolas, parece que o tema prova é pouco abordado, ou seja, entre o grupo de 26 professores atuando no projeto AProvaME, todos confirmam que este tema recebe pouca atenção. Parece que não é dada a devida importância às provas, talvez porque em muitos cursos de formação de professores, em particular aqueles de formação continuada, é bastante enfatizado aos professores que é preciso trabalhar com o aluno uma matemática do dia-a-dia, em conexão com as demais disciplinas. Sendo assim, muitos professores podem não enxergar a necessidade de se trabalhar com provas. E, ainda, quando o aluno se depara com uma situação de prova, ele não compreende o que deve fazer.

As principais dificuldades dos aprendizes na construção de uma prova, segundo Chazan (1993); apud Vaz (2004), *"advém da preferência dos professores por um trabalho empírico, as provas são feitas muitas vezes por meio* *de figuras, sendo, assim os estudantes, também, optam por argumentos empíricos em detrimento aos dedutivos e nem mesmo conseguem diferenciar ambos."* Como podemos ver em muitos casos, o professor contribui para esta situação, pois "*muitos professores aceitam argumentos indutivos como provas de afirmações matemáticas, e ao mesmo tempo muitos professores aceitam argumentos dedutivos como provas"* (Olivero, 2002; apud Vaz 2004).

Entre os professores do AProvaME, aqueles que freqüentam escolas ou Universidades que abordam o tema prova, dizem que ele foi abordado de forma tradicional, onde o professor coloca na lousa as hipóteses e as conclusões. Neste caso, podam-se os alunos do processo de realização de uma argumentação lógica. A prova consiste em ir das hipóteses a conclusões por meio do raciocínio dedutivo citando os teoremas e proposições utilizadas e mostrando a quais objetos estes são aplicados. Desta forma, cabe ao aluno reproduzir o que lhe foi ensinado já que, com a ocultação das funções da demonstração como explicação e descoberta, a prova não tem significado aparente para o aluno. Nesta forma tradicional de se "ensinar" prova, não é permitido ao aluno se apropriar da aprendizagem, onde ele precisa pensar, ensaiar e errar, fatores relevantes à aprendizagem da prova, ressaltados também por Gravina (2001), que enfatiza a importância do conhecimento do aluno sobre toda a complexidade envolvida na prova: identificação de hipóteses, realização de conjecturas, procura por casos especiais etc.

1.1.2 TIPOS DE PROVA

Segundo Nasser e Tinoco (2001, p. 4):

> *"No ponto de vista dos matemáticos da academia, a prova é um desenvolvimento formal, que parte dos pressupostos (hipótese) e, através do encadeamento do raciocínio e de resultados já conhecidos ou de teoremas, chega ao resultado que se quer mostrar que é verdadeiro (tese). Esse tipo de prova é conhecido como prova formal. O que se observa atualmente, é que grande parte dos alunos não dominam a prova do tipo formal, nem quando chegam à universidade, nem quando se formam, nem mesmo depois de alguns anos de exercício do magistério".*

Mas uma prova rigorosa pode não ser um objetivo de todos os currículos: alguns pesquisadores como Balacheff (1988) defendem uma abordagem para prova, na qual argumentações poderiam atingir diversos níveis de rigor, são encorajadas de tal forma que a passagem de argumentos baseado em evidência empírica aos argumentos baseados em propriedades matemáticas é negociada gradualmente.

Segundo Balacheff (1988), as provas são divididas em duas categorias: pragmáticas e conceituais. As pragmáticas utilizam recursos de experimentação, como por exemplo, desenhos, envolvendo habilidades de observação de figuras, estando os conhecimentos necessários implícitos no pensamento de quem prova. As provas conceituais, segundo Balacheff, não envolvem experimentações, mas formulações de propriedades em questão e as relações estabelecidas entre estas propriedades. Caracterizam-se por seu caráter genérico, envolvendo a linguagem, não como um meio de comunicação, mas como uma ferramenta para deduções lógicas.

De acordo com Vaz (2004, p.27):

"A passagem das provas pragmáticas para as conceituais envolve saltos qualitativos no pensamento dos estudantes. E, ainda, segundo Balacheff (1988), a prova tem características hierárquicas dependendo da qualidade de suas generalizações e da conceitualização do conhecimento envolvido.

O desenvolvimento da prova ocorre por meio da passagem entre suas 4 etapas:

1. Empirismo ingênuo: verificam-se vários casos e então se conclui a validade para todos, aceitando o fato como verdadeiro. Este processo rudimentar apresenta-se insuficiente, pois não é possível analisar todos os exemplos possíveis, mas apresenta-se como uma primeira forma do processo de generalização.

2. Experimento crucial: escolhe-se um exemplo com certas características, com a intenção de verificar sua validade para este caso específico. Caso confirmado, conclui-se seu caráter geral.

3. Exemplo genérico: escolhe-se um objeto representativo de uma classe, ou seja, que possua propriedades características e estrutura representativa desta classe. A partir deste exemplo, tornam-se explícitas as razões da verdade de uma asserção por meio das operações ou transformações que representam a classe.

4. *Experimento de pensamento: invoca a ação pela superação de qualquer caso específico e sua internalização não envolve situações particulares. As operações e relações fundamentais de prova são*

> *indicadas, não por meio de exemplos, mas pelo resultado de seu uso. Este experimento envolve construções cognitivas e lingüísticas complexas. Um tipo particular de experimento de pensamento envolve cálculos nas afirmações, que são construções intelectuais mais ou menos formalizadas, aparecendo como resultados de cálculos inferenciais, de definições ou da explicitação de propriedades características."*

Na visão de Balacheff (1988), as duas primeiras etapas pertencem à categoria de provas pragmáticas enquanto que, a quarta, marca claramente a passagem da prova pragmática à prova conceitual. Já a terceira, exemplo genérico, é uma etapa intermediária, ora na categoria de prova pragmática, ora na prova conceitual, dependendo de concretização efetiva da ação sobre o exemplo – ou ação ainda depende de concretização particular, ou ação que usa a concretização apenas como suporte para expressar raciocínio generalizador.

Podemos notar, a partir de nosso estudo ou mesmo de nossa experiência, como professor de Matemática, a necessidade de desenvolver atividades nas escolas no sentido de ajudar nossos alunos a se apropriarem dos processos de prova, se queremos desenvolver em nossos alunos as competências matemáticas no sentido de explicarem e justificarem suas resoluções, ou seja, que eles saibam argumentar, demonstrar e provar devemos, então, permitir que eles participem efetivamente deste processo. Isto requer que os alunos sejam iniciados bem cedo à arte de formular problemas e que lhes tenham sido proporcionadas oportunidades suficientes para explorar, conjecturar, refutar, reformular, explicar etc.

Acreditamos que, se o professor não está preparado para trabalhar com este tipo de atividade, seja por insegurança, por achar desnecessário ou mesmo por não saber, é o momento de refletir sobre o tema e se preparar para a realização destes tipos de atividades.

1.1.3 A PROVA E OS PCN

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, ciclo 3 e 4, estão em vigor desde 1998 e têm por finalidade fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino das diferentes áreas do conhecimento. Traz uma análise e discussão sobre o papel da Matemática na construção da cidadania e explicitam o papel da Matemática no Ensino Fundamental.

No quadro atual do ensino de Matemática no Brasil, os PCN citam, entre outros obstáculos enfrentados no Brasil, as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas, por parte de pesquisadores e professores de Matemática. Citam, ainda, que são poucos os professores que têm iniciativa para buscar novos conhecimentos e assumirem uma atitude de constante reflexão, e que isso pode levar às práticas pedagógicas mais eficientes para ensinar Matemática. Porém, esse grupo é muito pequeno, o que não leva a alterar o quadro desfavorável que caracteriza o ensino de Matemática no Brasil.

As interpretações equivocadas podem prejudicar o processo de ensino e aprendizagem, tendo em vist-2.16436(e)-4.34154(u)-4085(-4.33117( )-21)-7.49588(,)-2.16558(

q (s)eciqu, ,2.43117( )-212.288(l)121

são utilizados como uma lista de exercícios para aplicar uma técnica ou algoritmo previamente estudado.

De acordo com os PCN, outra distorção perceptível refere-se a idéia de contexto, ao se trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos com as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata.

Os PCN destacam que, ainda hoje, a validação do conhecimento matemático e de seus resultados, na comunidade científica, tem sido por meio da demonstração formal. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente um teorema.

Entres os objetivos gerais para o ensino fundamental, é importante destacar que um deles é de levar o aluno a *“comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas” (Brasil, 1998; p. 48).*

Entre os conteúdos propostos para o ensino de Matemática no quarto ciclo, temos um que é importante destacar neste trabalho, “verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos” (Brasil, 1998; p. 89).

Nas orientações didáticas para terceiro e quarto ciclos, no bloco Espaço e Forma, os PCN fortalecem a idéia de que *“as atividades de geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas”.*(Brasil, 1998; p. 126). Ele deixa clara a necessidade de se trabalhar as diferentes representações, porém é preciso ter muito cuidado, pois apesar da força de convencimento para os alunos que, os desenhos, as medições e os materiais concretos têm com sua fácil visualização, não é valido como prova, mas podem facilitar o processo para se chegar a uma prova.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (Brasil, 1999), entre outras competências e habilidades, destacaremos aqui as mais relevantes para este trabalho:

- Exprimir-se oralmente com correção e clareza, usando a terminologia correta.
- Produzir textos adequados para relatar experiências, formular dúvidas ou apresentar conclusões.
- Interpretar e criticar resultados a partir de experimentos e demonstrações.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

- Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Ainda, segundo os PCNEM, as finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática.

Na resolução de problemas, saber ler é mais do que ter algum domínio da língua portuguesa. Neste caso, é necessário também dominar códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, compreender e interpretar desenhos e gráficos e relacioná-los à linguagem discursiva. O aluno precisa entre outras habilidades, tomar decisões, selecionar estratégias, argumentar, se expressar e fazer registros. Há problemas que exigem conhecimentos matemáticos específicos. Sendo assim, não podemos restringir o ensino de matemática a situações do dia-a-dia.

Segundo os PCNEM+, (Brasil, 2002, p. 123):

> *"O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares".*

Ao mesmo tempo em que os PCN sugerem que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração, eles também sugerem que não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações.

Em análise sobre o uso do computador, os PCN também trazem que o uso das tecnologias é um caminho para "fazer Matemática" na sala de aula, recorrendo às suas diferentes formas, já que o uso de computadores, calculadoras e outros recursos podem facilitar a aprendizagem nas diferentes ciências, pois permitem a visualização, a leitura e alteração dinâmica de elementos gráficos e geométricos, ajudando o aluno a levantar hipóteses e conjecturas, podendo assim formalizar suas idéias.

Acreditamos ser importante o uso do computador, portanto, nossa proposta é trabalhar uma seqüência onde será inserido o uso do software de geometria, Cabri-géomètre, por acreditarmos que ele torne o trabalho mais dinâmico e, ainda, que ele possa trazer uma grande contribuição ao estudo de provas.

Há inúmeras vantagens na utilização de software de construções geométricas sobre a construção com régua e papel, um delas é que eles permitem a transformação de figuras mantendo suas propriedades que podem ser mais bem estudadas na geometria dinâmica do que no ensino sem computador.

Como pudemos observar, neste capítulo, nem os PCN do Ensino Fundamental, nem os do Ensino Médio suprimem os estudos de demonstrações na formação básica dos alunos. Pelo contrário, sugerem que eles são importantes no desenvolvimento de competências e habilidades essenciais para sua formação. Neste trabalho, pretendemos contribuir para a operacionalização das sugestões contidas nos documentos. Para tanto, acreditamos que é necessário um envolvimento no desenvolvimento de seqüências didáticas que coloquem em prática sugestões de atividades, formuladas por professores e/ou pesquisadores.

Gostaríamos de criar uma seqüência didática que possibilitasse desenvolver a capacidade de chegar além de prova pragmática, mas sabemos que isso não é uma tarefa fácil para professores e para a maioria dos alunos. Escolhemos para a seqüência didática e como um dos objetos de estudo de nossa pesquisa o tema quadrilátero.

Para informar o processo de elaboração na próxima seção, apresentaremos algumas definições de quadriláteros que marcam o desenvolvimento da Matemática: as definições de Euclides, Legendre e Hadamard. Em seguida, apresentaremos algumas considerações sobre o ensino da geometria, descrevendo o modelo para o ensino de Geometria proposto por Parsysz (2000). Acreditamos que este modelo é útil em possibilitar a passagem de provas pragmáticas para provas conceituais e por essa razão este modelo servirá como base ao desenvolvimento de nossa seqüência didática, a ser apresentada no Capítulo 2.

1.2 A CLASSIFICAÇÃO DOS QUADRILÁTEROS E O ENSINO DE GEOMETRIA

1.2.1 DEFINIÇÕES DOS QUADRILÁTEROS

De acordo com Bongiovanni (2004), na definição 19 do livro I, Euclides define "figura quadrilátera como aquela contida por quatro linhas retas". Em seguida, na definição 22, ele apresenta caracterizações de alguns quadriláteros notáveis:

- **Quadrado** é uma figura quadrilátera de quatro lados iguais com ângulos retos.

- **Oblongo** é uma figura quadrilátera com ângulos retos, mas que não tem quatro lados iguais (retângulo).

- **Rombo** é uma figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas não com ângulos retos (losango).

- **Rombóide** é uma figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas não tem quatro lados iguais e nem ângulos retos (paralelogramo).

Podemos observar que na classificação proposta por Euclides, cada

Na classificação de Legendre, notamos que ele inclui quadrados, losangos e retângulos como sendo também paralelogramos. Representando por um diagrama de Venn (Fig. 1.2), os conjuntos dos quadriláteros notáveis definidos por Legendre, temos:

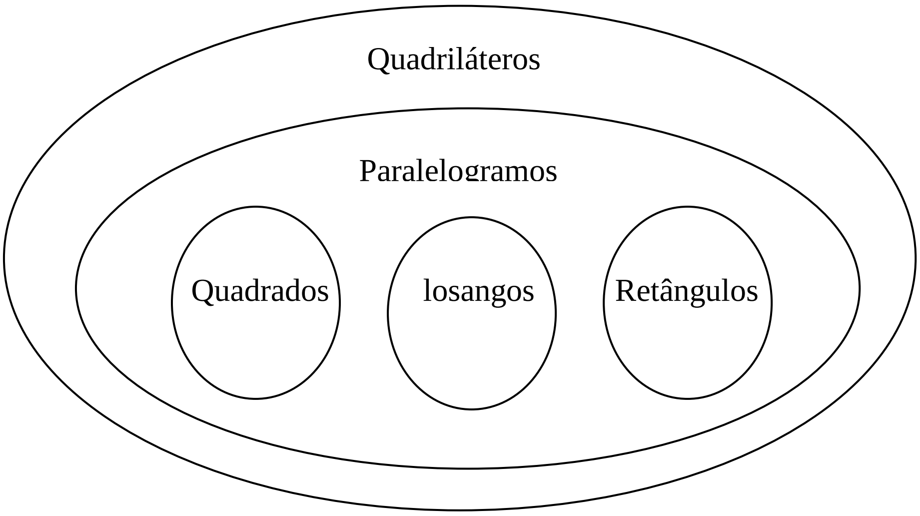


Figura 1.2: Classificação de Legendre

Mais de 1 (um) século depois da classificação de Legendre, em 1898, Hadamard caracterizava os quadriláteros notáveis de uma maneira mais ampla:

- **Quadrado** é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.

- **Retângulo** é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais, e consequentemente retos.

- **Losango** é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais.

- **Paralelogramo** é o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois.

As definições de Hadamard nos permitem classificar os quadriláteros de outra maneira, e assim, um quadrado é um retângulo ou um losango. Outro exemplo, um retângulo, um losango e um quadrado são paralelogramos. Esta classificação é bem próxima da que utilizamos atualmente. A representação por meio de um diagrama de Venn (Fig. 1.3), dos conjuntos dos quadriláteros notáveis definidos por Hadamard, pode ser assim:

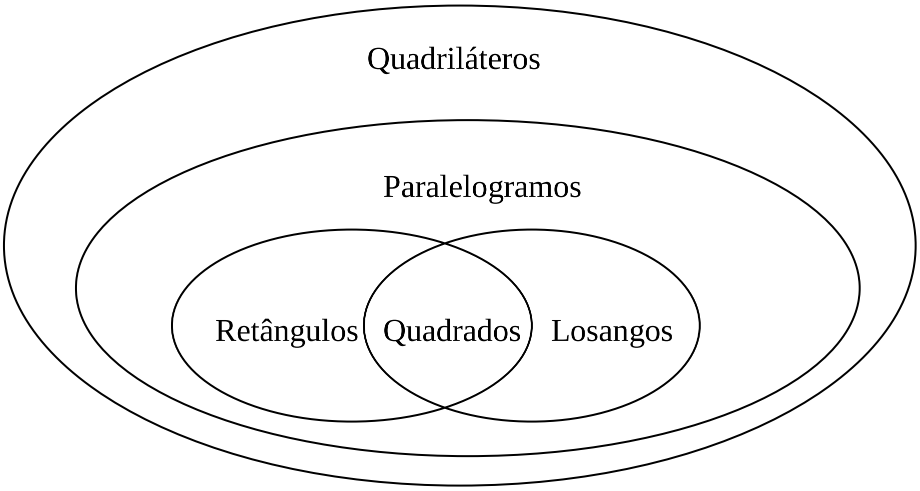


Figura 1.3: Classificação de Hadamard

Na classificação mais utilizada atualmente, o trapézio está definido como um quadrilátero que possui dois lados paralelos, podemos, então, afirmar que todo paralelogramo também é trapézio. Representando por um diagrama de Venn (Fig. 4), os conjuntos dos quadriláteros notáveis, temos:

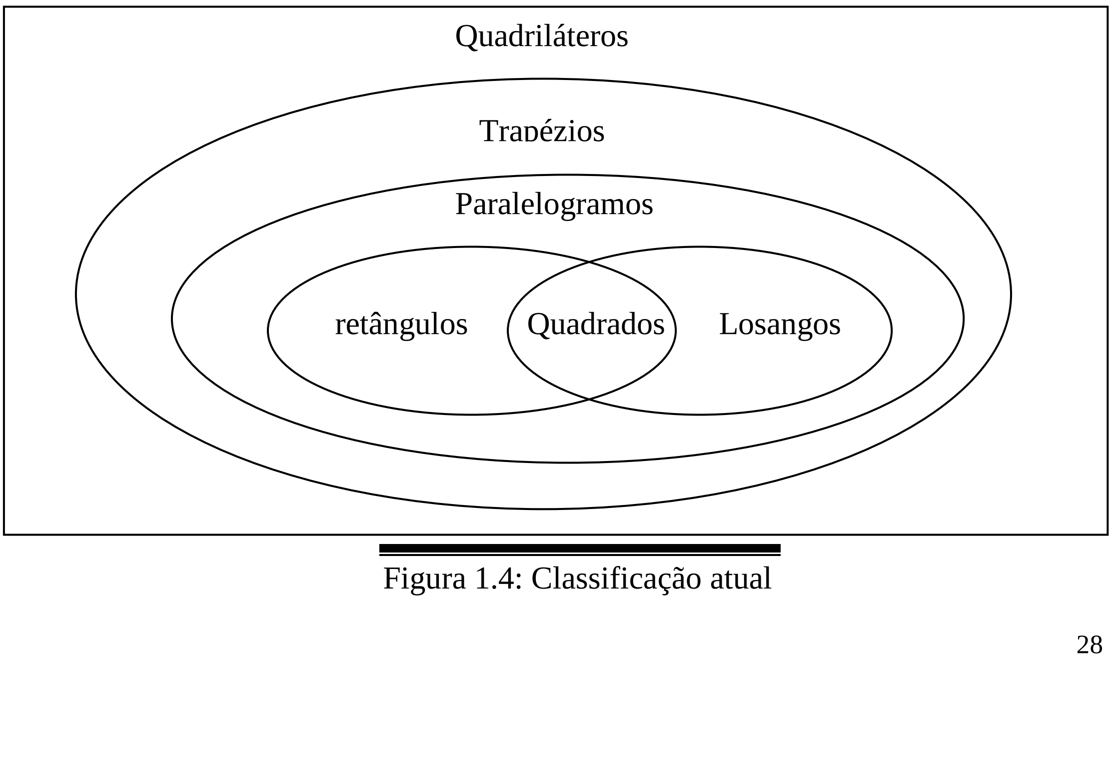


Figura 1.4: Classificação atual

Observamos, durante os anos de experiência no magistério e em conversas com outros professores que, ao realizarmos atividades de levantamento de conhecimentos com nossos alunos sobre classificação de quadriláteros, suas concepções estão mais próximas à classificação de Euclides do que a proposta, por exemplo, por Hadamard. Assim, uma meta importante dessa pesquisa é ajudar os alunos a se apropriarem desta última classificação.

1.2.2 A classificação de Bernard Parsysz

Bernard Parsysz (2000) apresenta um modelo para um quadro teórico do ensino da Geometria, destacando quatro etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico que vai de Geometria Não-axiomática à Geometria Axiomática.

As quatro etapas são:

- **Geometria Concreta** (nível G0): nesse nível, parte-se da realidade, os objetos são materializados. As figuras são identificadas unicamente pelo seu aspecto geral. É uma geometria não-axiomática
- **Geometria Espaço-Gráfica** (nível G1): que é a geometria das representações figurais e gráficas; nesse nível, os objetos são bidimensionais como, por exemplo, desenhos produzidos numa folha ou numa tela de um computador. A justificativa de propriedades é feita pelo

premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo; os objetos e o caminho da validação são “localmente” os mesmos que na geometria axiomática, mas não há necessidade de explicitar um sistema de axiomas.

- **Geometria Axiomática** (nível G3): nesse nível, os axiomas são

Neste trabalho, estaremos recorrendo aos níveis G1 e G2, não temos a intenção de considerar o ensino de diferentes sistemas de axiomas, ou ainda, a comparação destes. Acreditamos que neste nível de escolaridade, nossos alunos já sejam capazes de explicar e validar suas explicações, porém não queremos aqui exigir que sejam feitas de modo formal.

Nesta pesquisa, pretendemos discutir as classificações de quadriláteros com professores de Matemática. Pretendemos, também, discutir com eles as diferentes classificações possíveis. Para esta parte da pesquisa, estaremos realizando duas atividades que estão nas duas primeiras partes da seqüência didática, na terceira parte, a intenção é utilizar as definições de provas, para discutirmos sobre a necessidade de se ensinar prova aos alunos do Ensino Básico.

No Capítulo 2, descreveremos a metodologia da pesquisa: a proposta e o objetivo da seqüência didática, os professores participantes, os procedimentos relativos à aplicação da seqüência, o plano de trabalho com os professores e, finalmente, a seqüência didática e uma análise *a priori*.

Capítulo 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, descrevemos as atividades de pesquisa realizadas juntamente com o grupo de professores que colaborou com nosso estudo. O objetivo de nossa pesquisa era incentivar entre os professores de Matemática da mesma escola uma discussão e reflexão sobre o ensino e aprendizagem de prova em Geometria. Com este fim, dividiremos as atividades em três tipos. A primeira atividade envolveu um levantamento inicial, utilizando itens do questionário do projeto AProvaME, das concepções de prova de duas professoras integrantes do grupo. As outras atividades centraram-se na seqüência didática apresentada por nós.

A primeira atividade com a seqüência envolveu as professoras em resolver atividades propostas e na segunda atividade discutimos possíveis adaptações, visando melhorar a seqüência, adequando-a para utilização na sala de aula.

Não teremos aqui o objetivo de “ensinar” provas e propriedades dos quadriláteros aos professores, mas sim apresentar uma seqüência de atividades propostas para abordar as propriedades dos quadriláteros, sendo que, em algumas delas, deveremos provar tendo em vista cumprir um dos principais objetivos do ensino de Matemática que é o desenvolvimento do raciocínio lógico.

2.1 OS PROFESSORES PARTICIPANTES

Para realização do trabalho foram convidadas para participar, junto com o professor/pesquisador, duas professoras de Ensino Fundamental e Médio da escola pública, as professoras Izabel e Eliane, que prontamente atenderam ao pedido de trabalhar na realização dessa pesquisa, ambas trabalham em escolas da cidade Araçariguama/SP. Estas professoras foram escolhidas por ter uma larga experiência no ensino de Matemática e por trabalhar na mesma escola em que trabalho, facilitando o contato, a troca de informação e a realização dos trabalhos.

Para o desenvolvimento deste projeto adotou-se uma metodologia de pesquisa-ação. Mais especificamente, nossa pretensão era conduzir uma investigação co-generativa, um tipo de pesquisa em que os participantes e pesquisadores co-geram o conhecimento por um processo de comunicação colaborativa, (COSTA, 2004). Numa investigação co-generativa, o objetivo do estudo é conduzir a uma ação social, ou a reflexão sobre a ação social, para que os participantes possam construir novos significados pelas suas práticas. Este tipo de pesquisa trata da diversidade de experiências e capacidades dentro de um grupo local e visa resolver os problemas da vida real no contexto em que esse grupo está inserido, nesse caso, os problemas associados ao ensino de prova no contexto escolar dos participantes do grupo.

Tendo em vista o interesse dos professores e dirigentes em uma educação de qualidade, fizemos a solicitação de que esta pesquisa fosse realizada na E.E. “Prof. Humberto Victorazzo”, escola de Ensino Médio, na qual trabalham as professoras escolhidas e eu. Não tivemos objeção alguma quanto ao trabalho ser realizado nesta escola. Uma das professoras trabalha também numa escola municipal de Ensino Fundamental.

A professora Eliane leciona há 7 anos. No ano de 2006, ela trabalhou com alunos desde a 5ª série do Ensino Fundamental até a 3ª série do Ensino Médio. Ela acredita que trabalhos com provas devam ser iniciados a partir da 7ª série do Ensino Fundamental. Eliane acredita ainda, que: “a demonstração é fundamental para uma formação mais generalizada e concreta, consolida teoria.”. Em seu curso de formação, foram muito pouco trabalhadas as demonstrações e, portanto, não a auxiliou na tarefa de ensinar Matemática, em especial as demonstrações. A preocupação do curso era apenas com a aplicação cotidiana da Matemática. Apesar da importância que ela atribuiu à prova, ela relatou que na prática raramente ensina aos alunos, porque teme que eles achem a aula desinteressante.

A professora Izabel leciona há 16 anos. Em 2006, ela trabalhou com as três séries do Ensino Médio. Ela, também, acredita que trabalhos com provas devam ser iniciados a partir da 7ª série do Ensino Fundamental. Julga importante a prova para que possa compreender o raciocínio utilizado nas resoluções de problemas. O seu curso de formação não a auxiliou na tarefa de ensinar prova, pois segundo Izabel - “o curso era parecido com um Ensino Médio um pouco melhorado”. Às vezes, ela ensina demonstração a seus alunos, quando são mais simples, “pois os alunos não estão habituados e acabam achando que é muito complicado” – segundo Izabel.

Antes de realizar as atividades da seqüência didática, as professoras responderam a dois itens do questionário trabalhados na fase 1 do projeto AProvaME (Anexo 2). Estes itens, G1 (questão 1 de geometria) e A1 (questão 1 de álgebra), ambos de múltipla escolha, aplicados pelos mestrandos na primeira fase do projeto AProvaME a alunos de faixa etária de 14-16 anos. As questões foram respondidas por alguns “alunos” que estavam tentando provar que as duas afirmações são verdadeiras.

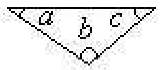
As questões estão apresentadas, a seguir, nas Figuras 2.1 e 2.2.

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

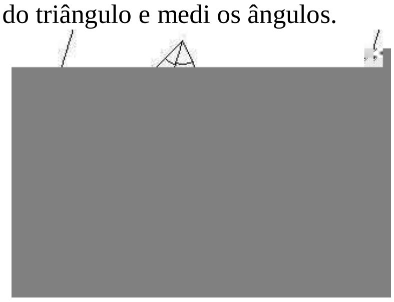
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

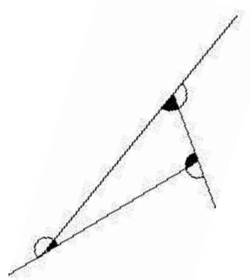
Em todos eles a soma foi de 180º.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



(90



A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
2*a* e 2*b* são números pares quaisquer
2*a* +2b = 2 (*a* + *b*)

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 = 6
2 + 4 = 6   4 + 4 = 8
2 + 6 = 8   4 + 6 = 10

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

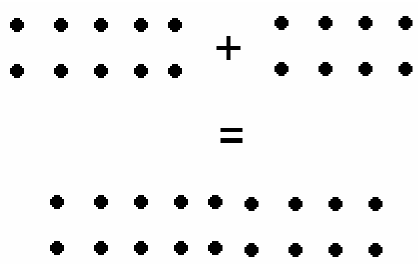
Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a

resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira.

Figura 2.2: Questão A1 do questionário sobre prova do projeto AProvaME.

Pedimos que as professoras atribuíssem uma nota de 0 a 10 para cada um dos cinco argumentos apresentados como provas para uma afirmação em Geometria e para cinco argumentos apresentados como provas para uma afirmação em Álgebra. Em seguida, solicitamos justificativas para as notas atribuídas. No Capítulo 3, apresentaremos as respostas das professoras e compararemos estas respostas com as respostas dos alunos que participaram no levantamento feito no projeto AProvaME.

Analisando as respostas obtidas, de acordo com a classificação de Balacheff (1988), podemos classificá-las em uma das quatro etapas do desenvolvimento de prova.

A resposta de Amanda pode ser classificada como experimento crucial, pois a validade é afirmada por meio de um exemplo específico.

As repostas de Dario e Beth são exemplos de empirismo ingênuo, pois são mostrados vários casos e então se conclui que as afirmações são verdadeiras.

As respostas de Hélia e Hanna podem ser classificadas com um exemplo genérico, porque foi escolhido um objeto com as propriedades características e estrutura representativa. A partir do exemplo, tornam-se explicitas as razões da verdade por meio das operações e transformações que representam a classe.

As respostas de Cíntia, Edu, Duda e Artur podem ser consideradas como experimento de pensamento; portanto, são exemplos de provas conceituais, pois não envolvem situações particulares, as operações e relações fundamentais de prova não são indicadas por meio de exemplos específicos ou casos particulares, mas sim pelo resultado de seu uso.

Já a resposta de Franklin, nos dá uma dupla interpretação, pois ela pode ser classificada como um experimento crucial, se interpretarmos que ele está testando a generalização a partir do exemplo 10 + 8 ou um exemplo genérico, se levarmos em conta a maneira que ele representou estes números, ilustrando a propriedade de paridade.

2.2 A PROPOSTA E OBJETIVO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Após as professoras completarem a primeira parte atribuindo notas para os argumentos apresentados no questionário, começamos nossas discussões da seqüência didática. Esta seqüência propõe-se a apresentar aos professores atividades sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis e realizar suas demonstrações, para que eles possam analisar e opinar sobre a necessidade de se trabalhar com este tema no Ensino Fundamental ou Médio. As atividades apresentam situações de ensino que visam analisar os conhecimentos dos alunos, e então, dar continuidade aos trabalhos.

O objetivo da seqüência didática é focar as propriedades e como prová-las. Durante a realização das atividades, os professores deverão responder questões e analisar sua aplicabilidade e a que séries seria viável sua aplicação. Na terceira parte da seqüência didática, o principal objetivo é a demonstração ou prova de algumas propriedades dos quadriláteros notáveis; portanto, foram propostas quatro atividades com a utilização do Cabri-géomètre, com questões do tipo complete, usando palavras importantes numa demonstração, como – apenas, às vezes, sempre etc. – com a tentativa de formar e fortalecer uma cultura de argumentação.

Com a seqüência didática, que poderá ser aplicada a alunos, temos a meta de procurar desenvolver habilidades e competências, tais como:

- Interpretar, analisar, levantar hipóteses e fazer conjecturas sobre textos matemáticos, situações-problema, definições etc.;
- Produzir textos matemáticos;
- Esquematizar demonstrações;
- Associar diferentes tipos de registros;
- Raciocinar logicamente em situações matemáticas.

As atividades propostas na seqüência didática foram baseadas no quadro teórico do ensino de geometria de Parsysz (2000), quadro citado no Capítulo 1.

2.3 PROCEDIMENTOS RELATIVOS À APLICAÇÃO DA SEQÜÊNCIA

Para realização do projeto, concordamos em nos reunirmos uma vez por semana, por uma hora e trinta minutos, durante 6 semanas.

Na primeira reunião, discutimos quais foram os critérios utilizados nas pontuações dadas às respostas das questões G1 e A1 do questionário. Estes critérios estão discutidos mais detalhadamente no Capítulo 3. A seguir, fizemos uma discussão dos diferentes tipos de provas, descritos por Balacheff (1988) e que constam do primeiro capítulo, foram introduzidos e discutidos no grupo para deixar claro que não é nosso objetivo trabalhar apenas com a prova formal, tal como aprendemos nas Universidades na ocasião da nossa formação.

No segundo encontro, demos início às atividades da seqüência didática, após a realização da atividade da parte 1, as professoras deveriam relatar quais foram suas impressões sobre a atividade. Para realização desta parte, usamos apenas um encontro.

Nos próximos encontros, realizamos as atividades das partes 2 e 3. Sempre após cada atividade, as professoras deveriam relatar suas impressões e sugestões de alterações, se houvesse.

Durante os encontros, a postura do pesquisador deveria ser de observador/participante, deixando que as professoras trabalhassem a vontade de acordo com suas convicções. As observações e as discussões realizadas foram registradas, por gravação de áudio e vídeo, para que se possa fazer uma análise dos resultados obtidos. Sendo assim, as atividades poderiam sofrer alterações de acordo com as sugestões das professoras, desde que acordadas entre todos que tais alterações trariam subsídios ao ensino e a aprendizagem.

2.4 A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE *A PRIORI*

Procuramos elaborar uma seqüência didática no sentido de criarmos situações que promovessem uma compreensão do conceito e propriedades dos quadriláteros notáveis, utilizando os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico proposto por Parsysz. Em nosso trabalho, propomos atividades nos níveis G1 e G2. Os roteiros entregues para as professoras estão disponíveis no Anexo 3.

2.4.1 Parte 1

O objetivo da Atividade 1 é classificar os quadriláteros, a partir da identificação de semelhanças e diferenças, trabalhando no nível G1 de Parsysz.

Para realização desta atividade, foi dado um quadro com alguns quadriláteros, onde o aprendiz deverá encontrar semelhanças e diferenças entre eles e formar grupos sem a preocupação de uma classificação pré-estabelecida. A seguir, são colocados alguns itens que dão um direcionamento para se chegar a uma classificação mais criteriosa, separando os quadriláteros que são retângulos dos que não são retângulos e os que são losangos dos que não são losangos.

2.4.1.1 ANÁLISE *A PRIORI* DA PARTE 1

Na realização desta atividade, espera-se que as professoras pensem em como os alunos poderiam resolvê-la e como poderão ajudá-los a concluir as definições sobre os quadriláteros e suas propriedades para agrupá-los corretamente, de acordo com as definições de Hadamard, Figura 2.3.

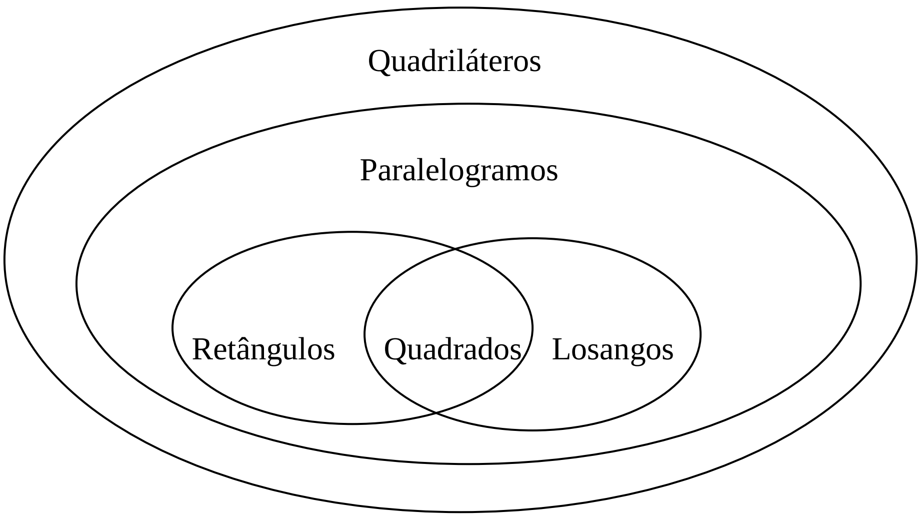


Figura 2.3: Classificação dos quadriláteros segundo Hadamard

Espera-se, ainda, que as professoras simulem, de acordo com suas concepções, uma ou mais resoluções possíveis por parte dos alunos. Segue uma possível resolução, juntamente com algumas considerações que julgamos importantes.

A classificação dos quadriláteros, a partir de suas semelhanças e diferenças, depende muito da resolução de cada professora. Elas poderão sugerir, por exemplo, que essa atividade seja trabalhada com os alunos em grupos. Se os alunos não tiverem conhecimentos necessários a resolução da atividade, é possível que as professoras sugiram que ao trabalhar essa atividade com os alunos, seja comentado com eles que esses quadriláteros que foram pintados (quatro ângulos retos) são denominados de retângulos. Note que o importante para dizer se um quadrilátero é ou não retângulo, é atentar-se às medidas dos ângulos e não as medidas dos lados. Após identificarem os quadriláteros que possuem os quatros lados iguais (pintando-os de vermelho), eles separarão os losangos (quatro lados de medidas iguais) dos não-losangos (os quatro lados não têm medidas iguais). Uma possível sugestão das professoras poderá ser que: ao se trabalhar essas atividades com os alunos, caso eles não saibam o nome desses quadriláteros, informe-os que qualquer quadrilátero que possua os quatro lados de mesma medida é denominado losango. Uma possível sugestão das professoras pode ser a seguinte: ao aplicar esta atividade, se os alunos apresentarem dificuldades em dispor os quadriláteros no quadro, oriente-os da seguinte forma: primeiro, peça para que eles separem as figuras em dois grupos: um composto dos quadriláteros que possuem os quatro ângulos retos (os retângulos); segundo, peça que também considerem a medida dos lados para classificar as figuras, levando em conta a medida dos lados, ou seja, eles deverão separar os losangos dos não losangos. Assim, deverão agrupar os quadriláteros de modo a satisfazer o quadro dado (Figura 2.4).

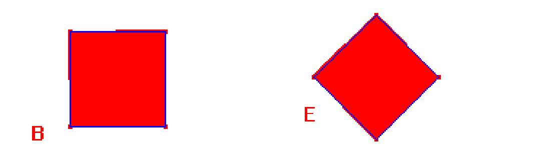
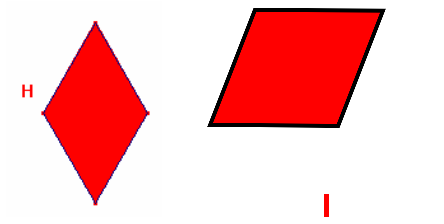
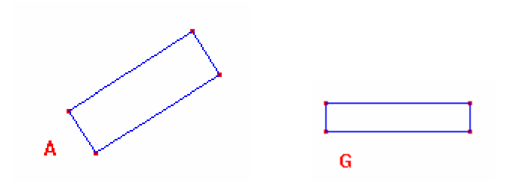
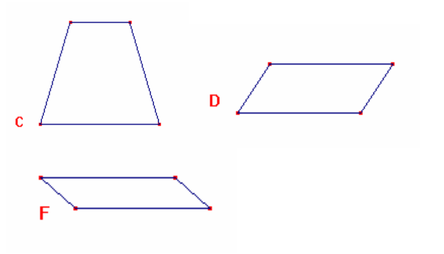
	Retângulos	Não retângulos
Losangos		
Não losangos		

Figura 2.4: Separação dos quadriláteros solicitada na Atividade 1.

No final da atividade, as professoras poderão apresentar respostas diferentes, pois suas respostas dependem de suas concepções sobre as definições dos quadriláteros. Uma possível sugestão das professoras pode ser a seguinte: ao aplicar essa atividade aos alunos, discuta com eles as propriedades das figuras que ficam em cada uma das quatro regiões, no item anterior, antes de responder às questões propostas.

Se a concepção das professoras for a proposta por Hadamard, elas possivelmente responderiam que todo retângulo é quadrilátero, que nem todo quadrilátero é retângulo, como os paralelogramos, os losangos e os trapézio que não têm os quatro ângulos retos; responderiam que os quadrados são ao mesmo tempo retângulos e losangos, que os trapézios e os paralelogramos podem não ser retângulos e nem losangos. Elas poderiam concluir que todo quadrado é losango, mas a recíproca não é verdadeira, pois nem todo losango é quadrado. E, então, chegar a seguinte definição: um quadrado é um quadrilátero que possui quatro ângulos retos e quatro lados congruentes.

Se as professoras tiverem outras concepções sobre a classificação dos quadriláteros, poderiam surgir outras respostas como, por exemplo, dizer que não há quadriláteros que são ao mesmo tempo retângulos e losangos, pois quadrados são diferentes de losangos, e ainda, poderiam definir que um quadrado é um quadrilátero que possui quatro lados congruentes.

2.4.2 Parte 2

O objetivo da Atividade 2 é o reconhecimento das propriedades dos quadriláteros notáveis a partir do software Cabri, trabalhando no nível G1 de Parsysz. A Atividade 2 foi dividida em três fases, para a primeira fase foi solicitado que, usando o software Cabri-géomètre, abrissem um arquivo, com alguns

Construir é utilizar as propriedades do objeto geométrico para obter a sua representação. A construção, quando realizada num software de geometria dinâmica, preserva, quando do deslocamento de um de seus pontos seus pontos, as propriedades ligadas ao objeto geométrico que representa. Podemos dizer que, nesse caso, a construção é um desenho dinâmico que não perde as suas propriedades quando do deslocamento de um de seus pontos de base. A construção vai além do simples traçado empírico controlado apenas pela visualização. A manipulação de um representante de um objeto geométrico construído por um software de geometria dinâmica pode contribuir para uma melhor compreensão do objeto teórico.

2.4.2.1 ANÁLISE *A PRIORI* DA PARTE 2

Na realização desta atividade, espera-se que as professoras, também, pensem em como os alunos poderiam resolvê-la e, como utilizar o software de geometria dinâmica, para ajudá-los na construção de um conhecimento esquematizado de definições e propriedades dos quadriláteros e, também, agrupá-los corretamente, de acordo com as definições de Hadamard.

Esperávamos que as professoras tivessem algum conhecimento sobre o Cabri, caso isso não ocorresse tínhamos que dar uma atenção especial a essa professora, nesse momento ajudando-a a usar as ferramentas necessárias a essa atividade.

Nos primeiros itens da Atividade 2.1, as professoras somente teriam que abrir o arquivo onde estavam gravadas previamente as figuras de cinco quadriláteros e encontrar as medidas solicitadas. Depois, responder uma série de questões envolvendo a identificação de diferentes propriedades.

Esperávamos que ao responder o item final desta atividade, as professoras tivessem concluído, a partir dos itens anteriores, quais são as condições necessárias à existência de cada quadrilátero proposto no quadro.

Para realização da segunda fase da Atividade 2, foi solicitado que abrissem, novamente, o arquivo com as figuras e fizessem o que estava pedido nos itens propostos nesta fase. Movimentar as figuras e responder em que outro(s) quadrilátero(s) estas figuras poderiam ser transformadas e colocar suas conclusões. No final desta fase, há um item onde é solicitado que se coloquem as principais características dos quadriláteros notáveis.

Com a Atividade 2.2, esperávamos que as professoras concluíssem ou lembrassem que todo quadrado é um retângulo, que todo quadrado é losango, que todo quadrado, retângulo e losango é um paralelogramo, que todo quadrado, retângulo, losango é um trapézio, ou seja, todo paralelogramo é um trapézio. Com relação ao item (e), é possível que as professoras apresentassem mais de uma resposta a esta questão, pois quando pedimos as principais características, a resposta fica em aberta, dependendo do que cada uma acredita serem as principais características.

Na Atividade 2.3, o objetivo é observar as definições de cada um dos quadriláteros notáveis e relacionar com as conclusões tiradas nas Atividades 2.1 e 2.2. Para iniciar é dada a definição de paralelogramo e a seguir pede-se que complete algumas lacunas, ao completá-las é possível concluir quais são os quadriláteros que podem ser chamados de paralelogramo. E, assim, é feito também os demais quadriláteros notáveis. Relendo as definições e as conclusões apresentadas, é solicitado que respondam às questões que poderão ajudar na classificação dos quadriláteros que serão representados, por meio de diagrama de Venn.

Esperávamos que, com a Atividade 2.3, as professoras conseguissem esquematizar as definições dos quadriláteros notáveis e que pudessem opinar se esta é uma boa maneira de ajudar aos alunos a concluírem sobre definições pré-estabelecidas e se há uma contribuição significativa do dinamismo do Software ao levantamento destas definições. Esperou que as possibilidades oferecidas pelo Cabri e particularmente a capacidade de transformar as figuras em desenhos de diferentes quadriláteros, ajudasse a chegar a conclusões como, por exemplo, um quadrado é ao mesmo tempo retângulo e losango, porque possui 4 ângulos retos (é retângulo) e 4 lados congruentes (é losango); nem todo losango é um retângulo, porque não possui 4 ângulos retos; um quadrado é um paralelogramo, porque possui dois pares de lados paralelos e que todo paralelogramo é um trapézio, pois ele tem dois lados paralelos. E, ainda, que conseguissem representar a classificação dos quadriláteros em um Diagrama de Venn, mostrado na Figura 2.5.

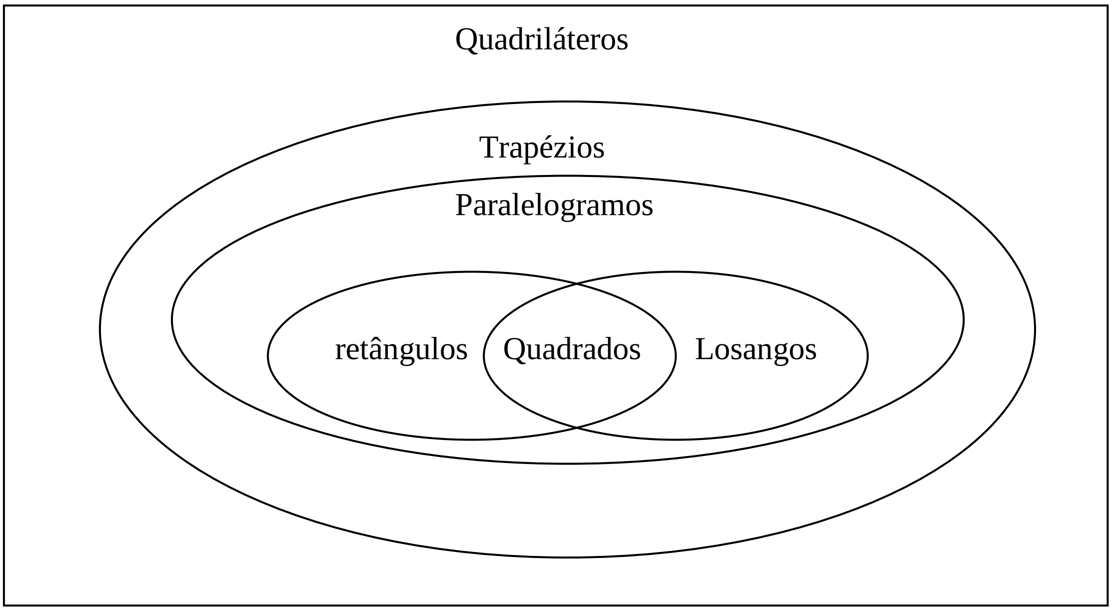


Figura 2.5: Classificação esperada em resposta à Atividade 2.3.

2.4.3 Parte 3

Temos como objetivo nas Atividades 3, 4, 5 e 6, o reconhecimento das propriedades de alguns quadriláteros notáveis, e trabalhar com a prova dessas propriedades, a partir do software Cabri, trabalhando no nível G1 e G2 de Parsysz.

Na Atividade 3, solicitamos a construção de um trapézio qualquer a partir de um triângulo qualquer; na atividade 4, a construção de um paralelogramo a partir de um triângulo retângulo. Para estas construções foram dados os procedimentos. Em cada atividade, foram dados três itens com lacunas a serem preenchidas, ver Figura 2.6, que levam a conclusões que poderão ajudar no último item, onde são pedidas as provas das propriedades em questão.

a) Quando os lados são paralelos dois a dois, ou seja, o trapézio pode ser chamado de _______________, os ângulos consecutivos ___________ suplementares e os ângulos opostos __________ (nunca, às vezes ou sempre) são ______________.

Figura 2.6: Exemplo de um item das atividades da Parte 3

Na Atividade 5, foi solicitada a construção um paralelogramo e a prova de que suas diagonais se interceptam no ponto médio.

Na Atividade 6, foi pedido que se construísse um losango a partir de retas perpendiculares e pontos eqüidistantes sobre retas, e provar que em qualquer losango AC é perpendicular a BD.

2.4.3.1 ANÁLISE *A PRIORI* DAS ATIVIDADES 3, 4, 5 E 6

Ao realizar esta atividade, esperávamos que as professoras conseguissem construir as figuras utilizando o Cabri, bem como encontrassem as medidas dos lados e dos ângulos e, em seguida, pudessem completar as lacunas deixadas. Esperou-se que a partir das figuras e das questões preenchidas elas fossem capazes de provar as propriedades solicitadas em cada atividade. E, mais, que elas pudessem sugerir alterações nas atividades, como por exemplo, alterar as figuras ou os textos das questões.

Possíveis soluções da parte 3

Atividade 3:

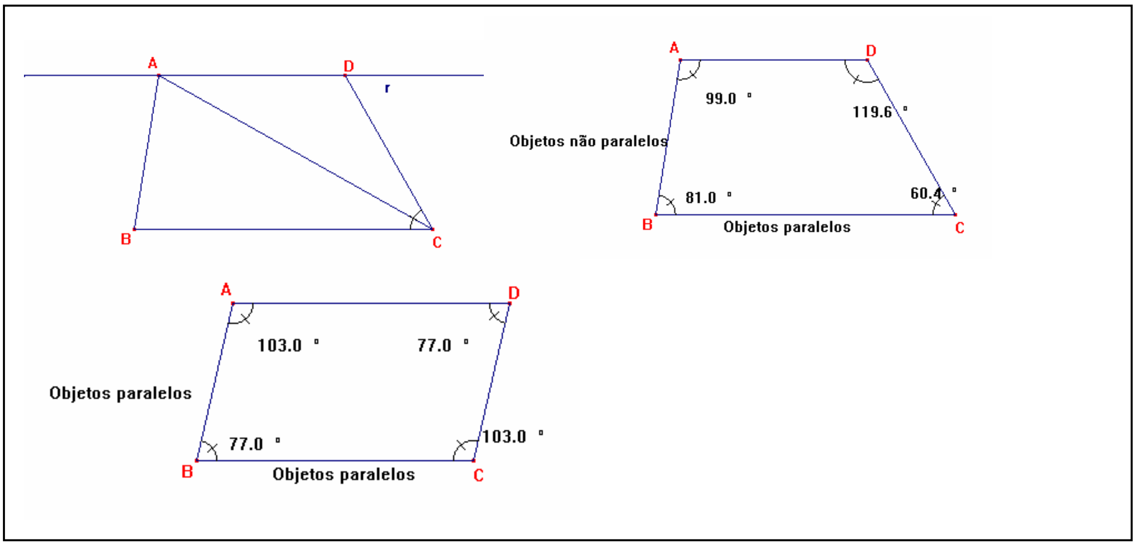


Fig. 2.7: Construção do trapézio da Atividade 3

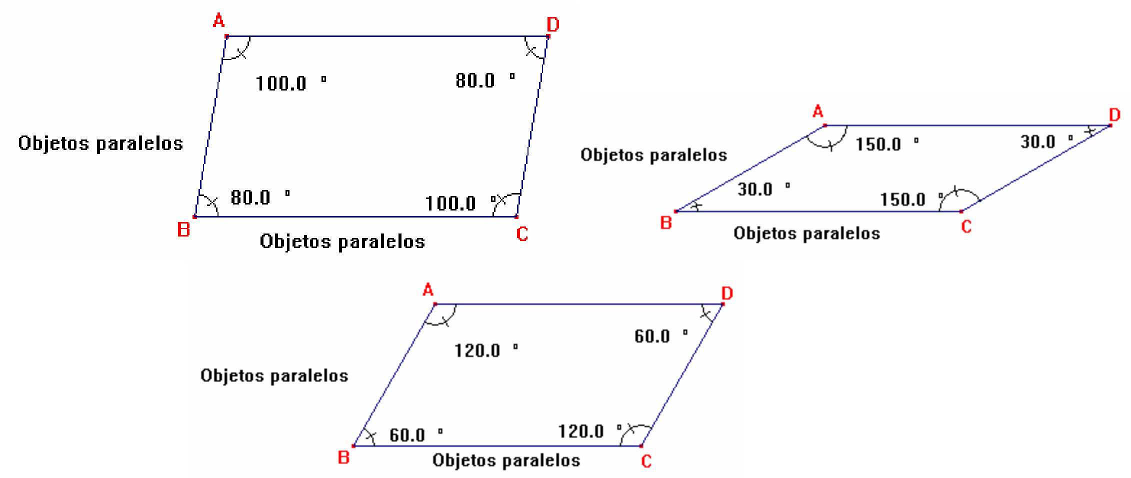
a) Quando dois lados são paralelos e os outros dois não são, os ângulos consecutivos **não são** dois a dois suplementares.

b) Quando os lados são paralelos dois a dois, ou seja, o trapézio pode ser chamado de **paralelogramo**, os ângulos consecutivos **são** suplementares e os ângulos opostos **sempre** (nunca, às vezes ou sempre) são **congruentes**.

c) Em retas paralelas cortadas por uma reta transversal, os ângulos colaterais internos são **suplementares**.

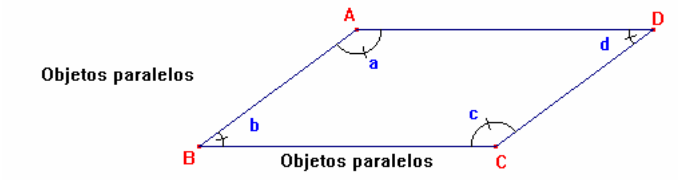
d) Esperou-se que as professoras usassem as informações acima e, provassem que em paralelogramos os ângulos opostos são congruentes, ou provassem da maneira que achassem mais conveniente.

A seguir apresentaremos, nas Figuras 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11, exemplos de provas pragmáticas e conceituais, para a afirmação a ser justificada na Atividade 3.



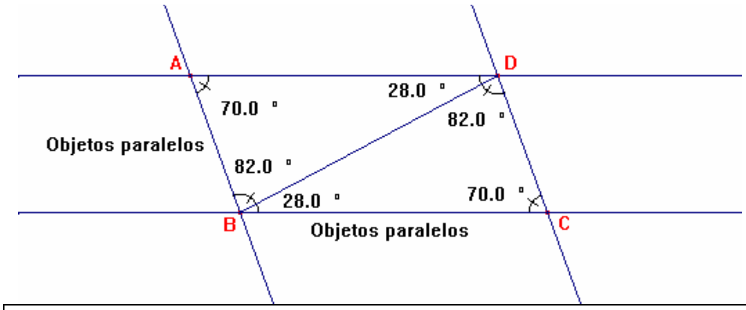
Eu testei 3 exemplos e deu certo, em todos eles os ângulos opostos são congruentes.

Fig. 2.8: Um exemplo de prova do tipo empirismo ingênuo.



Eu recortei os ângulos de um paralelogramo, e sobreponho os ângulos opostos e verifiquei que eles são congruentes.

Fig. 2.9: Um exemplo de prova do tipo experimento crucial.



Eu desenhei as retas paralelas cortadas por transversais e medi os ângulos.
82°= 82°(ângulos alternos internos em retas paral elas)
28°= 28°(ângulos alternos internos em retas paral elas)
Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°, temos que o ângulo A é 180°- (82 + 28) = 70° e que o ângulo C é 180°- (82 + 28) = 70°. Logo Â e Ĉ são congruentes.
O ângulo B é 82°+ 28°= 110 e o ângulo D é 82°+ 2 8°= 110°, logo O ângulo B é congruente ao ângulo D.

Fig. 2.10: Um exemplo de prova do tipo exemplo genérico.

Hipótese: O quadrilátero ABCD é paralelogramo. Tese: Â ≡ Ĉ e $\hat{B} \equiv \hat{D}$ Seja o quadrilátero ABCD um paralelogramo, então AB≡DC e AD≡BC. Se AC é a diagonal do paralelogramo ABCD. Assim temos que: pelo caso LLL de congruência de triângulos que o ΔABC ≡ ΔACD, logo o $\hat{B} \equiv \hat{D}$. Se BD é a diagonal do paralelogramo ABCD. Assim temos que: pelo caso LLL de semelhança de triângulos que o ΔABD ≡ ΔBCD, logo o Â ≡ Ĉ.

Fig. 2.11: Um exemplo de prova do tipo experimento de pensamento

Atividade 4:

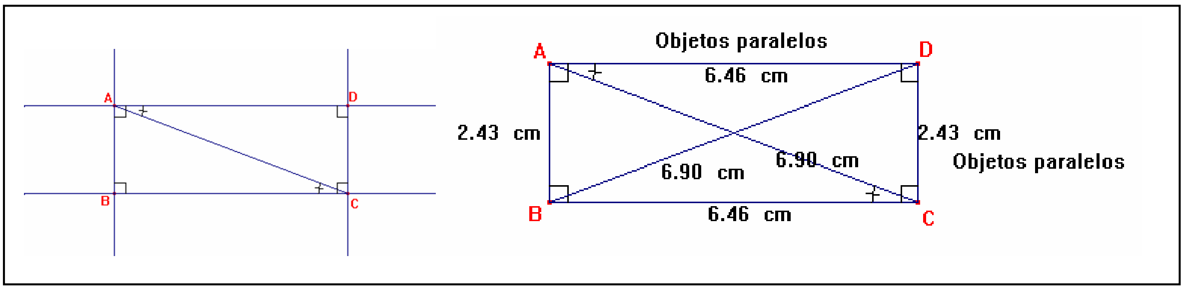


Fig. 2.12: Construção do paralelogramo da Atividade 4

a) Quando um paralelogramo tem seus ângulos de 90°, ele pode ser chamado de **retângulo**.

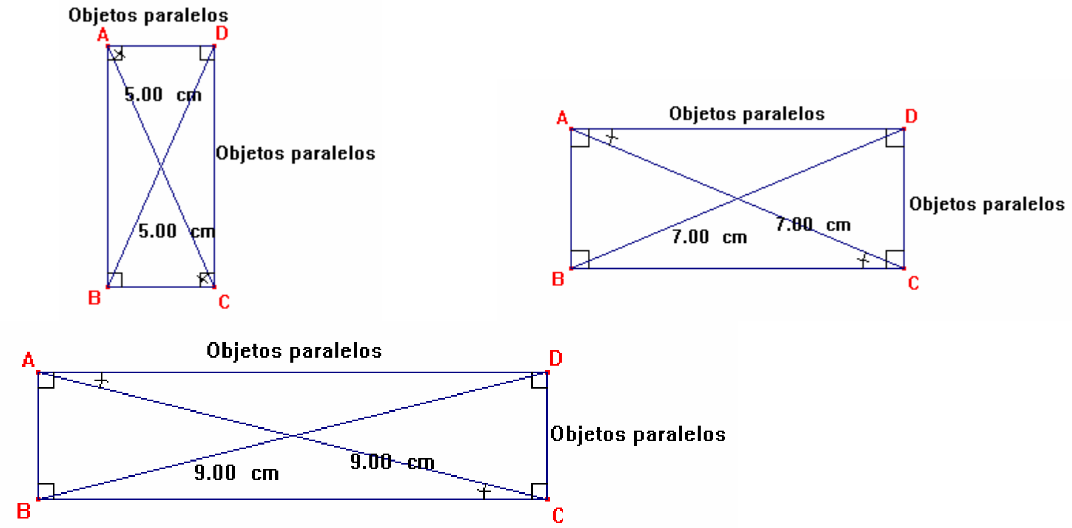
b) No retângulo, suas diagonais **sempre** (nunca, às vezes ou sempre) são congruentes.

c) Em retângulos, lados opostos são **paralelos** e **congruentes**.

d) Em dois triângulos, quando seus lados correspondentes são **congruentes** ou quando podemos afirmar que dois de seus lados correspondentes e o ângulo entre eles são congruentes, os dois triângulos também são **congruentes**.

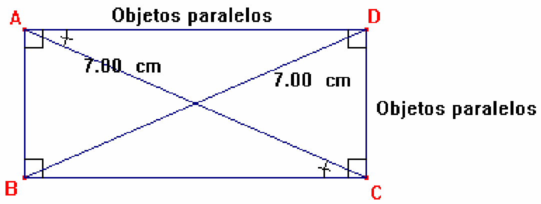
e) Neste item, esperou-se que as professoras utilizassem as informações acima e provassem que em retângulos as diagonais são sempre congruentes.

Novamente apresentaremos, nas Figuras 2.13, 2.14, 2.15 e 2.16, exemplos dos diferentes tipos de provas (segundo Balacheff, 1988) para o problema dado na Atividade 4:



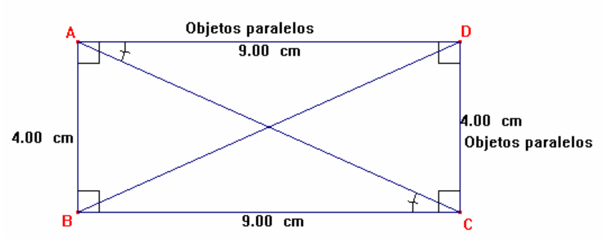
Eu testei 3 exemplos e deu certo, em todos eles as duas diagonais de cada retângulo têm as mesmas medidas.

Fig. 2.13: Uma prova do tipo empirismo ingênuo.



Eu desenhei dois retângulos do mesmo tamanho, recortei o primeiro na diagonal AC e o segundo na diagonal BD e encaixei a metade de um com a metade do outro e verifiquei que eram da mesma medida.

Fig. 2.14: Uma prova do tipo experimento crucial.



Med (AB) = 4 cm e med (AD) = 9 cm
Med (CD) = 4 cm e med (BC) = 9 cm
Méd (Â) = méd (Ĉ) = 90°
Então o ΔABD é congruente ao ΔBCD (caso LAL) Logo, AC é congruente a BD.

Fig. 2.15: Uma prova do tipo exemplo genérico.

Hipótese: O quadrilátero ABCD é retângulo.

Tese: AC ≡ BD

Seja o quadrilátero ABCD um retângulo, então AB≡DC e AD≡BC;

temos, ainda, que: med(Ĉ) = med($\hat{D}$) = 90°.

Se AC e BD são diagonais do retângulo ABCD. Assim, podemos concluir que, pelo caso LAL de congruência de triângulos que o ΔABC ≡ ΔBCD, logo a diagonal AC é congruente a diagonal BD.

Fig. 2.16: Uma prova do tipo experimento de pensamento.

Atividade 5:

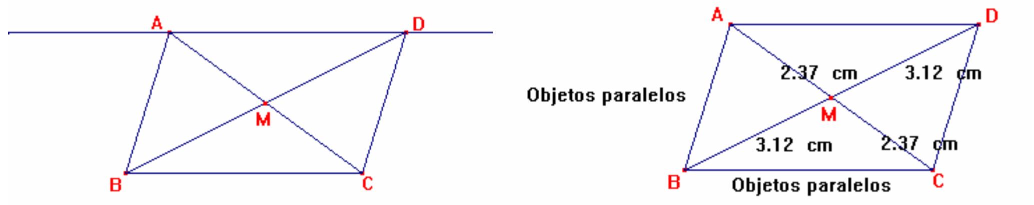


Fig. 2.17: Construção do paralelogramo da Atividade 5

Apresentamos em Figura 2.18 a resposta da Atividade 5, com todas lacunas preenchidas.

ABCD é um paralelogramo AB **é paralelo a** CD e AB **é congruente** CD, BÂC **é congruente ao** DĈA e $A\hat{B}D$ **é congruente** $C\hat{D}B$. (postulado das paralelas). Logo, pelo caso **ALA** de congruência de triângulos temos, ΔABM **é congruente ao** ΔCDM. Portando AM **é congruente ao** CM e BM **é congruente ao** DM.

Fig. 2.18: Resposta esperada na Atividade 5

Atividade 6:

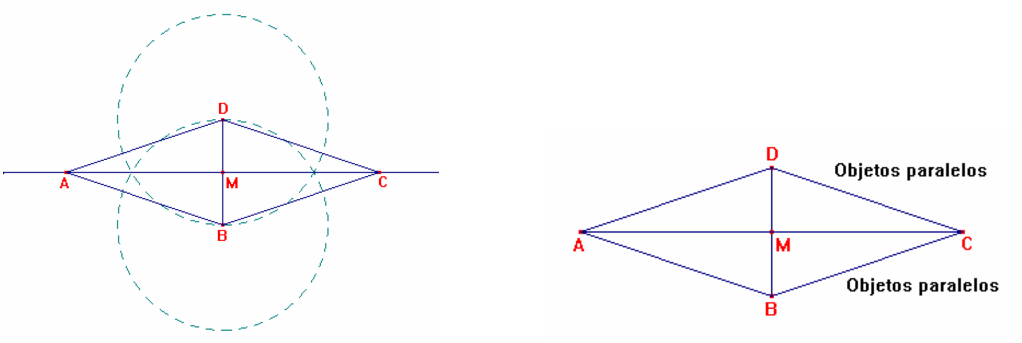


Fig. 2.19: Construção do losango da Atividade 6

Agora, apresentamos na Figura 2.20 a resposta da Atividade 6, com todas as lacunas preenchidas.

Por hipótese, o quadrilátero ABCD é **losango** e ABCD é paralelogramo. Assim, temos que AC ∩ BD é ponto médio (M). Pelo caso LLL de congruência de triângulos, temos:
ΔAMB ≡ ΔAMD ≡ ΔCMB ≡ ΔCMD. Logo, os ângulos de vértice M **sempre** (nunca, às vezes ou sempre) são **retos**. Portanto, AC é **perpendicular a** BD.

Fig. 2.20: Resposta esperada na Atividade 6.

No próximo capítulo, com os resultados obtidos durante a aplicação desta seqüência, relataremos sobre o desenvolvimento das atividades e as alterações propostas pelas professoras. Acreditamos que esse capítulo será de grande importância à pesquisa, pois mostrará as concepções e considerações, das professoras, sobre as propriedades dos quadriláteros e sobre o tema prova.

Capítulo 3

ANÁLISE DAS DISCUSSÕES NO GRUPO COLABORATIVO

3. Análise da resolução das professoras, suas reflexões e alterações

Nesse capítulo, apresentaremos nossa análise sobre as interações das professoras durante os encontros no grupo colaborativo. Apresentaremos as justificativas que as professoras deram a suas notas atribuídas às respostas dos dois itens do questionário trabalhados na fase 1 do projeto AProvaME (Anexo 2). E, em relação aos resultados obtidos durante a aplicação da seqüência, relataremos sobre seu desenvolvimento, a resolução, as reflexões das professoras e as alterações propostas por elas.

Em nossos estudos preliminares, constatamos que há dificuldade, por parte de alguns professores e pela maioria dos alunos, em classificar os quadriláteros de acordo com suas definições e, esta dificuldade é maior quando se trata de provar as propriedades dos quadriláteros. Notamos a necessidade de desenvolver atividades nas escolas no sentido de ajudar nossos alunos a se apropriarem dos processos de prova, já que queremos desenvolver em nossos alunos as competências matemáticas no sentido de explicarem e justificarem suas resoluções, ou seja, que eles saibam argumentar, demonstrar e provar. Neste sentido, organizamos uma seqüência didática que investisse no estudo dos temas trabalhados nessa pesquisa.

3.1 As avaliações das provas pelas professoras

Primeiramente, entretanto, consideramos como as professoras avaliam os diferentes tipos de provas, procurando nestas avaliações perceber certos aspectos de suas crenças e concepções sobre provas.

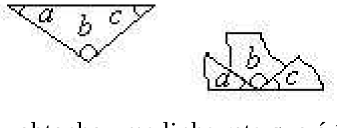
Na análise da questão G1, ambas Izabel e Eliane escolheram a resposta de Amanda, como a resposta mais parecida com a resposta que elas dariam. Ao avaliar cada resposta, elas trabalharam juntas e atribuíram as seguintes pontuações, numa escala de 0 a 10: Amanda 10, Dario 6, Hélia 7, Cíntia 8 e Edu recebeu 5 da Eliane e 6 da Izabel.

As professoras explicaram porque a resposta de Amanda recebeu a nota 10.

"A resolução da Amanda (reproduzida em Figura 3.1) *merece nota 10, pois é a explicação mais fácil do aluno entender que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º, não exige muitos conhecimentos para fazer a generalização, só é preciso conhecer ângulo raso (180º). E, também, é a explicação mais freqüente nos livros didáticos e a mais utilizada pelos professores, para provar que tal afirmação é verdadeira."*

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece. *Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.*

Figura 3.1: Resposta de Amanda à questão G1

A seguir, apresentaremos as notas dadas pelas professoras às outras respostas da questão G1:

“Demos nota 8 a resolução de Cíntia, pois é uma boa maneira de demonstrar a soma dos ângulos internos dos triângulos, mas elas não deram a nota 10, pois acreditam que exige alguns conhecimentos que muitos alunos não têm.

Julgamos que a maneira como Hélia mostrou era boa, mas como envolveu medição de ângulos, a nossa opinião é que ficaria mais difícil de fazer a generalização. Além disso, também expressaram aqui a preocupação de que o aluno ainda tem que saber mais teoria que a maneira proposta pela Amanda.

Na resposta de Dario, que recebeu a nota 6, elas discutiram com ele alguns exemplos, mas que não podemos generalizar para todos os demais, pois ele não trouxe nenhuma propriedade, diferentemente, em suas opiniões de Amanda.

Não gostamos da resposta de Edu, pois achamos estranho ele dizer para caminhar nos lados de um triângulo e depois usar 360°, sem explicar direito de onde veio esse valor.”.

Pensamos que é por falta de familiaridade com as propriedades destacadas no seu argumento, que Edu recebeu a nota 5 de Eliane e 6 de Izabel.

Analisando as respostas dadas para os itens da questão A1, as professoras escolheram a resposta de Beth, como sendo a mais parecida com a resposta que elas dariam. Ao avaliar cada resposta, elas atribuíram as seguintes pontuações: Artur 7, Beth 10, Duda 8, Franklin 4 e Hanna 5.

Elas argumentaram que a resolução de Beth (reproduzida em Figura 3.2) merece dez pelo fato de ser uma maneira fácil de entender o que se pretende provar, nessa prova com os cálculos feitos fica ainda mais fácil.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 = 6
2 + 4 = 6   4 + 4 = 8
2 + 6 = 8   4 + 6 = 10
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Figura 3.2: Resposta de Beth à questão A1

Achamos que é um pouco inconsistente que Dario recebeu nota 6 e Beth 10, sendo que, como Dario, Beth também não traz nada de propriedade. Talvez, na percepção destas professoras, o cálculo seja mais aceitável na Álgebra.

A seguir, vêm as justificativas das outras notas dadas pelas professoras às respostas da questão A1.

“A resposta de Duda também é uma maneira fácil, mas faltaram os cálculos, na opinião das professoras, e por esta razão não recebeu a nota máxima.

Achamos a resposta de Artur a melhor prova apresentada, mas como não é de fácil entendimento, pois o aluno tem que saber trabalhar com álgebra para entendê-la, assim não poderíamos dar a nota máxima para Artur.

A explicação de Hanna é um exemplo da prova do Artur, mas ficou *faltando mais exemplos, por isso demos uma nota menor que a de Beth.*

A prova de Franklin compara números com pontinhos e os números estão relacionados com diversas coisas e não apenas com bolinhas. Em nossa opinião, essa prova seria boa para as séries iniciais do Ensino Fundamental."

Quando analisamos as notas atribuídas pelas professoras pudemos observar que elas escolheram provas pragmáticas, aparentemente valorizando mais os argumentos empíricos que os conceituais. Entretanto, considerando suas justificativas, fica evidente que as avaliações dadas não estavam baseadas no critério de melhor prova no sentido da prova mais sofisticada. Elas interpretaram o pedido como uma indicação de prova mais próximo do que elas fariam na sala de aula com seus alunos e não necessariamente como elas provariam a afirmativa.

Precisamos, então, de certa cautela ao interpretar suas respostas. Não seria justo concluir que elas não têm nenhuma familiaridade com provas conceituais, apenas que elas não acham estas acessíveis para seus alunos. Além disso, parece que para seus alunos é importante a presença de exemplos. Sendo assim, vimos que será muito importante a seqüência didática para que elas comecem a refletir sobre o trabalho com provas conceituais, e como poderíamos levá-lo para a sala de aula.

Nas Tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 a seguir, apresentamos as respostas apresentadas pelos 1998 alunos que participaram da primeira fase do projeto AProvaME às questões G1 e A1.

Aos alunos foram pedidos a fazer duas escolhas: primeira, a prova que era mais parecida com a que eles dariam se tivessem que resolver a questão, e, segunda, a prova que na opinião deles receberia a melhor nota de seus professores.

A Tabela 3.1 mostra as respostas em relação a primeira escolha.

Amanda	Dario	Helia	Cintia	Edu	Total
463	642	391	227	222	1945
23,8%	33%	20,1%	11,7%	11,4%	100%

Tabela 3.1: Distribuição das respostas para a justificativa mais parecida (respostas em branco excluídas).

A Tabela 3.2 mostra as respostas que receberiam a melhor nota de seus professores.

Amanda	Dario	Helia	Cintia	Edu	Total
191	253	611	673	232	1960
9,7%	13%	31,2%	34,3%	11,8%	100%

Tabela 3.2: Distribuição das respostas para a justificativa que receberia a melhor nota (respostas em branco excluídas).

Podemos observar que a maioria dos alunos respondeu que faria a prova parecida com a de Dario, que recebeu das professoras a nota 6. Este tipo de prova corresponde a do tipo empirismo ingênuo, mostrando que a maioria dos alunos faria prova pragmática. A segunda mais popular, entre os alunos, foi a de Amanda que também é uma prova pragmática, e foi a que os professores participantes deram a nota 10, mas é interessante observar que dentre os alunos poucos pensaram que seus professores julgariam que este argumento merecia a melhor nota. A maioria respondeu que eles dariam a maior nota a resolução da Cíntia. Parece que os alunos têm uma noção do que é requerido para uma prova conceitual, mas também estão conscientes que eles teriam dificuldades ao produzi-la.

Em relação à questão A1, novamente, foi pedido aos alunos para fazer as duas escolhas já citadas anteriormente. A Tabela 3.3 mostra as respostas em relação à justificativa mais parecida com que eles dariam se tivessem que resolver a questão.

Artur	Beth	Duda	Franklin	Hanna	Total
182	1058	525	73	123	1961
9,2%	54%	26,8%	3,7%	6,3%	100%

Tabela 3.3: Distribuição das respostas para a justificativa mais parecida (respostas em branco excluídas).

A Tabela 3.4 mostra as respostas dos alunos à questão em relação a justificativa que receberia a melhor nota de seus professores.

Artur	Beth	Duda	Franklin	Hanna	Total
780	292	479	78	333	1962
39,7%	14,9%	24,4%	4%	17%	100%

Tabela 3.4: Distribuição das respostas para a justificativa que receberia a melhor nota (respostas em branco excluídas).

Nesta questão, podemos notar que a grande maioria dos alunos faria a resolução parecida com a de Beth, que neste caso recebeu a nota máxima das professoras participantes. Porém, a maioria dos alunos acredita que seus professores dariam a melhor nota a resolução de Artur. Os professores participantes também acreditam que esta resolução foi a melhor prova apresentada. Nesta questão, então, parece haver uma concordância entre alunos e professores participantes. E um problema claro é que os alunos têm uma tendência de construir provas tipo empirismo ingênuo, mas gostariam talvez, ou pelo menos valorizam, experimento de pensamento.

3.2 Discussão sobre a seqüência didática

Na seqüência didática, optamos por iniciar o trabalho com a classificação dos quadriláteros utilizando papel e lápis, ou seja, um trabalho desenvolvido no nível G1 de Parsysz, para que ao ser aplicada, permitisse um primeiro contato com a classificação e um reconhecimento das definições. Nas três partes da seqüência, a estratégia para o ensino e aprendizado dos temas foi por resolução de problemas. Durante o desenvolvimento das atividades, pudemos discutir as resoluções das professoras e, no final da aplicação das atividades elas opinaram sobre a aplicabilidade desta seqüência didática.

Durante a aplicação da seqüência, observamos que as professoras estavam tendo uma oportunidade de relembrar a classificação dos quadriláteros, pois já haviam esquecido, por exemplo, que os paralelogramos também são trapézios, de acordo com a definição de que trapézio é um quadrilátero que possui dois lados paralelos.

Constatamos no decorrer da seqüência o interesse das professoras em realizar as atividades, tanto que em várias atividades, elas se anteciparam e as trouxeram resolvidas de casa. Pudemos notar, ainda, que a seqüência foi muito importante para elas devido ao resgate de seus conhecimentos e, mais, de acordo com o questionário respondido antes da aplicação da seqüência, elas achavam muito difícil o trabalho com prova, e continuam pensando que é difícil, porém acreditam também que é necessário, e como diz Izabel *"que cabe, então, ao professor elaborar atividades que facilitem este aprendizado"*.

As discussões sobre a seqüência didática foram feitas com o objetivo de possibilitar o desenvolvimento de atividades, onde pudéssemos ir além dos argumentos empíricos, ou seja, chegar além de prova pragmática, podendo trabalhar com a prova conceitual. Importante, então, verificar como as professoras lidaram com esta passagem, tanto em termos de seus próprios conhecimentos matemáticos, quanto nas atividades que elas contemplam para seus alunos.

3.3 Análise da resolução das professoras, as reflexões e alterações

As repostas das professoras à seqüência didática serão apresentadas, na íntegra, no Anexo 3.

3.3.1 Respostas à Atividade 1

A primeira atividade envolveu a identificação de semelhanças e diferenças entre vários quadriláteros (Fig. 3.5), chegando a uma classificação de quadriláteros: retângulos e não retângulos – losangos e não losangos. As professoras completaram a atividade sem dificuldades.

A professora Izabel separou os quadriláteros em dois grupos. Ela explicou que em sua opinião, esta resposta também seria a de um grande número de alunos, como mostra a figura 3.3:

Fig. 3.3: Resposta da professora Izabel ao item b.

A Figura 3.4 mostra como a professora Eliane separou os quadriláteros.

Fig. 3.4: Resposta da professora Eliane ao item b.

Em nossas discussões sobre estas duas classificações, o grupo concordou que das respostas apresentadas pelas duas professoras, a mais próxima ao que os alunos poderiam apresentar seria a da Izabel e, diferentes. As professoras gostaram desta atividade e, acreditam que os alunos, possivelmente, também gostarão pelo fato de ter que pintar e recortar, como diz Eliane *"isto torna a aula de Matemática, diferente e menos cansativa"*.

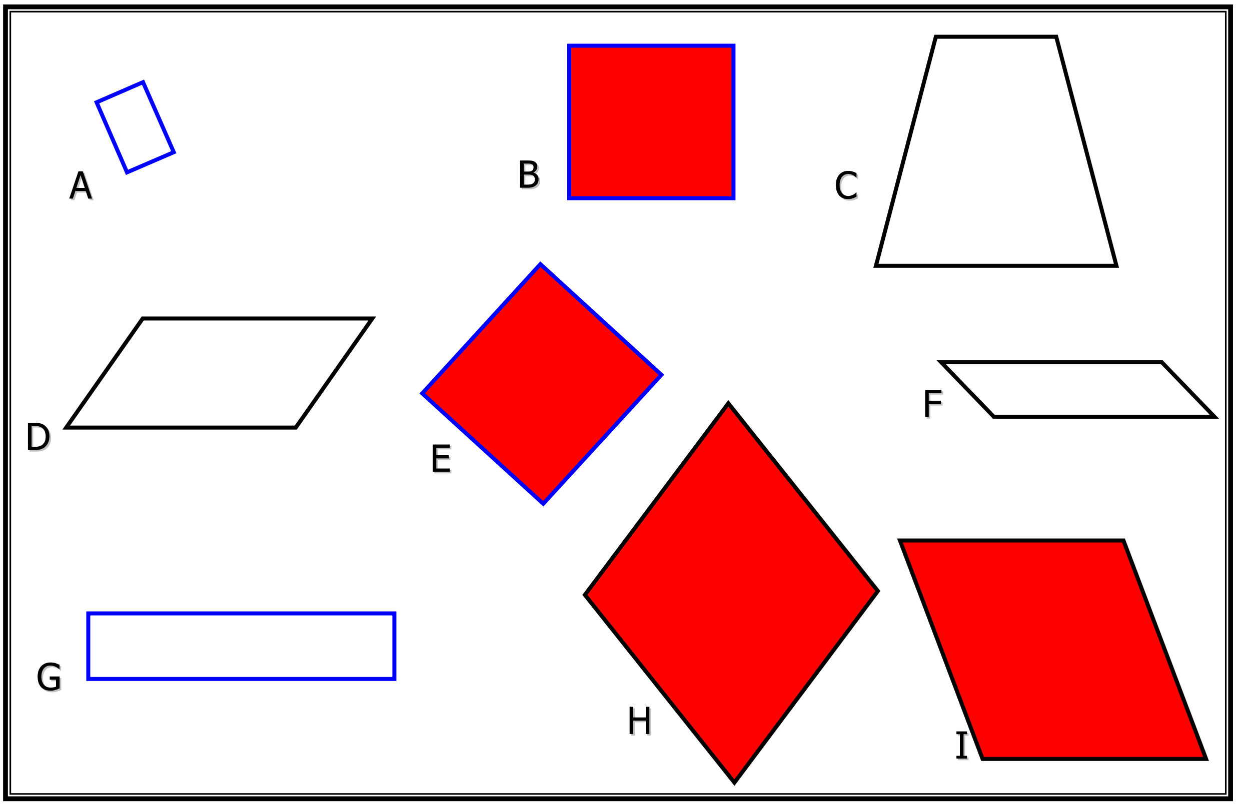


Fig. 3.5: quadriláteros da atividade 1

3.3.2 Respostas às atividades da parte 2

A Atividade 2.1 foi a primeira desta seqüência didática realizada com o uso do software Cabri Géomètre (Cabri). As professoras não tiveram dificuldades em utilizá-lo e nem em responder às questões, que envolviam identificações das propriedades dos quadriláteros. A professora Izabel já tinha usado este software em outras atividades, entretanto a professora Eliane não tinha muita familiaridade com o uso do Cabri, mas com um pouco de ajuda no início, ela conseguiu realizar as atividades sem dificuldades em utilizar as ferramentas necessárias.

Na resolução desta atividade, houve apenas uma divergência ao preencher o quadro das condições necessárias dos quadriláteros, como podemos ver nas Figuras 3.6 e 3.7.

Condições necessárias	quadrado	Retângulo	paralelogramo	losango	trapézio
Dois lados paralelos					**X**
Diagonais perpendiculares entre si	**X**	**X**			

Fig. 3.6: Resposta da Izabel ao item p.

Condições necessárias	quadrado	Retângulo	paralelogramo	losango	trapézio
Dois lados paralelos	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
Diagonais perpendiculares entre si	**X**			**X**	

Fig. 3.7: Resposta da Eliane ao item p.

A divergência nas respostas nos mostrou as diferentes interpretações no que se refere às condições necessárias de um quadrilátero. As respostas das professoras nos levaram a refletir, no grupo, sobre separadamente cada condição, dois lados paralelos é condição suficiente apenas ao trapézio, já que para os outros quadriláteros em questão, ela é uma conseqüência de uma outra condição necessária a eles, dois pares de lados paralelos. É possível que Izabel interpretou dois lados paralelos para o significado de apenas dois lados paralelos, embora ela não confirmou esta percepção.

Em relação à segunda divergência, ficou mais fácil de chegarmos a um entendimento. Concordamos que há retângulos que têm diagonais perpendiculares, porém são casos particulares como, por exemplo, o quadrado, mas não é condição necessária de todos os retângulos, prevalecendo a resposta da professora Eliane.

As professoras sugeriram que fizéssemos alterações na apresentação do quadro de figuras (ativ.2.fig), arquivo do Cabri, para ficar mais organizado e menos "poluído" visualmente (com as anotações das medidas solicitadas) e separar as questões em dois blocos. O primeiro bloco é referente a medidas dos lados e dos ângulos dos quadriláteros, já o segundo, a construção e medidas de suas diagonais. E, assim, para o segundo é necessário que seja aberto um novo arquivo com as mesmas figuras do primeiro.

Vejamos como ficará a Atividade 2.1 com as alterações solicitadas pelas professoras:

Na Atividade 2.1, o enunciado está assim: Usando o software Cabri-géomètre, abra o arquivo ativ.2.fig, e abaixo das figuras, diz, ainda, usando o arquivo que você abriu, faça o que se pede e responda às perguntas. Este enunciado deverá ficar assim: Usando o software Cabri-géomètre, para trabalhar com as propriedades dos quadriláteros. Devida a divisão em dois blocos, teremos que acrescentar, então, Atividade 2.1.1, com seguinte comando: Usando o Cabri, abra o arquivo ATIV2a e faça o que se pede em cada item abaixo. E, ainda, a Atividade 2.1.2, com este comando: Abra o arquivo ATIV2b e faça o que se pede em cada item abaixo.

No primeiro bloco, Atividade 2.1.1, serão inseridas as questões do Item (a) ao (i) da Atividade 2.1 e, no segundo bloco, Atividade 2.1.2, as questões do Item (j) ao (p), da proposta original.

É interessante notar que suas sugestões poderiam ser classificadas como organizacional e pedagógica. Elas não sugeriram mudanças no uso, por exemplo, do termo “necessário” que causou certas dificuldades, pelos menos à Izabel.

A Atividade 2.2 envolveu a classificação inclusiva dos quadriláteros, as professoras não tiveram dificuldades em utilizar o arquivo com as figuras e chegar às conclusões esperadas. Disseram que ficam bem claras questões como a de que todo quadrado é retângulo ou que um retângulo é um paralelogramo, entre outras. Nas respostas ao Item (e), elas descreveram todas as propriedades dos quadriláteros (Figuras 3.8 e 3.9).

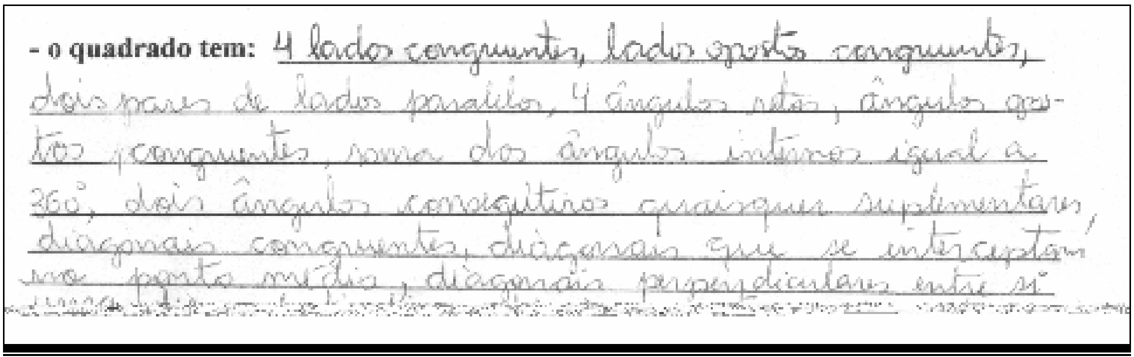

- o quadrado tem: 4 lados congruentes, lados opostos congruentes, dois pares de lados paralelos, 4 ângulos retos, ângulos opostos congruentes, soma dos ângulos internos igual a 360°, dois ângulos consecutivos quaisquer suplementares, diagonais congruentes, diagonais que se interceptam no ponto médio, diagonais perpendiculares entre si

Fig. 3.8: Resposta da Izabel ao item e da Atividade 2.2

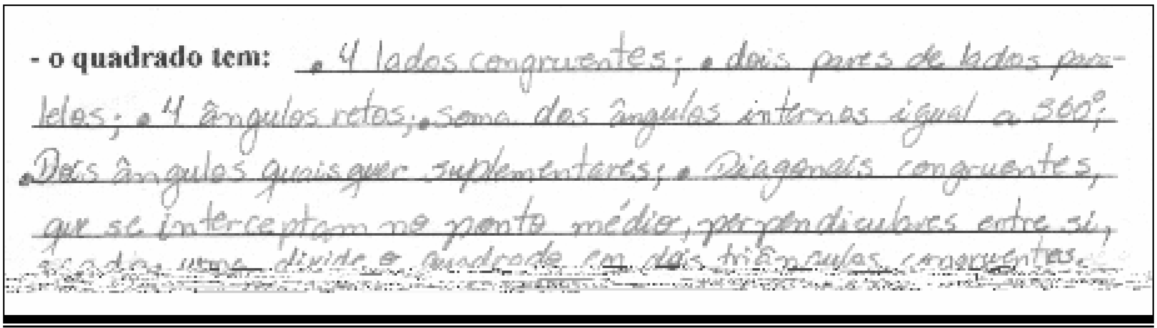

- o quadrado tem: • 4 lados congruentes; • dois pares de lados paralelos; • 4 ângulos retos; • soma dos ângulos internos igual a 360°; • Dois ângulos quaisquer suplementares; • Diagonais congruentes, que se interceptam no ponto médio, perpendiculares entre si, cada uma divide o quadrado em dois triângulos congruentes.

Fig. 3.9: Resposta da Eliane ao item e da Atividade 2.2.

Ao discutir esta questão, chegamos à conclusão de que será melhor limitar o número de características a serem respondidas no Item (e) desta atividade, a sugestão foi de que pedíssemos as características dos quadriláteros em relação aos lados e aos ângulos, pois estas características são as utilizadas nas definições dos quadriláteros, como podemos observar na Atividade 2.3, por exemplo, um retângulo é um quadrilátero com ambos os pares de lados opostos paralelos e seus ângulos são todos retos.

As professoras acharam a Atividade 2.3 muito importante, pois ela vem sistematizar o conhecimento construído nas atividades anteriores, deixando os conceitos mais organizados facilitando, assim, a aprendizagem destes.

Houve respostas diferentes no item perguntado se um losango é um retângulo (Item b(ii)).

Izabel: *É, pois possui as suas características.*

Eliane: *Não, pois apesar de ter 4 lados e dois pares de lados opostos paralelos, não possui 4 ângulos retos, característica fundamental de um retângulo.*

Na discussão sobre esta diferença, fica evidente que Izabel respondeu sim porque é possível criar losangos que também são retângulos, ou seja, quadrados. Assim, ao analisar esta questão, acreditamos que seria melhor trocar a palavra (um) por (todo), ou seja, em vez de perguntar “Um losango é um retângulo?”, mudar para “Todo losango é um retângulo?”, o que pode facilitar o entendimento para responder a essa questão.

Ao responder o Item (c) desta atividade, as professoras encontraram dificuldades em representar os conjuntos dos quadriláteros e, acreditam que os alunos também as terão, pois eles não estão familiarizados com esta representação na forma de diagrama.

No desenvolvimento das atividades até essa parte, as professoras disseram que a seqüência apresenta um excelente nível no que se refere aos conceitos e que proporciona uma construção do conhecimento pelo aluno, mas que há pontos, apesar de poucos, onde o professor precisará intervir, um destes pontos é o quadro do Item (p) da Atividade 2.1, deixando bem claro ao aluno o que vem a ser condições necessárias de um quadrilátero. Então, embora elas não tivessem sugerido mudanças no uso de terminologias, as discussões no grupo destacou este item como um dos que precisaria de uma atenção especial durante suas aulas. Um outro ponto é o Item (c) da Atividade 2.3, pois será necessário explicar ao aluno o que é um diagrama de Venn e, por exemplo, como representar uma intersecção entre conjuntos.

Nas partes 1 e 2, realizamos atividades no nível G1 de Parsysz, observamos que não houve dificuldades em sua realização, pois até aqui foi necessário identificar as propriedades dos quadriláteros, mas não teve a necessidade de explicá-las, ou seja, trabalhamos com uma geometria não-axiomática. A partir da terceira atividade, tentamos promover uma passagem do nível G1 para G2, de modo que não haja um abismo entre estes níveis. Mas, lembramos que no nível G2 ocorre a concepção de um esquema da realidade, nesse momento as definições fazem sentido. Os conceitos são objetos teóricos e as demonstrações dos teoremas são feitas a partir de premissas aceitas de modo intuitivo, que podem ser utilizadas em conjunto com técnicas dedutivas.

3.3.3 Respostas às atividades da parte 3

As atividades desta parte envolvem prova, a proposta é que as professoras construam as figuras e, a partir de um trabalho empírico, consigam construir uma prova conceitual, porém não há necessidade de relacionar os diferentes sistemas de axiomas (não envolvendo, assim o nível G3 de Parsysz).

Notamos que ao realizar estas atividades, as professoras utilizaram as ferramentas do Cabri para confirmar algumas propriedades conhecidas da figura solicitada, e, a partir destas propriedades, provou o que se pedia em cada uma destas atividades, as provas foram construídas utilizando as ferramentas do Cabri. Elas procederam da seguinte forma: construíram a figura conforme solicitado e foram preenchendo as lacunas dos itens das atividades, fazendo as verificações no computador, o que possibilitou a construção das provas finais, Item (d) da atividade 3 e Item (e) da Atividade 4.

Na Atividade 3, as professoras encontraram dificuldades na construção do trapézio a partir do procedimento sugerido, e então, propuseram que fossem realizadas alterações neste. O procedimento estava disposto dessa maneira:

Construa um trapézio qualquer a partir de um triângulo qualquer.

Procedimento: desenhar um triângulo, uma reta paralela a um dos lados, um ponto sobre a reta, desenhar outro triângulo com um vértice neste ponto sobre a reta, um vértice sobre o ponto de intersecção da reta e o primeiro triângulo e um vértice em outro vértice do primeiro triângulo, de forma que os dois triângulos formem um quadrilátero e uma de suas diagonais. Desenhar segmentos de reta sobre os quatro lados da figura. Esconder a reta e os dois triângulos, medir os ângulos do quadrilátero. Perguntar se os lados opostos são paralelos.

Devendo, então, ser alterado para:

Construa um trapézio qualquer a partir de um triângulo qualquer.

Procedimento:

a) Desenhar um triângulo qualquer.

b) Traçar uma reta paralela a um dos lados que passe pelo vértice oposto a ele.

c) Desenhar outro triângulo de modo que:

- um vértice ficará sobre a reta (em qualquer ponto);

- um vértice ficará no ponto de intersecção da reta com o primeiro triângulo;

- o terceiro vértice ficará no outro triângulo formando um quadrilátero com uma de suas diagonais.

d) Desenhar segmentos de reta sobre os lados do quadrilátero.

e) Esconder a reta e os dois triângulos.

f) Medir os ângulos do quadrilátero.

g) Perguntar se os lados opostos são paralelos.

Acreditamos que, assim, os comandos ficam mais claros e organizados, facilitando a construção do trapézio e também das figuras das Atividades 4 e 5.

Ao completar as lacunas dos itens propostos, nas Atividades 3 e 4, as professoras não tiveram dificuldades, porém ao responder o Item (d) da Atividade 3 e o Item (e) da Atividade 4 e, após as reflexões sobre estes itens, chegamos à conclusão de que seria um salto muito grande para o aluno, ao ter que escrever a prova, pois será a primeira vez na seqüência didática que ele terá essa tarefa. Então, concluímos que poderá ser melhor se, nestas duas atividades, a prova for colocada pelo professor, deixando lacunas para que o aluno possa completar, e assim, aprender a estruturar uma prova.

Vejamos como as professoras responderam as atividades desta parte 3:

Atividade 3

As respostas das professoras aos três primeiros itens da Atividade 3, foram iguais.

a) Quando dois lados são paralelos e os outros dois não são, os ângulos consecutivos não são dois a dois suplementares.

b) Quando os lados são paralelos dois a dois, ou seja, o trapézio pode ser chamado de paralelogramo, os ângulos consecutivos são suplementares e os ângulos opostos sempre (nunca, às vezes ou sempre) são iguais.

c) Em retas paralelas cortadas por uma reta transversal os ângulos colaterais internos são suplementares.

As respostas ao último item foram diferentes, conforme mostram as Figuras 3.10 e 3.11.

d) Com as informações acima, prove que em paralelogramos os ângulos opostos são congruentes.

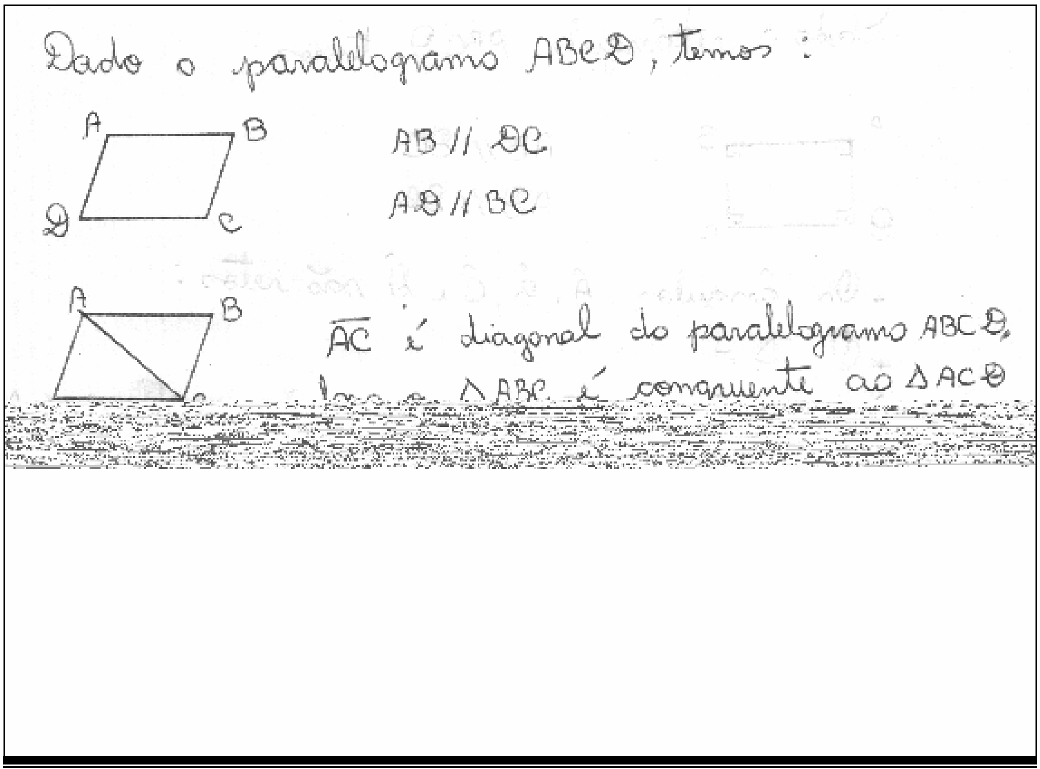
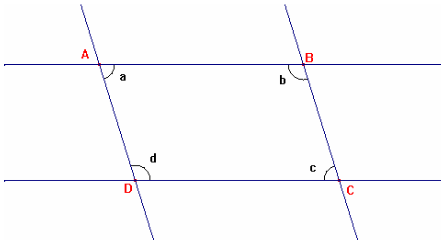


Fig. 3.10: Resposta da Izabel ao Item d da Atividade 3

Podemos classificar a resposta de Izabel como um experimento de pensamento, mas faltou parte da hipótese que ela está usando, ela não disse que AB é congruente a DC e que AD é congruente a BC, talvez por estas propriedades não fazerem parte do procedimento de construção no Cabri. Ela observou a congruência no próprio desenho construído na tela do computador e também sabia que esta é uma propriedade dos paralelogramos.



a + b = 180º e c + d = 180º, então
a + d = c + d => a = c, e

a + b = 180º e a + d = 180º, então
a + b = a + d => b = d.

Fig. 3.11: Resposta da Eliane ao Item d da Atividade 3

A professora Eliane fez o desenho em papel para ajudá-la em suas conclusões, não fez nenhuma justificativa, apesar de sua explicação. Porém, não há nenhuma propriedade explicativa. Fica difícil de usar, aqui, uma classificação de Balacheff (1988). Talvez ela não tenha colocado a justificativa, pois estava usando exatamente as propriedades destacadas nos itens iniciais da atividade.

Atividade 4

Izabel e Eliane deram respostas iguais e corretas aos três primeiros itens da Atividade 4.

a) Quando um paralelogramo tem seus ângulos de 90°, ele pode ser chamado de <u>retângulo</u>.

b) No retângulo, suas diagonais <u>sempre</u> (nunca, as vezes ou sempre) são congruentes.

c) Em retângulos, lados opostos são <u>congruentes</u> e <u>paralelos</u>.

d) Em dois triângulos, quando seus lados correspondentes são <u>congruentes</u> ou quando podemos afirmar que dois de seus lados correspondentes e o ângulo entre eles são congruentes, os dois triângulos também são <u>congruentes</u>.

As respostas ao último item foram diferentes, conforme mostram as Figuras 3.12 e 3.13.

e) Com as informações acima, prove que em retângulos as diagonais são sempre congruentes.

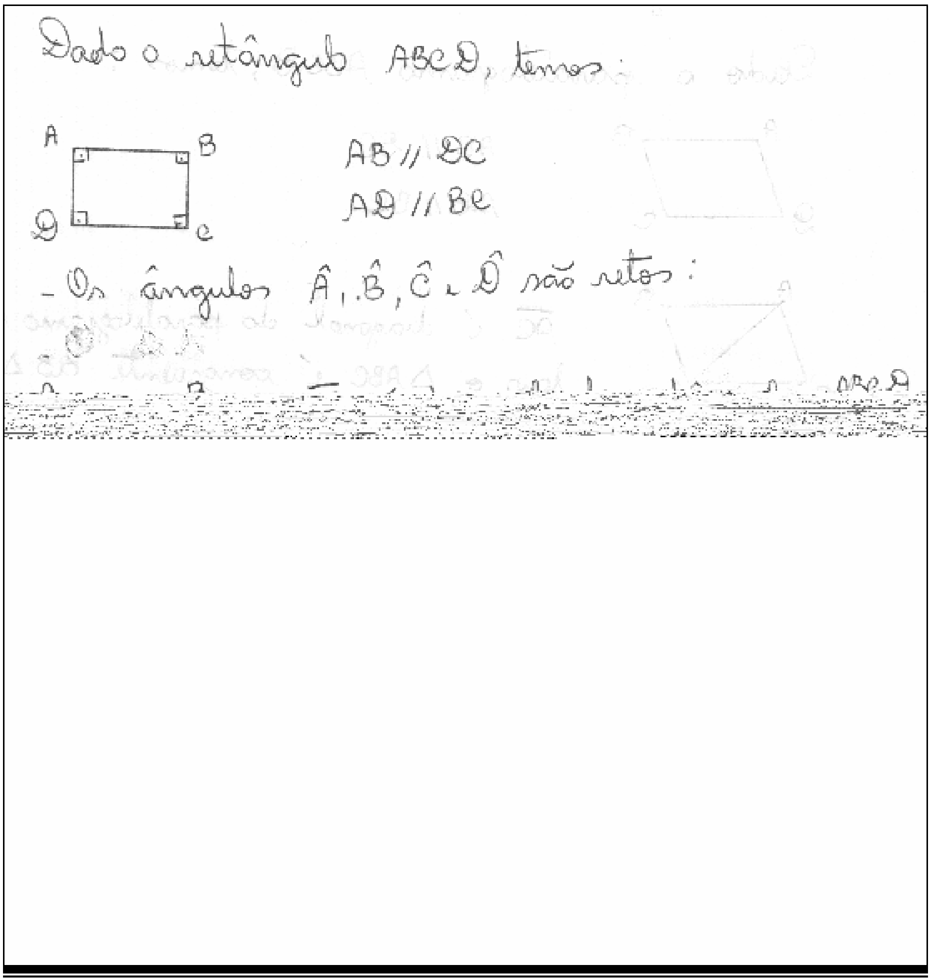


Fig. 3.12: Resposta da Izabel ao Item e da Atividade 4

A prova apresentada por Izabel é um exemplo de experimento de pensamento, ela uso o caso LAL de congruência de triângulos, mas novamente ela não coloca que os lados paralelos são congruentes dois a dois.

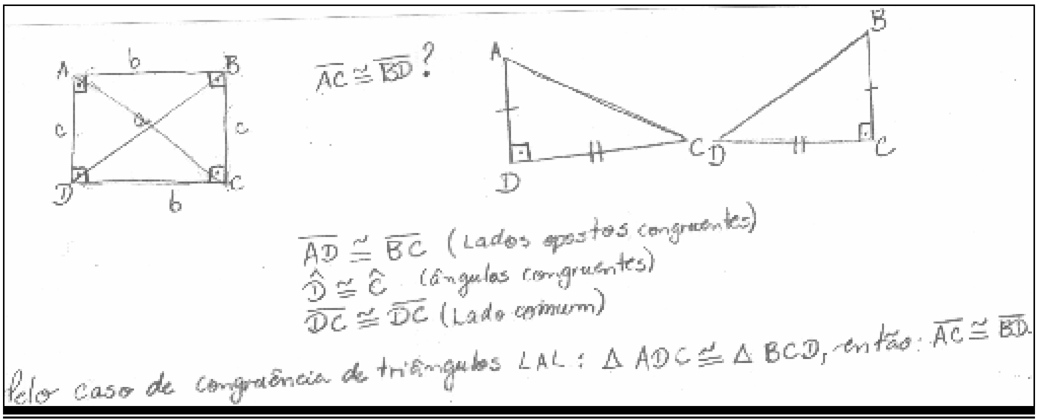


Fig. 3.13: Resposta da Eliane ao Item e da Atividade 4

A prova apresentada por Eliane, também é um exemplo de experimento de pensamento, mas também faltam as mesmas da prova da Izabel: ela não prova que os lados AD e BC são congruentes.

Atividade 5

Resposta da Izabel:

A Atividade 5 foi mais acessível, ambas preencheram corretamente as lacunas, Eliane fez o desenho para auxiliá-la, Figura 3.14.

ABCD é um paralelogramo AB <u>paralelo</u> CD e AB <u>congruente</u> CD, BÂC <u>congruente</u> D^CA e A^BD <u>congruente</u> C^DB. (postulado das paralelas). Logo, pelo caso <u>ALA</u> de congruência de triângulos temos, ΔABM <u>congruente</u> ΔCDM. Portando AM <u>congruente</u> CM e BM <u>congruente</u> DM.

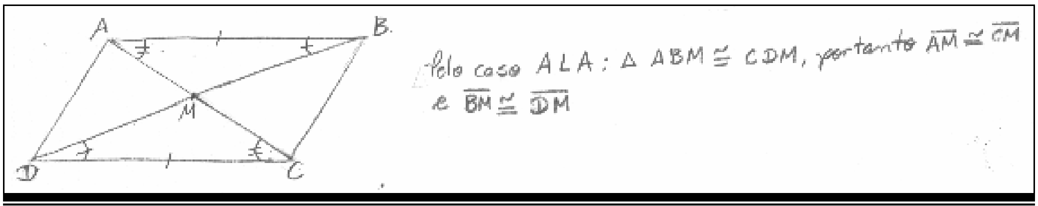


Fig. 3.14: Desenho apresentado por Eliane na resolução da Atividade 5

Atividade 6

Resposta da Izabel:

Por hipótese o quadrilátero ABCD é losango e ABCD é paralelogramo. Assim, temos que AC ∩ BD é ponto médio (M). Pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos:

ΔAMB ≡ ΔAMD ≡ ΔCMB ≡ ΔCMD. Logo, os ângulos de vértice M sempre (nunca, às vezes ou sempre) são iguais. Portanto, AC é perpendicular BD.

Resposta da Eliane:

Por hipótese o quadrilátero ABCD é losango e ABCD é paralelogramo. Assim, temos que AC ∩ BD é ponto médio (M). Pelo caso ALA de congruência de triângulos, temos:

ΔAMB ≡ ΔAMD ≡ ΔCMB ≡ ΔCMD. Logo, os ângulos de vértice M sempre (nunca, às vezes ou sempre) são iguais. Portanto, AC é perpendicular BD.

Olhando as respostas das professoras, fica evidente que ambas conseguiram utilizar condição de congruência de triângulos. Entretanto, estávamos esperando que usassem o caso LLL, e uma usou o caso ALA e a outra usou o caso LAL. São todos corretos, porém seguindo um raciocínio diferente, mas vejamos que no modelo as justificativas pela congruência de triângulo foram incompletas, e como conseqüência o raciocínio das professoras também é completamente justificado.

Nas discussões depois desta atividade, consideramos que a identificação da hipótese e da tese é um fator que dificultou a redação da prova. Isto é um obstáculo a ser transpassado, por professores, o que nos leva a acreditar que ela seja um obstáculo maior ainda, quando trabalhada com os alunos. Mas, acreditamos que, se o professor tiver facilidade nesta identificação, poderá ajudar seus alunos a superar este obstáculo.

Neste capítulo, apresentamos as respostas das professoras e as reflexões do grupo sobre o trabalho com argumentação e prova em Geometria, tivemos, também as justificativas das professoras para as suas notas atribuídas aos itens do questionário do projeto AProvaME. Durante a resolução das atividades da seqüência didática, constatamos que houve algumas dificuldades em tentar provar as propriedades de alguns quadriláteros. Apresentamos, neste capítulo, as alterações propostas pelo grupo, que constam na seqüência didática apresentada no Anexo 4.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho, conforme citado no Capítulo 2, foi a realização de um trabalho junto aos professores de Matemática da escola em que leciono, proporcionando-nos um momento de discussão e reflexão sobre o ensino e aprendizagem de prova em Geometria. Tivemos também como objetivo, a exploração de uma seqüência didática que pudesse nos ajudar nas discussões e que esta posteriormente possa vir a ser aplicada aos alunos da Educação Básica.

Sentimos a falta, no dia-a-dia da escola, de um espaço para discussão de temas pertinentes à disciplina, e um fator importante tanto para mim quanto para as professoras participantes foi esta oportunidade de estarmos juntos, refletindo sobre nossas concepções e crenças inerentes ao ensino de Matemática.

Para o desenvolvimento de algumas atividades, utilizamos o ambiente computacional – Cabri-géomètre – onde ao realizar estas atividades, pudessem ocorrer, de modo indutivo e dedutivo, a prova solicitada em cada uma.

Para alcançar o objetivo proposto, este estudo se deu em várias etapas. Inicialmente, foram realizadas algumas considerações sobre pesquisas anteriores que discutiram o tema prova, principalmente as considerações de Balacheff (1988) e de De Villiers (2001), sendo que as de Balacheff permeiam todo o desenvolvimento do trabalho, desde as análises das justificativas apresentadas nas questões G1 e A1 do questionário do AProvaME, até a resolução das atividades da seqüência didática.

Como o interesse da pesquisa baseia-se na prova e não nas propriedades dos quadriláteros, a análise realizada concentrou-se nas etapas do desenvolvimento dos diferentes tipos de provas que estão inseridas em duas categorias segundo Balacheff (1988), as pragmáticas e as conceituais. As provas pragmáticas caracterizam-se por seu caráter predominantemente indutivo, enquanto as conceituais por seu caráter dedutivo.

Durante a fase de desenvolvimento do trabalho, foi construída uma seqüência de atividades, que foi dividida em três partes, com a finalidade de induzir a construção de provas.

A fase de experimentação foi desenvolvida com um grupo colaborativo (duas professoras da mesma escola em que trabalho). Utilizamos o espaço da escola, contamos também com acesso aos computadores e a participação do professor/pesquisador. A escola citada é pública e de Ensino Médio, em uma pequena cidade no interior do Estado de São Paulo, a maioria de seus alunos é de classe baixa.

As professoras tinham alguns conhecimentos de informática, o que facilitou bastante nosso trabalho, a Izabel já conhecia o Cabri, e, embora Eliane não soubesse como utilizá-lo, bastaram algumas explicações e ela conseguiu se sair muito bem no uso das ferramentas deste software, necessárias às atividades da seqüência didática.

Nesta fase, de experimentação, os dados coletados envolveram as interações entre as professoras com as atividades, com o software e suas respectivas produções realizadas durante o trabalho. Todas as interações das professoras foram gravadas em áudio e suas produções computacionais e escritas devidamente arquivadas para análise.

Acreditamos que a metodologia adotada foi importante, pois permitiu que as professoras participantes vivenciassem dois momentos: no primeiro, realizaram uma reflexão sobre os diferentes tipos de provas quando analisaram os itens do questionário do projeto AProvaME. No segundo momento, resolvendo uma seqüência de atividades elaboradas por outra pessoa, sentindo e superando eventuais dúvidas ou dificuldades.

Nosso intuito foi preparar uma seqüência didática que favorecesse o processo de ensino e aprendizagem no trabalho com provas a, ao mesmo tempo, proporcionasse momentos de reflexão sobre o tema prova em nossa escola. Logo no primeiro encontro, quando as professoras tiveram que analisar os itens do questionário do AProvaME, elas tiveram oportunidade de refletir sobre suas concepções e crenças referentes ao tema.

No conjunto de atividades com o objetivo de construção de provas, observou-se como uma primeira característica das provas construídas pelas professoras, o uso de algumas propriedades levantadas em atividades anteriores, principalmente, na Atividade 2, o que era esperado, já que a finalidade de uma seqüência didática é que durante sua resolução ela possa subsidiar possíveis conclusões e possibilitar novos conhecimentos.

Nas provas construídas, ocorreu a inclusão de algumas justificativas

e também a importância de deixar claro todas as propriedades assumidas na tese quando apresentamos uma prova. No segundo pólo, acreditamos que a participação nas discussões no grupo chamou a atenção das possibilidades associadas com o ensino de prova, os tipos de argumentos, podemos esperar de nossos alunos e os desafios associados com a tentativa de mediar a passagem de provas pragmáticas para provas conceituais. No entanto, acreditamos que nem a seqüência original e nem a seqüência alterada dará conta de desenvolver todo conhecimento necessário, a ponto dos alunos escreverem sozinhos uma prova, principalmente, a prova conceitual.

Mesmo assim, acreditamos que nosso trabalho foi válido, no sentido de despertar nas professoras a consciência da necessidade de se trabalhar com este tema. E, ainda, proporcionou a elas o aprimoramento de conceitos relativos à Geometria.

O enfoque que demos sobre o tema prova subsidiou as professoras no sentido de refletir sobre as diferentes formas de redigir uma prova. E, também, refletir sobre como organizar e coordenar situações de aprendizagem. Observamos que as professoras desse grupo se deram conta de que não têm apresentado aos alunos atividades que lhes permitam vivenciar o tema. Importante observar que, durante a execução das atividades, as professoras preocuparam-se muito com a situação colocada a seus alunos, ou seja, como seus alunos resolveriam as atividades propostas.

As professoras tinham certa familiaridade com a Geometria, o que facilitou bastante nossos trabalhos, elas já tinham conhecimentos sobre as propriedades dos quadriláteros notáveis, então, nosso enfoque pôde ser mais centrado no tema prova.

Acreditamos que a abordagem seguida pela seqüência didática nos ajudou no desenvolvimento de nossas percepções sobre prova, proporcionando-nos um amadurecimento sobre o tema no sentido de repensarmos o ensino da

Durante a aplicação da seqüência didática o grupo propôs algumas alterações que foram consideradas. Estas alterações foram descritas no Capítulo 3 e a seqüência didática com as devidas alterações é apresentada no Anexo 4.

Frente a algumas dificuldades constatadas no decorrer da aplicação dessa seqüência didática, é de nosso interesse continuar os estudos sobre a introdução de argumentação e prova no ensino de Matemática, procurando aperfeiçoar essa seqüência didática.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. Pimm D. (ed.) *Mathematics, Teachers and Children.* London: Hodder and Stoughton, 1988.

BONGIOVANNI, V. As diferentes definições dos quadriláteros notáveis. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 55, p. 30-32, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais PCN: Matemática (3º e 4º Ciclos). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: ME/SEMT, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: ME/SEMT, 2002.

CASTRO, M. R. Argumentação e Provas em Educação Matemática. In: BAIRRAL, M. A; GIMÉNEZ, J. Geometria para 3º e 4º ciclos pela internet. Seropédia, RJ: EDUR, 2004.

COSTA, N. M. L. Formação de professores para o ensino da matemática com a informática integrada à prática pedagógica: exploração e análise de dados em bancos computacionais. Tese – Doutorado em Educação: Currículo. PUC/SP, São Paulo, 2004.

DE VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad.* Revista Educação e Matemática, nº 63, APM. Portugal. p. 33-36, 2001.

DOUEK, N.; PICHAT M. Do texto oral ao escrito: uma abordagem da argumentação matemática de longa duração nas séries iniciais. In: Vetor Neteclem: Série de divulgação científica em Educação Matemática. Campos de Goytacazes: Ed. da FAFIC, 2003.

GRAVINA, M. A. Ambiente de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-Dedutivo. Tese – Doutorado em Informática na Educação, UFRGS, Porto Alegre, 2001.

IEZZE, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. Matemática e Realidade: 7ª série do Ensino Fundamental. 4ª Ed. reform. São Paulo: Atual, 2000.

MACIEL, A. C. O conceito de semelhança: Uma proposta de ensino. Dissertação – Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2004.

MAGINA, S.; COSTA, N. L.; HEALY, L; PIETROPAOLO, R. Explorando os polígonos nas séries iniciais do ensino fundamental. São Paulo: Proem, 1999.

MELLO, E. G. S. Demonstração: “Uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino de geometria”. Dissertação – Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 1999.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. Argumentação e provas no ensino de matemática. Instituto de Matemática – Projeto Fundão, RJ, 2001.

PARSYSZ, B. Um cadre théorique pour la géometrie enseignée. Equipe DIDIREM, Université Paris-7, 2000.

PIETROPAOLO, R. C. (RE)Significar a Demonstração nos Currículos de Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática. Tese – Doutorado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2005.

VAZ, R. L. O uso das isometrias do software Cabri-géomètre como recurso no processo de prova e demonstração. Dissertação – Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2004.

ANEXOS

ANEXO 1

QUESTIONÁRIO RESPONDIDO POR ALUNOS NA FASE 1 DO PROJETO APROVAME

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
2*a* e 2*b* são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 = 6
2 + 4 = 6   4 + 4 = 8
2 + 6 = 8   4 + 6 = 10

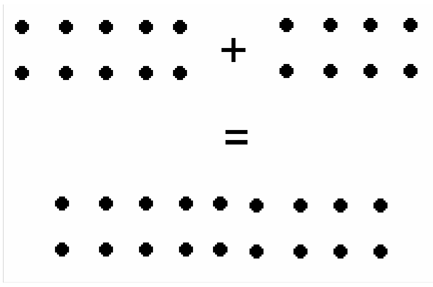
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando se soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?

Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?

Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?

Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

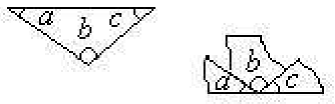
Justifique

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

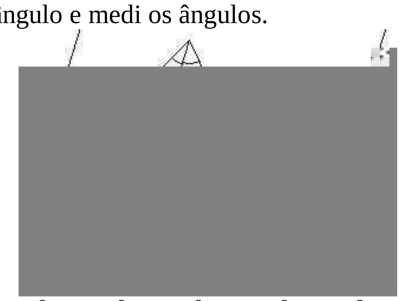
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180º.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

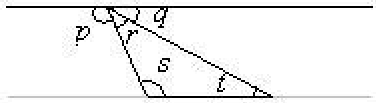
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^o - 28^o) + 28^o + 42^o + (90^o - 42^o) = 180^o$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



Afirmações	Justificativa
p = s......................... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
q = t .... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^o$..........	Ângulos numa linha reta.
$\therefore s + t + r = 180^o$	

Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você d

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra **apenas** que a afirmação é verdadeira para alguns triângulos..		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180^o.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

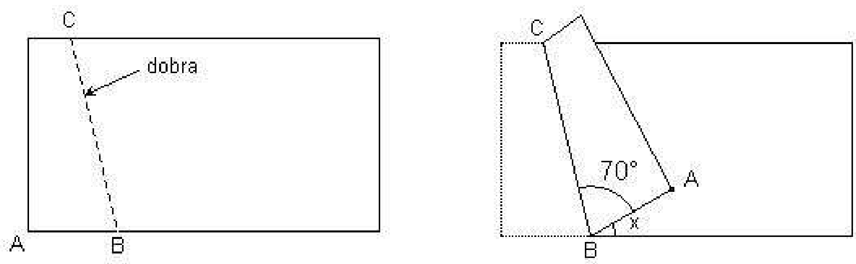
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

Quando se soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.

Minha resposta:

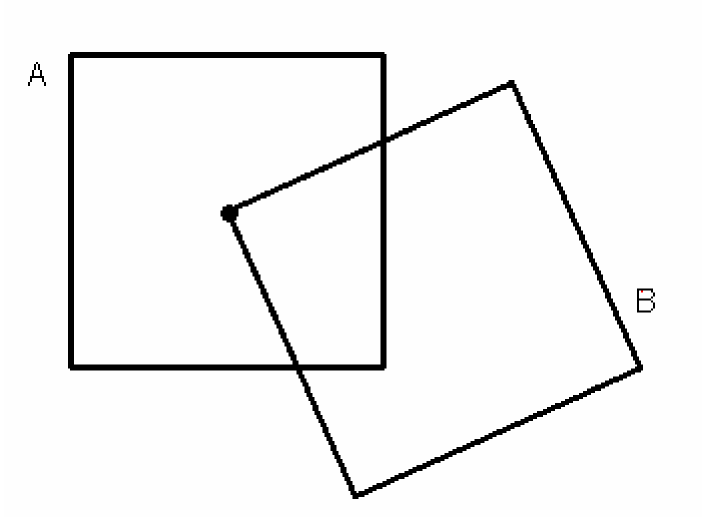
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Cíntia: é uma boa maneira de mostrar a soma os ângulos internos dos triângulos, mas exige alguns conhecimentos que muitos alunos não tem.

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4 \quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6 \quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8 \quad 4 + 6 = 10$

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

Programa de Estudos Pós Graduação em Educação Matemática

Questionário

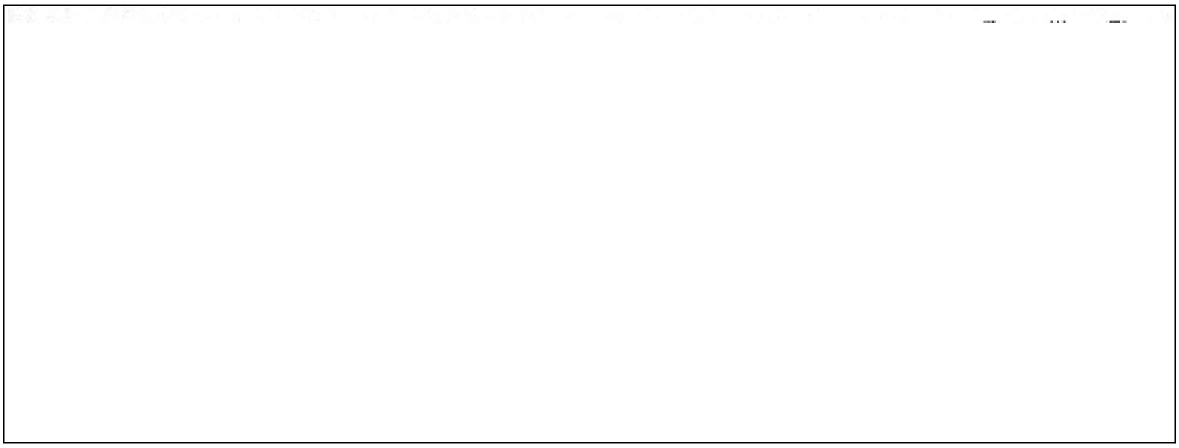
Caro Professor

Este questionário tem por objetivo fornecer subsídios para a compreensão do processo ensino/aprendizagem da matemática, mais especificamente, estudar o tema argumentação e prova.

Estamos preocupados com a qualidade do ensino, por isso acreditamos que suas respostas poderão nos ajudar a pensar em melhorias para o processo de ensino-aprendizagem.

1) Idade (em anos completos): 31

2) Tempo de magistério (em anos completos): 7



G1: Amanda, Dario Hélia, Cintia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

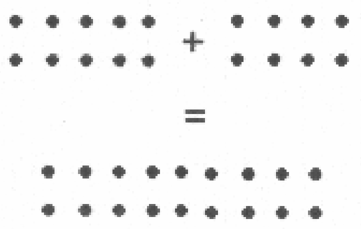
$2 + 2 = 4 \quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6 \quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8 \quad 4 + 6 = 10$

Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Resposta de Franklin



ANEXO 3

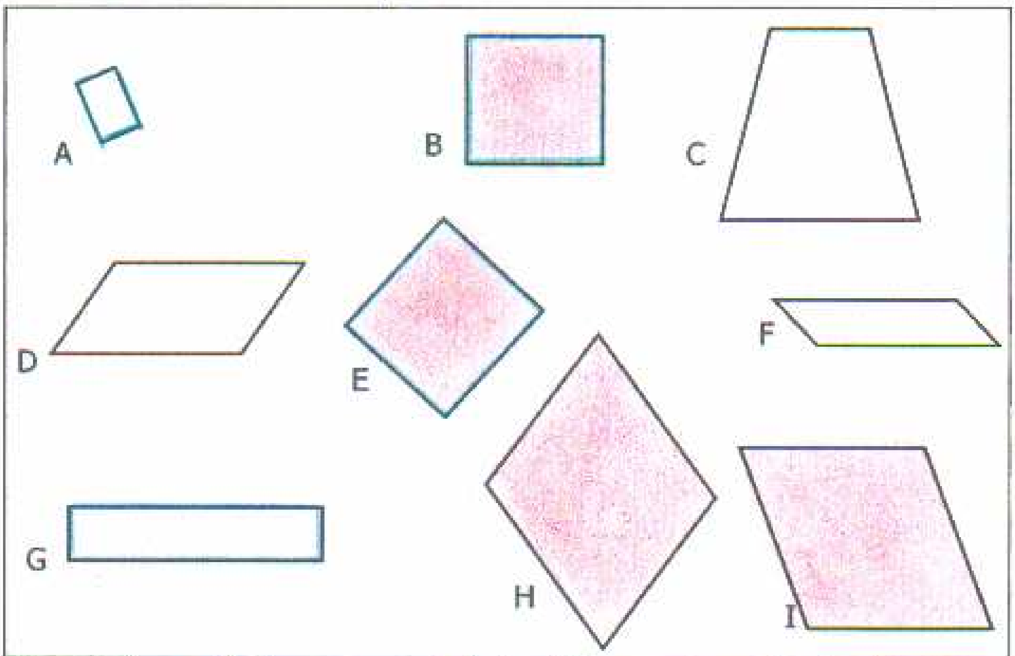
RESOLUÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA PELAS DUAS PROFESSORAS

Parte 1

Objetivo da atividade 1: Classificar quadriláteros, a partir da identificação de semelhanças e diferenças, trabalhando no nível G0 de Parsysz.

Atividade 1:

a) Analise cada um dos quadriláteros abaixo e encontre semelhanças e diferenças entre eles. A seguir, separe-os formando grupos.



a) semelhanças: todos possuem 4 lados / todos possuem lados // 2 a 2 dois a dois
b) diferenças: alguns possuem todos lados iguais / alguns têm ângulos internos iguais a 90°

b) Construa tabela e escreva os grupos que você formou, colocando dentro de cada um as letras correspondentes às figuras. O número de grupos que você irá formar vai depender do critério que você utilizou.

1º grupo: ângulos internos iguais a 90°: A, B, E e G
2º grupo: ângulos internos ≠ de 90°: C, D, F, H e I

c) Pinte de azul os lados dos quadriláteros que têm os quatro ângulos retos. Qual o nome desses quadriláteros?

Resp: O nome é retângulos

d) Verifique quais dos polígonos têm os quatro lados de medidas iguais. Pinte o

g) Responda as seguintes questões:

1ª) Todo retângulo é quadrilátero?

Resp: Sim

2ª) Todo quadrilátero é retângulo?

Resp: Não

3ª) Há quadriláteros que não são retângulos?

Resp: Sim

4ª) Há quadriláteros que são ao mesmo tempo retângulos e losangos?

Resp: Sim

5ª) Há quadriláteros que não são retângulos e nem losangos?

Resp: Sim

6ª) Todo quadrado é losango?

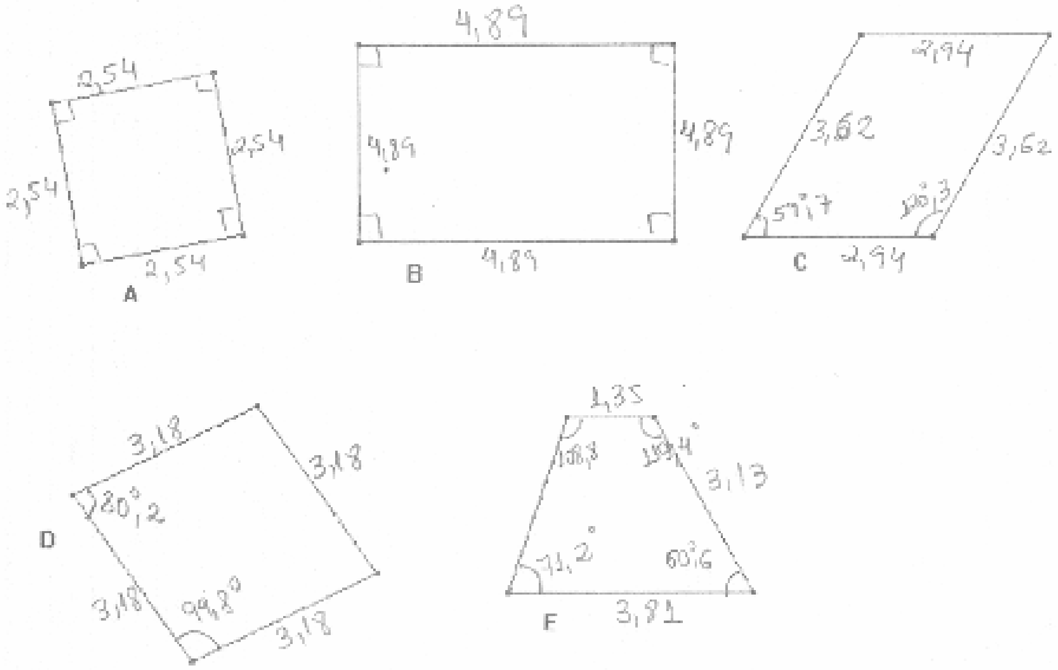
Resp: Sim

7ª) Todo losango é quadrado?

Parte 2

Objetivo da atividade 2: Reconhecimento das propriedades dos quadriláteros notáveis a partir do software Cabri, trabalhando no nível G1 de Parsysz.

Atividade 2.1: Usando o software Cabri-géomètre, abra o arquivo ativ.2 fig.



Usando o arquivo que você abriu, faça o que se pede e respondas às perguntas.

a) Encontre as medidas dos lados de cada um dos quadriláteros.

A, D

b) Quais figuras têm os quatro lados congruentes?

A, D

c) Quais figuras têm lados opostos paralelos congruentes?

A, B, C e D

d) Quais figuras têm dois lados paralelos?

Todas

e) Quais figuras têm dois pares de lados paralelos?

A, B, C e D

f) Encontre as medidas dos ângulos de cada um dos quadriláteros.

g) Quais figuras têm 4 ângulos retos?

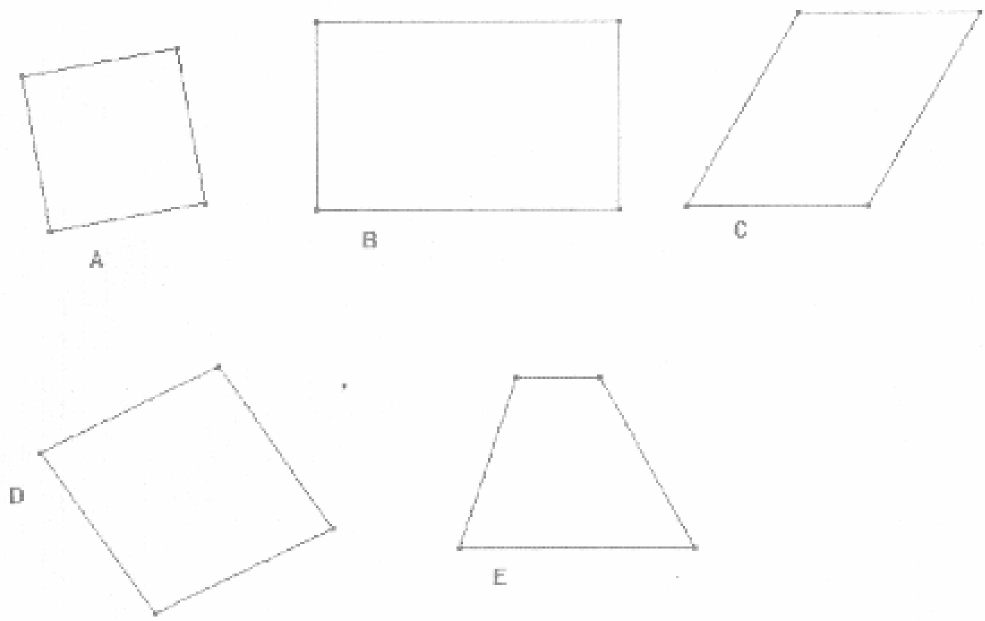
A e B

h) Quais figuras têm a soma dos ângulos internos igual a 360°?

Todas

i) Quais figuras têm ângulos consecutivos quaisquer suplementares?

Atividade 2.2: Abra, novamente, o arquivo ativ.2.fig.



a) Movimente a figura B e responda: em que outro(s) quadrilátero(s) o retângulo pode ser transformado? O que você conclui?

Atividade 2.2:

@ Pode ser transformado em: Losango, quadrado e paralelogramo

e) De acordo com as anotações feitas na tabela da atividade 2.a, item p, responda as principais caracteristicas dos quadriláteros:

- o quadrado tem: 4 lados congruentes, lados opostos congruentes, dois pares de lados paralelos, 4 ângulos retos, ângulos opostos congruentes, soma dos ângulos internos igual a 360°, dois ângulos consecutivos quaisquer suplementares, diagonais congruentes, diagonais que se interceptam no ponto médio, diagonais perpendiculares entre si, uma diagonal divide em dois △ congruentes e duas diagonais

- o retângulo tem:

lados opostos congruentes, (...e o resto é semelhante a resposta acima)

- o paralelogramo tem: lados opostos paralelos, dois [illegible]

Atividade 2.3: Sistematizando as definições

a) Vamos observar as definições de cada um dos quadriláteros e relacionar com as conclusões tiradas nas atividades 2.1 e 2.2.

"Um paralelogramo é um quadrilátero com ambos os pares de lados opostos paralelos."

De acordo com a definição acima, um paralelogramo possui as seguintes características:

i) é um quadrilátero, isto é, possui 4 lados.

ii) possui dois pares de lados opostos.

iii) lados paralelos: colocando duas réguas sobre os lados opostos, você verificará que eles não se cruzam, mesmo que o tamanho da régua seja prolongado.

Através dessa definição e de acordo com as conclusões tiradas, quais os quadriláteros que são paralelogramos, isto é, que possuem essas caracteristicas?

quadrado, retângulo e losango

"Um losango é um paralelogramo cujos lados são todos congruentes."

Pela definição, temos que um losango possui as seguintes características:

i) é um paralelogramo, isto é, possui todas as características citadas anteriormente: possui 4 lados e ambos os pares de lados opostos paralelos.

ii) todos os lados são congruentes.

* iii) Os quadriláteros que são losangos, pois possuem essas características são:

quadrados

"Um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são todos retos."

Agora é sua vez. Pela definição temos que um retângulo possui as seguintes caracteristicas:

i) é um paralelogramo, pois possui 4 lados, dois pares de lados opostos paralelos.

ii) todos os ângulos são retos, pois os lados consecutivos são perpendiculares.

iii) Quais os quadriláteros que são retângulos?

quadrado

"Um quadrado é um retângulo cujos lados são todos congruentes."

Por definição, um quadrado possui as seguintes caracteristicas:

i) é um retângulo, pois: todos os ângulos são retos

ii) todos os lados são congruentes: pois têm a mesma medida

iii) Quais os quadriláteros que são quadrados?

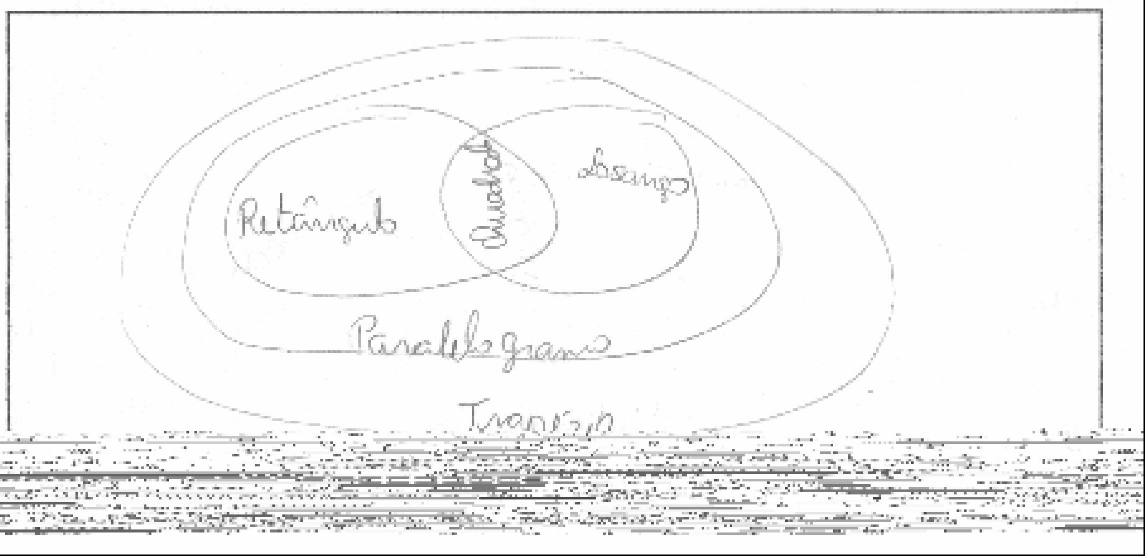
Só o quadrado

b) Relendo as definições e as conclusões que você tirou até aqui, responda às seguintes questões:

i) Um quadrado é ao mesmo tempo retângulo e losango? Por quê?

Sim, pois possui as caracteristicas dos dois

c) Represente abaixo, por um diagrama de Venn, os conjuntos dos quadriláteros notáveis.



Parte 3

Objetivo das atividades 3, 4, 5 e 6: Reconhecimento das propriedades de alguns quadriláteros notáveis a partir do software Cabri, trabalhando no nível G1 e G2 de Parsysz.

Atividade 3: Pede-se:

Construa um trapézio qualquer a partir de um triângulo qualquer.

Procedimento: desenhar um triângulo, uma reta paralela a um dos lados, um ponto sobre a reta, desenhar outro triângulo com um vértice neste ponto sobre a reta, um vértice

d) Em dois triângulos quando seus lados correspondente são congruentes ou

Atividade 3

1) P [illegible] pontos

Atividade 4 :

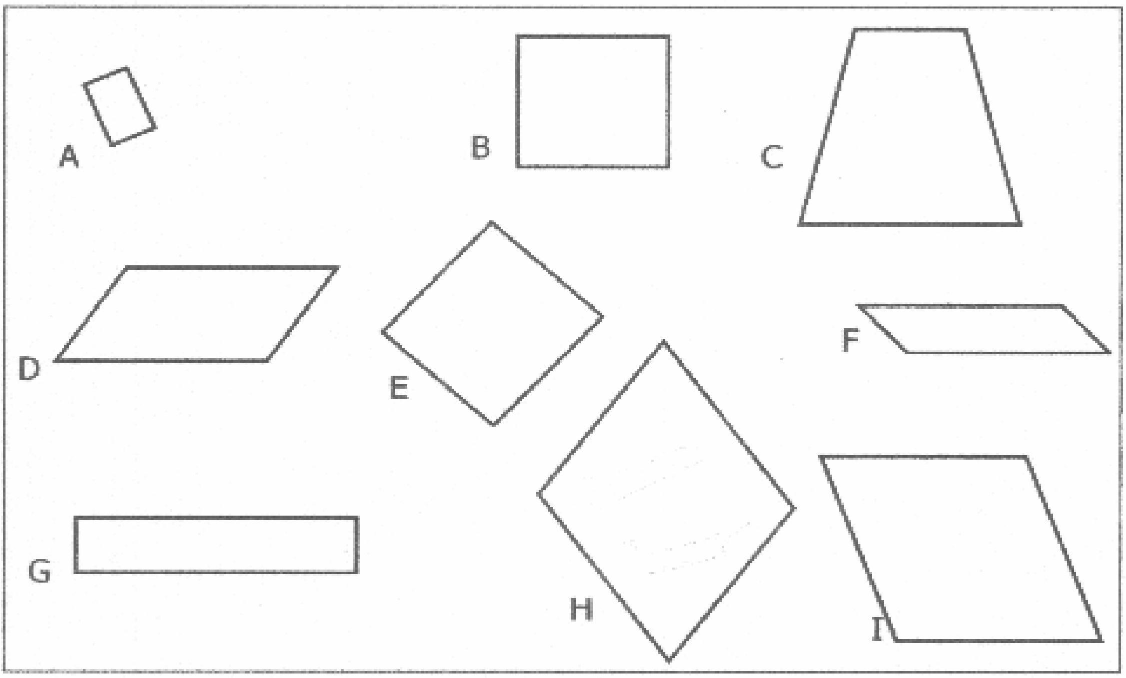
② Prove que em retângulos as diagonais são

Parte 1

Objetivo da atividade 1: Classificar quadriláteros, a partir da identificação de semelhanças e diferenças, trabalhando no nível G0 de Parsysz.

Atividade 1:

a) Analise cada um dos quadriláteros abaixo e encontre semelhanças e diferenças entre eles. A seguir, separe-os formando grupos.



b) Construa tabela e escreva os grupos que você formou, colocando dentro de cada um as letras correspondentes às figuras. O número de grupos que você irá formar vai depender do critério que você utilizou.

Atividade 1

ⓐ Análise das semelhanças e diferenças dos quadriláteros:

- Semelhanças:

- Todas as figuras possuem quatro lados;
- Todas possuem pelo menos 1 par de retas paralelas (1 par de lados paralelos)

- Diferenças:

- Nem todas as figuras possuem ângulos retos;

c) Pinte de azul os lados dos quadriláteros que têm os quatro ângulos retos. Qual o nome desses quadriláteros?

Retangulos: A, B, E e G

d) Verifique quais dos poligonos têm os quatro lados de medidas iguais. Pinte o interior desses quadriláteros de vermelho. Qual o nome desses quadriláteros?

Losangos: B, E, H e I

e) Escreva as letras dos quadriláteros que não foram pintados nenhuma vez?

C, D e F

f) Recorte as figuras e as disponha convenientemente no quadro abaixo. Discuta com

g) Responda as seguintes questões:

1ª) Todo retângulo é quadrilátero?

Sim.

2ª) Todo quadrilátero é retângulo?

Não.

3ª) Há quadriláteros que não são retângulos?

Sim (losangos).

4ª) Há quadriláteros que são ao mesmo tempo retângulos e losangos?

Sim (quadrados).

5ª) Há quadriláteros que não são retângulos e nem losangos?

Sim (exemplos: C, D e F).

6ª) Todo quadrado é losango?

Sím.

7ª) Todo losango é quadrado?

Não.

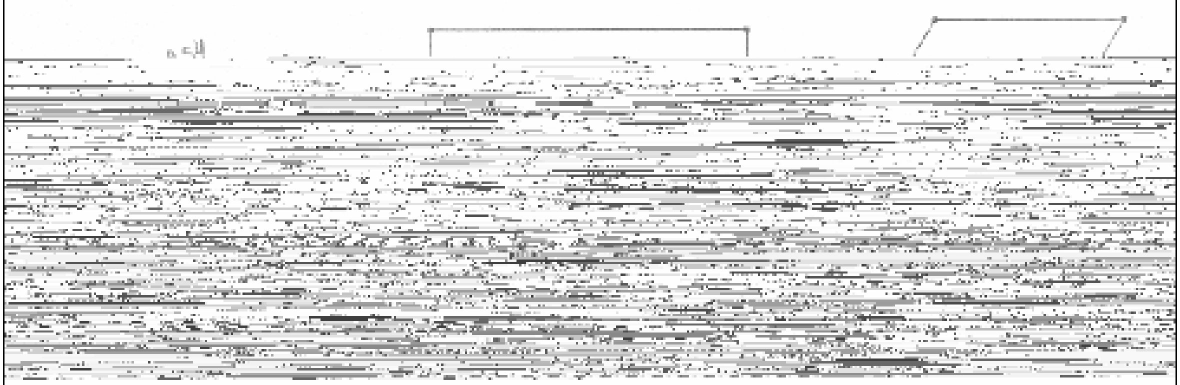
8ª) O que é um quadrado?

É um polígono com quatro ângulos retos e quatro lados de medidas iguais.

Parte 2

Objetivo da atividade 2: Reconhecimento das propriedades dos quadriláteros notáveis a partir do software Cabri, trabalhando no nível G1 de Parsysz.

Atividade 2.1: Usando o software Cabri-géomètre, abra o arquivo ativ.2.fig.



Usando o arquivo que você abriu, faça o que se pede e respondas às perguntas:

a) Encontre as medidas dos lados de cada um dos quadriláteros.

b) Quais figuras têm os quatro lados congruentes?

A e D.

c) Quais figuras têm lados opostos paralelos congruentes?

A, B, C e D.

d) Quais figuras têm dois lados paralelos?

A, B, C, D e E.

e) Quais figuras têm dois pares de lados paralelos?

A, B, C e D.

f) Encontre as medidas dos ângulos de cada um dos quadriláteros.

g) Quais figuras têm 4 ângulos retos?

A e B.

h) Quais figuras têm a soma dos ângulos internos igual a 360°?

A, B, C, D e E (TODAS).

i) Quais figuras têm ângulos consecutivos quaisquer suplementares?

A, B, C e D.

j) Trace as diagonais de cada um dos quadriláteros, determine suas medidas e dos ângulos formados por elas.

k) Quais figuras apresentam suas duas diagonais congruentes entre si?

A e B.

l) Em quais figuras as diagonais são perpendiculares entre si?

A e D.

m) Em quais figuras as diagonais se interceptam no ponto médio?

A, B, C e D.

n) Em quais figuras uma diagonal divide a figura em dois triângulos congruentes?

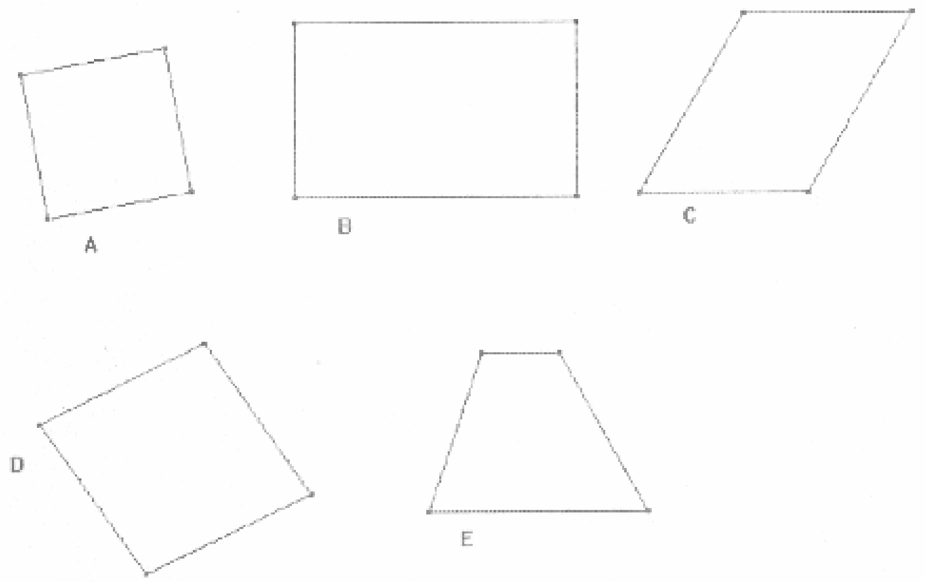
A, B, C e D.

o) Em quais figuras as diagonais dividem a figura em dois pares de triângulos congruentes?

A, B, C e D.

p) Observe o quadro fornecido. Para preenchê-lo você deverá recorrer às anotações feitas nos desenhos.

Atividade 2.2: Abra, novamente, o arquivo ativ 2.fig.



a) Movimente a figura B e responda: em que outro(s) quadrilátero(s) o retângulo pode ser transformado? O que você conclui?

Pode ser transformado em quadrado e losango. Concluo que todo quadrado é um retângulo, pois alterando-se as medidas dos lados, as medidas dos ângulos se mantém.

b) Movimente a figura C e responda em que outro(s) quadrilátero(s) o paralelogramo pode ser transformado? O que você conclui?

Pode ser transformado em retângulo, quadrado e losango. Concluo que todo retân- [illegible]

e) De acordo com as anotações feitas na tabela da atividade 2.a, item p, responda as principais características dos quadriláteros:

Atividade 2.3: Sistematizando as definições

a) Vamos observar as definições de cada um dos quadriláteros e relacionar com as conclusões tiradas nas atividades 2.1 e 2.2.

"Um paralelogramo é um quadrilátero com ambos os pares de lados opostos paralelos."

De acordo com a definição acima, um paralelogramo possui as seguintes características:

i) é um quadrilátero, isto é, possui 4 lados.

ii) possui dois pares de lados opostos.

iii) lados paralelos: colocando duas réguas sobre os lados opostos, você verificará que eles não se cruzam, mesmo que o tamanho da régua seja prolongado.

Através dessa definição e de acordo com as conclusões tiradas, quais os quadriláteros que são paralelogramos, isto é, que possuem essas características?

retângulo, quadrado e losango.

"Um losango é um paralelogramo cujos lados são todos congruentes."

Pela definição, temos que um losango possui as seguintes características:

i) é um paralelogramo, isto é, possui todas as características citadas anteriormente: possui 4 lados e ambos os pares de lados opostos paralelos.

ii) todos os lados são congruentes.

iii) Os quadriláteros que são losangos, pois possuem essas características são:

quadrados e losangos

"Um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são todos retos."

Agora é sua vez. Pela definição temos que um retângulo possui as seguintes características:

i) é um paralelogramo, pois possue 4 lados e dois pares de lados opostos paralelos.

ii) todos os ângulos são retos, pois os lados formam entre si ângulos de 90°.

iii) Quais os quadriláteros que são retângulos?

quadrados

"Um quadrado é um retângulo cujos lados são todos congruentes."

Por definição, um quadrado possui as seguintes características:

i) é um retângulo, pois: possue 4 lados, dois pares de lados opostos paralelos e todos os ângulos são retos.

ii) todos os lados são congruentes: possuem a mesma medida.

iii) Quais os quadriláteros que são quadrados?

Somente aqueles que possue todas as características acima.

Parte 3

Objetivo das atividades 3, 4, 5 e 6: Reconhecimento das propriedades de alguns quadriláteros notáveis a partir do software Cabri, trabalhando no nível G1 e G2 de Parsysz.

Atividade 3: Pede-se:

Construa um trapézio qualquer a partir de um triângulo qualquer.

Procedimento: desenhar um triângulo, uma reta paralela a um dos lados, um ponto sobre a reta, desenhar outro triângulo com um vértice neste ponto sobre a reta, um vértice sobre o ponto de intersecção da reta e o primeiro triângulo e um vértice em outro vértice do primeiro triângulo, de forma que os dois triângulos formem um quadrilátero e uma de suas diagonais. Desenhar segmentos de reta sobre os quatro lados da figura. Esconder a reta e os dois triângulos, medir os ângulos do quadrilátero. Perguntar se os lados opostos são paralelos.

Responda:

a) Quando dois lados são paralelos e os outros dois não são, os ângulos consecutivos ..não são....... dois a dois suplementares.

b) Quando os lados são paralelos dois a dois, ou seja, o trapézio pode ser chamado de ..paralelogramos...., os ângulos consecutivos ..são.... suplementares e os ângulos opostos ..sempre.. (nunca, as vezes ou sempre) são ..congruentes.

c) Em retas paralelas cortadas por uma reta transversal os ângulo colaterais internos são suplementares....

d) Com as informações acima prove que em paralelogramos os ângulos opostos são congruentes.

Atividade 4: Pede-se:

Construa um paralelogramo a partir de um triângulo retângulo. Siga as instruções da atividade 3. (não se esqueça que agora o triângulo é retângulo). Medir os lados. Responda:

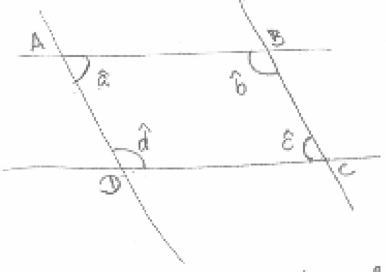
a) Quando um paralelogramo tem seus ângulos de 90°, ele pode ser chamado de

d) Em dois triângulos quando seus lados correspondente são congruentes. ou quando podemos afirmar que dois de seus lados correspondentes e o ângulo entre eles são congruentes os dois triângulos também são congruentes... (caso de congruência de triângulos - LAL)

e) Com as informações acima prove que em retângulos as diagonais são sempre congruentes.

Atividade 5: Pode-se:

(3) (d)



$\hat{a}+\hat{d}=180°$ e $\hat{c}+\hat{d}=180°$, então

$\hat{a}+\cancel{\hat{d}}=\hat{c}+\cancel{\hat{d}}$

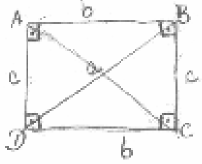
$\hat{a}=\hat{c}$

$\hat{a}+\hat{b}=180°$ e $\hat{a}+\hat{d}=180°$, então

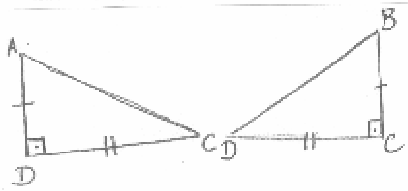
$\cancel{\hat{a}}+\hat{b}=\cancel{\hat{a}}+\hat{d}$

$\hat{b}=\hat{d}$

(4) (e)



$\overline{AC}\cong\overline{BD}$?



ANEXO 4

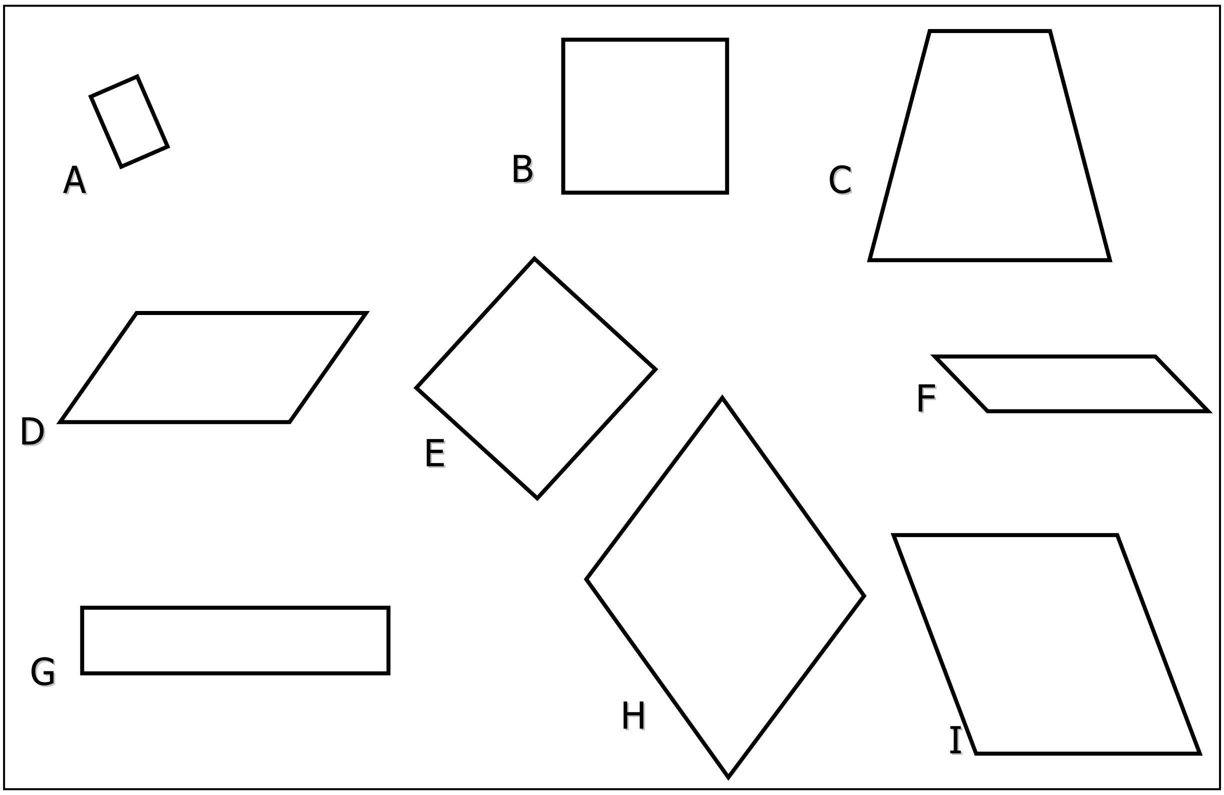
SEQÜÊNCIA DIDÁTICA ALTERADA PELO GRUPO

Parte 1

Objetivo da atividade 1: Classificar quadriláteros, a partir da identificação de semelhanças e diferenças, trabalhando no nível G1 de Parsysz.

Atividade 1:

a) Analise cada um dos quadriláteros abaixo e encontre semelhanças e diferenças entre eles. A seguir, separe-os formando grupos.



Semelhanças:
Diferença:

b) Construa tabela e escreva os grupos que você formou, colocando dentro de cada um as letras correspondentes às figuras. O número de grupos que você irá formar vai depender do critério que você utilizou.

c) Pinte de azul os lados dos quadriláteros que têm os quatro ângulos retos. Qual o nome desses quadriláteros?

d) Verifique quais dos polígonos têm os quatro lados de medidas iguais. Pinte o interior desses quadriláteros de vermelho. Qual o nome desses quadriláteros?

e) Escreva as letras dos quadriláteros que não foram pintados nenhuma vez?

f) Recorte as figuras e as disponha convenientemente no quadro abaixo. Discuta com seus colegas para encontrar a região adequada de cada quadrilátero.

	Retângulos	Não retângulos
Losangos		
Não losangos		

g) Responda e justifique as seguintes questões:

1ª) Todo retângulo é quadrilátero?

____

2ª) Todo quadrilátero é retângulo?

____

3ª) Há quadriláteros que não são retângulos?

____

4ª) Há quadriláteros que são ao mesmo tempo retângulos e losangos?

____

5ª) Há quadriláteros que não são retângulos e nem losangos?

____

6ª) Todo quadrado é losango?

____

7ª) Todo losango é quadrado?

____

h) De acordo com o que você entendeu, defina o que é:

1) um retângulo?

____

2) um quadrado?

____

3) um losango?

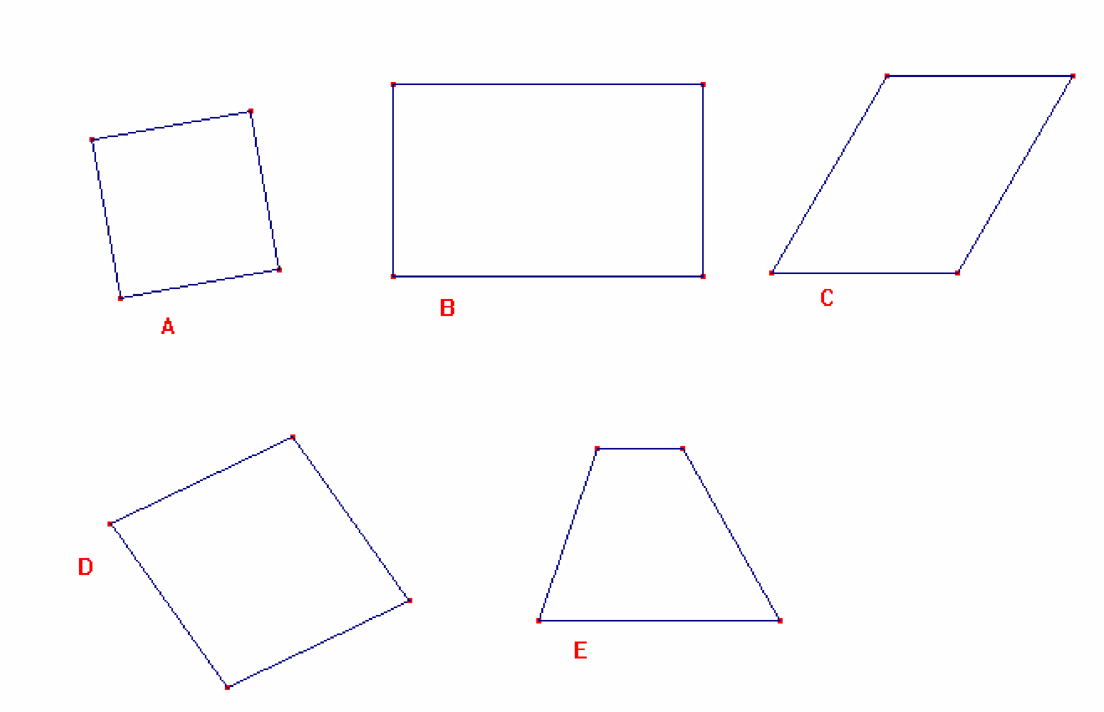
____

Parte 2

Objetivo da atividade 2: Reconhecimento das propriedades dos quadriláteros notáveis a partir do software Cabri, trabalhando no nível G1 de Parsysz.

Atividade 2.1: Usando o software Cabri-géomètre, para trabalhar com as propriedades dos quadriláteros.

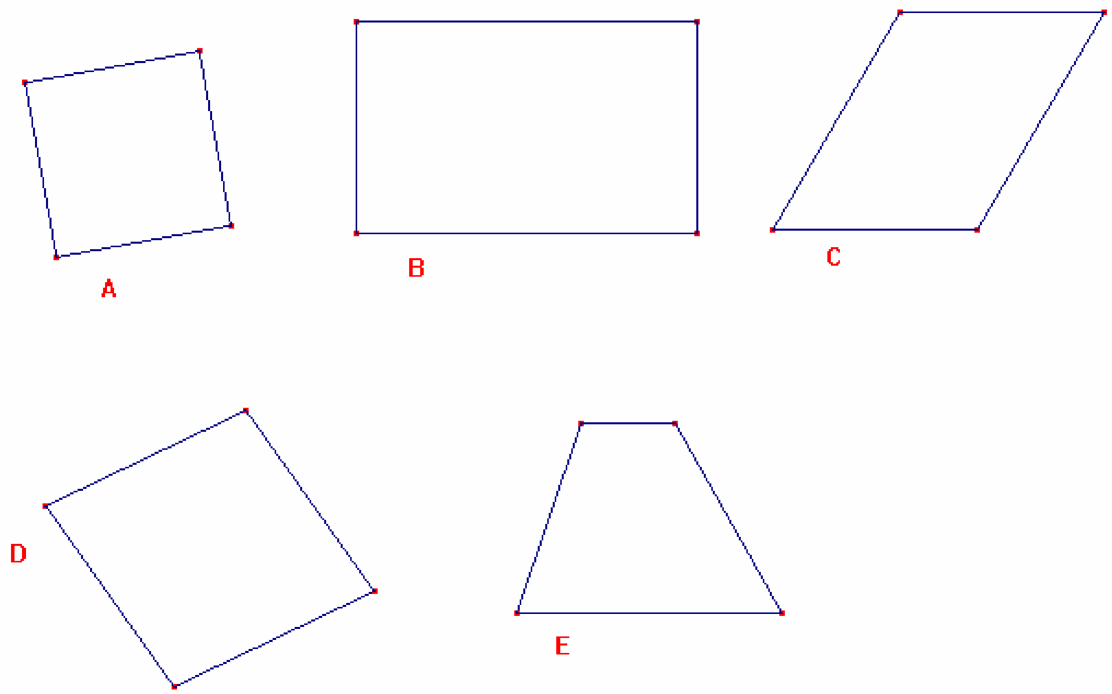
Atividade 2.1.1: Usando o Cabri, abra o arquivo ATIV2a e faça o que se pede em cada item abaixo.



a) Encontre as medidas dos lados de cada um dos quadriláteros.

b)(r)2a

Atividade 2.1.2: Abra o arquivo ATIV2b e faça o que se pede em cada item abaixo.



a) Trace as diagonais de cada um dos quadriláteros, determine suas medidas e dos ângulos formados por elas.

b) Quais figuras apresentam suas duas diagonais congruentes entre si?

c) Em quais figuras as diagonais são perpendiculares entre si?

d) Em quais figuras as diagonais se interceptam no ponto médio?

e) Em quais figuras uma diagonal divide a figura em dois triângulos congruentes?

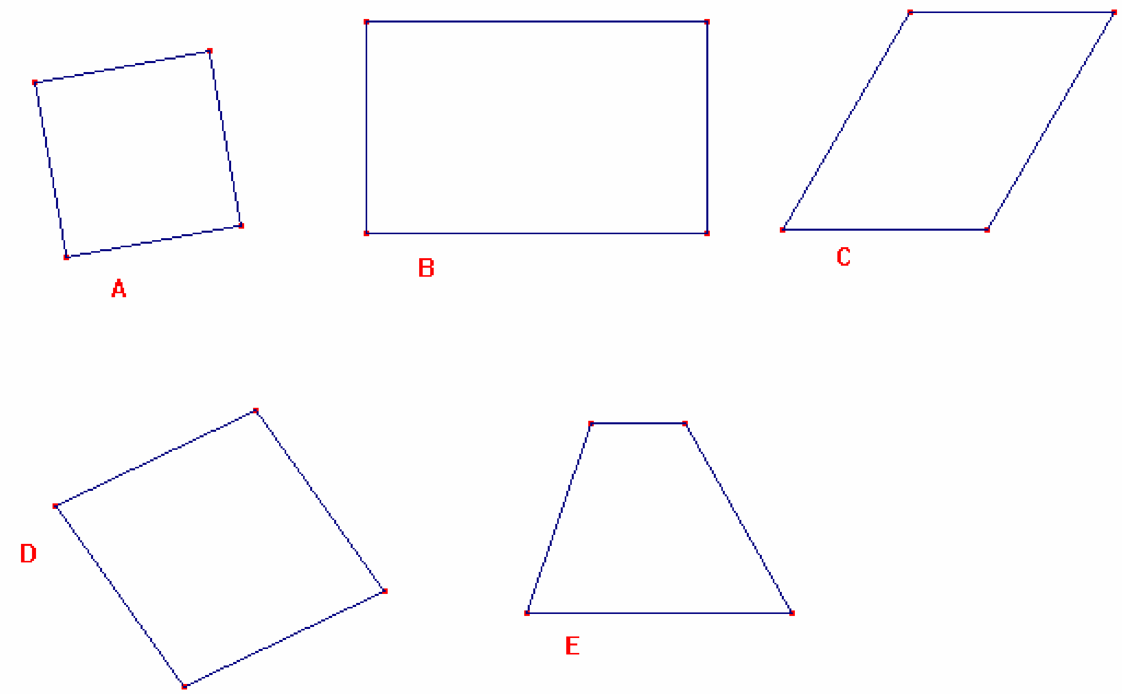
f) Em quais figuras as diagonais dividem a figura em dois pares de triângulos congruentes?

g) Observe o quadro fornecido. Para preenchê-lo você deverá recorrer às anotações feitas nos desenhos das Atividades 2.1.1 e 2.1.2.

- No lado esquerdo aparecem as condições necessárias dos quadriláteros.
- No lado direito você deve marcar um X no quadrilátero que possui tais condições.

	Quadriláteros				
Condições necessárias	quadrado	Retângulo	paralelogramo	losango	trapézio
4 lados congruentes					
Lados opostos congruentes					
Dois lados paralelos					
Dois pares de lados paralelos					
4 ângulos retos					
Ângulos opostos congruentes					
Soma dos 4 ângulos internos igual a 360º					
Dois ângulos consecutivos quaisquer suplementares					
Diagonais congruentes					
Diagonais se interceptam no ponto médio					
Diagonais perpendiculares entre si					
Uma diagonal divide em dois triângulos congruentes					
Duas diagonais dividem em dois pares de triângulos congruentes					

Atividade 2.2: **A**bra, novamente, o arquivo ativ.2.fig.



a) Movimente a figura B e responda: em que outro(s) quadrilátero(s) o retângulo pode ser transformado? O que você conclui?

b) Movimente a figura C e responda em que outro(s) quadrilátero(s) o paralelogramo pode ser transformado? O que você conclui?

c) Movimente a figura D e responda: em que outro(s) quadrilátero(s) o losango pode ser transformado? O que você conclui?

d) Movimente a figura E e responda: em que outro(s) quadrilátero(s) o trapézio pode ser transformado? O que você conclui?

e) De acordo com as anotações feitas na tabela da Atividade 2.1.2, item g, dê as características em relação aos lados e aos ângulos dos quadriláteros:

- o quadrado tem: ____

____

____

____

- o retângulo tem: ____

____

____

____

- o paralelogramo tem: ____

____

____

____

- o losango tem: ____

____

____

____

- o trapézio tem: ____

____

____

____

Atividade 2.3: Sistematizando as definições

a) Vamos observar as definições de cada um dos quadriláteros e relacionar com as conclusões tiradas nas Atividades 2.1 e 2.2.

"Um paralelogramo é um quadrilátero com ambos os pares de lados opostos paralelos."

De acordo com a definição acima, um paralelogramo possui as seguintes características:

i) é um quadrilátero, isto é, possui ___ lados.

ii) possui dois pares de _______ opostos.

iii) lados paralelos: colocando duas réguas sobre os lados opostos, você verificará que eles não se cruzam, mesmo que o tamanho da régua seja prolongado.

Com essa definição e de acordo com as conclusões tiradas, quais os quadriláteros que são paralelogramos, isto é, que possuem essas características?

____

"Um losango é um paralelogramo cujos lados são todos congruentes."

Pela definição, temos que um losango possui as seguintes características:

i) é um paralelogramo, isto é, possui todas as características citadas anteriormente: possui 4 lados e ambos os pares de lados opostos paralelos.

ii) todos os lados são _______________.

iii) Os quadriláteros que são losangos, pois possuem essas características são:

____

"Um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são todos retos."

Agora é sua vez. Pela definição temos que um retângulo possui as seguintes características:

i) é um paralelogramo, pois

____.

ii) todos os ângulos são retos, pois

____.

iii) Quais os quadriláteros que são retângulos?

____

"Um quadrado é um retângulo cujos lados são todos congruentes."

Por definição, um quadrado possui as seguintes características:

i) é um retângulo, pois:

____

____

____

ii) todos os lados são congruentes: ______________________________

iii) Quais os quadriláteros que são quadrados?

____

b) Relendo as definições e as conclusões que você tirou até aqui, responda às seguintes questões:

i) Todo quadrado é ao mesmo tempo retângulo e losango? Por quê?

____

ii) Todo losango é um retângulo?

____

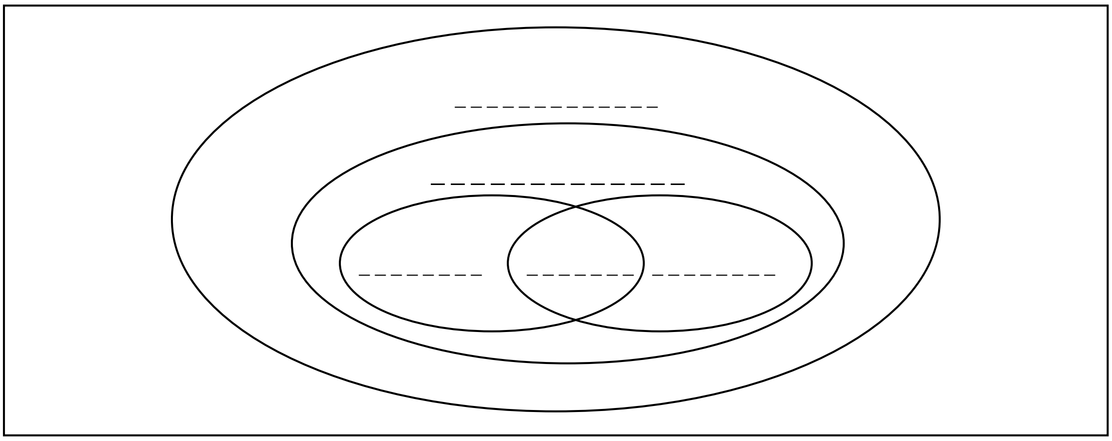
iii) Todo quadrado é um paralelogramo?

____

iv) Todo paralelogramo é um trapézio?

____

c) Analisando as definições dos quadriláteros, represente abaixo, por um diagrama de Venn, os conjuntos dos quadriláteros notáveis. Anote os nomes dos quadriláteros nas linhas reservadas no diagrama.



Parte 3

Objetivo das atividades 3, 4, 5 e 6: Reconhecimento das propriedades de alguns quadriláteros notáveis a partir do software Cabri, trabalhando no nível G1 e G2 de Parsysz.

Atividade 3: Pede-se:

Construa um trapézio qualquer a partir de um triângulo qualquer.

Procedimento:

d) Desenhar um triângulo qualquer.

e) Traçar uma reta paralela a um dos lados que passe pelo vértice oposto a ele.

f) Desenhar outro triângulo de modo que:

- um vértice ficará sobre a reta (em qualquer ponto);
- um vértice ficará no ponto de intersecção da reta com o primeiro triângulo;
- o terceiro vértice ficará no outro triângulo formando um quadrilátero com uma de suas diagonais.

d) Desenhar segmentos de reta sobre os lados do quadrilátero.

e) Esconder a reta e os dois triângulos.

f) Medir os ângulos do quadrilátero.

g) Perguntar se os lados opostos são paralelos.

Responda:

a) Quando dois lados são paralelos e os outros dois não são, os ângulos consecutivos .... dois a dois suplementares.

b) Quando os lados são paralelos dois a dois, ou seja, o trapézio pode ser chamado de ...., os ângulos consecutivos .... suplementares e os ângulos opostos .... (nunca, as vezes ou sempre) são ....

c) Em retas paralelas cortadas por uma reta transversal os ângulo colaterais internos são ....

d) Com as informações acima prove que em paralelogramos os ângulos opostos são congruentes.

O quadrilátero ABCD é um paralelogramo AB .... CD e AB .... CD, e ainda, AB é .... a CD e AB é .... a CD.

Então:

med(Â) + med($\hat{D}$) = ... e med(Ĉ) + med($\hat{D}$) = ... e

med(Â) + med($\hat{B}$) = ... e med(Â) + med($\hat{D}$) = ... (postulado das paralelas (retas .... cortadas por reta ....).

Resolvendo as igualdades, temos:

med(Â) + med($\hat{D}$) = med(Ĉ) + med($\hat{D}$) $\Rightarrow$ med(…..) = med(….)

med(Â) + med($\hat{B}$) = med(Â) + med($\hat{D}$) $\Rightarrow$ med(.....) = med(.....)

Assim, concluímos que os ângulos .... do paralelogramo são ....

Atividade 4: Pede-se:

Construa um paralelogramo a partir de um triângulo retângulo. Siga as instruções da atividade 3. (não se esqueça que agora o triângulo é retângulo). Medir os lados. Responda:

a) Quando um paralelogramo tem seus ângulos de 90°, ele pode ser chamado de ....
b) No retângulo suas diagonais .... (nunca, as vezes ou sempre) são congruentes.
c) Em retângulos lados opostos são .... e ....
d) Em dois triângulos quando seus lados correspondente são .... ou quando podemos afirmar que dois de seus lados correspondentes e o ângulo entre eles são congruentes os dois triângulos também são ....
e) Com as informações acima prove que em retângulos as diagonais são sempre congruentes.

Hipótese: O quadrilátero ABCD é retângulo.

Tese: AC é congruente a BD

Seja o quadrilátero ABCD um ...., então AB .... DC e AD ....BC; e a med($\hat{C}$) = med($\hat{D}$) = ... (ângulo reto) (pela definição de retângulo).

Se AC e BD são diagonais do retângulo .... Assim, podemos concluir que, pelo caso .... de semelhança de ....e: içqeie o

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo